حالت ج) $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$ $\qquad i=\sqrt{-1}$

$$x(t) = \underbrace{e^{-\frac{c}{2m}t}}_{\text{تابع نمایی}} \underbrace{\left(Ae^{i\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\,t} + Be^{-i\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\,t}\right)}_{\text{ثابت می‌شود که رابطه بالا تابع هارمونیک است.}}$$

به کمک این فرمول ها

$$\begin{cases} e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha \end{cases}$$

مجموع sin و cos یک تابع هارمونیک می باشد.

حالت ب) $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \frac{c^2}{4m^2} = \frac{k}{m} \Rightarrow$

$$c^2 = \frac{4m^{\cancel{2}}k}{\cancel{m}} = 4mk \Rightarrow \boxed{c = 2\sqrt{mk}}$$

ثابت میرایی بحرانی

$$\begin{cases} C_{cr} = 2\sqrt{mk} & \longrightarrow C_{cr} = 2\sqrt{m(m\omega_n^2)} \\ \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\omega_n^2 & \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_{cr} = 2\sqrt{m^2\omega_n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{cr} = 2m\omega_n}$$

(cr = critical بحرانی)

تعریف نسبت میرائی : $\overset{\text{زتا}}{\varphi} = \dfrac{c}{c_{cr}} \xrightarrow{c_{cr} = 2m\omega_n} \varphi = \dfrac{c}{2m\omega_n}$

$$\Rightarrow \frac{c}{2m} = \varphi \omega_n$$

پاسخ عمومی $x(t) = e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}\left(A e^{\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\,t} + B e^{-\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\,t}\right)$

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = (\varphi \omega_n)^2 \qquad \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n$$

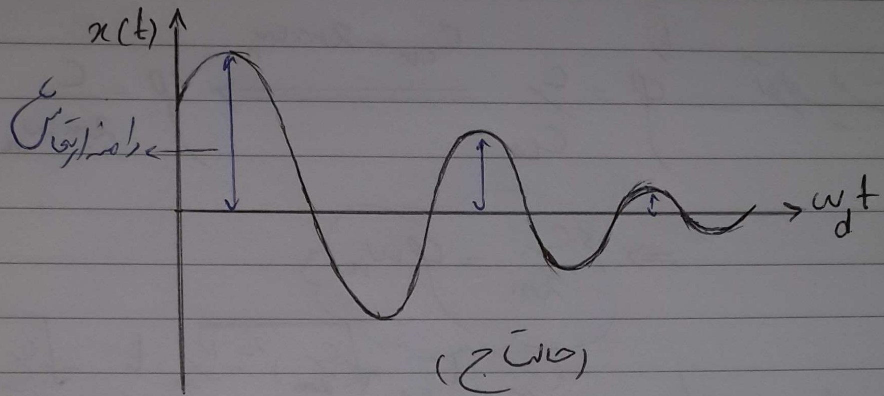
$$x(t) = e^{-\varphi \omega_n t}\left(A e^{\sqrt{\varphi^2 - 1}\,\omega_n t} + B e^{-\sqrt{\varphi^2 - 1}\,\omega_n t}\right)$$

الف) $\varphi > 1 \Rightarrow$ ریشه‌های معادله مشخصه حقیقی اند. (زیر رادیکال مثبت)

ب) $\varphi = 1 \Rightarrow$ ریشه‌های معادله مشخصه مضاعف اند. (زیر رادیکال صفر)

ج) $0 < \varphi < 1 \Rightarrow$ ریشه‌های معادله مشخصه موهومی اند. (زیر رادیکال منفی)

(حالت ج) $\rightarrow x(t) = \underbrace{e^{-\varphi \omega_n t}}_{\text{تابع نمایی}}\underbrace{\left(A e^{i\sqrt{1-\varphi^2}\,\omega_n t} + B e^{-i\sqrt{1-\varphi^2}\,\omega_n t}\right)}_{\text{تابع هارمونیک}}$



(حالت ج)

$$\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n=\omega_d$$

فرکانس طبیعی $\sqrt{\frac{k}{m}}$

فرکانس طبیعی میرایی

با در نظر گرفتن تغییر متغیر بالا داریم:

$$x(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\left(Ae^{i\omega_d t}+Be^{-i\omega_d t}\right)$$

(حالت ج ← مهم تر می باشد*)

$(c=0)$

اگر $\zeta=0$ باشد دیگر حالت میرایی نداریم. (سیستم جرم فنر به تنهایی)

ζ عامل میرایی می باشد ($\zeta=0$ یعنی بدون میرایی)

هرگاه $c=0$ باشد $\zeta=0$ خواهد بود.

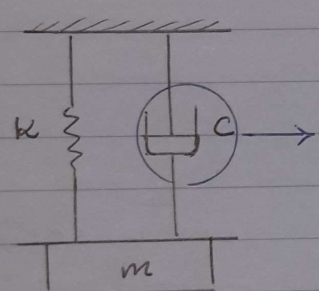
ارتباط دامنه‌های ارتعاش و اینکه بعد از چه مدتی (چند نوسان) ارتعاشات این مجموعه به صفر می رسد بررسی خواهد شد.

ریشه های معادله باید موهومی باشند تا حالت هارمونیک پیش آید.

مرور مطالب گذشته:

ارتعاش آزاد سیستم یک درجه آزادی میرا:

یک سیستم جرم ـ فنر را کشیده رها می‌کنیم تا مرتعش شود. این کشش وارده همان نیروی تحریک کننده می‌باشد که باعث می‌شود سیستم از حالت stable خودش خارج شود.



اگر c نباشد، $c=0$ خواهد بود و پاسخ یک پاسخ کاملاً هارمونیک خواهد بود.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

معادله دیفرانسیل حرکت

با حل این معادله به پاسخی خواهیم داشت که یک هارمونیک است.

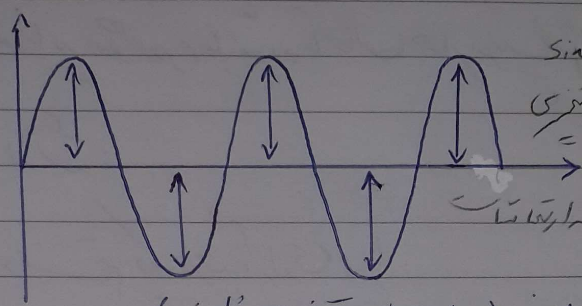
حل معادله دیفرانسیل $x(t) =$

- الف پاسخ غیر هارمونیک
- ب پاسخ غیر هارمونیک
- ج پاسخ هارمونیک (که دارای ریشه‌های موهومی است.)

پاسخ قسمت ج)

$$x(t) = \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t}}_{1}\underbrace{(Ae^{i\omega_d t} + Be^{-i\omega_d t})}_{2}$$

کاهش دامنه ارتعاشات ⇐ قسمت هارمونیک (2) × تابع نمایی (1)



(در تابع هارمونیک که به صورت sin و cos می‌باشد دامنه آن هیچ تغییری نمی‌کند ولی هنگامی که در یک تابع نمایی ضرب می‌شود دامنه ارتعاشات کاهش می‌یابد)

نمودار حرکت هارمونیک پاسخ (دامنه‌ها هیچ تغییری ندارند.)

t: زمان

فرکانس طبیعی $\omega_n = \sqrt{k/m}$

فرکانس طبیعی میرایی $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$

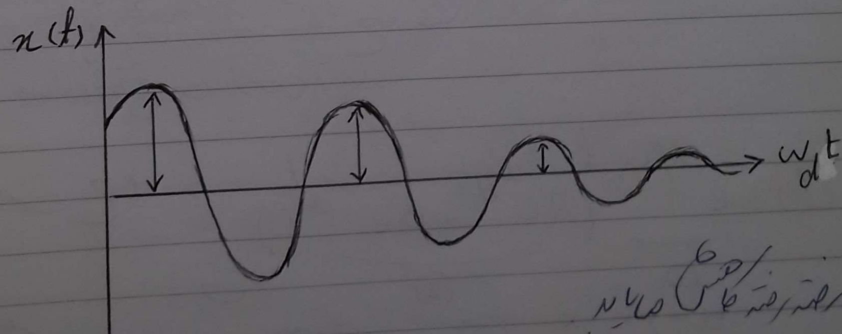
نسبت میرایی $\zeta = \dfrac{c}{c_{cr}}$

$i = \sqrt{-1}$ (i مقدار موهومی می‌باشد)

A و B ثابت اند و از شرایط اولیه مسئله بدست می‌آیند.

شرایط اولیه
$$\begin{cases} x(0) = x_0 & \text{جابجایی اولیه} \\ \dot{x}(0) = v_0 & \text{سرعت اولیه} \end{cases}$$

نمودار حرکت ج)



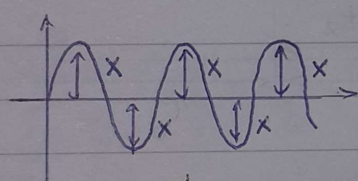
دامنه رفته رفته کاهش می‌یابد.

با گذشت زمان جسم به وضعیت stable خودش می‌رسد و نمودار صفر خواهد شد.

کاهش لگاریتمی

عبارت ② در معادله‌ی پاسخ جزء تابع کاملاً هارمونیک است که می‌توان آن را به صورت زیر نیز بیان نمود:

$$e^{-\zeta\omega_n t}\underbrace{\left(Ae^{i\omega_d t}+Be^{-i\omega_d t}\right)}$$



$$\tau=\frac{2\pi}{\omega_n}$$

$$Ae^{i\omega_d t}+Be^{-i\omega_d t}=\underline{X}\sin(\omega_d t+\underline{\varphi})$$

(A و B ثابت)

دامنه

(X و φ ثابت)

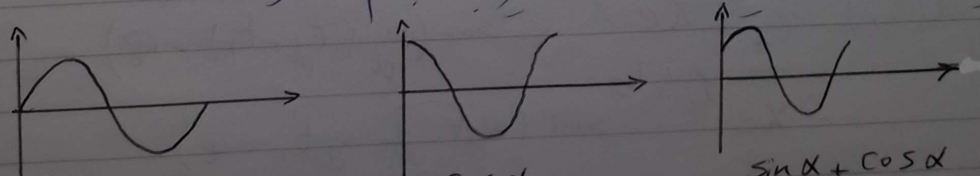
زاویه پاسخ (زاویه فاز)

$$\begin{cases} e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha \\ e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha \end{cases}$$

$$\rightarrow A'\cos\omega_d t+B'\sin\omega_d t$$

(A' و B' ثابت)

این مجموعه‌ها در اساس یکی اند و فقط در مقادیر ثابت با هم متفاوت اند.



$\sin\alpha$ — زاویه فاز صفر

$+$

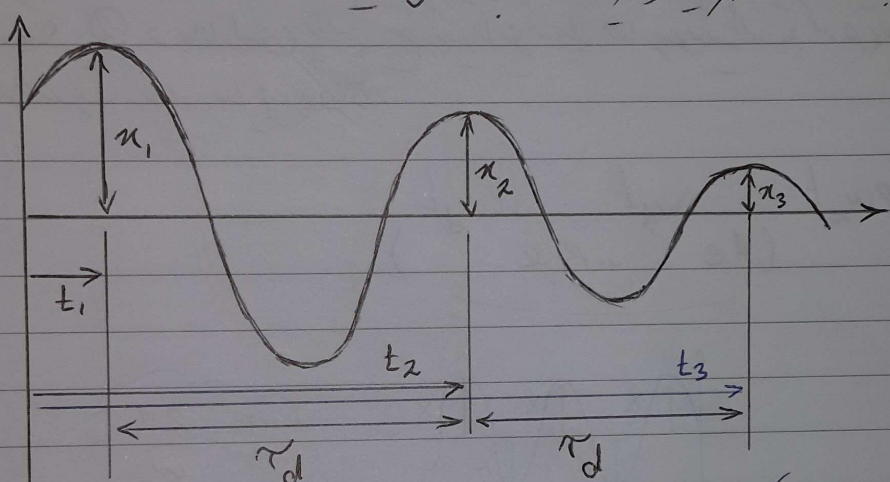
$\cos\alpha$ — زاویه فاز $\pi/2$

$\sin\alpha+\cos\alpha$ — زاویه فاز بین صفر و $\pi/2$

لذا خواهیم داشت (پاسخ ج) :

$$x(t) = Xe^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \varphi)$$

X و φ ثابت اند و از شرایط اولیه مسئله بدست می آیند.



اختلاف از t_1 تا t_2 یک دوره نوسان می باشد: τ_d

$$x(t_1) = x_1 = Xe^{-\zeta\omega_n t_1}\sin(\omega_d t_1 + \varphi)$$

$$x(t_2) = x_2 = Xe^{-\zeta\omega_n t_2}\sin(\omega_d t_2 + \varphi)$$

$t_2 - t_1 = \tau_d$ (دوره نوسان) $\Rightarrow$ τ_d ثابت می باشد.

$$t_2 = \tau_d + t_1 \qquad \tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$x(t_2) = x_2 = Xe^{-\zeta\omega_n t_2}\sin(\omega_d(\tau_d + t_1) + \varphi)$$

$$= Xe^{-\zeta\omega_n t_2}\sin(\omega_d \underbrace{\boxed{\tau_d}}_{2\pi/\omega_d} + \omega_d t_1 + \varphi)$$

بجای τ_d ، $2\pi/\omega_d$ قرار می‌دهیم ، ω_d حذف می‌شود و 2π هم تأثیری روی sin ندارد ω_d و آن را نیز حذف می‌کنیم.

$$x(t_2) = X e^{-\varphi \omega_n t_2} \sin(\omega_d t_1 + \varphi)$$

می‌خواهیم نسبت دو دامنه را بدست آوریم:

x_1 : دامنه در زمان t_1 و x_2 دامنه در زمان t_2 (که به اندازه یک τ_d باهم اختلاف دارند.)

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\varphi \omega_n t_1}}{e^{-\varphi \omega_n t_2}} = e^{-\varphi \omega_n \underbrace{(t_1 - t_2)}_{-\tau_d}} = e^{\varphi \omega_n \tau_d}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = e^{\varphi \omega_n \tau_d}$$

از طرفین ln می‌گیریم:

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln e^{\varphi \omega_n \tau_d} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\ln \frac{x_1}{x_2}}_{\delta} = \varphi \omega_n \tau_d \Rightarrow \delta = \varphi \omega_n \tau_d$$

کاهش لگاریتمی

(ارتباط بین دو دامنه را نشان می‌دهد.)

$$\delta = \varphi \omega_n \tau_d \Rightarrow \delta = \varphi \omega_n \frac{2\pi}{\omega_d} \Rightarrow$$

$$\delta = \varphi \cancel{\omega_n} \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varphi^2}\,\cancel{\omega_n}} \Rightarrow \delta = \frac{2\pi \varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}}$$

$\varphi = 0$ یعنی میرایی نداریم، اگر $\varphi = 0$ قرار دهیم $\delta = 0$ خواهد شد یعنی کاهش دامنه نخواهیم داشت

و همچنین داریم:

$$\begin{cases} \ln \dfrac{x_2}{x_3} = \varphi \omega_n \tau_d \\ \ln \dfrac{x_3}{x_4} = \varphi \omega_n \tau_d \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

ثابت کنید:

$$\boxed{\delta = \frac{1}{m} \ln \frac{x_1}{x_{m+1}}}$$

(ارتباط دامنه‌ی یکم با دامنه‌ی m+1 ام)

یعنی دامنه‌ی m ام

به کمک:

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \frac{x_3}{x_4} \cdots \frac{x_m}{x_{m+1}}$$

(که هر کدام از این‌ها برابر $\varphi \omega_n \tau_d$ می‌باشند.)

(یکدیگر می‌باشند که باید یک بگیریم.)

از قبل ثابت کردیم:

$$\begin{cases} \delta = \ln \dfrac{x_1}{x_2} = \varphi \omega_n \tau_d \\ x_1 / x_2 = e^{\varphi \omega_n \tau_d} \end{cases}$$

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = \underbrace{\frac{x_1}{x_2}}_{e^{\varphi\omega_n\tau_d}} \cdot \underbrace{\frac{x_2}{x_3}}_{e^{\varphi\omega_n\tau_d}} \cdot \underbrace{\frac{x_3}{x_4}}_{e^{\varphi\omega_n\tau_d}} \cdots \underbrace{\frac{x_m}{x_{m+1}}}_{e^{\varphi\omega_n\tau_d}} = e^{m\varphi\omega_n\tau_d}$$

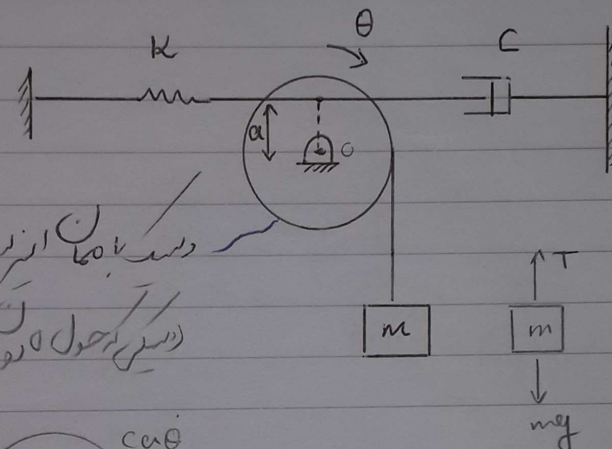
(دامنه‌ها متقارن است)

از طرفین ln می‌گیریم:

$$\ln \frac{x_1}{x_{m+1}} = \ln e^{m\varphi\omega_n\tau_d} \Rightarrow \ln \frac{x_1}{x_{m+1}} = m\varphi\omega_n\tau_d \Rightarrow \frac{1}{m} \ln \frac{x_1}{x_{m+1}} = \varphi\omega_n\tau_d$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{m} \ln \frac{x_1}{x_{m+1}} = \delta} \rightarrow$$ (کاهش لگاریتمی)

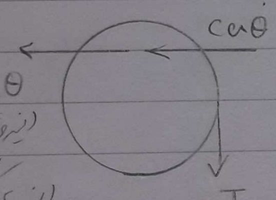
تمرین) فرکانس طبیعی، فرکانس طبیعی میرا و ثابت میرایی بحرانی را برای سیستم شکل مقابل بدست آورید؟



دیسک با ممان اینرسی I_0

(دیسک حول O دوران می کند.)

(حرکت m خطی است)



(نیروی فنر)

(نیروی عکس العمل چرخشی)

(کشش طناب)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

(می توان معادله حرکت را بدست آورد)

$$\sum M_0 = I_0 \ddot{\theta} \quad (\alpha)$$

(وقتی دیسک به اندازه ی θ دوران می کند فنر به اندازه ی $a\theta$ کشیده می شود.)

(نیروهای در خلاف جهت دوران ظاهر می شوند)

(از طرفی نیروی میرایی داریم که به واسطه c بوجود آمده است)

(مقدار کشیدگی فنر)

- $K(a\theta)$ نیروی فنر
- $a\theta$ → ثابت است
- θ : متغیر دوران
- $ca\dot{\theta}$: نیروی میرایی $(c\dot{x})$ $(x = a\theta)$

PAN

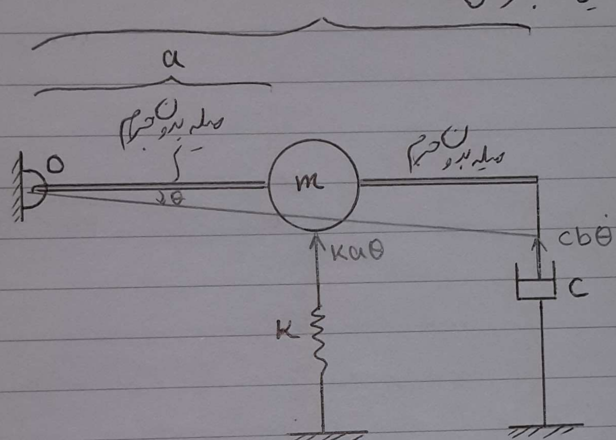
سوال: برای شکل نشان داده شده مطلوب است:

الف) معادله دیفرانسیل حرکت

ب) فرکانس طبیعی (ω_n)

ج) فرکانس طبیعی میرا (ω_d)

د) ثابت میرایی بحرانی (c_{cr})



(برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل حرکت دو روش داریم ← مستقیم و روش انرژی. این مسئله را به روش مستقیم حل می‌کنیم.)

(میله به اندازه‌ی θ حول نقطه O دوران می‌کند، نیروهایی که به مجموعه وارد می‌شود: $ka\theta$ (که $a\theta$ مقدار کشیدگی یا فشردگی فنر می‌باشد) و نیروی میرایی که با سرعت مشخص می‌شود $c b\dot{\theta}$)

$\sum M_O = I_O \alpha$ قانون دوم نیوتن

(گشتاور حول نقطه O)

(نیروی وزن (mg) عملاً تاثیری ندارد)

(چون خلاف جهت است.)

$$-\underbrace{(ka\theta)}_{\text{(نیروی فنر)}}\underbrace{a}_{\text{(بازو)}} - (cb\dot{\theta})b = (mb^2)\ddot{\theta}$$

(ممان اینرسی = فاصله به توان 2 × m جرم m)

$$\Rightarrow mb^2\ddot{\theta} + cb^2\dot{\theta} + ka^2\theta = 0$$

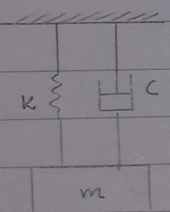
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{k}{m}\frac{a^2}{b^2}\theta = 0$$ (الف)

معادله دیفرانسیل حرکت

(ب) $$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{a^2}{b^2}}$$ (جذر ضریب θ می‌شود فرکانس طبیعی)

$$\Rightarrow \omega_n = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

قبلاً داشتیم: (برای سیستم کلاسیک)



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$ (معادله دیفرانسیل حرکت)

(فرکانس طبیعی) $$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ → (ضریب x می‌باشد)

(فرکانس میرا) $$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \sqrt{1-\varphi^2}\,\omega_n$$

$$\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{c^2}{4m^2} \Rightarrow c = c_{cr} = \sqrt{\frac{4m^2k}{m}} = 2\sqrt{mk}$$

(حالت که مقدار c در این حالت c_{cr} می‌باشد)

(ج) $$\omega_d = \sqrt{\frac{ka^2}{mb^2} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$ (با مقایسه با آنچه قبلاً داشتیم فرکانس میرا را بدست آوردیم)

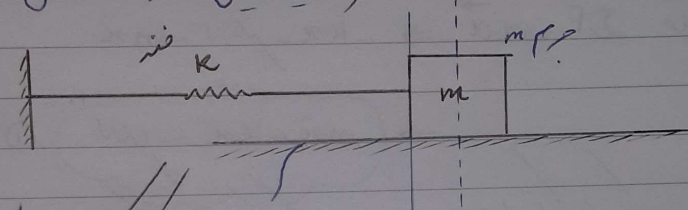
(د) $$\frac{ka^2}{mb^2} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{ka^2}{mb^2} = \frac{c^2}{4m^2} \Rightarrow$$

$$c = c_{cr} = \sqrt{\frac{4m^2ka^2}{mb^2}} = \frac{2a}{b}\sqrt{mk}$$

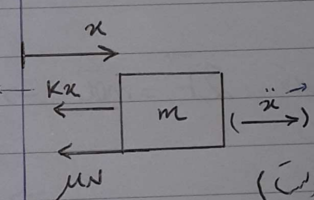
سیستم جرم-فنر همراه با میرایی خشک :

ارتعاش آزاد سیستم جرم فنر همراه با میرایی خشک :

حالت آزاد فنر (یعنی وضعیتی که فنر نه تحت کشش است و نه تحت فشار)



μ: ضریب اصطکاک (جرم با سطح) (روی سطح)

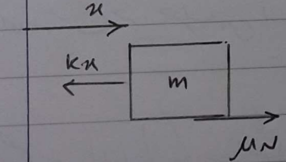


(نیروی فنر) ← Kx

(شتاب حرکت) ← $\ddot{x}$

(حرکت جرم m به سمت راست)

(N: نیروی عمودی سطح)



(حرکت جرم m به سمت چپ)

(μN: نیروی اصطکاک که مخالف جهت حرکت ما باشد)

هدف: بررسی ارتعاش آزاد سیستم جرم-فنر همراه با میرایی خشک

سیستم جرم فنر را در نظر می‌گیریم، m را به اندازه‌ی x کشیده و رها می‌کنیم (الحرکت اولیه) جرم m روی سطح حرکت رفت و برگشت انجام می‌دهد و در هر سیکلی که طی می‌کند مقداری از دامنه‌ی آن کم می‌شود و در نهایت پس از مدتی متوقف خواهد شد. می‌خواهیم این روند را بررسی کنیم.

سیستم یک درجه آزادی ← m در یک جهت حرکت می‌کند.

در هر دو حالت بالا فنر به اندازه‌ی x کشیده می‌شود. x جابه‌جایی اولیه می‌باشد.

اولین کار بدست آوردن معادله‌ی دیفرانسیل حرکت می‌باشد.

قانون دوم نیوتن برای حالت اول
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -kx - \mu N = m\ddot{x}$$
$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = -\mu N \quad (1)$$

معادله دیفرانسیل حرکت (وقتی که جرم m به سمت راست حرکت می‌کند.)

قانون دوم نیوتن برای حالت دوم
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -kx + \mu N = m\ddot{x}$$
$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = \mu N \quad (2)$$

معادله دیفرانسیل حرکت (وقتی که جرم m به سمت چپ حرکت می‌کند.)

(با پاسخ معادله دیفرانسیل حرکت موقعیت جرم m را از نظر مکانی نشان می‌دهد.)

فرکانس طبیعی همان $\sqrt{\frac{k}{m}}$ می‌باشد.

در این جا c نداریم چون میرایی خشک می‌باشد و $c=0$ است.

حل معادله دیفرانسیل (1): معادله دیفرانسیل ناهمگن مرتبه دوم
- پاسخ عمومی
- پاسخ خصوصی

$$① \rightarrow x(t) = \underbrace{x_h(t)}_{\text{عمومی}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{خصوصی}}$$

$$x(t) = \underbrace{A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t}_{\text{عمومی}} + x_p(t)$$

با مساوی قرار دادن معادله با صفر پاسخ عمومی بدست می آید. $(m\ddot{x} + kx = 0)$

$$\underset{\text{ثابت}}{x_p(t) = C} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_p(t) = 0 \\ \ddot{x}_p(t) = 0 \end{cases}$$

با قرار دادن این دو رابطه در معادله دیفرانسیل حرکت مقدار ثابت C بدست می آید.

$$m(0) + kC = -\mu N \Rightarrow C = -\frac{\mu N}{k}$$

$$x(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t - \frac{\mu N}{k}$$

پاسخ معادله دیفرانسیل ①

A و B ثابت اند.

پاسخ معادله دیفرانسیل ②:

$$② \rightarrow x(t) = A'\cos\omega_n t + B'\sin\omega_n t + \frac{\mu N}{k}$$

A' و B' ثابت اند.

مقادیر ثابت از شرایط اولیه مسئله بدست می آیند.

$$\text{شرایط اولیه مسئله}\begin{cases} x(0) = x_0 & \text{جابجایی اولیه} \\ \dot{x}(0) = V_0 = 0 & \text{سرعت اولیه} \end{cases}$$

(در این جا عملاً سرعت اولیه صفر است.)

جرم m را به اندازه‌ی x می کشیم و رها می کنیم، رها کردن جرم m باعث می شود به سمت جهت حرکت کند و معادله‌ی مورد استفاده معادله ② و پاسخ آن خواهد بود، با قرار دادن شرایط اولیه مسئله A' و B' را محاسبه می کنیم. (هنگام رها کردن سرعت اولیه نداریم $V_0 = 0$). پس حذف شده می شود، مقدار فنر کشی آن را محاسبه می کنیم و در معادله اول قرار داده و A و B را بدست می آوریم.

با قرار دادن شرایط اولیه در پاسخ معادله ② داریم.

$$② \xrightarrow[\dot{x}(0)=0]{x(0)=x_0} \begin{cases} x(0) = A' + \frac{\mu N}{k} = x_0 \Rightarrow A' = x_0 - \frac{\mu N}{k} \\ \dot{x}(t) = -A'\omega_n \sin\omega_n t + B'\omega_n \cos\omega_n t \\ \dot{x}(0) = B'\omega_n = 0 \Rightarrow B' = 0 \end{cases}$$

$$② \rightarrow \boxed{x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\cos\omega_n t + \frac{\mu N}{k}}$$

این معادله با اعمال شرایط مرزی بدست آمده است.

نیم سیکل چپ و نیم سیکل راست یک سیکل کامل را نشان می دهند.

زمان لازم برای یک نوسان کامل را با τ نمایش می دهند. (نصف این دوره می شود نیم سیکل رفت)

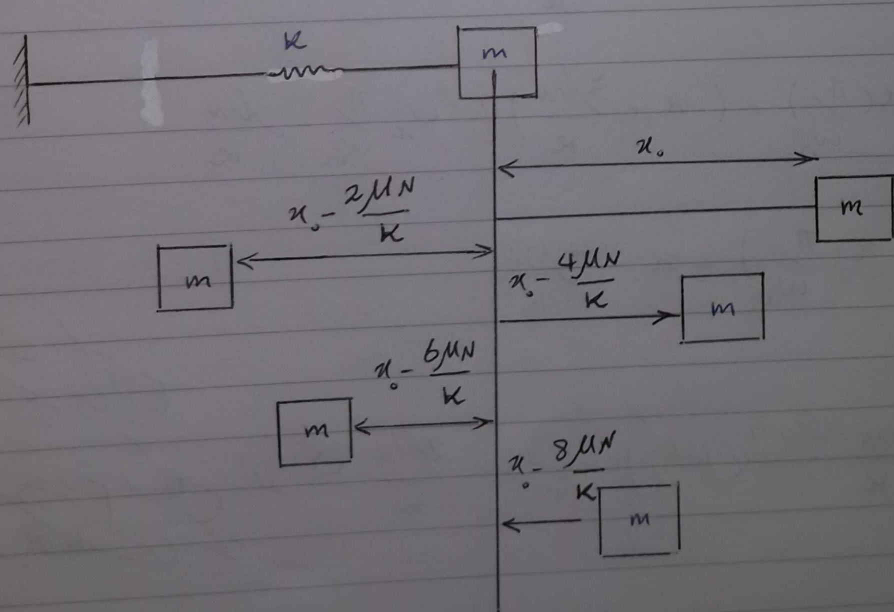
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n}$$ دوره نوسان

حرکت تا جایی ادامه داده می شود که سرعت اولیه به صفر برسد، نصف مقدار τ را به جای t قرار می دهیم تا مقدار جابجایی جدید بدست آید.

$$x\left(\pi/\omega_n\right) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\cos \omega_n \pi/\omega_n + \frac{\mu N}{k} = \ominus\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right)$$

(به دلیل منفی بودن می باشد)

(به جای t در پاسخ معادله ① قرار می دهیم)



شرایط اولیه (شروع معادله‌ی حرکت بعدی)

$$\begin{cases} x_\circ = -(x_\circ - \frac{2\mu N}{k} \\ \dot{x}(0) \neq 0 \end{cases}$$

$$① \rightarrow \begin{cases} x(0) = A - \frac{\mu N}{k} = -x_\circ + \frac{2\mu N}{k} \Rightarrow A = -x_\circ + \frac{3\mu N}{k} \\ \dot{x}(t) = -A\omega_n \sin\omega_n t + B\omega_n \cos\omega_n t \\ \dot{x}(0) = B\omega_n = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

$$① \rightarrow x(t) = (-x_\circ + \frac{3\mu N}{k})\cos\omega_n t + \frac{\mu N}{k}$$

معادله ① با اعمال شرایط مرزی (اولیه)

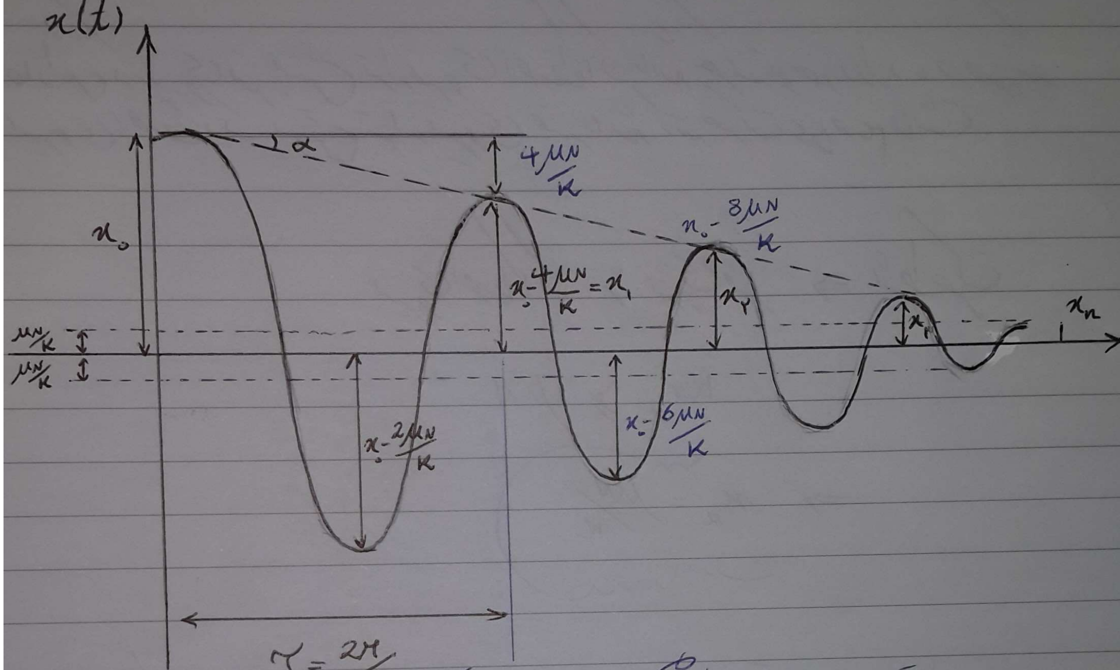
می‌خواهیم ببینیم سیستم کجا می‌رود، به جای t ، $\frac{\pi}{\omega_n}$ قرار می‌دهیم.

$$\rightarrow x(\pi/\omega_n) = (-x_\circ + \frac{3\mu N}{k})\cos\omega_n \frac{\pi}{\omega_n} - \frac{\mu N}{k}$$

$$\Rightarrow x(\pi/\omega_n) = x_\circ - \frac{4\mu N}{k}$$

نتیجه می‌گیریم که:

در هر نیم سیکل به اندازه‌ی $\frac{2\mu N}{k}$ و در هر سیکل کامل به اندازه‌ی $\frac{4\mu N}{k}$ از به کاسته می‌شود.



$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n}$

یک دوره نوسان

نمودار بالا موقعیت جرم m را نشان می دهد

ارتباط دامنه ها کاملا خطی می باشد.

منحنی این نمودار هیچ گاه به صفر نخواهد رسید.

$$tg\alpha = \frac{4\mu N / k}{2\pi / \omega_n} = \frac{2\mu N \omega_n}{k\pi}$$

در نمودارهایی که قبلا داشتیم به علت وجود تابع نمایی در معادلات جواب به صفر می رسید و دامنه ها به صورت منحنی ای هم متصل می شوند.

حال اگر نیروی فنر بیش تر از نیروی اصطکاک باشد حرکت وجود دارد، در صورتیکه نیروی اصطکاک بیش تر از نیروی فنر باشد دیگر حرکت نخواهیم داشت.

نیروی اصطکاک $<$ نیروی فنر $\Rightarrow$ شرط حرکت

$$kx_n \geqslant \mu N$$

$$\Rightarrow x_n = \mu N / k$$

یعنی هیچگاه به صفر نخواهد رسید و روی $x_n = \mu N / k$ متوقف خواهد شد.

ارتعاش کاملاً آزاد می باشد.

- در بخش قبل ارتباط دامنه‌ها خطی نبود ولی در این جا ارتباط دامنه‌ها خطی می باشد.

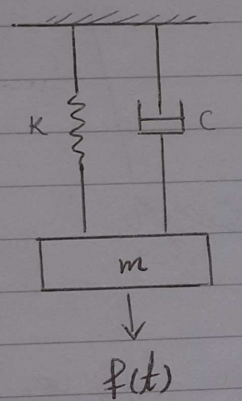
- در بخش قبلی ارتعاشات به صفر می رسید اما در این جا روی دامنه $\mu N / k$ متوقف می شود و دیگر حرکت نکرده و به صفر نمی رسد.

در صورتیکه سطح شیب دار داشته باشیم مقدار N تغییر خواهد کرد $(N \times \cos\alpha)$ و در این جا $N = mg$ می باشد.

ارتعاشات اجباری سیستم جرم - فنر (به سیستم یک نیروی اضافه می‌کنیم) را در ادامه بررسی خواهیم کرد.

ارتعاش اجباری سیستم میرا (سیستم جرم ـ فنر همراه با میراگر لزجی)

چون همیشه همراه سیستم یک نیرو است که به صورت $f(t)$ نمایش می‌دهیم، در صورت عدم وجود $f(t)$ ارتعاش آزاد خواهد بود.



$f(t)$ حالت‌های مختلفی می‌توانند داشته باشند:

$f(t)$:
- تابع هارمونیک $F(t) = F_0 \sin \omega t$
- تابع متناوب (پریودیک) ⟸ سری فوریه به یک سری هارمونیک (ریاضیات مهندسی)
- تابع کلی

درخواهیم سیستم وضعیت ارتعاش جرم m چگونه است، با توجه به اینکه $f(t)$ یک تابع هارمونیک است می‌خواهیم یک پاسخ برای آن بیابیم.

معادله دیفرانسیل حرکت:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

پاسخ:

$$x(t) = \underbrace{x_h(t)}_{\text{عمومی}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{خصوصی}}$$

(پاسخ گذرا) (پاسخ دائمی)

الف ـ ب ـ ج

معادله دیفرانسیل حرکت یک معادله دیفرانسیل غیرهمگن درجه ۲ می باشد.
(چون طرف دوم آن صفر نیست.)

دو جواب داریم: پاسخ عمومی (گذرا): که طی یک مدت زمان دامنه پاسخ به صفر یا صفر می رسد. که سه حالت ممکن است برای آن اتفاق بیفتد (حالات الف و ب و ج که قبلاً در مورد آن صحبت کردیم.)

پاسخ خصوصی (دائمی): همیشه باقی می ماند چون نیرو $F(t)$ همیشه همراه سیستم است.

هنگامی که نیروها هارمونیک است در نتیجه پاسخ هم هارمونیک فرض می شود. (پاسخ خصوصی هارمونیک فرض می شود چون $F(t)$ ها هارمونیک می باشند)

$$x_p(t) = \underbrace{X}_{\text{دامنه پاسخ خصوصی}} \sin(\omega t - \underbrace{\varphi}_{\text{زاویه ی پاسخ}})$$

روند بدست آوردن X و φ :

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = \omega X \cos(\omega t - \varphi) \\ \ddot{x}_p(t) = -X\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

$$-mX\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + c\omega X \cos(\omega t - \varphi) + kX \sin(\omega t - \varphi) = F_0 \sin \omega t$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

$$(\cos(\alpha - y) = \cos\alpha \cos y + \sin\alpha \sin y)$$

طبق روابط مثلثاتی داریم:

$$\Rightarrow -mX\omega^2 \sin\omega t\cos\varphi + mX\omega^2\cos\omega t\sin\varphi + c\omega X\cos\omega t\cos\varphi + c\omega X\sin\omega t\sin\varphi + kX\sin\omega t\cos\varphi - kX\cos\omega t\sin\varphi = F_0\sin\omega t$$

از $\sin\omega t$ و $\cos\omega t$ فاکتور می گیریم:

$$\Rightarrow (-mX\omega^2\cos\varphi + c\omega X\sin\varphi + kX\cos\varphi)\sin\omega t + (mX\omega^2\sin\varphi + c\omega X\cos\varphi - kX\sin\varphi)\cos\omega t = F_0\sin\omega t$$

$$\begin{cases} -mX\omega^2\cos\varphi + c\omega X\sin\varphi + kX\cos\varphi = F_0 \\ mX\omega^2\sin\varphi + c\omega X\cos\varphi - kX\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

در معادله بالا از $\cos\varphi$ و در معادله پائین از $\sin\varphi$ فاکتور می گیریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} (kX - mX\omega^2)\cos\varphi + c\omega X\sin\varphi = F_0 \\ -(kX - mX\omega^2)\sin\varphi + c\omega X\cos\varphi = 0 \quad * \end{cases}$$

طرفین را به توان 2 می رسانیم و آن ها را باهم جمع می کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[(kX - mX\omega^2)\cos\varphi + c\omega X\sin\varphi\right]^2 = [F_0]^2 \\ \left[-(kX - mX\omega^2)\sin\varphi + c\omega X\cos\varphi\right]^2 = 0 \end{cases} +$$

(جمله اول)^2 + (جمله دوم)^2 + (2× اول × دوم) !

$$(kX - mX\omega^2)^2 + (c\omega X)^2 = F_0^2$$

$$\Rightarrow X^2\left[(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2\right]=F_0^2$$

$$\Rightarrow X=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}$$

دامنه پاسخ خصوصی

از رابطه * $tg\,\varphi=\frac{\sin}{\cos}$ را محاسبه می کنیم

$$\rightarrow tg\,\varphi=\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\Rightarrow \varphi=tg^{-1}\left(\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right)$$

زاویه فاز پاسخ

با قرار دادن X و φ در $x_p(t)=X\sin(\omega t-\varphi)$ پاسخ خصوصی بدست می آید.

بی بعد سازی دامنه و فاز پاسخ:

روند بی بعد سازی دامنه:

$$X=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}=\frac{F_0}{k\sqrt{(1-\frac{m\omega^2}{k})+(\frac{c\omega}{k})^2}}$$

(از k فاکتور می گیریم.)

دامنه پاسخ

$$\Rightarrow \frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\varphi r)^2}}$$

دامنه بزرگنمایی

مقدار دامنه

$\dfrac{\text{دامنه}}{\text{دامنه}}$ ← بدون بعد

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \Rightarrow \omega_n^2 = k/m$$

$$\begin{cases} \dfrac{m\omega^2}{k} = \omega^2/\omega_n^2 = r^2 \\ \omega/\omega_n = r \end{cases}$$

$$\begin{cases} c\omega/k = \dfrac{C_{cr}\varphi\omega}{k} = \dfrac{2m\omega_n\varphi\omega}{k} = \dfrac{2m\omega_n\varphi\omega}{m\omega_n^2} = 2\varphi r \\ c/C_{cr} = \varphi \\ C_{cr} = 2m\omega_n \end{cases}$$

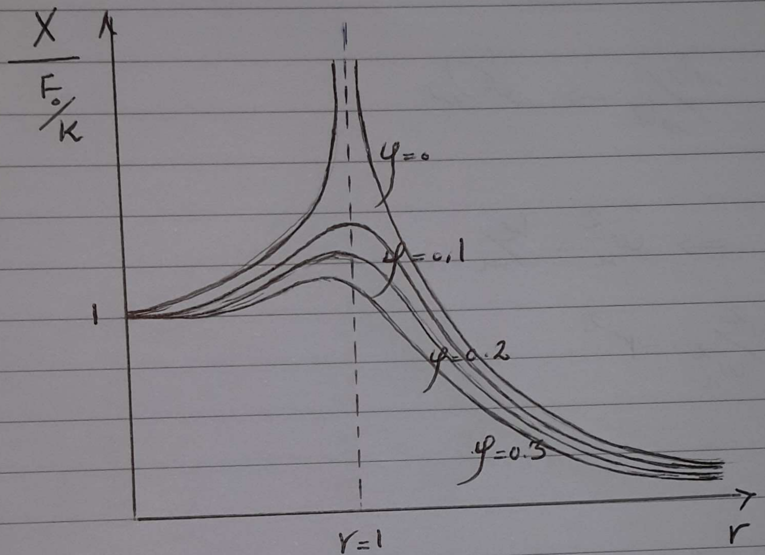
ω_n : فرکانس طبیعی

ω : فرکانس تحریک

$\Rightarrow$ if $\omega = \omega_n$ یا $\omega/\omega_n = 1$ یا $r = 1$ $\Rightarrow$ حالت تشدید رخ می‌دهد.

نمودار معادله‌ی بی بعد سازی دامنه:

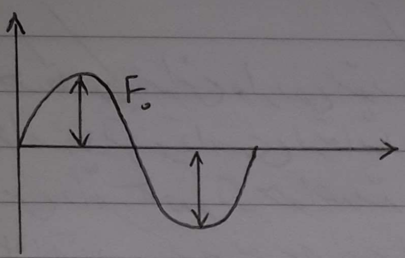
φ بین صفر تا یک تغییر می‌کند. $(0<\varphi<1)$



این نمودار وضعیت دامنه‌ی پاسخ حضوری را نمایش می‌دهد.

(حالت بدون میرائی)

$$
\begin{cases}
\text{if } \varphi=0 \Rightarrow \dfrac{X}{F_0/K} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2}} \qquad y = \dfrac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2}} \\[2ex]
\text{if } \varphi=0.1 \Rightarrow \dfrac{X}{F_0/K} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2(0.1)r)^2}} \\[2ex]
\text{if } \varphi=0.2 \\[1ex]
\text{if } \varphi=0.3 \\
\vdots \qquad \vdots
\end{cases}
$$



F_0 ← دامنه ی نیروی هارمونیک است.
K ← ثابت فنر
X ← دامنه پاسخ خصوصی.

F_0، X و K مقادیر ثابتی اند.

$$\text{if } \varphi = 0 \Rightarrow \frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2}} \rightarrow$$

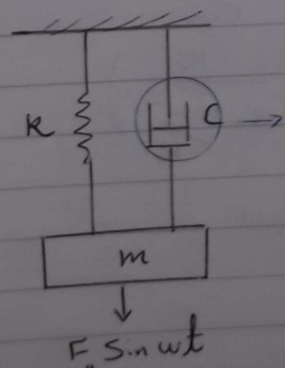
$$\text{if } r = 1 \Rightarrow \frac{X}{F_0/k} \uparrow \infty \Rightarrow X \uparrow \infty$$

دامنه پاسخ خصوصی

⇐ متلاشی شدن سیستم

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \varphi)$$

زمانیکه $\frac{X}{F_0/k}$ به سمت بی نهایت می رود یعنی X به سمت بی نهایت می رود چون F_0 و K ثابت اند، اگر دامنه ی پاسخ خصوصی (X) به سمت بی نهایت برود چیزی از سیستم باقی نمی ماند و متلاشی خواهد شد.



→ با اضافه کردن ثابت میرایی (φ) وارد می شود.

هنگامیکه میرایی وارد می‌شود دیگر X به سمت ∞ میل نمی‌کند و محدود می‌شود یعنی دامنه پاسخ و دامنه‌ی ارتعاشات محدود می‌شود و هرچه مقدار ζ افزایش یابد این دامنه محدودتر خواهد شد. (در $\zeta = 0.1$ نیز دامنه بالاست اما هرچه به مقدار ζ اضافه می‌کنیم یعنی میرایی را افزایش می‌دهیم دامنه ارتعاشات محدود و محدودتر می‌شوند.)

هرچقدر مقدار r زیادتر شود (یعنی مقدار ω خیلی بیشتر از ω_n شود) تقریباً نمودارها به یک سمت (یعنی به سمت صفر) میل می‌کند. سیستم ارتعاش دامنه‌اش کاهش پیدا می‌کند و دیگر میرایی هم تأثیری نخواهد داشت.

در $r=1$ اگر میرایی وجود نداشته باشد ($\zeta=0$) دامنه به سمت ∞ میل می‌کند و این یعنی متلاشی شدن سیستم. ولی اگر میرایی را اضافه کنیم تأثیر بسیار خوبی خواهد داشت روی دامنه ارتعاشات (حداقل روی $r=1$ (حالت تشدید، نقطه بحرانی)) اگر r خیلی بیشتر از یک باشد دیگر میرایی زیاد تأثیری ندارد، دامنه‌ی ارتعاشات کاهش می‌یابد و به سمت صفر میل می‌کند.

هوا یک میرا کننده ضعیف است.

با اعمال میرایی نقطه تشدید را کمتر کرده که حالت تشدید به سیستم زیاد ضربه‌ای وارد نکند

بی‌بعد سازی زاویه فاز:

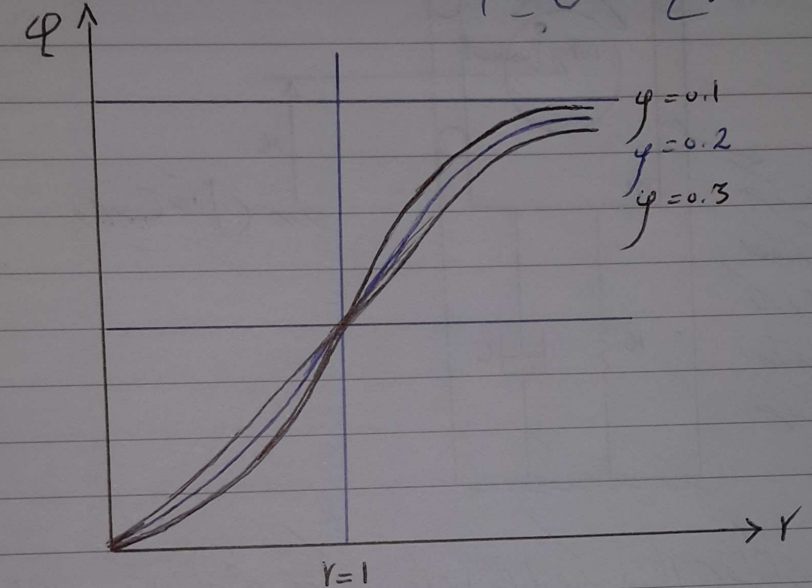
$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) = tg^{-1}\left(\frac{\frac{c\omega}{k}}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}\right)$$

(از k فاکتور می‌گیریم یا طرفین را بر k تقسیم می‌کنیم)

$$= tg^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

رسم نمودار زاویه فاز روی پاسخ خصوصی سیستم:

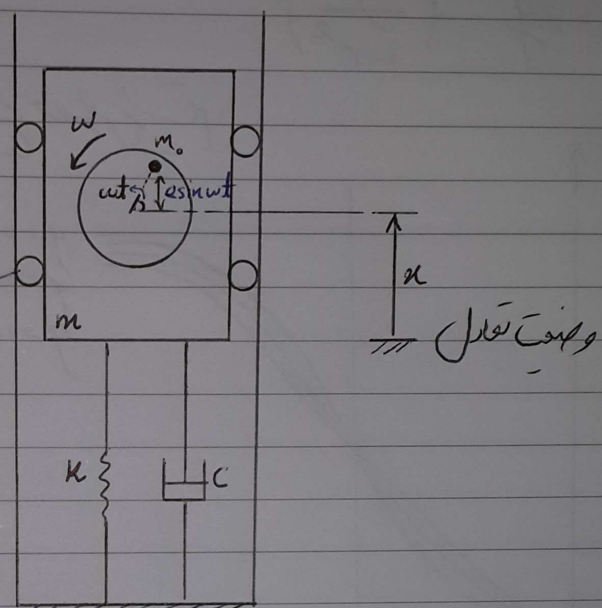


در $r=1$ یعنی در حالت تشدید $\varphi=90^\circ$ (مقدار زاویه فاز 90 درجه) است و به ζ ربطی ندارد.

* چرخش روتور نابالانس همراه با میرائی لزجی:

(نمونه‌ای کاربردی از آنچه گفته شده است.)

دستگاهی داریم که روی سیستم تعلیق قرار گرفته است (جرم و سیستم میرا کننده)، داخل دستگاه یک روتور (چرخنده) قرار دارد که با سرعت ω می‌چرخد. این روتور بالانس نیست یعنی حین چرخش لنگ می‌زند، که این لنگ زدن باعث ارتعاش سیستم خواهد شد که به واسطهٔ نیروی گریز از مرکز ایجاد شده است (که توسط $me\omega^2$ محاسبه می‌شود). این چرخش باعث می‌شود دستگاهی که روتور در آن نصب شده است ارتعاش کند. می‌خواهیم بررسی کنیم که این ارتعاشات چگونه اند چه موقع کم و چه موقع زیاد هستند.



حرکت صفحه ای را می کند. (جسم فقط در یک جهت حرکت می کند و یک درجه آزادی دارد.) حرکت صفحه ای است که فقط در جهت x حرکت می کند. (حرکت خالص)

نابالانسی توسط جرم m_0 که در فاصله e از مرکز دوران قرار گرفته است مدل سازی شده است.

$\theta = \omega t$ این زاویه بین صفر تا 360° تغییر می کند چون m_0 روی شفت می چرخد.

m_0 ← جرم نابالانسی که روی شفت در فاصله e از مرکز آن قرار گرفته است.

وضعیت تعادل: جایی است که مجموعه در آن جا به تعادل می رسد

x ← ارتعاشاتی که دستگاه انجام می دهد. (وضعیت ارتعاشات را توضیح می دهد)

m ← جرم دستگاه

ω ← چرخش شفت

c ← میرا کننده

e ← فاصله ی m_0 از مرکز دوران

هر چه m_0 بیشتر باشد نیروی گریز از مرکز بیشتر خواهد شد.

نیروی وزن مشابه وضعیت هایی که قبلاً بررسی کردیم حذف می شود.

نابالانس را جدا و باقی دستگاه را جدا بررسی می کنیم:

$$\left\{\begin{array}{l} m_\circ \rightarrow \underbrace{x + e\sin\omega t}_{\text{موقعیت مکانی}} \\ (m - m_\circ) \rightarrow x \end{array}\right.$$

قانون دوم نیوتن را می نویسیم:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -kx - c\dot{x} = m_\circ (x + e\sin\omega t)'' + (m - m_\circ)\ddot{x}$$

دوبار مشتق می گیریم (دوتا جرم داریم):

$$\dot{x} + e\omega \cos\omega t$$
$$\ddot{x} - e\omega^2 \sin\omega t$$

فقط نیروی میرا کننده داریم.

$$\Rightarrow -kx - c\dot{x} = \cancel{m_\circ \ddot{x}} - m_\circ e\omega^2 \sin\omega t + m\ddot{x} - \cancel{m_\circ \ddot{x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{m_\circ e\omega^2 \sin\omega t = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx}$$

معادله دیفرانسیل حرکت

خصوصی
(پاسخ عمومی)

$$\rightarrow x_p(t) = X \sin(\omega t - \varphi)$$

دارای جابجایی نیرو اضافه شده است که همان نیروی گریز از مرکز می باشد.