نیروی وزن مشابه وضعیت هایی که قبلاً بررسی کردیم حذف می شود.

بالانس را جدا و باقی دستگاه را جدا بررسی می کنیم:

$$\begin{cases} m_0 \rightarrow \underbrace{x + e\sin\omega t}_{\text{موقعیت مکانی}} \\ (m - m_0) \rightarrow x \end{cases}$$

قانون دوم نیوتن را می نویسیم:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -kx - c\dot{x} = m_0 (x + e\sin\omega t)'' + (m - m_0)\ddot{x}$$

دوبار مشتق می گیریم (دوتا جرم داریم).:

$$\dot{x} + e\omega\cos\omega t$$

$$\ddot{x} - e\omega^2\sin\omega t$$

فقط نیروی میرا کننده داریم.

$$\Rightarrow -kx - c\dot{x} = \cancel{m_0\ddot{x}} - m_0 e\omega^2 \sin\omega t + m\ddot{x} - \cancel{m_0\ddot{x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{m_0 e\omega^2 \sin\omega t = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx}$$

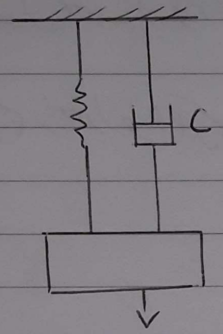
معادله دیفرانسیل حرکت

معمولی (پاسخ عمومی)

$$\rightarrow x_p(t) = X\sin(\omega t - \varphi)$$

دراین جا یک نیرو اضافه شده است که همان نیروی گریز از مرکز می باشد.

قبلاً داشتیم:



$F(t) = F_0 \sin \omega t$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

با معادله روبه‌رو می‌خواهیم که فقط F_0 جایگزین شده است که همان نیروی گریز از مرکز است که به این صورت محاسبه می‌شود:

برای به دست آوردن پاسخ خصوصی کافیست در مقدار X که قبلاً به دست آوردیم $F_0 = m_0 e \omega^2$ را جایگزین کنیم.

X و φ

$$X = \frac{m_0 e \omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \Rightarrow$$

$$X = \frac{m_0 e \omega^2}{\frac{m\omega^2}{r} \sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}} \Rightarrow$$

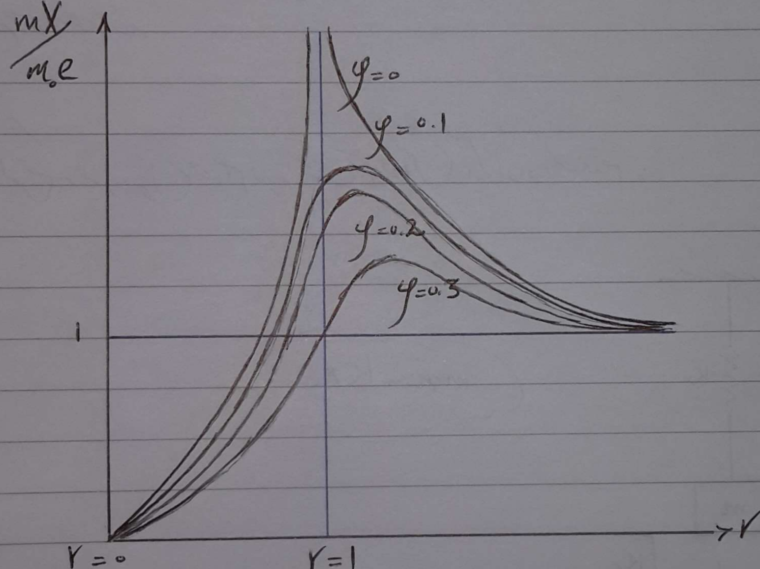
مقدار k

بی‌بعدسازی می‌کنیم:

$$\frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

زاویه فاز تغییری نمی‌کند چون در ϕ ، F_0 نداریم.

$$\boxed{\phi = tg^{-1}\left(\frac{2\varphi r}{1-r^2}\right)}$$



$$\text{if } \varphi=0 \Rightarrow \underset{\text{تشدید}}{r=1 \text{ در}} \Rightarrow \frac{mX}{m_0 e}\uparrow^{\infty} \rightarrow X\uparrow^{\infty}$$

$\varphi=0$ و $r=1$ $\rightarrow$ حالت تشدید

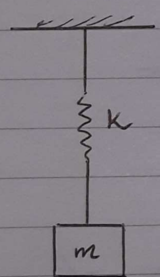
اگر میرایی نداشته باشیم در حالت تشدید دامنه ارتعاشات این مجموعه به سمت ∞ می‌رود و عامل φ باعث تحدید ارتعاشات می‌شود و دامنه ارتعاشات را محدود می‌کند و زمانیکه r خیلی خیلی زیاد باشد یعنی سرعت دوران از فرکانس طبیعی بیشتر باشد، میرایی دیگر تأثیری نخواهد داشت.

اطراف حالت تشدید دامنه‌ی ارتعاشات بیش‌تر است اما قبل یا بعد از آن ارتعاشات کم‌تر می‌شوند.

m، m_b و e جزء ویژگی‌های دستگاه هستند و ثابت‌اند.

یک خودرو که روی جاده‌ی موج‌دار حرکت می‌کند ولی جاده موج‌دار باعث ایجاد ارتعاشات در خودرو می‌شود، دامنه ارتعاشات (کم و زیاد شدن آن‌ها) بررسی خواهد شد.

در حالتی که فنر بدون جرم بود تحت ارتعاش آزاد داشتیم:



$$m\ddot{x}+kx=0$$

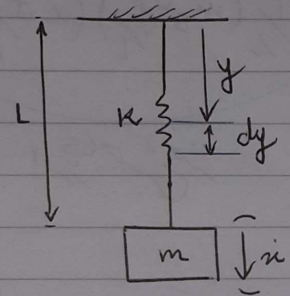
$\omega_n=\sqrt{k/m}$: بدون در نظر گرفتن جرم فنر

* مهم (سؤال امتحان)

تأثیر جرم فنر در فرکانس طبیعی سیستم جرم - فنر:

فرض کنید جرم فنر m_s باشد.

می‌خواهیم اگر فنر دارای جرم باشد مقدارش را روی فرکانس طبیعی بررسی کنیم.



$\dot{x}$: سرعت جرم m

سرعت نقاط مختلف روی فنر متفاوت است.

یک المان در فاصله‌ی دلخواه y از پایه به طول dy در نظر می‌گیریم که طول فنر را L فرض می‌کنیم. این المان دارای یک جرم و یک سرعت می‌باشد (که سرعت آن بین صفر تا $\dot{x}$ می‌باشد.)

المان متصل به پایه سرعتش صفر است. (اگر $y=0$ باشد در سمت پایه سرعت برابر صفر خواهد بود)
المان متصل به جرم سرعتش $\dot{x}$ است. (اگر $y=L$ باشد سرعت برابر $\dot{x}$ خواهد شد.)

جرم المان فنر $\longrightarrow m_s \frac{dy}{L}$

سرعت المان در نظر گرفته شده $\longrightarrow \dot{x}\frac{y}{L}$

$$\longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\left(m_s \frac{dy}{L}\right)\left(\dot{x}\frac{y}{L}\right)^2}_{}$$

انرژی جنبشی المانی از فنر

المان در نظر گرفته شده دارای انرژی جنبشی می‌باشد چون هم جرم دارد و هم سرعت و چون سرعت در نقاط مختلف متفاوت است از انتگرال استفاده می‌کنیم.

از روش انرژی، انرژی سیستم کل را بدست می‌آوریم

$$\underset{\text{انرژی جنبشی کل}}{T} = \underbrace{\tfrac{1}{2} m \dot{x}^2}_{\text{انرژی جنبشی جسم}} + \underbrace{\int_0^L \tfrac{1}{2}\left(m_s \tfrac{dy}{L}\right)\left(\dot{x}\tfrac{y}{L}\right)^2}_{\text{انرژی جنبشی فنر}}$$

چون تک تک جرم‌های فنر دارای سرعت اند پس دارای انرژی جنبشی هستند و چون
سرعت نقاط مختلف با هم متفاوت است انتگرال می‌یابند.

$$= \tfrac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{m_s \dot{x}^2}{2L^3} \int_0^L y^2 \, dy$$

$$= \tfrac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{m_s \dot{x}^2}{2L^3} \cdot \frac{L^3}{3} = \tfrac{1}{2}\left(m + \frac{m_s}{3}\right)\dot{x}^2$$

انرژی پتانسیل کل $U = \tfrac{1}{2} k x^2$

$$\frac{d}{dt}(U + T) = 0$$

$U+T$ مقدار ثابتی می‌باشد که مشتق آن
برابر با صفر است.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2} k x^2 + \tfrac{1}{2}\left(m + \tfrac{m_s}{3}\right)\dot{x}^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow k \dot{x} x + \left(m + \tfrac{m_s}{3}\right)\ddot{x}\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}\left(k x + \left(m + \frac{m_s}{3}\right)\ddot{x}\right) = 0$$

$$x \neq 0 \implies \left(m + \frac{m_s}{3}\right)\ddot{x} + kx = 0$$

معادله دیفرانسیل حرکت

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } \ddot{x}}} = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_s}{3}}}$$

تفاوت این فرمول ها با زمانیکه جرم فنر را در نظر نگرفتیم در این است که در اینجا $\frac{1}{3}$ جرم فنر اضافه شده است.

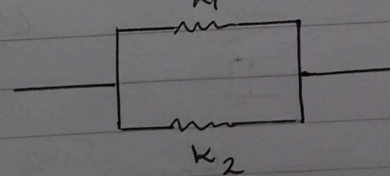
تنها تأثیر جرم فنر این است که انرژی جنبشی جرم فنر را هم خواهیم داشت که به انرژی جنبشی جرم اضافه می شود.

([illegible])(درس ۱۰)

معادل سازی فنر

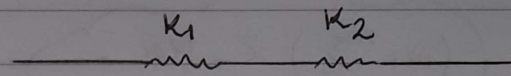
در یک سیستم ارتعاشی هنگامیکه چند فنر داریم ممکن است آن ها را به صورت موازی یا سری متصل کنیم.

فنرهای موازی :



$$\boxed{K_{eq} = k_1 + k_2}$$

فنرهای سری :



$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} = \frac{K_2 + K_1}{K_1 K_2} \Rightarrow$$

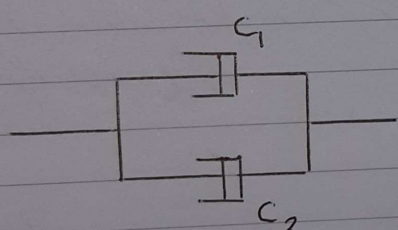
$$K_{eq} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

(*صفحه ۳۰)(ص ۱۰)

معادل سازی میرا کننده ها :

در یک سیستم ارتعاشی ممکن است میرا کننده ها را به صورت موازی یا سری داشته باشیم.

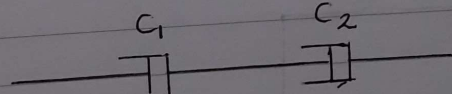
میرا کننده های موازی :



$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

(میرا کننده ها را به شکل سیلندر پیستون نمایش می دهند.)

میرا کننده های سری :



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

نکات مهم فصل ۱ (سوالات امتحان)

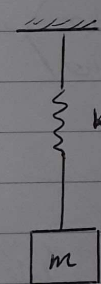
* بدست آوردن فرکانس طبیعی سیستم‌های تک درجه آزادی
  - روش مستقیم
  - روش انرژی (ریلی)

* (سوالات کتاب)

حتماً یک سؤال دو نمره‌ای از این مبحث در امتحان داریم. (یک سؤال در ارتباط با روش مستقیم و دیگری در ارتباط با روش انرژی خواهد بود.) - 5 نمره

* ارتعاش آزاد سیستم جرم - فنر ← بدست آوردن فرکانس طبیعی (از هر دو روش) ← $\omega_n=\sqrt{k/m}$

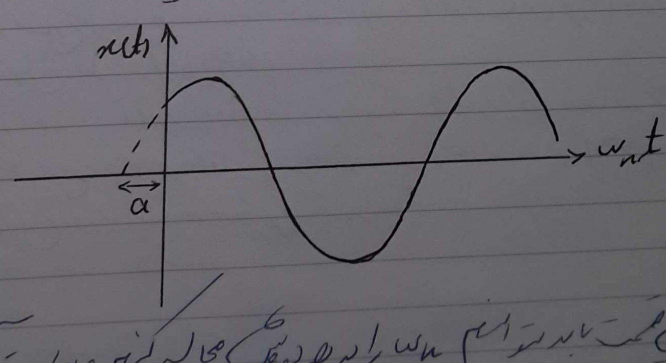
پاسخ سیستم $x(t)$:



$$x(t)=A\cos\omega_n t+B\sin\omega_n t$$

A و B از شرایط اولیه مسئله بدست می‌آید.

شرایط اولیه
- جابجایی اولیه $x(0)=x_0$
- سرعت اولیه $\dot{x}(0)=V_0$

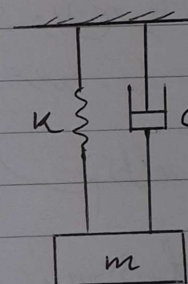


در این مبحث باید بتوانیم ω_n را به هر دو روش محاسبه کنیم و بدست آوردن فرکانس طبیعی سیستم و نیز بدست آوردن پاسخ سیستم دارای اهمیت می‌باشد.

نحوه‌ی رسیدن به پاسخ مهم می‌باشد. ابتدا معادله دیفرانسیل حرکت را بدست می‌آوریم و سپس با توجه به آن و بر اساس معادله دیفرانسیل حرکت به پاسخ می‌رسیم.

خود سیستمی که گفته شد نیاز به حل مسئله دارد! *

* ارتعاش آزاد سیستم جرم - فنر - میرا کننده:



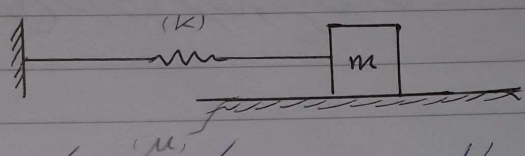
پاسخ سیستم: $x(t)$
- حالت الف
- حالت ب
- حالت ج

سؤال امتحان: ارتعاش آزاد سیستم جرم فنر میرا کننده را کاملاً بررسی کنید؟!

یک جا به جایی به سیستم می‌دهیم و ارتعاش آن را بررسی می‌کنیم.

ابتدا معادله‌ی دیفرانسیل حرکت و معادله مشخصه آن را بدست می‌آوریم، ریشه‌ها را محاسبه کرده و در جدول کلی قرار می‌دهیم. (پاسخ)
سه حالت اتفاق می‌افتد: 1) ریشه‌ها حقیقی اند، 2) ریشه‌ها مضاعف هستند و 3) ریشه‌های موهومی، که دو حالت غیر هارمونیک و حالت سوم هارمونیک می‌باشد و دامنه‌ی آن در نهایت به صفر می‌رسد.

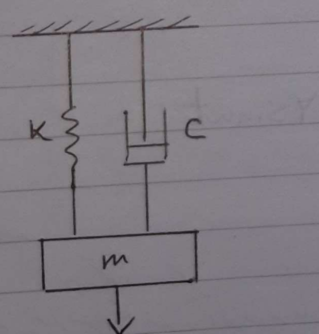
* سیستم جرم - فنر همراه با میرایی کولمب (اصطکاک)



روی سطحی که دارای اصطکاک می‌باشد جرم m را کشیده و رها می‌کنیم، بعد از یک نوسانات رخ می‌دهد و در نهایت به سکون می‌رسد.

رسیدن به معادله دیفرانسیل حرکت یا پاسخ‌های آن ممکن است سوال امتحان باشد.

* ارتعاش اجباری سیستم جرم - فنر و میراکننده :



$F(x) = F_0 \sin \omega t$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$x(t) = \underbrace{x_h(t)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

پاسخ عمومی ← همان معادله حالتی بود برای بدون نیرو در نظر گرفتیم

الف
ب
ج

پاسخ خصوصی ← هارمونیک می‌باشد چون نیروها هارمونیک است.

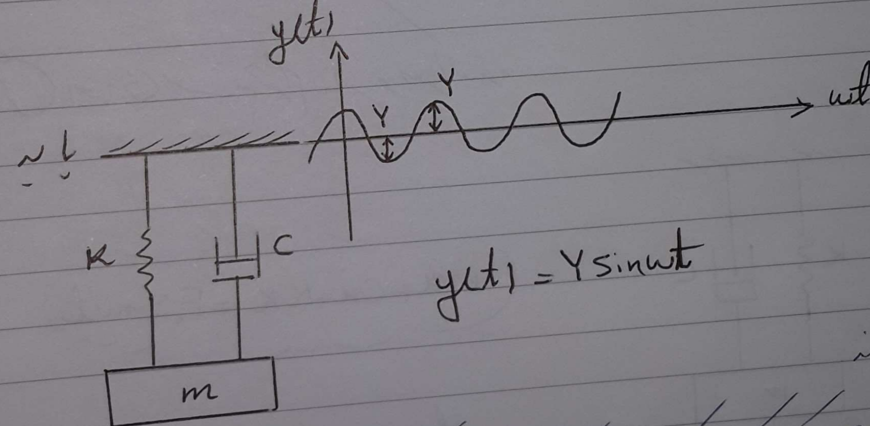
شکل ی بعد برای این پاسخ > دامنه‌ها / زاویه فاز (سوال امتحان)!!

* تأثیر جرم فنر را روی فرکانس طبیعی سیستم جرم فنر بررسی کنید.

* روش انجام معادل سازی فنرها و میراکننده ها

کاربرد:

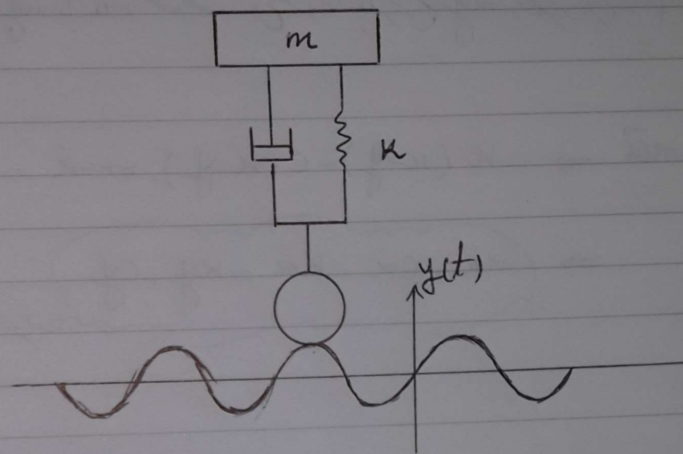
* چرخش روتور نابالانس همراه با میرایی (بررسی شد.)
* پاسخ سیستم جرم فنر و میراکننده به حرکت پایه هارمونیک:



$$y(t) = Y\sin\omega t$$

Y دامنه

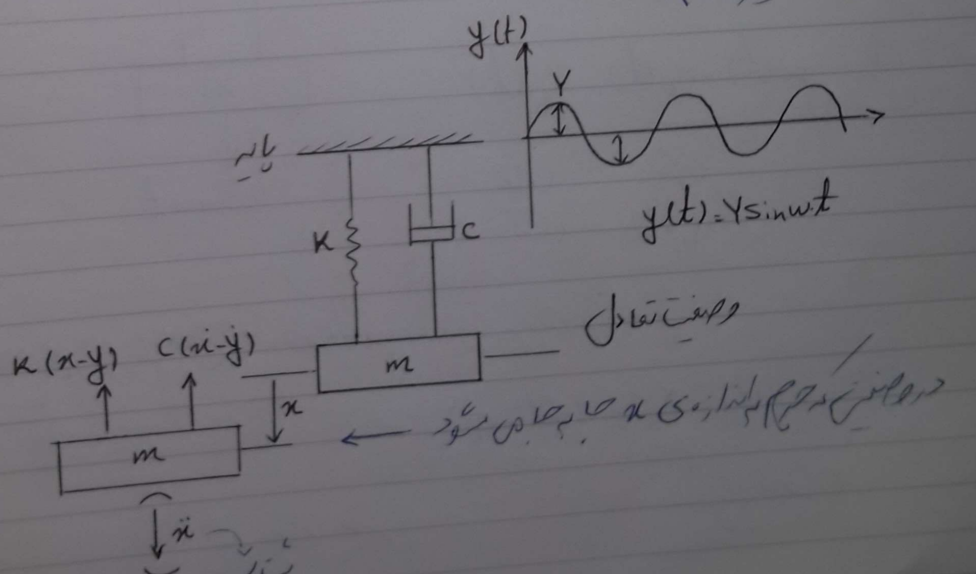
پایه می‌خواهد حرکت کند. اگر پایه ناپایدار باشد و حرکت سینوسی داشته باشد، این
حالت سینوسی یک ارتعاشی ایجاد می‌کند در جرم m که می‌خواهیم دامنه‌ی
ارتعاشات را بررسی کنیم که در کدام سمت کم و در کدام سمت زیاد است.



پاسخ سیستم به حرکت هارمونیک پایه:

سیستم جرم-فنر همراه میراکننده

پایه حرکت سینوسی دارد که روی مقدار جابجایی فنر اثر می‌کند (روی مقدار فشردگی و کشیدگی فنر تاثیر دارد)



$mg = k\Delta$ (پس با $k\Delta$ حذف می‌شود بنابراین mg را اعمال نمی‌کنیم.)

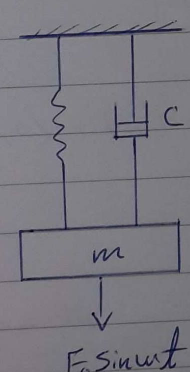
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y}) = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y}$$

معادله دیفرانسیل حرکت

مرور :

ارتعاش اجباری سیستم میرا : (تحت بارهای هارمونیک)



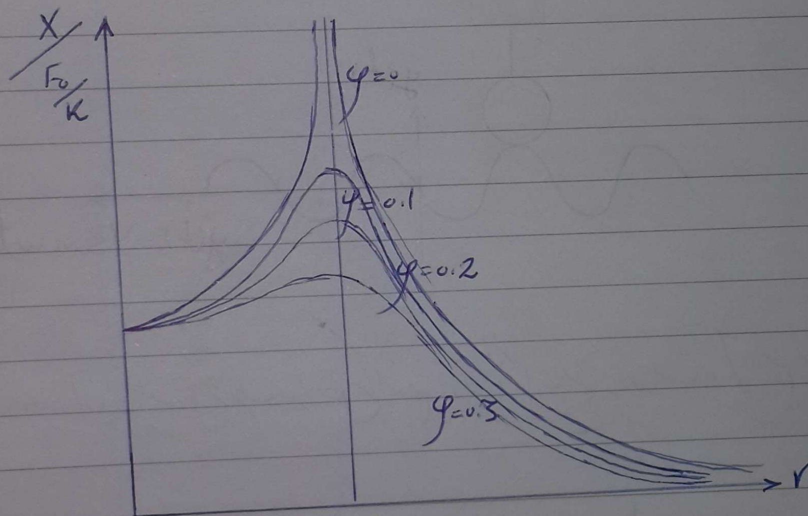
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

پاسخ : $x(t) = \underbrace{x_p(t)}_{\text{خصوصی (دائمی)}} + \underbrace{x_h(t)}_{\text{عمومی (گذرا)}}$

پاسخ عمومی به دلیل وجود میراکننده بعد از مدتی به صفر می‌رسد.

$$x_p(t) = \underbrace{X}_{\text{دامنه پاسخ خصوصی}} \sin(\omega t - \underbrace{\varphi}_{\text{زاویه فاز}})$$

$$\begin{cases} X = \dfrac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \xrightarrow{\text{شکل بی بعد}} \dfrac{X}{F_0/k} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\varphi r)^2}} \\ \varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{c\omega}{k-m\omega^2}\right) \xrightarrow{\text{شکل بی بعد}} \varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{2\varphi r}{1-r^2}\right) \end{cases}$$



$r=1$

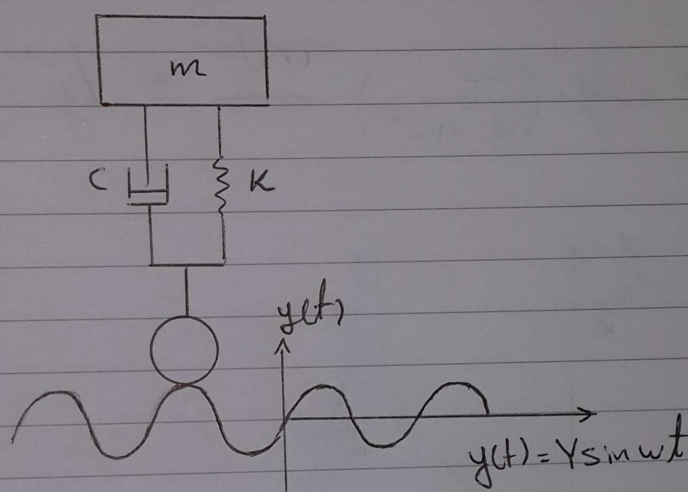
(تشدید)

$\omega=\omega_n$

$\omega/\omega_n = r$

یک سیستم جرم فنر داریم همانند ماشینی که روی یک جاده سینوسی حرکت می‌کند. این
جاده سینوسی در این جرم ایجاد ارتعاش خواهد کرد.

ناهمواری جاده باعث می‌شود ارتعاشاتی در m ایجاد کند. می‌خواهیم در مورد
این ارتعاشی ایجاد شده در m صحبت کنیم.



می‌خواهیم معادله دیفرانسیل حرکت را حل کنیم تا بتوانیم پاسخ را بدست آوریم

$$y = Y\sin\omega t \longrightarrow \dot{y} = Y\omega\cos\omega t$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kY\sin\omega t + cY\omega\cos\omega t$$

این عبارت را به یک حالت سینوسی تبدیل می‌کنیم (یک دامنه و یک فاز به صورت جواب خص آمد)
$F_0\sin(\omega t - \alpha)$

عبارت سمت راست معادله بالا را به صورت $F_0 \sin(\omega t - \alpha)$ تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} F_0 = \sqrt{(KY)^2 + (CY\omega)^2} \\ \alpha = tg^{-1}\left(-\dfrac{CY\omega}{KY}\right) = tg^{-1}\left(-\dfrac{C\omega}{K}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t - \alpha)$$

در ارتعاش اجباری سیستم صرفا $\alpha = 0$ می‌باشد اما در این جا α داریم.

پاسخ: $x(t) = \underbrace{x_h(t)}_{\text{عمومی (گذرا)}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{خصوصی (دائمی)}}$

عمومی (گذرا) ← (پس از مدتی به صفر می‌رسد)

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \alpha - \varphi)$$

(از Y فاکتور می‌گیریم)

$$\begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{(KY)^2 + (CY\omega)^2}}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + (C\omega)^2}} \Rightarrow X = \dfrac{Y\sqrt{K^2 + (C\omega)^2}}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + (C\omega)^2}} \\ \varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{C\omega}{K - m\omega^2}\right) \end{cases}$$

PAN

$$\frac{X}{Y}=\frac{\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \xrightarrow[\text{(از } k \text{ فاکتور می‌گیریم)}]{\text{بی بعد سازی}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{X}{Y}=\dfrac{\cancel{k}\sqrt{1+\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}}{\cancel{k}\sqrt{\left(1-\frac{m\omega^2}{k}\right)^2+\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}} \\[2ex] \dfrac{c\omega}{k}=2\zeta r \end{array}\right. \longrightarrow \frac{X}{Y}=\frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

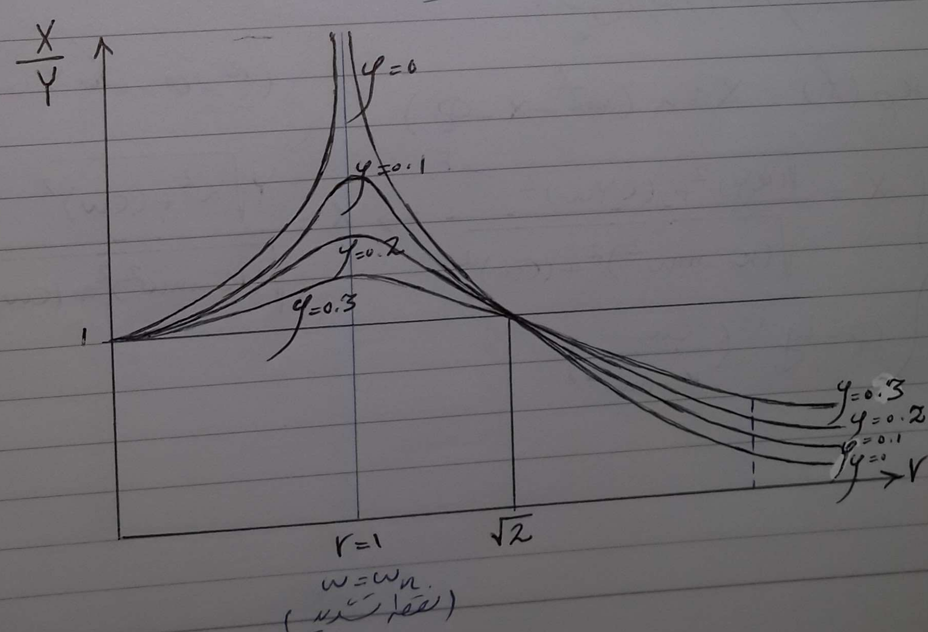
حرکت جرم m

حرکت پایه

X : مربوط به ارتعاشات جرم m

Y : دامنه‌ی ارتعاشات حرکت سینوسی (جاده)

براساس ζ های مختلف نمودار به صورت زیر رسم می‌شود:



$\omega=\omega_n$

(نقطه تشدید)

نتایجی که از شکل مربوطه می‌آوریم:

1) در $r=1$ اگر $\varphi=0$ (یعنی میرا کننده نداشته باشیم) $\frac{X}{Y}$ می‌شود بی‌نهایت و دامنه‌ی حرکت m بی‌نهایت است و ارتعاشات جرم m بسیار زیاد است.

$Y \rightarrow$ دامنه جابه‌جایی ورودی (ثابت)

$$\text{if } \underset{\text{تشدید}}{\underline{r=1}} \Rightarrow \varphi=0 \Rightarrow \frac{X}{Y}\uparrow^{\infty} \Rightarrow X\uparrow^{\infty}$$

2) وقتی میرایی را وارد سیستم می‌کنیم دامنه‌ی ارتعاشات محدودتر می‌شود.
در $r=\sqrt{2}$ مقدار $\frac{X}{Y}$ مقدار ثابتی می‌یابد و ربطی به میرایی ندارد.

$$\text{if } r=\sqrt{2} \Rightarrow \frac{X}{Y}=1 \Rightarrow X=Y$$

$$\frac{\omega}{\omega_n}=\sqrt{2} \Rightarrow \omega=\sqrt{2}\,\omega_n$$

ω : فرکانس تحریک
ω_n : فرکانس طبیعی

3) هر چقدر که $r>\sqrt{2}$ شود و مقدار میرایی هر چه بیشتر شود دامنه‌ی ارتعاشات هم افزایش می‌یابد و در این حالت هر چه φ کم‌تر باشد بهتر است از نظر دامنه‌ی ارتعاشاتی که می‌تواند ایجاد کند.

if $r > \sqrt{2} \Rightarrow$ { به ازای φ های کم‌تر مقدار $\frac{X}{Y}$ کم‌تر می‌باشد.

یعنی اگر یک ماشین در یک جاده سینوسی با سرعت خیلی بالا حرکت کند، در سرعت‌های خیلی
بالاتر حتی‌تر میزان کم‌تر یا بهتر دامنه‌ی ارتعاشات کم‌تر خواهد بود.

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \alpha - \varphi) \Rightarrow$$

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \underbrace{(\alpha + \varphi)}_{\psi}) = X \sin(\omega t - \psi)$$

(سای)

(زاویه‌ی ψ (سای) برابر است با $\alpha + \varphi$)

$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \Rightarrow tg\,\varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

$$\alpha = tg^{-1}\left(-\frac{c\omega}{k}\right) \Rightarrow tg\,\alpha = -\frac{c\omega}{k}$$

طبق روابط مثلثاتی:

$$\psi = \alpha + \varphi \Rightarrow tg\,\psi = tg(\alpha + \varphi) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\varphi}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\varphi}$$

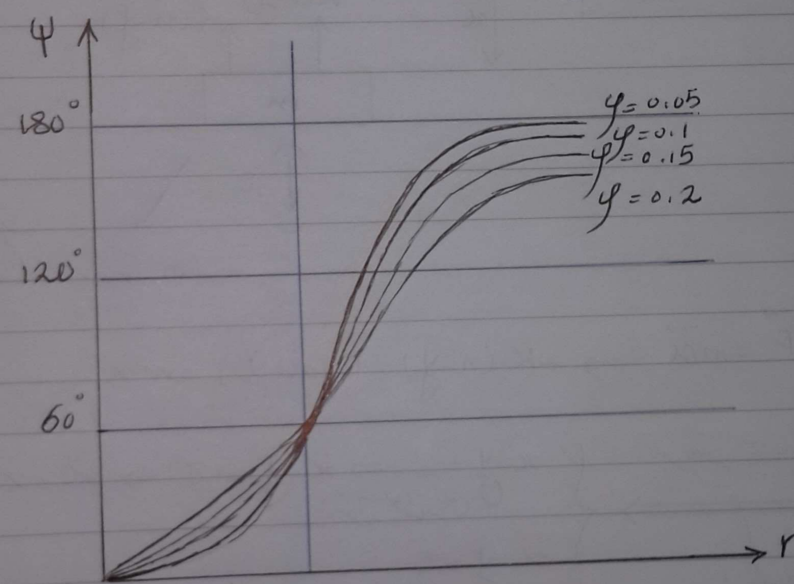
$$\Rightarrow tg\,\psi = \frac{\left(-\frac{c\omega}{k}\right) + \left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right)}{1 - \left(-\frac{c\omega}{k}\right)\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right)} = \frac{mc\omega^2}{k(k - m\omega^2) + (c\omega)^2}$$

پس ساده‌سازی

$$\Longrightarrow \quad \dots \quad \Longrightarrow \boxed{\psi = tg^{-1} \frac{2\zeta r^3}{(1-r^2)+(2\zeta r)^2}}$$

(پس ساده‌سازی‌های تمام نشدنی!)

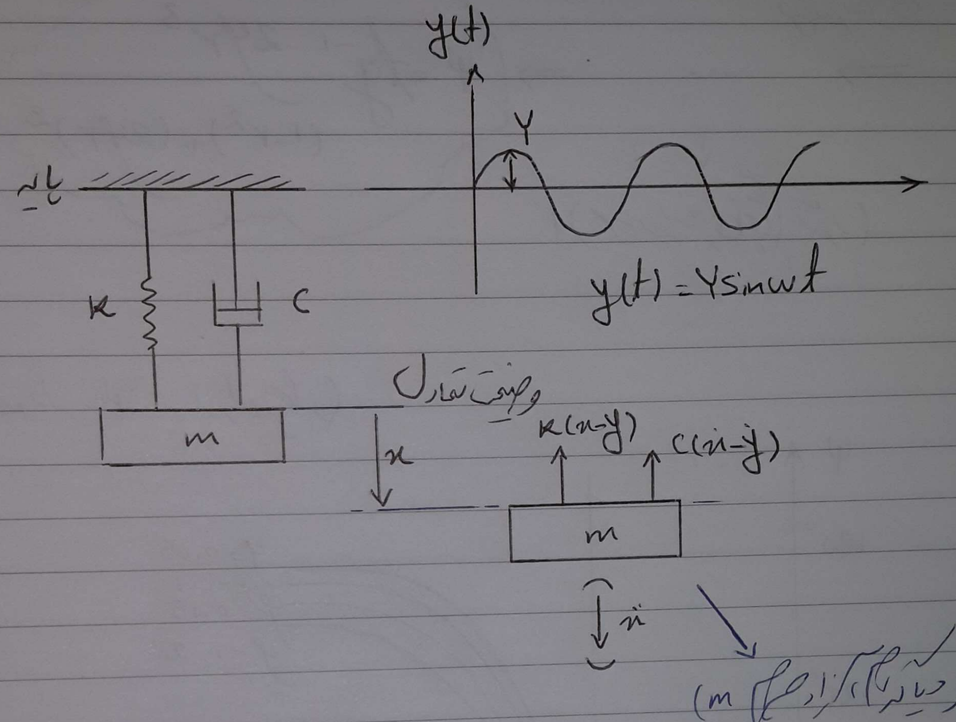
نمودار ψ : (زاویه فاز)



نقطه اشتراک: در $r=1$ همه‌ی نمودارها از 60 درجه عبور می‌کنند.

در $r=1$ زاویه‌ی فاز $60°$ می‌باشد.
اگر $r<1$ باشد زاویه فاز کمتر از $60°$ می‌شود.
اگر $r>1$ باشد زاویه فاز بیشتر از $60°$ خواهد بود.

زاویه بسته به مقدار ζ تغییر می‌کند.



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y}) = m\ddot{x}$$

$x - y = z$ تغییر متغیر

مربوط به تغییرات فنر

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = z \Rightarrow \ddot{x} - \ddot{y} = \ddot{z} \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{y} \\ \dot{x} - \dot{y} = \dot{z} \end{cases}$$

(دوبار مشتق گرفتیم)

$$\Rightarrow -kz - c\dot{z} = m(\ddot{z} + \ddot{y})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \\ y = Y\sin\omega t \Rightarrow \ddot{y} = -Y\omega^2 \sin\omega t \end{cases}$$

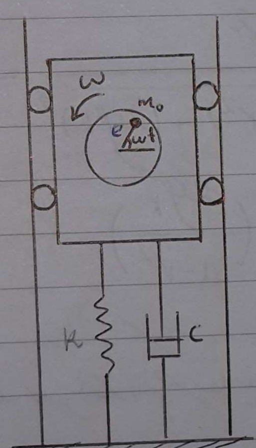
(دوبار مشتق می‌گیریم)

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{z}+c\dot{z}+kz=mY\omega^2\sin\omega t}$$

یک تغییر متغیر در نظر گرفتیم $(x-y=z)$ ، x مربوط به جرم m و y مربوط به پایه می‌شود. و $y-x$ تغییرات فنر را نشان می‌دهد.

z تغییرات فنر را از نظر مقدار کشیدگی (یا تراکم) ایجاد شده را نشان می‌دهد.

چرخش موتور نابالانس



هر تحلیلی که برای این سیستم داریم در رابطه با معادله نابالانس نیز صدق می‌کند.

معادله دیفرانسیل حرکت :

$$\boxed{m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=m_0 e\omega^2\sin\omega t}$$

پاسخ :

$$x(t)=\underbrace{x_p(t)}_{\text{خصوصی (دائمی)}}+\underbrace{x_h(t)}_{\text{عمومی (گذرا)}}$$

$x_p(t) = X\sin(\omega t - \varphi) \Rightarrow$

پاسخ های بدون بعد

$$\begin{cases} \dfrac{mX}{m_e e} = \dfrac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \\[2ex] \varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{2\zeta r}{1-r^2}\right) \end{cases}$$

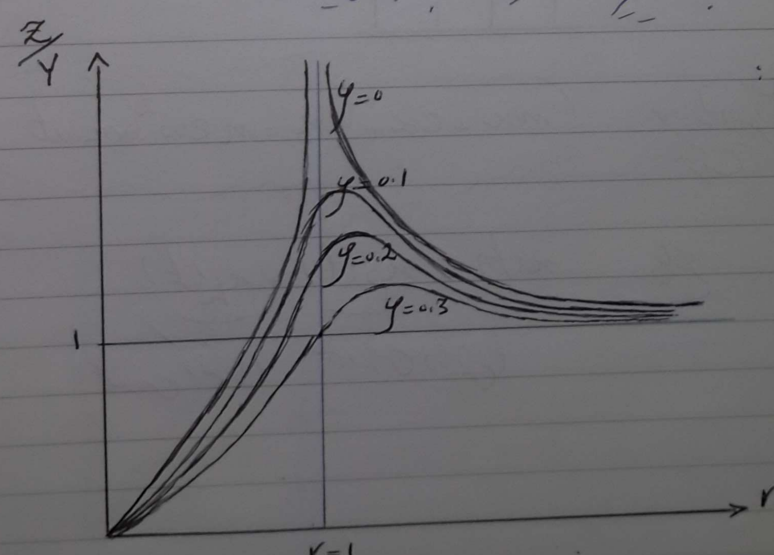
مقایسه با چرخش روتور نابالانس

پاسخ های بی بعد

$$\begin{cases} \dfrac{mZ}{mY} = \dfrac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \Rightarrow \dfrac{Z}{Y} = \dfrac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \\[2ex] \varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{2\zeta r}{1-r^2}\right) \end{cases}$$

$\frac{Z}{Y}$: نسبت تغییرات جرم (Z) به حرکت پایه (Y)

نمودار :



روند رسیدن به روابط و نمودارها در امتحان مهم می باشند. *

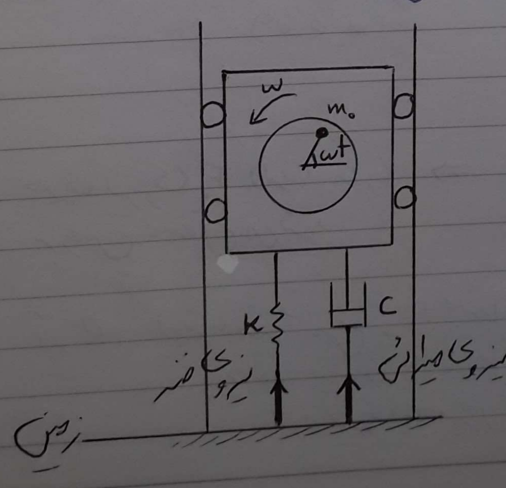
درحالتی که $r=1$ (حالت تشدید) زمانیکه میرایی نداشته باشیم $\frac{Z}{Y}$ بی نهایت می شود. Y ثابت است پس Z بی نهایت خواهد بود. ولی نه به معنای متلاشی شدن فنر می باشد ولی با وارد کردن میرایی به سیستم دامنه مقداری معادل‌تر و محدودتر می شود. هرچه مقدار r بیشتر شود نمودارها به سمت عدد یک میل می کنند و در rها خیلی بزرگ مقدار $\frac{Z}{Y}$ ثابت است. (مواقعی که فرکانس طبیعی از فرکانس تحریک خیلی خیلی بیشتر است.)

$$\text{if } r=1 \Rightarrow \left\{ \varphi=0 \Rightarrow \frac{Z}{Y}\overset{\infty}{\uparrow} \rightarrow Z\overset{\infty}{\uparrow} \right.$$

$$\text{if } r>>1 \Rightarrow \frac{Z}{Y} \simeq 1$$

در ارتباط با روتور نابالانس :

نیروی فنر و نیروی میرایی روی سطح (زمین) اثر می کنند. ارتعاشات به وجود آمده، نیرویی به پایه وارد می کنند.



نیروی گریز از مرکز $= m_0 e \omega^2$

نیروی فنر $F_1 = kx \Rightarrow F_1 = kX\sin(\omega t-\varphi)$

نیروی میرایی $F_2 = c\dot{x} \Rightarrow F_2 = -cX\cos(\omega t-\varphi)$

$$F_{TR} = \sqrt{(kX)^2+(-cX\omega)^2}$$

نیروی منتقل شده به زمین

$$x = X\sin(\omega t-\varphi)$$
$$\dot{x} = -X\omega\cos(\omega t-\varphi)$$

برآیند دو نیروی F_1 و F_2 می‌شود کل نیرویی که به پایه (زمین) منتقل می‌شود.
(sin و cos ، $\pi/2$ اختلاف فاز دارند ، برای محاسبه‌ی برآیند این دو نیرو از قضیه فیثاغورس استفاده می‌کنیم.)

نسبت انتقال $TR = \dfrac{F_{TR}}{F_0} = \dfrac{\text{نیروی منتقل شده به زمین}}{\text{نیروی گریز از مرکز } (m_0 e\omega^2)}$

if $TR=1 \Rightarrow F_{TR}=F_0 \Rightarrow$ همه‌ی نیروی F_0 (گریز از مرکز) به زمین منتقل می‌شود.

اگر TR کمتر باشد قسمتی از F_0 منتقل خواهد شد.

if $TR=0.5 \Rightarrow$ نصف نیروی F_0 به زمین منتقل می‌شود

if $TR=0.2 \Rightarrow$ 0.2 نیروی F_0 به زمین منتقل می‌شود

می‌خواهیم بررسی کنیم در چه محدوده‌هایی انتقال بیشتر صورت می‌گیرد و در چه محدوده‌هایی کم‌تر.

$$TR = \frac{\sqrt{(KX)^2 + (CX\omega)^2}}{m_0 e \omega^2} \Rightarrow$$ بی‌بعدسازی

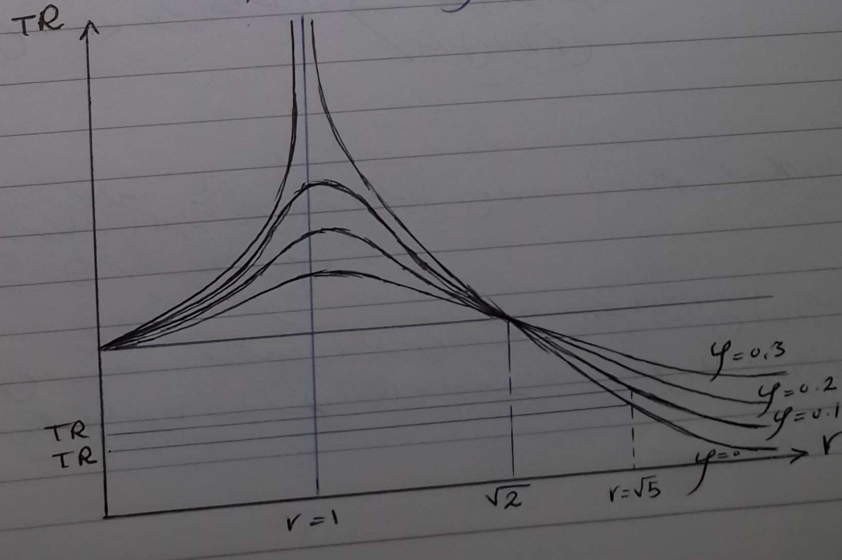
تمرین (مراحل بی‌بعدسازی را انجام دهید)

$$\Rightarrow TR = \frac{\sqrt{1+(2\varphi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\varphi r)^2}}$$

همان $\frac{X}{Y}$ است که در مرحله‌ی قبل برای حرکت پایه‌ها رسیدیم بررسی کردیم

(برای بی‌بعدسازی از X فاکتور می‌گیریم و به جای آن از فرمول زیر مقدار قرار می‌دهیم)

$$\frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\varphi r)^2}}$$



$r<\sqrt{2}$ معنا ندارد چون نسبت انتقال از یک بیشتر می‌شود.

if $r<\sqrt{2} \Rightarrow TR>1$

if $r>\sqrt{2} \Rightarrow$ هنگامیکه $\frac{\omega}{\omega_n}$ از $\sqrt{2}$ بیشتر است مقدار TR به ازای ω های کمتر مقدارش کمتر است. و هرچقدر نسبت انتقال بیشتر باشد قسمت بیشتری به زمین منتقل می‌شود.

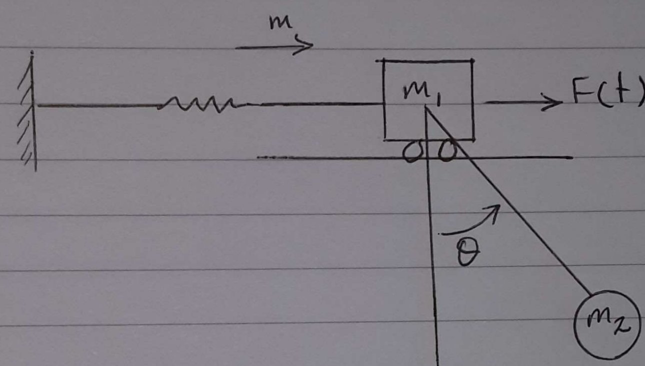
(هرچقدر نیروی انتقال بیشتر باشد قسمت بیشتری از F_0 به زمین منتقل می‌شود)

$f(t)$ ←
- تابع هارمونیک
- تابع متناوب
- تابع کلی

کلی ← روش‌های حل:
- انتگرال کانولوشن
- انتگرال دوهامل
- تبدیل لاپلاس

آنچه بررسی کردیم مربوط به سیستم یک درجه آزادی بود. (یا در جهت محور ~~x~~ ها و یا در جهت θ حرکت داشتیم.)

ممکن است یک سیستم هم حرکت دورانی داشته باشد و هم انتقالی (دو درجه آزادی) در این صورت دو تا نقطه تشدید داریم، دو تا فرکانس طبیعی داریم (ω_1 و ω_2)



این سیستم دارای ارتعاش آزاد می‌باشد و با اعمال F(t) می‌شود ارتعاش اجباری.

این سیستم یک سیستم دو درجه آزادی می‌باشد چون هم دوران و هم انتقال دارد.