بسمه تعالی

جزوه

فیزیک پایه۱

دانشگاه

علم و صنعت

استاد

دکتر عقدائی

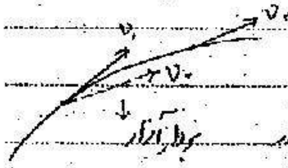
Subject:

Year.200 Month. Day.

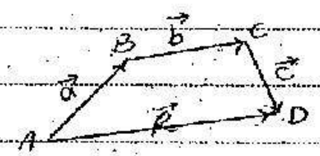
بردار

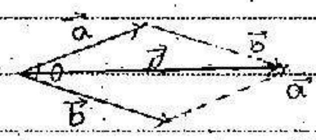
انواع کمیت:
- اسکالر، عددی، نرده‌ای مثل: ثانیه، ژول، کیلوگرم، متر، لیتر، ولت ...
- برداری، جهت‌دار مثل: جابجایی، سرعت، نیرو، میدان الکتریکی، شتاب، ...

انواع بردار:
1. بردار آزاد: مثل شتاب (چون اندازه و جهت آن می‌توانیم آن را در هر نقطه‌ای نشان دهیم)
2. بردار لغزان: می‌توانیم نقطه‌ی اثر را روی مسیر خودش لغزاند هم (بردار آن تغییر نمی‌شود)
3. بردار بسته: منطبق در همان نقطه است.



جمع دو یا چند بردار





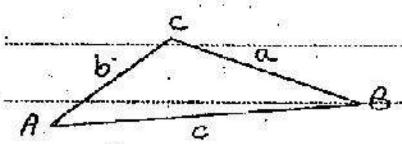
$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$
$$\vec{R} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$
$$\vec{R} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$
$$R^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$

* برای اینکه بدانیم کمیت فرضی A برداری است باید:

$$A_1 + A_2 = A_2 + A_1$$

• جریان کمیت برداری نیست.



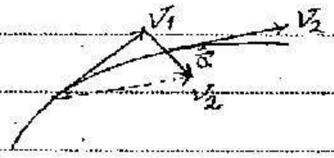
قضیه کسینوس‌ها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$$

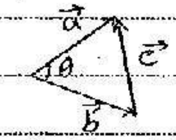
دستور سینوس‌ها:

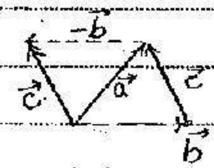
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

تفاضل دو بردار



$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V_2} - \vec{V_1}}{t_2 - t_1}$$





$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$

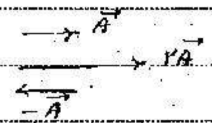
$\vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

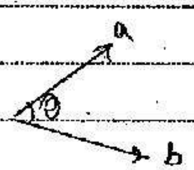
ضرب یک عدد در بردار

$\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{A} \times n = n\vec{A}$



ضرب عددی دو بردار



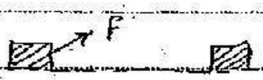
$\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$

$\cos\theta = \cos(-\theta)$ زوج

$\theta > 90$ باشد $a \cdot b < 0$

$\theta < 90$ باشد $a \cdot b > 0$

$\theta = 90$ باشد $a \cdot b = 0$



کار $W = \vec{F} \cdot \vec{x}$

توان $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$$

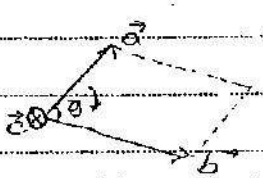
ضرب برداری دو بردار

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

$C = |\vec{c}| = ab\sin\theta$

* اندازه بردار $\vec{c}$ برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود * راستای $\vec{c}$ عمود بر صفحه است

* جهت بردار $\vec{c}$ از قانون دست راست یا پیچ تعیین می‌شود



$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

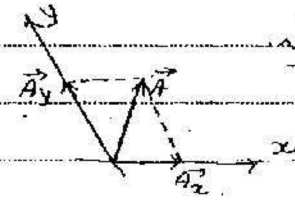
Subject:

Year. 200   Month.   Day.

مؤلفه‌های یک بردار - بردار یکه

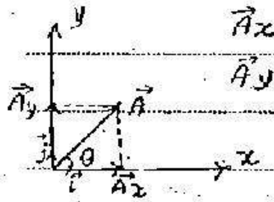
$\vec{A} = \hat{u} \cdot A$

$\vec{A}$ بردار یکه $\hat{u} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$



$\vec{A}$ را به دو مؤلفه در جهت x و y تجزیه کنید

برای رسم مؤلفه‌های یک بردار از انتهای بردار به موازات محورها رسم کنید



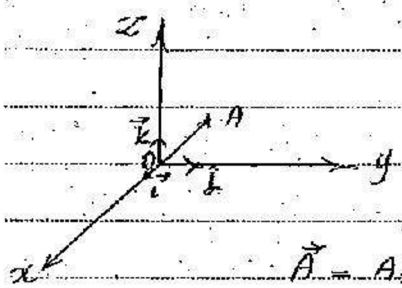
$\vec{A}_x = \vec{A} \cos\theta$

$\vec{A}_y = \vec{A} \sin\theta$

$\begin{cases} \vec{A}_x = A\cos\theta\,\vec{i} \\ \vec{A}_y = A\sin\theta\,\vec{j} \end{cases}$ $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$

$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A\cos\theta\,\vec{i} + A\sin\theta\,\vec{j}$

$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$



از صفحه‌ی xOz یک عمود بر آن رسم می‌کنیم در امتداد y قطع می‌کند مؤلفه‌ی $\vec{A}_y$ بدست می‌آید و همچنین برای $\vec{A}_z$, $\vec{A}_x$

$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

اندازه A $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

جمع و تفریق دو بردار

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(a_x+b_x)^2 + (a_y+b_y)^2 + (a_z+b_z)^2}$

یادآوری $i \cdot i = j \cdot j = 1$ $i \cdot k = j \cdot k = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x (i \cdot i) + a_y b_y (j \cdot j) + a_z b_z (k \cdot k)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

از طرفی $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}$

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}$$

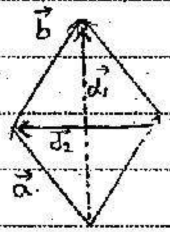
$\vec{i}\times\vec{i}$ ، $\vec{k}\times\vec{k} = 0$

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$

$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_z b_y - a_y b_z)\vec{i} - (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_y b_x - a_x b_y)\vec{k}$$



مثال: با استفاده از ضرب برداری نشان دهید قطرهای لوزی بر هم عمودند

$\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b}$ دو بردار وقتی بر هم عمودند که ضرب

$\vec{d_2} = \vec{a} - \vec{b}$ داخلی آن‌ها صفر شود.

$$\vec{d_1}\cdot\vec{d_2} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$

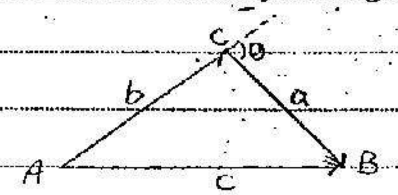
$$= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$= a^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{b} - b^2$$

d_1 , d_2 بر هم عمودند.

اضلاع لوزی با هم برابرند $\Rightarrow \vec{d_1}\cdot d_2 = a^2 - a^2 = 0$

تمرین: با استفاده از خواص بردارها دستور کسینوس‌ها را در یک مثلث دلخواه ثابت کنید



قضیه سینوس‌ها:

$$\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{b}+\vec{a})\cdot(\vec{b}+\vec{a})$$

$$c^2 = b^2 + a^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\underbrace{(\pi - c)}_{\theta} = -ab\cos c$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos c$$

برای سینوس : $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$

$\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

تفسیر هندسی

نیم برش شکل مثلث $|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin C = 2S_{ABC}$

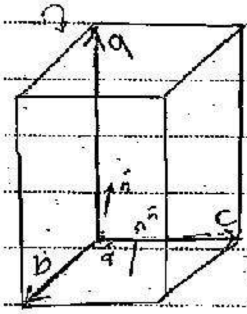
$$|\vec{a}\times\vec{c}| = ac\sin B = 2S_{ABC}$$

$$|\vec{b}\times\vec{c}| = bc\sin A = 2S_{ABC}$$

$$\rightarrow \frac{bc\sin A}{abc} = \frac{ab\sin C}{abc} = \frac{ac\sin B}{abc}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b} \quad \text{معکوس می‌کنیم} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

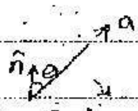
مثال: ثابت کنید حجم متوازی السطوح از رابطه روبرو بدست می‌آید $V = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ حاصل ضرب مختلط



$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\cdot(bc\sin\alpha\,\hat{n})$$

$$= \vec{a}\cdot\hat{n}\,(S)$$

$$= hS$$



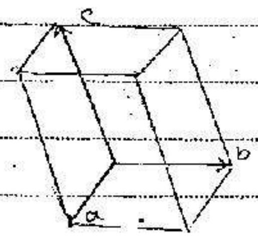
$\vec{a}\cdot\hat{n}$ تصویر a روی n را به ما می‌دهد ارتفاع را به ما می‌دهد

بنابراین حجم متوازی السطوح برابر است با ضرب مختلط سه بردار a, b, c

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

مثال: حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار a و b و c غیر واقع در یک صفحه بنا شده برحسب بزرگی بردارهای a و b و c و زوایای بین بردارها α و β و γ بدست آورید (در حالتی که هیچ کدام از بردارها بر هم عمود نیستند)



$$V = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$V^2 = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_xa_x+a_ya_y+a_za_z & a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z & a_xc_x+\dots \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow V^2 = \begin{vmatrix} a\cdot a & a\cdot b & a\cdot c \\ b\cdot a & b\cdot b & b\cdot c \\ c\cdot a & c\cdot b & c\cdot c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta \\ ab\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha \\ ac\cos\beta & bc\cos\alpha & c^2 \end{vmatrix}$$

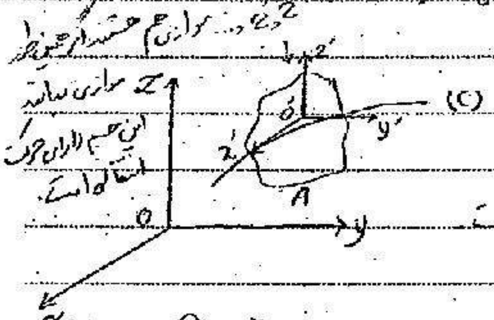
$$\rightarrow V^2 = a^2b^2c^2\left(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right)$$

$$\Rightarrow V = abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

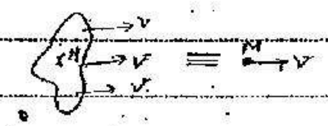
سینماتیک

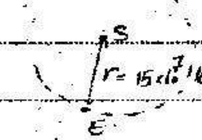
انواع حرکت:

حرکت انتقالی: اجزای جسم به موازات هم حرکت می‌کنند



ذره: هر جسمی که دارای حرکت انتقالی است.
(صرف نظر از ابعاد آن)
اگر ابعاد جسمی در مقایسه با ابعاد مسیرش ناچیز باشد آن جسم ذره است
مثل (خورشید و زمین)
حکم یک ذره را دارد





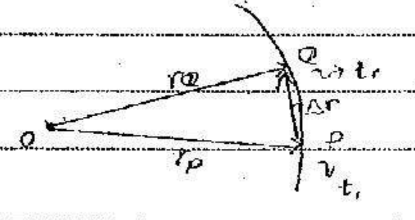
$R_E = 6400$ km

$$\frac{2R_E}{r} = \frac{2\times6400}{15\times10^7} < 10^{-6}$$

ذرات شن و گرد و غبار و اتم‌ها و ... را ذره می‌گوییم

بردار مکان

برداری که از مبدا مختصات (دلخواه) به مکان ذره وصل می‌کنیم



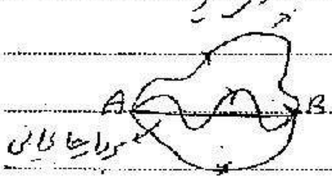
$\Delta r = r_Q - r_P$

Subject:

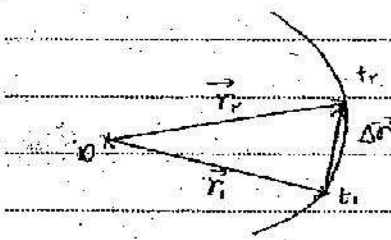
Year. 200 Month. Day.

بردار جابجایی :

پاره خطی است که نقطه‌ی آغاز و پایان را به هم وصل می‌کند



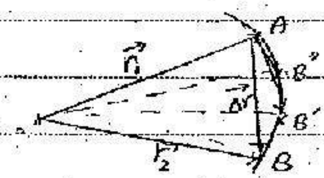
سرعت متوسط :



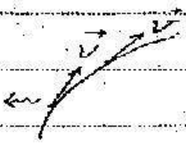
لحظه t_1 $\vec{r}_1$

لحظه t_2 $\vec{r}_2$

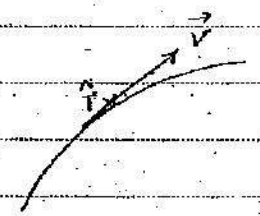
$$\vec{V}_{av} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \implies \vec{V}_{av} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \implies \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



بردار سرعت لحظه‌ای مماس بر مسیر است .



$$\vec{V} = V\,\hat{T}$$

بردار یکه

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

بردار سرعت و شتاب را بدست آورید

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} \quad V_y = \frac{dy}{dt} \quad V_z = \frac{dz}{dt} \implies V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv_z}{dt}$$

معادلات حرکت روی خط راست با شتاب ثابت

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt}$$

O — A — B — C — D

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} \qquad x = \text{فاصله از مبدا}$$

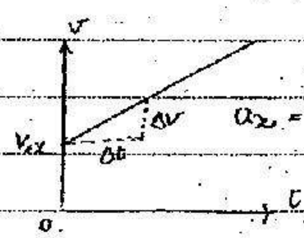
$a_x = $ ثابت

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} \rightsquigarrow dV_x = a_x\,dt$$

$$\int_{V_{0x}}^{V_x} dV_x = a_x \int_0^t dt$$

$$V_x - V_{0x} = a_x t$$

$$V_x = a_x t + V_{0x}$$



$$a_x = \frac{\Delta V_x}{\Delta t} = \frac{dV_x}{dt} > 0$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = a_x t + V_{0x}$$

$$\frac{dx}{dt} = V_{0x} + a_x t$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t V_{0x}\,dt + \int_0^t a_x t\,dt$$

$$a_x \int_0^t t\,dt = a_x\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\Rightarrow \quad x - x_0 = t v_{0x} + \tfrac{1}{2} a_x t^2$$

$$x - x_0 = v_{0x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2 \Rightarrow \underline{x = v_{0x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2 + x_0}$$

x به معنای مکان در لحظه t

" " " " x_0

$x - x_0$ جابجایی و نه الزاماً مسافت طی شده

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x} \Rightarrow a_x = v_x \cdot \frac{dv_x}{dx}$$

$$\int_{x_0}^{x} a_x \, dx = \int_{v_{0x}}^{v_x} v_x \, dv_x = \frac{v_x^2}{2} = \frac{v_x^2}{2} - \frac{v_{0x}^2}{2}$$

$$a_x (x - x_0) = \tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

$$\underline{v^2 - v_0^2 = 2a_x (x - x_0)}$$

حرکت سقوط آزاد

$a = g$ با در نظر گرفتن مبدا و جهت تمام معادلات بالا (شتاب ثابت)

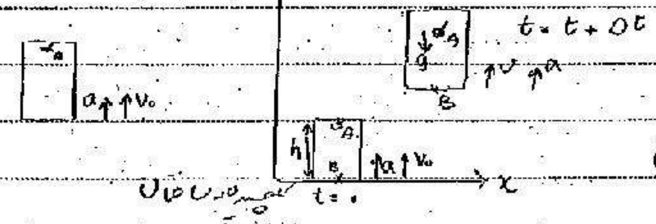
را می‌توان برای حرکت سقوط آزاد هم نوشت.

مثال: آسانسوری با شتاب a در حال بالا رفتن است در لحظه‌ای که سرعت آن v_0 است پیچ A شل شده و

از سقف سقوط می‌کند.

زمان برخورد پیچ با کف آسانسور

جابجایی و مسافت طی شده توسط پیچ



شتاب پیچ $a_A = -g$

$$v_A = -gt + v_0$$

(از دید ناظر ساکن) معادله حرکت پیچ $y_A = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 + h$

معادله حرکت آسانسور

$$y_B = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

معادله حرکت کف آسانسور

رسیدن A به B : $y_A = y_B$

$$\cancel{v_0 t} - \frac{1}{2} g t^2 + h = \cancel{v_0 t} + \frac{1}{2} a t^2$$

$$h = \frac{1}{2}(a+g)\,t^2 \Rightarrow \underset{\text{زمان ورود}}{t} = \sqrt{\frac{2h}{a+g}}$$

حل $g = 9.8\ m/s^2$

$a = 1.2\ m/s^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(2.2)}{11}} = \sqrt{\frac{4.4}{11}} = \sqrt{0.4} = 0.63\ s$

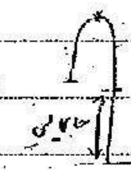
$h = 2.2\ m$

$v_0 = 2\ m/s$

جابجایی $\underbrace{y_A - h}_{\text{جابجایی}} = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 2(0.63) - \frac{1}{2}(9.8)(0.4)$

$= 1.26 - 1.96 = -0.7\ (m)$

مسافت طی شده توسط جسم



$V_A = -gt + V_0$

$0 = -10t + 2 \Rightarrow t = 1/5$

$y_A = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{2}{5} - 5\left(\frac{1}{25}\right) = \frac{1}{5}\ (m)$

$\frac{1}{5} \times 2 + 2.2\,m = \frac{2}{5} + \frac{11}{5} = \frac{13}{5}$

حرکت روی خط راست با شتاب متغیر

شتاب تابع زمان است $a = a(t)$

$a = a(v)$

$a = a(x)$

مثال: شتاب حرکت ذره‌ای که روی محور x حرکت می‌کند با تابع بیان شده است سرعت و موقعیت ذره را به صورت تابعی از زمان بدست آورید.

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ v = v_0 \end{cases} \qquad a = a_0 e^{-kt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dt \cdot \frac{dv}{dt} = a_0 e^{-kt} \cdot dt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = a_0 \int_0^t e^{-kt}\,dt$$

$$v - v_0 = -\frac{a_0}{k} \Big| e^{-kt} \Big|_0^t$$

$$v = v_0 - \frac{a_0}{k}\left(e^{-kt} - 1\right) \rightsquigarrow v = v_0 + \frac{a_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{a_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

$$\int \frac{dv}{dt} = a_0 e^{-kt}$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t \left(v_0 + \frac{a_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)\right) dt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a_0 e^{-kt} dt$$

$$x = v_0 t + \frac{a_0}{k}\left(t + \frac{1}{k} e^{-kt}\right)\Big|_0^t$$

$$v - v_0 = \frac{-a_0}{k} e^{-kt}$$

$$x = v_0 t + \frac{a_0}{k}\left(t + \frac{1}{k} e^{-kt} - \frac{1}{k}\right)$$

$$-k e^{-kt}$$

این فرمول از نظر بعد درست است:

بعد k: T^{-1}

e^{-kt} بعد ندارد،

چون توان یک عبارت نمی‌تواند دارای بعد باشد باید بی‌بعد باشد پس باید e^{-kt}، $-kt$ فاقد بعد باشد و

چون بعد t، T است پس بعد k باید T^{-1} باشد

$$x = \left(v_0 + \frac{a_0}{k}\right)t - a_0\left(1 - e^{-kt}\right)$$

مثال: قایقی با سرعت ثابت v_0 در حرکت است ناگهان موتور آن خاموش می‌شود اگر شتاب حرکت کند شونده ی قایق پس از خاموش شدن موتور به صورت زیر باشد

$$a = -kv$$

الف) سرعت قایق به صورت تابعی از زمان

ب) موقعیت به صورت تابعی از زمان

ج) سرعت قایق به صورت تابعی از مکان

د) زمان و مکان ایستادن قایق

$$a = \frac{dv}{dt} \rightsquigarrow dt \cdot \frac{dv}{dt} = -kv \cdot dt$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{kv}{v} dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int_0^t -k\,dt$$

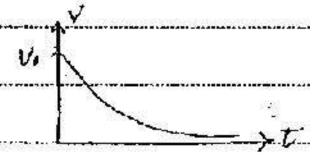
$$\log v \Big|_{v_0}^{v} = -kt \rightsquigarrow \log v - \log v_0 = -kt$$

$$\log \frac{v}{v_0} = -kt$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$\therefore \ln\frac{v}{v_0} = -kt \Rightarrow e^{-kt} = \frac{v}{v_0} \Rightarrow v = v_0 e^{-kt}$



$v = v_0 e^{-kt}$

$\Rightarrow v = v_0 e^{-kt}$

$dt \cdot \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} dt$

$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt$

$x - 0 = v_0 \int_0^t e^{-kt} dt$

$x = v_0 \left(\frac{1 - e^{-kt}}{-k}\right)$

$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$

ج) $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v \Rightarrow a = v\frac{dv}{dx}$

$a = -kv \Rightarrow v\frac{dv}{dx} = -kv$

$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^x -k\,dx$

$v - v_0 = -kx$

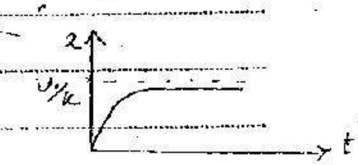
$\boxed{v = -kx + v_0}$

د) $v = v_0 e^{-kt}$

[illegible] $\Rightarrow 0 = v_0 e^{-kt} \Rightarrow t = \infty$

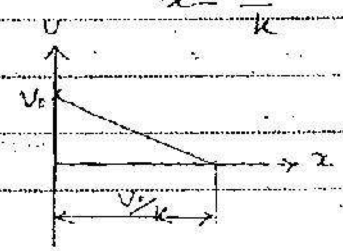
$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) \Rightarrow x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-\infty})$

$x = \frac{v_0}{k}$



[illegible] $v = v_0 - kx$

[illegible] $0 = v_0 - kx \Rightarrow x = \frac{v_0}{k}$



Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: در مسأله فوق اگر شتاب حرکت قایق پس از خاموش شدن موتور متناسب با مجذور سرعت لحظه‌ای باشد مسأله را از نو حل کنید.

$$a = -kv^2$$

$$a = -kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv^2 \Rightarrow dv = -kv^2 dt$$

$$dt = \frac{dv}{-kv^2} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} -\frac{1}{k} v^{-2} dv$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{k}(-v^{-1})\Big|_{v_0}^{v}$$

$$\Rightarrow -kt = -v^{-1}\Big|_{v_0}^{v} \Rightarrow -kt = -\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} \Rightarrow \frac{1}{v} = kt + \frac{1}{v_0} \Rightarrow v = \frac{v_0}{v_0 kt + 1}$$

ب) $$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{v_0 kt + 1} \Rightarrow \int_0^x dx = \int \frac{v_0}{v_0 kt + 1} dt \Rightarrow x = \int \frac{1}{kt + \frac{1}{v_0}} dt$$

تغییر متغیر $$kt + \frac{1}{v_0} = u \Rightarrow du = k\,dt, \quad dt = \frac{du}{k} \Bigg\} \Rightarrow x = \int \overbrace{\frac{1}{kt + \frac{1}{v_0}}}^{\frac{1}{u}} \underbrace{dt}_{\frac{du}{k}} = \int \frac{du}{ku} = \frac{1}{k}\ln u$$

$$x = \frac{1}{k}\ln\left(kt + \frac{1}{v_0}\right)\Big|_0^t = \frac{1}{k}\left(\ln\left(kt + \frac{1}{v_0}\right) - \ln\frac{1}{v_0}\right) = \frac{1}{k}\ln(ktv_0 + 1) \Rightarrow e^{kx} = ktv_0 + 1$$

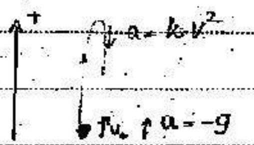
ج) $$\frac{dv}{dx} \cdot v = -kv^2 \Rightarrow dv = -kv\,dx \Rightarrow \int dx = \int \frac{dv}{-kv} \Rightarrow x = -\frac{1}{k}\ln\frac{v}{v_0}$$

مثال: جسمی با سرعت اولیه V_0 به بالا پرتاب می‌شود اگر شتاب حاصل از مقاومت هوا متناسب با مجذور سرعت لحظه‌ای باشد و g ثابت فرض شود. (نقطه پرتاب مبدأ فرض شود و جهت مثبت به بالا)

سرعت حدی $V_T^2 = \frac{g}{k}$

الف) جسم تا چه ارتفاعی بالا می‌رود

ب) در بازگشت به نقطه پرتاب چه سرعتی دارد؟



$R = kmv^2$

الف) سرعت حد $\Rightarrow \Sigma F = 0 \Rightarrow -mg - kmv^2 \Rightarrow v^2 = \frac{g}{k}$

$$\Sigma F = ma \Rightarrow -mg - kmv^2 = ma \Rightarrow -g - kv^2 = a$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -g - kv^2$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot v = -g - kv^2$$

$$\Rightarrow g + kv^2 = -v\frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{v\,dv}{g + kv^2} = -dx$$

$$\int_{v_0}^{0} \frac{v\,dv}{\frac{g}{k} + v^2} = -k\int_0^H dx$$

انتگرال $\Rightarrow \frac{g}{k} + v^2 = u \Rightarrow v\,dv = \frac{du}{2}$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{2u} = \frac{\ln u}{2} = \frac{\ln}{2}\left(v^2 + \frac{g}{k}\right)$$

Subject: سرعت برخورد به زمین $V^2 = \frac{V_0^2 V_T^2}{V_T^2 + V_0^2} \rightarrow V = \frac{V_0 V_T}{(V_T^2 + V_0^2)^{1/2}}$

Year. 200 Month. Day.

بالا $\int_{V_0}^{0} \frac{v\,dv}{\frac{g}{k} + v^2} = -k\int_0^H dx \rightarrow \ln \frac{g}{g + kV_0^2} = -2kH$ (1)

$\Sigma f_i = ma \rightarrow -mg + kmv^2 = ma \rightarrow -g + kv^2 = v\frac{dv}{dx}$

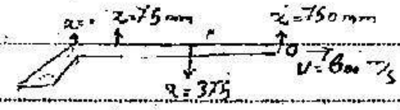
پایین $\int_0^V \frac{v\,dv}{kv^2 - g} = \int_H^0 dx \rightarrow \ln \frac{-kv^2 + g}{g} = -2kH$ (2)

$(1) = (2) \Rightarrow \frac{g}{g + kV_0^2} = \frac{-kV^2 + g}{g}$

$V_T^2 = \frac{g}{k} \rightarrow 1 - \left(\frac{V}{V_T}\right)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{V_0}{V_T}\right)^2} = \frac{V_T^2}{V_T^2 + V_0^2} \rightarrow \left(\frac{V}{V_T}\right)^2 = \frac{V_0^2}{V_T^2 + V_0^2}$

مثال: شتاب ذره‌ای در داخل لوله‌ی تفنگ بادی از رابطه‌ی $a = \frac{k}{x}$ تغییر می‌کند. اگر ذره از $x = 7.5$ mm به حرکت درآید با سرعت $600\ m/s$ از دهانه‌ی تفنگ خارج می‌شود ($x = 750$ mm). شتاب و سرعت ذره را در $x = 375$ mm بیابید.

$\begin{cases} x = 7.5\ mm \\ V = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 750\ mm \\ V = 600\ m/s \end{cases}$ $\begin{cases} x = 375\ mm \\ V = ? \\ a = ? \end{cases}$



$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \rightarrow a = v\frac{dv}{dx}$

$a = \frac{k}{x}$

$\Rightarrow v\frac{dv}{dx} = \frac{k}{x}$

$\int_{V_0}^{V} v\,dv = \int_{x_0}^{x} k\frac{dx}{x} \rightarrow \frac{1}{2}v^2\Big|_{V_0}^{V} = k\underbrace{\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}}_{\log x|_{x_0}^{x}}$

$\rightarrow v^2 - v_0^2 = 2k\log\frac{x}{x_0}$

$(600)^2 = 2k\log\frac{750}{7.5} \rightarrow 36\times10^4 = 2k\log 100$

$k = \frac{36\times10^4}{2\log 100} = 3.91\times10^4\ \frac{m^2}{s^2}$

$a = \frac{k}{x}$, $k = ax$, $k = LT^{-2}L$, $k = L^2T^{-2}$

$a = \frac{k}{x} = \frac{3.91\times10^4\ m^2/s^2}{0.375} = 1.04\times10^5\ m/s^2$

سرعت $v_2^2 - v_1^2 = 2k\log\frac{x_2}{x_1}$

$(600)^2 - v_1^2 = 2\times3.91\times10^4\cdot\log\frac{750}{375}$

$36\times10^4 - v_1^2 = 2\times3.91\times10^4\cdot\underbrace{\log 2}_{0.693} \rightarrow V_1 = 553\ m/s$

PILAVARAN

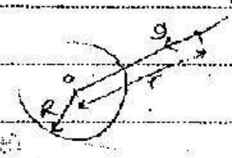
PAGE:

مثال: از سطح زمین جسمی را حداقل با چه سرعت اولیه‌ای به بالا پرتاب کنیم تا الف: به اندازه شعاع زمین از سطح زمین بالا رود ب: دیگر به زمین برنگردد

$$g = \frac{GM_e}{R_e^2} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

شتاب جاذبه در سطح زمین

$$a = v\frac{dv}{dr}$$



$$g = -\frac{GM_e}{r^2} \text{ (از طرفی)} \Rightarrow v\frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = GM\int_{r_1}^{r_2} -\frac{dr}{r^2} \to \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = GM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

الف، از سطح زمین:

$$v_1 = v_0, \quad r_1 = R_e, \quad r_2 = 2R_e, \quad v_2 = 0$$

$$\Rightarrow 0 - v_0^2 = 2GM\left(\frac{1}{2R_e} - \frac{1}{R_e}\right)$$

$$v_0^2 = 2GM\left(\frac{1}{2R_e}\right)$$

$$v^2 = 2\frac{GM}{2R_e}$$

$$\to v_0^2 = \frac{g_0 R_e^2}{R_e} = g_0 R_e \Rightarrow v_0 = \sqrt{g_0 R_e}$$

ب)

$$v_1 = v_0, \quad r_1 = R_e, \quad r_2 = \infty, \quad v_2 = 0$$

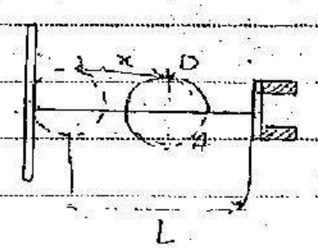
$$0 - v_0^2 = 2GM\left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{\infty}\right) \Rightarrow v_0^2 = \frac{2GM}{R_e} = 2g_0 R_e$$

$$v_0 = \sqrt{2g_0 R_e}$$

$$v_{0\,min} = \sqrt{2g_0 R_e} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 64 \times 10^5}$$

$$\simeq \sqrt{2 \times 10 \times 64 \times 10^5} \simeq 11.2 \ km/s$$

مثال: مطابق شکل گوی فولادی A به قطر D بر میله افقی که به قطب یک آهنربا منتهی می‌شود می‌لغزد و شتاب گوی از رابطه $a = \frac{k}{(L-x)^2}$ تبعیت می‌کند که در آن k اندازه شدت میدان مغناطیسی است اگر در $x=0$ گوی از حالت سکون رها شود با چه سرعتی با قطب آهنربا برخورد می‌کند؟



$$a = \frac{k}{(L-x)^2}$$

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{k}{(L-x)^2} \Rightarrow \int_{0}^{v} v\,dv = \int \frac{k}{(L-x)^2}\,dx$$

Subject:

Year.200 Month. Day.

$$\int_0^v v\,dv = \int_{D/2}^{L-D/2} k\,\frac{dx}{(L-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = k(L-x)^{-1}\Big|_{D/2}^{L-D/2}$$

($v_0=0$) از سکون

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = k\left(\frac{1}{D/2} - \frac{1}{L-D/2}\right)$$

$$v^2 = 2k\left(\frac{2}{D} - \frac{2}{2L-D}\right) = 2k\,\frac{4(L-D)}{D(2L-D)}$$

سرعت برخورد به صفحه $v = \sqrt{\dfrac{8k(L-D)}{D(2L-D)}}$

مثال: جسمی به بالا پرتاب می‌کنیم

برای نقطه A: زمانی که توپ دوبار از A رد می‌شود $= T_A$

زمانی که توپ دوبار از B رد می‌شود $= T_B$

برای نقطه B

نقطه B، نقطه A، v_0، x، y، O

فاصله $AB = H \Rightarrow g = ?$

$$OA = \frac{1}{2}g\left(\frac{T_A}{2}\right)^2$$

$$OB = \frac{1}{2}g\left(\frac{T_B}{2}\right)^2$$

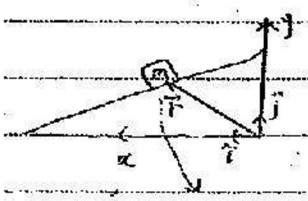
$$OA - OB = \frac{1}{2}g\left(\frac{T_A^2}{4} - \frac{T_B^2}{4}\right)$$

$$H = \frac{1}{8}g(T_A^2 - T_B^2)$$

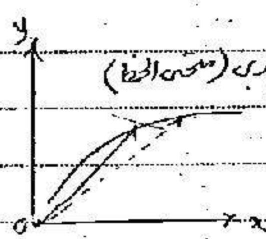
$$g = \frac{8H}{T_A^2 - T_B^2}$$

حرکت دو بعدی (منحنی الخط)

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$



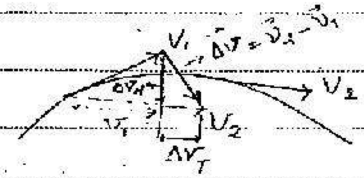
این یک حرکت یک بعدی است چون جسم (m) روی خط راست حرکت می‌کند



حرکت دو بعدی (منحنی الخط)

۱. جسم روی خط راست حرکت نکند حرکت دو بعدی است

شتاب مماسی و شتاب عمودی یا نرمال



اندازه و راستای بردار سرعت تغییر کرده

ΔV_N تفاضل دو بردار به دلیل تغییر راستا — $\Delta \vec{V}_T$ تفاضل دو بردار به دلیل تغییر اندازه

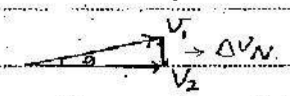
$$\Delta\vec{V} = \Delta\vec{V}_N + \Delta\vec{V}_T$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_N}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_T}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$$

نرمال یا مرکزگرا — شتاب مماسی که ناشی از تغییر اندازه بردار سرعت

وقتی $\Delta t \to 0$ میل می‌کند



$\theta \to 0 \Rightarrow \Delta V_N \perp \vec{V}_1, \vec{V}_2$

شتاب نرمال a_N ناشی از تغییر راستای سرعت ، شتاب مماسی a_T ناشی از تغییر اندازه سرعت.

محاسبه شتاب مماسی و نرمال

$\vec{V} = V\hat{T}$

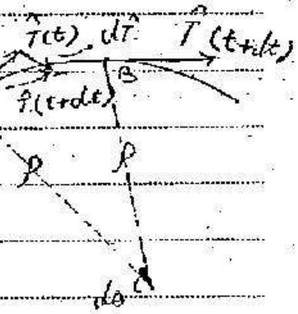
مشتق بگیریم

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\text{اندازه شتاب}}\hat{T} + \frac{d\hat{T}}{dt}V$$

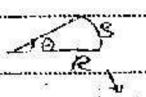
می‌دانیم که شتاب مماسی است

$\dfrac{d\hat{T}}{dt} = ?$

$d\hat{T} = \hat{T}(t+dt) - \hat{T}(t)$



$$\Rightarrow |d\vec{T}| = \underbrace{|\hat{T}|}_{=1} d\theta$$



$|d\vec{T}| = d\theta \rightsquigarrow d\vec{T} = d\theta \cdot \hat{N}$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{N}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\,\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{V} \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{\rho\, d\theta} = \frac{1}{\rho}$$ خمیدگی

شعاع خمیدگی $= \rho$

$\overset{\frown}{AB} = ds$

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = -\frac{V}{\rho}\hat{N} \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{T} - \frac{V^2}{\rho}\hat{N}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$

$$\frac{dv}{dt} = a_T \qquad -\frac{V^2}{\rho} = a_N$$

نرخ تغییر سرعت در

شعاع خمیدگی بستگی دارد.

مثال: شعاع خمیدگی مسیر حرکت را برحسب بردارهای سرعت و شتاب بدست آورید

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{T} - \frac{V^2}{\rho}\hat{N}$$

$\times\vec{V}$

$$\vec{V}\times\vec{a} = \frac{dv}{dt}(\hat{T}\times\vec{V}) - \frac{V^2}{\rho}(\hat{N}\times\vec{V})$$

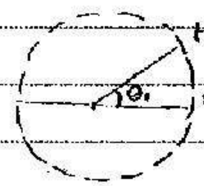
$$\vec{a}\times\vec{V} = \frac{dv}{dt}(\hat{T}\times V\hat{T}) - \frac{V^3}{\rho}(\hat{N}\times\hat{T})$$

$$\vec{a}\times\vec{V} = 0 + \frac{V^3}{\rho}(\hat{T}\times\hat{N}) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{a}\times\vec{V} = \frac{V^3}{\rho}\hat{b}$$ → بردار یکه عمود بر صفحه $\hat{T}$ و $\hat{N}$ است.

$$\Rightarrow |\vec{a}\times\vec{V}| = \frac{V^3}{\rho} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{a}\times\vec{V}|}{V^3}$$ از نظر بعد : $\frac{(LT^{-2})(LT^{-1})}{L^3T^{-3}} = \frac{1}{L}$

بعد ρ :

حرکت دایره‌ای یکنواخت



$t_2 \quad \theta_2$

$t_1 \quad \theta_1$

سرعت زاویه‌ای متوسط $\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$$W = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{rad}{s}$$

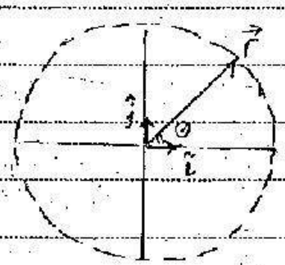
بسامد N یا ν یا N

$T = \frac{1}{\text{بسامد } \nu}$ زمان تناوب

شتاب زاویه‌ای متوسط $\bar{\alpha} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad rad/s^2$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad rad/s^2$$

در حرکت دایره‌ای یکنواخت $\alpha = 0$ است.



مختصات دکارتی

$$\vec{r} = r\sin\theta \hat{j} + r\cos\theta \hat{i}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta \hat{j} + r\frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta)\hat{i}$$

$\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$

$$\vec{v} = -r\omega\sin\theta \hat{i} + r\omega\cos\theta \hat{j}$$

$v^2 = \sqrt{v_i^2 + v_j^2}$ $\quad v^2 = r^2\omega^2\sin^2\theta + r^2\omega^2\cos^2\theta$

$$\boxed{v = r\omega}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2\cos\omega t\hat{i} - r\omega^2\sin\omega t\hat{j}$$

پس شتاب نشان می‌دهد حرکت دایره‌ای یکنواخت شتاب‌دار است.

$$\vec{a} = -\omega^2(r\cos\omega t\hat{i} + r\sin\omega t\hat{j})$$

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

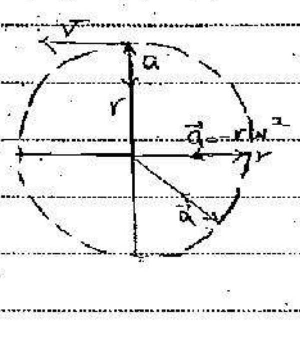
$a = \omega^2 r$, $a_N = \dfrac{v^2}{r}$, $a_N = \dfrac{v^2}{\rho}$ شتاب مماسی صفر است.

$a_T = \dfrac{dv}{dt}$

$v = r\omega \Rightarrow a_T = r\dfrac{d\omega}{dt}$

$\rightarrow a_T = r\alpha = 0$

چون دارای شتاب ثابت $\alpha = 0$



$|\vec{r}| =$ ثابت (در جهت r)

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr^2}{dt}$$

چون r^2 ثابت است مشتق آن صفر

$$2\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$2\vec{r}\cdot\vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{V}$$

$\vec{V}\cdot\vec{V} = V^2 \Rightarrow$ ثابت ؟

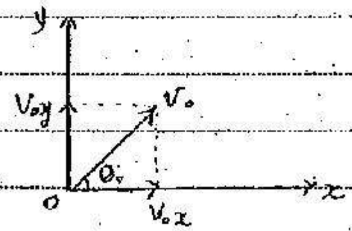
حرکت دایره‌ای شناختیم

$$\vec{V}\,\frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V}\,\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$$

$$2\vec{V}\,\frac{d\vec{V}}{dt} = 0 \rightsquigarrow 2\vec{V}\cdot\vec{a} = 0 \rightsquigarrow \vec{V} \perp \vec{a}$$

حرکت پرتابه

از نقطه O جسمی با سرعت اولیه V_0 با زاویه θ نسبت به افق پرتاب می‌کنیم معادلات حرکت، سرعت



$$V_{0x} = V_0 \cos\theta_0$$

$$V_{0y} = V_0 \sin\theta_0$$

در راستای x :

$a_x = 0$ (چون نیرویی نداریم)

$V_x =$ ثابت ؟

$$V_x = V_0 \cos\theta_0$$

$$\frac{dx}{dt} = V_0\cos\theta_0 \rightsquigarrow \int_0^x dx = \int_{0}^{t} V_0 \cos\theta_0\, dt$$

$$\rightsquigarrow x = V_0 t \cos\theta_0$$

در راستای y : $a_y = -g$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \rightsquigarrow \int_{V_{0y}}^{V_y} dv_y = -g\int_0^t dt$$

$$V_y - V_{0y} = -g\,t$$

$$V_y = -g\,t + V_0 \sin\theta_0$$

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

$$V_y = -gt + V_0 \sin\theta$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt + V_0 \sin\theta_0 \rightsquigarrow \int_0^y dy = \int -gt + V_0 \sin\theta_0 \, dt$$

$$\rightarrow y = V_0 t \sin\theta_0 - \tfrac{1}{2} g t^2$$

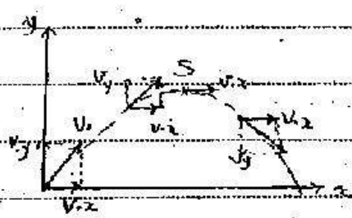
$$\begin{cases} V_x = V_0 \cos\theta_0 \\ x = V_0 t \cos\theta_0 \\ V_y = V_0 \sin\theta_0 - gt \\ y = V_0 t \sin\theta_0 - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

معادله مسیر: $x = V_0 t \cos\theta_0 \rightsquigarrow t = \dfrac{x}{V_0 \cos\theta_0}$

$$y = V_0 \left(\frac{x}{V_0 \cos\theta_0}\right) \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g \left(\frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\theta_0}\right)$$

$$y = x \tan\theta_0 - g \frac{x^2}{2V_0^2 \cos^2\theta_0}$$

معادله سهمی $y = Ax - Bx^2$



$V_y = 0$ نقطه S

$$0 = V_0 \sin\theta_0 - gt \rightsquigarrow V_0 \sin\theta_0 = gt$$

زمان رسیدن به اوج $t = \dfrac{V_0 \sin\theta_0}{g}$

نقطه S $\rightsquigarrow$ $x = V_0 \left(\dfrac{V_0 \sin\theta_0}{g}\right) \cos\theta_0$

نصف برد $x = \dfrac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{2g}$

$$y = V_0 \left(\frac{V_0 \sin\theta_0}{g}\right) \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_0 \sin\theta_0}{g}\right)^2$$

ارتفاع اوج $y = \dfrac{V_0^2 \sin^2\theta}{2g}$

$y = v_0 t \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g t^2$

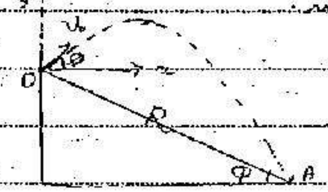
$\Rightarrow y = 0 \rightarrow t = 0$

زمان پرتاب به برگشت $t = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$ زمان رفت و زمان برگشت با هم برابرند (صرفنظر از مقاومت هوا)

برد افقی $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$

$\theta_0 = 45 \Rightarrow R = R_{Max} = \frac{v_0^2}{g}$

مثال: از بالای تپه‌ای به زاویه‌ی شیب φ پرتابه‌ای را با سرعت اولیه v_0 با زاویه θ نسبت به افق پرتاب می‌کنیم. θ را چنان تعیین کنید که برد پرتابه در امتداد تپه بیشینه باشد.



$x = v_0 t \cos\theta$

$y = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2$

معادله مسیر پرتابه: $y = x\tan\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta}$

مختصات نقطه A را در معادله مسیر پرتابه قرار می‌دهیم

$A \begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = -R\sin\varphi \end{cases}$

زیر افق است

$-R\sin\varphi = R\cos\varphi\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta} R^2\cos^2\varphi$

$R(\cos\varphi\tan\varphi + \sin\varphi) - \frac{g\cos^2\varphi}{2v_0^2\cos^2\theta} R^2 = 0$

جواب مطلوب نیست $R = 0$ نقطه پرتاب

$R = \frac{2(\cos\varphi\tan\theta + \sin\varphi) v_0^2 \cos^2\theta}{g\cos^2\varphi}$

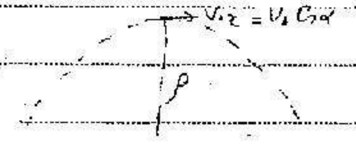
مشتق می‌گیریم

شرط بیشینه بودن R: $\frac{dR}{d\theta} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{(2(\cos\varphi(1+\tan^2\theta)) v_0^2\cos^2\theta - 2v_0^2\sin\theta\cos\theta) g\cos^2\varphi - 0 \times}{g^2\cos^4\varphi}$ مشتق

پس $\cancel{2}\cos\varphi \cancel{v_0^2}\cos^2\theta(1+\tan^2\theta) \cdot \cancel{g\cos^2\varphi} = \cancel{2v_0^2}\sin\theta\cos\theta \cdot \cancel{g\cos^2\varphi}$

$\cos\varphi\cos\theta(1+\tan^2\theta) = \sin\theta$

مثال: شعاع انحنای مسیر یک پرتابه را در نقطه اوج بدست آورید.



$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3} = \frac{|V_0 \cos\theta_0 \times -g|}{v^3}$$

$$\rightarrow \rho\,|V_0 \cos\theta_0 \cdot -g| = V_{0x}^3 \rightarrow \rho\, V_{0x}\, g = V_{0x}^{\cancel{3}\,2}$$

$$\rho g = V_{0x}^2 \rightarrow \rho = \frac{V_{0x}^2}{g}$$

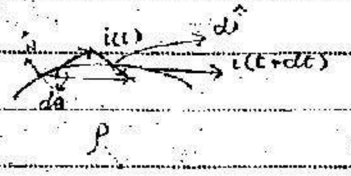
مثال: بردار مکان ذره‌ای در دستگاه مختصات کارتزین به صورت $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ که در آن x و y و z
که خود توابعی از زمان هستند. شتاب مماسی، شتاب نرمال، شعاع انحنای مسیر را که x و y و z
مشتقات آن را بدست آورید.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k} \qquad \vec{V_x} = V_x \hat{i} \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\cdot\hat{i} + \frac{d\hat{i}}{dt}\cdot V_x$$

$$\rightarrow \vec{a_x} = a_{T_x}\hat{i} + \frac{d\hat{i}}{dt}\cdot V_x$$

$$d\hat{i} = \hat{i}(t+dt) - \hat{i}(t)$$



$$|d\hat{i}| = \underbrace{|\hat{i}(t)|}_{1}\,d\theta \rightarrow d\vec{\hat{i}} = d\theta \cdot \hat{N}$$

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{N} = \frac{V_x}{\rho}\,\hat{N}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \underbrace{\frac{d\theta}{ds}}_{\frac{1}{\rho}}\cdot\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{V_x} = \frac{V_x}{\rho}$$

$$\vec{a}_x = a_{T_x}\hat{i} - \frac{V_x^2}{\rho}\hat{N}$$

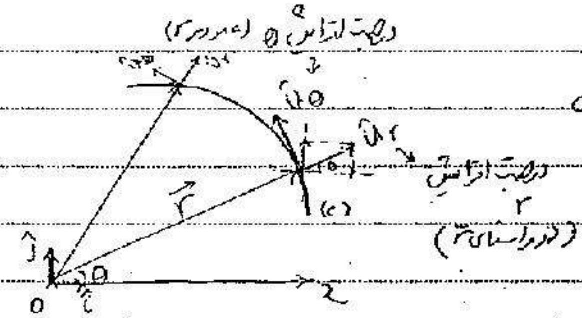
تعمیم برای y و z؟

$$\vec{a} = \underbrace{a_{T_x}\hat{i} + a_{T_y}\hat{j} + a_{T_z}\hat{k}}_{\vec{a_T}} - \underbrace{\left(\frac{V_x^2}{\rho} + \frac{V_y^2}{\rho} + \frac{V_z^2}{\rho}\right)\cdot\hat{N}}_{\vec{a}_N}$$

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

سرعت و شتاب در مختصات قطبی



$\hat u_{r_x} = |\hat u| \cos\theta \, \hat i = \cos\theta \, \hat i$

$\hat u_{r_y} = |\hat u| \sin\theta \, \hat j = \sin\theta \, \hat j$ $\Rightarrow \hat u_r = \cos\theta \, \hat i + \sin\theta \, \hat j$

به ترتیب $\hat u_\theta = \cos\theta \, \hat j - \sin\theta \, \hat i$

$$\frac{d\hat u_r}{dt} = \dot{\hat u}_r = -\dot\theta \sin\theta \, \hat i + \dot\theta \cos\theta \, \hat j$$

$$\dot{\hat u}_r = \dot\theta(-\sin\theta \, \hat i + \cos\theta \, \hat j)$$

$$\dot{\hat u}_r = \dot\theta \, \hat u_\theta$$

$$\dot{\hat u}_\theta = -\dot\theta \cos\theta \, \hat i - \dot\theta \sin\theta \, \hat j$$

$$\dot{\hat u}_\theta = -\dot\theta(\cos\theta \, \hat i + \sin\theta \, \hat j)$$

$$\dot{\hat u}_\theta = -\dot\theta \, \hat u_r$$

$\vec r = r \hat u_r \Rightarrow \dfrac{d\vec r}{dt} = \dot r \hat u_r + r \dot{\hat u}_r$ پس، $(\dot r\dot\theta + \dot\theta \dot r)\hat u_\theta + r\ddot\theta \hat u_\theta$

$$\vec v = \dot r \hat u_r + r\dot\theta \hat u_\theta$$

$$v_r = \dot r \ , \ v_\theta = r\dot\theta \Rightarrow V = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \ddot r \hat u_r + \dot r \dot{\hat u}_r + (\dot r \dot\theta \hat u_\theta + r\ddot\theta \hat u_\theta + r\dot\theta \dot{\hat u}_\theta)$$

$$\vec a = \ddot r \hat u_r + \dot r \dot\theta \hat u_\theta + \dot r \dot\theta \hat u_\theta + r\ddot\theta \hat u_\theta + r\dot\theta(-\dot\theta \hat u_r)$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{u}_\theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \quad \rightsquigarrow a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

حرکت دایره‌ای یکنواخت (با مختصات قطبی)

$r =$ ثابت است $\Rightarrow$ (شعاع دایره)

$\dot{r} = 0 \quad , \quad \ddot{r} = 0$ $\qquad V_r = 0$

$\qquad V_\theta = r\dot{\theta} = r\omega$

$\dot{\theta} = \omega \quad , \quad \ddot{\theta} = \dot{\omega} = \alpha = 0$ $\qquad a_r = 0 - r\omega^2$

شتاب زاویه‌ای

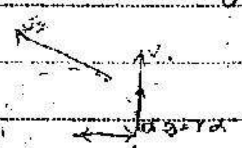
$a_\theta = 0 + 0 = 0$ شتاب زاویه‌ای صفر است.

حرکت دایره‌ای غیر یکنواخت

r ثابت $\quad \dot{r} = 0$

$\dot{\theta} = \omega \qquad \begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta = r\omega \end{cases} \qquad \begin{cases} a_r = -r\omega^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} = r\alpha \end{cases}$ شتاب مماسی

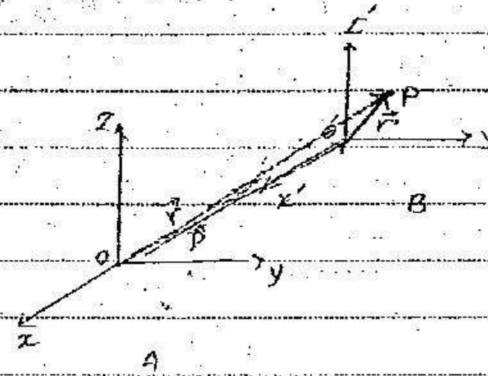
$\ddot{\theta} \neq 0$



پس حرکت دستگاه نسبی B

دستگاه A ثابت است ولی دستگاه B است

A در حول مبدا خود حرکت می‌کند



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{\rho}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

$$V_{P/A} = \vec{V}_{P/B} + \vec{V}_{B/A}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

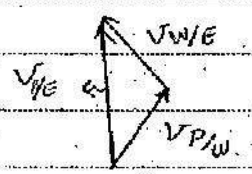
مشتق : $\frac{d}{dt}(\vec{V}_{P/A}) = \frac{d}{dt}(\vec{V}_{P/B}) + \frac{d}{dt}(\vec{V}_{B/A})$

شتاب نسبی حرکت دو بعدی $\vec{a}_{P/A} = \vec{a}_{P/B} + a_{B/A}$

اگر B با سرعت ثابت نسبت به A حرکت انتقالی داشته باشد

$\vec{a}_{B/A} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{P/A} = \vec{a}_{P/B}$

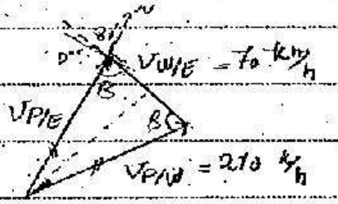
مثال: فرض کنید هواپیمای (P) در هوا حرکت می‌کند و باد (W) هم می‌وزد.



$\vec{V}_{P/E} = \vec{V}_{P/W} + \vec{V}_{W/E}$

چون اندازه سرعتش با سرعت هواپیما تغییر نمی‌کند

$V_{P/E}$ نیز همان $210 \frac{km}{h}$ است

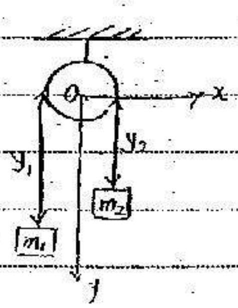


$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1/2 \times 70}{210} = 1/6$

$\theta/2 = \sin^{-1}(1/6) \Rightarrow \theta = 18.4$

$180 - 18.4 = 161.6 \rightarrow \beta = 81 \Rightarrow V_{P/E} \simeq V_{P/W}$

حرکت وابسته



$y_1 + y_2 + \pi R =$ ثابت

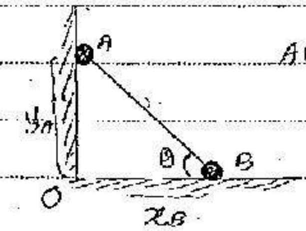
$y_1 + y_2 =$ ثابت

$\dot{y}_1 + \dot{y}_2 = 0$. $\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0$

$V_1 + V_2 = 0 \Rightarrow |V_1 = -V_2$ $a_1 + a_2 = 0$

$(a_1 = -a_2)$

مثال: نسبت سرعت A و B را بیابید



$AB = L$

$$x_B^2 + y_A^2 = L^2 \quad \text{معادلات}$$

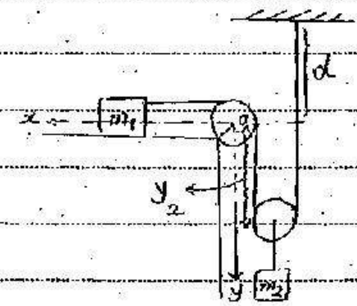
$$2x_B\dot{x}_B + 2y_A\dot{y}_A = 0$$

$$x_B V_B + y_A V_A = 0$$

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{y_A}{x_B} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} \quad \operatorname{Tan}\theta$$

$$V_B = -V_A \operatorname{Tan}\theta$$

مثال: رابطه شتاب‌ها را بیابید

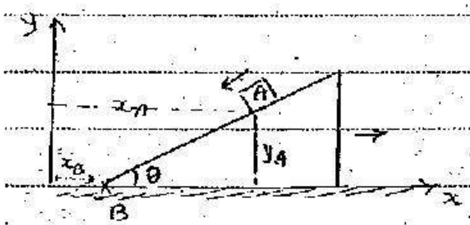


$$x_1 + 2y_2 + d = \text{مقدار ثابت}$$

$$\dot{x}_1 + 2\dot{y}_2 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + 2\ddot{y}_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -2a_2$$

مثال: رابطه شتاب‌ها را بدست آورید



$$\operatorname{Tan}\theta = \frac{y_A}{x_A - x_B}$$

$$y_A = \operatorname{Tan}\theta\,(x_A - x_B)$$

$$\dot{y}_A = \operatorname{Tan}\theta\,(\dot{x}_A - \dot{x}_B)$$

$$\ddot{y}_A = \operatorname{Tan}\theta\,(\ddot{x}_A - \ddot{x}_B)$$

$$a_{Ay} = \operatorname{Tan}\theta\,(a_{Ax} \quad a_{Bx})$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: اولاً ثابت کنید در حرکت منحنی الخط شعاع انحنای مسیر حرکت ذره از رابطه $\rho = \dfrac{v^3}{|\vec{a} \times \vec{v}|}$ بدست می‌آید.

مثال: اگر بردار موقعیت ذره‌ای بصورت زیر باشد شتاب‌های مماسی و نرمال و شعاع انحنای مسیر را بدست آورید.

$$\vec{r} = b(t + \sin t)\,\hat{i} + b(1 - \cos t)\,\hat{j}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = b(1 + \cos t)\,\hat{i} + b(\sin t)\,\hat{j} \Rightarrow v_x = b(1 + \cos t)\,\hat{i}$$

$$v_y = b \sin t\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{\rho}\hat{N} \qquad |v| = \sqrt{b^2(1 + \cos t)^2 + b^2\sin^2 t}$$

ابتدا شتاب‌ها را بدست می‌آوریم

$$|v| = b\sqrt{1 + \cos^2 t + 2\cos t + \sin^2 t}$$

$$|v| = b\sqrt{2}\cdot\sqrt{1 + \cos t}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt}\hat{T} = b\sqrt{2}\cdot\frac{-\sin t}{2\sqrt{1 + \cos t}}\hat{T} = -b\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sin t}{\sqrt{1 + \cos t}}\hat{T}$$

از طرفی $\dfrac{dv_x}{dt} = a_x = -b\sin t\,\hat{i}$, $\dfrac{dv_y}{dt} = a_y = -b\cos t\,\hat{j}$

$$|\vec{a}| = b$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \Rightarrow b^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N^2 = b^2 - a_T^2$$

با استفاده از بالا داریم $\Rightarrow |\vec{a}_N| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} b\sqrt{1 + \cos t} \Rightarrow \vec{a}_N = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} b\sqrt{1 + \cos t}\,\hat{N}$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{2b(1 + \cos t)}{\frac{\sqrt{2}}{2} b(\sqrt{1 + \cos t})} = b\,2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1 + \cos t}$$

راه دوم $|a \times v| = b^2(\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = b^2(1 + \cos t)$

در حالت دوم ضرب برداری v و a را

حساب می‌کنیم $\vec{a}_N = -\dfrac{v^2}{\rho}\hat{N}$, $|a \times v| = \dfrac{v^3}{\rho}$ $\Rightarrow \rho = \cdots$

$$\vec{a}_N = -\frac{v^2}{\rho}\hat{N}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: ذره‌ای در مسیری به معادله زیر حرکت می‌کند. بردارهای سرعت و شتاب ذره را به صورت تابعی از زمان بدست آورید (و اندازه‌ی آن‌ها)

$$y = R(1 - \cos\omega t)$$
$$x = R(\omega t - \sin\omega t)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = R(\omega - \omega\cos\omega t)$$
$$\vec{V}_x = R\omega(1 - \cos\omega t)$$

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = R(\omega \sin\omega t)$$
$$\vec{V}_y = R\omega \sin\omega t$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= R\omega^2 \sin\omega t \\ a_y &= R\omega^2 \cos\omega t \end{aligned}\right\} \Rightarrow |a| = R\omega^2$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{R^2\omega^2(2 - 2\cos\omega t)} = R\omega\sqrt{2 - 2\cos\omega t}$$

نشان دهید زاویه بین بردار سرعت و شتاب برابر است با: $\theta = \frac{1}{2}\omega t$

$$\underset{a_x v_x + a_y v_y}{a \cdot v} = |a||v|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{R^2\omega^3 \sin\omega t(1 - \cos\omega t) + R^2\omega^3 \sin\omega t \cos\omega t}{R^2\omega^3\sqrt{2 - 2\cos\omega t}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\cancel{R^2\omega^3} \sin\omega t}{\cancel{R^2\omega^2}\sqrt{\underbrace{2 - 2\cos\omega t}_{2(2\sin^2\frac{\omega t}{2})}}} = \frac{\overbrace{\sin\omega t}^{2\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2}}}{2\sin\frac{\omega t}{2}} = \cos\frac{\omega t}{2}$$

$$\cos\theta = \cos\frac{\omega t}{2} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\omega t$$

مثال: ذره‌ای روی مسیر زیر حرکت می‌کند. مؤلفه‌های سرعت و شتاب ذره را به صورت تابعی از t بدست آورید. زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{v}$ را بدست آورید و نشان دهید مقدار آن ثابت است

$$r = be^{kt} \qquad b, k, c = \text{ثابت‌اند}$$
$$\theta = ct$$

داریم $\vec{V} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = bke^{kt}\hat{r} + bce^{kt}\hat{\theta} = be^{kt}(k\hat{r} + c\hat{\theta})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = be^{kt}\left((k^2 - c^2)\hat{r} + 2kc\hat{\theta}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|a||v|} \qquad \vec{a}\cdot\vec{v} = (be^{kt})^2 \; M(k,c)$$

$$|a||v| = (be^{kt})^2 \; N(k,c)$$

$$|a| = be^{kt}\sqrt{(k^2-c^2)^2+(2kc)^2}$$

$$|v| = be^{kt}\sqrt{k^2+c^2}$$

$$\cos\theta = \frac{(be^{kt})^2}{(be^{kt})^2}\;\frac{M(k,c)}{N(k,c)}$$

دینامیک:

قانون اول نیوتن: هر جسم اگر بر آن نیرویی وارد نشود حالت سکون یا حرکت یکنواخت خود را ادامه می‌دهد.

قانون دوم نیوتن: اگر به جسمی (ذره‌ای) نیرو وارد شود دارای شتاب می‌شود.
جرم لختی

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{\text{نیرو}}{\text{شتاب}} = m \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} \qquad \sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad \sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y$$

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \qquad \sum \vec{F}_z = m\vec{a}_z$$

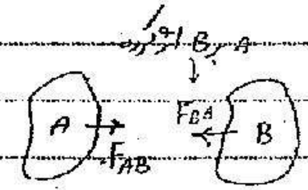
$$N = 1kg \cdot m/s^2$$

قانون هوک: $F_x = -kx$ برای هم برابر کردن نیرو، x را در برابر می‌کنیم.
افزایش طول فنر

قانون دوم شامل قانون اول هم می‌شود یعنی اگر $F=0$ باشد چون $m \neq 0$ است پس $a=0$ است.

قانون نیوتن در چهارچوب لخت قرار گرفته است.

قانون سوم نیوتن: نیرو برهم‌کنش دو جسم است

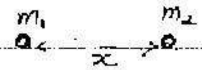


$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

اگر نتوانستیم برای نیرویی عکس‌العمل پیدا کنیم آن شبه‌نیرو است.

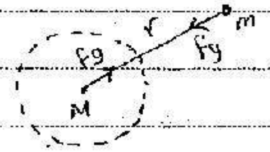
Subject:

Year. 200   Month.   Day.



$$F = G\frac{m_1 m_2}{x^2} \qquad G = 6.67\times10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}$$

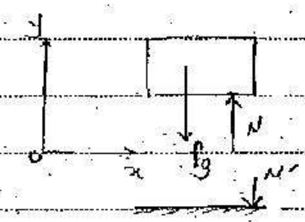
جرم جاذبه‌ای



$$f_g = \frac{Mm}{r^2}\,G$$

طبق آزمایشات جرم جاذبه‌ای و لختی یکی هستند.

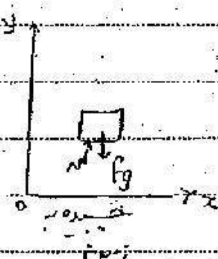
مثال: جسمی روی سطحی قرار دارد آن را تجزیه تحلیل کنید



$$\Sigma f_y = N - f_g = 0$$
$$N = f_g = mg$$

وزن جسم: وزن نیرویی است که بر جسمی وارد می‌کنیم تا آن را متعادل نگه داریم

مثال: شکل زیر را تجزیه و تحلیل کنید.



$$\Sigma f_y = N - f_g = m a_y$$
$$N = f_g + m a_y$$
$$N = m(g + a_y)$$

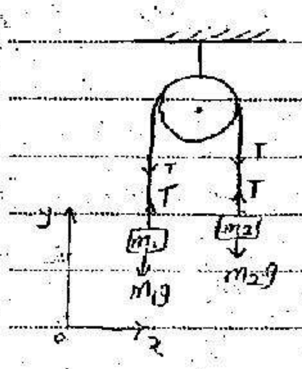
اگر $a>0$ باشد آنگاه $N > mg$

اگر $a<0$ باشد آنگاه $N < mg$

اگر $a = -g$ باشد آنگاه $N = 0$

کشش نخ: نیرویی که به نخ پاره شده باید وارد کرد تا حالت حرکت تغییر نکند

نخ ایده‌آل نخی است که در اثر کشش طولش ثابت بماند.



m_1 حرکت: $T - m_1 g = m_1 a_1$

m_2 حرکت: $T - m_2 g = m_2 a_2$

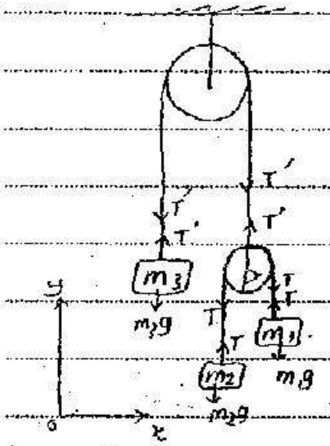
با توجه به اینکه طول نخ ثابت است $a_1 + a_2 = 0$

$$T - m_1 g = -m_1 a_2$$
$$-T + m_2 g = m_2 a_2$$
$$g(m_2 - m_1) = -(m_2 + m_1) a_2$$

$$a_2 = \frac{g(m_2 - m_1)}{-(m_2 + m_1)}$$

اگر $m_1 + m_2 = m_3$ شرط لازم $a_3 = 0$ باشد آیا $m_1 = m_2$ ؟

مثال: کشش ریسمانها را بیابید



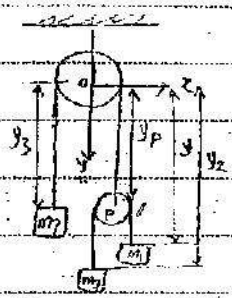
وزن قرقره — جرم قرقره

P قرقره: $T' - 2T - W_P = m_P a_P$

در این مثال $m_P = 0$

$T' - 2T = 0 \Rightarrow \boxed{T' = 2T}$

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a_1 \\ T - m_2 g = m_2 a_2 \\ T' - m_3 g = m_3 a_3 \\ T' = 2T \\ a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases}$$



$$\times -2 \begin{cases} T - m_1 g = -2m_1 a_3 - m_1 a_2 \\ T - m_2 g = m_2 a_2 \\ 2T - m_3 g = m_3 a_3 \end{cases}$$

$(\mathrm{I})\ 2m_2 g - m_3 g = -2m_2 a_2 + m_3 a_3$

$$\begin{cases} T - m_1 g = -2m_1 a_3 - m_1 a_2 \\ -T + m_2 g = -m_2 a_2 \end{cases}$$

$(\mathrm{II})\ m_2 g - m_1 g = -2m_1 a_3 - m_1 a_2 - m_2 a_2$

$(y_1 - y_P) + (y_2 - y_P) = Const \qquad y_3 + y_P = Const$

$y_1 + y_2 - 2y_P = Const \qquad \dot{y}_3 + \dot{y}_P = 0$

$\dot{y}_1 + \dot{y}_2 - 2\dot{y}_P = 0 \qquad \ddot{y}_3 + \ddot{y}_P = 0$

$\ddot{y}_3 = -\ddot{y}_P$

$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 - 2\underbrace{\ddot{y}_P}_{-\ddot{y}_3} = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\times 2m_1} \\ \xrightarrow{\times m_3} \end{array} \begin{cases} 2m_2 g - m_3 g = -2m_2 a_2 + m_3 a_3 \\ m_2 g - m_1 g = -2m_1 a_3 - m_1 a_2 - m_2 a_2 \end{cases}$$

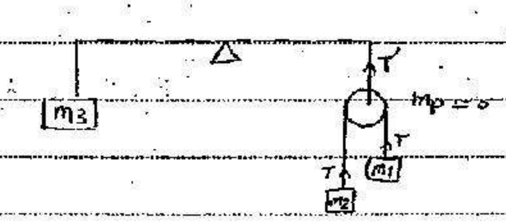
$4m_1 m_2 g - 3m_1 m_3 g + m_2 m_3 g = -4m_1 m_2 a_2 - a_2 m_3 (m_1 + m_2)$

$4m_1 m_2 g - 3m_1 m_3 g + m_2 m_3 g = a_2(-4m_1 m_2 - m_1 m_3 - m_2 m_3) \Rightarrow a_2 = \dfrac{g(4m_1 m_2 - 3m_1 m_3 + m_2 m_3)}{-4m_1 m_2 - m_1 m_3 - m_2 m_3}$

$\mathrm{I} \Rightarrow 2m_2 g - m_3 g - 2m_2 \left(\dfrac{g(4m_1 m_2 - 3m_1 m_3 + m_2 m_3)}{-4m_1 m_2 - m_1 m_3 - m_2 m_3}\right) = m_3 a_3$

$a_3 =$

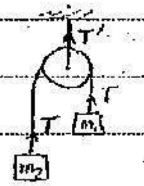
مثال:



$m_1 + m_2 = m_3$

$m_1 \neq m_2$

$m_P = 0$



m_1, m_2 زمانی ماکزیمم می‌شود که $m_1 = m_2$ باشد

$\Rightarrow T' = \dfrac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$

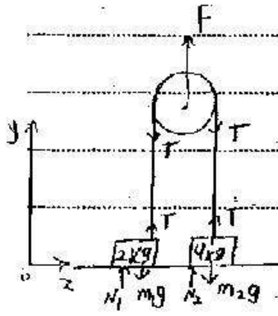
$T' = T'_{max} \Leftarrow m_1 = m_2$

که در این صورت $a = 0$

پس T' الان کمتر از T'_{max} است یعنی تعادل اهرم به هم می‌خورد و اهرم به سمت m_3 می‌چرخد

Subject:

Year. 200   Month.   Day.



مثال: مسئله را در حالت‌های زیر حل کنید

$F = 30N$

$F = 50N$

$F = 100N$

ایده‌آل $\quad F - 2T = m_p a_p = 0$

$F = 2T$

$T = F/2$

$T = 15N$ $\quad g = 9.8\ m/s^2$

هیچکدام حرکت نمی‌کنند

حالت دوم $\quad T = F/2 = 25$

$T - m_1 g = m_1 a_1$

$25 - 2 \times 9.8 = 2a_1 \Rightarrow a_1 = 2.7\ m/s^2 \uparrow$

$a_2 = 0$

$N_2 = \ldots$

حالت سوم $\quad T = F/2 = 50$

$T - m_1 g = m_1 a_1$

$50 - 2 \times 9.8 = 2a_1$

$\boxed{a_1 = 15.2}$

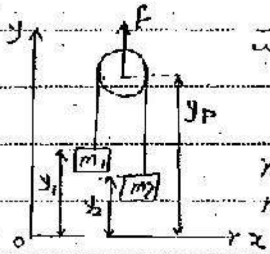
$T - m_2 g = m_2 a_2$

$50 - 4 \times 9.8 = 4a_2$

$\boxed{a_2 = 2.7}\ m/s^2$

در حالتی که $F = 100N$ است شتاب قرقره را نسبت به زمین و شتاب جسم‌ها را نسبت به قرقره بدست آورید

دستگاه مختصات را ... فرض کنیم ... قرقره دارای شتاب است



طول نخ ثابت است $\rightarrow \quad (y_p - y_1) + (y_p - y_2) = Const$

$2y_p - y_1 - y_2 = Const$

$m_1 = 2kg \quad 2\dot{y}_p - \dot{y}_1 - \dot{y}_2 = 0$

$m_2 = 4kg \quad 2\ddot{y}_p - \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 = 0$

از راه دینامیک حل نمی‌شود از سینماتیک حل کردیم

$2a_p - a_1 - a_2 = 0$

دینامیک: $\quad F - 2T = m_p a_p = 0$

$a_p = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{15.2 + 2.7}{2}$

$= 8.95 \simeq 9\ m/s^2$

$a_{m_1/E} = a_{m_1/P} + a_{P/E}$

$a_1 = a_1' + a_p \Rightarrow 15.2 = a_1' + 8.95$

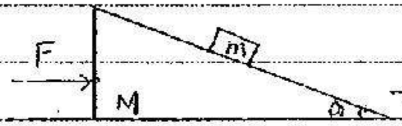
$a_1' = 6.25\ m/s^2 \uparrow$

$a_2 = a_2' + a_p \Rightarrow 2.7 = a_2' + 8.95$

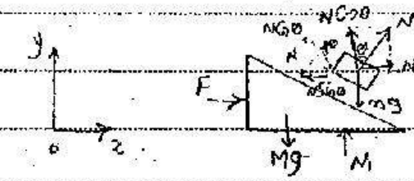
$a_2' = 6.25 \downarrow$

شتاب‌های نسبی با هم برابر است

کاربردهای قوانین نیوتن:



مثال: این گوه با چه شتابی حرکت کند تا جسم m روی گوه ساکن باقی بماند



حرکت m
$$\begin{cases} \Sigma F_x = N\sin\theta = ma_x \\ \Sigma F_y = N\cos\theta - mg = ma_y \end{cases}$$

حرکت M
$$\begin{cases} \Sigma F_x = F - N\sin\theta = Ma \\ \Sigma F_y = N_1 - N\cos\theta - Mg = 0 \end{cases}$$
$$a_y = 0$$

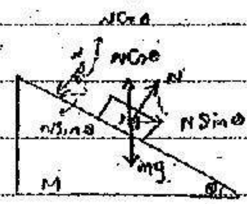
اگر $a_x = a$ باشد می‌خواهیم جسم m حرکت نکند (یعنی شتاب آن با شتاب گوه برابر باشه)

$$N\sin\theta = ma$$
$$N\cos\theta - mg = 0$$
$$\tan\theta = \frac{a}{g} \Rightarrow a = g\tan\theta$$

محاسبه F :

$$\begin{cases} F - N\sin\theta = Ma \\ N\sin\theta = ma \end{cases}$$
$$F = (m+M)g\tan\theta$$

چون m نسبت به M شتاب ندارد می‌توان هر دو را با هم یک جسم واحد در نظر گرفت.



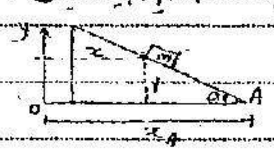
اگر گوه را به حال خود رها کنیم چه اتفاقی می‌افتد. در این حالت $F = 0$ است.

$$\begin{cases} N\sin\theta = ma_x \\ N\cos\theta - mg = ma_y \\ -N\sin\theta = Ma \\ a_y = -\tan\theta(a - a_x) \end{cases}$$

← ۴ مجهول داریم و ۳ معادله، معادله سوم را باید از هندسه مسئله استخراج کنیم.

چون جسم M در راستای y حرکت ندارد پس $a_y = 0$

$$a = a_x$$



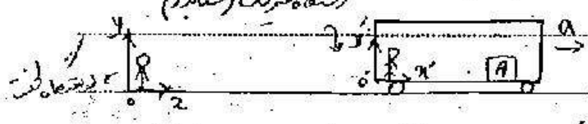
$$\tan\theta = \frac{y}{x_A - x}$$

$$y = \tan\theta(x_A - x)$$
$$\ddot{y} = \tan\theta(\ddot{x}_A - \ddot{x})$$
$$a_y = \tan\theta(a - a_x)$$

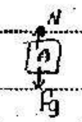
$$N\sin\theta = ma$$
$$-N\sin\theta = -Ma$$
$$2N\sin\theta = (m - M)a$$
$$a = \frac{2N\sin\theta}{m - M}$$

شبه نیروی لختی

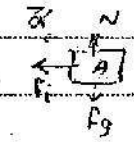
(دستگاه غیرلخت (شتابدار



A از دید ناظر (دستگاه لخت) ساکن است و همراه آن با شتاب a حرکت می‌کند

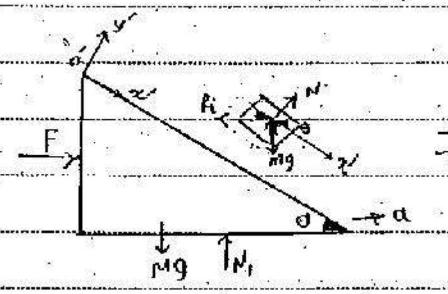


از دید ناظر (دستگاه شتابدار) A با شتاب a' در جهت مخالف حرکت می‌کند.



$\vec{F_i} = -m\vec{a} \rightarrow |\vec{F_i}| = m|\vec{a}|$ * بردار F_i در خلاف جهت بردار a است.

مسئله را از طریق شبه نیروی لختی حل کنید



جسم m ساکن است: $F_i + N + mg = 0$

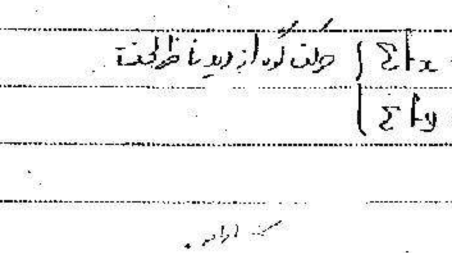
$$\begin{cases} \Sigma F_{x'} = mg\sin\theta - F_i\cos\theta = 0 \\ \Sigma F_{y'} = N - mg\cos\theta - F_i\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$mg\sin\theta - ma\cos\theta = 0$$

$$a = g\tan\theta$$

$$F = (m+M)a = (m+M)g\tan\theta$$

مسئله را با حالت خودش حل کنیم:



(جسم M حرکت می‌کند)

حرکت m از دید ناظر چسبیده به گوه

$$\begin{cases} \Sigma F_{x'} = F_i\cos\theta + mg\sin\theta = ma'_x \\ \Sigma F_{y'} = N - mg\cos\theta + F_i\sin\theta = ma'_y = 0 \end{cases}$$

در راستای y حرکتی نداریم $(a'_y = 0)$

از دید ناظر بیرونی گوه دارای شتاب است.

حرکت گوه از دید ناظر لخت

$$\begin{cases} \Sigma F_x = -N\sin\theta = -Ma \\ \Sigma F_y = N_1 - Mg - N\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$N\sin\theta = Ma = ...$

$N\sin\theta - F_i = 0$

ادامه ...

شتاب m در راستای سطح شیب دار است

$$ma\cos\theta + mg\sin\theta = ma'_x \Rightarrow a'_x = a\cos\theta + g\sin\theta$$

در راستای عمود بر گوه

$$\xrightarrow{\times\sin\theta}\begin{cases} N = mg\cos\theta - ma\sin\theta \\ N\sin\theta = Ma \end{cases} \Rightarrow Ma = mg\sin\theta\cos\theta - ma\sin^2\theta$$

شتاب بین زمین و گوه: $a = \dfrac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$

مثال: از سطح زمین گلوله‌ای را با سرعت اولیه V_0 به بالا پرتاب می‌کنیم اگر شتاب حرکت گلوله در امتداد y در سطح زمین از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

سرعت گلوله به صورت تابعی از y را بدست آورید.

$$a = \frac{g_0}{(1+\frac{y}{R})^2}$$

$$\vec{a} = \frac{-g_0}{(1+\frac{y}{R})^2}\hat{r} \qquad a = \frac{dv}{dy}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} \Rightarrow v\frac{dv}{dy} = \frac{-g_0}{(1+\frac{y}{R})^2}$$

$$\Rightarrow \int V\,dV = \int \frac{-g_0}{(1+\frac{y}{R})^2}dy \Rightarrow \int -V\,dV = \int \frac{g_0R^2}{(y+R)^2}dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}V_0^2 - \frac{1}{2}V^2 = g_0R^2\int_0^y \frac{dy}{(y+R)^2}$$

$$\frac{1}{2}V_0^2 - \frac{1}{2}V^2 = g_0R^2\left(\frac{1}{y+R}\right)\Big|_0^y$$

$$V^2 = 2g_0R^2\left(\frac{1}{y+R} - \frac{1}{R}\right) + V_0^2$$

اگر v ثابت فرض شود ارتفاع بیشینه را بدست آورید

ارتفاع: $v = 0 \Rightarrow V_0^2 = 2g_0R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{y+R}\right)$

$$2g_0R - V_0^2 = \frac{2g_0R^2}{y+R} \Rightarrow y_{max} = \frac{RV_0^2}{2g_0R - V_0^2}$$

مثال: مکان ذره‌ای در مختصات قطبی با رابطه‌ی زیر داده شده، r برحسب m، t برحسب s، θ برحسب rad. سرعت و شتاب ذره در لحظه‌ی t=1s بدست آورید، اندازه‌ی بردارهای سرعت و شتاب را بیابید.

$$r = t^3 - 2t^2 \qquad \theta = t^3 - 4t$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta})^2\,\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\hat{\theta}$

$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$

$\begin{cases} r = t^3 - 2t^2 \\ \theta = t^3 - 4t \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = (3t^2 - 4t)\,\hat{r} + (t^3 - 2t^2)(3t^2 - 4)\,\hat{\theta}$

$\vec{a} = \left(6t - 4 - (t^3 - 2t^2)(3t^2 - 4)^2\right)\hat{r} + \left(2(3t^2 - 4t)(3t^2 - 4) + (t^3 - 2t^2)6t\right)\hat{\theta}$

به ازای t های مختلف داریم

مثال: از ارتفاع زیاد جسمی بدون سرعت اولیه رها می‌شود اگر نیروی مقاومت هوا ثابت فرض شود یا سرعت خطی v
متناسب باشد. الف) سرعت ذره به صورت تابعی از زمان ب) پس از چه مدت جسم به سرعت حدی می‌رسد؟
ج) پس از چه مدتی سرعت جسم به ۹۹٪ سرعت حدی می‌رسد؟ در این مدت جسم چه مسافتی را طی کرده است؟

زمین $\downarrow +$ R, mg

$R = -k\vec{v}$ $* \int \frac{1}{x \pm a}\,dx = \ln|x \pm a|$

$\vec{F} = m\vec{g} - k\vec{v}$

$m\frac{dv}{dt} = -kv + mg \rightsquigarrow -dt = \frac{m\,dv}{kv - mg}$

$-dt = \frac{m}{k}\left(\frac{dv}{v - \frac{mg}{k}}\right)$

$\rightsquigarrow \int_0^t -dt = \int_0^v \frac{m}{k}\left(\frac{dv}{v - \frac{mg}{k}}\right) \rightsquigarrow -t = \frac{m}{k}\ln\left|v - \frac{mg}{k}\right|\Big|_0^v$

$\rightsquigarrow -t = m/k\,\ln\left|\frac{v - mg/k}{-mg/k}\right| = m/k\,\ln\left|1 - \frac{v}{mg/k}\right|$

+ مثبت است آن عبارت بین
چون این مقادیر در حل ...

$\frac{v}{mg/k} < 1$

$\sum F = 0 \rightarrow -kv + mg = 0$

$V = V_T = \frac{mg}{k}$

$V < V_T \Rightarrow V < \frac{mg}{k}$

$\frac{V}{mg/k} < 1$

$-t = m/k\,\ln\left(1 - \frac{V}{V_T}\right)$

$e^{-\frac{k}{m}t} = 1 - \frac{V}{V_T} \rightsquigarrow \frac{V}{V_T} = \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

$V = V_T\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

ب) $t \to \infty \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}t} \to 0 \Rightarrow V \to V_T$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$V=\frac{99}{100}V_T \Rightarrow \frac{99}{100}V_T=V_T(1-e^{-\frac{k}{m}t}) \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}t}=\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{m}t=Ln\frac{1}{100}=-4.6$$

$$t_1=\frac{m}{k}4.6$$

$$V=\frac{dy}{dt}=(1-e^{-\frac{k}{m}t})V_T \Rightarrow \int_H^y dy=V_T\int_0^t(1-e^{-\frac{k}{m}t})\,dt$$

$$\Delta y=V_T\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right)\Big|_0^t$$

$$\Delta y=V_T\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{m}{k}\right)$$

$$t=t_1=\frac{m}{k}Ln\frac{1}{100} \qquad \Delta y=V_T\left(-Ln\frac{1}{100}\frac{m}{k}+\frac{m}{k}e^{-Ln\frac{1}{100}}-\frac{m}{k}\right) \quad =Ln\,100$$

$$\Delta y=\frac{m}{k}V_T(4.6+100-1)$$

$$\Delta y=103.6\frac{m}{k}V_T$$

مثال: اگر سرعت ذره‌ای به جرم 4kg در لحظات مختلف مطابق زیر باشد، رابطه $V(t)$ را بیابید و شتاب را تعیین کنید

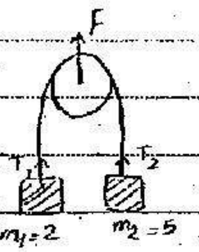
$t=$	0	1	2	3	4
$V=$	2	5	8	11	14

$\rightarrow V=3t+2 \rightarrow a=3$

مثال: شتاب‌ها را حساب کنید که $F=35\ N$

$F=70\ N$

$F=140\ N$



$$\begin{cases} m_1g-T_1=m_1a_1 \\ m_2g-T_2=m_2a_2 \\ F=T_1+T_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m_1(g+a_1)=T_1 \\ m_2(g+a_2)=T_2 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow F=T_1+T_2$$

$$F=m_1(g+a_1)+m_2(g+a_2)$$

$$\Rightarrow F-7g=2a_1+5a_2$$

اگر $F=35\ N$ ∴ $F<7g$ یا $F=7g$

دستگاه ساکن است که حرکت نمی‌کند (وزنه‌ها روی زمین هستند)

Subject:

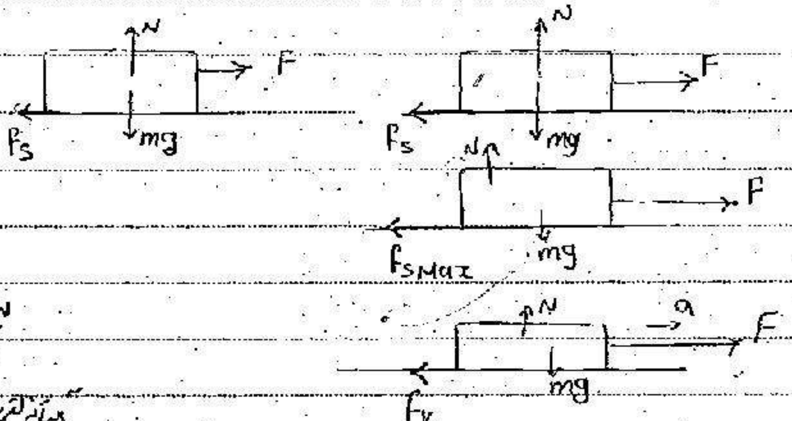
Year. 200 Month. Day.

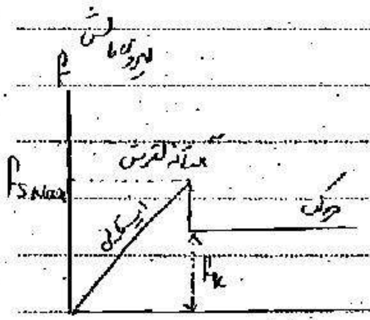
$F = 140\,N \Rightarrow 70 = (2a_1 + 5a_2)$

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 - T_1 = 2a_1 \\ 50 - T_2 = 5a_2 \\ T_1 + T_2 = 140 \rightarrow T_2 = 140 - T_1 \end{cases}$$

$$70 + 2a_1 = 5a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{70 + 2a_1}{5} \rightarrow a_1, a_2 \cdots$$

حالت





$$\begin{cases} f_s \le \mu_s N \\ f_{sMax} = \mu_s \cdot N \end{cases}$$

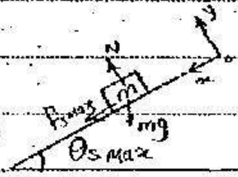
$f_k = \mu_k \cdot N$

نیروی حالت لغزش یا جنبشی

ضریب حالت ایستایی

$\mu_s > \mu_k$

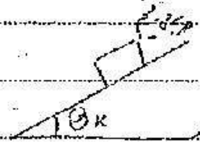
$\mu_s \cdot N$



$\Sigma F_x = mg \sin\theta_s - f_{s\,max} = 0$ آستانه لغزش

$\Sigma F_y = N - mg \cos\theta_s = 0$

$mg \sin\theta_s - \mu_s mg \cos\theta_s = 0 \Rightarrow \mu_s = \tan\theta_s$



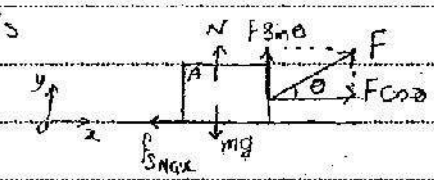
$\mu_k = \tan\theta_k$

θ_k را کمتر از θ_s می‌گیریم

تا حرکت کند ... حرکت یکنواخت

در شکل مقابل θ را چنان تعیین کنید که برای به حرکت درآوردن جسم A کمترین نیرو لازم باشد؟

ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و تکیه‌گاه $= \mu_s$



$\sum F_y = 0$

$$\begin{cases} N + F\sin\theta - mg = 0 \\ N = mg - F\sin\theta \end{cases}$$

$\sum F_x = 0$ در آستانه حرکت (تعادل دارد)

$$\begin{cases} F\cos\theta - f_{s\,max} = 0 \\ F\cos\theta - \mu_s(mg - F\sin\theta) = 0 \end{cases}$$

$$F = \frac{\mu_s mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}$$

برای اینکه F مینیمم باشد باید مخرج آن ماکسیمم باشد.

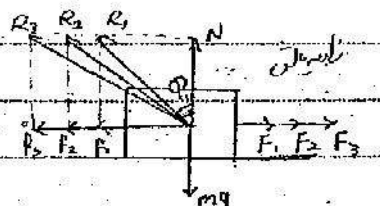
برای اینکه A ماکسیمم باشد باید $A = \cos\theta + \mu_s \sin\theta$

مشتق آن صفر باشد $\frac{dA}{d\theta} = -\sin\theta + \mu_s \cos\theta = 0$

$\mu_s \cos\theta = \sin\theta$

$\mu_s = \tan\theta$

$\theta = \tan^{-1}\mu_s$

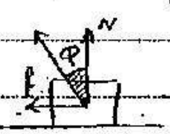


زاویه φ بین نیروی عمودی و واکنش تکیه‌گاه متغیر است

ضریب اصطکاک با تانژانت زاویه واکنش تکیه‌گاه در حال حرکت برابر است

مولفه‌ی مماسی واکنش تکیه‌گاه را نیروی اصطکاک می‌گویند

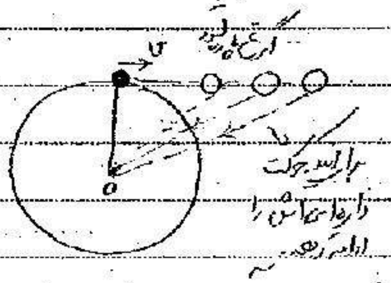
زاویه‌ای که واکنش تکیه‌گاه با خط قائم می‌سازد را زاویه اصطکاک می‌گوییم



$\tan\varphi = \frac{f}{N}$ $\qquad \tan\varphi_k = \frac{\mu_k N}{N} = \mu_k$ (در حین حرکت)

$$\tan\varphi_s = \frac{f_{s\,max}}{N} = \mu_s$$

دینامیک حرکت دایره‌ای

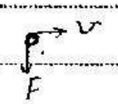


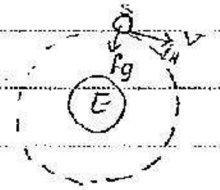
$F = ma \qquad a = \frac{v^2}{r}$

$F = m\frac{v^2}{r}$

برای اینکه در یک حرکت دایره‌ای داشته باشیم باید یک نیرویی به عنوان نیروی مرکزگرا داشته باشیم

یا F باید داشته باشیم که یک مولفه‌ی آن عمود بر v باشد.





چون fg در راستای شعاع است اما بر v عمود است (v_H) پس این ماهواره حرکت دایره‌ای
حول مرکز زمین است و شتاب آن شتاب مرکزگرا و ثابت است.

کی ماهواره مخابراتی را در چه ارتفاعی از سطح زمین در مدار قرار دهیم تا ناظر زمینی آن را ساکن ببیند

$$F_g = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2$$

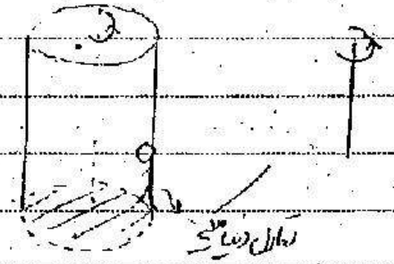
$$\frac{GmM}{r^2} = mr\omega^2 \Rightarrow r^3 = \frac{GM}{\omega^2} \Rightarrow r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

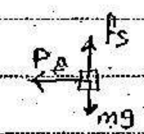
$$r^3 = \frac{g_0 R_E^2}{4\pi^2} \cdot T^2$$

$$r^3 = \frac{9.8\times(6.4\times10^5)^2}{4\pi^2}(86400)^2 \simeq (73)^{1/3}\times 10^7 \, m$$

$$\simeq 4.2\times10^7 \simeq 42000 \, km$$

(ارتفاع از زمین) $h = 42000 - R_E =$





$$\begin{cases} P = ma = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2 \\ mg - f_{s\,max} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{s\,max} = \mu_s P \\ P = mr\omega^2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$mg - \mu_s P = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{\mu_s r} \Rightarrow \omega_{min} = \sqrt{g/\mu_s \cdot r}$$

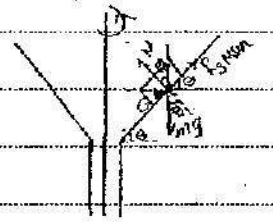
(هر جسمی که روی کره زمین هست تعادل دینامیکی دارد زیرا چون کره زمین در حال دوران است)

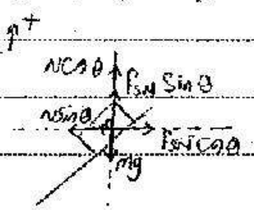
هر چه شعاع دوران بیشتر باشد راحت‌تر دوران به تعادل می‌رسد.

اگر ω زیاد شود به شخص فشار بیشتری وارد می‌شود.

مثال: جسم کوچکی روی سطح داخلی قیف قرار دارد. جسم و قیف را حول محور قائم به دوران درمی‌آوریم. حدود ω را چنان تعیین کنید که جسم نسبت به سطح قیف ساکن بماند.

ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و قیف $= \mu_s$





$\omega_{Min} \cdots\cdots \omega_{Max}$

$$\sum F_{\perp} = N\sin\theta - f_{sMax}\cos\theta = mr\omega^2$$

مؤلفه‌های راستای شعاع در r

$$\Rightarrow \begin{cases} N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta = mr\omega_{min}^2 \\ N\cos\theta + \mu_s N\sin\theta = mg \end{cases}$$

$$\sum F_{\parallel} = N\cos\theta + f_{sMax}\sin\theta - mg = 0$$

مؤلفه‌های محور دوران

$$\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta} = \frac{r}{g}\omega_{min}^2$$

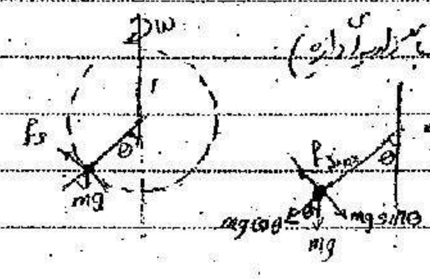
$$\omega_{min} = \left(\frac{\tan\theta - \mu_s}{1 + \mu_s\tan\theta} \times \frac{g}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_{Max} = \left(\frac{\tan\theta + \mu_s}{1 - \mu_s\tan\theta} \times \frac{g}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

درست بعد از این شرایط به بالا اصطکاک رو به پایین است ولی بالا حرکت می‌شود

مثال: حدود ω چقدر باشد تا زاویه θ حفظ شود؟

برای اینکه θ حفظ شود باید جسم m یک حرکت دایره‌ای با سرعت ω (حول محور قائم) داشته باشد.



$$-mg\cos\theta = mr\omega^2$$

$$f_{sMax} = mg\sin\theta \Rightarrow \mu_s\, mg\cos\theta = mg\sin\theta$$

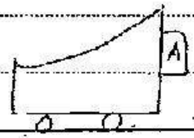
$$\cos\theta = \frac{1}{\mu_s}\sin\theta$$

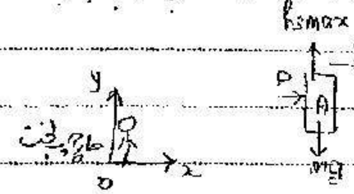
$$-g\cos\theta = r\omega^2$$

$$-g\,\frac{1}{\mu_s r}\sin\theta = \omega_{min}^2 \Rightarrow \omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}\sin\theta}$$

مثال، در شکل مقابل ارابه با چه شتابی حرکت کند که جسم A روی بدنه‌ی ارابه به پایین نلغزد

ضریب اصطکاک ایستایی بین ارابه و جسم μ_s





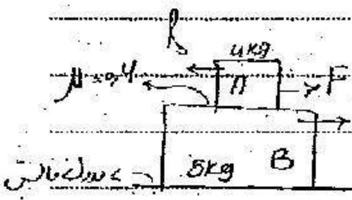
$\sum F_x = P = ma$

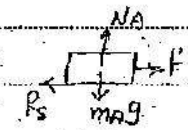
$\sum F_y = f_{smax} - mg = 0 \Rightarrow f_{smax} = \mu_s P$

$$\left.\begin{array}{l} P = ma \\ \mu_s P = mg \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\mu_s} = \frac{a}{g} \Rightarrow a = \frac{g}{\mu_s}$$

$a \geq \frac{g}{\mu_s}$ اگر شتاب ارابه بیشتر باشد جسم پایین نمی‌لغزد

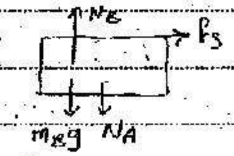
مثال: در مثال مقابل که F مقادیر زیر را اختیار می‌کند حرکت را بدست آورید.





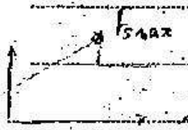
$F = 20 , 28.8 , 40$

$g = 10$



در آستانه لغزش A روی B نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه وارد می‌شود

$f_{smax} = \mu_s N_A = \mu_s m_A g = 0.4 \times 4 \times 10 = 16\ N$



$\sum F_x = f_{smax} = m_B a_B$

$16 = 5 \times a_B \Rightarrow a_B = \frac{16}{5} = 3.2\ m/s^2$

چون دو جسم با هم حرکت می‌کنند پس $a_B = a_A = 3.2\ m/s^2$

$\sum F_x = F - f_{smax} = m_A a_A$

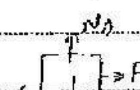
$F - 16 = 4 \times 3.2$

$F = 28.8\ N$ ماکسیمم نیرویی که می‌توان وارد کرد تا دو جسم با هم حرکت کنند.

حالت اول: $20 < 28.8$ پس دو جسم با هم حرکت می‌کنند $\Rightarrow a = \frac{20}{4+5} = 2.2\ m/s^2 , f_s = 11\ N$

حالت دوم: $28.8 = 28.8$ دو جسم با هم حرکت می‌کنند ، $f_s = 16$ ، A در آستانه لغزش روی B است.

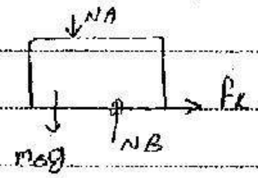
حالت سوم: $40 > 28.8$ A روی B می‌لغزد و هر کدام شتاب جداگانه‌ای دارند.



$f_k = \mu_k N = 0.4 \times 4 \times 10 = 16\ N$

$F - f_k = m_A a_A$

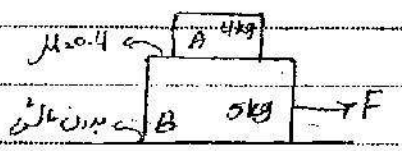
$40 - 16 = 4a_A \Rightarrow a_A = 6\ m/s^2$

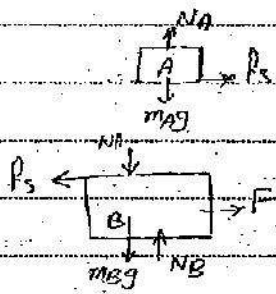


$f_k = m_B a_B$

$a_B = \frac{16}{5} = 3.2\ m/s^2$

در مسئله فوق اگر نیروی F به جسم B اثر کند مسئله را از نو حل کنید.
حداکثر چه نیرویی می‌توان به جسم B اثر داد تا دو جسم با هم حرکت کنند.





ابتدا شکل نیروهای هر جسم را رسم می‌کنیم.

$f_{s\,max} = \mu_s N$

$= 0.4 \times 4 \times 10 = 16\ N$

$f_{s\,max} = m_A a_A$

$16 = 4a_A \Rightarrow a_A = 4\ m/s^2$

چون دو جسم با هم حرکت می‌کنند $a_A = a_B = 4\ m/s^2$

$F - f_{s\,max} = m_B a_B$

$F - 16 = 5 \times 4 \Rightarrow F = 36\ N$ حداکثر نیروی لازم

حالت اول $F = 20N$ $\quad 20 < 36$ دو جسم با هم حرکت می‌کنند و شتاب یکسان دارند $\Rightarrow a = \frac{20}{4+5} = 2.2\ m/s^2$

حالت دوم، $F = 28.8\ N$ $\quad 28.8 < 36$ " " $\Rightarrow a = \frac{28.8}{4+5} = 3.2\ m/s^2$

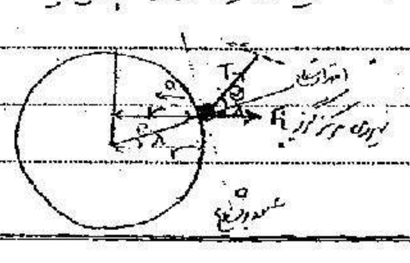
حالت سوم، $F = 40\ N$ $\quad 40 > 36$ حرکت این دو جسم شتاب‌های
مختلف دارند و نمی‌توان آن‌ها را یک جسم فرض کرد.

حالت سوم: $f_k = m_A a_A$

$16 = 4a_A \Rightarrow a_A = 4\ m/s^2$

$F - f_k = m_B a_B \Rightarrow 40 - 16 = 5a_B \Rightarrow a_B = 4.8\ m/s^2$

مثال: به علت دوران زمین خط شاقول با شعاع زمین زاویه‌ای که می‌سازد این زاویه را در عرض جغرافیایی λ حساب کنید.



$\vec{T} + \vec{F_i} + m\vec{g} = 0$ از دید ناظر چسبیده به زمین

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$\Sigma F_x = T\cos\theta - mg_0 + F_i\cos\lambda = 0$

$\Sigma F_y = T\sin\theta - F_i\sin\lambda = 0 \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{F_i\sin\lambda}{mg_0 - F_i\cos\lambda}$

$F_i = mr\omega^2 = mR\cos\lambda\,\omega^2 \qquad \tan\theta = \dfrac{mR\omega^2\sin\lambda\cos\lambda}{mg_0 - mR\omega^2\cos^2\lambda}$

$\tan\theta = \dfrac{\frac{1}{2}R\omega^2\sin 2\lambda}{g - R\omega^2\cos^2\lambda} \Rightarrow \theta \simeq \dfrac{\frac{1}{2}R\omega^2\sin 2\lambda}{g}$

$R\omega^2 = 6.4\times10^6 \cdot \left(\dfrac{2\pi}{86400}\right)^2 \simeq 3\times10^{-2}$

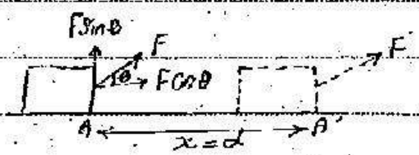
اگر $\lambda = 45^\circ \Rightarrow \theta \to \theta_{max}$

$\theta_{Max} = \dfrac{R\omega^2}{2g} \Rightarrow \theta_{Max} = \dfrac{6400\times10^3\left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2}{2\times9.8}$

$\simeq 0/1^\circ$

کار انرژی

تعریف کار

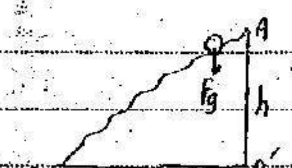


$W = F_x \cdot d = F\cos\theta \cdot d$

جابجایی x تصویر نیرو بر جابجایی = کار

$W = Fd\cos\theta$

تصویر جابجایی بر نیرو x نیرو = کار

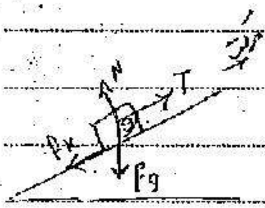


$W = F_g \times AB' = F_g h = mgh$

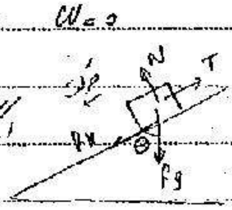
$\theta < 90 \quad W > 0$

$\theta > 90 \quad W < 0$

$\theta = 90 \quad W = 0$



اگر T را بکشیم



$W_T < 0$

$W_{F_g} > 0$

$W_N = 0$

$W_{F_g} < 0 \qquad W_T > 0$

$W_N = 0$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

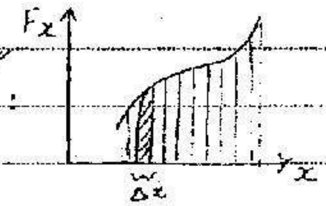
اگر نیرو ثابت باشد ← $\vec{W} = \vec{F}\cdot\vec{d}$

ضرب عددی

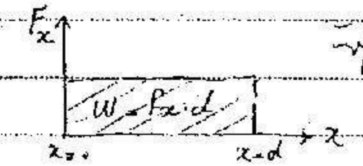
واحد کار = واحد نیرو × واحد جابجایی

$1N.m = 1N \times 1m \rightarrow 1N.m = 1J$

اگر F ثابت نباشد :



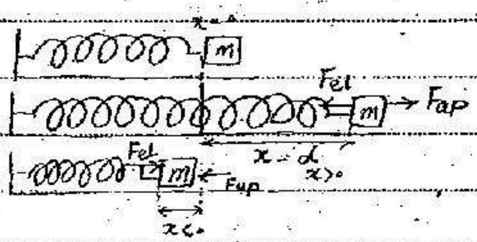
اگر F ثابت



$\Delta W = F_x \cdot \Delta x$

$W = \sum_{i=1}^{N} F_x \Delta x_i \xrightarrow{\lim} W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$ = سطح زیر منحنی نیرو برحسب جابجایی

کار نیروی فنر



$F_{el} = -kx$

k: ضریب سختی فنر

x: تغییر طول فنر نسبت به حالت آزاد فنر

$k = -\frac{F_{el}}{x}$ N/m

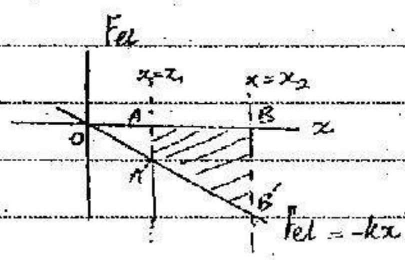
$k = 100$ N/m اگر فنر را 1m بکشیم 100 نیوتن نیرو لازم است.

$$W_{el} = \int_{x_1}^{x_2} F_{el}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx\, dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

کار نیروی کشسانی فنر ؛ $W_{el} = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$

$x_1 = 0 \quad x_2 = x$

$W_{el} = -\frac{1}{2}kx^2$



$S_{ABA'B'} = S_{OBB'} - S_{OAA'}$

$= \frac{OB \times BB'}{2} - \frac{OA \times AA'}{2}$

$W = S_{ABB'B'}$

$= \frac{x_2 \times kx_2}{2} - x_1 \times \frac{kx_1}{2}$

$= \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$

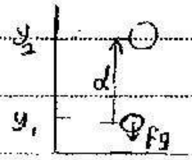
Subject:

Year.200 Month. Day.

کار نیروی گرانش

g ثابت فرض شود

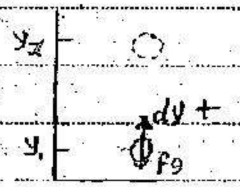
وقتی g را ثابت فرض می‌کنیم که جابجایی زیاد نباشد موجب تغییر g شود.



$$W = -F_g \cdot d = -mg(y_2 - y_1)$$

$$y_2 < y_1 \rightarrow W > 0$$

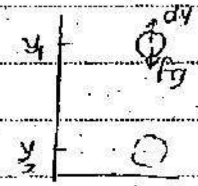
$$y_1 < y_2 \rightarrow W < 0$$



$$W = \int_{y_1}^{y_2} F_g\, dy = -mg \int_{y_1}^{y_2} dy = -mg(y_2 - y_1) < 0$$

$$y_2 > y_1$$

dx , dz , dy در راستای جهت مثبت باشد

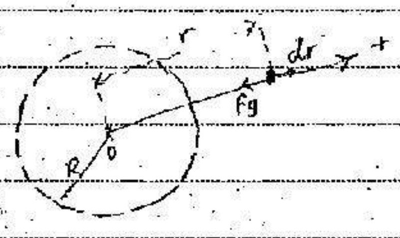


$$W = \int_{y_1}^{y_2} F_g\, dy = -mg \int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$= -mg(y_2 - y_1) > 0$$

$$y_1 > y_2$$

جسمی را به فاصله r از مرکز زمین (نقطه O) در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم وقتی در جهت شعاع زمین جابجا شود کار را بیابیم.



$$W = \int_1^2 \vec{F}_g \cdot \vec{dr} = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{GmM}{r^2}\, dr$$

$$W = GmM \int_{r_1}^{r_2} -\frac{dr}{r^2}$$

$$W = GmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$r_2 > r_1 \rightarrow W < 0$$

$$r_1 < r_2 \rightarrow W > 0$$

فرض $r_1 = r ,\ r_2 = r + \Delta r$

$\Delta r << r$ جابجایی زیاد نباشد $\rightarrow W = GmM\left(\frac{1}{r+\Delta r} - \frac{1}{r}\right)$

$$W = GmM\left(\frac{r - r - \Delta r}{r(r+\Delta r)}\right)$$

Subject:

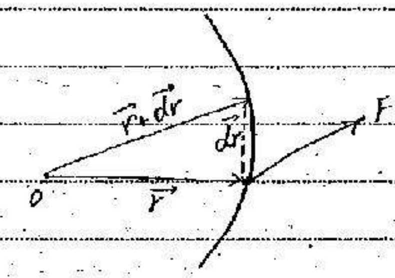
Year. 200 Month. Day.

$$W = GmM\left(\frac{-\Delta r}{r(r+\Delta r)}\right) \quad W = -\frac{GmM}{r^2}(\Delta r)$$

$$r(r+\Delta r) = r^2\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right) \simeq r^2 \qquad W = -F_g(\Delta r)$$

$$W = -mg\,(y_2 - y_1)$$

محاسبه کار در حالت کلی



$$dW = \vec{F}\cdot\vec{dr} = F_s\, ds$$

$$W = \int_1^2 \vec{F}\cdot\vec{dr}$$

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$W = \int_1^2 (F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k})(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z\,dz$$

توان: آهنگ انجام کار

توان متوسط $\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad j/s = W$ وات

توان لحظه‌ای $P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\cdot dr}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{\vec{dr}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \quad P = \vec{F}\cdot\vec{V}$

$1\,HP = 550 \quad = 746$ wat

اسب بخار

$1\,cv = 75\,kgf\ m/s \simeq 736$ wat

کیلوگرم نیرو

$1\,kwh = 1\,kw \times 1h$

$= 10^3\,j/s \times 3600\,s = 3.6\times10^6\,j = 3600\,kj$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

قضیه کار-انرژی

$\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot dr$

$$\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 m\, d\vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$W = \frac{1}{2}(mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2)$$

$$W = k_2 - k_1$$

کار کل = تغییرات انرژی جنبشی ← $W = \Delta k$

$\vec{V}\cdot\vec{V} = V^2 \Rightarrow \vec{v}\,d\vec{v} + \vec{v}\cdot d\vec{v} = 2v\,dv$

$$2\vec{v}\cdot d\vec{v} = 2v\,dv$$

$$\int \vec{v}\cdot d\vec{v} = \int v\,dv \Rightarrow \int \vec{v}\cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}v^2 + C$$

مثال: در اثر نیروی زیر ذره‌ای دایره‌ای واقع در صفحه xoy طی می‌کند اگر مرکز دایره در مبداء مختصات واقع بوده و شعاع دایره 3 واحد فرض شود. کار نیروی $\vec{F}$ را برای یک دور کامل بر روی دایره در جهت مثبت بدست آورید. ج: $W = 18\pi$

$\vec{F} = (2x - y + z)\hat{i} + (x + y + z^2)\hat{j} + (3x - 2y)\hat{k}$

$r = 3$

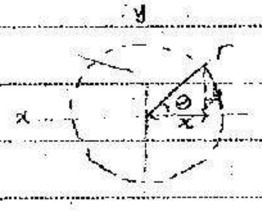
$z = 0 \Rightarrow \vec{F} = (2x - y)\hat{i} + (x + y)\hat{j} + (3x - 2y)\hat{k}$

چون ذره xoy را طی می‌کند

$z =$ ثابت $\Rightarrow dz = 0$

$$W = \int F_x\,dx + \int F_y\,dy + \int F_z\,dz$$

$$W = \int_1^2 (2x - y)\,dx + \int_1^2 (x + y)\,dy$$



$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$

$dx = -r\sin\theta\, d\theta \qquad dy = r\cos\theta\, d\theta$

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

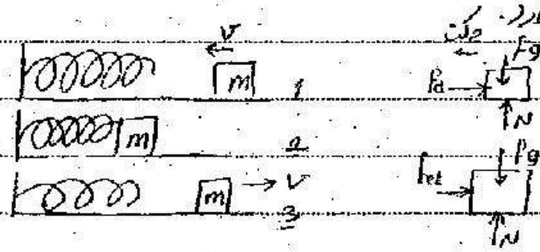
$$W=\int_0^{2\pi}(2r\cos\theta-r\sin\theta)(-r\sin\theta\,d\theta)+\int_0^{2\pi}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\cos\theta\,d\theta$$

$$W=\int_0^{2\pi} r^2(\sin2\theta+\overbrace{\sin^2\theta}^{\frac{1-\cos2\theta}{2}})\,d\theta+\int_0^{2\pi} r^2(\overbrace{\cos^2\theta}^{\frac{1+\cos2\theta}{2}}+\tfrac{1}{2}\sin2\theta)\,d\theta$$

$r=3 \Rightarrow W=18\pi$

پتانسیل انرژی

- کار نیروی پایستار به مسیر حرکت بستگی ندارد.



$W_{1\to2}=-\frac{1}{2}kx^2$

$W_{2\to3}=+\frac{1}{2}kx^2$

$W_{کل}=-\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}kx^2=0$

$W_{کل}=\Delta K$

$\Delta K=0 \Rightarrow K_1=K_2$

اصطکاک نیروی ناپایستار است.

کار نیروی اصطکاک منفی است و موجب ... اتلاف انرژی شده است.

پایستگی انرژی $\quad U_1+K_1=U_2+K_2$

$(K_2-K_1)+(U_2-U_1)=0$

$\Delta K+\Delta U=0$ $\quad$ اگر در این صورت انرژی جنبشی کم شود

انرژی پتانسیل زیاد می‌شود تا جمع ثابت شود یا بالعکس

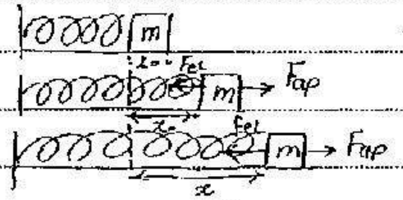
انرژی پتانسیل نوعی از انرژی مکانیکی است که به سرعت بستگی ندارد بلکه به وضعیت جسم بستگی دارد.

$$\begin{cases}\Delta U+\Delta K=0 & \text{مخصوص نیروهای پایستار}\\ W=\Delta K & \text{(برای هر نوع نیرو) همه}\end{cases} \Rightarrow \underbrace{\Delta U}_{\text{تغییر انرژی پتانسیل}}=-\underbrace{W}_{\text{کار نیروی پایستار}}$$

محاسبه انرژی پتانسیل یک فنر

PILAVARAN

PAGE:



$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F_{el}\, dx$$

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} -kx\, dx$$

$$U(x) - U(x_0) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

قرارداد: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ U(x_0) = 0 \end{cases}$

$U(x) - 0 = \frac{1}{2}kx^2$ (رابطه‌ی اساسی)

$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

اگر فنری را به اندازه‌ی x بکشیم یا فشرده کنیم افزایش انرژی پتانسیل فرقی نمی‌کند (در هر دو حالت مثل هم است)

انرژی پتانسیل گرانشی

$$\Delta U = -W$$

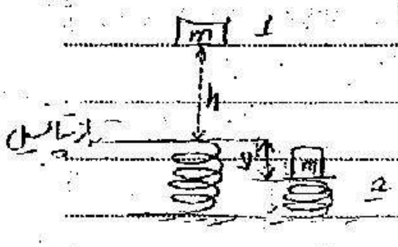
$$U_2 - U_1 = -(-mg(y_2 - y_1))$$

$$U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1)$$

قرارداد (دلخواه) $\begin{cases} U_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = h \end{cases}$

$U_2 = mgy_2 = mgh$ (رابطه‌ی اساسی)

مثال: در شکل زیر اگر جسم m رها شود حداکثر تراکم فنر را بیابید.



$$(U_{el} + U_g + K)_1 = (U_{el} + U_g + K)_2$$

$$0 + mgh + 0 = \frac{1}{2}ky^2 - mgy + \frac{1}{2}mv^2$$

$$ky^2 - 2mgy + mv^2 - 2mgh = 0$$

$$y = y_{Max} \rightarrow v = 0$$

$$ky_{Max}^2 - 2mgy_{Max} - 2mgh = 0$$

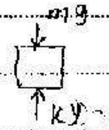
$$y_{Max} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$y_{Max} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$$

سرعت ماکسیمم را هم بدست آورید.



نیروی فنر رو به بالا هم جهت ... می‌کند (هرچه y بیشتر باشد ky هم بیشتر است)

$$F_{net} = mg - ky$$

در حالت تعادل سرعت ماکسیمم است ← $mg - ky = 0$

$$y = \frac{mg}{k}$$

می‌توانیم از معادله انرژی جسم v را بدست آوریم

$$ky^2 - 2mgy + mv^2 - 2mgh = 0 \longrightarrow v^2 = -\frac{k}{m}y^2 + 2g(y+h)$$

مشتق می‌گیریم : $2v\frac{dv}{dt} = -\frac{2k}{m}y\frac{dy}{dt} + 2g\frac{dy}{dt}$

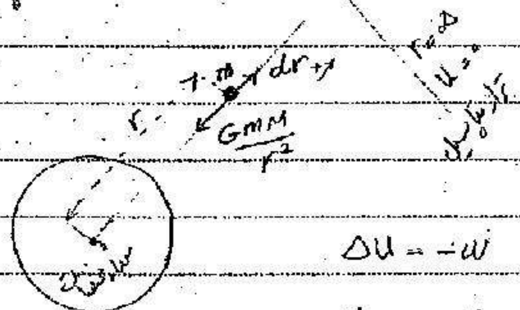
$$2\frac{dv}{dt} = -\frac{2k}{m}y + 2g$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}y + g = 0 \Rightarrow y = \frac{mg}{k}$$

$$v^2_{Max} = -\frac{k}{m}\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 2g\left(\frac{mg}{k} + h\right)$$

به ازای $y = \frac{mg}{k}$ سرعت به بیشینه خود می‌رسد

زمان ماکسیمم در چه لحظه‌ای است؟



مثال: پتانسیل انرژی جسم m را بیابید.

$$\Delta U = -W$$

$$U_{(r_0)} - U_{(r)} = \int_r^{r_0} \vec{F_g} \cdot \vec{dr}$$

$$U_{(r_0)} - U_{(r)} = -\int_r^{r_0} -\frac{GmM}{r^2}\, dr$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$U(r_0) - U(r) = -GmM\left|\frac{1}{r}\right|_r^{r_0}$$

$$U(r_0) - U(r) = -\frac{GmM}{r_0} + \frac{GmM}{r}$$

کاری که گرانش انجام می‌دهد تا از این نقطه به بی‌نهایت برسیم

قرارداد $\begin{cases} r_0 = \infty \\ U(r_0) = 0 \end{cases}$ $\qquad U(r) = -\frac{GmM}{r}$ (جرم m)

$r \geq R_e$

$$U_2 - U_1 = -\frac{GmM}{r_2} - \left(-\frac{GmM}{r_1}\right)$$

مبدا = مرکز زمین

انرژی پتانسیل = جایی که پتانسیل صفر است

$$U_2 - U_1 = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad \text{اگر } r_2 = r + \Delta r$$

$$U_2 - U_1 = GmM\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right) \qquad r_1 = r, \quad \Delta r \ll r$$

$$U_2 - U_1 = \frac{GmM}{r^2}(r_2 - r_1) \qquad r_1 r_2 = r(r + \Delta r) = r^2\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right) \simeq r^2 \quad (\Delta r \ll r)$$

$$U_2 - U_1 = mg(r_2 - r_1) \rightarrow r_2 - r_1 = y_2 - y_1$$

$$U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1)$$

مثال: جسمی به جرم m را از نقطه‌ای به فاصله r از مرکز زمین به بی‌نهایت می‌بریم. کار نیروی گرانش را در این جابجایی بدست آورید. آن را با انرژی پتانسیل گرانشی جرم m در نقطه آغاز مقایسه کنید.

$$U(r) = -G\frac{mM}{r} \qquad W = \int_1^2 \vec{F_g} \cdot d\vec{r}$$

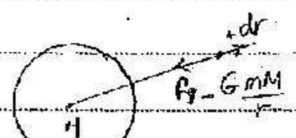
$$W = -\int_r^{\infty} G\frac{mM}{r^2}\, dr \rightarrow W = GmM\left[\frac{1}{r}\right]_r^{\infty}$$

$$W = GmM\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right)$$

$$W = -G\frac{mM}{r}$$

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$

پتانسیل گرانشی جرم m در یک نقطه از میدان گرانش برابر است با کاری که نیروی گرانش روی جرم m انجام می‌دهد تا m از نقطه مورد نظر به بی‌نهایت برده شود.



پتانسیل گرانشی جرم m در یک نقطه از میدان گرانش برابر است با کاری که ما انجام می‌دهیم تا جرم m در شرایط تعادل از بی‌نهایت به نقطه مورد نظر آورده شود.

$\Delta U = W$

$U_{(x)} - U_{(x_0)} = -W$

مشتق میگیریم $dU_{(x)} - \underset{\text{ثابت}}{dU_{(x_0)}} = -dW \Rightarrow dU_{(x)} = -F_x\,dx$

$$* \; F_x = -\frac{dU_{(x)}}{dx} \; *$$

$$U_{el} = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad F_x = -\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right)$$

$$F_x = -kx$$

$U_r = -\dfrac{GmM}{r}$

$F_r = -\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{GmM}{r}\right) \Rightarrow F_r = -\dfrac{GmM}{r^2}$

هرگاه مسأله را در کل $U = U_{(x,y,z)}$ باشد در این صورت

$$F_{(x)} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U$$

مثال: نیرو را بدست آورید. (کار نیرو را در طول انتقال از $A(1,1,1)$ به $B(2,2,2)$ بدست آورید)

$U = \dfrac{2x^2}{y} + \dfrac{y^2}{2xz} + x^2y^2z^2$

$F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} = -\dfrac{4x}{y} + \dfrac{y^2}{2zx^2} - 2y^2z^2x$ کار نیروهای پایستار مستقل از مسیر است

و فقط به نقطه ابتدا و انتها بستگی دارد

$F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} = +\dfrac{2x^2}{y^2} - \dfrac{y}{xz} - 2x^2z^2y$

$F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z} = \dfrac{y^2}{2xz^2} - 2x^2y^2z$

$$\vec{F} = \left(\frac{-4z}{y} - \frac{y^2}{2x^2z} - 2xy^2z^2\right)\hat{i} + \left(\frac{2x^2}{y^2} - \frac{y}{xz} - 2x^2yz^2\right)\hat{j} + \left(\frac{y^2}{2xz^2} - 2x^2y^2z\right)\hat{k}$$

$$\Delta U = -W \Rightarrow W = -(U_B - U_A) \qquad A(1,1,1)$$

$$W = U_A - U_B \qquad B(2,2,2)$$

مثال: نشان دهید نیروی F پایستار است.

$$F = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{i} + 2xyz^3\hat{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{k}$$

۱. آیا می‌توان برای آن یک تابع پتانسیل بدست آورد

چون تابع پتانسیل مختص نیروی پایستار است.

۲. نشان دهیم کار نیروی مورد نظر به مسیر بستگی ندارد

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$U = -\int F_x\,dx \Rightarrow U = -\int (y^2z^3 - 6xz^2)\,dx$$

$$U = -y^2z^3x + 3x^2z^2 + C_1(y,z) \quad (1)$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow U = -\int F_y\,dy \Rightarrow U = -\int 2xyz^3\,dy$$

$$U = xy^2z^3 + C_2(x,z) \quad (2)$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \Rightarrow U = -\int (3xy^2z^2 - 6x^2z)\,dz$$

$$U = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C_3(x,y) \quad (3)$$

$$\text{فرض}\begin{cases} C_2(x,z) = 3x^2z^2 + C \\ C_1(y,z) = C_3(x,y) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{(1)} = -y^2z^3x + 3x^2z^2 + C \\ U_{(2)} = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C \\ U_{(3)} = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C \end{cases}$$

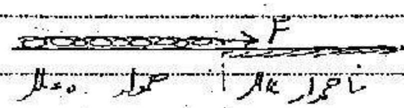
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\overbrace{\frac{\partial U}{\partial y}}^{-F_y}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\overbrace{\frac{\partial U}{\partial x}}^{-F(x)}\Big) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(F_y) = -\frac{\partial}{\partial y}(F_x)$$

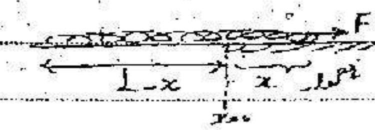
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\overbrace{\frac{\partial U}{\partial z}}^{-F_z}\Big) = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}(F_z) = -\frac{\partial}{\partial z}(F_x)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial U}{\partial z}\Big) = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(F_z) = -\frac{\partial}{\partial z}(F_y)$$

$$\operatorname{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$$

مثال: زنجیر همگن به جرم واحد طول λ روی سطح افقی شامل یک بخش هموار (بدون اصطکاک) و یک بخش ناهموار به ضریب اصطکاک μ_k قرار دارد. یک سر این زنجیر با نیروی ثابت F کشیده می‌شود. اگر ابتدا تمام زنجیر روی سطح هموار ($x=0$) در حالت سکون باشد، در لحظه‌ای که تمام طول زنجیر روی سطح ناهموار منتقل می‌شود ($x=L$) سرعت زنجیر چقدر است؟





$$F - \mu_k g \lambda x = m \frac{dv}{dt}$$

$$F - \mu_k g \lambda x = \lambda L v \frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^x (F - \mu_k g \lambda x)\,dx = \lambda L \int_0^v v\,dv$$

$$Fx - \frac{1}{2}\mu_k g \lambda x^2 \Big|_0^x = \frac{1}{2}\lambda L v^2$$

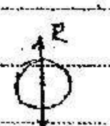
$$2Fx - \mu_k g \lambda x^2 = \lambda L v^2$$

$$v = \left(\frac{2Fx}{L\lambda} - \frac{\mu_k g x^2}{L}\right)^{1/2}$$

$$x = L \rightarrow v = \left(\frac{2F}{\lambda} - \mu_k g L\right)^{1/2}$$

سرعت حد:

تجربه نشان داده که R تابعی از سرعت است.



$$\vec{mg} + \vec{R} = m\vec{a}$$

برای $\vec{R} = -k\vec{v}$ تابع سرعت $\quad mg - kv = m\frac{dv}{dt}$

جهت $R = -kv$ $\quad$ kv آنقدر زیاد می‌شود تا با mg برابر شود

اندازه $|R| = kv$ $\quad$ ۹

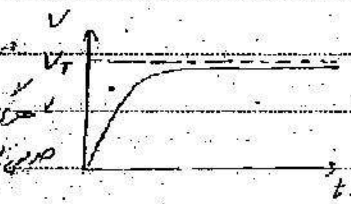
یعنی $V = V_T$ برآیند نیروهای مؤثر بر جسم صفر است و حرکت یکنواخت می‌شود (یعنی $a=0$) سرعت این حرکت را سرعت نهایی یا حد گویند

$$mg - kv_T = 0 \Rightarrow v_T = \frac{mg}{k}$$

$$\underbrace{mg}_{kv_T} - kv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow kv_T - kv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow$$ [illegible]

$$\frac{dv}{v_T - v} = \frac{k}{m}\,dt$$

$$\int_0^v \frac{-dv}{v_T - v} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$$



$$\log(v_T - v)\Big|_0^v = -\frac{k}{m}t$$

$$\log\frac{v_T - v}{v_T} = -\frac{k}{m}t \Rightarrow \frac{v_T - v}{v_T} = e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{v}{v_T} = e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow v = v_T\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$t = ?$

$$v = v_T \Rightarrow v_T = v_T\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \Rightarrow t = \infty$$

پس از چه زمانی $v = 0.99v_T$ ؟

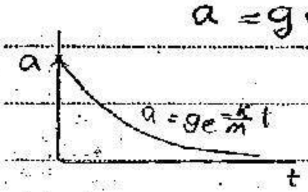
[illegible] t مشتق بگیریم $\quad \frac{dv}{dt} = v_T\left(0 + \frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

$$0.99\,\cancel{v_T} = \cancel{v_T}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$\frac{1}{100} = e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$a = g e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\log 1 - \log 100 = -\frac{k}{m}t \Rightarrow t = \frac{\log 100}{k/m}$$



$$\frac{dy}{dt} = v_T\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$dy = v_T\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)dt \Rightarrow \int_0^y dy = v_T\int_0^t \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)dt$$

v را برای [illegible] است

$$y = v_T\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right)\Big|_0^t$$

$$y = v_T\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} - 0 - \frac{m}{k}\right)$$

$$y = v_T\left(t + \frac{m}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)\right)$$

$$y = v_T\left(t + \frac{m}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$t = \infty \Rightarrow y = \infty$

$t = 0 \Rightarrow y = 0$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: نشان دهید نیروی زیر پایستار است. (انرژی پتانسیل را در دستگاه قطبی بیابید)

$\vec{F} = -2kx\hat{i} - 2ky\hat{j}$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$$

F پایستار است $\Leftarrow$ $\left\{ \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \right.$

پاسخ: $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \rightarrow \int F_x dx = -U$

$U = -\int -2kx\,dx \Rightarrow U = kx^2 + C_1(y,z)$ ①

$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \rightarrow \int F_y dy = -U \Rightarrow U = -\int -2ky\,dy$

$\Rightarrow U = ky^2 + C_2(x,z)$ ②

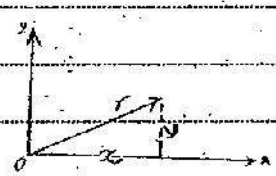
$$\begin{cases} ① \; U = kx^2 + C_1(y,z) \\ ② \; U = ky^2 + C_2(x,z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = kx^2 + ky^2 + C \\ U = kx^2 + ky^2 + C \end{cases} \Rightarrow$$ نیرو پایستار است

$C_1(y,z) = ky^2 + C$

$C_2(x,z) = kx^2 + C$

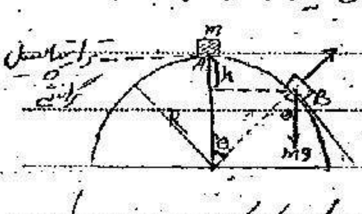
در دستگاه قطبی

$U = k(x^2 + y^2) + C$



$U = kr^2 + C$

مثال: جرمی روی سطح کره‌ای قرار دارد. ضربه‌ای به آن وارد می‌کنیم. در کجا جسم سطح کره را ترک می‌کند؟



تراز پتانسیل گرانشی

$\sum F_t = mg\sin\theta = ma_t \Rightarrow a_t = g\sin\theta$

$\sum F_r = mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R}$

در لحظه‌ای که m سطح کره را ترک کند: $N = 0$ $\qquad mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = gR\cos\theta$ ①

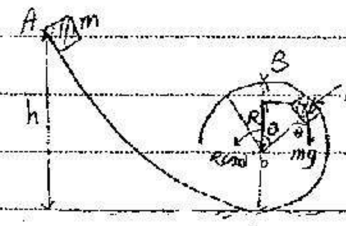
$h = R - R\cos\theta$ $\qquad (U+k)_A = (U+k)_B$

$0 + 0 = -mgh + \frac{1}{2}mv^2$

$v^2 = 2gh \Rightarrow v^2 = 2g(R - R\cos\theta)$ ②

تقسیم کنیم $\frac{①}{②}$ $\begin{cases} v^2 = gR\cos\theta \\ v^2 = 2g(R - R\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$

$\theta = \mathrm{Arc}\cos\frac{2}{3}$



مثال: جرم m که حلقه را ترک می‌کند

$$\sum F_r = mg\cos\theta + N = \frac{mv^2}{R}$$

و در لحظه‌ای که m حلقه را ترک می‌کند $N=0 \Rightarrow v^2 = gR\cos\theta$ ①

و پایستگی انرژی $mgh + 0 = mg(R + R\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2$

$$v^2 = 2gh - 2gR(1+\cos\theta) \quad ②$$

$$\begin{cases} ① & v^2 = gR\cos\theta \\ ② & v^2 = 2gh - 2gR(1+\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow gR\cos\theta = 2gh - 2gR(1+\cos\theta)$$

$$3gR\cos\theta = 2h - 2R$$

$$\cos\theta = \frac{2(h-R)}{3R}$$

حداقل h چقدر باشد تا جسم بتواند حلقه را دور بزند؟ یعنی باید از نقطه B عبور کند یعنی θ صفر باشد

$$\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2(h-R)}{3R} \Rightarrow 1 = \frac{2h-2R}{3R} \Rightarrow 3R = 2h - 2R$$

$$5R = 2h \Rightarrow h \geq \frac{5}{2}R$$

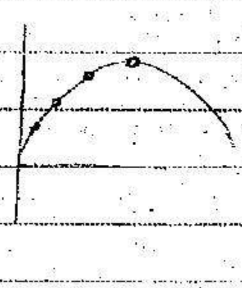
$$h = \frac{5}{2}R$$

اگر $h=2R$ باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ مسلماً به نقطهٔ اوج نمی‌رسد
(بدون سرعت اولیه از $h=2R$ رها شود که حلقه را ترک می‌کند)

$h = 2R$

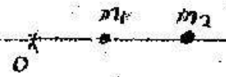
$\cos\theta = \frac{2(2R-R)}{3R} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$

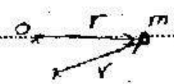
مرکز جرم



مثل این است که جرم جسم در آن نقطه اثر کند.
یک نقطه‌ی ویژه در جسم که مسیر منحنی طی می‌کند.
بقیه نقاط جسم حرکت پیچیده‌ای دارند.

گشتاور اول جرم:





گشتاور اول جرم $= m.\vec{r}$
حاصلضرب بردار مکان در جرم جسم