Subject:

Year. 200 Month. Day.

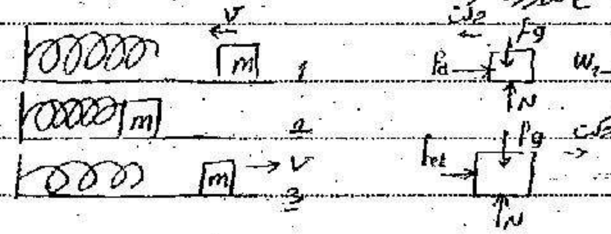
$$W = \int_0^{2\pi} (2r\cos\theta - r\sin\theta)(-r\sin\theta\, d\theta) + \int_0^{2\pi} (r\cos\theta ,\, r\sin\theta)\, r\cos\theta\, d\theta$$

$$W = \int_0^{2\pi} -r^2(\sin 2\theta + \overbrace{\sin^2\theta}^{\frac{1-\cos 2\theta}{2}})\, d\theta + \int_0^{2\pi} r^2(\overbrace{\cos^2\theta}^{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta)\, d\theta$$

$r=3 \Rightarrow W = 18\pi$

پتانسیل انرژی

- کار نیروی پایستار به مسیر حرکت بستگی ندارد.



$W_{1\to 2} = -\frac{1}{2}kx^2$

$W_{2\to 3} = +\frac{1}{2}kx^2$

$W_{کل} = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0$

اصطکاک نیروی ناپایستار است.

$W_{کل} = \Delta K$

کار نیروی اصطکاک منفی است و موجب ... اتلاف انرژی شده است.

$\Delta K = 0 \Rightarrow K_1 = K_2$

پتانسیل انرژی $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$(K_2 - K_1) + (U_2 - U_1) = 0$

$\Delta K + \Delta U = 0$ اگر در این صورت انرژی جنبشی کم شود

انرژی پتانسیل زیاد می‌شود تا حاصل جمع ثابت شود یا بالعکس

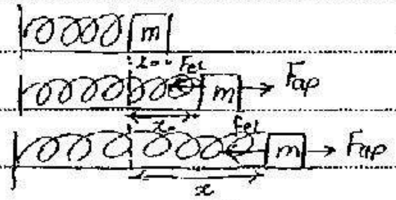
انرژی پتانسیل نوعی از انرژی مکانیکی است که به سرعت بستگی ندارد بلکه به وضعیت جسم بستگی دارد.

$$\begin{cases} \Delta U + \Delta K = 0 & \text{مخصوص نیروهای پایستار} \\ W = \Delta K & \text{(برای همه نوع نیرو) همه جا} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\Delta U}_{\text{تغییر انرژی پتانسیل}} = -\underbrace{W}_{\text{کار نیروی پایستار}}$$

محاسبه انرژی پتانسیل یک فنر

Subject:

Year. 200 Month. Day.



$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F_{el}\, dx$$

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} -kx\, dx$$

$$U(x) - U(x_0) = \tfrac{1}{2}kx^2 - \tfrac{1}{2}kx_0^2$$

قرارداد: $\begin{cases} x_0 = 0 & \text{مبدأ} \\ U(x_0) = 0 \end{cases}$ در این صورت $U(x) - 0 = \tfrac{1}{2}kx^2$

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2$$

اگر فنر را به اندازه‌ی x بکشیم یا فشرده کنیم افزایش انرژی پتانسیل فرقی نمی‌کند (در هر دو حالت مثبت است)

انرژی پتانسیل گرانشی

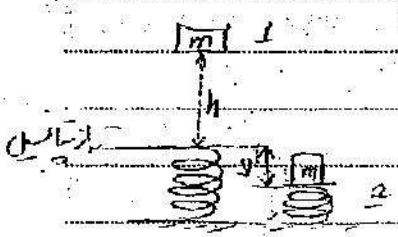
$$\Delta U = -W$$

$$U_2 - U_1 = -(-mg(y_2 - y_1))$$

$$U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1)$$

قرارداد (مبدأ) $\begin{cases} U_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = h \end{cases}$ در این صورت $U_2 = mgy_2 = mgh$

مثال: در شکل زیر اگر جسم m رها شود حداکثر تراکم فنر را بیابید.



$$(U_{el} + U_g + k)_1 = (U_{el} + U_g + k)_2$$

$$0 + mgh + 0 = \tfrac{1}{2}ky^2 - mgy + \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$ky^2 - 2mgy + mv^2 - 2mgh = 0$$

$$y = y_{Max} \rightarrow v = 0$$

$$ky_{Max}^2 - 2mgy_{Max} - 2mgh = 0$$

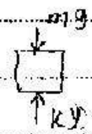
$$y_{Max} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$y_{Max} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$$

سرعت ماکسیمم را هم بدست آورید.



نیروی فنر ... همراه تو میکند (هرچه y بیشتر باشد ky هم بیشتر است)

$$F_{net} = mg - ky$$

در حال تعادل سرعت ماکسیمم است ← $mg - ky = 0$

$$y = \frac{mg}{k}$$

می توانیم از معادله حرکت جسم v را بدست آوریم

$$ky^2 - 2mgy + mv^2 - 2mgh = 0 \longrightarrow v^2 = -\frac{k}{m}y^2 + 2g(y+h)$$

مشتق بگیریم: $2v\frac{dv}{dt} = -\frac{2k}{m}y\frac{dy}{dt} + 2g\frac{dy}{dt}$

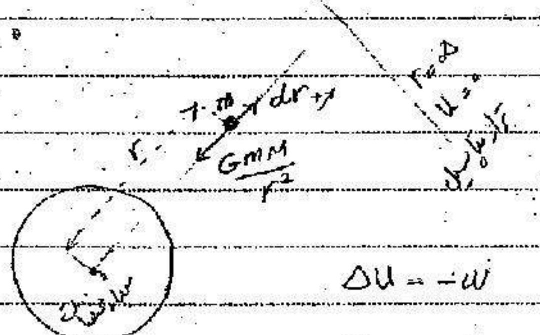
$$2\frac{dv}{dt} = -\frac{2k}{m}y + 2g$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}y + g = 0 \Rightarrow y = \frac{mg}{k}$$

به ازای $y = \frac{mg}{k}$ سرعت به بیشینه خود می رسد

$$v^2_{Max} = -\frac{k}{m}\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 2g\left(\frac{mg}{k} + h\right)$$

زمان ماکسیمم در چه لحظه ای است؟



مثال: پتانسیل انرژی جسم m را بیابید.

$$\Delta U = -W$$

$$U(r_0) - U(r) = \int_r^{r_0} \vec{F_g} \cdot \vec{dr}$$

$$U(r_0) - U(r) = \int_r^{r_0} -\frac{GmM}{r^2} \cdot dr$$

$$U(r_0) - U(r) = -GmM \left| \frac{1}{r} \right|_r^{r_0}$$

$$U(r_0) - U(r) = -\frac{GmM}{r_0} + \frac{GmM}{r}$$

کاری که گرانش انجام می‌دهد تا از این نقطه به بی‌نهایت برسیم

قرارداد $\begin{cases} r_0 = \infty \\ U(r_0) = 0 \end{cases}$ $\quad U(r) = -\frac{GmM}{r}$ (جرم m) $r \geq R_e$

$$U_2 - U_1 = -\frac{GmM}{r_2} - \left(-\frac{GmM}{r_1}\right)$$

مبنا = مرکز زمین
تراز پتانسیل = جایی که پتانسیل صفر است

$$U_2 - U_1 = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$ اگر $r_2 = r + \Delta r$

$$U_2 - U_1 = GmM\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$ $r_1 = r$, $\Delta r \ll r$

$$U_2 - U_1 = \frac{GmM}{r^2}(r_2 - r_1)$$ $\quad r_1 r_2 = r(r + \Delta r) = r^2\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right) \simeq r^2 \quad (\Delta r \ll r)$

$$U_2 - U_1 = mg(r_2 - r_1) \rightarrow r_2 - r_1 = y_2 - y_1$$

$$U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1)$$

مثال: جسمی به جرم m را از نقطه‌ای به فاصله r از مرکز زمین به بی‌نهایت می‌بریم. کار نیروی گرانش را در این جابجایی به دست آورید و آن را با پتانسیل گرانشی جرم m در نقطه r مقایسه کنید.

$$U(r) = -G\frac{mM}{r} \qquad W = \int_1^2 \vec{F_g} \cdot d\vec{r}$$

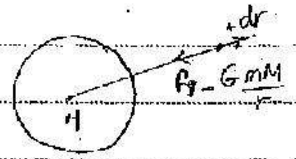
$$W = -\int_r^{\infty} \frac{GmM}{r^2}\, d\vec{r} \Rightarrow W = GmM\left[\frac{1}{r}\right]_r^{\infty}$$

$$W = GmM\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right)$$

$$W = -\frac{GmM}{r}$$

$$U(r) = -\frac{GmM}{r}$$

پتانسیل گرانشی جرم m در یک نقطه از میدان گرانش برابر است با کاری که گرانش روی جرم m انجام می‌دهد تا m از نقطه مورد نظر به بی‌نهایت برده شود.



پتانسیل گرانشی جرم m در یک نقطه از میدان گرانش برابر است با کاری که ما انجام می‌دهیم تا جرم m در شرایط تعادل از بی‌نهایت به نقطه مورد نظر آورده شود.

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\Delta U = W$$

$$U_{(x)} - U_{(x_0)} = -W$$

مشتق‌گیری $dU_{(x)} - d\underset{\text{ثابت}}{U_{(x_0)}} = -dW \Rightarrow dU_{(x)} = -F_x\, dx$

$$* \; F_x = -\frac{dU_{(x)}}{dx} \; *$$

$$U_{el} = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad F_x = -\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right)$$

$$F_x = -kx$$

$$U_r = -\frac{GmM}{r}$$

$$F_r = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{GmM}{r}\right) \Rightarrow F_r = -\frac{GmM}{r^2}$$

هرگاه پتانسیل را بدانیم $U = U_{(x,y,z)}$ با مشتق‌گیری می‌توان

$$F_{(x)} = -\frac{\partial U}{\partial x} \; , \; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \; , \; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U$$

مثال: نیرو را بیابید. (کار نیرو را از نقطه $A(1,1,1)$ تا $B(2,2,2)$ بدست آورید)

$$U = \frac{2x^2}{y} + \frac{y^2}{2xz} + x^2y^2z^2$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{4x}{y} + \frac{y^2}{2zx^2} - 2y^2z^2x$$

کار نیروی پایستار مستقل از مسیر است و فقط به نقطه ابتدا و انتها بستگی دارد.

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = +2x^2\frac{1}{y^2} - \frac{y}{xz} - 2x^2z^2y$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{y^2}{2xz^2} - 2x^2y^2z$$

$$\vec{F} = \left(\frac{-4z}{y} - \frac{y^2}{2x^2z} - 2xy^2z^2\right)\hat{i} + \left(\frac{2x^2}{y^2} - \frac{y}{xz} - 2x^2yz^2\right)\hat{j} + \left(\frac{y^2}{2xz^2} - 2x^2y^2z\right)\hat{k}$$

$$\Delta U = -W \Rightarrow W = -(U_B - U_A) \qquad A(1,1,1)$$

$$W = U_A - U_B \qquad B(2,2,2)$$

مثال: نشان دهید نیروی F پایستار است.

$$F = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{i} + 2xyz^3\hat{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{k}$$

1. آیا می‌توان برای آن یک تابع پتانسیل بدست آورد

چون تابع پتانسیل مختص نیروی پایستار است.

2. نشان دهیم کار نیرو در مسیر دلخواه بستگی ندارد

$$F_x = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u = -\int F_x\,dx \Rightarrow u = -\int (y^2z^3 - 6xz^2)\,dx$$

$$u = -y^2z^3x + 3x^2z^2 + C_1(y,z) \quad (1)$$

$$F_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow u = -\int F_y\,dy \Rightarrow u = -\int 2xyz^3\,dy$$

$$u = xy^2z^3 + C_2(x,z) \quad (2)$$

$$F_z = -\frac{\partial u}{\partial z} \Rightarrow u = -\int (3xy^2z^2 - 6x^2z)\,dz$$

$$u = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C_3(x,y) \quad (3)$$

$$\text{فرض} \begin{cases} C_2(x,z) = 3x^2z^2 + C \\ C_1(y,z) = C_3(x,y) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{(1)} = -y^2z^3x + 3x^2z^2 + C \\ u_{(2)} = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C \\ u_{(3)} = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C \end{cases}$$

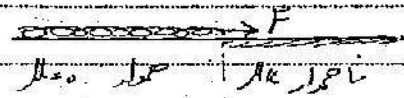
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\overbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}^{-F_y}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}^{-F_x}\Big) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(F_y) = -\frac{\partial}{\partial y}(F_x)$$

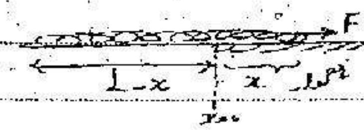
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\overbrace{\frac{\partial u}{\partial z}}^{-F_z}\Big) = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}(F_z) = -\frac{\partial}{\partial z}(F_x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big) = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(F_z) = -\frac{\partial}{\partial z}(F_y)$$

$$\mathrm{curl}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$$

مثال: زنجیر همگنی به جرم واحد طول λ روی سطح افقی شامل یک بخش هموار (بدون مالش) و یک بخش ناهموار به ضریب مالش μ_k قرار دارد. یک سر این زنجیر با نیروی ثابت F کشیده می‌شود. اگر در آغاز تمام زنجیر روی سطح هموار ($x=0$) در حالت سکون باشد، در لحظه‌ای که تمام طول زنجیر روی سطح ناهموار منتقل می‌شود ($x=L$) سرعت زنجیر چقدر است؟





$$F - \mu_k g \lambda x = m\frac{dv}{dt}$$

$$F - \mu_k g \lambda x = \lambda L\, v\frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^x (F - \mu_k g \lambda x)\,dx = \lambda L \int_0^v v\,dv$$

$$Fx - \frac{1}{2}\mu_k g \lambda x^2 \Big|_0^x = \frac{1}{2}\lambda L v^2$$

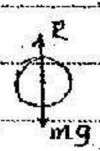
$$2Fx - \mu_k g \lambda x^2 = \lambda L v^2$$

$$v = \left(\frac{2Fx}{L\lambda} - \frac{\mu_k g x^2}{L}\right)^{1/2}$$

$$x = L \rightarrow v = \left(\frac{2F}{\lambda} - \mu_k g L\right)^{1/2}$$

سرعت حد:

تجربه نشان داده که R تابعی از سرعت است.



$$\vec{mg} + \vec{R} = m\vec{a}$$

برای $\vec{R} = -k\vec{v}$ تابع سرعت $\qquad mg - kv = m\frac{dv}{dt}$

چون $R = -kv$ $\qquad$ kv آنقدر زیاد می‌شود تا با mg برابر شود

اندازه $|R| = kv$ $\qquad g$

سرانجام $v = v_T$ برآیند نیروهای مؤثر بر جسم صفر شده و حرکت یکنواخت می‌شود (یعنی $a=0$) سرعت این حرکت را سرعت نهایی یا حد گویند.

Subject:

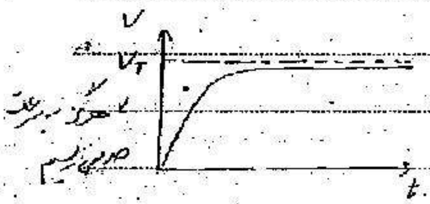
Year. 200   Month.   Day.

$mg - kV_T = 0 \Rightarrow V_T = \frac{mg}{k}$

$\underbrace{mg}_{kV_T} - kV = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow kV_T - kV = m\frac{dv}{dt}$ ⇒ [illegible]

$\frac{dv}{V_T - V} = \frac{k}{m}dt$

$\int_0^V \frac{-dv}{V_T - V} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$



$Log\,(V_T - v)\Big|_0^V = -\frac{k}{m}t$

$\log\frac{V_T - V}{V_T} = -\frac{k}{m}t \Rightarrow \frac{V_T - V}{V_T} = e^{-\frac{k}{m}t}$

$\Rightarrow 1 - \frac{V}{V_T} = e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow V = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

$t = ?$

$V = V_T \Rightarrow V_T = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \Rightarrow t = \infty$

[illegible] $V = 0.99V_T$?

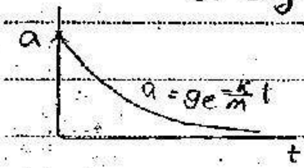
[illegible] $\frac{dv}{dt} = V_T(0 + \frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t})$

$0.99\,V_T = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

$\frac{1}{100} = e^{-\frac{k}{m}t}$

$a = g e^{-\frac{k}{m}t}$

$\log 1 - \log 100 = -\frac{k}{m}t \Rightarrow t = \frac{\log 100}{k/m}$



$\frac{dy}{dt} = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

$dy = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})dt \Rightarrow \int_0^y dy = V_T\int_0^t (1 - e^{-\frac{k}{m}t})\,dt$

V [illegible]

$y = V_T(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t})\Big|_0^t$

$y = V_T(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} - 0 - \frac{m}{k})$

$y = V_T(t + \frac{m}{k}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1))$

$y = V_T(t + \frac{m}{k}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1))$

$a = \frac{dv}{dt}$

$t = \infty \Rightarrow y = \infty$

$t = 0 \Rightarrow y = 0$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: نشان دهید نیروی زیر پایستار است. (آن را در دستگاه قطبی بیابید)

$\vec{F} = -2kx\hat{i} - 2ky\hat{j}$

$$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 0 & \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = 0 & \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = 0\end{array}\right. \Rightarrow F \text{ پایستار است}$$

پس $F_x = -\dfrac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \int F_x\,dx = -u$

$u = -\int -2kx\,dx \Rightarrow u = kx^2 + c_1(y,z)$ ①

$F_y = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \int F_y\,dy = -u \Rightarrow u = -\int -2ky\,dy$

$\Rightarrow u = ky^2 + c_2(x,z)$ ②

$$\begin{array}{l}① \\ ②\end{array}\left\{\begin{array}{l}u = kx^2 + c_1(y,z) \\ u = ky^2 + c_2(x,z)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}u = kx^2 + ky^2 + c \\ u = kx^2 + ky^2 + c\end{array}\right. \Rightarrow \text{ نیرو پایستار است}$$

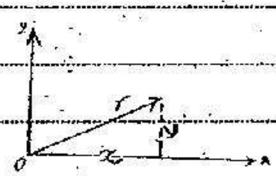
$c_1(y,z) = ky^2 + C$

$c_2(x,z) = kx^2 + C$

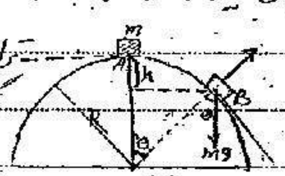
در دستگاه قطبی

$u = k(x^2 + y^2) + c$

$u = kr^2 + c$



مثال: روی سر یک نیمکره صیقلی قرار دارد ضربه‌ای به آن وارد می‌کنیم در کدام زاویه جسم سطح کره را ترک می‌کند



$\Sigma F_t = mg\sin\theta = ma_t \Rightarrow a_t = g\sin\theta$

$\Sigma F_r = mg\cos\theta - N = \dfrac{mv^2}{R}$

در لحظه‌ای که m سطح کره را ترک کند ؛ $N = 0$ $\quad mg\cos\theta = \dfrac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = gR\cos\theta$ ①

$h = R - R\cos\theta$ $\quad (U + k)_A = (U + k)_B$

$0 + 0 = -mgh + \frac{1}{2}mv^2$

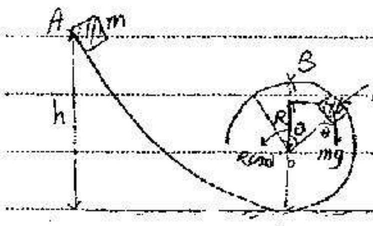
$v^2 = 2gh \Rightarrow v^2 = 2g(R - R\cos\theta)$ ②

$$\frac{①}{②}\left\{\begin{array}{l}v^2 = gR\cos\theta \\ v^2 = 2g(R - R\cos\theta)\end{array}\right. \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$
تقسیم کنیم

$\theta = \mathrm{Arc}\cos \frac{2}{3}$

Subject:

Year. 200 Month. Day.



مثال - جرم m که حلقه را ترک می‌کند

$$\sum F_r = mg\cos\theta + N = \frac{mv^2}{R}$$

و در لحظه‌ای که m حلقه را ترک می‌کند $N=0 \Rightarrow v^2 = gR\cos\theta$ (1)

پایستگی انرژی $mgh + 0 = mg(R + R\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2$

$$v^2 = 2gh - 2gR(1+\cos\theta) \quad (2)$$

$$\begin{cases} (1) & v^2 = gR\cos\theta \\ (2) & v^2 = 2gh - 2gR(1+\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow gR\cos\theta = 2gh - 2gR(1+\cos\theta)$$

$$3gR\cos\theta = 2h - 2R$$

$$\cos\theta = \frac{2(h-R)}{3R}$$

حداقل h چقدر باشد تا جسم بتواند حلقه را دور بزند؟ یعنی بالا از نقطه B عبور کند یعنی θ صفر باشد

$$\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2(h-R)}{3R} \Rightarrow 1 = \frac{2h-2R}{3R} \Rightarrow 3R = 2h - 2R$$

$$5R = 2h \Rightarrow h \geq \frac{5}{2}R$$

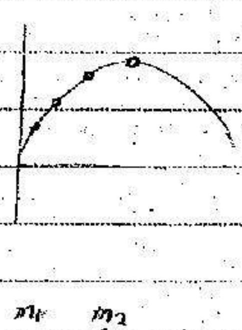
$$h = \frac{5}{2}R$$

اگر $h=2R$ باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ مسلماً به نقطه اوج نمی‌رسد
(بدون سرعت اولیه از $h=2R$ رها شود که حلقه را ترک می‌کند)

$h = 2R$

$\cos\theta = \frac{2(2R-R)}{3R} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$

مرکز جرم



مثل این است که جرم جسم در آن نقطه اثر کند.
یک نقطه‌ای در جسم که مسیر منحنی طی می‌کند.
بقیه نقاط جسم حرکت پیچیده‌ای دارند.

گشتاور اول جرم:

گشتاور اول جرم $= m.\vec{r}$
حاصلضرب بردار مکان در جرم جسم

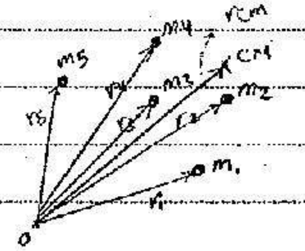
Subject:

Year.200 Month. Day.

گشتاور جرم $= m\vec{r}$

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

مرکز جرم



$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

مرکز جرم سامانه‌ای از ذرات نقطه‌ای است که اگر کل جرم در آن نقطه قرار گیرد گشتاور آن نسبت به هر نقطه‌ی دلخواه برابر است با مجموع گشتاورهای جرم‌های جزئی از آن نسبت به آن نقطه.

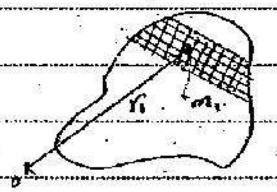
$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots$$

مرکز جرم نقطه‌ای است که گشتاور اول آن برابر است با مجموع گشتاورهای اول کلیه‌ی نقاط

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots}{M}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots}{M}$$

$$z_{cm} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots}{M}$$



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$ یا $\sum m_i$

اگر توزیع جرم تابع ما به ریاضی مشخص باشد می‌توان نوشت

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$$

$\Delta m \to dm$

$$x_{cm} = \bar{x} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} \qquad z_{cm} = \bar{z} = \frac{\int z\, dm}{\int dm}$$

$$y_{cm} = \bar{y} = \frac{\int y\, dm}{\int dm} \qquad \int dm = M$$

در سطوحی (جرم ندارند) میسر است $\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r}\, dA}{\int dA}$ سطح

(مرکز سطح = مرکز جرم)

PILAVARAN

PAGE:

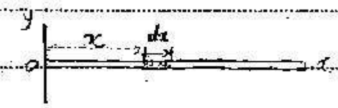
مثال: مرکز جرم میله‌ای به طول L را تعیین کنید در صورتی که بدانیم توزیع جرم از رابطه زیر تبعیت می‌کند.

1. انتخاب محورهای مختصات مناسب

2. انتخاب جزء انتگرالی و تعیین جرم و مختصات آن $\qquad \lambda = \lambda_0(1+ax)$

3. استفاده از رابطه $\quad \bar{y} = \dots \quad \bar{x} = \dfrac{\int x\,dm}{\int dm}$

4. انجام انتگرال‌گیری



$$\lambda = \lambda_0(1+ax) \qquad dm = \lambda\,dx$$

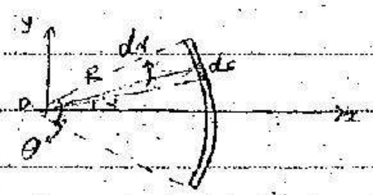
$$dm = \lambda_0(1+ax)\,dx \rightarrow \bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} =$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L \lambda_0(1+ax)\,x\,dx}{\int_0^L \lambda_0(1+ax)\,dx} \rightarrow \bar{x} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}ax^3\Big|_0^L}{x + \frac{1}{2}ax^2\Big|_0^L}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{3}aL^3}{L + \frac{1}{2}aL^2} = \frac{3L + 2aL^2}{6 + 3aL}$$

$a = 0 \rightarrow \bar{x} = \frac{L}{2}$ میله همگن ← درست

مثال: سیمی به شکل کمانی از دایره به شعاع R است، مرکز جرم آن را بیابید.



جرم واحد طول

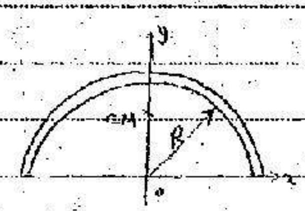
$$dm = \lambda\,ds = \lambda R\,d\alpha$$

$$ds \left| \begin{array}{l} x = R\cos\alpha \\ y = R\sin\alpha \end{array} \right.$$

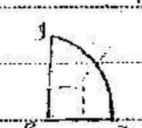
$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\lambda R^2 \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \cos\alpha\,d\alpha}{\lambda R \int_{-\theta/2}^{\theta/2} d\alpha} = \frac{2R\int_0^{\theta/2} \cos\alpha\,d\alpha}{2\int_0^{\theta/2} d\alpha}$$

$$\bar{x} = \frac{R\,|\sin\alpha|_0^{\theta/2}}{\alpha\,|_0^{\theta/2}} = \frac{R\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$

مثال: مرکز جرم سیم نیم‌دایره‌ای یا ربع دایره



$$y = \frac{R\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi}$$



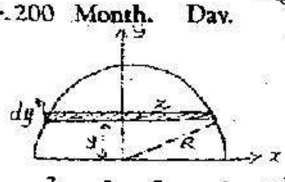
$$\bar{y} = \frac{R\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4R\frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi} = \frac{2R\sqrt{2}}{\pi}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: مرکز جرم قطاع کره را بیابید

مرکز جرم نیم‌کره:



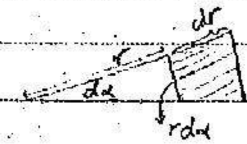
$$dm = \overset{\text{چگالی حجمی}}{\rho} \cdot \pi x^2 \, dy$$

$$R^2 = x^2 + y^2 \rightarrow x^2 = R^2 - y^2 \qquad \bar{y} = \frac{\int y \cdot \rho\pi(R^2-y^2)\,dy}{\int \rho\pi(R^2-y^2)\,dy}$$

$$\rightarrow \bar{y} = \frac{\rho\pi\int_0^R (yR^2 - y^3)\,dy}{\rho\pi\int_0^R (R^2-y^2)\,dy} = \frac{\frac{1}{2}y^2R^2 - \frac{1}{4}y^4\Big|_0^R}{R^2y - \frac{1}{3}y^3\Big|_0^R} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}R^4 - \frac{1}{4}R^4}{R^3 - \frac{1}{3}R^3} = \frac{\frac{1}{4}R^4}{\frac{2}{3}R^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}R = \frac{3}{8}R$$

حال باید مرکز جرم این سطح بگیریم



$$dm = \overset{\text{چگالی سطحی}}{\sigma}\, r\,d\alpha\,dr$$

$$x = r\cos\alpha$$

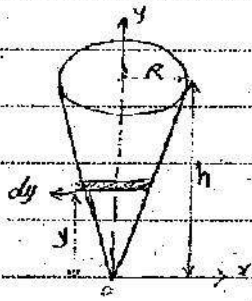
$$y = r\sin\alpha$$

$$\bar{x} = \frac{\int (r\cos\alpha)\,\sigma r\,d\alpha\,dr}{\int \sigma r\,d\alpha\,dr}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^R r^2dr\int_{-\theta/2}^{\theta/2}\cos\alpha\,d\alpha}{\int_0^R r\,dr\int_{-\theta/2}^{\theta/2}d\alpha} = \frac{2}{3}\,\frac{R\sin\theta/2}{\theta/2}$$

مثال: مرکز جرم یک مخروط را بیابید.

به علت وجود تقارن مرکز جرم روی محور تقارن است



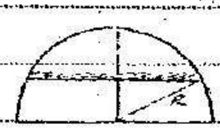
$$dm = \overset{\text{چگالی حجمی}}{\rho}\pi x^2 dy$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dm}{dm} = \frac{\pi\rho\int x^2 y\,dy}{\pi\rho\int x^2 dy}$$

$$\frac{x}{R} = \frac{y}{h} \rightarrow x = \frac{R}{h}y \qquad \bar{y} = \frac{\int_0^h (\frac{R}{h}y)^2 y\,dy}{\int_0^h (\frac{R}{h}y)^2\,dy} = \frac{\int_0^h y^3\,dy}{\int_0^h y^2\,dy} = \frac{y^4/4\Big|_0^h}{y^3/3\Big|_0^h}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{4}R$$

اگر نیم‌کره هم داشته باشیم به صورت بالا عمل می‌کنیم



$$G: \bar{y} = \frac{3}{8}R.$$

حرکت مرکز جرم:

از $M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \dots$

نسبت به t مشتق می‌گیریم: $M\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \dots$

$$M\vec{V}_{CM} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \dots$$

$$M\vec{V}_{CM} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots \Rightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \dots$$

$$\vec{P} = M\vec{V}_{CM}$$

$$\vec{P} = M\vec{V}_{CM} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \dots$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{V}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{V}_2}{dt} + \dots$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \dots$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \underbrace{\sum\vec{F}_{ext}}_{\text{نیروی خارجی}} + \underbrace{\sum\vec{F}_{int}}_{=0\ \text{نیروی داخلی}}$$

قانون دوم نیوتن در استفاده سامانه‌ی ذرات:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \\ \sum\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM} \end{cases}$$

$\sum F = \frac{dp}{dt}$, $\sum F = ma \Rightarrow$ قانون نیوتن

(در استفاده یک ذره (هر نیروی خارجی اند))

* نیروی داخلی نمی‌توانند تکانه کل را تغییر دهند و یا مرکز جرم را شتاب دهند اما می‌توانند اجزاء جسم را شتاب دهند.

اصل پایستگی تکانه خطی:

اگر نیروی خارجی بر سامانه‌ای از ذرات اعمال نشود تکانه کل ثابت است.

اگر $\sum\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} =$ ثابت

اگر $\sum\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow a_{CM} = 0$

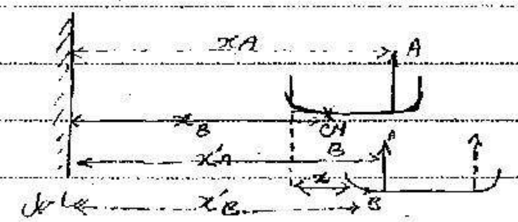
Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: این شخص روی قایق به سمت جلو حرکت می‌کند چه اتفاقی می‌افتد؟ (با حضور ساحل یا قایق؟)

قایق به عقب می‌رود (چون شخص به جلو می‌رود عکس‌العمل

باعث می‌شود قایق به عقب برود)



$$x_{CM}=\frac{m_A x_A+m_B x_B}{m_A+m_B}$$

$$x'_{CM}=\frac{m_A x'_A+m_B x'_B}{m_A+m_B}$$

چون $\sum F_{ext}$ برابر صفر است مرکز جرم سامانه (شخص و قایق)

جابه‌جا نمی‌شود. (نه اینکه اجزای سامانه جابه‌جا نمی‌شوند) $x'_{CM}=x_{CM}$

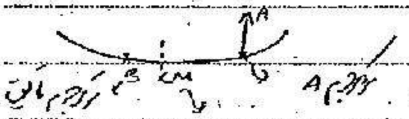
$$m_A x'_A+m_B x'_B=m_A x_A+m_B x_B$$

اگر قایق را به اندازه x جابه‌جا کنیم A به اندازه d به سمت چپ — اگر قایق را جابه‌جا کنیم $m_A x'_A-m_A x_A=m_B x_B-m_B x'_B$

$x'_A=x_A-d+x$ (به سمت راست قایق) $\quad * \; m_A(x'_A-x_A)=-m_B(x'_B-x_B) \; *$

$$\begin{cases} x'_A-x_A=x-d & (1)\\ x'_B-x_B=x & (2)\end{cases}$$

$x'_B=x_B+x$

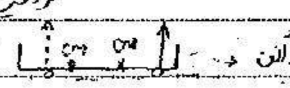


$$m_A(x-d)=-m_B(x)$$

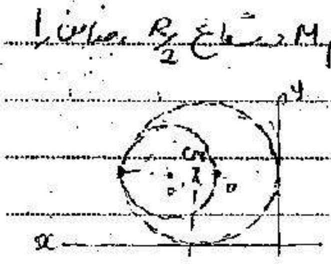
$$m_A x-m_A d=-m_B x \rightarrow x(m_A+m_B)=m_A d$$

مرکز جرم سامانه (در این روش مرکز جرم به جرم سنگین‌تر نزدیکتر)

به سمت راست قایق $x=\frac{m_A}{m_A+m_B}\,d$



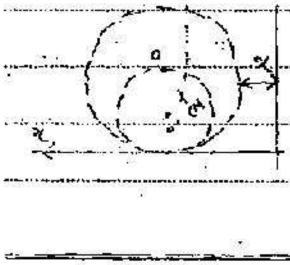
مثال: یک پوسته‌ی کروی به جرم M و به شعاع R داریم و درون آن یک جسم کروی داریم به جرم M و به شعاع $\frac{R}{2}$ رها می‌کنیم. وقتی این گوی به پایین می‌رود کل سامانه چقدر جابه‌جا می‌شود؟



چون نیروی خارجی در راستای x نداریم پس مرکز جرم در راستای x جابه‌جا نمی‌شود.

در راستای y نیرو داریم (گرانش نیروی عمودی) پس

تأثیری ندارد.



مرکز جرم اولیه در راستای x: $\bar{x}=\frac{M\times R+M\times \frac{3}{2}R}{M+M}=\frac{5}{4}R$

$$\bar{y}=\frac{MR+MR}{M+M}=\frac{2MR}{2M}=R$$

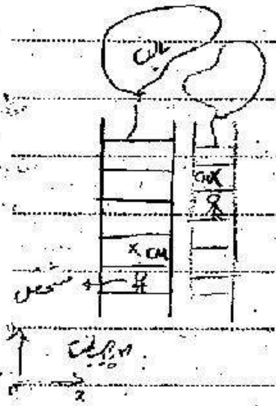
$$\begin{cases} \bar{x}' = \dfrac{(M+M)(R+x)}{2M} = R+x \\ \bar{y}' = \dfrac{M\times R + M\times \frac{R}{2}}{2M} = \frac{3}{4}R \end{cases}$$

$\bar{x}' = \bar{x}$

$\frac{5}{4}R = R + x \rightsquigarrow x = \frac{R}{4}$

مثال: بالنی را بیم که در آن یک نردبان معلق بسته شده و مجموعه در حال تعادل است.

اگر شخص روی نردبان بالا برود چه اتفاقی می‌افتد.



$M =$ جرم بالن + نردبان

$m =$ جرم شخص

$V_r =$ سرعت شخص نسبت به نردبان

$u =$ سرعت شخص نسبت به زمین

$V =$ سرعت نردبان بالن نسبت به زمین

وقتی شخص بالا می‌رود از آنجا که جرم سامانه به سمت بالا تغییر می‌کند

پس باید نردبان پایین بیاید

پایین بیاید که جای مرکز جرم تغییر نکند y_{CM} تغییری نکند.

چون $\sum F_{ext} = 0$

$\Rightarrow \vec{P} = \vec{P}'$

$0 = mu + MV$

سرعت شخص نسبت به زمین = سرعت شخص نسبت به نردبان + سرعت نردبان نسبت به زمین

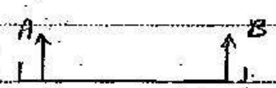
$u = V_r + V$

$$\begin{cases} 0 = mu + MV \\ u = V_r + V \end{cases} \Rightarrow 0 = mV_r + mV + MV$$

$$0 = V(M+m) + mV_r \rightsquigarrow V = -\frac{m}{m+M} V_r$$

پس نردبان با سرعت به سمت پایین می‌آید.

مثال: اگر جای A و B عوض شود چه اتفاقی می‌افتد.



اگر $m_A = m_B \Rightarrow$ اتفاقی نمی‌افتد

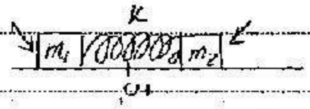
$m_A > m_B$ حالت

$m_B > m_A$ مرکز جرم به طرف B می‌رود (سمت جرم بیشتر)

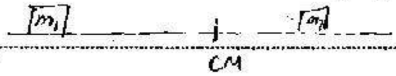
حالا در جهت عکس آن باید جابجا شود.

Subject:

Year. 200 Month. Day.



بین آنها یک فنر کشیده است. در راستای افقی نیروی خارجی به سیستم
وارد نمی‌شود پس $\Sigma F_{ext} = 0$ پس مرکز جرم ما ساکن می‌ماند



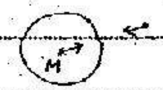
$$P = P'$$

$$0 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \rightsquigarrow \frac{V_1}{V_2} = -\frac{m_2}{m_1}$$

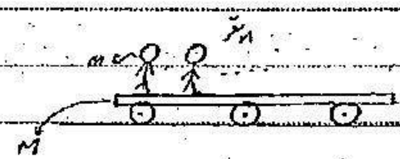
$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 V_1^2}{\frac{1}{2} m_2 V_2^2} = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 \rightsquigarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{m_1}{m_2}\left(-\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

خصوصا: جرم m_1 ، دو برابر جرم m_2 باشد سرعت مرکز جرم ثابت می‌ماند. باز هم مرکز جرم حرکت نمی‌کند

وقتی یک جسم را از سطح زمین رها می‌کنیم باید زمین هم به سمت جسم بیاید اما چون جرم زمین بسیار زیاد است این جابجایی محسوس نمی‌باشد.



مثال: m نفر روی این واگن قرار گرفته‌اند. سیستم در حال حاضر ساکن است. افراد یکی یکی از واگن پایین می‌آیند
سرعت نهایی را حساب کنید.
باید بگوییم وقتی m نفر با هم با u بپرند در این صورت
سرعت نهایی چه تغییری می‌کند؟



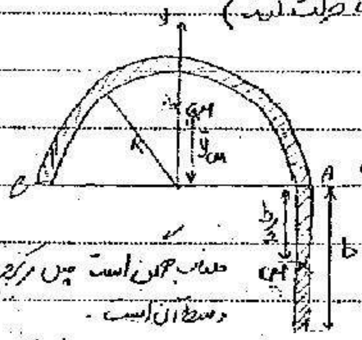
PILAVARAN

PAGE:

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال، یک طناب بشکه‌ای را به صورت شکل در آورده‌ایم طناب از داخل این نیم‌دایره گذشته است از آن هم در آن است.
وقتی طناب از نقطه A می‌گذرد سرعت آن چقدر است. (طناب را آزاد می‌کنیم تا حرکت کند)



طناب چون است چون مرکز جرم این قسمت وسط آن است.

$$\overline{y} = \frac{R\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} = \frac{R\sin 90}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi}$$

$$\overset{mgh}{U},\ \overset{\frac{1}{2}mv^2}{K}$$

$$(U+K)_1 = (U+K)_2$$ حالت 2 کل طناب (L) از نقطه A

$$\lambda\pi R g\,\overline{y} + \left(\lambda b g \times -\frac{b}{2}\right) = \left(\lambda L g \times -\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}\lambda L v^2$$

جرم طناب : $\lambda \cdot R\pi$ (جرم واحد طول)

$$Rg\frac{2R\pi}{\pi} - \frac{b^2 g}{2} = -\frac{1}{2}L^2 g + \frac{1}{2}L v^2$$

$$2R^2 g - \frac{b^2 g}{2} = -\frac{1}{2}L^2 g + \frac{1}{2}L v^2$$

مرکز جرم نیم‌دایره

$ds = R\,d\theta$ $\quad x = R\cos\theta$ $\quad dm = \delta \cdot ds$

$$v^2 = \frac{4R^2 g - b^2 g + L^2 g}{L}$$ (سرعت بدست آمده است.)

$$\overline{y} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\delta\int R\cos\theta \cdot R\,d\theta}{\delta\int R\,d\theta} = \frac{R^2\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}{R\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{2R}{\pi}$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{L}\left(4R^2 - b^2 + L^2\right)}$$

مثال، دو طناب ... (...) قرار گرفته‌اند و ... جرم ... که ... به هم ... سرعت هر کدام چقدر می‌شود؟

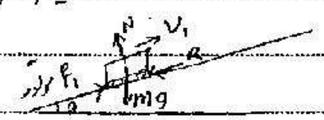
Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: کامیونی با سرعت v_1 بالا می‌رود نیروی مقاومت جاده $R = 0.04mg$ ، $\sin\theta = 0.02$

اگر در برگشت این کامیون همین توان را مصرف کند سرعتش را بیابید.

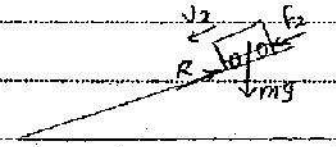
$P_1 = P_2$



$$\Sigma F = f_1 - mg\sin\theta - R = 0$$

$$f_1 = mg \times 0.02 + 0.04mg$$

$$f_1 = 0.06mg$$



$$\Sigma F = f_2 - R + mg\sin\theta = 0$$

$$f_2 = R - mg\sin\theta$$

$$f_2 = 0.04mg - 0.02mg$$

$$f_2 = 0.02mg$$

توان تغییر نکند $P_1 = P_2$

$$f_1 v_1 = f_2 v_2 \rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{f_1}{f_2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{0.06mg}{0.02mg} = 3 \Rightarrow v_2 = 3v_1$$

مثال: هواپیمایی از نقطه A به B می‌رود (مسافت بین دو را مستقیم می‌کند) زمان رفت و برگشت آن $t = \frac{2L}{v}$ است. نشان دهید اگر باد بیاید این زمان بیشتر می‌شود. $AB = L$

(باد در طول مسیر باید تغییر نکند)

$A \xrightarrow{v}$ $\xleftarrow{u}$ B

سرعت ثابت $x = vt + x_0$

$x - x_0 = vt$

$L = vt \rightarrow t = \frac{L}{v}$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{L}{v-u} & \text{(رفت)} \\ t_2 = \frac{L}{v+u} & \text{(برگشت)} \end{cases} \Rightarrow t' = t_1 + t_2 = \frac{L}{v-u} + \frac{L}{v+u}$$

$$t' = \frac{L(2v)}{v^2 - u^2} = 2L\frac{v}{v^2-u^2}$$

زمان رفت و برگشت $t = \frac{2L}{v}$

$$t' = \frac{2Lv/v^2}{\frac{v^2-u^2}{v^2}} = \frac{2L/v}{1 - u^2/v^2}$$

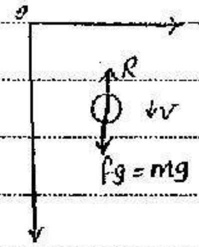
$t = \frac{2L}{v}$

$$\Rightarrow t' = \frac{t}{1 - \frac{u^2}{v^2}} \rightarrow t' > t$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: جسمی داریم که از ارتفاع نسبتاً زیاد سقوط می‌کند



$R = -kV$

$\vec{F}_g + \vec{R} = m\vec{a}$

$mg - kV = ma$

در آغاز حرکت چون سرعت نداریم سقوط آزاد است یعنی

$mg - 0 = mg$

$g = a$

حرکت کند می‌شود تا سرعت ثابت برسد

سرعت انتهایی زمانی که نیروی مقاومت با mg برابر شود

$\rightarrow mg - kV_T = 0 \rightarrow V_T = \frac{mg}{k}$

$mg - kV = m\frac{dv}{dt}$

$kV_T - kV = m\frac{dv}{dt}$

$\frac{dv}{V_T - V} = \frac{k}{m}dt$

$\int_0^V \frac{dv}{V_T - V} = \frac{k}{m}\int_0^t dt$

$Ln|V_T - V|_0^V = -\frac{k}{m}t$

$Ln\frac{V_T - V}{V_T} = -\frac{k}{m}t$

$\frac{V_T - V}{V_T} = e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow 1 - \frac{V}{V_T} = e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow V = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

از نظر ریاضی این جسم هیچ گاه به سرعت حدی نمی‌رسد اما از نظر فیزیکی این طور نیست

$a = 0$

$\begin{cases} V = V_T \\ t = \infty \end{cases}$

ضربه و برخورد

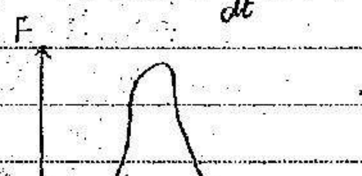
نیروی ضربه‌ای:

نیرویی است که زمان تأثیر آن کوتاه اما مقدار آن خیلی زیاد است.

$F = ma$

$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \rightarrow \vec{F}dt = d\vec{P}$

$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt}_{J} = \int_{P_1}^{P_2} d\vec{P} \rightarrow$



این انتگرال قابل محاسبه نیست چون F برحسب t نداریم فقط شکل آن را حدس می‌زنیم.

$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt}_{J} = P_2 - P_1$

J = ضربه

Subject:

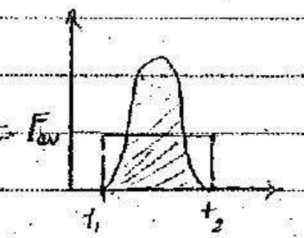
Year. 200 Month. Day.

ضربه برابر است با تغییرات تکانه $\vec{J} = \Delta \vec{P}$ یعنی $J = P_2 - P_1$ = ضربه

(انتقال تکانه نیز)

این رابطه چون برداری است سه معادله به ما می‌دهد $W = \Delta K$ (انتقال انرژی)

پس از تجزیه کردن، این سه معادله است:



$J_x = \Delta P_x = m(V_x - V_{0x})$

$J_y = \Delta P_y = m(V_y - V_{0y})$

$J_z = \Delta P_z = m(V_z - V_{0z})$

$\int F\,dt = J =$ سطح زیر منحنی تغییرات نیرو بر حسب زمان

$\bar{F} = \dfrac{\Delta P}{\Delta t}$

$$\int F\,dt = J = F_{av}(t_2 - t_1) \rightarrow F_{av} = \frac{J}{t_2 - t_1} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

مثال: گلوله‌ای به جرم 200g از ارتفاع h برابر 4.9m بدون سرعت اولیه رها می‌شود. این گلوله پس از برخورد با زمین تا ارتفاع 4m بالا می‌رود. اگر طول مدت برخورد 0.01s فرض شود مطلوب است:

الف) ضربه‌ی وارد بر گلوله از زمین؟

ب) متوسط نیروی ضربه‌ای؟ متوسط نیروی ضربه‌ای را با وزن جسم و زمان برخورد را با زمان حرکت مقایسه کنید.

$V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 4.9} = 9.8\ m/s \downarrow$

$V' = \sqrt{2gh'} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 4} = 8.85\ m/s \uparrow$

$V\downarrow O \quad O\uparrow V'$

$J_y = m(V' - V)$ $\qquad J = 0.200\ kg(+8.85\ m/s + 9.8\ m/s)$

ضربه‌ی وارد بر گلوله $J = 3.73\ kg\,m/s\ (N/s) \uparrow$

(چون با جرم گلوله سرعت گلوله را در نظر گرفتیم)

ضربه‌ی وارد بر زمین $J = 3.73\ N/s \downarrow$

$F_{av} = \dfrac{J}{\Delta t} = \dfrac{3.73\ N/s}{0.01\ s} = 373\ N$ $\qquad \dfrac{F_{av}}{mg} = \dfrac{373\ N}{0.2 \times 9.8\ N} = \dfrac{373}{1.96} \simeq 190$

(F_{av}) این نیرو 190 برابر از وزن جسم بزرگتر است پس کاملاً قابل توجه است.

$V = gt$

زمان حرکت $t = \dfrac{9.8\ m/s}{9.8\ m/s^2} = 1s$ $\qquad \dfrac{t}{\Delta t} = \dfrac{1s}{0.01} = 100$ (زمان برخورد) این زمان 100 برابر کمتر از زمان حرکت است پس نشان این نیروی بزرگ نیروی ضربه‌ای بوده است.

تا زمان برخورد را با زمان حرکت مقایسه کنیم

برخورد پدیده‌ای است که در آن چند جسم بر هم کنش دارند.

در برخورد سرعت قبل از برخورد و سرعت حین برخورد و سرعت بعد از برخورد قابل بررسی هستند

(A)(B)

نیروی ضربه‌ای $\overset{F_B}{\leftarrow}$ $\overset{F_A}{\rightarrow}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A \, dt = \Delta \vec{P}_A$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B \, dt = \Delta P_B$$

چون بر خط $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$

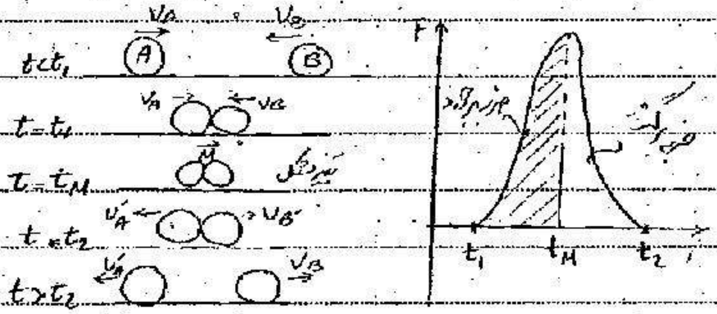
پس:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A \, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B \, dt$$

$$\overrightarrow{\Delta P_A} = -\overrightarrow{\Delta P_B}$$

$$\overrightarrow{\Delta P_A} + \overrightarrow{\Delta P_B} = 0$$

نتیجه: اگر در حین برخورد نیروی خارجی اثر نکند (یا بتوان از نیروی خارجی در مقایسه با نیروی ضربه‌ای صرف‌نظر کرد) آن‌گاه تکانه کل پایسته است



$$e = \frac{\int_{t_M}^{t_2} F_A \, dt}{\int_{t_1}^{t_M} F_A \, dt}$$

ضریب برخورد (ضریب بازگشت)

$$0 \le e \le 1$$

$e=1$ برخورد کشسان — در کشسان کامل اتلاف انرژی وجود ندارد.

$e=0$ ناکشسان کامل

ضریب برخورد برابر $e = \dfrac{v'_A - v'_B}{v_A - v_B}$

در برخورد مایل

نشان دهید در برخورد کشسان کامل $(e=1)$ اتلاف انرژی جنبشی وجود ندارد.

$e=1$ پس $1 = \dfrac{v'_A - v'_B}{v_A - v_B}$ یا $1 = \dfrac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \Rightarrow v'_B - v'_A = v_A - v_B$

- برخورد کشسان دو جسم :

مشروط بر اینکه نیروی خارجی بر سامانه اثر نکرده باشد

$$\begin{cases} m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \\ e = -\dfrac{v'_A - v'_B}{v_A - v_B} = 1 \end{cases}$$ کشسان کامل

$$\begin{cases} m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \\ m_A \quad v_A - v_B = -v'_A + v'_B \end{cases}$$

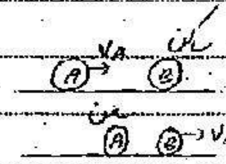
$$2 m_A v_A + v_B (m_B - m_A) = v'_B (m_A + m_B)$$

$$\begin{cases} v'_B = \dfrac{2 m_A v_A}{m_A + m_B} + \dfrac{(m_B - m_A) v_B}{m_A + m_B} \\ v'_A = \dfrac{2 m_B v_B}{m_A + m_B} + \dfrac{(m_A - m_B) v_A}{m_A + m_B} \end{cases}$$

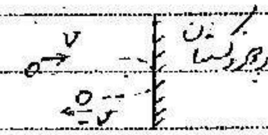
حالت های خاص :

الف) اگر $m_A = m_B$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} v'_A = v_B \\ v'_B = v_A \end{cases}$

ب) اگر $m_A = m_B$ و $v_B = 0$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} v'_A = 0 \\ v'_B = v_A \end{cases}$



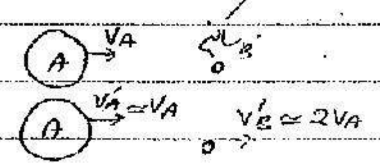
ج) اگر $m_A \gg m_B$ و $v_A = 0$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} v'_B = -v_B \\ v'_A \simeq 0 \end{cases}$



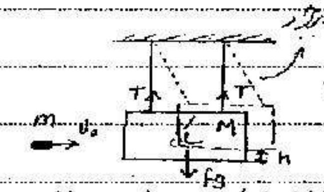
$e = 1 \quad v'_A - v'_B = -(v_A - v_B)$

یعنی اندازه سرعت نسبی قبل از برخورد با سرعت نسبی بعد از برخورد مساوی است

د) اگر $m_A \gg m_B$ و $v_B = 0$



برخورد پاندول بالستیک حالت ۲



$\Sigma F_y = 0$ پس نیروی خارجی نداریم

اگر چوب سخت باشد و گلوله چوب را سوراخ نکند و تیغ‌ها مانع نشوند

$mV_0 + M\times 0 = (m+M)V$ ؛ پایستگی تکانه

$$V = \frac{mV_0}{m+M}$$

آن گاه در راستای x نیروی خارجی نداریم و دیگر می‌توانیم از اصل پایستگی تکانه استفاده کنیم پس باید چوب سخت باشد یا گلوله کند باشد

- در طول برخورد تکانه کل پایسته است اما انرژی مکانیکی پایسته نیست

پس از برخورد تکانه کل پایسته نیست ولی انرژی مکانیکی پایسته است.

پاندول بعد از برخورد بالا می‌رود به طوری که مرکز جرم آن به اندازه‌ی h بالا می‌رود

$$(M+m)gh = \frac{1}{2}(m+M)V^2$$

$$V^2 = 2gh \rightarrow V_0 = \frac{(m+M)\sqrt{2gh}}{m}$$

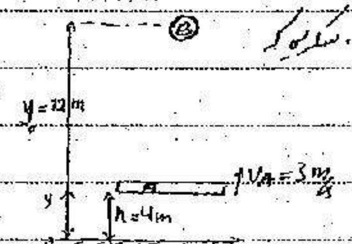
$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}mV_0^2}{\frac{1}{2}(m+M)V^2} = \frac{m}{(m+M)}\left(\frac{V_0}{V}\right)^2$$

$$= \frac{m}{m+M}\left(\frac{m+M}{m}\right)^2 \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{m+M}{m}$$

اگر $m_1 = 10g$, $M = 990g$

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{10}{10+990} = \frac{1}{100} \rightarrow K_2 = \frac{1}{100}K_1$$

$$\frac{K_1 - K_2}{K_1} = \frac{m+M-m}{m+M} \Rightarrow \frac{\Delta K}{K_1} = \frac{M}{m+M}$$



مثال، در لحظه $t = 0$ از ارتفاع $y_0 = 12m$ نسبت به سطح زمین رها می‌شود در لحظه رها شدن توپ، آسانسوری که در ارتفاع $h = 4m$ از سطح زمین قرار دارد با سرعت ثابت $v = 3 m/s$ به سمت بالا حرکت می‌کند توپ پس از برخورد با کف آسانسور بالا می‌جهد
الف) توپ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود ب) پس از چه مدت توپ برای بار دوم با آسانسور برخورد می‌کند؟ (جرم آسانسور بزرگ فرض شود)

$$\begin{cases} y_A = V_A t + h \\ y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \end{cases}$$

در لحظه برخورد $y_A = y_B$

$$V_A t + h = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

$$\frac{1}{2}gt^2 + V_A t - y_0 + h = 0 \Rightarrow 5t^2 + 3t - 8 = 0$$

$t = 1s$ $\quad y_A - y_B = 7m$

$m_A \gg m_B \Rightarrow$ عملاً پس از برخورد سرعت A تغییر نمی‌کند $\qquad v_B = -gt$

$\downarrow v_B \qquad \uparrow v_A \qquad v_B = -10 \times 1$

$v_B = -10\ \frac{m}{s}$

$$e = \frac{v'_A - v'_B}{v_A - v_B} \Rightarrow 1 = \frac{v_A - v'_B}{v_A - v_B}$$

$$1 = \frac{3 - v'_B}{3 - (-10)} \Rightarrow 13 = -3 + v'_B \Rightarrow v'_B = 16\ \frac{m}{s} \uparrow$$

$$H = \frac{v'^2_B}{2g} = \frac{(16\frac{m}{s})^2}{2 \times 10\frac{m}{s^2}} = 12.8\ m$$ از نقطه برخورد

$$y_{max} = 12.8 + 7 = 19.8$$ از زمین

$$\begin{cases} y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + v'_B t + 7 \\ y_A = v_A t + 7 \end{cases}$$

از نقطه برخورد : $y_A = y_B$

$$v_A t + 7 = -\frac{1}{2}gt^2 + v'_B t + 7$$

$$\frac{1}{2}gt^2 - v'_B t + v_A t = 0$$

$$5t^2 - 16t + 3t = 0 \Rightarrow 5t^2 - 13t = 0$$

$$\begin{cases} t = 0 & \text{لحظه برخورد اول} \\ t = 2.6\,s & \text{لحظه برخورد دوم} \end{cases}$$

مسئله: سه گلوله که اولی سرعت V_0 دارد و می‌خواهیم نوع برخورد را طوری بیابیم که m' چقدر لازم است که در این برخورد بیشترین انرژی جنبشی از m به M منتقل شود

(m) $\rightarrow V_0$ $\qquad$ ساکن (m') $\qquad$ ساکن (M)

$$\begin{cases} mV_0 + m' \times 0 = mV'_0 + m'V' \\ e_1 = \dfrac{V'_0 - V'}{V_0 - V} \end{cases} \Rightarrow m \begin{cases} mV_0 = mV'_0 + m'V' \\ e_1 V_0 = -V'_0 + V' \end{cases}$$

$$mV_0(1 + e_1) = V'(m + m')$$

$$V' = \frac{mV_0(1 + e_1)}{m + m'}$$ سرعت m' پس از برخورد اول

(m') $\rightarrow V'$ $\qquad$ ساکن (M)

$$\begin{cases} m'V' + M \times 0 = m'V'' + MV' \\ e_2 = \dfrac{v' - V'}{V' - V} \end{cases} \Rightarrow V' = \frac{(1+e_2)m'V'}{M + m'} \Rightarrow V' = \frac{(1+e_1)(1+e_2)mm'V_0}{(m+m')(m'+M)}$$

V' سرعت M پس از برخورد است

$$V' = \frac{\overset{\text{ثابت}}{A}(mm')}{(m+m')(m'+M)}$$

m و M ثابت هستند و m' را تغییر می‌دهیم

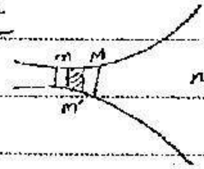
$$\frac{dV'}{dm'} = \frac{m(mm' + mM + m'^2 + m'M) - mm'(m + 2m' + M)}{D^2}$$

مشتق نسبت به m' برابر صفر

$$mm' + mM + m'^2 + \cancel{m'M} - mm' - 2m'^2 - \cancel{m'M} = 0$$

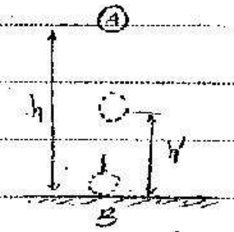
$$-m'^2 + mM = 0$$

$$m'^2 = mM \rightarrow m' = \sqrt{mM}$$



برای اینکه بیشترین [illegible] منتقل شود

$\Rightarrow m' = \sqrt{mM}$



مثال: $e = ?$

$v = \sqrt{2gh}$

$v' = \sqrt{2gh'}$

$e = -\dfrac{v_A' - v_B'}{v_A - v_B}$

$e = \dfrac{\sqrt{2gh'} - 0}{-\sqrt{2gh} - 0} \Rightarrow e = \sqrt{\dfrac{h'}{h}}$

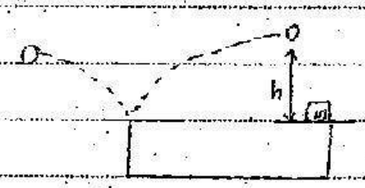
$h' = e^2 h$

$S = h + 2h' + 2h'' + 2h''' + \cdots$ [illegible]

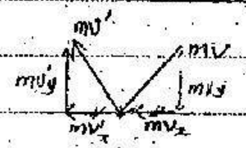
$S = h + 2e^2h + 2e^4h + 2e^6h + \cdots$

[illegible]

مثال: یک [illegible] [illegible]



$n = 100$



[illegible] افقی تغییر نکرده (?)

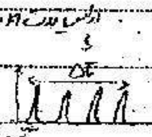
$\Delta P_x = 0 \Rightarrow mv_x = mv_x'$

$\Delta P_y = mv_y' - mv_y$

$\Delta p_y = mv_y - (-mv_y)$

$\Delta p_y = 2mv_y$

[illegible]



[illegible]

$\bar{F} = \dfrac{\Delta P}{\Delta t}$ $\quad \bar{F} = n(\Delta p)$

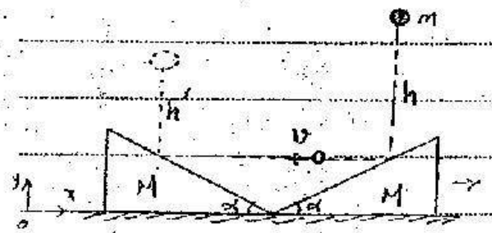
$\bar{F} = n(2mv_y)$

$v_y = \sqrt{2gh} \rightarrow \bar{F} = 2nm\sqrt{gh} = 2 \times 100 \times 5 \times 10^{-4}\,kg \times \sqrt{2 \times 9.8 \times 0.5}$

$= 0.31\ N$

$m = \dfrac{0.31}{9.8} \times 10^3 = 30g$

مثال:



در راستای y [illegible]

[illegible]

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$M \times 0 + m \times 0 = MV + mv$$ در راستای x

$$V = -\frac{m}{M} v \quad ①$$

پایستگی انرژی: $mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} MV^2 \Rightarrow 2gh = v^2 + \frac{M}{m} \left(-\frac{m}{M} v\right)^2$

$$2gh = v^2 + \frac{m}{M} v^2 \quad ②$$

در برگشت: $mv + M \times 0 = MV' + m \times 0 \Rightarrow V' = \frac{m}{M} v$

$$\frac{1}{2} mv^2 + 0 = \frac{1}{2} MV'^2 + mgh'$$

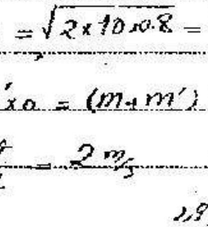
$$2gh' = v^2 - \frac{M}{m} \left(\frac{m}{M} v\right)^2$$

$$2gh' = v^2 \left(1 - \frac{m}{M}\right) \quad ③$$

$$\frac{③}{②} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{1 - \frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}} = \frac{M - m}{M + m}$$

مثال: با استفاده از اصول برنولی معادله فشار گاز را در یک مخزن بدست آورید

$$p = \frac{1}{3} \rho \overline{v}^2$$



مثال: مطابق شکل گلوله‌ای به جرم $m = 1kg$ از ارتفاع $h = 0.8m$ رها شده با سرعت ... پس از برخورد با جسم $m' = m$ که روی فنری به سختی $k = 400 \, N/m$ قرار دارد به آن می‌چسبد. مطلوبست:

الف) سرعت مجموعه بلافاصله پس از برخورد

ب) حداکثر تراکم فنر

ج) حداکثر سرعت مجموعه پس از برخورد $(g = 10 \, m/s^2)$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 0.8} = 4 \, m/s \downarrow$$

$$mv + m' \times 0 = (m + m') v'$$

$v' = \frac{v}{2} = 2 \, m/s$ بلافاصله

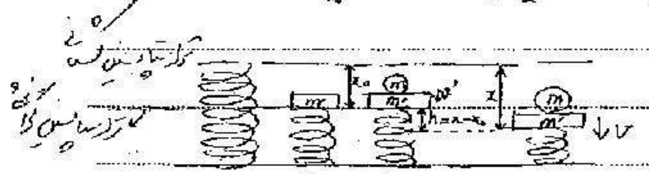
بلافاصله پس از برخورد

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

• بیان انرژی:

$$\frac{1}{2}(m+m')V'^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}(m+m')V^2+\frac{1}{2}kx^2-(m+m')g(x-x_0)$$



$$V'^2+\frac{1}{2}kx^2=V^2+\frac{1}{2}kx^2+2g(x-x_0)$$

$$4+200\left(\frac{1}{40}\right)^2=V^2+200x^2-20x+20\times\frac{1}{40}$$

تراکم اولیه فنر $x_0=\frac{mg}{k}=\frac{1\times 10}{400}=\frac{1}{40}$

$$4+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=V^2+200x^2-20x$$

$$V^2=-200x^2+20x+\frac{29}{8}$$

حداکثر تراکم فنر وقتی است که سرعت به صفر برسد $(V=0)$:

$$0=-200x_{Max}^2+20x_{Max}+\frac{29}{8}$$

$$x_{Max}=\ ...$$

حداکثر سرعت وقتی است که مشتق آن برابر صفر شود:

$$2V\frac{dV}{dt}=-200\times 2x\frac{dx}{dt}+20\frac{dx}{dt}+0$$

$$2\frac{dV}{dt}=0 \Rightarrow -400x+20=0 \Rightarrow x=\frac{20}{400}=\frac{1}{20}\,(m)=2x_0$$

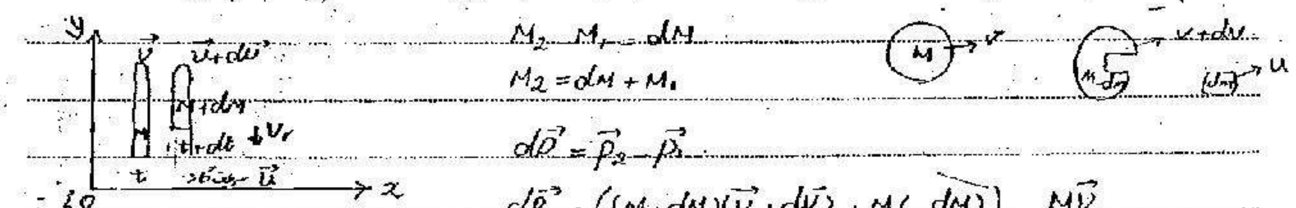
$$x=\frac{1}{20}m \rightarrow V_{Max}^2=-200\left(\frac{1}{20}\right)^2+20\left(\frac{1}{20}\right)^2+\frac{29}{8}$$

$$V_{Max}=\ ...$$

• وقتی توان ماکزیمم است که مشتق $P=F.V$ برابر صفر باشد.

حرکت راکت:

• راکتی با جرم M در لحظه t (جرم m و سرعت V) در لحظه $t+\Delta t$ یا $(t+dt)$ مقداری از جرم راکت سوخته و بیرون رانده شده. $m+dm$ در نتیجه سرعت $V+dV$ شده. تغییر تکانه خطی را بدست آورید.



$$M_2-M_1=dM$$

$$M_2=dM+M_1$$

$$d\vec{P}=\vec{P}_2-\vec{P}_1$$

$$d\vec{P}=\left((M+dM)(\vec{V}+d\vec{V})+M(-dM)\right)-M\vec{V}$$

$$d\vec{P}=Md\vec{V}+\vec{V}dM+dM\,d\vec{V}-MdM$$

سرعت گازهای خروجی نسبت به راکت

$dM\,d\vec{V}\approx 0$ مرتبه دوم کوچک

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=M\frac{d\vec{V}}{dt}-(\vec{U}-\vec{V})\frac{dM}{dt}$$

$$F_{ext}=M\frac{d\vec{V}}{dt}-(\vec{U}-\vec{V})\frac{dM}{dt}$$

سرعت راکت نسبت به زمین + سرعت گاز نسبت به راکت = سرعت گاز خارج شده نسبت به زمین

$\vec{u} = \vec{v}_r + \vec{v} \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} = \vec{v}_r$

$$F_{ext} = M\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_r \frac{dM}{dt}$$

$\vec{F}_{ext} \simeq 0$ اگر به اندازه کافی از زمین دور باشیم (یعنی جاذبه و مقاومت نداریم)

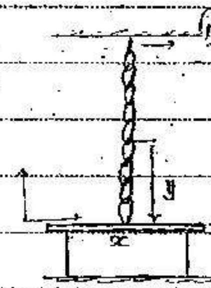
$v_r \frac{dM}{dt} = T$ پیشرانه یا نیروی پیشران

$$\vec{v}_r \frac{dM}{dt} = M\frac{d\vec{v}}{dt} \text{ یا } v_r \frac{dM}{dt} = M\frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = v_r \int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M} \Rightarrow v - v_0 = v_r \ln\frac{M}{M_0}$$

هر چه نسبت جرم باقی مانده به جرم اولیه عدد کوچکتری شود ⇐ راکت سریعتر است

زنجیری که به سقف است می‌بینیم. وقتی زنجیر به میز برخورد می‌کند نیرویی که میز وارد می‌کند بر حسب ارتفاع را به دست آورید

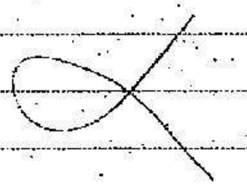


هر دانه بالاتر رفته [illegible] نیروی بیشتری را وارد می‌کند

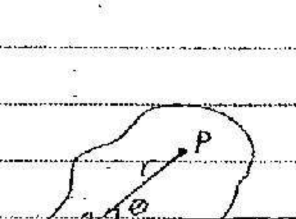
زنجیر چگونه است؟ نیروی وارده به میز چقدر است؟ (دانه‌ای که ارتفاع بالاتری دارد [illegible]) به این دلیل می‌گوییم سرعت آن زیادتر است

$\sum F_{ext} = 0 \Rightarrow \Delta P$ ثابت

$P_1 = P_2 \Rightarrow$



سینماتیک دورانی



دوران حول محور ثابت (جسم صلب) حول محور

موقعیت لحظه‌ای $P(r,\theta)$ $\quad t_1 \ \theta_1 \quad t_2 \ \theta_2$ $\quad \omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ rad/s

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$