Subject:

Year. 200 Month. Day.

$t_1 \quad t_2$

$\omega_1 \quad \omega_2 \qquad \alpha_{av} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \ \ rad/s^2 \qquad \alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

$$\alpha = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

معادلات حرکت با شتاب زاویه‌ای ثابت:

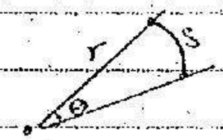
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha \int_0^t dt \rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha t$$

معادله مکان، $\theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \qquad \int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega = \alpha \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$ رابطه بین سرعت و جابجایی

مقایسه کمیت‌های زاویه‌ای و خطی:



(قوس دایره) $= \theta r$

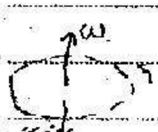
$S = r\theta$

خطی $= S$

رابطه بین این دو؟ ←

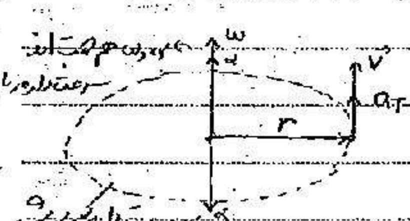
دورانی $= \theta$

$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \rightarrow V = r\omega$ نقش اندازه سرعت

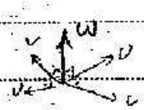


$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \rightarrow a_T = r\alpha$ شتاب مماسی

اگر جهت عوض شود ω $\quad a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = V.\omega$. در حرکت دورانی شتاب مرکزگرا داریم که با a_r نمایش می‌دهیم.



$\vec{V} = \vec{r} \times \vec{\omega}$



$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r} + \vec{\omega}\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V} \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a_T} + \vec{a_r}$$

$|\vec{\alpha} \times \vec{r}| = r\alpha \rightarrow a_T = r\alpha \qquad \vec{a_T} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$ بردار شتاب مماسی ثابت

$|\vec{\omega} \times \vec{V}| = \omega.V = \omega.r\omega = r\omega^2 \rightarrow a_r = r\omega^2 \qquad \vec{a_r} = \vec{\omega}.\vec{V}$

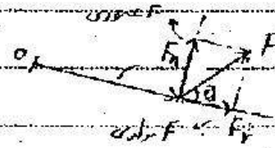
Subject:

Year. 200   Month.   Day.

دینامیک دورانی

گشتاور دورانی پیچشی

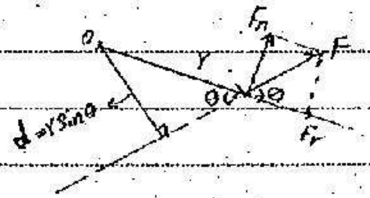
* در انتقال نیرو عامل حرکت است * در دوران گشتاور عامل حرکت است.



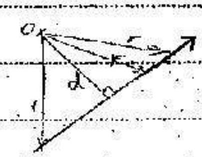
گشتاور برابر است با حاصلضرب برداری بردار مکان در نیرو $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$ گشتاور

$\tau = F_n . r = F\sin\theta . r$

$\tau = F.\underbrace{r\sin\theta} = F.d$ $d =$ بازوی گشتاور

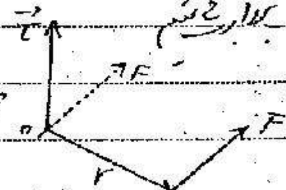


گشتاور یک بردار است



$$\tau = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

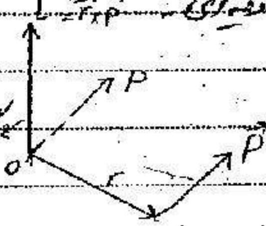
بردار F عمود بر r بگیریم



اگر F در امتداد r باشد (τ) صفر است بردار $\vec{\tau}$ عمود بر ... است.

تکانه زاویه‌ای $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$

* تکانه خطی $\vec{p}=m\vec{v}$ اگر گشتاور این را نسبت به یک نقطه حساب کنیم می‌شود تکانه زاویه‌ای



گشتاور تکانه خطی نسبت به O

* تکانه زاویه‌ای گشتاور تکانه خطی نسبت به نقطه است.

$$\text{تکانه زاویه‌ای} = \vec{r}\times\vec{P} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

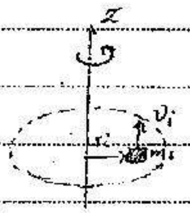
Subject:

Year. 200 Month. Day.

تکانه زاویه‌ای یک ذره ، سیستم ذرات ، جسم صلب :

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ تکانه زاویه‌ای یک ذره

$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ تکانه زاویه‌ای سیستم ذرات



$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

$v_i = r_i \omega \leadsto$ ω اندیس نمی‌گیرد چون جسم صلب همه اجزایش باهم حرکت می‌کنند.

$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times (m_i (\vec{r}_i \vec{\omega}))$

$L_i = m_i r_i^2 \omega$

$\vec{L}_i = m_i r_i^2 \omega \hat{k}$

$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum m_i r_i^2 \omega \hat{k}$

$I = \sum m_i r_i^2$ لختی دورانی ، ممان اینرسی

$\vec{L} = I \omega \hat{k}$

تکانه زاویه‌ای $L = I\omega$ تکانه خطی $p = mv$

قانون دوم نیوتن در دوران : (برای یک ذره ، سیستم ذرات ، جسم صلب)

برای یک ذره : $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ مشتق تکانه زاویه‌ای نسبت به زمان برابر است با گشتاور نیروی وارده

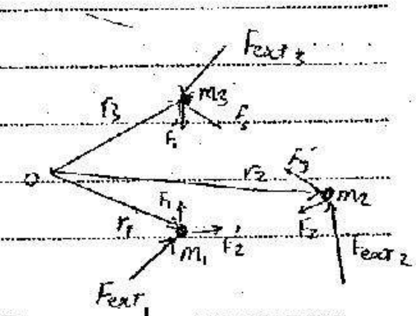
(مثل $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$)

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0 \\ \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \end{cases}$$ گشتاور

برای سیستم ذرات : $\sum \vec{\tau}_{ext} + \sum \vec{\tau}_{int} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$\sum \vec{\tau}_{int} = 0$ داریم

بنابراین $\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$



Subject:

Year. 200 Month. Day.

F, F' قرینه‌اند

① از $\quad \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_2' + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{ext_1} = \dfrac{d\vec{L}_1}{dt}$

② از $\quad \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_3' + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{ext_2} = \dfrac{d\vec{L}_2}{dt}$

③ از $\quad \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_1' + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{ext_3} = \dfrac{d\vec{L}_3}{dt}$

با هم جمع می‌کنیم:

$$\vec{\tau}_{ext_1} + \vec{\tau}_{ext_2} + \vec{\tau}_{ext_3} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_3 = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

با توجه به شکل چون $\vec{F}_1$ بر $(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)$ منطبق است پس ضرب خارجی آنها صفر است.

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

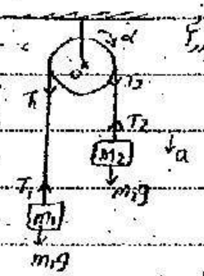
$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \Rightarrow \sum \tau_{ext} = I\alpha$$

پس در $\sum \tau_{ext} = I\alpha$ باید گشتاور نسبت به مرکز جرم (یا نقطه‌ای که ساکن باشد) در دوران جسم صلب حول محور ثابت.

مثال: نخ و قرقره ایده‌آل نیستند. معادلات حرکت را بدست آورید.

قرقره اصطکاک دارد و نخ روی آن سر نمی‌خورد.

بنابراین T_1 و T_2 برابر نیستند.



جسم مرکز جرم است چون ساکن است نسبت به این نقطه در نظر می‌گیریم

سه جسم داریم که یکی حرکت دورانی و دو تا حرکت انتقالی دارند.

$$T_1 - m_1 g = m_1 a \quad ①$$

$$T_2 - m_2 g = -m_2 a \quad ②$$

$$(T_2 R - T_1 R) = I\alpha \quad ③$$

گشتاور نیروی T_2

$$a = R\alpha \quad ④$$

عامل حرکت گشتاور (نیرو × بازو (R)) است

$\Rightarrow s = l \qquad s = R\theta$

$\dot{s} = \dot{l} \qquad \dot{s} = R\omega$

$\ddot{s} = \ddot{l} \qquad \ddot{s} = R\alpha$

$v_A = v$

$a_A = a \qquad a = R\alpha$

چون نخ روی قرقره نمی‌لغزد

$$\begin{cases} T_1 = m_1 g + m_1 a \\ T_2 = m_2 g - m_2 a \\ (T_2 - T_1) = \dfrac{I\alpha}{R} = \dfrac{Ia}{R^2} \end{cases}$$

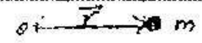
$$\alpha = \frac{a}{R}$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

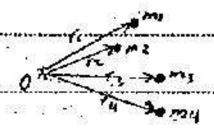
اینرسی دورانی :



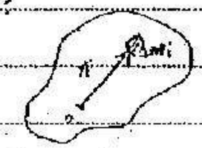
برای ذره $m\vec{r}$ = گشتاور اول جرم

$I_o = m(\vec{r}\cdot\vec{r}) = mr^2$ گشتاور مرتبه دوم جرم m نسبت به o

برای n ذره (سیستم ذرات) : $I_o = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$



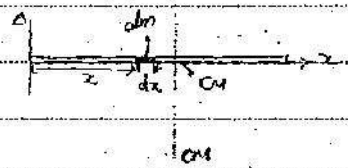
برای جسم صلب :



$I_o = \sum m_i r_i^2$

$$I_o = \int_{\text{روی جسم}} r^2\, dm$$

مثال: اینرسی دورانی میله ای نازک به جرم M و طول L را یکبار نسبت به محوری که از انتهای میله گذشته بر میله عمود است و بار دیگر نسبت به محوری که از مرکز جرم میله گذشته و بر میله عمود است به دست آورید.



$dm = \frac{M}{L}\, dx$

$dI_\Delta = x^2 dm = \frac{M}{L} x^2 dx$

$I_\Delta = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3}ML^2$

$I_{CM} = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx$

$I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$

قضیه محورهای موازی :

برای اینکه اینرسی دورانی را نسبت به Δ حساب کنیم طبق این قضیه اول اینرسی دورانی را نسبت به محوری که از CM گذشته و موازی Δ است حساب می کنیم.

$$I_\Delta = I_{CM} + Md^2$$

اینرسی دورانی جسم نسبت به محور Δ

جرم جسم

فاصله دو محور

اینرسی دورانی جسم نسبت به محوری که از مرکز جرم گذشته و موازی Δ است

Subject:

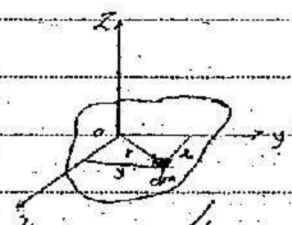
Year. 200 Month. Day.

مثال: با استفاده از قضیه محورهای موازی گشتاور ماند میله راست را نسبت به مرکز جرم آن بدست آورید در صورتیکه ممان اینرسی دورانی جسم نسبت به انتهای میله آن $I_0 = \frac{1}{3}ML^2$

$I_\Delta = I_{CM} + Md^2 \Rightarrow I_{CM} = I_\Delta - M\underbrace{d^2}_{\text{فاصله}}$

$I_{CM} = \frac{1}{3}ML^2 - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$

قضیه محورهای متعامد برای جسم‌های نازک (دو بعدی)



$I_0 = \int r^2 dm$

[illegible] $r^2 = x^2 + y^2$

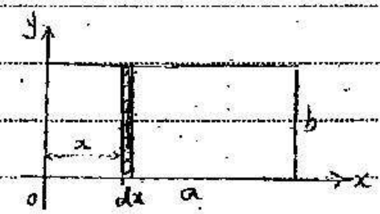
$I_0 = \int y^2 dm + \int x^2 dm$

$I_0 = I_{xx} + I_{yy}$

قضیه محورهای متعامد $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$

a - مستطیل نازک

۱. مستطیل



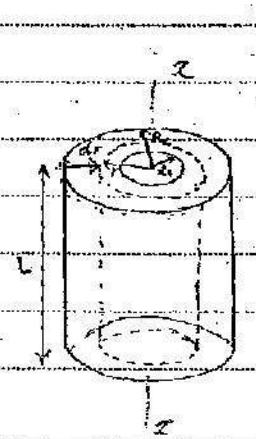
$dm = \frac{M}{ab} b\, dx = \frac{M}{a} dx$

$I_{yy} = \int x^2 dm = \frac{M}{a}\int_0^a x^2 dx$

$I_{yy} = \frac{1}{3}Ma^2$

$I_{xx} = \frac{1}{3}Mb^2$

ب - استوانه توخالی



$I_{zz} = \frac{1}{2}\pi L\rho(R_2^4 - R_1^4)$

$dm = 2\pi r L\, dr\, \rho$

$m = \pi(R_2^2 - R_1^2)L\rho$

$dI_{zz} = r^2 dm$

$I_{zz} = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$

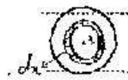
$I_{zz} = 2\pi\rho\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$

$I_z = 2\pi\rho(R_2^4 - R_1^4)$

Subject:

Year. 200 Month. / Day.

قرص توپر



$dm = 2\pi x \cdot \rho \cdot dx$

$I = \int x^2 dm$

$I = \int^R 2\pi\rho\, x^3 dx$

$I = 2\pi\rho \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2$

$M = \rho \times \pi R^2$

$I_{zz} = \frac{1}{2} mR^2$

حالت خاص: الف) استوانه توپر: $R_1 = 0$

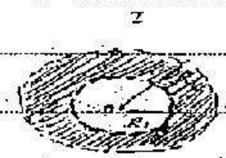
ب) مثل استوانه توخالی: $dm = \rho L \cdot 2\pi r dr$ $R_2 = R$

ج) پوسته استوانه‌ای نازک:

$(R_1 \simeq R_2) = R$

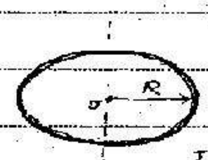
$I_{zz} = \frac{1}{2} mR^2 \cdot 2 = mR^2$

یک برش از این استوانه انتخاب می‌کنیم (قرص نازک)



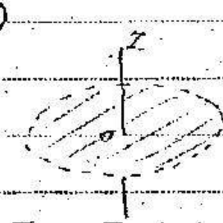
$I_{zz} = I_o = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$

حلقه نازک:



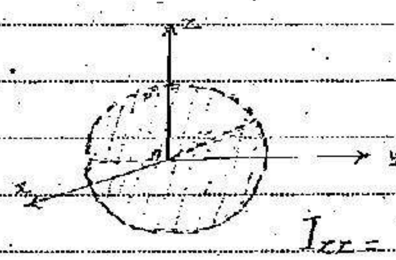
$I_{zz} = I_o = mR^2$

قرص کامل:



$I_{zz} = I_o = \frac{1}{2} mR^2$

قرص نازک:



$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$

متقارن است $\Rightarrow I_{xx} = I_{yy}$

$I_{zz} = 2 I_{xx} = 2 I_{yy}$

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} I_{zz}$

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} mR^2$

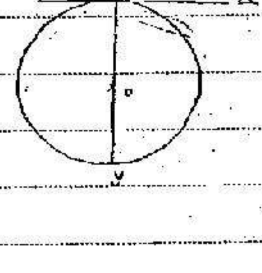
قرص نازک:

$I_\Delta = I_{CM} + mR^2$

$I_\Delta = \frac{1}{4} mR^2 + mR^2$

$I_\Delta = \frac{5}{4} mR^2$

قرص نازک



$I_A = I_\Delta + I_{yy}$

$I_A = \frac{5}{4} mR^2 + \frac{1}{4} mR^2$

$I_A = \frac{3}{2} mR^2$

یا

$I_A = I_o + mR^2$

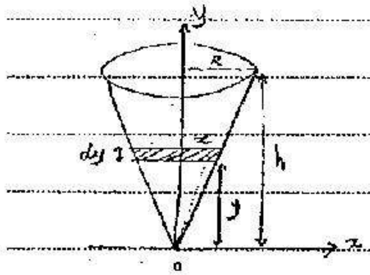
$I_A = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2$

$I_A = \frac{3}{2} mR^2$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

گشتاور ماند یک مخروط



$$dm = \pi x^2 dy\, \rho$$

$$\frac{x}{R} = \frac{y}{h} \Rightarrow x = \frac{R}{h} y$$

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} x^2 dm$$ (زیرا قرص است و محور از وسط آن رد شده)

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} \pi \rho x^4 dy$$

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} \pi \rho \left(\frac{R}{h} y\right)^4 dy$$

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} \pi \rho \frac{R^4}{h^4} y^4 dy$$

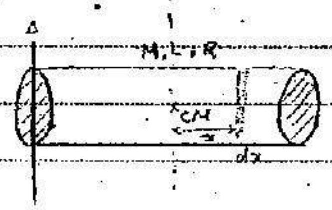
$$I_{yy} = \frac{1}{2} \pi \rho \frac{R^4}{h^4} \int_0^h y^4 dy \rightarrow I_{yy} = \frac{1}{10} \pi \rho \left(\frac{R^4}{h^4}\right) . h^5$$

$$I_{yy} = \frac{1}{10} \pi \rho R^4 h$$

$$I_{yy} = \frac{1}{3} \pi R^2 \rho h . \frac{3}{10} R^2$$

$$I_{yy} = \frac{3}{10} m R^2$$

مثال: گشتاور ماند استوانه زیر را نسبت به محور مشخص شده بدست آورید.



$I_\Delta = ?$ $\Rightarrow I_\Delta = \frac{1}{3} ML^2 + \frac{1}{4} MR^2$ (دو حالت دارد)

(استوانه به صورت میله باریک حول محور عمود بر آن)

$dm = \pi R^2 \rho\, dx$ $\qquad I_{CM} = \int x^2 dm$

$M = \rho \times \pi R^2 L$ $\qquad I_{CM} = \int_0^L x^2 \pi R^2 \rho dx = \pi R^2 \rho . \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} ML^2$

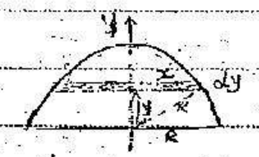
$$I_\Delta = I_{CM} + Md^2 \Rightarrow I_\Delta = \frac{1}{3} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow I_\Delta = \frac{1}{3} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2$$

مثال: گشتاور ماند مخروط را نسبت به محورهای مشخص شده بدست آورید.

$I_\delta = ?$

$I_\Delta = ?$

مثال: اینرسی دورانی یک نیم‌کره همگن را نسبت به قطر آن بیابید.



$$dm = \pi \underbrace{x^2}_{R^2-y^2} dy\, \rho$$

$$I = \int y^2 dm = \int_0^R y^2 (R^2 - y^2)\, \pi \rho\, dy$$

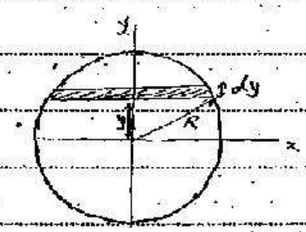
$$m = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{2}{3}\rho \pi R^3$$

$$= \rho\pi \cdot \frac{2}{15} R^5$$

$$= \rho\pi \cdot \frac{2}{3} R^3 \times \frac{1}{5} R^2 = \frac{1}{5} m R^2$$

اینرسی دورانی یک کره



$$dm = \pi x^2 dy\, \rho$$

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} x^2 dm$$

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} x^4 \pi \rho\, dy$$

$$x^2 = R^2 - y^2 \rightarrow dI_{yy} = \frac{1}{2}\pi\rho (R^2 - y^2)^2 dy$$

$$I_{yy} = \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-R}^{R} (R^2 - y^2)^2 dy$$

$$I_{yy} = \pi\rho \left(R^4 y + \frac{y^5}{5} - \frac{2}{3} R^2 y^3\right)\Big|_0^R$$

$$I_{yy} = \frac{8}{15}\pi R^5 \rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \times \frac{2}{5} R^2$$

$$I_{yy} = \frac{2}{5} M R^2$$

مثال: اینرسی دورانی یک کره همگن نسبت به یکی از قطرهایش $I = \frac{8}{15}\pi R^5 \rho$ است. با استفاده از این رابطه اینرسی دورانی یک پوسته کروی نازک را نسبت به یکی از قطرهای آن بدست آورید.

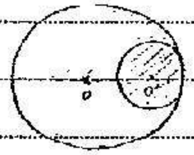
$$I = \frac{8}{15}\pi\rho (R_2^5 + R_1^5)$$

پوسته کروی نازک $R_1 \simeq R_2 \rightarrow I = \frac{8}{15}\pi\rho (2R^5) = \frac{16}{15}\rho\pi R^5$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

از قرص همگنی به شعاع R مطابق شکل قرص کوچکی به شعاع $r = \frac{R}{4}$ بیرون آورده‌ایم لختی دورانی جسم باقی‌مانده را نسبت به مرکز قرص به دست آورید. (برحسب m' جرم باقی‌مانده، R شعاع قرص اصلی)



$$I_o = \frac{1}{2} MR^2$$

$$I'_{o'} = \frac{1}{2} mr^2$$

$$I'_o = \frac{1}{2} mr^2 + m(R-r)^2$$

$$\frac{m}{M} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{R^2/16}{R^2} = \frac{1}{16} \rightarrow M = 16m$$

$$I'_o = \frac{1}{2} m \frac{R^2}{16} + \frac{9}{16} mR^2 = \frac{19 mR^2}{32}$$

$M = 16m$

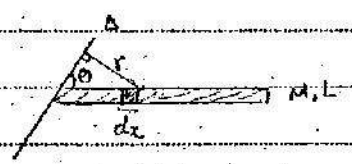
اینرسی دورانی قرص بیرون آورده شده نسبت به مرکز قرص اصلی.

لختی قرص باقی‌مانده نسبت به o: $I''_o = I_o - I'_o$

$$I''_o = \frac{16}{2} mR^2 - \frac{19}{32} mR^2 = \frac{237}{32} mR^2 \rightarrow I''_o = \frac{237}{32} \times \frac{m' R^2}{15} = \frac{237}{480} m' R^2$$

$$M' = M - m = 16m - m = 15m \Rightarrow m = \frac{m'}{15}$$

اینرسی میله مایل:



$$dm = \frac{M}{L} dx$$

$$dI_\Delta = r^2 dm$$

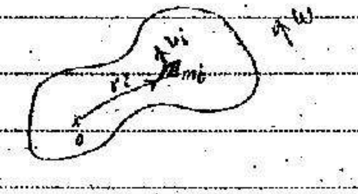
$r = x \sin\theta$

$$dI_\Delta = \frac{M}{L} r^2 dx$$

$$dI_\Delta = \frac{M}{L} x^2 \sin^2\theta \, dx$$

$$I_\Delta = \frac{M}{L} \sin^2\theta \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} ML^2 \sin^2\theta$$

انرژی جنبشی دورانی:



$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$k_i = \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2$$

$$k_i = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$k = \sum \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

I_o لختی دورانی جسم نسبت به محور دوران

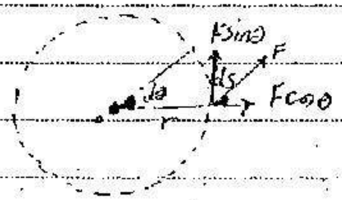
PILAVARAN

PAGE:

Subject:

Year. 200 Month. Day.

محاسبه کار در دوران:



$$dW = F\sin\theta \cdot ds$$

$$ds = r\,d\theta \Rightarrow dW = F\sin\theta \cdot r\,d\theta \Rightarrow dW = \tau\,d\theta$$

$$W = \int \tau\,d\theta$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\tau\,d\theta}{dt} \Rightarrow P = \tau\omega$$

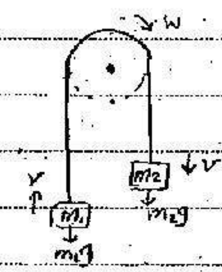
$$\vec{\tau} = \frac{dL}{dt} \Rightarrow \tau = I\alpha$$

$$\tau\,d\theta = I\frac{d\omega}{dt}\cdot d\theta \Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\,d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega\,d\omega$$

$$W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

$$W = K_2 - K_1 = \Delta K$$

- مسائل را از قضیه کار انرژی شتاب را در سیستم نخ و قرقره بدست آورید.



$$\left(\frac{1}{2}m_1V^2 + \frac{1}{2}m_2V^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right) - 0 = m_2gy - m_1gy$$

$$V = R\omega$$ اگر نخ روی قرقره نلغزد

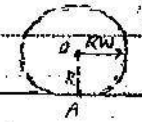
$$\omega = V/R$$

$$\frac{1}{2}V^2\left(m_1 + m_2 + I/R^2\right) = (m_2 - m_1)gy$$

$$V^2 = \frac{2(m_2 - m_1)gy}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$

$$2V\cdot\frac{dV}{dt} = \frac{2g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + I/R^2}\cdot\frac{dy}{dt} \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$

غلتش:



حرکت دورانی و انتقالی است مرکز جرم آن تغییر می‌کند

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}I_A\omega^2 \\ I_A &= I_{CM} + MR^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow K = \frac{1}{2}\left(I_{CM} + MR^2\right)\omega^2$$

غلتش را می‌توان با دوران محض حول محور آنی نیز دانست

$$K = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

$$K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

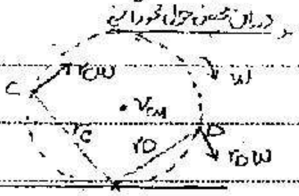
انرژی جنبشی کل = انرژی جنبشی (انتقالی) مرکز جرم + دوران حول مرکز جرم

PILAVARAN

PAGE:

Subject:

Year. 200 Month. Day.



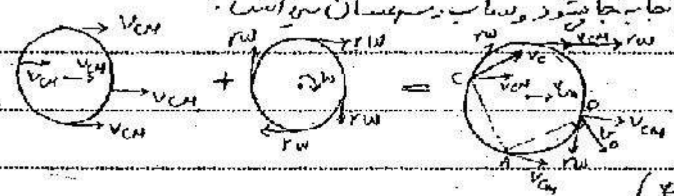
$v_A = 0$ $\quad a_A = 0$

$v_{CM} = R\omega$ $\quad a_{CM} = R\alpha$

$v_B = 2R\omega$ $\quad a_B = 2R\alpha$

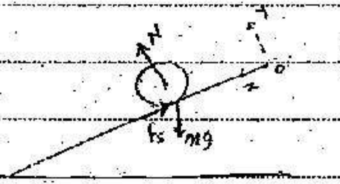
a) شتاب) بقیه نقاط برابر است با شعاع حاصل از آن در α

انتقال یعنی اینکه همه نقاط به موازات هم جابجا شوند و شتاب و سرعتشان یکی است.



- اگر غلتش بدون لغزش باشد (ادامه *)

انتقال مرکز جرم



$$\Sigma F(x) = mg\sin\alpha - f_s = m\bar{a} \quad ①$$

$$\Sigma F_y = N - mg\cos\alpha = 0 \quad ②$$

دوران حول مرکز جرم ; $\bar{\tau} = \bar{I}\alpha$

$$f_s \cdot R = \bar{I}\alpha \quad ③$$

(شرط غلتیدن (غلتش بدون لغزش)) $\bar{a} = R\alpha$

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - f_s = m\bar{a} \\ f_s \cdot R = \bar{I}\alpha \\ \bar{a} = R\cdot\alpha \end{cases}$$

$$\rightarrow f_s = \frac{\bar{I}\alpha}{R} = \frac{\bar{I}\bar{a}}{R^2}$$

- f_s است - انتقال را کم می‌کند یعنی حرکت کند می‌شود (a)

$$mg\sin\alpha - \frac{\bar{I}\bar{a}}{R^2} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \frac{mg\sin\alpha}{m + \bar{I}/R^2}$$

نقش نیروی مالش در انتقال به خلاف انتقال را نمی‌گیرد شتاب آن را کم می‌کند.

می‌غلتد ولی نمی‌لغزد یعنی اصطکاک داریم.

(ادامه *) اگر غلتش بدون لغزش باشد باید نقطه A صفر یعنی نباید سرعت داشته باشد.

$$v_A = v_{CM} - R\omega = 0 \rightarrow v_{CM} = R\omega$$

$$v_B = v_{CM} + R\omega = 2R\omega \rightarrow v_B = 2R\omega$$

$$v_C = R_C\omega$$

این روابط برای شتاب هم صادق است.

در حالت کلی ;

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{P/CM}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{CM} + \vec{a}_{P/CM}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

الف) استوانه توپر

$\bar{I} = \frac{1}{2}MR^2$

اصطکاک شتاب انتقال را کم می‌کند

$\bar{a} = \frac{2}{3} g\sin\alpha$ ← به علت لغزش مقداری انرژی تلف می‌شود به همین دلیل $\frac{2}{3}$ شده.

ب) کره توپر $\bar{I} = \frac{2}{5} mR^2$

$\bar{a} = \frac{5}{7} g\sin\alpha$

ج) محاسبه حداقل ضریب مالش برای غلتش بدون لغزش

استوانه توپر

$$f_s = \frac{\bar{I}\bar{a}}{R^2} = \frac{\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{2}{3}g\sin\alpha\right)}{R^2}$$

$f_s = \frac{1}{3}mg\sin\alpha$ اگر این f_s موجود باشد لغزش نیست.

کمترین نیروی مالش مورد نیاز

بیشترین نیروی مالش استاتیکی قابل دسترس ← $f_{s\,max} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\alpha$

اگر $\frac{1}{3}mg\sin\alpha = \mu_s mg\cos\alpha$

$\mu_s = \frac{1}{3}\tan\alpha$ اصطکاک مورد نیاز تامین شده و غلتش بدون لغزش ولی استوانه در آستانه لغزش است.

$\mu_s mg\cos\alpha > \frac{1}{3}mg\sin\alpha$

$\mu_s > \frac{1}{3}\tan\alpha$ غلتش بدون لغزش است و جسم از لغزش به دور

اگر $\mu_s < \frac{1}{3}\tan\alpha$ ← غلتش همراه با لغزش

کره توپر

کره توپر ⇒ $f_s = \frac{\bar{I}\bar{a}}{R^2} = \frac{\frac{2}{5}mR^2 \cdot \frac{5}{7}g\sin\alpha}{R^2}$

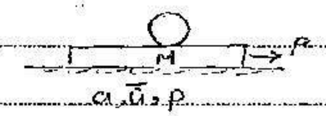
$\mu_s = \frac{2}{7}\tan\alpha$

$\mu_s > \frac{2}{7}\tan\alpha$. $\mu_s < \frac{2}{7}\tan\alpha$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

سرعت انتقال مرکز جرم گوی با شتاب را حساب کنید (با استفاده از این فرمول‌ها)
و انتقالش این است که جرم مرکز جرم جابجا شود.



$$\bar{x} = \frac{1}{2}\bar{a}t^2 + \bar{V}_0 t + x_0$$

$$\bar{V} = \bar{a}t + \bar{V}_0$$

$$\bar{V}^2 - \bar{V}_0^2 = 2\bar{a}(\bar{x} - \bar{x}_0)$$

(مثال حل نشده)

پایستگی تکانه زاویه‌ای

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

اگر بر سامانه‌ای گشتاور خارجی اثر نکند تکانه زاویه‌ای کل تغییر نمی‌کند یعنی برای اجزا ممکن است تغییر کند.

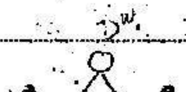
اگر بر سامانه‌ای $\tau_{ext} = 0$ ، $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} =$ ثابت

$\vec{L}_i = \vec{L}_f$

[illegible]

در مورد جسم صلب در حال چرخش حول محور ثابت : $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

اگر این شخص که نشسته است دستهایش را جمع کند سرعتش زیاد می‌شود



$L_1 = I_1\omega_1$

$L_2 = I_2\omega_2$

$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{I_1}{I_2}$

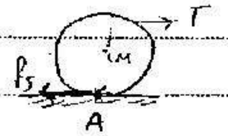
چرا ایستادن دوچرخه هنگام حرکت آسان است چون تعادل آن مشکل است که هنگامی که با سرعت حرکت می‌کند تعادل آن را حفظ می‌کند است؟

وقتی حرکت می‌کند بردار $\vec{L}$ را ثابت نگه می‌دارد ولی وقتی ساکن است $\vec{L}$ ندارد
وقتی هنگام حرکت $\vec{L}$ بزرگ دارد و اگر بخواهیم بیفتد باید $\vec{L}$ تغییر کند که تغییر آن مشکل است.

Subject:

Year.200 Month. Day.

(3)



$T - f_s = M\bar{a}$

$f_s . R + T . R = I\alpha$

$\bar{a} = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\bar{a}}{R}$

$\bar{a} = ?$

$a = \frac{2T}{M + I/R^2}$

$$\begin{cases} T - f_s = Ma \\ f_s + T = \dfrac{Ia}{R \times R} \end{cases}$$

$$2T = a\left(M + \frac{I}{R^2}\right) \rightarrow a = \frac{2T}{M + I/R^2} = \frac{2T}{M + \frac{MR^2}{2R^2}} = \frac{4T}{3M}$$

$T . 2R = I_A \alpha$

$T . 2R = \left(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right)\alpha$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{2RT}{\frac{3}{2}MR^2} \\ \bar{a} &= R\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{a} = \frac{4T}{3M}$$

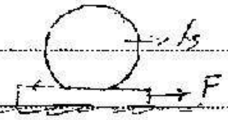
PILAVARAN

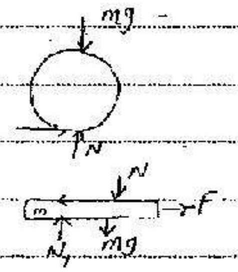
PAGE:

ارائه مخزن دوره ۱۸

(2)

دینامیک جرم صلب:



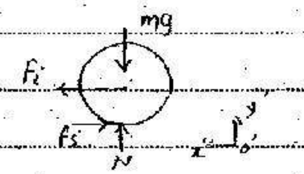


$$\begin{cases} f_s = ma \\ -f_s \cdot R = \frac{2}{5} mR^2 \alpha \\ \bar{a} - R\alpha = a \end{cases}$$

$$\rightarrow \bar{a} = a + R\alpha$$

$$F - f_s = ma$$

مثال: یک استوانه به جرم M و شعاع R که آن را استوانه توپر فرض می‌کنیم پشت اتاقک کامیونی در حالت سکون قرار دارد. اگر کامیون با شتاب ثابت a به حرکت درآید پس از طی چه مسافتی غلتک از پشت کامیون بیرون می‌افتد؟ طول اتاقک کامیون را L، غلتش را بدون لغزش فرض کنید. (مسافت را از دید ناظر متصل به کامیون محاسبه کنید)



$$-f_s + f_i = M\bar{a}'$$

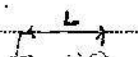
$$f_s \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \alpha$$

$$\bar{a}' = R\alpha$$

شتاب کامیون

$$f_s = \frac{1}{2} M\bar{a}' \rightarrow -\frac{1}{2} M\bar{a}' + Ma = M\bar{a}'$$

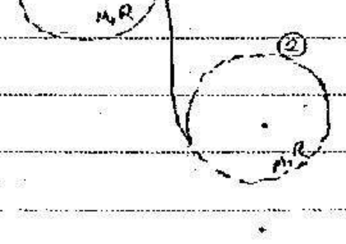
شتاب انتقال مرکز جرم استوانه نسبت به شتاب کامیون. $\bar{a}' = \frac{2}{3} a$

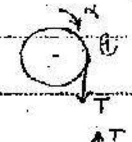


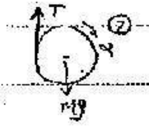
$$x = \frac{1}{2} a t^2$$

$$L = \frac{1}{2} a' t^2 \Rightarrow \frac{x}{L} = \frac{a}{a'} = \frac{a}{\frac{2}{3}a} = \frac{3}{2}$$

مثال: یک نخ به طول R دور قرقره پیچیده شده است.
(شکل مقابل) قرقره‌ها را از حالت سکون رها می‌کنیم. نخ از قرقره ۱ باز شده، قرقره ۱ فقط حول محور ثابت و حرکت
قرقره ۲ انتقالی و دورانی است. اگر نخ روی قرقره‌ها لغزش نکند مطلوبست: شتاب زاویه‌ای هر یک از دو قرقره،
شتاب انتقالی مرکز جرم قرقره ۲، کشش نخ
(اینرسی دورانی قرقره‌ها را $\frac{1}{2}MR^2$ فرض کنید)







$$\begin{cases} T \cdot R = \bar{I} \alpha \\ Mg - T = Ma \\ T \cdot R = \bar{I} \alpha \\ \bar{a} = R\alpha + R\alpha \end{cases}$$

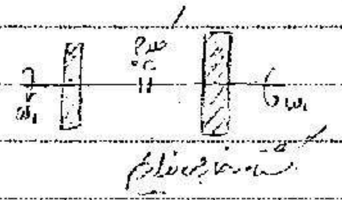
?

ارائه مخزن ۱۸

Subject:

Year. 200 Month. Day.

(1) در هر برخورد انرژی گم شده خارج از تکه‌ها به شکل گرما پخش می‌شود.



$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\,\omega$$

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$$

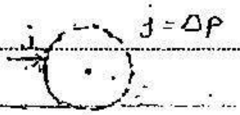
$$k = \frac{1}{2} I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2\omega_2^2$$

$$k' = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\,\omega^2$$

(مثال در متن)

صفحه 382 کتاب

سوال 17



$J = \Delta P$

$$J = mv_0 - 0$$

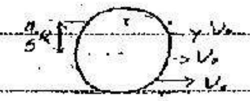
$$J \cdot d = I\omega_0$$

$$mv_0 d = I\omega_0$$

$$v_0 = \bar{v} = R\omega_0$$

$$m(R\omega_0)d = \frac{2}{5} mR^2\omega_0 \Rightarrow d = \frac{2}{5}R$$

17



$$J = \Delta P \rightarrow J = mv_0 - 0$$

$$J \cdot d = \bar{I}\omega_0$$

$$mv_0 \times \frac{4}{5}R = \frac{2}{5} mR^2\omega_0$$

$\frac{4}{5} \neq \frac{2}{5} \rightarrow$ پس عکس $v_0 = \frac{1}{2}R\omega_0$ جواب ما درست است.

$$f_k = m\bar{a} \Rightarrow \mu_k mg = m\bar{a} \rightarrow \bar{a} = \mu_k g$$

$$\frac{\bar{v} - v_0}{t} = \mu_k g \quad (1)$$

$$-f_k \cdot R = \frac{2}{5} mR^2\alpha \rightarrow -\mu_k mgR = \frac{2}{5} mR^2 \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

$$\mu_k g = \frac{2}{5t}(R\omega_0 - R\omega) \quad (2)$$

(1) = (2)

شرط غلتیدن: $\bar{v} = R\omega$

$$\frac{2}{5}(R\omega_0 - R\omega) = \bar{v} - v_0$$

$$\bar{v} = R\omega, \quad v_0 = \frac{1}{2}R\omega_0$$

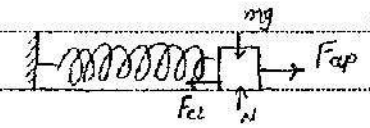
$$2(2v_0 - v) = 5\bar{v} - 5v_0 \Rightarrow 9v_0 = 7v \rightarrow v = \frac{9}{7}v_0$$

ادامه در ص 386 کتاب

Subject:

Year. 200 Month. Day.

نوسان :



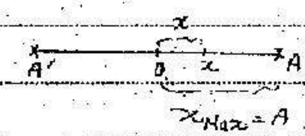
$F = ma$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$ معادلات دیفرانسیل حالتی از شتاب $-a$ ... x, $\ddot{x}$, x

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

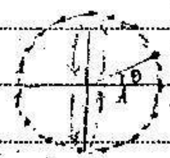
$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$



$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$

$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\quad \frac{1}{T} = f$ ν

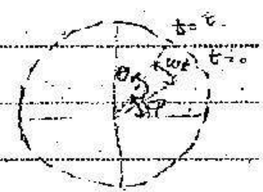


$y = A\sin\omega t$

$x = A\cos\omega t$

$x = A\cos\theta$

$= A\cos(\omega t + \varphi)$



$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$\frac{dx}{dt} = v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

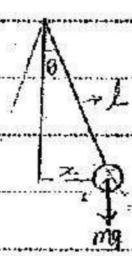
$\frac{dv}{dt} = a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow a = -\omega^2 x$

$F = -m\omega^2 x$

$$\left.\begin{array}{l} F = -m\omega^2 x \\ F = -kx \end{array}\right\} \Rightarrow k = m\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

معادله‌ی این سیستم حرکت هماهنگ ساده است



$F = ma$

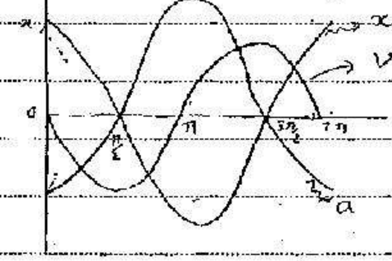
$mg\sin\theta = m\frac{d^2x}{dt^2}$

به ازای θ های کوچک $\Rightarrow \sin\theta = \tan\theta = \theta = \frac{x}{L}$

Subject:

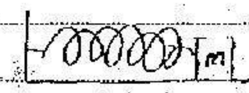
Year. 200 Month. Day.

$$\Rightarrow \quad mg\frac{x}{L} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}x = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{L}$$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ωt	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	$+A$	0	$-A$	0	A



$U + K =$ مقدار ثابت

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$kx^2 + mv^2 = kA^2 \rightarrow v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2)$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

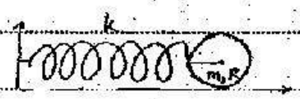
$T = ?$ با استفاده از معادله $\frac{d^2x}{dt} + \frac{k}{m} = 0$

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} kx\frac{dx}{dt} + mv\frac{dv}{dt} = 0$$

$$kx + m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

مثال: در شکل بالا بجای جرم استوانه‌ای که غلتش بدون لغزش دارد پریود حرکت نوسانی را بیابید



پایستگی انرژی: $U + K =$ مقدار ثابت

جسمی که غلتش دارد دو انرژی دارد یکی انتقالی مرکز جرم و یکی دورانی حول محور

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

شرط غلتش بدون لغزش $\omega = \frac{\bar{v}}{R}$; $\bar{I} = \frac{1}{2}mR^2$

$$\Rightarrow kx^2 + mv^2 + \frac{1}{2}mR^2\frac{\bar{v}^2}{R^2} = kA^2$$

$$kx^2 + \frac{3}{2}m\bar{v}^2 = kA^2 \Rightarrow 2kx\frac{dx}{dt} + \frac{3}{2}m \cdot 2\bar{v}\frac{d\bar{v}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 2kx + 3m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2}{3}\frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

آونگ پیچشی 8

- به یک مفتول نسبتاً ثابت قرص سنگینی می‌آویزیم تا جائیکه پیچ بشود.

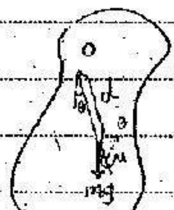
$\tau = I\alpha$ ضریب پیچش

$\tau = -k'\theta \qquad F = -kx$

$-k'\theta = I\alpha \rightarrow -k'\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} + k'\theta = 0$

$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k'}{I}\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k'}{I}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k'}}$

مثال: پریود نوسان جسمی را حول محور O بدست آورید.

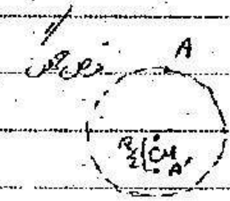


$-mgd\sin\theta = I_0\alpha$ اگر θ کوچک باشد $\rightarrow \sin\theta = \theta$

$-mg\theta . d = I_0\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$I_0\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\theta d = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I_0}\theta = 0 \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgd}}$

پریود نوسانات حول A با حول A' مقایسه

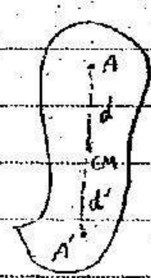


$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{mgR}}$

$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{3/2\, mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$

$T_{A'} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{A'}}{mg R/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{3/2\, mR^2}{mg R/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$

- نقطه‌ای مانند A' در سمت دیگر CM وجود دارد که دوره تناوب آن با A برابر است.



$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{mgd}}$

$d + d' = L \Rightarrow$ طول آونگ ساده معادل آونگ مرکب

$T_{A'} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{A'}}{mgd'}}$

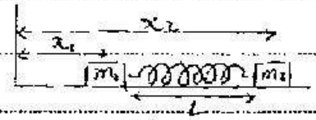
PILAVARAN

PAGE:

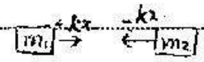
Subject:

Year. 200 Month. Day.

ـ پریود نوسانات ابا ...



$x = (x_2 - x_1 - L)$



$$kx = m_1\ddot{x}_1 \xrightarrow{\times m_2} \left\{ m_2 kx = m_1 m_2 \ddot{x}_1 \right.$$

$$-kx = m_2\ddot{x}_2 \xrightarrow[\times m_1]{} \left. m_1 kx = m_1 m_2 \ddot{x}_2 \right.$$

$$kx(m_1+m_2) = -m_1 m_2(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)$$

$x = x_2 - x_1 - L$

$\dot{x} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 - 0$

$\ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$

$$\Rightarrow kx\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} + \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = 0$$

$$\Rightarrow kx\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} + \ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + k\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} = \frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_1 m_2} + \frac{m_2}{m_1 m_2} = \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} = \frac{1}{\mu}$$

μ = جرم کاهیده

جرم کاهیده (چون از هر دو جرم کمتر است)

معادلات حرکت: $x = A\sin(\omega t + \varphi)$

$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$

$a = -\omega^2 x$

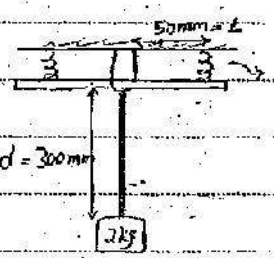
$x = x_2 - x_1 - L$

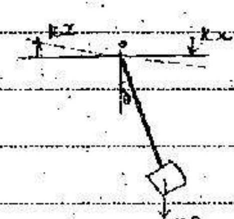
$v = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$

$a = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$

مثال: سیستم زیر از یک میله بدون جرم و دو فنر تشکیل شده ... به آن متصل است که وزنه ای به جرم 2kg به آن آویزان است. فنرها در حالت تعادل کشیده نیستند. دوره تناوب نوسانات کم دامنه را ...

فرض جرم m را سمت راست حرکت دهیم فنر ① متراکم میشود





$\tau = I\alpha$

$-mgd\sin\theta - kxL - kxL = md^2\ddot{\theta}$

$x \simeq L\theta$

$\sin\theta \simeq \theta$ تقریب ما است

PILAVARAN

PAGE:

Subject:

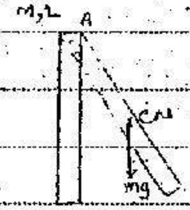
Year. 200 Month. Day.

$$mg\,d\theta + 2kL^2\theta + md^2\ddot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{(mgd + 2kL^2)\theta}{md^2} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{mgd + 2kL^2}{md^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{md^2}{mgd + 2kL^2}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2\times(0.3)^2}{2\times 9.8\times 0.3 + 800\,(0.5)^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{18\times10^{-2}}{0.6\times 9.8+2}}$$

میله همگن به طول L با جرم m را از یک انتها آویزان کرده‌ایم. برای نوسانات کم دامنه این میله را بیابید
طول آونگ ساده همزمان با این آونگ را نیز بیابید.
نقطه دیگری را روی میله بیابید که وقتی نسبت به آن حول آن نقطه برابر حالت اول شود.



$$-mg\frac{L}{2}\sin\theta = I_A\cdot\alpha$$

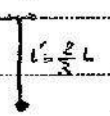
$$-mg\frac{L}{2}\theta = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{gL/2}{1/3\,L^2}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

$T' = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}} \leftarrow$ (در آونگ ساده) $\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$

$$T' = T \Rightarrow \sqrt{\frac{L'}{g}} = \sqrt{\frac{2L}{3g}} \rightarrow \frac{2L}{3g} = \frac{L'}{g}$$

$$\rightarrow L' = \frac{2}{3}L$$



طول آونگ ساده همزمان با آونگ فیزیکی

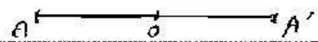
$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

تمرین: طول آونگ ساده همزمان با آونگ مرکب را بدست آورید.

Subject:

Year. 200 Month. Day.

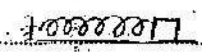
تمرین: ذره‌ای بین نقاط A و ´A که نوسان می‌کند سرعت متوسط زمانی و متوسط مکانی سرعت را بیابید.



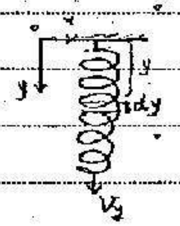
$x = A\sin(\omega t + \varphi)$

تمرین: فنری را یکبار بصورت افقی و بار دیگر بصورت عمودی می‌بندیم. ثابت کنید در هر دو حالت دوره $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ است.

تنها تفاوت آن‌ها این است که نقطه‌ی تعادلشان فرق می‌کند.



مثال:



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{m_{spring}}{3}}{k}}$$ (جرم فنر)

انرژی جنبشی

$$dk = \frac{1}{2}dm\,(V_y)^2$$

$$dm = \lambda dy$$

$$V_y = \frac{V}{L}y \rightarrow dk = \frac{1}{2}\lambda dy \cdot \frac{V^2}{L^2}y^2$$

$$\Rightarrow dk = \frac{1}{2}\lambda\frac{V^2}{L^2}\cdot y^2 dy$$

$$k = \frac{1}{2}\frac{\lambda V^2}{L^2}\cdot\int_0^L y^2 dy \Rightarrow k = \frac{1}{2}\frac{\lambda V^2}{L^2}\cdot\frac{L^3}{3}$$

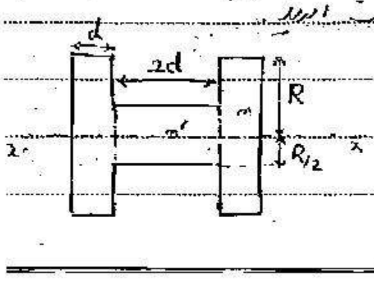
$$k = \frac{1}{2}\lambda\frac{L}{3}V^2 \rightarrow \lambda L = m_s$$

$$k = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_s}{3}\cdot V^2$$

$$k = \frac{1}{2}mV^2$$

از یک استوانه همگن به شعاع R و طول $L = 4d$ قرقره‌ای مطابق شکل می‌سازیم.

الف) انرژی دورانی قرقره را حول محور ´zz بر حسب جرم قرقره (M) و R به دست آورید.



$$m = \pi R^2 d\rho - 2m' \qquad m' = \pi\frac{R^2}{4}\cdot 2d\rho = \pi R^2\frac{d}{2}\rho$$

$$I_{1xx} = \frac{1}{2}mR^2 \qquad I_{2xx} = \frac{1}{2}m'\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}mR^2$$

Subject:

Year.200 Month. Day.

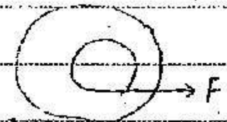
$M = 2m + m'$

$M = 2\pi R^2 d\rho + \frac{\pi R^2 d}{2}\rho = \frac{5}{2}\pi R^2 d\rho$

$I_{xx} = 2I_1 + I_2 \rightarrow I_{xx} = 2 \cdot \frac{1}{2} mR^2 + \frac{1}{16} mR^2$

$I_{xx} = \frac{17}{16} mR^2 \qquad \left.\begin{array}{l} m = \pi R^2 d\rho \\ M = \frac{5}{2}\pi R^2 d\rho \end{array}\right\} \Rightarrow M = \frac{5}{2} m$

$I_{xx} = \frac{17}{16} \cdot \frac{2}{5} MR^2 = \frac{17}{40} MR^2$



$\vec{a} = ?$ [illegible]

[illegible]

$(I = Mk^2)$

[illegible]

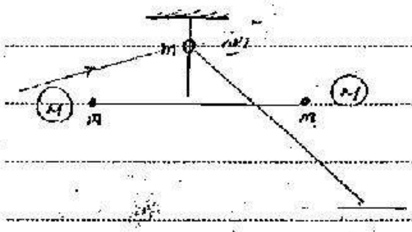
Subject:

Year. 200 Month. Day.

گرانش 3

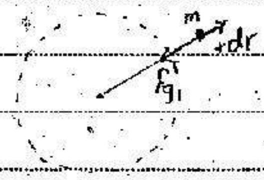
$\overrightarrow{m_1 \quad x \quad m_2}$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{x^2} \quad , \; G = 6.67 \times 10^{-11} \; \frac{Nm^2}{kg^2}$$



$$\tau = -k'\theta$$

انرژی پتانسیل گرانشی :



$$\Delta U = -W$$

$$U_{(r_0)} - U_{(r)} = -\int_r^{r_0} \vec{F_g} \cdot \vec{dr}$$

$$\Rightarrow U_{(r_0)} - U_{(r)} = -\int_r^{r_0} -\frac{GmM}{r^2}\, dr$$

$$U_{(r_0)} - U_{(r)} = -\frac{GmM}{r}\Big|_r^{r_0}$$

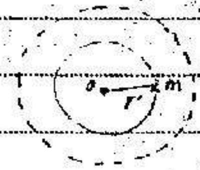
$$U_{(r_0)} - U_{(r)} = \frac{GmM}{r} - \frac{GmM}{r_0}$$

اگر $\begin{cases} U_{(r_0)} = 0 \\ r_0 = \infty \end{cases}$

$$0 - U_{(r)} = G\frac{mM}{r} \rightarrow U_{(r)} = -G\frac{mM}{r}$$

$r \geq R$ برای نقاط خارج زمین این رابطه درست است

حال نیروی جاذبه را در داخل زمین بررسی می کنیم.



کلیه نقاط خارج از این
کره ی فرضی هیچ نقشی
ندارند.

$$F_g = G\frac{mM'}{r'^2}$$

$$\frac{M'}{M} = \frac{4/3\,\pi r'^3 \rho}{4/3\,\pi R_e^3 \rho} \rightarrow \frac{M'}{M} = \left(\frac{r'}{R_e}\right)^3$$

PILAVARAN

PAGE:

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

$$\Rightarrow \quad f_g = G\frac{m}{(r')^2}\left(\frac{r'}{R_e}\right)^3 M \rightarrow f_g = \frac{GmM}{R_e^3}\, r'$$

در مرکز زمین جاذبه وجود ندارد.

- پتانسیل گرانشی را در یک نقطه در داخل زمین بدست آورید.

$$f_g = G\frac{mM}{R_e^3}\cdot r'$$ احتیاج به نیروی گرانش دارد.   (پتانسیل در مرکز زمین صفر نیست)

$\Delta U = -W$ کار نیروی گرانش در داخل کره زمین.

نیرو متناسب با فاصله بوده اثر می‌کند یعنی نوسان می‌کند.

اگر تونلی از مرکز زمین عبور دهیم و جسمی درون آن قرار دهیم $f = -\frac{GmM}{R^3}\cdot r = -kr$

پریود نوسانات آن را حساب کنید.

$$-kr = m\ddot{r}$$

$$\ddot{r} + \frac{k}{m}r = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{GmM}{R^3}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$$M = \tfrac{4}{3}\pi R^3\rho$$ [illegible] R_0

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G\cdot\frac{4}{3}\pi\rho R^3}}$$

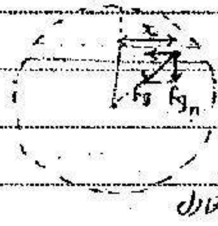
$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{g_0 R^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

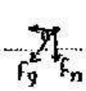
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{6400\times10^3\,m}{9.8}} \simeq 84\ min$$

84 دقیقه طول می‌کشد از این سر زمین به آن سر برود.

- پریود نوسانات را حساب کنید.





$$f_g = G\frac{mM}{R_e^3}\cdot r$$ فاصله از نقطه تا مرکز زمین

فاصله $= \cos\theta$

جرم با نقطه تعادل

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$F_x = F_g \cos\theta = G\frac{mM}{R^3}\, r\cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

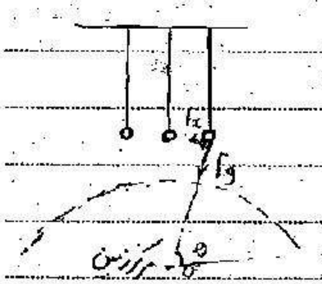
$$\rightarrow F_x = G\frac{mM}{R^3}\, r\cdot\frac{x}{r} \rightarrow F_x = G\,mM\frac{x}{R^3}$$

$$\rightarrow -G\frac{mM}{R^3}\, x = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} + G\frac{M}{R^3}\, x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{g_0 R^2}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{R/g}$$

مثال: یک تونل حفر کرده‌ایم. پریود آن چقدر است؟ (در درون سطح زمین)

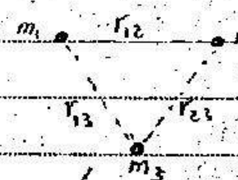


$$F_x = F_g\cos\theta \rightarrow F_x = G\frac{mM}{R^3}\cdot r\cdot\frac{x}{r}$$

$$\text{اندازه}\quad F_x = G\frac{mM}{R^3}\cdot x \rightarrow -G\frac{mMx}{R^3} = m\ddot{x}$$

$$\rightarrow \ddot{x} + G\frac{M}{R^3}x = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

مثال: سه جرم داریم انرژی پتانسیل آن را بیابید.



کار انرژی پتانسیل

$$U_{(r)} = -G\frac{mM}{r} \quad \text{انرژی پتانسیل دو جسم} \quad (2)$$

m_1 را از ابتدا جسم می‌آوریم از بی‌نهایت

m_3, m_1 ... جاذبه

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G\frac{m_2 m_3}{r_{23}} - G\frac{m_1 m_3}{r_{13}}$$

حال m_3 را می‌آوریم از بی‌نهایت با این جاذبه آن با m_1 ...

اگر m_4 داشتیم همین کار را می‌کردیم

$$U = -\left(G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + G\frac{m_2 m_3}{r_{23}} + G\frac{m_1 m_3}{r_{13}}\right)$$

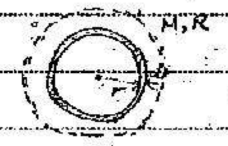
... معادله ... این ... پتانسیل ... نیرو ... گرفت

Subject:

Year. 200 Month. Day.

برداشتن گرمای بیرونی کارات

مثال: انرژی پتانسیل یک کره همگن را بیابید.



$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$dm = 4\pi r^2 \rho \, dr$$

$$du = G\frac{m\,dm}{r} \Rightarrow du = \frac{G(\frac{4}{3}\pi r^3\rho) \cdot 4\pi r^2 \rho\, dr}{r}$$

$$\Rightarrow du = \frac{16}{3} G\pi^2 r^4 \rho^2 dr \Rightarrow U = -\frac{16}{3} G\pi^2\rho^2 \int_0^R r^4 dr$$

$$\Rightarrow U = -\frac{16}{3} G\pi^2\rho^2 \frac{R^5}{5} \Rightarrow U = -G\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right)^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{R}$$

$$U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

مثال: انرژی پتانسیل کهکشانی N ستاره به جرم M با شعاع R را بیابید.

$N = 1.6 \times 10^{11}$

$R = 10^{23}$ cm

$M = 2 \times 10^{30}$ kg

$$U = -G(N-1)(N) \cdot \frac{M^2}{2R}$$

$$F = G\frac{mM}{r^2} \Rightarrow G\frac{mM}{r^2} = mr\omega^2$$

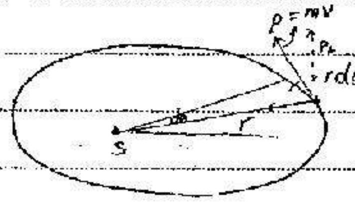
$$\frac{GM}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

PILAVARAN

PAGE:

Subject:

Year. 200 Month. Day.



$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

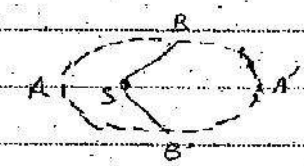
سرعت سطحی , $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega$

تکانه زاویه‌ای $L = P_\perp \cdot r \quad \rightsquigarrow \quad L = mr\omega \cdot r = mr^2\omega$

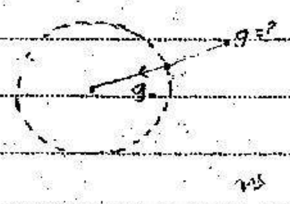
$$\frac{dA}{dt} = \frac{mr^2\omega}{2m} = \frac{L}{2m} = \text{مقدار ثابت}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$ چون گشتاور خارجی وجود ندارد L ثابت است.

مثال: در حرکت زمین به دور خورشید نشان دهید زمان رفتن از B به B′ کمتر از زمان رفتن از B′ به B است و نسبت آن را بیابید.



مثال: در شرایطی که g چقدر تغییر می‌کند



$$g = G\frac{M}{r^2} \rightsquigarrow dg = -2r\frac{GM}{r^4}\,dr$$

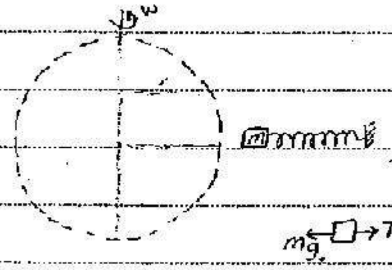
$$\rightsquigarrow \frac{dg}{dr} = -2\frac{GM}{r^3} \rightsquigarrow \frac{dg}{dr} = -2\frac{GM}{r^2} \times \frac{1}{r}$$

$$\rightsquigarrow \frac{dg}{dr} = -\frac{2g}{r}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال:



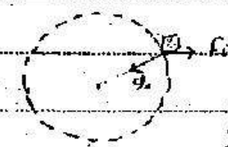
$$mg_0 - T = ma$$

$$T = m(g_0 - a)$$

$$W = m(g_0 - a)$$

$$m g = m(g_0 - r\omega^2)$$

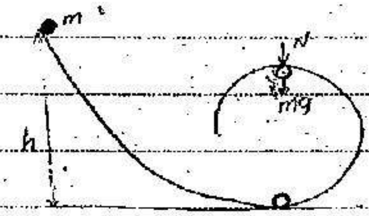
مقدار $r\omega^2$ برابر $\frac{3}{100} g_0$ است (در سطح زمین)



$$g_0 = G\frac{Mm}{r^2}$$

λ عرض جغرافیایی $\rightarrow$ $g_{(\lambda)} = g_0 - a\cos\lambda$ $\qquad a = r\omega^2$

مثال: از چه ارتفاع h باید جسم رها شود تا جسم m حلقه را دور بزند؟



$$mgh = \frac{1}{2}m\bar{V}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 + mg(2R-2r)$$

$$mgh = \frac{1}{2}m\bar{V}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}m\underbrace{r^2\omega^2}_{\bar{V}^2} + 4mg(R-r)$$

$$2gh = \frac{7}{5}\bar{V}^2 + 2g(R-r) \quad (1)$$

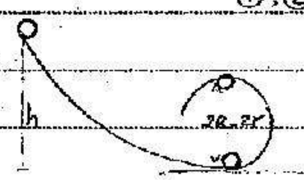
شرط دور زدن $N=0$

$$N + mg = \frac{m\bar{V}^2}{R-r}$$

$$mg = \frac{m\bar{V}^2}{R-r} \quad \Rightarrow \quad \bar{V}^2 = g(R-r) \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow h = 2.7(R-r) \qquad r \ll R$$

$$h = 2.7R$$



r ← شعاع m است

PILAVARAN

PAGE: