بسمه تعالی

جزوه

فیزیک ۲

دانشگاه

علم و صنعت

استاد

دکتر فرمان

فیزیک ۲ استاد فرمان — نویسنده: حامد جهانی

جلسه اول

الکترواستاتیک: ۱) قانون کولن (کولمب) ۲) میدان الکتریکی (حجم).

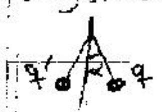
$\hat{u}$ = unit vector

۱) قانون کولن نیروهای عکس مجذور فاصله‌ای با تندیری کولنی بارها هستند. هر دو بار بر هم اثری و نیرویی وارد که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$F \propto \frac{qq'}{r^2}$ اندازه $F = \frac{kqq'}{r^2} \Rightarrow \vec{F} = \frac{kqq'}{r^2}\hat{r}$

که $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ دو حالت: الف) اگر $qq'>0 \Leftarrow \vec{F} \parallel \vec{r}$ ب) $qq'<0 \Leftarrow \vec{F} \parallel -\vec{r}$

* اندازه k را از طریق آزمایش محاسبه کرده‌اند، دو بار مشخص را در فاصله r از هم قرار می‌دهند و با استفاده از ترازوی پیچشی نیرو را بدست آورده طبق رابطه نیرو: $k = \frac{Fr^2}{qq'}$ مقدار k را بدست می‌آورند.



$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9\times10^{9}\frac{Nm^2}{C^2}$ ، ε_0 = قابلیت نفوذ الکتریکی در خلاء

* فرمول نیوتن $F = G\frac{mm'}{r^2}$ مشابه قانون کولن با کاربرد مکانیکی است. اما برای نوشتن حالت برداری باید منفی اضافه کرد، $\vec{F} = -G\frac{mm'}{r^2}\hat{r}$ زیرا اینکه m و m' معمولاً مثبتند، نیرو باید جاذبه باشد اما نیرو همیشه جاذبه است.

* نیروی کولنی به مراتب (در حدود 10^{30} برابر) از نیروهای گرانشی قوی‌تر است. $F_e \gg F_g$

نیروهای موجود در طبیعت به ترتیب افزایش نیرو:
۱) گرانشی
۲) هسته‌ای ضعیف
۳) الکتریکی
۴) هسته‌ای قوی

۲) میدان الکتریکی

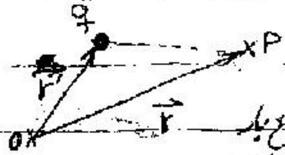
$\vec{F} = \frac{kqq'}{r^2}\hat{r}$

$q' = 1 \Rightarrow \vec{F} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$

* هر بار در نقطه P به فاصله R از خودش یک اغتشاش ایجاد می‌کند و این همان میدان است. اما چطور بفهمیم در جایی میدان وجود دارد؟ یک بار آزمون قرار می‌دهیم اگر نیرو وارد شد میدان وجود دارد.

$\left[\vec{F} = \frac{kqq'}{r^2}\hat{r}\right]\times\frac{1}{q'} \Rightarrow \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{kq}{r^2}\hat{r} = \vec{E}$ واحد: $N.C^{-1}$

* در فیزیک میدان و نیرو را در فاصله صفر تعریف نمی‌شود.

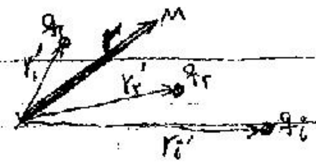


الف) میدان بار نقطه‌ای:

$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$ — r: بردار موضع نقطه P نسبت به مرجع — r': بردار موضع بار نسبت به نقطه مرجع

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}=\frac{kq(\vec{r}-\vec{r}')}{|r-r'|^3}} \qquad \vec{E}=\lim_{q'\to 0}\frac{\vec{F}}{q'}$$

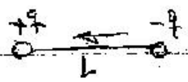
ب) میدان در نقطه‌ای از فضا با وجود چند بار نقطه‌ای:



$$\vec{E}=k\sum\frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

یا $\vec{E}=k\sum\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i')}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|^3}=\vec{E}(\vec{r})$

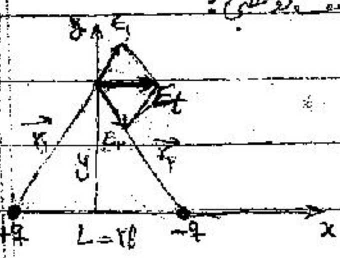
جلسه دوم



دوقطبی: دو بار مساوی و مخالف تشکیل دوقطبی می‌دهند

گشتاور (ممان) دوقطبی: $\vec{P}=Lq\hat{i}$ جهت آن از بار منفی به سمت بار مثبت است.

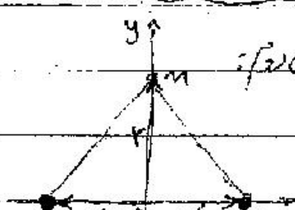
مثال: مطلوبست محاسبه میدان حاصل از یک دوقطبی در یک نقطه دلخواه بر فرض روی عمود منصف دوقطبی:



$$\vec{E}_1=\frac{kq}{r_1^2}\hat{r}_1=\frac{kq}{y^2+l^2}\hat{r}_1 \quad \text{و} \quad \vec{E}_2=\frac{kq}{y^2+l^2}\hat{r}_2$$

$$E_t=2|E_1|\sin\theta=\frac{2kq}{y^2+l^2}\cdot\frac{l}{(y^2+l^2)^{1/2}}\Rightarrow\boxed{\vec{E}_t=\frac{2kql}{(y^2+l^2)^{3/2}}\hat{i}}$$

روش دوم:



$\vec{r}=y\hat{j}$, $\vec{r}_1'=-l\hat{i}$, $\vec{r}_2'=l\hat{i}$

$$\vec{E}_t=k\left[\frac{q(y\hat{j}+l\hat{i})}{(y^2+l^2)^{3/2}}+\frac{-q(y\hat{j}-l\hat{i})}{(y^2+l^2)^{3/2}}\right]=$$

$$=\frac{kq}{(y^2+l^2)^{3/2}}\left(\cancel{y\hat{j}}+l\hat{i}-\cancel{y\hat{j}}+l\hat{i}\right)=\frac{2kql}{(y^2+l^2)^{3/2}}\hat{i}=\frac{kP}{(y^2+l^2)^{3/2}}\hat{i}$$

اگر در سال $x \ll 1$ باشد بسط تیلور: اگر $\frac{l^2}{y^2}=x\Rightarrow E_t=\frac{kP}{y^3(1+x)^{3/2}}=\frac{kP}{y^3}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$

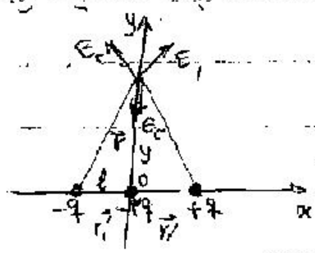
$$\Rightarrow E_t=\frac{kP}{y^3}\left(1-\frac{3}{2}x\right)\Rightarrow \boxed{E_t=\frac{kP}{y^3}\left(1-\frac{3l^2}{2y^2}\right) \quad : \text{اگر } l \ll y}$$

این روش جهت $\vec{E}_t$ را هم مشخص می‌کند مرجح است.

نکته تستی: میدان بار نقطه‌ای و چهار بار دیگر

بار نقطه‌ای: $E\propto\frac{1}{r^2}$ — دوقطبی $E\propto\frac{1}{r^3}$ — چهارقطبی $E=\frac{1}{r^4}$

مثال: درمثال قبلی فرض کنید. ۱/ هر دو بار مثبت باشند، نتایج را بدست آورید. ۲/ با نتایج حاصل از قسمت اول یک بار $2q-$ در وسط بارها قرار دهید و میدان کل را پیدا کنید. بسته به نسبت $\frac{l}{y}$ در اندازه جواب نهایی بحث کنید.



$$\vec{E}_{t_1} = k\left[\frac{q}{(y^2+l^2)^{3/2}}(y\hat{j}+l\hat{i}) + \frac{q}{(y^2+l^2)^{3/2}}(y\hat{j}-l\hat{i})\right] = \frac{2kqy}{(y^2+l^2)^{3/2}}\hat{j} = \boxed{\frac{2kqy}{(y^2+l^2)^{3/2}}\hat{j}}$$

اگر خیلی دور باشد: $\vec{E}_{t_1} = \frac{2kqy}{y^3(1+\frac{l^2}{y^2})^{3/2}}\hat{j} = \frac{2kq}{y^2}\frac{1}{(1+\frac{l^2}{y^2})^{3/2}}\hat{j}$

$$\Rightarrow \vec{E}_{t_1} = \frac{2kq}{y^2}\left(1-\frac{3l^2}{2y^2}\right)\hat{j} \qquad \Rightarrow x \approx 0 : |\vec{E}_t| = \frac{2kq}{y^2}\hat{j}$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t_1} + \vec{E}_{2q}$$

$$\vec{E}_t = \frac{-2kq}{y^2}\hat{j} + \frac{2kqy}{(y^2+l^2)^{3/2}}\hat{j} = \frac{2kq}{y^2}\left(-1+\frac{1}{(1+\frac{l^2}{y^2})^{3/2}}\right)\hat{j} = \frac{2kq}{y^2}\left(\frac{1-(1+\frac{l^2}{y^2})^{3/2}}{(1+\frac{l^2}{y^2})^{3/2}}\right)\hat{j}$$

$$= \frac{2kq}{y^2}\left(\frac{1-(1+\frac{3}{2}\frac{l^2}{y^2})}{1+\frac{3}{2}\frac{l^2}{y^2}}\right)\hat{j} = \frac{2kq}{y^2}\left(\frac{-\frac{3}{2}\frac{l^2}{y^2}}{\frac{2y^2+3l^2}{2y^2}}\right) = \boxed{\frac{3kql^2}{y^2(2y^2+3l^2)}(-\hat{j})}$$

بررسی وضعیت یک دوقطبی در یک میدان یکنواخت

میدان یکنواخت: میدانی که در هر نقطه اندازه و جهت آن ثابت است.

برای دو نیروی غیر هم‌جهت موازی، گشتاور برابر $|\vec{\tau}| = F\Delta$ است.

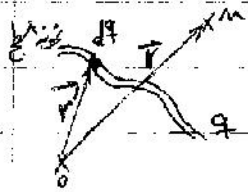
$$|\vec{\tau}| = F \times \Delta = qE(2l\sin\theta) = 2qlE\sin\theta = PE\sin\theta \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{P}\times\vec{E}}$$

کار گردشی ها

[illegible]: $\boxed{dw = \tau . d\theta} \Rightarrow dw = PE\sin\theta\, d\theta \Rightarrow W = PE\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\, d\theta \Rightarrow$

$$\boxed{W = -PE(\cos\theta - \cos\theta_0)} \qquad W = -\Delta U \Rightarrow \boxed{U = PE\cos\theta}$$

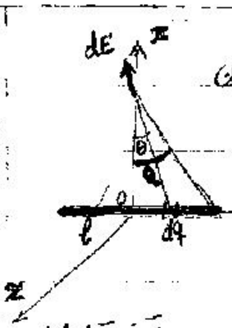
ج) میدان در یک نقطه بر اثر یک سطح با بار q:



$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\hat{r} \quad \text{یا} \quad d\vec{E} = k\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

چگالی خطی بار $\lambda = \frac{dq}{dx}$ ، چگالی سطحی بار $\frac{dq}{da} = \sigma$ ، چگالی حجمی بار $\rho = \frac{dq}{dv}$

مثال: محاسبه میدان حاصل از یک توزیع بار یکنواخت خطی در نقطه‌ای به فاصله $\vec{r}$ از مرکز آن.



علی القاعده باید المان میدان را به مؤلفه‌هایش تجزیه کنیم (در اینجا dE_y و dE_z) به علت تقارن مشخص است که $E_y = 0$ ضمنا:

$$E_x = \int dE_x = 0 \quad , \quad E_z = \int dE_z$$

پس فقط E_z را باید محاسبه کرد:

$$E_t = 2\int dE_z = 2\int dE\cos\theta = 2k\lambda z\int_0^{l} \frac{dy}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$y = z\,tg\theta$ با تغییر متغیر $\Rightarrow E_t = \frac{2k\lambda z}{z^2}\int_0^{\theta}\cos\theta\, d\theta = \frac{2k\lambda}{z}\cdot\frac{l}{\sqrt{l^2+z^2}} =$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E_t} = \frac{2k\lambda}{z}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{z^2}{l^2}}}\,\hat{k}}$$

برای فاصله دور $\vec{E_t} = \frac{2k\lambda}{z}\hat{k}$

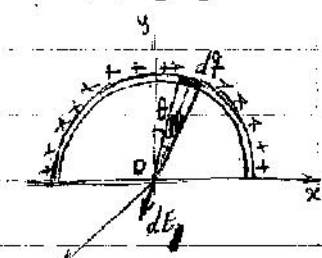
روش دوم: $\vec{r} = z\hat{k}$, $\vec{r'} = y\hat{j}$ $\Rightarrow \vec{E} = k\lambda\left[z\int_{-l}^{l}\frac{dy}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k} - \int\frac{y\,dy}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{j}\right]$

که صفر می‌شود، هم با محاسبه و هم اینکه $\vec{E}$ مؤلفه $\hat{j}$ ندارد

انتگرال خود هم با تغییر متغیر $y = z\,tg\theta$ حل خواهد شد.

تمرین: یک توزیع بار بر مسیر نیم‌دایره‌ای به طول l و به شعاع R داریم. میدان را در مرکز نیم‌دایره بدست آورید. سپس نصف نیم‌دایره را با بار مثبت و نصف دیگر را با بار منفی فرض کنید و حاصل را بدست آورید.

$$dq = \lambda dy = \lambda R d\theta$$



$E_z = E_x = 0$ (به علت خارج بودن از صفحه، به علت تقارن) $\quad E = E_y = \int dE_y = \int \frac{k\,dq\,(-R\hat{j})}{R^3}\cos\theta$ $\;(= \int dE\cdot\cos\theta)$

$$= -\frac{k\lambda}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta\,\hat{j} = \boxed{-\frac{2k\lambda}{R}\hat{j}}$$

اگر یک طرف مثبت و طرف دیگر منفی: $E = \int dE = \int\frac{k(-dq)}{R^3}(-x\hat{i}+y\hat{j}) + \int\frac{k\,dq}{R^3}(x\hat{i}+y\hat{j})$

$$= \frac{k\lambda}{R}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})d\theta + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})d\theta\right]$$

$$= \frac{k\lambda}{R}(\hat{i} - \hat{j} + \hat{i} + \hat{j}) = \frac{2k\lambda}{R}\hat{i}$$

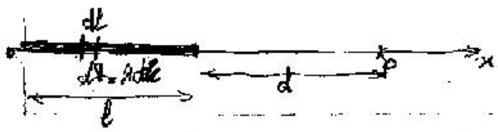
روش دوم: $\frac{1}{2}$ مثبت میدانی (طبق بالا) برابر $\frac{2k\lambda}{R}(\hat{i}-\hat{j})$ دارد و $\frac{1}{2}$ منفی میدان $\frac{2k\lambda}{R}(-\hat{i}+\hat{j})$ که اگر اینها با هم جمع شوند $\frac{2k\lambda}{R}\hat{i}$ حاصل می‌شود.

اگر زاویه θ باشد:  $\vec{E} = \frac{2k\lambda}{R}\sin\frac{\theta}{2}(-\hat{j})$

جلسه سوم

مثال: میدان حاصل از میله باردار به طول l و بار q با چگالی ثابت (مثل توزیع) مطابق شکل در نقطه P به فاصله d از انتهای میله حساب کنید:

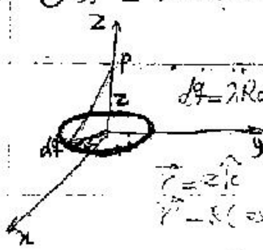
$\vec r = x\hat i \qquad \vec r' = (d+l)\hat i$



$$dE = \frac{k\,dq}{|\vec r-\vec r'|^3}(\vec r-\vec r') = \frac{k\lambda\,dx}{(x-d-l)^3}(x-d-l)\hat i = \frac{k\lambda\,dx}{(x-d-l)^2}\hat i$$

$$\Rightarrow E=\int_0^l \frac{k\lambda\,dx}{(x-d-l)^2}\hat i = \left(\frac{-k\lambda\hat i}{x-d-l}\right)_0^l = \frac{k\lambda}{d} - \frac{k\lambda}{d+l} = \frac{k\lambda l}{d^2+ld}\hat i$$

مثال: مطلوبست محاسبه میدان حاصل از یک حلقه باردار به شعاع R و با چگالی ثابت λ روی محور حلقه به فاصله z از آن.



$$d\vec E = \frac{k\,dq}{|\vec r-\vec r'|^3}(\vec r-\vec r') = \frac{k\lambda R\,d\theta}{(R^2+z^2)^{3/2}}(z\hat k - R\cos\theta\,\hat i - R\sin\theta\,\hat j)$$

$dq=\lambda R\,d\theta$

$\vec r = z\hat k$

$\vec r' = R(\cos\theta\,\hat i+\sin\theta\,\hat j)$

$$\Rightarrow \vec E = \frac{k\lambda R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}(z\hat k - R\cos\theta\,\hat i - R\sin\theta\,\hat j)\,d\theta$$

میدان ناشی از یک حلقه $\Rightarrow \boxed{E=\frac{kqz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat k}$

* در مثال بالا فرض کنید چگالی بار ثابت نیست بلکه بصورت $\lambda=\lambda_0\sin\theta$ باشد.

$$E = \frac{k\lambda_0 R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left[z\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\hat k\,d\theta - R\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,\hat i\,d\theta - R\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\hat j\,d\theta\right] = \frac{k\lambda_0 R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left(-R\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{k\lambda_0 R^2\pi}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

نکته: $q_{کل}=\int\lambda\,ds=\int_0^{2\pi}\lambda_0\sin\theta\,R\,d\theta=0$ چون بار نقطه‌ای نیست با وجود صفر بودن بار کل باز هم میدان داریم.

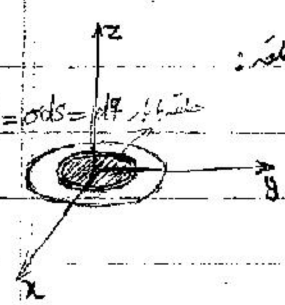
* در مثال اول مکان ماکزیمم میدان در چه ارتفاعی است و مقدار آن را بیابید.

$$E=\frac{kqz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat k \Rightarrow \frac{dE}{dz} = kq\frac{(R^2+z^2)^{3/2}-\frac32(2z)(z^2+R^2)^{1/2}(z)}{(R^2+z^2)^3}=0$$

$$\Rightarrow (R^2+z^2)^{3/2} - 3z^2(R^2+z^2)^{1/2}=0 \Rightarrow (R^2+z^2)-3z^2=0 \Rightarrow R^2=2z^2 \Rightarrow \boxed{z=\frac{\sqrt2}{2}R}$$

مثال: مطلوبست محاسبه میدان حاصل از یک قرص باردار به شعاع R در ارتفاع z روی محور حلقه:

حلقه باریک: $dq=\sigma\,ds=\sigma 2\pi r\,dr$



$$d\vec E = \frac{kz\,dq}{(r^2+z^2)^{3/2}}\hat k = \frac{2\pi kz\sigma r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}\hat k$$

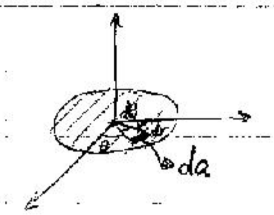
$$\Rightarrow \vec E = 2\pi k\sigma z\int_0^R\frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}\hat k = -2\pi k\sigma z(r^2+z^2)^{-1/2}\Big|_0^R\hat k$$

$$\Rightarrow \vec E = 2k\pi\sigma z\left(\frac1z-\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) = 2k\pi\sigma\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}}\right)$$

میدان ناشی از یک صفحه دیسک شکل $\Rightarrow \boxed{\vec E = 2k\pi\sigma\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}}\right)\hat k = \frac{2kQ}{R^2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat k}$

حالت خاص وقتی $\frac{R}{z}\to\infty$ آنگاه میدان $\vec{E}=2k\pi\sigma\hat{k}$ خواهد بود یعنی برای صفحه خیلی بزرگ میدان در هر نقطه خارج صفحه ثابت و برابر $\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$ است.

روش دوم:



$da=r\,d\theta\,dr$, $dq=\sigma r\,d\theta\,dr$

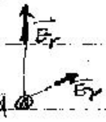
$$d\vec{E}=\frac{k\sigma r\,dr\,d\theta}{(z^2+r^2)^{3/2}}(z\hat{k}-r\cos\theta\,\hat{i}-r\sin\theta\,\hat{j})$$

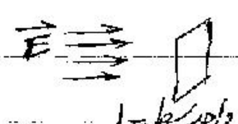
$$\Rightarrow \vec{E}=k\sigma\left[z\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{r\,dr\,d\theta}{(z^2+r^2)^{3/2}}-\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{r^2dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}\cos\theta\,\hat{i}\,d\theta-\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{r^2dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}\sin\theta\,\hat{j}\,d\theta\right]$$

$$\Rightarrow \vec{E}=k\sigma z\int_0^R\frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\theta=2k\pi z\sigma\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

شار الکتریکی و قانون گوس

برای نشان دادن میدان (بزرگی و جهت) از خطوط میدان یا خطوط نیرو استفاده می‌کنیم: خطوط میدان خطوطی فرضی هستند که ۱- مماس بر آن در هر نقطه جهت میدان را نشان دهد ۲- بزرگی میدان توسط فراوانی آنها در واحد سطح نشان داده شود.



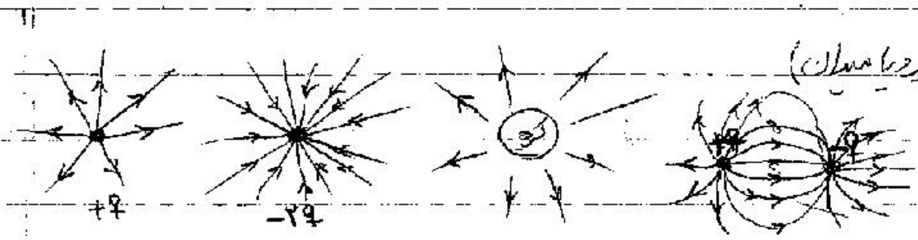


در میدان یکنواخت: $|\vec{E}|=n$: تعداد خطوط نیرو در واحد سطح عمود بر خطوط نیرو

تعداد خطوط گذرنده از سطحی به مساحت A با زاویه φ (بین عمود بر صفحه و خطوط) = شار الکتریکی

$$\varphi=nA\cos\varphi=A|\vec{E}|\cos\varphi \rightarrow d\varphi=E\,da\cos\varphi \Rightarrow \boxed{\varphi=\int\vec{E}\cdot d\vec{a}}$$: flu

رسم خطوط قوا (نیرو یا میدان)



قانون گوس (Gauss): شار گذرنده از یک سطح بسته = بار خالص موجود در آن سطح بسته

$$\boxed{\varphi=\oint\vec{E}\cdot d\vec{a}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q}$$

شکل و ابعاد سطح و نحوه پراکندگی بار در میزان شار الکتریکی عبوری تأثیری ندارد.

اثبات قانون گاوس در کره:

$$d\varphi = \vec{E} \cdot \vec{da}$$

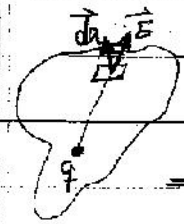
$$\vec{E} = \frac{kq}{R^2}\hat{r} \ , \ \vec{da} = da\,\hat{r} \Rightarrow d\varphi = \frac{kq}{R^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\,da = \frac{kq}{R^2}da$$

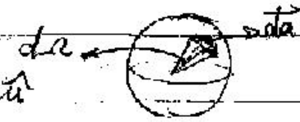
$$\Rightarrow \varphi = \frac{kq\,4\pi R^2}{R^2} = \frac{q}{\frac{1}{4k\pi}} = \frac{q}{\varepsilon}$$

اثبات به صورت کلی:

$$ds = R\,d\theta \rightarrow d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow \int d\theta = \int \frac{ds}{R} = 2\pi$$

$$da = R^2 d\Omega \rightarrow d\Omega = \frac{da}{R^2} \Rightarrow \int d\Omega = \int \frac{da}{R^2} = 4\pi$$



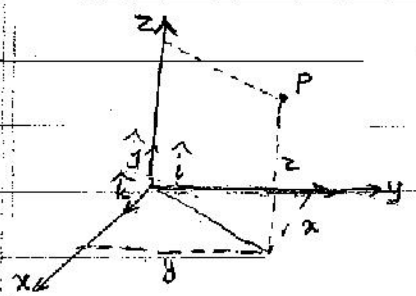


$$d\varphi = \vec{E}\cdot\vec{da} \Rightarrow \vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r} \ , \ \vec{da} = da\,\hat{n}$$

$$\Rightarrow d\varphi = \frac{kq}{r^2}da\cos\theta \Rightarrow \varphi = \int d\varphi = kq\oint \frac{da\cos\theta}{r^2} = kq(4\pi) = \frac{q}{\varepsilon}$$

مروری بر محورهای مختصات

۱/ مختصات دکارتی:



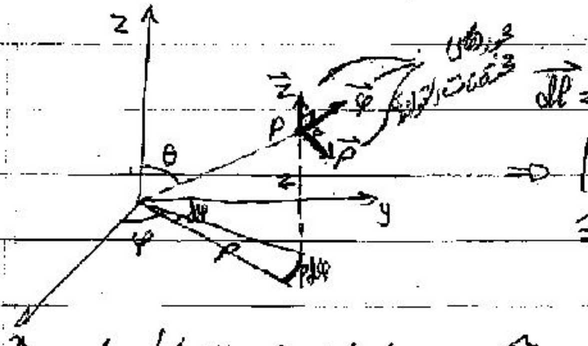
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{dl_r} = \vec{dl} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

$$|\vec{dl_r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

$$da: \text{برداری} = \begin{cases} dx\,dy \rightarrow \hat{k} \\ dy\,dz \rightarrow \hat{i} \\ dx\,dz \rightarrow \hat{j} \end{cases} \qquad dv = dx\,dy\,dz$$

۲/ مختصات استوانه‌ای:



$$\vec{dl} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho\,d\varphi\,\hat{\varphi} + dz\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow |\vec{dl}| = \sqrt{(d\rho)^2 + r^2(d\varphi)^2 + (dz)^2}$$

$$\hat{z} = \hat{\rho}\times\hat{\varphi}$$

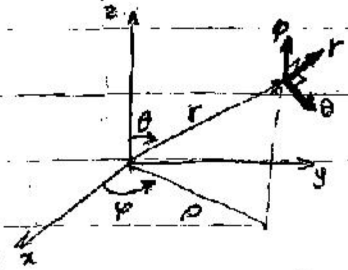
$$dv = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$$

$$da: \text{برداری} = \begin{cases} \rho\,d\varphi\,dz \rightarrow \hat{\rho} \\ \rho\,d\rho\,d\varphi \rightarrow \hat{k} \\ d\rho\,dz \rightarrow \hat{\varphi} \end{cases}$$

طریقه بدست آوردن ρ, φ

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

۳/ مختصات کروی :



$$\begin{cases} dl_r = dr \\ dl_\theta = r\,d\theta \\ dl_\varphi = \rho\,d\varphi = r\sin\theta\,d\varphi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow dl = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{\varphi}$$

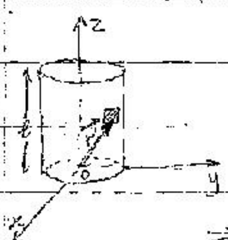
$$\Longrightarrow |\vec{dl}| = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\,(d\varphi)^2}$$

عنصر سطح، $da = \begin{cases} r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \longrightarrow \hat{r} \\ r\sin\theta\,d\varphi\,dr \longrightarrow \hat{\theta} \\ r\,d\theta\,dr \longrightarrow \hat{\varphi} \end{cases}$ $\qquad dv = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

روابط کروی با دکارتی

مثال: میدان حاصل از یک استوانه با بار سطحی مثبت به ارتفاع l با چگالی σ را که مبدا مختصات در آن داده شده محاسبه کنید.



$$\vec{dE} = k\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

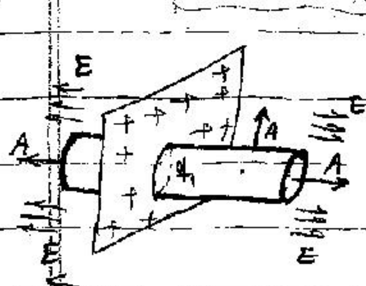
$$dq = \sigma\,da = \sigma R\,d\varphi\,dz \quad , \quad \vec{r} = 0 \quad , \quad \vec{r}' = (z\hat{k} + R\cos\varphi\,\hat{i} + R\sin\varphi\,\hat{j})$$

$$\Longrightarrow \vec{dE} = -k\frac{\sigma R\,d\varphi\,dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}(z\hat{k} + R\cos\varphi\,\hat{i} + R\sin\varphi\,\hat{j}) =$$

$$\Longrightarrow \vec{E} = -k\sigma R\left[\int_0^l \frac{z\hat{k}}{(R^2+z^2)^{3/2}}dz\int_0^{2\pi}d\varphi + R\int_0^{2\pi}(\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j})\,d\varphi\int_0^l\frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{E} = 2k\pi\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+l^2}} - 1\right)k}$$

* محاسبه میدان حاصل از یک صفحه نامتناهی با استفاده از قانون گوس :



$$\varphi = \oint \vec{E}\cdot\vec{da} = \int \vec{E}\cdot\vec{da} + \int_{\text{الف}} \vec{E}\cdot\vec{da} + \int_{\text{ب}} \vec{E}\cdot\vec{da} = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

سطح جانبی $= 0$
چون E و A عمودند

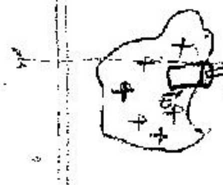
$$\Longrightarrow E\cdot A + (-E)(-A) = 2EA = \frac{q_1}{\epsilon_0} \quad , \quad q_1 = \sigma A$$

$$\Longrightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}} \quad , \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{N}$$

جهت $\vec{E}$ با توجه به شکل در جهت بردار نرمال صفحه است

میدان حاصل از یک صفحه رسانا ۲ برابر صفحه نارسانا است

* میدان حاصل از یک جسم با چگالی σ است :



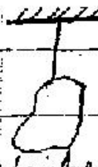
$E' = 0$ داخل
چون در داخل میدان نداریم
$\quad , \quad EA = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma A \Longrightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$

کاربرد قانون گاوس

$\oint \vec{E}\cdot\vec{da} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$ شکل انتگرالی

دیورژانس میدان $= \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ شکل دیفرانسیلی

در یک جسم رسانای باردار توزیع بار روی سطح خارجی آن صورت می‌گیرد.



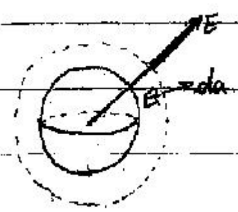
در داخل جسم: $\begin{cases} q=0 \longrightarrow E=0 & \text{میدان نداریم} \\ q\neq 0 \longrightarrow E\neq 0 & \text{چنین چیزی امکان ندارد} \end{cases}$

زیرا میدان باعث ایجاد جریان می‌شود و چون جسم می‌خواهد تعادل الکترواستاتیکی داشته باشد لذا جریان بار به سمت بیرون می‌رود و بار در سطح جسم جمع می‌شود و سطح خارجی هم پتانسیل می‌گردد و در نتیجه در داخل رسانا نه بار داریم و نه میدان

* مثال: کره‌ی باردار به شعاع R و بار Q و چگالی ثابت داریم میدان را به فاصله‌ی r از مبدأ به دست آورید.

۱- به علت تقارن، نیرو و در نتیجه میدان شعاعی است

۲- میدان در کره‌ای به شعاع R یکسان است زیرا میدان به فاصله بستگی دارد.

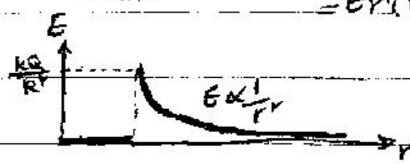


* کره رسانا: در کره: $\vec{E} = E\hat{r}$, $\boxed{\vec{da} = da\,\hat{r} = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}$

$\oint \vec{E}\cdot\vec{da} = \int E r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = E r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$

$= E r^2 (2)(2\pi) = 4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \Longrightarrow \vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \ : r \geq R$

به علت نبود بار $\vec{E} = 0 \ : r < R$



نمودار

* کره نارسانا

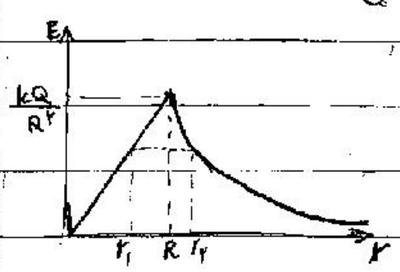
میدان کره‌ی توپر با چگالی ρ و بار Q به فاصله‌ی r از مبدأ:

$r \geq R: E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$

$r < R: \oint E\, da = E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dv$ در کره: $\boxed{dv = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr}$

$\int dv = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\Longrightarrow E(4\pi r^2) = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \Longrightarrow \vec{E} = \frac{kQr}{R^3}\hat{r} = \frac{kQ}{R^3}\vec{r}$



$\frac{kQ}{r_2^2} = \frac{kQ r_1}{R^3} \Longrightarrow r_1 r_2^2 = R^3$

* در توزیع حجمی بار اگر $\rho=\alpha(r)$ تابعی از شعاع باشد با استفاده از قانون گوس می‌توان به جواب رسید.

مثال: $\text{if } r'<a$ (داخل کره) $\longrightarrow \rho=\alpha r'$

$\text{if } r'>a \longrightarrow \rho=0$

* مطلوبست محاسبهٔ میدان در یک نقطهٔ داخل و خارج کره

برای داخل

$$E(4\pi r^2)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dv \Rightarrow 4\pi r^2 E=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\iiint r' r'^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr' \Rightarrow$$

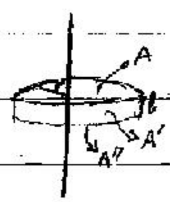
$$\Rightarrow 4\pi r^2 E=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\int_0^r r'^3 dr' \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi=\frac{4\pi\alpha}{\varepsilon_0}\frac{r^4}{4}$$

$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{\alpha}{4\varepsilon_0} r^2 \hat{r}$$

برای خارج: $4\pi r^2 E=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\int_0^R r'^3 dr' \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi=\frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$

میدان سیم بلند با λ ثابت به فاصلهٔ r از سیم:

یک استوانه به محور سیم و طول l در نظر می‌گیریم:



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a}=\frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma Q \Rightarrow \int_A \vec{E}\cdot d\vec{a}+\underbrace{\int_{A'} \vec{E}\cdot d\vec{a}+\int_{A''} \vec{E}\cdot d\vec{a}}_{0}=\oint E\cdot da$$

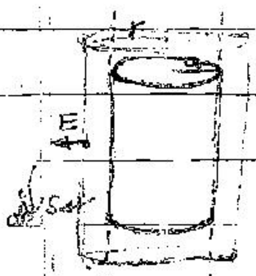
$$\xrightarrow{\theta=0} \int \vec{E}\cdot d\vec{a}=Er\int_0^l dz\int_0^{2\pi} d\varphi=2\pi r l E=\frac{1}{\varepsilon_0}(\lambda l) \Rightarrow \boxed{E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\hat{r}=\frac{2k\lambda}{r}\hat{r}}$$

$da=r\,d\varphi\, dz\,\hat{r}$

به جای سیم می‌توان استوانه قرار داد.

تمرین: محاسبهٔ میدان حاصل از یک استوانهٔ طویل به شعاع a را در نقطهٔ خارج و داخل استوانه در دو حالت زیر:

۱) بار سطحی با چگالی ثابت σ ۲) بار حجمی با چگالی ثابت ρ



در حالت اول: $E_{in}=0$ زیرا $\oint E\cdot da=\frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma q=0 \Rightarrow E_{in}=0$

اگر سطح گوس استوانه‌ای داخل استوانهٔ اولیه باشد

در بالا حساب شد

$$E_{out}:\ \oint \vec{E}\cdot d\vec{a}=\int_S \vec{E}\cdot d\vec{a}=2\pi r l E=\frac{1}{\varepsilon_0}2\pi a l\sigma \Rightarrow \vec{E}=\frac{a\sigma}{r\varepsilon_0}\hat{r}$$

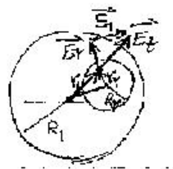
در حالت دوم:

$$\oint \vec{E}_{in}\cdot d\vec{a}=\int_S E_{in} S=2\pi r l E=\frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma q=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\pi r^2 l \Rightarrow \vec{E}_{in}=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r}$$

$$\oint \vec{E}_{out}\cdot d\vec{a}=\int_{S'} E_{out} S'=2\pi r l E=\frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma q=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\pi a^2 l \Rightarrow \vec{E}_{out}=\frac{\rho a^2}{2r\varepsilon_0}\hat{r}$$

مثال: در داخل یک کره به شعاع R_1، یک حفره کروی به شعاع R_2 قرار دارد. که دارای بار حجمی با چگالی ثابت ρ است. میدان الکتریکی را در یک نقطه دلخواه داخل حفره کروی حساب کنید. (به کمک قانون گوس)

از قبل می‌دانیم که برای کره باردار در $r \leq R$ میدان داخل به صورت مقابل است: $\boxed{E = \frac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0}}$

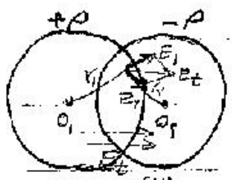


$$\underbrace{\vec{E}_1}_{\text{کره حفره‌دار}} + \underbrace{\vec{E}_2}_{\text{کره کوچک که حفره از آن حاصل شده}} = \vec{E}_t = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\varepsilon_0}$$

میدان به جای حفره خالی باشد و میدان [illegible] نقطه الکتریکی است.

$$\Longrightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_t - \vec{E}_2 = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho \vec{r}_2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{OO'}$$

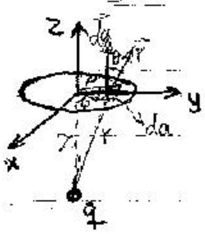
مسأله بعدی: دو کره باردار هر یک به شعاع R با چگالی‌های بار حجمی $+\rho$ و $-\rho$ مطابق شکل در قسمتی متداخلند (overlap). میدان در یکی از نقاط مشترک بین دو کره را بدست آورید.



(۱) میدان (۲)
یکنواخت

$$\vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{O_1O_2}$$ ثابت و [illegible]

مسأله: بار نقطه‌ای q روی محور قرصی به شعاع R واقع است. شار گذرنده از قرص را پیدا کنید.



$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{a} = \iint \frac{kq}{r^2}\hat{r}\cdot \rho\, d\varphi\, d\rho\, \hat{k} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{kq\rho}{(z^2+\rho^2)}\frac{z}{r}\, d\varphi\, d\rho$$

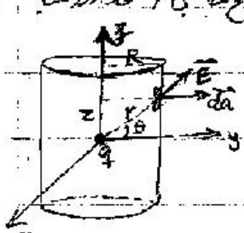
چون $d\vec{a} = \rho\, d\varphi\, d\rho\, \hat{k}$ ، $\hat{r}\cdot\hat{k} = \cos\theta$

$$\Longrightarrow \Phi = kqz\int_0^{R}\frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi = 2k\pi qz\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right] =$$

$$\Longrightarrow \Phi = 2k\pi q\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}}\right]$$

Φ مثبت است یعنی شار به خارج [illegible] اگر بار q [illegible] هم مثبت است.

مسأله: بار نقطه‌ای q را در مرکز استوانه‌ای به شعاع R و طول l در نظر بگیرید. شار گذرنده از سطح جانبی استوانه را حساب کنید. (جواب خود را با استفاده از قانون گوس امتحان کنید). $d\vec{a} = R\, d\varphi\, dz\, \hat{\rho}$



$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{a} = \iint \frac{kq}{r^2}\hat{r}\cdot R\, d\varphi\, dz\, \hat{\rho} = kqR\int_{-l/2}^{l/2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi\, dz}{(R^2+z^2)^{3/2}} =$$

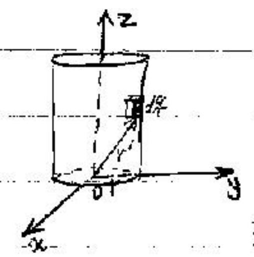
$$= 2k\pi q R^2\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}} = 2k\pi q R^2\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\cos\theta}{R^2}\, d\theta = 2k\pi q\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\cos\theta\, d\theta$$

$$z = R\tan\theta$$

$$= 2k\pi q\int_{-\arctan\frac{l}{2R}}^{\arctan\frac{l}{2R}}\cos\theta\, d\theta = 2k\pi q\left(\frac{\frac{l}{2R}}{\sqrt{1+\frac{l^2}{4R^2}}} + \frac{\frac{l}{2R}}{\sqrt{1+\frac{l^2}{4R^2}}}\right) = \frac{4k\pi q l}{\sqrt{4R^2+l^2}} = \frac{ql}{\varepsilon_0\sqrt{4R^2+l^2}}$$

اگر $l \to \infty$ آنگاه $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$

مسأله: استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع h دارای بار حجمی با چگالی $\rho=\alpha(r'^2+z'^2)^{3/4}$ مفروض است. میدان الکتریکی را در مبدا مختصات محاسبه کنید.

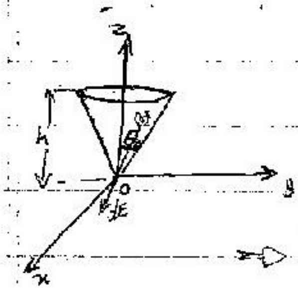


$$\vec r=0 \qquad \vec r'=z\hat k+r'\cos\varphi\,\hat i+r'\sin\varphi\,\hat j$$

$$dq=\rho\,dv\ ,\ dv=r\,d\varphi\,dz\,dr \Rightarrow dq=\alpha(r'^2+z'^2)^{3/4}\,r'\,dr'\,d\varphi'\,dz$$

$$\vec E=\int d\vec E=\int \frac{k\,dq}{|\vec r-\vec r'|^3}(\vec r-\vec r')=k\ldots$$

مسأله: میدان حاصل از یک توزیع بار به صورت مخروط به ارتفاع h و نیم زاویه رأس θ_0 را در مبدا O حساب کنید.



$$d\vec E=\frac{k\,dq}{|\vec r-\vec r'|^3}(\vec r-\vec r')$$ در این سؤال مختصات کروی را در نظر می‌گیریم

$$dq=\rho_0\,dv=\rho_0\,r'^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'\,dr'$$

$$\vec r'=r'\cos\theta'\,\hat k+\underbrace{r'\sin\theta'\sin\varphi'\,\hat j+r'\sin\theta'\cos\varphi'\,\hat i}\quad,\quad \vec r=\vec 0$$

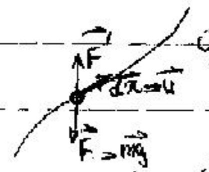
انتگرال‌های i و j صفر می‌شوند

$$\Rightarrow \vec E=-k\rho_0\int_{\theta'=0}^{\theta_0}\sin\theta'\cos\theta'\,d\theta'\int_{r'=0}^{\frac{h}{\cos\theta'}}dr'\int_{\varphi'=0}^{2\pi}d\varphi'$$

$$\Rightarrow \vec E=-k\rho_0(2\pi h)\int_0^{\theta_0}\sin\theta'\,d\theta'=\boxed{2k\pi\rho_0 h(\cos\theta_0-1)(\hat k)}$$

پتانسیل

انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای پایستار (conservative) است مانند نیروی جاذبه زمین



میدان گرانشی $\vec F'=-\vec F=-m\vec g$

$$W_{A\to B}=\int \vec F'\cdot d\vec x=-m\int_A^B \vec g\cdot d\vec x=\,??\,=U_B-U_A=\Delta U$$

میدان الکتریکی: $\vec F'=-\vec F=-q\vec E$

$$W_{A\to B}=\int_A^B \vec F'\cdot d\vec x=-q\int_A^B \vec E\cdot d\vec x=\,??\,=U_B-U_A=\Delta U$$

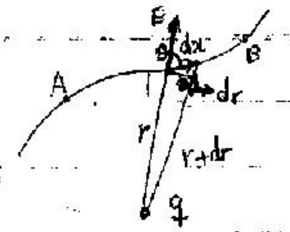
اگر دو طرف را در $\frac{1}{q}$ ضرب کنیم $\Rightarrow \frac{W_{A\to B}}{q}=-\int_A^B \vec E\cdot d\vec x=\frac{U_B}{q}-\frac{U_A}{q}=\frac{\Delta U}{q}$

$$\varphi_B-\varphi_A=V$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_B-\varphi_A=V=-\int_A^B \vec E\cdot d\vec x}$$ اختلاف پتانسیل بین دو نقطه B و A

محاسبه پتانسیل:
- ۱/ ناشی از وجود میدان الکتریکی q
- ۲/ ناشی از وجود چندین بار نقطه‌ای q
- ۳/ ناشی از وجود یک توزیع پیوسته بار

حالت اول:



$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r} \quad , \quad \varphi_B - \varphi_A = V = -\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dx}$$

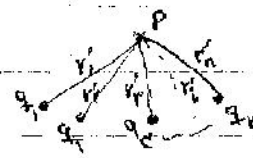
$$\Rightarrow V = -kq\int_A^B \frac{1}{r^2}\,dx\cos\theta = -kq\int\frac{dr}{r^2} = \left(\frac{kq}{r_B} - \frac{kq}{r_A}\right)$$

قرارداد:

معمولاً پتانسیل نقاط دور (در ∞) را صفر فرض می‌کنیم. پس:

برای بار نقطه‌ای:
$$\begin{cases} V = \dfrac{kQ}{r} & \text{در هر نقطه} \\ V(\vec{r}) = \dfrac{kQ(r')}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \end{cases}$$

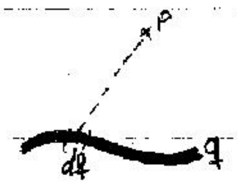
حالت دوم:



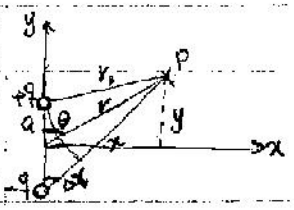
پتانسیل هر نقطه را به شکل زیر داریم: $V = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot\vec{dx}$ پس برای کل بارها:

$$\vec{V}(\vec{r}) = k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(r_i')}{|\vec{r}-\vec{r_i'}|}$$

حالت سوم:



$$V(\vec{r}) = k\int\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = k\int\frac{dq}{r}$$



مثال: مطلوب است محاسبه پتانسیل حاصل از یک دوقطبی موجود در یک نقطهٔ $\vec{r}$ از مرکز آن:

$$V(\vec{r}) = k\left[\frac{q}{r_1} + \frac{-q}{r_2}\right] = kq\left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right] = \frac{kq\Delta r}{r_1 r_2}$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} \qquad r_2 = \sqrt{x^2 + (y+a)^2}$$

حالت خاصی که وجود دارد $r \gg 2a$ است که در نتیجه:

$$r_1 r_2 = r^2 \Rightarrow \Delta r = 2a\cos\theta \Rightarrow V(r,\theta) = \frac{kq(2a\cos\theta)}{r^2} = \frac{kP\cos\theta}{r^2}$$

نکته:

	بار نقطه‌ای	دوقطبی	چهارقطبی
میدان	$\propto \frac{1}{r^2}$	$\propto \frac{1}{r^3}$	$\propto \frac{1}{r^4}$
پتانسیل	$\propto \frac{1}{r}$	$\propto \frac{1}{r^2}$	$\propto \frac{1}{r^3}$

$$\begin{cases} \vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k} \\ \vec{dl} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \end{cases}$$

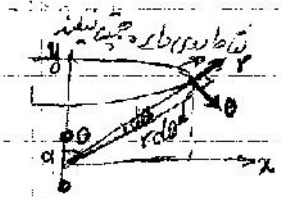
$$\varphi_B-\varphi_A=V=-\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl}=-\left[\int_A^B E_x dx+\int_A^B E_y dy+\int_A^B E_z dz\right]$$

$$E=-\frac{dv}{dl} \rightsquigarrow E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}\ ,\ E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}\ ,\ E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \vec{E}=E_x\hat{i}+E_y\hat{j}+E_z\hat{k}=-\left[\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right]=-\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)V$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}=-\vec{\nabla}V}$$

نقاط هم‌پتانسیل



نقطهٔ P مفروض است. نقاطی از فضا که به فاصلهٔ r و زاویهٔ θ قرار دارند جای دوقطبی

مجموعه نقاط هم‌پتانسیل خواهند بود.

$$V_{(r,\theta)}=\frac{kP\cos\theta}{r^2} \Rightarrow V_{(x,y)}=\frac{kPy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E}_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{3kPxy(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^3}=\frac{3kPxy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\hat{i}$$

$$\vec{E}_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{-kP\left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}-3y^2(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right)}{(x^2+y^2)^3}=\frac{kP(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\hat{j}$$

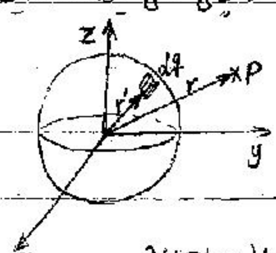
$$E_r=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{2kP\cos\theta}{r^3}\hat{r}\ ,\quad E_\theta=-\frac{\partial V}{r\,d\theta}=\frac{kP\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}$$

r متغیر و θ ثابت — r ثابت و θ متغیر

$$\vec{E}=\frac{kP}{r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{r}+\sin\theta\,\hat{\theta}\right]$$

$$\left\{ V(\vec{r})=k\int_\infty^r \frac{dQ}{|\vec{r}-\vec{r}'|=r} \quad \text{یا} \quad V(\vec{r})=-\int_\infty^r \vec{E}\cdot\vec{dx} \right\}$$ دو فرمول اصلی پتانسیل

یک کره با بار مفروض است: مطلوبست محاسبهٔ پتانسیل حاصل از آن که به شعاع R و بار q به طور سطحی یکنواخت در یک نقطهٔ $\vec{r}$:



جهت راحت‌تر شدن مسأله نقطه را روی محور z انتخاب می‌کنیم.

$$dq=\sigma_0 R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$V(z)=V_{(0,0,z)}=k\int\frac{\sigma_0 R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi}{r} \qquad r=(R^2+z^2-2zR\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow V(0,0,z)=k\sigma_0 R^2\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{(R^2+z^2-2Rz\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$\Rightarrow V(0,0,z)=\frac{2\pi k\sigma_0 R^2}{zR}\left[(R^2+z^2-2Rz\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z \geq R: & V(0,0,z) = \frac{2k\pi\delta_0 R^2}{zR}\left[(z+R)-(z-R)\right] = \frac{kq}{z} \\ z \leq R: & V(0,0,z) = \frac{2k\pi\delta_0 R^2}{zR}\left[(z+R)-(R-z)\right] = \frac{kq}{R} \end{cases}$$

پس میدان داخل کره ثابت است. و برابر $\frac{kq}{R}$ (میدان روی سطح) است.

راه دوم: استفاده مستقیم از تعریف: $V(\vec r) = -\int_{\infty}^{r} \vec E \cdot d\vec x$

انتگرال فوق به شکل مسیر بستگی ندارد. پس بهترین مسیر ممکن از ∞ تا r در راستای r به صورت خطی است

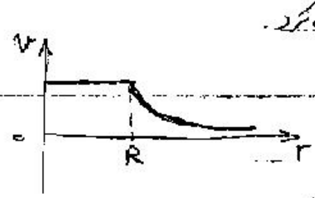
در نتیجه $d\vec x = d\vec r$

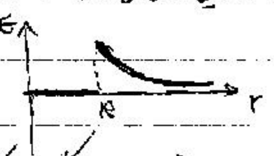
$$\vec E = \begin{cases} \frac{kQ}{r^2}\hat r & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec E = \frac{kQ}{r^2}\hat r \\ d\vec x = dr\,\hat r + r\,d\theta\,\hat\theta + r\sin\theta\, d\phi\,\hat\phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = \int_{\infty}^{r} \vec E \cdot d\vec x = -\int_{\infty}^{r>R} \frac{kQ}{r^2}(\hat r \cdot \hat r)\,dr = \frac{kQ}{r}$$

$$\Rightarrow V(r<R) = -\left[\int_{\infty}^{R} \vec E \cdot d\vec x + \cancel{\int_{R}^{r} \vec E \cdot d\vec x}\right] = \frac{kQ}{R}$$

مسائلی که به کمک سطح گوس حل می‌شوند از طریق فوق می‌توان V ها را به آسانی حساب کرد.





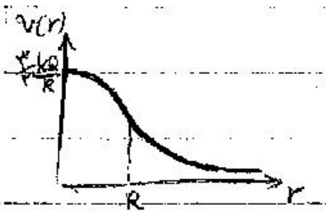
* اگر پتانسیل صفر باشد نمی‌توان طبق رابطه $E = -\vec\nabla V$ گفت: که حتماً $E = 0$ است

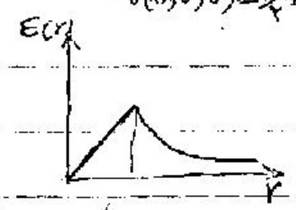
مثلاً اگر در مسأله قبل کره عایق با چگالی ρ ثابت در نظر بگیریم داریم:

$$E = \begin{cases} \frac{kQ}{r^2}\hat r & r \geq R \;\rightarrow\; V = \int_{\infty}^{r} \frac{kQ}{r^2}\hat r \cdot d\vec r = \frac{kQ}{r} \\ \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat r & r < R \;\rightarrow\; V = \int_{\infty}^{R} \frac{kQ}{r^2}\hat r \cdot d\vec r + \int_{R}^{r} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat r \cdot d\vec r = \frac{kQ}{R} + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = \frac{kQ}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$V(0,0,0) = \frac{3}{2}\frac{kQ}{R}$ بیشترین پتانسیل در مرکز است





مثال: کره‌ای با بار حجمی $\rho = \alpha r^2$ موجود است. میدان را با قانون گوس به دست آورید. و پتانسیل را از $V = -\int \vec E \cdot d\vec x$ به دست می‌آوریم.

$$\oint \vec E_{out} \cdot d\vec a = \frac{\int \rho\, dv}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{\alpha}{\varepsilon_0}\iiint r'^4 \sin\theta'\, d\theta'\, dr'\, d\phi' = \frac{4\pi\alpha R^5}{5\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec E_{out} = \frac{\alpha R^5}{5\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat r \Rightarrow V_{out} = -\int \vec E_{out} \cdot d\vec r = \frac{\alpha R^5}{5\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

پتانسیل یک صفحه‌ی بزرگ باردار را در یک نقطه به فاصله‌ی z محاسبه کنید.

با قانون گوس: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} \Rightarrow V(r) = -\int E\cdot dr = -\int_{\infty}^{z_0}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}\cdot d\vec{z} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(z_0-\infty) \Rightarrow$

$$V(r) = -\left(\frac{\sigma|z_0|}{2\varepsilon_0}\right) + c$$

به طور کلی در جاهایی که میدان ضعیف است سطوح هم پتانسیل طبق رابطه‌ی $E = -\frac{\Delta V}{\Delta r}$ از هم دور هستند و بالعکس.

نکته: دو کره فلزی به شعاع R_1 و بار q_1 و دیگری به شعاع R_2 و بار q_2 که خیلی دور از هم هستند در اختیار داریم، این دو کره را با یک سیم به هم متصل می‌کنیم خواهیم داشت:

چنانچه $\frac{kQ_1}{R_1} = \frac{kQ_2}{R_2}$ باشد اتفاقی نمی‌افتد ولی چنانچه مثلاً $\frac{kQ_1}{R_1} > \frac{kQ_2}{R_2}$ باشد بار از جایی که پتانسیل بیشتر است به جایی که پتانسیل کمتر است جابجا می‌شود و داریم:

$$\begin{cases} Q_1' = Q - q \\ Q_2' = Q + q \end{cases} \Rightarrow \frac{k(Q-q)}{R_1} = \frac{k(Q_2+q)}{R_2} \quad : \quad \frac{Q_2'}{Q_1'} = \frac{R_2}{R_1}$$

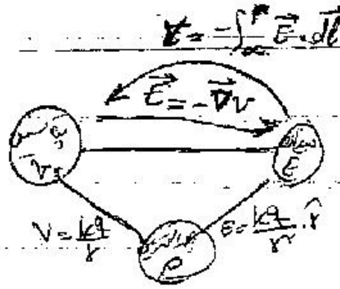
یعنی کره‌ای که شعاع بزرگتری دارد، بار بیشتری پیدا می‌کند.

نسبت چگالی بارها چون $Q = \sigma(4\pi R^2)$ است به نسبت عکس شعاع‌هاست: $\frac{\sigma_2'}{\sigma_1'} = \frac{R_1}{R_2}$

* طبق روابط بالا می‌توان توجیه کرد که چرا بار در نقاط نوک تیز یک سطح رسانا بیشتر جمع می‌گردد. چون سطح یک رسانا باید یک سطح هم پتانسیل شود لذا بار به گونه‌ای توزیع می‌گردد که در نقاط نوک تیز، بار بیشتری باشد.

نکته: چون $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$ پس: $\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$, $\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}$ و ...

مثلاً میدان نمی‌تواند به صورت $\vec{E} = 2y\hat{i} - 4x\hat{j}$ باشد.



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dv$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

محاسبه انرژی پتانسیل

$$W_{A\to B} = -q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{x} = U_B - U_A = q(\varphi_B - \varphi_A) = qV$$

یک مجموعه بار q_i را حساب کنید

برای آوردن بار اول از بی‌نهایت کاری انجام نمی‌شود زیرا میدانی وجود ندارد ولی برای آوردن بار دوم تا فاصله r از اولی باید کار انجام دهیم زیرا میدان وجود دارد و بقیه به همین صورت:

$$U = W = 0 + q_2\left(\frac{kq}{r_{12}} - 0\right) + q_3\left(\frac{kq_1}{r_{13}} + \frac{kq_2}{r_{23}} - 0\right) + q_4\left(\frac{kq_1}{r_{14}} + \frac{kq_2}{r_{24}} + \frac{kq_3}{r_{34}} - 0\right) + \cdots$$

کار نیروی خارجی

$$\boxed{\Rightarrow U = W = k\sum_i q_i \sum_{j<i} \frac{q_j}{r_{ij}}}$$

انرژی برای آوردن کل مجموعه

از نظر کاربردی رابطه بالا را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$U = \frac{1}{2}\sum q_i V_i$$

V_i پتانسیل در محل بار i ام ناشی از همه بارها (البته به جز خود بار i)

$\frac{1}{2}$ برای این است که انرژی هر زوج بار دو بار حساب می‌شود

* برای یک توزیع پیوسته بار خواهیم داشت:

$$U = \frac{1}{2}\int V_{(\vec{r})}\, dq_{(\vec{r})}$$

مثال: انرژی پتانسیل یک کره با شعاع R و بار q با چگالی حجمی ثابت را حساب کنید.

$$U = \frac{1}{2}\int V_{(\vec{r})}\, dq_{(\vec{r})} \qquad dQ = \rho\, dv = \rho r'^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi' dr'$$

می‌دانیم که
$$V_{(r)} = \begin{cases} \frac{kQ}{r} & r \geq R \\ \frac{kQ}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) & r \leq R \end{cases}$$

$$\Rightarrow U = \frac{kQ\rho}{4R}\int_{r'=0}^{R}\left(3 - \frac{r'^2}{R^2}\right) r'^2 dr' \int_{\theta'=0}^{\pi} \sin\theta' d\theta' \int_{\varphi'=0}^{2\pi} d\varphi'$$

$$\Rightarrow U = \frac{k\pi Q\rho}{R}\left(R^3 - \frac{R^3}{5}\right) \Rightarrow \frac{4k\pi Q R^2}{5} \times \frac{3Q}{4\pi R^3} \Rightarrow \boxed{U = \frac{3}{5}\frac{kQ^2}{R}}$$

مثال کاربردی:

در هسته‌ی اتم اورانیم، ۹۲ عدد پروتون موجود است. انرژی پتانسیل الکتریکی هسته‌ی اتم اورانیم را حساب کنید.

$U=\frac{3}{5}\frac{k(ze)^2}{r}=\frac{3\times 9\times10^{9}\times 92^2\times 1/6^2\times10^{-38}}{5\times10^{-14}}\simeq 8\times10^{7}\,eV$

می‌توان از روش قبل هم بدست آورد یعنی یک بار کوچک گذاشت و پیوسته پیوسته بر آن بار اضافه کرد تا انرژی را حساب کرد:

$U=\int V_{(\vec r)}\,dq_{(\vec r)} \qquad dq=\rho\,dv=\rho(4\pi r^2 dr)$

مثال: یک پوسته‌ی کروی به شعاع داخلی و خارجی a و b توزیع بار با رابطه‌ی $\rho=\alpha r$ داده شده است. میدان الکتریکی را در سه ناحیه حساب کنید و سپس پتانسیل الکتریکی داخل $r<a$ را حساب کنید.

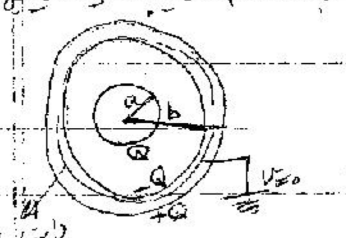
$1)\ \oint\vec E\cdot d\vec a=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho\,dv=0 \Rightarrow \vec E_1=0 \qquad 2)\ \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} E_2 r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_a^{r}\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\alpha r'^3\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'\,dr'$

$\Rightarrow 4\pi r^2 E_2=\frac{1}{\varepsilon_0}\pi\alpha(r^4-a^4) \Rightarrow \vec E_2=\frac{\alpha}{4\varepsilon_0}\left(r^2-\frac{a^4}{r^2}\right)\hat r$

$3)\ 4\pi r^2 E_3=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_a^{b}\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\alpha r'^3\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'\,dr'=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\pi(b^4-a^4) \Rightarrow E_3=\frac{\alpha}{4\varepsilon_0 r^2}(b^4-a^4)\hat r$

$V_3=-\int_\infty^{r}\vec E_3\cdot d\vec r=\frac{\alpha}{4\varepsilon_0 r}(b^4-a^4) \qquad V_2=-\int_\infty^{b}\vec E_3\cdot d\vec r-\int_b^{r}\vec E_2\cdot d\vec r=-\frac{\alpha r^3}{12\varepsilon_0}+\frac{\alpha a^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r}+\frac{\alpha b^3}{\varepsilon_0}\ \frac{\alpha a^4}{4\varepsilon_0 b}+\frac{\alpha}{\varepsilon_0 b}(b^4-a^4)$

مثال: کره‌ی فلزی به شعاع a با پتانسیل الکتریکی V_0 در داخل پوسته‌ی کروی فلزی به شعاع داخلی b که به زمین وصل است. اگر تابع پتانسیل الکتریکی میان دو کره به صورت $V(r)=A+\frac{B}{r}$ باشد الف) ضرایب A و B را تعیین کنید. ب) با تثبیت میدان الکتریکی میان کره‌ها ج) بار الکتریکی کره‌ی داخلی



$E_{داخل}=0$ با سطح گاوسی $\quad E(\vec r)=\frac{kQ}{r^2} \quad a\leq r\leq b$

در داخل فلزی خارجی باید $E=0$ و می‌توان این طور توجیه کرد که باید به اندازه‌ی Q بار مثبت و منفی در داخل و خارج پوسته قرار گیرند.

$Q-Q=0$ داریم

در اینجا فرض شد که پوسته بی‌بار است. اگر حتی باردار باشد باز $E=0$ ولی این بار $Q+q$ روی سطح خارجی می‌رود لذا داخل بعدم $E=\frac{k(Q+q)}{r^2}$ است.

طبق پتانسیل: $V_b-V_a=-\int_a^{b}E(r)\,dr \qquad V_a=V_0 \Rightarrow V_b=0$

$\Rightarrow V_0=kQ\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) \Rightarrow Q=\frac{-V_0}{k\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}$ بار کره‌ی داخلی

$E(r)=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{B}{r^2} \qquad E_{میان کره‌ها}=\frac{kQ}{r^2}$ از طریق قانون گاوس

$\Rightarrow \frac{k\frac{V_0}{k\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}}{r^2}=\frac{B}{r^2} \Rightarrow B=\frac{V_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$

$V_b=0 \Rightarrow A+\frac{B}{b}=0 \Rightarrow A=-\frac{B}{b}=\frac{V_0 a}{a-b}$

خازن

ظرفیت (Capacity)

سطح هر هادی باردار روی سطح آن متناسب با پتانسیل آن است که نسبت این دو را ظرفیت هادی می‌نامند.

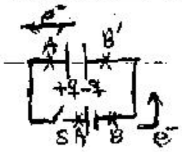
مثلاً برای کره:
$$V=\frac{kQ}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \rightsquigarrow \frac{Q}{V}=\text{constant}=C$$

ظرفیت خازن به Q و V بستگی ندارد و تنها به شکل هندسی سطح بستگی دارد.

شکل خازن تخت (مسطح):  : $-||-$

دو کره‌ی هم مرکز (متقارن) نیز می‌توانند تشکیل خازن دهند که به آن خازن کروی می‌گوییم همچنین دو استوانه‌ی هم محور: خازن استوانه‌ای

در خازن‌ها معمولاً ابعاد صفحات نسبت به فاصله‌شان بسیار بزرگ است.



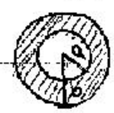
تعداد الکترون از صفحه‌ی متصل به پتانسیل مثبت خارج می‌شود تا دو صفحه هم‌پتانسیل شوند و بار q پیدا کنند (شارژ شوند)
$$\begin{cases} V_A > V_{A'} \\ V_B < V_{B'} \end{cases}$$

$$\varphi_A-\varphi_B=V_0=\varphi_{A'}-\varphi_{B'}$$

محاسبه‌ی ظرفیت خازن

1) خازن تخت:
$$C=\frac{Q}{V}=\frac{Q}{\varphi_A-\varphi_B} \quad \oint \vec{E}\cdot\vec{da}=\frac{1}{\varepsilon_0}q \rightarrow EA=\frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{r}$$
$$\varphi_A-\varphi_B=-\int_{x_A}^{x_B}\vec{E}\cdot\vec{dx}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x_B-x_A)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$$
$$\Rightarrow C=\frac{\varepsilon_0 Q}{\sigma d}=\varepsilon_0\frac{A}{D} \qquad \boxed{C_{\text{خازن}}=\varepsilon_0\frac{A}{D}}$$

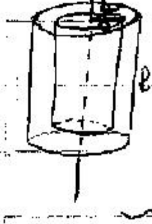
2) خازن کروی:



$$\varphi_a-\varphi_b=-\int_b^a\vec{E}\cdot\vec{dx}=-\int_b^a\frac{kQ}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{dr}=kQ\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{C=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}}$$

میدان فقط در داخل بین کره‌ها وجود دارد.

3) خازن استوانه‌ای:



$$\oint\vec{E}\cdot\vec{da}=\frac{1}{\varepsilon_0}Q \Rightarrow E(2\pi rl)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho\,dv=\frac{1}{\varepsilon_0}Q$$
$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{l}\cdot\frac{1}{r}\hat{r} \Rightarrow V_a-V_b=-\int_b^a\vec{E(r)}\cdot\vec{dr}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}$$
$$\rightsquigarrow \boxed{C=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{b}{a}}}$$

نکته: واحد ε_0 معادل $\frac{F}{m}$ است.

نکته: اگر دو کره با سیم به هم متصل شوند تمام بار کره‌ی داخلی روی کره‌ی خارجی جمع می‌شود (اساس کار واندوگراف)

محاسبه‌ی انرژی پتانسیل و چگالی انرژی

بار بعد از شارژ کامل: Q

$$U_c=W=\int V\,dq=\frac{1}{C}\int q\,dq=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$
$$\rightsquigarrow \boxed{U_c=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}QV_0=\frac{1}{2}CV_0^2}$$

محل ذخیره شدن انرژی درون دی الکتریک است. همچنین چگالی این انرژی ثابت است چون میدان داخل دی الکتریک یکنواخت است. (در حقیقت)

چگالی انرژی $u' = \frac{\text{انرژی کل}}{\text{حجم}} = \frac{CV_0^2}{2Ad} = \frac{\varepsilon_0 A E^2 d^2}{2d\,Ad} \rightarrow \boxed{u' = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$

حال خازن کروی: میدان از لحاظ ریاضی با توجه به رابطهٔ $E = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$ یکنواخت نیست. اما انرژی را می‌توان از طریق چگالی انرژی (که در هر محیطی $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ است) محاسبه کرد:

$$U = \int u'\,d\tau = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,d\tau \longrightarrow \begin{cases} d\tau = r^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr \\ 4\pi r^2 dr \end{cases}, \quad E = \frac{kQ}{r^2}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_a^b\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{k^2Q^2}{r^4}\left(r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr\right) = \frac{4\pi\varepsilon_0}{2}k^2Q^2\int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow U = \frac{kQ^2}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

روش دیگر: $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2\,\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}} = \frac{kQ^2}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

* در همهٔ میدانها انرژی با مجذور آن میدان نسبت مستقیم دارد.

* توجه: انرژی پتانسیل در نقطهٔ $\vec{x}$ ناشی از تمامی توزیع بارها: $W_c = \frac{1}{2}\int V(\vec{x})\,dq(\vec{x})$

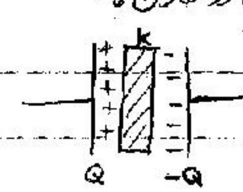
برای میدانهای خارجی: $W_c = \int V(\vec{x})\,dq$

$$\Rightarrow W_c = \frac{1}{2}\int_{\text{کل فضا}} dq(\vec{x})\,V(\vec{x}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2(\vec{x})\,d^3x > 0$$

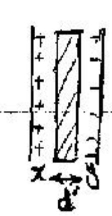
چون انتگرال فوق همواره مثبت است. یعنی برای بوجود آوردن هر توزیع بار دلخواهی باید کار مکانیکی مثبتی انجام داد.

نقش دی الکتریک در خازن‌ها

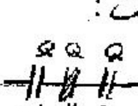
ثابت دی الکتریک $k = \frac{C}{C_0} = \frac{E_0}{E} = \frac{V_0}{V}$

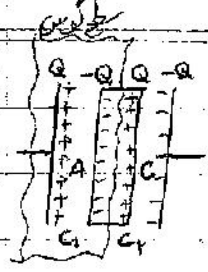


اگر دی الکتریک بین دو خازن به همراه خلاء قرار گیرد خواهیم داشت:



≡ سه خازن سری:

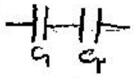




اگر به جای عایق رسانا قرار داده شود:

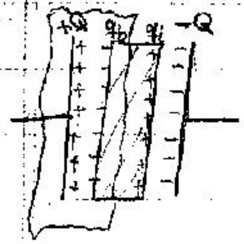
$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot\vec{da} = Q \Rightarrow E_A = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_C$$

در رسانای داخل خازن بار طوری القا می شود که میدان داخل آن صفر شود

$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ $\xrightarrow{\text{دو خازن سری}}$  $c_1 = \varepsilon_0 \frac{A}{x}$ و $c_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{y}$

$$\boxed{C = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = \ldots = \frac{\varepsilon_0 A}{d - d'}}$$

دوباره اگر عایق را بررسی کنیم:



بار القایی $q_i = q_b < Q$

میدان در نقطه ای داخل عایق، اگر سطح گوس را مطابق شکل فرض کنیم چون بار روی جوشن از سطح دی الکتریک بیشتر است پس میدان داخل دی الکتریک صفر نیست.

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot\vec{da} = \frac{\overset{\text{جمع بار زیر سطح گوس}}{\sum q}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot\vec{da} = Q - q_i$$

$\Rightarrow E < E_0$ میدان داخل خازن بدون دی الکتریک

پلاریزاسیون یا قطبش (Polarization) داخل دی الکتریک

مجموع ممان کل دو قطبی های موجود در واحد حجم دی الکتریک را $\vec{P}$ (پلاریزاسیون) گویند.

$\vec{P} = n\vec{p} \rightarrow$ (مولکول) دو قطبی

$|\vec{P}| = \frac{q_i d}{A d} = \sigma_i$ از جنس دانسیته القایی است.

$$\boxed{\oint \vec{P}\cdot\vec{da} = q_i}$$: برای محاسبه مقدار بار القایی

چون $\vec{P}$ بر سطح عمود است $\Leftarrow PA = Q_i$

$$\Rightarrow \oint \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{da} = Q - \oint \vec{P}\cdot\vec{da} \Rightarrow$$

P و E موازی و با سطح عمود نیستند

$$\Rightarrow \oint (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})\cdot\vec{da} = Q$$

(بردار جابجایی) $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E_0}$ $\Rightarrow$ صورت کلی قانون گاوس $\boxed{\oint \vec{D}\cdot\vec{da} = Q_f}$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E_0} = k\varepsilon_0 \vec{E}$ نتیجه: $\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E}(k-1)}$

تعریف دوم: برای هر ماده دی الکتریکی دو ضریب می‌توان تعریف کرد:

k: ثابت دی الکتریک

χ: ضریب حساسیت

$$\chi = \frac{|\vec P|}{|\varepsilon_0 \vec E|} = k-1$$

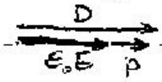
$$\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec\nabla\cdot\vec D = \rho$$

دیورژانس

حالت خاص: (۱) وقتی دی الکتریک نداریم: $\vec P = 0$ ~ $\vec D = \varepsilon_0 \vec E$

(۲) وقتی $\vec E = 0$ ~ $\vec D = \vec P$ یعنی تمام مولکولها پلاریزه هستند.

* سه بردار $\vec D$ و $\vec P$ و $\varepsilon_0\vec E$ سه بردار الکتریکی هستند



$$\boxed{\vec D = \varepsilon_0\vec E + \vec P}$$

مثال: یک خازن مسطح با سطح مقطع ۲ dm^2 و فاصله صفحات ۲mm را به ولتاژ ۴۰۰ ولت وصل می‌کنیم.

اولاً: ظرفیت، بار روی صفحه، میدان الکتریکی، انرژی و چگالی انرژی را حساب کنید.

ثانیاً: اگر خازن شارژ شده را از منبع جدا کرده و آن را با دی الکتریک با ضریب حساسیت $\chi=5$ پر کنیم، مقادیر خواسته شده قسمت بالا، چگالی بار القایی، بردار جابجایی و بردار پلاریزاسیون را مشخص و سه بردار را با شکل مناسب رسم کنید.

$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{2\times10^{-2}}{2\times10^{-4}}\varepsilon_0 = 100\varepsilon_0$ (F) $\qquad q = CV = 100\varepsilon_0 \times 4\times10^{2} = 4\times10^{4}\varepsilon_0$ (C)

$E = \frac{V_0}{d} = \frac{400}{2\times10^{-4}} = 2\times10^{6}$ (V/m) $\qquad U_0 = \frac{1}{2}C_0V_0^2 = \frac{1}{2}\times10^{2}\varepsilon_0\times16\times10^{4} = 8\times10^{6}\varepsilon_0$ (J)

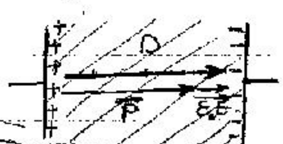
$u_0' = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\times4\times10^{12} = 2\times10^{12}\varepsilon_0$ (J/m³)

$$\chi = k-1 \Rightarrow k=6 \Rightarrow \begin{cases} C = 6C_0 \\ V = \frac{1}{6}V_0 \\ E = \frac{1}{6}E_0 \end{cases} ,\ U = \frac{1}{6}U_0 ,\ u' = \frac{1}{6}u_0' ,\ Q = \text{ثابت}$$

$$\oint \vec D\cdot d\vec a = Q_f \Rightarrow |\vec D|\times A = Q_f \Rightarrow |\vec D| = \frac{Q}{A} = \frac{4\times10^{4}\varepsilon_0}{2\times10^{-2}} = 2\times10^{6}\varepsilon_0$$

$$|\vec P| = \frac{k-1}{k}|\vec D| = \frac{5}{6}|\vec D| = \frac{5}{3}\times10^{6}\varepsilon_0$$

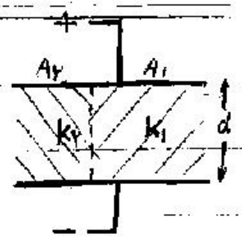
$u_0' = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}k\varepsilon_0\left(\frac{E_0}{k}\right)^2 = \frac{1}{k}u_0'$ اثبات



نتیجه: $\boxed{\vec P = \frac{k-1}{k}\vec D \quad \varepsilon_0\vec E = \frac{1}{k}\vec D}$

بحث مسایل مربوط به خازن

وقتی خازن ثابت نباشد و از چندین دی الکتریک در آن استفاده شده باشد دو حالت قابل ذکر است:



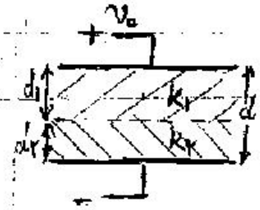
① این دو خازن ها مانند دو خازن موازی عمل می‌کنند زیرا جوشنهای همنام آنها به هم متصل است. $C_1 = k_1\varepsilon_0\frac{A_1}{d}$, $C_2 = k_2\varepsilon_0\frac{A_2}{d}$

$$\Rightarrow C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0}{d}(k_1A_1 + k_2A_2)$$

در این حالت $\vec{D}_1$ با $\vec{D}_2$ مساوی نیست چون بار در سطح (دو خازن) برابر نیست ولی $E_1 = E_2$ زیرا دو سطح هم‌پتانسیلند.

در حالت کلی به این صورت : $C = \frac{\varepsilon_0}{d}\left(\sum k_iA_i\right)$

②



$$V_0 = V_1 + V_2 \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1+V_2} = \frac{Q}{\frac{D}{k_1\varepsilon_0}d_1 + \frac{D}{k_2\varepsilon_0}d_2} = \frac{Q}{E_1d_1 + E_2d_2}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\frac{D}{\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}\right)} = \frac{\varepsilon_0 A}{\left(\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}\right)}$$

زیرا: $D_0A = Q$

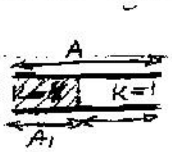
مانند دو خازن سری عمل می‌کنند همچنین $D_1 = D_2$ است زیرا سطح و بار هر دو خازن یکی است همچنین $\vec{E}_1 \neq \vec{E}_2$ زیرا: $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{k\varepsilon_0}$

در حالت کلی به این صورت: $C = \frac{\varepsilon_0 A}{\sum \frac{d_i}{k_i}}$

* می‌دانیم در نقاط نوک تیز یک شکل به علت هم‌پتانسیل بودن بار بیشتری قرار می‌گیرد در قسمت بالا هم به همین صورت می‌توان گفت که بارها روی سطح دو جوشن به طور یکسان پخش نشده است.

مثال: خازنی با ظرفیت C_0 داریم. می‌خواهیم با دی‌الکتریکی به ضریب $k=6$ آن را طوری پر کنیم که ظرفیت آن $5C_0$ شود این امر چگونه ممکن می‌شود؟

ج) می‌دانیم سری کردن دو خازن، ظرفیت مجموعه را کم می‌کند و حالت موازی بالعکس. پس باید دی‌الکتریک را طوری داخل خازن بریزیم که دو خازن موازی حاصل شود پس:

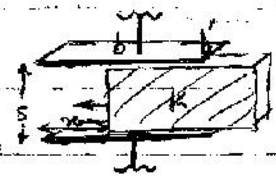


$$5\frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon_0}{d}(6A_1 + A - A_1) = \frac{\varepsilon_0}{d}(A + 5A_1)$$

$$\Rightarrow 5A = A + 5A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{4}{5}A$$

یعنی ۸۰٪ خازن باید با ثابت $k=6$ پر شود.

مثال: در یک خازن تخت با مقطع مستطیلی یک عایق با ثابت دی‌الکتریکی k قرار دارد. الف) ظرفیت خازن را براساس پارامترهای داده شده حساب کنید. ب) در حالی که جوشن‌های خازن دارای بار $+q$ و $-q$ هستند و خازن از منبع جداست، اگر دی‌الکتریک را در خازن قرار دهیم تا تمام فضای بین صفحات را پر کند، تغییرات نسبی انرژی خازن چقدر است؟



$$C = \frac{k\varepsilon_0 \overbrace{(b-x)b'}^{A_1}}{s} + \frac{\varepsilon_0 x b'}{s} = \frac{\varepsilon_0 b'}{s}(kb - kx + x)$$

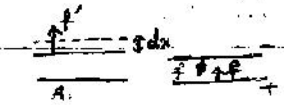
$$\Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 b'}{s}(kb + (1-k)x)$$: تغییرات ظرفیت خازن با تغییر x

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{U_2 - U_1}{U_1} = \frac{\frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1}}{\frac{Q^2}{2C_1}} = \frac{\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}}{\frac{1}{C_1}} = \frac{C_1}{C_2} - 1$$

مثال: دو جوشن یک خازن تخت بر هم چه نیرویی وارد می‌کنند؟

یکی از صفحات را ثابت نگه می‌داریم و صفحه دیگر را به اندازه dx دور می‌کنیم با استفاده از اصل کارهای مجازی کار انجام شده برابر $dw = f'dx = du$ است که این کار تبدیل به انرژی داخلی خازن می‌شود پس:

$$u = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 x}{2\varepsilon_0 A} = \underbrace{\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}}_{\text{ثابت}} x \Rightarrow du = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}dx$$

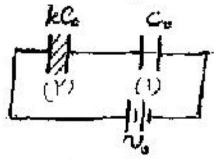


$$dw = f'dx = du = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}dx \Rightarrow f' = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} \xrightarrow{\text{طبق اصل کار مجازی}} f = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

به طور کلی: $\boxed{F = -\frac{du}{dx} \Rightarrow \text{باید تابع } u \text{ را برحسب } x \text{ پیدا کنیم}}$

مثال: خازنی با فاصله صفحات d و سطح A مطابق شکل دارای ظرفیت C_0 است. به اندازه d' که $d' < d$ ماده‌ای معلوم و به طول کل صفحات و مطابق شکل در خازن قرار می‌دهیم. در دو حالت زیر میزان ظرفیت را بعد از جاگذاری و پلاریزاسیون کامل به طور جداگانه پیدا کنید ۱) ماده مزبور رسانا است ۲) ماده مزبور عایقی با ثابت دی‌الکتریک K است.

مثال: دو خازن مشابه مسطح که ظرفیت هر یک C_0 است در اختیار داریم. یکی از خازنها را مطابق شکل (الف) از دی‌الکتریک با ثابت k پر می‌کنیم و مجموعهٔ متوالی دو خازن را به اختلاف پتانسیل V_0 می‌بندیم. در این حالت بار هر خازن و انرژی مجموعه را بر حسب C_0 و k و V_0 محاسبه کنید. در تجربه‌ای دیگر، نصف دی‌الکتریک را در یک خازن و نصف دیگر را در خازن دوم قرار می‌دهیم (شکل ب). در این حالت انرژی مجموعهٔ خازنها و تغییرات نسبی بار هر خازن را با مقایسه قسمت الف، حساب کنید.



شکل الف

شکل ب

(الف: $C_t = \frac{k}{k+1} C_0$

بار هر خازن: $Q = C_t V_0 = \frac{kC_0^2}{(k+1)C_0} \times V_0 = \frac{k}{k+1} C_0 V_0$

$U_1 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_t} = \left(\frac{kV_0}{k+1}\right)^2 \frac{C_0}{2}$

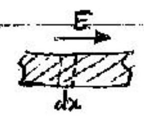
ب) $V_1 = V_2 = \frac{V_0}{2}$ ← $C' = \frac{\varepsilon_0}{d}(k+1)\frac{A}{2} = \frac{C_0(k+1)}{2}$ ظرفیت هر خازن

$C_t' = \frac{C_0(k+1)}{4}$ ← $U_1' = \frac{1}{2} C_t' V_0^2 = \frac{1}{2}\frac{C_0(k+1)}{2}\frac{V_0^2}{4} = \frac{(k+1)V_0^2}{8}\frac{C_0}{2}$

$\Rightarrow \frac{U_1'}{U_1} = \frac{(k+1)^3}{8k^2}$

مدار و جریان (circuit and Curent)

کمیتهای اساسی یک مدار ساده:



۱) شدت جریان: $\boxed{I = \frac{dq}{dt}}$

بعد از آنکه الکترونها یک سرعت تقریباً ثابت در سیم پیدا کردند، این سرعت را سرعت سوق می‌نامند و برابر است با:

$\vec{V} = V_d = \frac{dx}{dt}$ ← $dq = n.A.dx.e$

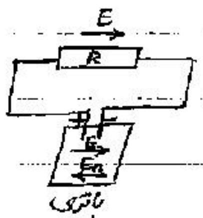
n: تعداد الکترونهایی که در واحد حجم وجود دارند و حرکت می‌کنند

$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = n.A.\frac{dx}{dt}.e = nAV_d e$

$\Rightarrow \boxed{I = nAV_d e}$

هرچه جسم رساناتر باشد، n بزرگتر است.

* تجزیه یک مدار:

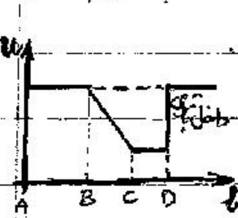


$\mathcal{E} = \int \vec{E_n}.\vec{dx}$ نیروی محرکهٔ باتری ، $V = \varphi_B - \varphi_A = -\int_B^A \vec{E}.\vec{dx}$

وقتی مدار باز است: $\mathcal{E} = V$

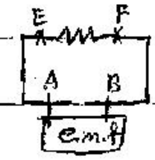
نیروی محرکهٔ مولد ($\mathcal{E}$) مقدار انرژی است که یک کولن بار مثبت می‌گیرد تا در مدار داخل و خارج بچرخد.

بار وقتی از یک قطب باطری به قطب دیگر مدار می‌رود انرژی از دست می‌دهد. ولی وقتی بار از قطب منفی باطری (در داخل باطری) به قطب مثبت می‌رود نیروی محرکه به او انرژی می‌دهد و آن را به تراز قبلی برمی‌گرداند.



به طور کلی: $\mathcal{E} = V + ir$

i: جریان مدار و باتری
r: مقاومت داخلی باتری



۲/ اختلاف پتانسیل : مقدار کار انجام شده برای واحد بار $\qquad \dfrac{dw}{dq}=V$

۳/ مقاومت

چگالی جریان : برداری است که شار گذرنده آن از سطح A برابر I شود : $\qquad J=\dfrac{I}{A}$

یا بصورت غیر برداری : جریان گذشته از واحد سطح را گویند . $\qquad \Rightarrow \int_A \vec{J}\cdot d\vec{a}=I$

$$\Rightarrow J=nV_d e=\frac{I}{A} \Rightarrow \boxed{V_d=\frac{J}{ne}=\frac{I}{Ane}}$$

قانون اهم (مقاومت) = اختلاف پتانسیل دو سر جسم به ازای جریانی که قطع می کند ثابت است $\qquad R=\dfrac{V}{I}$

* عکس مقاومت را رسانایی گرمایی گویند : $\qquad \dfrac{1}{R}=G=\dfrac{I}{V}$

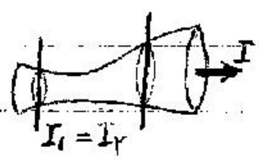
مقاومت ویژه :

ρ مقداری است که در رابطه $\vec{E}=\rho\vec{J}$ صدق کند یا $\qquad \rho=\dfrac{|\vec{E}|}{|\vec{J}|}$ (مقاومت ویژه)

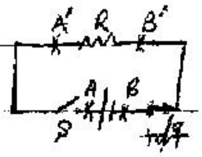
* در یک سیم مستقیم با سطح مقطع یکسان و یکنواخت مقاومت با مقاومت ویژه رابطه زیر را دارد : $\qquad R=\rho\dfrac{l}{A}$

* عکس مقاومت ویژه به ضریب رسانش نام دارد : $\qquad \dfrac{1}{\rho}=g=\dfrac{|\vec{J}|}{|\vec{E}|}$

نکته : جریان در هر سطح یک شکل غیر منظم یکسان است ولی چگالی آن یکسان نیست .



حل مدار



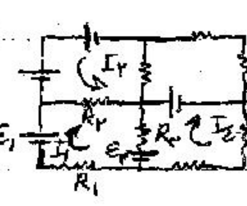
$$dqV_A-dqV_R+dq\mathcal{E}-dqV_r=dqV_A$$

(with $dqV_R = IR$, $dqV_r = rI$)

$$\Rightarrow \mathcal{E}=I(R+r) \xrightarrow[\text{برای مدار تک حلقه}]{} \boxed{\sum\mathcal{E}=I(\sum \text{مقاومت})}$$

* برای حلقه ها فرض می کنیم هر یک حلقه است که در این شکل چهار حلقه و چهار معادله می شود
جهت جریانها انتخابی است و اگر منفی شد آنگاه معلوم می شود فقط جهت باید عوض شود . در حلقه کوچک جداشده از فرمول
$\sum\mathcal{E}_i=I\sum R_i$ استفاده می کنیم

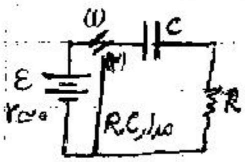
$$\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2=(R_1+r_1)I_1+R_2(I_1+I_2)+(R_c+r_c)(I_1-I_3)$$



* برای باتری هایی که از قطب منفی به مثبت می رویم $+\mathcal{E}$ (در این طرف تساوی)

مدار R-C

در این مدار که در آن خازن وجود دارد، جریان لحظه‌ای است و ثابت هم نمی‌باشد یعنی در پایان جریان صفر می‌شود



شارژ: در هنگام شارژ (وقتی کلید (۱) بسته می‌شود)

$$\mathcal{E}dq - V_R dq - V_C dq = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = IR + \frac{q}{C}$$

لحظه بستن کلید $t=0$ $\begin{cases} q=0 \\ I=I_m=I_R=\frac{\mathcal{E}}{R} \end{cases}$

لحظه شارژ خازن $t=T$ $\begin{cases} q=q_m=q_0=\mathcal{E}C \\ I=0 \end{cases}$

در دیگر لحظات: $I=\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{R}=\frac{dq}{dt}+\frac{q}{RC} \Rightarrow \frac{dq}{dt}=\frac{\mathcal{E}}{R}-\frac{q}{RC}$

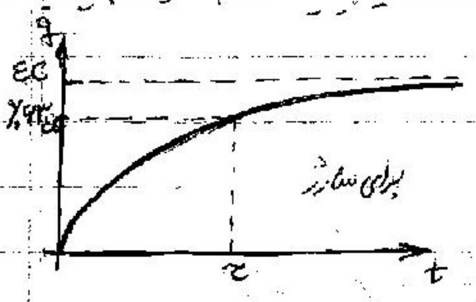
$$\Rightarrow \int_0^q \frac{dq}{\frac{\mathcal{E}}{R}-\frac{q}{RC}} = \int_0^t dt \Rightarrow \left[-RC\ln\left(\frac{\mathcal{E}}{R}-\frac{q}{RC}\right)\right]_0^q = t$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\mathcal{E}}{R}-\frac{q}{RC}\right)\Big|_0^q = \frac{-t}{RC} \rightarrow 1-\frac{q}{\mathcal{E}C} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \boxed{q=\mathcal{E}C\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$ بار خازن برای شارژ

یا $q=q_{max}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

همانطور که دیده می‌شود $\tau=RC$ از جنس زمان است که به τ، ثابت زمانی مدار RC گویند و τ مقدار زمانی است که پس از آن کمیت به ۶۳٪ مقدار max می‌رسد (هنگام شارژ شدن) $\tau \Rightarrow 63\%$

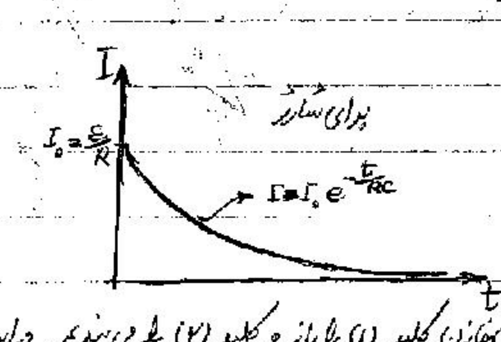
همانطور که در فرمول دیده می‌شود مدتی طول می‌کشد تا خازن شارژ کامل شود ∞ است اما این نهایت در عمل (به طور مقایسه‌ای) یک ثانیه هم شاید نشود.



τ: Relaxation time زمان واهلش

جریان: $\boxed{I=\frac{dq}{dt}=\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}=I_{max}e^{-\frac{t}{RC}}}$

جریان مدار در لحظه شارژ شدن



دشارژ: برای خالی کردن خازن Decharge کلید (۱) را باز و کلید (۲) را می‌بندیم. در این صورت خازن

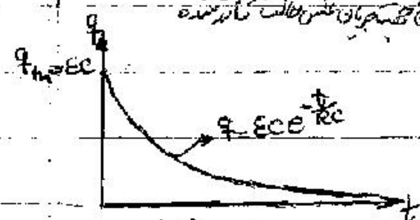
مانند یک باتری مولد جریان عمل می‌کند. پس:

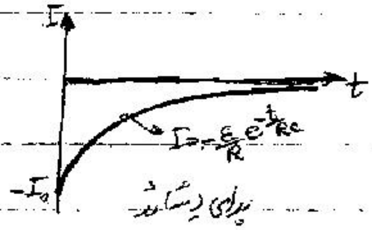
$$0 = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \Rightarrow -\frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt} \Rightarrow \int_0^t dt = -RC\int_{q_m=\varepsilon C}^{q} \frac{dq}{q}$$

$$\Rightarrow t = -RC(\ln q - \ln \varepsilon C) \Rightarrow \boxed{q = \varepsilon C e^{-\frac{t}{RC}} = q_{max} e^{-\frac{t}{RC}}}$$ بار هر لحظه خازن در دشارژ

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{dq}{dt} = -\frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = -I_{max} e^{-\frac{t}{RC}}}$$ جریان مدار در هر لحظه دشارژ

چون جهت جریان عکس حالت شارژ شده





سؤال: در یک مدار RC هنگام شارژ چه مقدار انرژی در مقاومت تلف و چه قدر در خازن ذخیره می‌شود؟

$$du = dW = \varepsilon dq \Rightarrow \boxed{W_{\text{انرژی مولد}} = \varepsilon\int_{q=0}^{q=\varepsilon C} dq = \varepsilon^2 C} = \varepsilon q_{max}$$

$$W_C = \int_0^{\varepsilon C} V dq = \int_0^{\varepsilon C}\frac{q}{C}dq = \frac{1}{2C}(\varepsilon^2 C^2) = \frac{1}{2} C\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \varepsilon q_{max}$$

$$W_R = \int_0^\infty RI^2 dt = \int_0^\infty R\frac{\varepsilon^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{R\varepsilon^2}{R^2}\times\frac{-RC}{2}\left[e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^\infty = \frac{\varepsilon^2 C}{2} = \frac{1}{2} \varepsilon q_{max}$$

همانطور که دیده می‌شود نصف انرژی مولد به خازن و نصف به مقاومت داده می‌شود و این بستگی به مقدارهای R و C و ... ندارد.

دقیقاً نصف می‌شود (مرحله ساده‌ای)؟

شرایط مرزی بین دو دی‌الکتریک:

برای بردار جابجایی ($\vec{D}$):

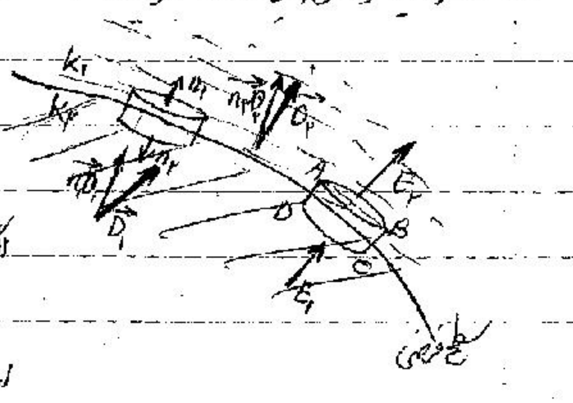
$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{a} = Q \Rightarrow \vec{D}_2\cdot \vec{n}_2 da + \vec{D}_1\cdot\vec{n}_1 da = \sigma da$$

$$\Rightarrow (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot \vec{n}_2 = \sigma$$

$\Rightarrow$ اگر $\sigma = 0$ یعنی باری روی سطح وجود نداشته باشد.

$$\Rightarrow \vec{D}_1 = \vec{D}_2$$

یا | در حالت کلی $\vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n}$ یعنی مؤلفه‌های عمود بر سطح $\vec{D}$ برابرند



برای میدان $(\vec{E})$:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \;\leadsto\; \int_A^B \vec{E}_2\cdot d\vec{l}_2 + \int_C^D \vec{E}_1\cdot d\vec{l}_1 + 0 + 0 = 0 \;\xRightarrow{d\vec{l}_2 = -d\vec{l}_1}\; (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\, d\vec{l}_2 = 0$$

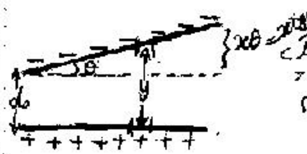
$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \quad \text{: یعنی مؤلفهٔ مماسی (افقی) میدان تغییر نمی‌کند}}$$

* پس در حرکت از یک دی‌الکتریک به دیگری، میدان، مؤلفهٔ افقی‌اش ثابت می‌ماند ولی بردار جابجایی مؤلفهٔ قائمش.

چند مسألهٔ مفهومی

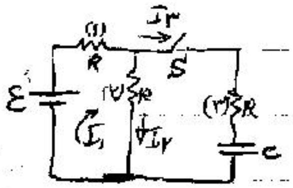
۱/ ظرفیت یک خازن مسطح صفحه موازی که یکی از صفحات آن به اندازهٔ θ درجه $(\theta < 4^\circ)$ کج گیریم به دست آورید: (صفحات مربع $b \times b$ اند)

نکته: بطور تجربی می‌توان حدس زد که ظرفیت خازن باید کم شود چون d بطور متوسط زیاد شده است.



خازن را به المان‌های کوچک که با هم موازی‌اند تقسیم : $\quad dc = \dfrac{\varepsilon_0 b\,dx}{y} = \dfrac{\varepsilon_0 b\,dx}{D_0 + x\theta}$

$$\Rightarrow C = \int_0^{k} dc = \int_0^b \frac{\varepsilon_0 b\,dx}{D_0 + x\theta} = Y\ell\left(1 - \frac{\theta \ell}{2D_0}\right)$$



۲/ در مدار شکل مقابل با بستن کلید S حساب کنید: ۱) جریان گذرنده از هر مقاومت ۲) ولتاژ دو سر R_2 و خازن در لحظهٔ $t=0$ و $t=\infty$ ۳) در یک لحظهٔ $0<t<\infty$، معادلهٔ بار خازن و جریان را پیدا کنید و رسم کنید.

$$\text{در هر لحظه} \begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ \mathcal{E} - RI_1 - RI_2 = 0 \\ -RI_3 - \frac{q}{C} - RI_2 = 0 \end{cases} \qquad t=0 \begin{cases} q = 0 \\ i_2 = i_3 = \frac{1}{2} i_1 = \frac{\mathcal{E}}{3R} \\ V_{R_2} = \frac{\mathcal{E}}{3} \\ V_C = 0 \end{cases}$$

$$t=\infty \begin{cases} q = q_{max} \\ I_3 = 0 \\ I_1 = I_2 = \frac{\mathcal{E}}{2R} \\ V_C = \frac{q_{max}}{C} = V_{max} \end{cases}$$

$$\mathcal{E} - R(I_2 + I_3) - RI_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{\mathcal{E}}{2R} - \frac{I_3}{2}$$

$$\Rightarrow -RI_3 - \frac{q}{C} - R\left(\frac{\mathcal{E}}{2R} - \frac{I_3}{2}\right) = 0$$

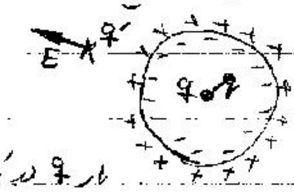
$$\Rightarrow I_3 = \frac{-2q}{RC} - \frac{\mathcal{E}}{R} \xRightarrow{\text{جهت } I_3 \text{ را عوض}} I_3 = \frac{2q}{RC} + \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \int_0^q \frac{dq}{\frac{2q}{RC} + \frac{\mathcal{E}}{R}} = \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \frac{RC}{2}\ln\left(\frac{2q}{RC} + \frac{\mathcal{E}}{R}\right) - \frac{RC}{2}\ln\frac{\mathcal{E}}{R} = t \Rightarrow \boxed{q = \frac{-C\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} e^{\frac{2t}{RC}}}$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{dq}{dt} = \frac{-C\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{RC} e^{\frac{2t}{RC}} \quad \Rightarrow \text{بقیه با توجه به } I_1 \text{ و } I_2$$

۳/ بار نقطه‌ای q در مرکز یک کرهٔ فلزی قرار دارد. ۱) کره را زمین می‌کنیم و میدان نقاط داخل و خارج آن را با ... بار q در خارج کره در نظر بگیرید ... ۲) کره‌های ... (شعاع خارجی b و داخلی a) در نظر بگیرید.

جوابها را دوباره تکرار کنید ۳/ کره را عایق بگیرید.



در داخل کره: $\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = q \Rightarrow \vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r} \quad r<R$

$\varepsilon_0 \oint E\, da = q + (q-q) \Rightarrow E = \frac{kq}{r^2}\hat{r} \quad r>R$

بار q بر q′ میدان دارد اما q′ بر q میدان ندارد و این مسأله را اینگونه می‌توان توجیه کرد که میدان از سطح داخل نمی‌شود و به کره وارد می‌شود و به تعداد q و q− روی سطح کره

* اگر ضخامت داشته باشد: داخل $E_1 = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$ و $a \leqslant r<b : E=0$ و $r \geqslant b: \vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$

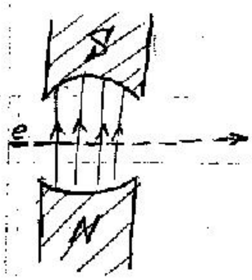
* اگر کره عایق باشد: $r<a : E = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$ و $a \leqslant r<b : \varepsilon \oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \sum q$

$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)\hat{r}$ و $r \geqslant b: E = \frac{\rho}{3\varepsilon r^2}(b^3 - a^3)\hat{r}$

/٤

مغناطیس

القاء یا اندکسیون مغناطیسی: نیروی مغناطیسی همان نیروی الکتریکی است با در نظر گرفتن نسبیت



$$F_m \propto qvB\sin\theta \rightsquigarrow F_m = \overset{k=1}{k}\,qvB\sin\theta$$

$$\Rightarrow B = \frac{f}{qv\sin\theta}$$

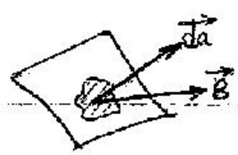
یعنی اگر بار q با سرعت v با زاویهٔ θ نسبت به میدان مغناطیسی یکنواخت B، وارد آن شود نیروی f_m بر آن وارد می شود و یا اگر نیروی f_m بر آن وارد شود مقدار B از فرمول بعد محاسبه می شود.

* اگر واحد بار کولنی با سرعت $1\ \frac{m}{s}$ عمود بر میدان که بر آن $1N$ نیرو وارد کند، حرکت کند به آن میدان مغناطیسی واحد (یک تسلا) گویند $T \equiv NA^{-1}m^{-1}$

$$\boxed{\text{فرمول لاپلاس}: \quad q(\vec{v}\times\vec{B}) = \vec{F}}$$

اگر ذره در مکان واحد هم در میدان مغناطیسی و هم الکتریکی بود $\vec{F} = q(\vec{v}\times\vec{B}+\vec{E})$ نیروی لورنتس

شار مغناطیسی: $d\phi_B = \vec{B}\cdot d\vec{a}$



واحد شار وبر (وبر) است $wb \equiv Tm^2$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{a}} \quad , \quad B = \frac{d\phi}{da_\perp}$$

سطحی که از آن میدان می گذرد

* واحد قدیمی میدان در دستگاه CGS، گاوس (Gauss) می باشد و $1_G = 10^{-4}\,T$

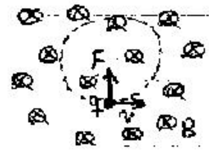
قانون گاوس برای مغناطیس: چون در جهان تک قطبی مغناطیسی وجود ندارد پس خطوط میدان همواره بسته هستند یعنی اگر بخواهیم آنها را در حجم محصور کنیم به همان تعداد خطوط داخل شده، خطوط میدان مغناطیسی، خارج می شوند پس:

همواره: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$

سطح یک حجم گاوسی

* فرض میدان مغناطیسی $\vec{B}$ بطور یکنواخت وجود دارد و ذره‌ای بصورت عمودی با سرعت v وارد میدان می‌شود خواهیم داشت

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = qvB\,(\hat{j}\times\hat{i}) = qvB\hat{k}$$



مقدار سرعت ثابت خواهد ماند زیرا:

$$dk = dw = \vec{F}\cdot d\vec{x} = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{2}mv^2 = cte \Rightarrow |\vec{v}| = cte$$

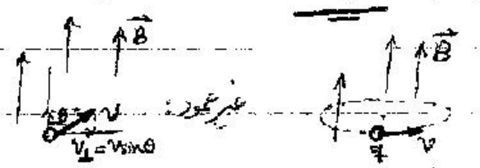
پس بار یک مسیر دایره‌ای را طی می‌کند

از طرفی برای دوران یک نیروی جانب مرکز (مرکزگرا) لازم است که برابر است با: $F_c = \frac{mv^2}{R} = mR\omega^2$

در اینجا $F_c = qvB$ پس: $\boxed{\omega = \frac{qB}{m}}$ و $\boxed{R = \frac{mv}{qB}}$ شعاع چرخش

نتیجه این رابطه: شعاع چرخش متناسب با اندازه حرکت و با بار و میدان نسبت عکس دارد. همچنین تعداد دورها در واحد زمان از طریق فرکانس حساب می‌گردد: $f = \frac{1}{2\pi}\frac{qB}{m}$

* اگر بار بصورت غیرعمود وارد شود از آنجا که $\vec{F} = qv_\perp B$ خواهیم داشت:

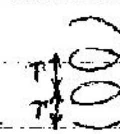


– چون در راستای عمودی سرعت $v_\parallel = v\cos\theta$ دارد به سمت بالا با معادله $z = v\cos\theta\,.\,t$ حرکت هم می‌کند

اما سرعت چرخش تغییر نمی‌کند و زمان چرخش ثابت است $T = \frac{1}{f} = 2\pi\frac{m}{qB}$ و گام ثابت خواهیم داشت:

و حرکت بصورت فنری خواهد بود.

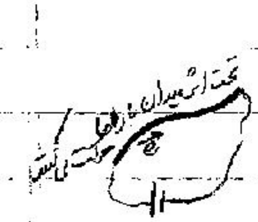
$$\boxed{Z_p = v\cos\theta\,\frac{2\pi m}{qB}}$$



* سیکلوترون یک شتاب دهنده ذره است که ضمن حرکت سرعت هم اضافه می‌شود که بعداً مطرح خواهد شد.

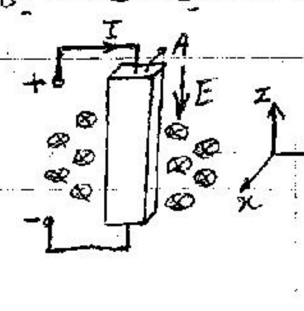
اثر هال (Hall effect)

آزمایش هال: تکه سیمی یا نوار رسانایی که از آن جریانی می‌گذرانیم را در نظر می‌گیریم



۱* اگر بارهای متحرک مثبت باشند – اعمال یک میدان مغناطیسی خارج عمود بر صفحه ایجاد کرده، تأثیر میدان بر آن بارها می‌شود:

$$\vec{F}_m = q\vec{v}B = qvB\hat{j}$$



نتیجه آنکه اولاً از جهت توزیع بار به هم می خورد و مثبت ها به سمت مثبت می روند و یک اختلاف پتانسیل با میدان عرضی (عمود بر میدان) بین دو طرف صفحه حاصل می شود که پتانسیل هال گویند. پس

۲ * اگر بارهای متحرک الکترون ها باشند باز هم الکترون ها به سمت راست می روند و اختلاف پتانسیل دیگری حاصل می شود و طبق این آزمایشها دیده شد که بارهای متحرک، الکترونها می باشند.

نکته: در مایعات و گازها که یون وجود دارد هر دو حرکت می کنند.

در آزمایش هال بعد از زمان معینی به یک حالت اشباع می رسیم که در آن نیروی بوجود آمده با نیروی میدان مغناطیسی برابر می شود

$$|\vec{f}| = F_m \Rightarrow \cancel{e}E_H = \cancel{e}V_d B \Rightarrow \frac{V_H}{d} = V_d B$$

$$\xrightarrow{\text{پتانسیل هال}} \frac{V_H}{d} = \frac{IB}{neA} \longrightarrow$$ از روی این فرمول تعداد الکترونهای متحرک بدست می آید

سیکلوترون:

اگر بر ذره باردار، اختلاف پتانسیل اعمال شود، به آن نیرو وارد می شود.

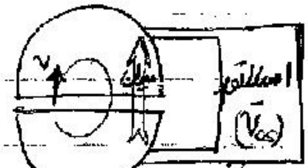
اساس کار سیکلوترون بر چند چیز استوار است: ۱/ سیستم مولد یون ([illegible])

۲/ میدان مغناطیسی یکنواخت

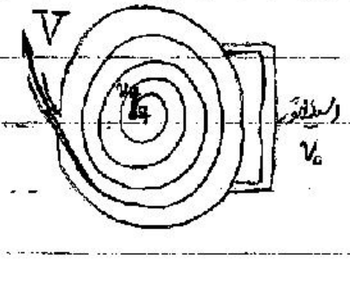
۳/ ایجاد شرایط خلاء

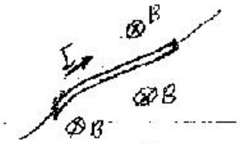
۴/ ایجاد یک میدان قوی و متناوب (اسیلاتور)

اسیلاتور دارای اختلاف پتانسیل است که f (فرکانس) آن برابر با حرکت ذرات عوض می شود.



وقتی بار q که مثبت فرض می شود به بالای حرکت دایره ای خود می رسد به اندازه qV_{ac} انرژی کسب می کند یا از دست می دهد. در این حرکت فرکانس تغییر نمی کند ($f=\frac{1}{2\pi}\frac{qB}{m}$) اما سرعت او نیم چرخش در چرخش قبل عوض می شود و به همین صورت در چرخشهای بعدی $\Delta K = qV$ انرژی وارد یا از سیستم خارج می شود و سرعت ذره بیشتر می شود و در پایان از مسیری با سرعت بالا ذره خارج می شود.



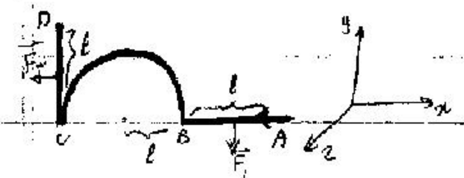


* اگر سیمی با جریان I داخل یه مفروض باشد، چون بارهای متحرک درآن درحال جریان هستند به این سیم در میدان مغناطیسی نیرو وارد می‌شود.

$$\vec F_m = q\,\vec v\times\vec B \rightarrow \vec{dF} = dq\,\vec v\times\vec B = I\,\vec v\,dt\times\vec B = I\,\vec{dl}\times\vec B$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{dF} = I\,\vec{dl}\times\vec B} \Rightarrow \boxed{\vec F = I\int_{l_1}^{l_2}\vec{dl}\times\vec B}$$

توجه شود که بردار یکه $\vec u$ در امتداد dl جهت ثابتی ندارد و از انتگرال بیرون نمی‌آید. ولی اگر سیم مستقیم باشد $\vec u$ جهت ثابتی خواهد داشت و $\vec F = I\,\vec L\times\vec B$ می‌شود.



مثال: سیمی به شکل زیر موجود می‌باشد. اگر جریان I از آن بگذرد و میدان یکنواخت B بر صفحه عمود باشد، بر این سیم چه نیرویی وارد می‌شود؟

$\vec F_{AB} = \vec F_1 = I\,\vec l_1\times\vec B = IlB(-\hat i\times -\hat k) = IlB(-\hat j)$

$\vec F_{CD} = \vec F_2 = I\,\vec l_2\times\vec B = IlB(\hat j\times -\hat k) = IlB(-\hat i)$

بردار شعاعی $= \hat\rho$

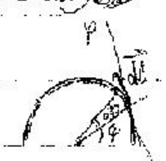
$\vec{dF_3} = I\,\vec{dl_3}\times\vec B = IRd\varphi B(\hat\varphi\times -\hat k) = IRd\varphi B(-\hat\rho)$

$= -IRd\varphi B(\cos\varphi\,\hat i + \sin\varphi\,\hat j)$

$\Rightarrow \vec F_3 = -IRB\int_0^\pi(\cos\varphi\,\hat i + \sin\varphi\,\hat j)d\varphi = -2IRB\,\hat j$

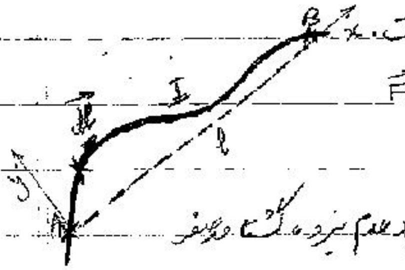
$\Rightarrow \vec F_t = \vec F_1 + \vec F_2 + \vec F_3 = -IlB(2\hat j + \hat i)$

محور مختصات قطبی



$\begin{cases}\hat\rho = \cos\varphi\,\hat i + \sin\varphi\,\hat j\\ \hat\varphi = -\sin\varphi\,\hat i + \cos\varphi\,\hat j\end{cases}$

* ثابت کنید هرگاه از سیمی به شکل دلخواه جریانی بگذرد و سیم در یک میدان مغناطیسی یکنواخت واقع باشد نیروی وارد بر سیم با نیروی وارد بر سیم مستقیم فرضی که دو سر سیم را به هم وصل کند در همان میدان برابر است.



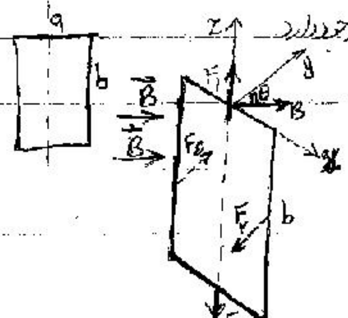
$\vec F = \int I\,\vec{dl}\times\vec B = I\int(dl_x\,\hat i + dl_y\,\hat j)\times\vec B = I\left[\int_0^l dl_x B\,\hat i\times\hat k + \int dl_y B\,\hat j\times\hat k\right]$

$= I\int_0^l dl_x B\,\hat j = IlB\,\hat j$

اگر مدار بسته باشد $\vec F = 0$ یعنی نیروی وارد بر عناصر مدار صفر است. اما با وجود عدم نیرو، گشتاور صفر نیست و این گشتاور باعث چرخش حلقه می‌شود.

محاسبه گشتاور موثر بر یک قاب حامل جریان:

یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec B$ یک قاب چهارگوش با طول a و عرض b وجود دارد.



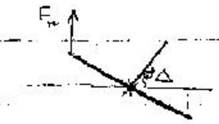
$\vec B = B_0(\sin\theta\,\hat i + \cos\theta\,\hat j)$

$\vec l_1 = a\,\hat i \Rightarrow \vec F_1 = IaB_0(\hat i\times\hat j) = IaB_0\cos\theta\,\hat k$

$\vec F_3 = I\,\vec l_3\times\vec B = -\vec F_1 = IaB_0\cos\theta(-\hat k)$

$\vec{F}_2 = I\,\vec{b}\times\vec{B} = IbB(\hat{u}) = Ib(-\hat{k})\times B_0(\sin\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j}) = IbB_0(-\sin\theta\,\hat{j}+\cos\theta\,\hat{i})$

$\vec{F}_4 = -\vec{F}_2$ ، $\sum\vec{F} = 0$



$|\vec{\tau}| = |\vec{r}\times\vec{F}| = \Delta|\vec{F}_2| = a\sin\theta\, IbB_0$

$b:\quad \vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}_2 = a\hat{i}\times IbB_0(\sin\theta\,\hat{j}+\cos\theta\,\hat{i}) = IabB\sin\theta(\hat{k})$

با آنکه جمع نیروها صفر است،

هر یک از نیروها تولید گشتاور می‌کنند، بزرگی این گشتاور $|\vec{\tau}| = IabB\sin\theta$ است.

$\Rightarrow \vec{\tau} = I\vec{A}\times\vec{B}$

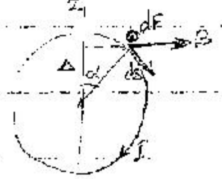
مانند یک دوقطبی الکتریکی که $\vec{P} = q\vec{L}$ ممان دوقطبی الکتریکی بود، با شدت ممان دوقطبی مغناطیسی تعریف می‌کنیم:
اگر جریان از یک مدار بسته (معمولاً حلقه) بگذرد حاصلضرب جریان در بردار سطح آن مدار را ممان دوقطبی مغناطیسی گویند
و با $\vec{M}$ نشان می‌دهند.

$\vec{M} = I\vec{A}$ ، $|d\vec{M}| = I\,r\,dx$

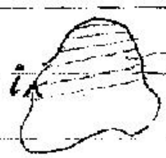
جهت $\vec{M}$ را می‌توان جهت بردار سطح گرفت. اگر انگشتهای دست را در جهت جریان بگیریم جهت شست
جهت $\vec{M}$ است.

$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{M}\times\vec{B}$

تمرین: برای محاسبهٔ گشتاور مؤثر بر یک حلقهٔ جریان (قاب) مدار دایره‌ای به شعاع a بگیرید که جریان I از آن می‌گذرد
میدان مطابق شکل با مقدار ثابت در تمام فضای حلقه وجود داشته باشد. با محاسبهٔ گشتاور نیروها نسبت به محور zها به رابطهٔ
فوق نظر برسید: $\vec{\tau} = \vec{M}\times\vec{B}$ (راهنمایی: $d\vec{F} = I\,d\vec{s}\times\vec{B}$)



روش کلی: در تمامی اشکال رابطهٔ $\vec{\tau} = \vec{M}\times\vec{B}$ برقرار است.



$\vec{\tau} = \vec{M}\times\vec{B}$

$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{M}\times\vec{B}$

$\vec{\tau}_t = \vec{M}_t\times\vec{B}$

$dW = \vec{\tau}\cdot d\vec{\theta} = \mu B\sin\theta\, d\theta \rightarrow W_{1\to2} = \mu B\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\, d\theta = \Delta U \rightarrow \Delta U = -\mu B\cos\theta$

برای یک حلقه جریان در میدان مغناطیسی داریم: و یا $\boxed{\Delta U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}}$ مانند $\boxed{\Delta U = -\vec{P}\cdot\vec{E}}$

سؤال: در یک دستگاه مختصات دکارتی بردار سرعت الکترونی برابر $\vec{v} = 2.5\times10^{7}\hat{k}\ \frac{m}{s}$ (در راستای $\hat{k}$) و نیروی وارد بر آن در اثر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{F} = (4\hat{i}+3\hat{j})\times10^{-13}\ N$ اگر سرعت تغییر کند و بصورت $\vec{v} = (15\hat{i}-2\hat{j})\times10^{7}\frac{m}{s}$ گردد، نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون صفر می‌شود مؤلفه‌های القای مغناطیسی $\vec{B}$ را بیابید $\vec{B} = a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$

(1) $4\times10^{-13}\hat{i}+3\times10^{-13}\hat{j} = -1.6\times10^{-19}\times2.5\times10^{7}\hat{k}\times(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})$ چرا برای تعیین مؤلفه‌های میدان هر دو سرعت لازم است؟

$\Rightarrow 4\times10^{-13}\hat{i}+3\times10^{-13}\hat{j} = -4\times10^{-11}a\hat{j}+4\times10^{-11}b\hat{i} \Rightarrow -4\times10^{-11}a = 3\times10^{-13} \Rightarrow a = -\frac{3}{4}\times10^{-2}$

$4\times10^{-11}b = 4\times10^{-13} \Rightarrow b = 10^{-2}$

(2) $0 = -1.6\times10^{-19}(15\hat{i}-2\hat{j})\times10^{7}\times(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}) \Rightarrow$ محاسبه کنید

سؤال: یک گوی فلزی به جرم 100gr با سرعت $40\pi\frac{rad}{s}$ در یک سطح افقی به حالت دوران می‌کند که توسط ریسمان محکمی نگه داشته شده در یک میدان مغناطیسی یک گوسی قرار دارد. چه مقدار بار مثبت q باید روی گوی قرار داد تا کشش نخ دو برابر شود ثانیاً جهت $\vec{B}$ نسبت به $\vec{W}$ (وزن) کدام است.

$m = 0.1\ kg$, $\omega = 40\pi\frac{rad}{s}$

$T = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow T = \frac{160\pi^2}{R}$

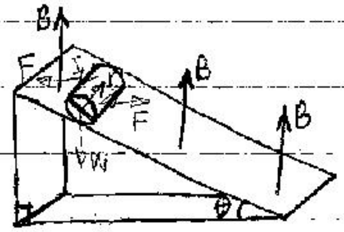
$2T = \frac{mv'^2}{R} \Rightarrow v' = 40\sqrt{2}\pi\ \frac{m}{s}$

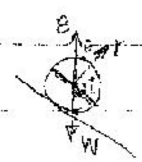
$\vec{f}+\vec{T} = \vec{F}_c \Rightarrow \vec{f}+\vec{T} = \frac{160\pi^2}{R}$

$\vec{f} = qv'B \Rightarrow 40\sqrt{2}\times10^{-4}\pi q = \frac{160\pi^2}{R}$ باید جهت $\vec{F}$ ، $q\vec{v}\times\vec{B}$ باشد B

$\Rightarrow q = \frac{\sqrt{2}\times10^{4}\pi}{R}$

سؤال: استوانه‌ای به جرم m و شعاع r و طول l مطابق شکل روی سطح شیبدار با شیب θ قرار دارد که سطح در میدان یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارد. برای آنکه مانع غلتش استوانه شویم n دور سیم دور استوانه می‌پیچیم (از سطح استوانه بگذرد) جهت و مقدار جریان را تعیین کنید که استوانه در تعادل بماند.





$\otimes\vec{\tau}$. گشتاور چرخش ناشی از وزن است پس گشتاور ناشی از جریان ⊙ باید باشد

$\vec{\tau}_i = I\vec{A}\times\vec{B} \Rightarrow \odot = \hat{i}\times\hat{j}$

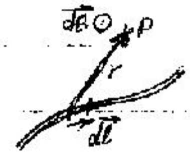
$\Rightarrow \vec{\tau}_i = I\times2r l n B\times(\sin\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j})\times\hat{j} = 2Ilr nB\sin\theta\,\hat{k}$

$\vec{\tau}_w = \vec{r}\times\vec{W} = mgr(\cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\,\hat{j})\times-\hat{j} = -mgr\sin\theta\,\hat{k} \Rightarrow I = \frac{mg}{2nlB}$

محاسبه $\vec{B}$ ناشی از جریان $\vec{I}$

۱/ روش بیوساوار :

$$\boxed{\vec{dB} = k'\frac{I\,\vec{dl}\times\hat{r}}{r^2} = k'\frac{I\,\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3} \quad , \quad \underbrace{k'}_{\text{تراوایی مغناطیسی}} = \frac{\mu_0}{4\pi}}$$



$k' = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ ثابت تراوایی یا گذردهی مغناطیسی است. در رابطه خوبی با k دارد:

$$\frac{k}{k'} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = 9\times10^{16}\,(m.s^{-1})^2 = \underbrace{c^2}_{\text{سرعت نور}} \quad \rightarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

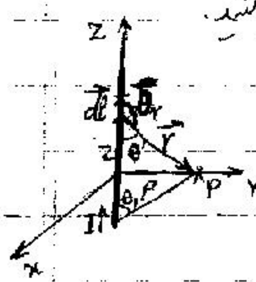
۲/ روش آمپر

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0(\Sigma I)}$$

چرخش $\vec{B}$ در یک مسیر بسته

(این روش مانند روش گوس محدودیت دارد)

یک سیم حامل جریان I موجود است میدان مغناطیسی را در نقطه ای به فاصله ρ از آن حساب کنید.



$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\,\frac{\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{dl} = dz\,\hat{k}$$

$$\vec{dB} = k'\frac{I\,dl\,\overbrace{r\sin\theta}^{\rho}}{r^3}\,\hat{u} = k'\frac{I\,dz\,\rho}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\,(-\hat{i})$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \int \vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\rho \int \frac{dz}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\,(-\hat{i}) =$$

$$z = \rho\cot\theta' = -\rho\cot\theta_2$$

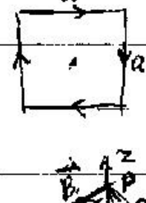
$$\Rightarrow dz = \frac{\rho}{\sin^2\theta} \qquad (z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\rho^3}{\sin^3\theta} \qquad \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{\rho}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\, d\theta\,(\hat{\varphi})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{\rho}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\,\hat{\varphi}}$$

حالت خاص: برای یک سیم طویل (بی‌نهایت طویل)

$$\Rightarrow \begin{cases}\theta_1 = 0\\ \theta_2 = \pi\end{cases} \quad \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho}\,\hat{\varphi}$$

* اگر مجموع چند سیم داشته باشیم مثلاً:



$$\vec{B} = 4\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I}{\frac{a}{2}}\,\sqrt{2}\right)$$

هر چهار سیم میدان یکسان در مرکز دارند.

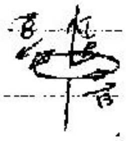
میدان یک حلقه مربع شکل را روی محور آن به فاصله z از آن حساب کنید.

$$\vec{B} = \Sigma\vec{B}_1 =$$

* روش آمپر مانند قضیه کار است $\oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = V$

* اگر دور یک سطح بسته فرضی جریانهایی داشته باشیم اگر $\vec{B}$ را در مرز سطح حساب کنیم (مجموع میدانهای $\vec{B}$) و در $\vec{dl}$ و $\cos$ زاویه بینشان ضرب و جمع ها جمع کنیم ، برابر $\mu(\sum I)$ خواهد شد.

روش آمپر با آزمایش هم ثابت شده با یک سیم بینهایت طویل و صفحه‌ای که روی آن عقربه های مغناطیسی قرار داشت



در این آزمایش $\vec{B}$ و $\vec{dl}$ مطابق بودند و $\cos\theta = 1$ اما حالت کلی را با آن انتگرال کشف کردند.

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I \Rightarrow B(2\pi\rho) = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$$

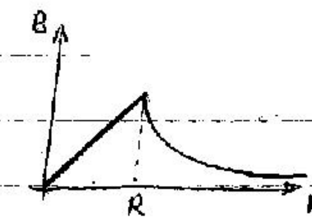
اما در این فرمول طول سیم اشتباه است اما می‌دانیم اگر سیم محدود باشد $\vec{B}$ ها فرق می‌کند. پس محدودیت فرمول اینجا وجود دارد و شرط آن طویل بودن سیم است و این شرط در همه مسائلی که از قانون آمپر استفاده می‌شود باید رعایت شود. دیگر شرط آن یکسان بودن میدان مغناطیسی در یک منطقه وسیع (مثلاً اینجا دایره) است.

* اگر سیم ضخیم باشد مانند سطح گوس یا خط بسته آمپر را داخل سیم به شعاع ρ می‌گیریم تا میدان مغناطیسی داخلی را بدست آوریم:

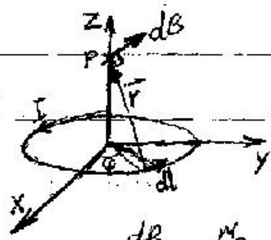
$$I = \frac{\rho L}{A} = \frac{\rho L}{\pi r^2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$B(2\pi\rho) = \mu_0 \frac{\rho^2}{R^2} I$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R^2}\rho\,\hat{\varphi}$$



معادله کلی روش آمپر : $\boxed{\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \int \vec{J}\cdot\vec{da}}$



محاسبه $\vec{B}$ برای یک حلقه حاوی جریان روی محور آن

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I R\,d\varphi \cdot r\sin\varphi}{r^3}\hat{u}$$

از این نمی‌توان انتگرال گرفت پس باید تجزیه کرد.

$dB_{xy} = dB\cos\theta$ و $dB_z = dB\sin\theta$ اندازه

اما می‌توان از طریق معادله هم حل کرد

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I R\,d\varphi \cdot R}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{cases} \vec{r} = z\hat{k} - R\hat{r} \\ \vec{r}' = R(\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}) = R\hat{r} \\ \hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j} \end{cases} \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\,d\varphi(\hat{\varphi}) \times [z\hat{k} - R\hat{r}]}{r^3} \Rightarrow \vec{B} = \int d\vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2}{r^3}\left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\,(\underbrace{\hat{\varphi} \times -\hat{r}}_{k})\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2(2\pi)}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

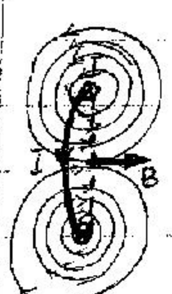
این روش بهتر و کلی تر است

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mu_0}{2}\dfrac{IR^2}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k} \\ \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{\vec{M}}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}}$$

زیرا $\vec{M} = I\vec{A}$ همین جهت $\vec{M}$ جهت $\vec{B}$ است. :

حالت خاص: مرکز $B_0 = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{R}$

اگر یک صفحه بر حلقه عمود کنیم، اگر شکل میدان مغناطیسی را بخواهیم رسم کنیم خواهد بود:

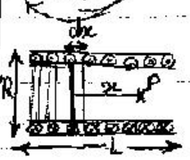


سولونوئید

اگر بجای این حلقه، چندین حلقه در کنار هم موجود باشد (سیملوله یا سولنوئید) میدان بصورت زیر حاصل می شود:

n: تعداد حلقه در واحد طول

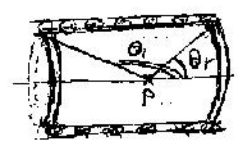
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}(n\,dx)\,\hat{i}$$



$$\Rightarrow \vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}nIR^2\int\frac{dx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

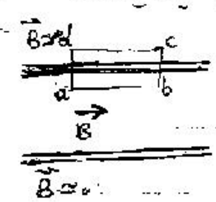
$$x = R\cot\theta$$

بعد از حل: $\boxed{B = \frac{\mu_0}{2}nI(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)}$



اگر $\infty \leftarrow \frac{L}{R}$ یعنی سیملوله بلند (ایده آل) باشد در نتیجه: $\boxed{B = \mu_0 nI}$

داخل میدان یکنواخت است. اما از طریق قانون آمپر هم می توان این مقدار را بدست آورد.



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0(\Sigma I)$$

$$\Rightarrow \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{l} + \cancel{\int_b^c \vec{B}\cdot d\vec{l}}^{\,0} + \cancel{\int_c^d \vec{B}\cdot d\vec{l}}^{\,0} + \cancel{\int_d^a \vec{B}\cdot d\vec{l}}^{\,0} = \mu_0(\Sigma I)$$

$$Bl = \mu_0(nl)I \Rightarrow B = \mu_0 nI$$

توروئید (toroid)

اگر یک سیملوله را حلقه کنیم توروئید حاصل می شود