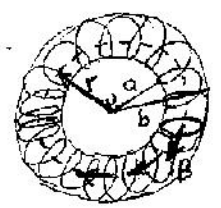


$b > r > a \qquad \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 (\Sigma I)$

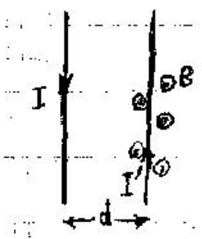
$\Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 N I \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{NI}{r}}$

تعداد کل حلقه‌ها

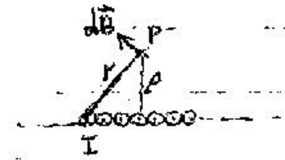
* راستای $\vec{B}$ در $\hat{\varphi}$ است.

مثال: دو سیم طویل که در فاصله L از هم واقعند به هم چه نیرویی وارد می‌کنند. (نیرو را بر واحد طول حساب کنید)

$\vec{B}$ را از طریق قانون آمپر بدست می‌آوریم



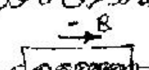
سؤال هالیدی: اگر بینهایت سیم کنار هم با جریان I در فاصله عمودی ρ از یک نقطه باشند، میدان را در آن نقطه حساب کنید.



طبق تقارن در بالای سیم فقط مؤلفه‌های راستای افقی باقی می‌ماند

و سپس انتگرال می‌گیریم

اما از طریق قانون آمپر ساده‌تر است



$BL + BL = \mu_0 N I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 n I}{2}$ که از انتگرال‌ها روی قسمت‌های عمودی صفر می‌شوند

در مثال بالا فرض کنید یک دسته سیم با جریان مخالف در فاصله $2R$ از آن دسته قرار دارد. میدان را بین دو صفحه پیدا کنید

دیده خواهد شد که این جواب با مقدار سولنوئید برابر است

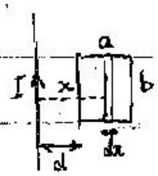
اگر هر دو مجموعه را با هم در یک مسیر بسته قرار دهیم چون $\Sigma I = 0$ پس خارج دو رشته سیم $B = 0$ است

اما در داخل مانند بالا $\vec{B}$ را بدست می‌آوریم دو تا هم جهت هستند جمع می‌شوند.

$\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} + \frac{\mu_0 n I}{2} = \mu_0 n I$ میدان داخل یک سیملوله

شار مغناطیسی: $\boxed{\varphi = \int \vec{B}\cdot d\vec{a}}$

جریان $\vec{I}$ از سیم مستقیم می‌گذرد، یک قاب در فاصله d و صفحه با آن در نظر بگیرید و شار مغناطیسی را از آن حساب کنید

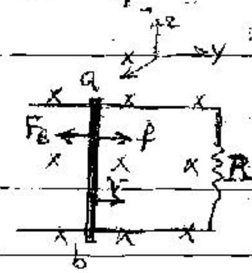


$B_{(x)} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x} \qquad da = b\,dx$

$\Rightarrow \varphi = \int_d^{d+b}$

قانون فاراده

اگر یک سیم رسانا را در میدان یکنواخت $\vec{B}$ حرکت دهیم به بارهای موجود در آن نیرو وارد می‌شود



$$\vec{F}_{+} = +qVB(\vec{j}\times\vec{i}) = qVB(\vec{k})$$

$$\vec{F}_{-} = -qVB(\vec{j}\times\vec{i}) = qVB(-\vec{k})$$

بنابراین بین دو سر میله اختلاف پتانسیل بوجود می‌آید. اگر مداری ایجاد کنیم جریانی در آن برقرار می‌شود.

چون سیم حامل جریان در میدان یکنواخت واقع است به آن نیرو وارد می‌شود:

$$\vec{F}_B = I\vec{l}\times\vec{B} = IlB(\vec{k}\times\vec{i}) = IlB(-\vec{j})$$

این نیرو مانع ادامه حرکت می‌شود و برای ادامه جریان باید نیرویی مساوی و مخالف به کار ببریم.

$\vec{f} = -\vec{F}_B \longrightarrow$ کار این نیرو $dw = \vec{f}\cdot\vec{dx} = IlB\,dx$

نیروی محرکه $\varepsilon = \dfrac{W}{dq} = \dfrac{IlB\,dx}{I\,dt} = lvB \longrightarrow$ به صورت برداری $\boxed{\varepsilon = (\vec{B}\times\vec{l})\cdot\vec{v}}$

در حالت کلی: $d\varepsilon = (\vec{B}\times\vec{dl})\cdot\vec{v}$

چون سطح بسته‌ای در میدان قرار گرفته، شاری از آن عبور می‌کند که با تغییر dx عبور شار تغییر می‌کند.

$d\varphi = \vec{B}\cdot\vec{da} \longrightarrow d\varphi = Bl\,dx$

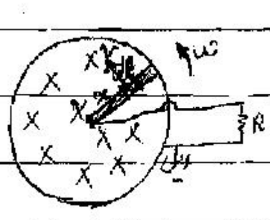
$$\varepsilon = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{Bl\,dx}{dt} = Blv$$

هرگاه به نحوی شار مغناطیسی مداری را تغییر دهیم فوراً نیروی محرکه‌ای حاصل می‌شود.

این نیروی محرکه برابر است با: $\boxed{\varepsilon = -\dfrac{d\varphi}{dt}}$ قانون فاراده

قانون لنز: جهت نیروی محرکه را مشخص می‌کند و طوری است که با عامل بوجود آورنده مخالفت می‌کند و منفی نیز به همین خاطر در فرمول آورده شده است.

مثال: با اینکه نیروی محرکه حرکتی بود و جریان آن محدود است زیرا محدوده $\vec{B}$ کم است. اما مثلاً اگر یک میله گردان را در میان محدوده بچرخانیم جریان دائمی حاصل می‌شود



اگر dl را از این میله انتخاب کنیم خواهیم داشت:

$$d\varepsilon = v\,dx\,B = x\omega\,dx\,B$$

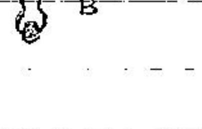
$$\varepsilon = \int d\varepsilon = B\omega\int_0^l x\,dx = \frac{1}{2}B\omega l^2$$ دستگاه دینامو فاراده

* اگر دایره کامل طی نشود می‌توان $\frac{d\theta}{dt}=\omega$ قرار داد و انتگرال گرفت و روش دیگر :

$$\mathcal{E}=-\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\vec{B}\cdot\vec{da}}{dt}=\frac{Bl\,d\theta\,dl}{dt}=Bl\omega\,dl \Rightarrow \mathcal{E}=\frac{1}{2}B\omega l^2$$

چون $\frac{d}{dt}(\varphi)=\mathcal{E}$ و $\varphi=|\vec{B}||\vec{A}|\cos\theta$ پس برای تغییر شار می‌تواند $\vec{B}$ یا $|\vec{A}|$ یا θ تغییر کند

* مثال تغییر $\vec{B}$:



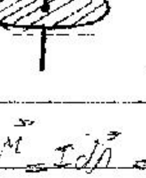
اگر آهنربا را به حلقه نزدیک کنیم $\vec{B}$ زیاد می‌شود :

جریان I در جهتی که $\vec{B}$ را تضعیف کند به وجود می‌آید.

$$\frac{d\varphi}{dt}=\mathcal{E}=-A\frac{dB}{dt}$$

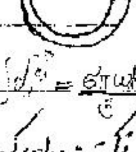
* در ژنراتورها بهترین حالت ایجاد $\mathcal{E}$ تغییر θ است.

مثال: قرص با بار سطحی را با چگالی بار سطحی ثابت σ حول محور قائم با سرعت ω می‌چرخانیم. میدان مغناطیسی حاصل در مرکز قرص را حساب کنید. ممان دوقطبی مغناطیسی حاصل را حساب کنید.



ج) دلیل وارد شدن میدان این است که حرکت بارها مانند حلقه‌هایی با جریان I است.

$$\frac{dq}{dt}=I \qquad B_0=\frac{\mu_0}{2}\frac{I}{R}$$



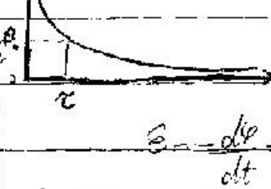
$$\vec{\mu}=I\vec{A} \qquad \vec{A}=\pi r^2\hat{r}$$

$$d\vec{\mu}=I\,d\vec{A}=\frac{dq}{dt}\pi r^2\hat{k}=\frac{\sigma\,da}{dt}\pi r^2\hat{k}=\frac{\sigma r\,d\theta\,dr}{dt}\pi r^2=\sigma\pi\omega r^3dr \Rightarrow \vec{\mu}=\int d\vec{\mu}=\frac{\sigma\pi\omega R^4}{4}$$

نکته: برای کره می‌توانیم مجموعه‌ای از این قرص‌ها در نظر بگیریم و مسئله را حل کنیم.

حلقه‌ای دایره‌ای به شعاع $r=20\,cm$ به دور قطر قائم خود با سرعت $\omega=1000\,\frac{rad}{s}$ می‌چرخد. در لحظه $t=0$ حلقه عمود بر میدان است که در صفحه تصویر به راست و رو به داخل و به صورت $B=B_0e^{-t/\tau}$ است.

اگر $B_0=0/1\,T$ و $\tau=0/1\,s$ باشد مقاومت حلقه



اولاً شار مغناطیسی (φ) حلقه ثانیاً نیروی محرکه $\mathcal{E}$ را به صورت تابعی از t

ثالثاً شدت جریان در $t=0$ رابعاً اولین لحظه‌ای که نیروی محرکه صفر یا max می‌شود کدام است

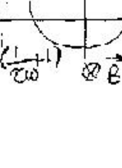
$$\varphi=\oint\vec{B}\cdot\vec{da}=B_0e^{-t/\tau}\pi R^2\cos\omega t=\pi R^2B_0e^{-t/\tau}\cos\omega t$$

$$\mathcal{E}=-\frac{d\varphi}{dt}=\pi R^2B_0e^{-t/\tau}\left(\frac{1}{\tau}\cos\omega t+\omega\sin\omega t\right)$$

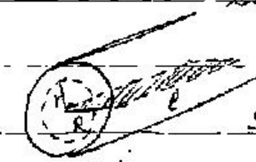
$$\mathcal{E}=I\rho \Rightarrow I_{(t)}=\frac{\mathcal{E}}{\rho} \Rightarrow I_{(0)}=\frac{\pi R^2B_0}{\tau\rho}$$

مقاومت

$$\begin{cases}\mathcal{E}=0 \Rightarrow t=\frac{\cot^{-1}(-\omega\tau)}{\omega}\\ \mathcal{E}=max \Rightarrow t=tg^{-1}\left(\frac{1}{\tau\omega}+1\right)\end{cases}$$



استوانه‌ای طویل و حامل جریان به موازات محور آن و با چگالی $J = J_0\left(1+\frac{r}{2R}\right)$ $(r<R)$ موجود است.
مطلوبست تعیین $\vec{B}(r)$ در یک نقطه داخل و خارج استوانه. ثانیاً شار مغناطیسی عبوری از صفحه‌ی $R-l$ (که در شکل هاشور خورده است).



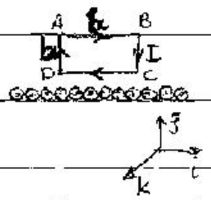
با استفاده از قانون آمپر: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int J\cdot da$

داخل: $B\times 2\pi r = \mu_0\int_0^r J_0\left(1+\frac{r}{2R}\right)2\pi r\,dr \Rightarrow \vec{B}(r) = \mu_0 J_0\left(\frac{r}{2}+\frac{r^2}{6R}\right)\hat{\varphi}$

خارج: $B\times 2\pi r = \mu_0\int_0^R \left(1+\frac{r}{2R}\right)2\pi r\,dr \Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{2}{3}\mu_0 J_0 R^2 \frac{1}{r}\hat{\varphi}$

$\varphi = \int \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_0^R \mu_0 J_0\left(\frac{r}{2}+\frac{r^2}{6R}\right)\cdot l\,dr = \frac{11}{36}\mu_0 J_0 l R^2$

تعداد بی‌نهایت سیم حامل جریان کنار هم داریم. اگر قاب مستطیل شکلی با اضلاع a و b که از آن جریان به شدت I در جهت عقربه‌های ساعت می‌گذرد، قرار دهیم، اندازه و جهت نیروی مغناطیسی مؤثر بر هر یک از اضلاع قاب، همچنین گشتاور وارد بر قاب.



$\vec{F}_{AB} = \vec{F}_{AC} = I(\vec{l}\times\vec{B}) = 0$

$\vec{F}_{BC} = I(\vec{BC}\times\vec{B}) = Ib\frac{\mu_0 n I_0}{2}(-\hat{j}\times -\hat{i}) = \frac{\mu_0 b n I I_0}{2}(-\hat{k})$

$\vec{F}_{DA} = I(\vec{DA}\times\vec{B}) = I(-\vec{BC}\times\vec{B}) = \frac{\mu_0 b n I I_0}{2}\hat{k}$

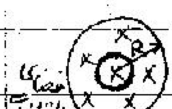
$\vec{\tau} = I\vec{A}\times\vec{B} = Iab\frac{\mu_0 n I_0}{2}(-\hat{k}\times\hat{i}) = \frac{ab\mu_0 n I I_0}{2}(-\hat{j})$

محاسبه‌ی میدان الکتریکی القایی در یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان

می‌دانیم حال حالتی خاص که شار بر اثر تغییرات یکنواخت حاصل می‌شود داریم:

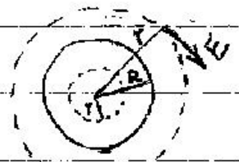
$\mathcal{E} = -\frac{dB}{dt}A = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

در این صورت در فضای میدان مغناطیسی میدان خارجی که میدان الکتریکی است به وجود می‌آید. اگر یک سیم را داخل یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان قرار دهیم، جریان در سیم برقرار می‌شود. پس یک جور میدان الکتریکی داریم که به دنبال آن در سیم جریان داریم و حرکت بار برقرار است.



$\underset{\text{نیروی محرکه}}{\mathcal{E}} = \oint \overset{\text{میدان الکتریکی القایی}}{\vec{E}}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{dB}{dt}A$

انتگرال E نسبت به l روی مسیر صفر است زیرا میدان الکتریکی کنسرواتیو است اما در حالت بالا $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}$ صفر نیست چون $\vec{E}$ پایستار نیست.

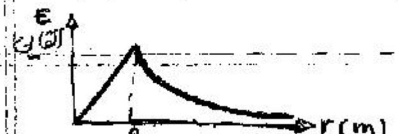


1) $r<R$: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = E(2\pi r) = \frac{dB}{dt}(\pi r^2)$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{1}{2}\frac{dB}{dt}r(\pm\hat{\varphi})}$

اگر $\vec{B}$ نسبت به t زیاد شود چون سیم پیچ با افزایش شار مخالفت می‌کند پس $\vec{E}$ در جهت φ است و بالعکس.

2) $r>R$: $E(2\pi r) = \frac{dB}{dt}(\pi R^2) \rightarrow E = \boxed{\frac{1}{2}\frac{dB}{dt}\frac{R^2}{r}(\pm\hat{\varphi})}$



* جون میدانهای القایی پتانسیل تعریف نمی شود ولی این میدانها پایستار نیستند و برای آنها لفظ نیروی محرکه بکار می رود.

خودالقایی:

چون $\mathcal{E} = -\frac{d\varphi_B}{dt}$ اگر میدان مغناطیسی تغییر کند (مثلاً با جریان) یک نیروی محرکه در مدار بوجود می آید.

$\varphi \propto B \propto I$

$\Rightarrow N\varphi \propto I \Rightarrow N\varphi = \underbrace{L}_{\text{ضریب خودالقایی}} I \Rightarrow L = N\frac{\varphi}{I}$

عامل تغییر شار خود سیم است که جریان آن تغییر می کند.

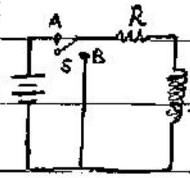
$$\mathcal{E} = -\frac{d(N\varphi)}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}}$$ نیروی محرکه خودالقا

* شبیه این حالت خازن است که $C = \frac{q}{V}$ و در اینجا $L = \frac{\mathcal{E}}{\frac{dI}{dt}}$ ← هانری (ولت، آمپر، s)

محاسبه L: $L = \frac{N\varphi}{I} = \frac{nl(A\mu_0 nI)}{I} = \mu_0 n^2 Al$ که در آن $n = \frac{N}{l}$ تعداد سیم در واحد طول

اگر B متغیر باشد باید انتگرالگیری کرد.

مدار R−L:



در حالتی که S به A وصل: $v_R = Ri$, $v_L = L\frac{di}{dt}$

$$\Rightarrow \mathcal{E} - RI - L\frac{di}{dt} = 0$$

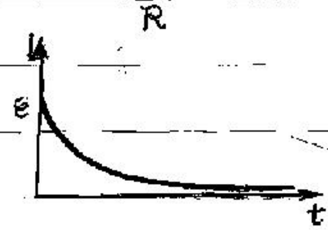
$$\Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{R} - I = \frac{L}{R}\frac{di}{dt} \Rightarrow \int \frac{di}{\frac{\mathcal{E}}{R} - i} = \frac{R}{L}dt \qquad t=0 \begin{cases} i = 0 \\ \frac{di}{dt} = max = \frac{\mathcal{E}}{L} \end{cases}$$

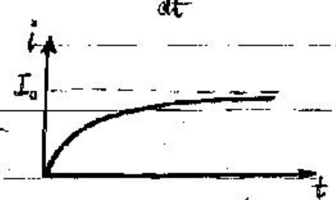
$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \quad ; \quad \tau = \frac{L}{R} \qquad t = \infty \begin{cases} i = max = \frac{\mathcal{E}}{R} \\ \frac{di}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_L = L\frac{di}{dt} = \mathcal{E}e^{-t/\tau}}$$

$$V_L + V_R = \mathcal{E}$$



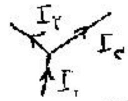


در حالتی که S به B وصل است نیز مراحل به همین صورت قابل بررسی است.

انرژی

اگر مقاومت موجود در سیم پیچ (L) را با R نشان دهیم خواهیم داشت:

* حال به بررسی یک خاصیت خازنها می پردازیم.

می دانیم قانون کیرشهوف در مورد جریانهای یک نقطه همواره صادق است:  $I_1+I_2+I_3=0$

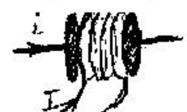
اما در خازنها انگار این قانون نقض می شود زیرا به یک طرف خازن بار اضافه می شود و جریان به آنسو لی خارج می شود و به همین صورت برای سطح دیگر، بار خارج می شود ولی باری وارد آن نمی شود. برای رفع این نقیصه فرض می کنند جریان فرضی I_d (جریان جابجایی) از خود خازن می گذرد:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}=\frac{q}{A\varepsilon_0}\hat{n} \Rightarrow \frac{dE}{dt}=k=\frac{dq}{A\varepsilon_0 dt}=\frac{I}{A\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi_E}{dt}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{dq}{dt}=\frac{i}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{i_d=\varepsilon_0\frac{d\varphi_E}{dt}}$$

* حال اگر میدان مغناطیسی و الکتریکی هر دو را داشته باشیم (مانند یک سلونوئید و یک خازن با صفحات دایره ای) آنگاه:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\varepsilon_0\frac{d\varphi_E}{dt}$$



اگر در دایره ی شار الکتریکی دایره ای به شعاع r فرض کنیم به علت تقارن میدان B تولید شده در محیط آن یکسان است و مثل اینکه جریانی از مرکز این دایره می گذرد و E نیز ناشی از این جریان است.

پس اگر ما کاری کنیم که میدان داخل خازن تغییر کند، انگار سیمی بین صفحات آن وجود دارد و جریان $I_d=\frac{dq}{dt}$ از آن می گذرد. پس معادله ی ۴ ماکسول بصورت کلی زیر نوشته می شود:

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0(I_c+I_d)=\mu_0\left(I_c+\varepsilon_0\frac{d\varphi_E}{dt}\right)}$$

جریانهای واقعی موجود در سطح فرضی

(جریان جابجایی) مانند خازن که شار الکتریکی آن تغییر کند.

 مانند:

* در خازنها $I_c=I_d$ است یعنی به جای I_c در فرمول دیگر جریانی قرار نمی دهیم مگر آنکه غیر از خازن، در سطح فرضی ما سیم حامل جریان دیگری (بطور واقعی) وجود داشته باشد. در غیر این صورت I_c را نمی نویسیم و تنها $\varepsilon_0\frac{d\varphi_E}{dt}$ را می نویسیم.

محاسبه ی میدان مغناطیسی القایی $(\vec{B})$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\varepsilon_0\frac{d\varphi_E}{dt} \Rightarrow B(2\pi r)=\mu_0\varepsilon_0 \overbrace{A}^{\pi r^2}\frac{dE}{dt} \quad : r\leq R$$

مانند یک خازن با صفحات دایره ای

$$\Rightarrow r\leq R : \boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2}\frac{dE}{dt}\,r\,\hat{\varphi}}$$

$$r>R : B(2\pi r)=\mu_0\varepsilon_0 R^2\frac{dE}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0\varepsilon_0 R^2}{2}\frac{dE}{dt}\cdot\frac{1}{r}\,\hat{\varphi}}$$

توجه: این میدانها بسیار کوچک هستند.

مبحث امواج حذف است و تدریس نمی شود.

پایان

$$du = du_R + du_B \Rightarrow \mathcal{E}dq = Ri\,dq + L\frac{di}{dt}dq$$

$$\Rightarrow u_B = \int du_B = L\int_0^I i\,di = \boxed{\frac{1}{2}LI^2}$$

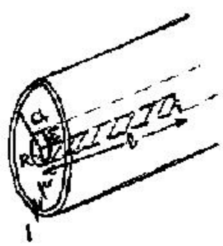
این انرژی در میدان مغناطیسی ذخیره می شود و داخل سلونوئید قرار دارد.

چگالی $u'_B = \frac{du}{dv}$ در یک سلونوئید طویل : $B = \mu_0 nI \Rightarrow u'_B = \frac{u}{v} = \frac{\frac{1}{2}LI^2}{AL}$

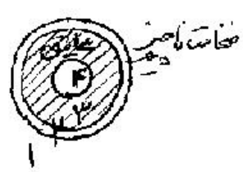
$$\Rightarrow = \frac{\mu_0 n^2 LAI^2}{2AL} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

:
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{انرژی واحد حجم مغناطیسی} = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \\ \text{〃 〃 〃 الکتریکی} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \end{array}}$$

ثابت می شود که نیازی نیست که سلونوئید، ایده آل باشد و در هر محیط با $\vec{B}$ فرضی، انرژی واحد حجم مغناطیسی $\frac{1}{2\mu_0}B^2$ است.



مثال: سیم Co-Axial (هم محور) : در یک سیم Co-Axial، هادی داخلی به شعاع R حامل جریان I و هادی بیرونی به شعاع a حامل جریان I- است ۱) اندکسیون مغناطیسی $\vec{B}(r)$ را در نقاط ۱ تا ٤ حساب کنید (از طریق قانون آمپر) ۲) شار گذرنده از یک مستطیل به طول l و عرض R و انرژی ذخیره شده در دی الکتریک را محاسبه کنید.



$$b < r < a : \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow u = \int u' dv = \int \frac{B^2}{2\mu_0}dv = \cdots$$

معادلات ماکسول

1) $\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot\vec{da} = q$: قانون گوس برای الکتریسیته

2) $\oint \vec{B}\cdot\vec{da} = 0$: 〃 〃 〃 مغناطیس

3) $\oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{d\varphi_B}{dt}$: قانون فارادی (نکته: $\vec{E}$ در این فرمول القایی است و پتانسیل ندارد)

4) $\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 i$: قانون آمپر (نکته: i مجموع جبری جریانهای عبوری از سطح)

حالت کلی قانون آمپر:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0(\Sigma i)$$

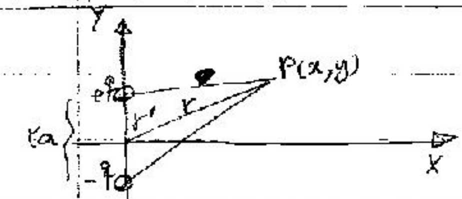
$$\varphi_E = \vec{E}\cdot\vec{dA} \Rightarrow \frac{d\varphi_E}{dt} = \frac{d(\vec{E}\cdot\vec{A})}{dt}$$

حالتی را در نظر می گیریم که E، A عمود بر هم : $\boxed{\frac{d\varphi_E}{dt} = A\frac{dE}{dt}}$

این فرمول نشان می دهد که تغییر شار الکتریکی هم میدان مغناطیسی و هم الکتریکی تولید می کند.

در خازنها : $\frac{dE}{dt} = k$

تمرین سؤالات E



* محاسبهٔ میدان حاصل از یک دوقطبی در حالت کلی

$$E_z = 0$$

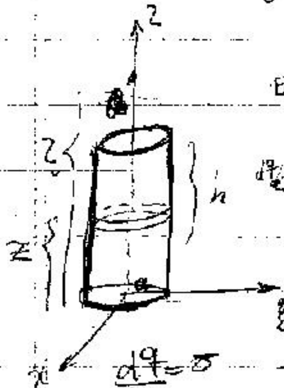
$$\vec{E}_p = E_x\hat{i} + E_y\hat{j}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x\hat{i}+(y-a)\hat{j}}{[x^2+(y-a)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{x\hat{i}+(y+a)\hat{j}}{[x^2+(y+a)^2]^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}$

$r'_1 = a\hat{j} \ , \ r'_2 = -a\hat{j}$

میدان دور در $x^2+y^2 \gg a^2$,
$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} \quad E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3pxy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$



* میدان استوانهٔ توپر با چگالی بار ρ در فاصلهٔ z_0 از مرکز دایرهٔ انتهای آن

برای حلقه $dE_p = \frac{k\,dq}{r^2+z^2}\cos\theta \Rightarrow \boxed{E_p = \frac{kqz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}}$ E برای حلقه

از طرفی برای دیسک : $dE_p = \frac{k\,dq\,z}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow E = kz\int\frac{dq}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\frac{dq}{dA} = \sigma \qquad dq = \sigma 2\pi r\,dr \Rightarrow E = kz\int_0^a \frac{\sigma 2\pi r\,dr}{r^2+z} = \frac{2kqz}{a^2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$

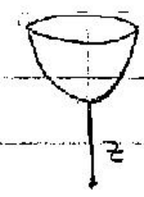
$$\boxed{E = \frac{2kqz}{a^2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)}$$ E برای دیسک

برای استوانه : $dE_p = \frac{2k\,dq\,(z_0-z)}{a^2}\left[\frac{1}{(z_0-z)} - \frac{1}{\sqrt{a^2+(z_0-z)^2}}\right]$

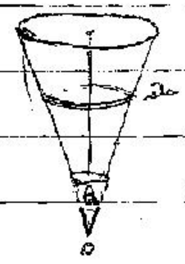
$dq = \rho\,dz\,\pi a^2 \quad \Rightarrow E_p = \int_0^h 2k\rho\pi\,dz - \int_0^h \frac{z_0-z}{\sqrt{a^2+(z_0-z)^2}}\,dz$

$$\Rightarrow \boxed{E_p = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left\{h - [a^2+(z_0-h)^2]^{\frac{1}{2}} + (a^2+z_0^2)^{\frac{1}{2}}\right\}}$$

* میدان یک نیمکرهٔ توخالی در فاصلهٔ z از آن



$$\vec{E} = E_z\hat{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(2^{\frac{1}{2}}-1\right) = 0.207\,\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



مخروط ناقص روبه‌رو با توزیع سطحی σ_0 موجود است میدان الکتریکی را در نقطهٔ O حساب کنید

حلقه $E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qz}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow dE_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\,dq}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

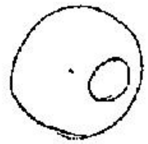
$r = z\,\mathrm{tg}\,\theta_0$

$dq = 2\pi r\sigma_0\,dz$

$= 2\pi z\sigma_0\,\mathrm{tg}\,\theta_0\,dz$

$$\Rightarrow E_0 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{z\,2\pi\sigma_0\, z\, tg\theta_0\, dz}{z^3\,[1+tg^2\theta_0]^{3/2}} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\sin\theta_0\cos^2\theta_0\int_{h_1}^{h_2}\frac{dz}{z}$$

$$= \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\sin\theta_0\cos^2\theta_0\,\ln\frac{h_2}{h_1}$$

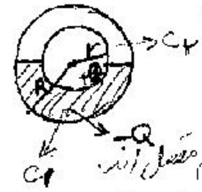


* کره‌ای رسانا با چگالی بار ρ دارای حفره‌ای است (سوال فایل)

در جزوه حل شده

* خازن کروی مطابق شکل که قسمت پایین آن با دی‌الکتریک به ضریب k تا نصف پر شده است موجود است. بار روی سطح کره کوچک $+Q$ و کره بزرگ $-Q$ است.

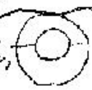
میدان را در داخل دی‌الکتریک و خلاء بیابید. از اعوجاج خطوط میدان الکتریکی در سطح کره‌ها صرف نظر کنید.



 و  را دو خازن موازی می‌گیریم زیرا دو لبه دو جوشن  به هم متصل اند.

$$\boxed{\text{ظرفیت خازن کروی}\quad C = 4\pi k\varepsilon_0\,\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}}$$

(طریقه بدست آوردن): $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{-\int E\,dr} = \frac{Q}{-\int_a^b \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dr} = 4\pi k\varepsilon_0\,\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$ (k ضریب دی‌الکتریک)

 خازن کروی

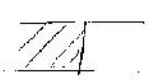
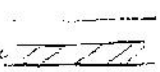
حال نیم‌کره‌ها ظرفیت خازن نیم‌کروی که نصف ظرفیت خازن کروی است داریم:

ظرفیت خازن نیم‌کروی $C_1 = 2\pi k\varepsilon_0\,\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} \Rightarrow C_2 = 2\pi\varepsilon_0\,\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

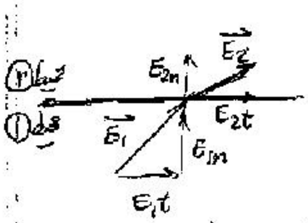
$C_{کل} = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}(k+1)$

* میدان در داخل و خارج دی‌الکتریک بین دو کره یکسان است زیرا چون میدان الکتریکی پایستار است اگر ما از کره اول به (دوم) بعدی چه از خلاء و چه از دی‌الکتریک برویم مقدار $\Delta\varphi = \Delta V$ یکی خواهد بود

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 \Rightarrow \int_a^b E_1\,dr = \int_a^b E_2\,dr \Rightarrow \int_a^b (E_1-E_2)\,dr = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

در خازن  هم میدان‌ها مساوی‌اند اما در  در دی‌الکتریک میدان تضعیف می‌شود.

نکات مهم

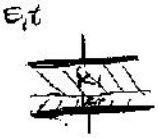


سطح با چگالی سطحی σ

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}_{1t} &= \vec{E}_{2t}\\ E_{2n}-E_{1n} &= \sigma\end{aligned}\right\}\ \text{همواره}$$

اگر هر دو محیط دی‌الکتریک باشند: $D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow k_1E_{1n} = k_2E_{2n}$

یعنی اگر E ها بصورت عمودی باشند: $k_1E_1 = k_2E_2$



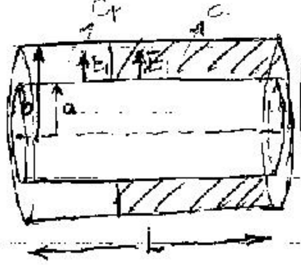
مانند خازن

بارها روی سطح مرزی ... میدان فضای خالی و دی‌الکتریک ... مساوی نیست ...

$$\oint_{\text{کره}} \vec{D}\cdot\vec{da} = Q \Rightarrow \int_{\text{نیمکره پایینی}} D_1\,da + \int_{\text{نیمکره بالایی}} D_2\,da = Q$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{K\epsilon_0 E}_{D_1} 2\pi r^2}_{Q_1} + \underbrace{\underbrace{\epsilon_0 E}_{D_2} \underbrace{2\pi r^2}_{\int da}}_{Q_2} = Q \Rightarrow E = \frac{Q}{(k+1)\epsilon_0 2\pi r^2}$$

مثال: خازن استوانه‌ای در اختیار داریم به طول l و فاصله دو جوشن $(b-a)$، دی‌الکتریک k به صورت زیر تا فاصله z در آن قرار داده شده بود (شعاع داخلی a و شعاع خارجی b بود). بار Q روی سطوح قرار دارد.
۱) ظرفیت خازن ۲) اختلاف پتانسیل بین دو جوشن ۳) انرژی ذخیره شده در خازن را حساب کنید



ظرفیت خازن استوانه‌ای $\boxed{C = \frac{2\pi\epsilon_0 kl}{\ln\frac{b}{a}}}$

روش اول: $C = \frac{Q}{\Delta\phi}$ $\quad \Delta\phi = \int E\,d\rho = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\rho h k\epsilon_0}\,d\rho =$

$$= \frac{Q}{2\pi k\epsilon_0 h}\ln\frac{b}{a} \Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 k h}{\ln\frac{b}{a}}$$

$$\Rightarrow C_{کل} = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0 k z}{\ln\frac{b}{a}} + \frac{2\pi\epsilon_0 (l-z)}{\ln\frac{b}{a}}$$

روش دوم: میدان E در فاصله ρ ... سطح گاوسی استوانه‌ای به شعاع ρ و طول l ... $\overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{E_2} = E$

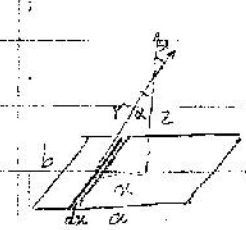
$$\Rightarrow \oint D\cdot da = Q \Rightarrow \underbrace{D_1\int da}_{Q_1} + \underbrace{D_2\int da}_{Q_2} = Q \Rightarrow k\epsilon_0 E(2\pi\rho z) + \epsilon_0 E(2\pi\rho)(l-z) = Q$$

$$\Rightarrow E = \ldots$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = -\int_a^b E(\rho)\,d\rho = \ldots \qquad \text{(روش دوم)}: \Delta\phi = \frac{Q}{C}$$

انرژی ذخیره شده در خازن $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

صفحه‌ای به طول a و عرض b وجود دارد، میدان را در فاصله z از مرکز ثقل آن بیابید.



$$dE(P) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 z}\;\frac{\hat{k}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\cos\alpha$$

$$dq = \sigma\,ds = \sigma\, b\, dx$$

(روش دوم): $\Phi(z) = k\int \frac{dq}{r} = k\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}\frac{\sigma\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \ldots$

$$E(z) = \frac{d\Phi(z)}{dz} = \ldots$$

* سیستمی با انرژی داخلی U را در نظر می‌گیریم. اگر از خارج انرژی ΔE_{ext} به سیستم تزریق کنیم، بنا به اصل بقای انرژی داریم: $\Delta U = \Delta E_{ext}$ (تغییر انرژی داخلی سیستم = انرژی تزریق شده از خارج)

در مبحث الکتروستاتیک ΔE_{ext} می‌تواند ناشی از دو عامل باشد، یکی کار نیروی مکانیکی $\Delta W_{ext.m}$ و دیگری انرژی تأمین شده توسط منبع خارجی مثل باتری ΔE_b. در این صورت رابطهٔ بالا به صورت زیر درخواهد آمد.

$$\Delta U = \Delta W_{ext.m} + \Delta W_b$$

اگر $F_{ext.m}$ را نیرویی تعریف کنیم که در جابجایی $\vec{\Delta r}$ کار $\Delta W_{ext.m}$ را انجام دهد داریم:

$$\Delta W_{ext.m} = \vec{F}_{ext.m} \cdot \vec{\Delta r}$$

اگر نیروی $F_{ext.m}$ به گونه‌ای باشد که همواره با نیروی الکتریکی داخل سیستم در حال تعادل باشد، یعنی $F_{ext.m}$ درست برابر نیروی الکتریکی $\vec{F}_{el}$ ولی در خلاف جهت آن باشد، در این صورت رابطه به صورت زیر درمی‌آید:

$$\Delta U = -F_{el} \cdot \Delta r + \Delta W_b$$

در ادامه هدف، یافتن $\vec{F}_{el}$ می‌باشد، با توجه به مسائل مطرح در این درس به دنبال این هدف، در اینجا دو حالت را در نظر می‌گیریم

1) سیستم منزوی است: منزوی بودن به معنی آن است که سیستم انرژی را از خارج دریافت نمی‌کند.

$$\Rightarrow \Delta U = -F_{el} \cdot \Delta r$$

در مبحث آنالیز برداری می‌توان نشان داد که اگر $\vec{\Delta r} \to$ در این صورت:

$$\Rightarrow \vec{F}_{el} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

مثلاً برای یک مثال ساده

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 A}x \rightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 A}$$

2) سیستم منزوی نیست: در این حالت مسئله را حل می‌کنیم، نقش انرژی منبع خارجی، نگه‌داشتن پتانسیل تک تک عناصر سیستم است. در این حالت فقط بار روی عناصر تغییر می‌کند.

N = تعداد عناصر سیستم

$$\Delta W_b = \sum_{m=1}^{N} \phi_m \Delta Q_m$$

قبلاً اثبات کردیم که انرژی پتانسیل الکتریکی سیستمی که دارای بار عنصر Q_m و پتانسیل عنصر m-ام ϕ_m است از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} \phi_m Q_m \underset{\phi_m = cte}{\Longrightarrow} \Delta U = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} \phi_m \Delta Q_m$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} \phi_m \Delta Q_m = \vec{F}_{el} \cdot \vec{\Delta r}$$

فرق آن با سیستم منزوی در یک منفی است.

$$\Rightarrow \vec{F}_{el} = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

مثال: در خازن روبه‌رو به هر صفحه چه نیرویی وارد می‌شود؟

۱) اگر سیستم منزوی باشد
$$U=W(z) \qquad U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2 z}{k\varepsilon_0 A} \Rightarrow F_z=-\frac{dU}{dz}=-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{k\varepsilon_0 A}$$

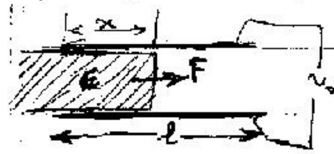
۲) « « « باشد

$$U=\frac{1}{2}CV_0^2=\frac{1}{2}\frac{k\varepsilon_0 A}{z}V_0^2 \Rightarrow F_z=+\frac{dU}{dz}=-\frac{1}{2}\frac{k\varepsilon_0 A}{z^2}V_0^2$$
$$\Rightarrow F_z=-\frac{1}{2}k\varepsilon_0 A\frac{Q^2}{C^2}=-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{k\varepsilon_0 A}$$

([illegible])

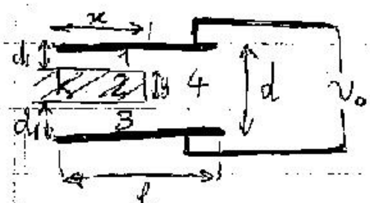
[illegible]

مثال: خازنی با صفحات موازی مفروض است. فاصله میان آنها برابر d و دی‌الکتریکی مطابق شکل میان آن وارد شده. نیروی وارده بر دی‌الکتریک چقدر است؟ ابعاد هر صفحه خازن طول l و عرض w و صفحات به اختلاف پتانسیل ثابتی متصل هستند.



$$C=\frac{\varepsilon x w}{d}+\frac{\varepsilon_0(l-x)w}{d}=\frac{xw}{d}(\varepsilon-\varepsilon_0)+\frac{lw\varepsilon_0}{d}$$
$$\Rightarrow U_{sys}=\frac{1}{2}CV_0^2 \Rightarrow F=\frac{dU}{dx}=\frac{w}{2d}(\varepsilon-\varepsilon_0)V_0^2$$

* خازنی با ظرفیت C که به ولتاژ ثابت V_0 وصل شده مفروض است. طول آن l و عرض w و فاصله دو صفحه آن d فرض شود. اگر دی‌الکتریک k مطابق شکل در آن قرار گیرد: الف) تغییر نسبی بار خازن ب) جهت و مقدار نیروی وارد بر دی‌الکتریک ج) در موارد ۱، ۲، ۳ و ۴ بردارهای $\vec{d}$، $\vec{P}$ و $\vec{E}$ را بدست آورید.



$$\frac{\Delta Q}{Q_1}=\frac{Q_2-Q_1}{Q_1}=\frac{C_2-C_1}{C_1}$$

$$C_1=\varepsilon_0\frac{lw}{d}, \quad C_2=\frac{\varepsilon_0(l-x)w}{d}+\left(\frac{d_1}{\varepsilon_0 xw}+\frac{y}{k\varepsilon_0 xw}+\frac{d_2}{\varepsilon_0 xw}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow C_2-C_1=\frac{k\varepsilon_0 xw}{kd_1+kd_2+y}-\frac{\varepsilon_0 w}{d}$$ قسمت اول حل شد

$$W=\frac{1}{2}C_2V_0^2=\frac{1}{2}\left[\frac{k\varepsilon_0 xw}{k(d-y)+y}+\frac{\varepsilon_0(l-x)w}{d}\right]V_0^2$$

چون دی‌الکتریک می‌تواند به سمت بالا و پایین و به سمت جلو یا عقب حرکت کند

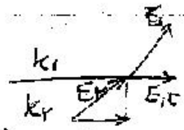
نیروی عمودی رو به بالا $=\frac{\partial W}{\partial d_1}=0$

« « پایین $=\frac{\partial W}{\partial d_2}=0$

نیروی افقی $=\frac{1}{2}\left[\frac{k\varepsilon_0 w}{\sim}-\frac{\varepsilon_0 w}{d}\right]V_0^2$

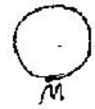
ج) برای یافتن $\vec{D}$ و $\vec{P}$ از $\vec{E}$ استفاده می‌کنیم

ن

$\vec{E_{1t}}=\vec{E_{2t}}$  یعنی ؛ به خاطر پیوستگی مؤلفه‌های مماسی میدان

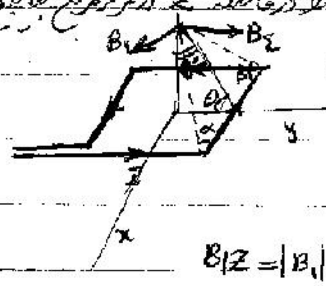
در خارج هم از قسمتی که به اندازه ۲ و ۳ برابر می‌رویم تا E_{2t} چون $\vec{E}$ دقیقاً مماس بر این سطح است پس:

* پتانسیل الکتریکی را در نقطه p بدست آورید.

برای یک حلقه ϕ را حساب می‌کنیم $d\phi=\frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$ 

و سپس سطح را تقسیم به این حلقه‌ها کرده انتگرال‌گیری حل می‌کنیم

قاب مربع شکلی به ضلع a دارای جریان I می‌باشد میدان مغناطیسی ناشی از جریان را در فاصله z از مرکز مربع بیابید.



می‌دانیم $B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}(\cos\alpha+\cos\beta)$ و $R=\sqrt{z^2+\frac{a^2}{4}}$

$$\cos\alpha=\cos\beta=\frac{a}{2\sqrt{R^2+\frac{a^2}{4}}}=\frac{a}{2\sqrt{z^2+\frac{a^2}{2}}}$$

مؤلفه‌های افقی همدیگر را خنثی می‌کنند. $B_{1z}=|B_1|\cos\theta=|B_1|\sin\theta'=|B_1|\frac{a}{2\sqrt{z^2+\frac{a^2}{4}}}$

$$|B_1|=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{\sqrt{z^2+\frac{a^2}{4}}}\left(\frac{a}{\sqrt{z^2+\frac{a^2}{2}}}\right)=\ldots$$

$$B_{1z}=B_{4z}=B_{3z}=B_{2z}\Rightarrow B_t=4B_{1z}=\ldots$$

۷/۵

کلاس حل تمرین فیزیک II ــ یکشنبه ــ [illegible]

* در فضا باری با چگالی $\rho=(\frac{8}{\pi})e^{-4r}\sin\theta\cos^2\varphi$ وجود دارد مقدار بار را حساب کنید

$$Q=\int \rho\, dv=\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{8}{\pi})\,e^{-4r}\sin\theta\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi=\dots$$

* باری داخل کره‌ای به شعاع a با چگالی $\rho=\rho_0\frac{r^2}{a^2}$ $(r\leq a)$ وجود دارد میدان داخل و خارج کره چقدر است؟

گوس $\Phi=\oint E_1\cdot ds=\frac{q}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_1\cdot 4\pi r^2=\rho_0\frac{r^5}{5a^2}(4\pi)\times\frac{1}{\varepsilon_0}$

$$Q=\int_0^r\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\rho_0\frac{r^2}{a^2}\cdot r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi=\rho_0\frac{r^5}{5a^2}(4\pi)$$

$$\Rightarrow E_1=\frac{\rho_0 r^3}{5a^2\varepsilon_0}\hat{a}_r$$

خارج کره: $E_2\cdot 4\pi r^2=\rho_0\frac{a^3}{5\varepsilon_0}(4\pi)\Rightarrow E_2=\rho_0\frac{a}{5\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r$

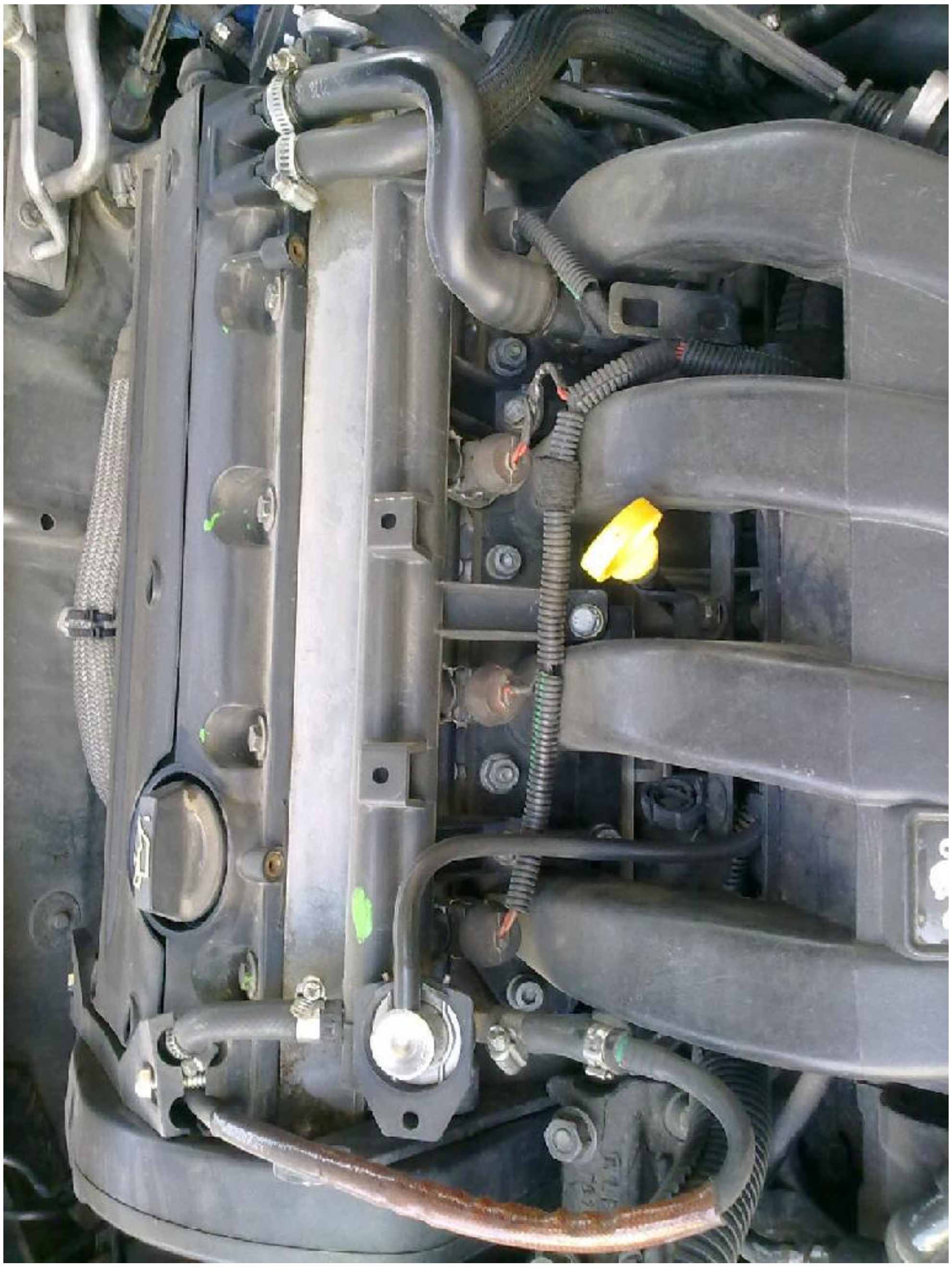
* در فضا بار الکتریکی در کره‌ای به شعاع a با چگالی $\rho=\rho_0(\frac{r}{a})$ که $(r\leq a)$ است قرار دارد. پتانسیل را در مبدأ حساب کنید.

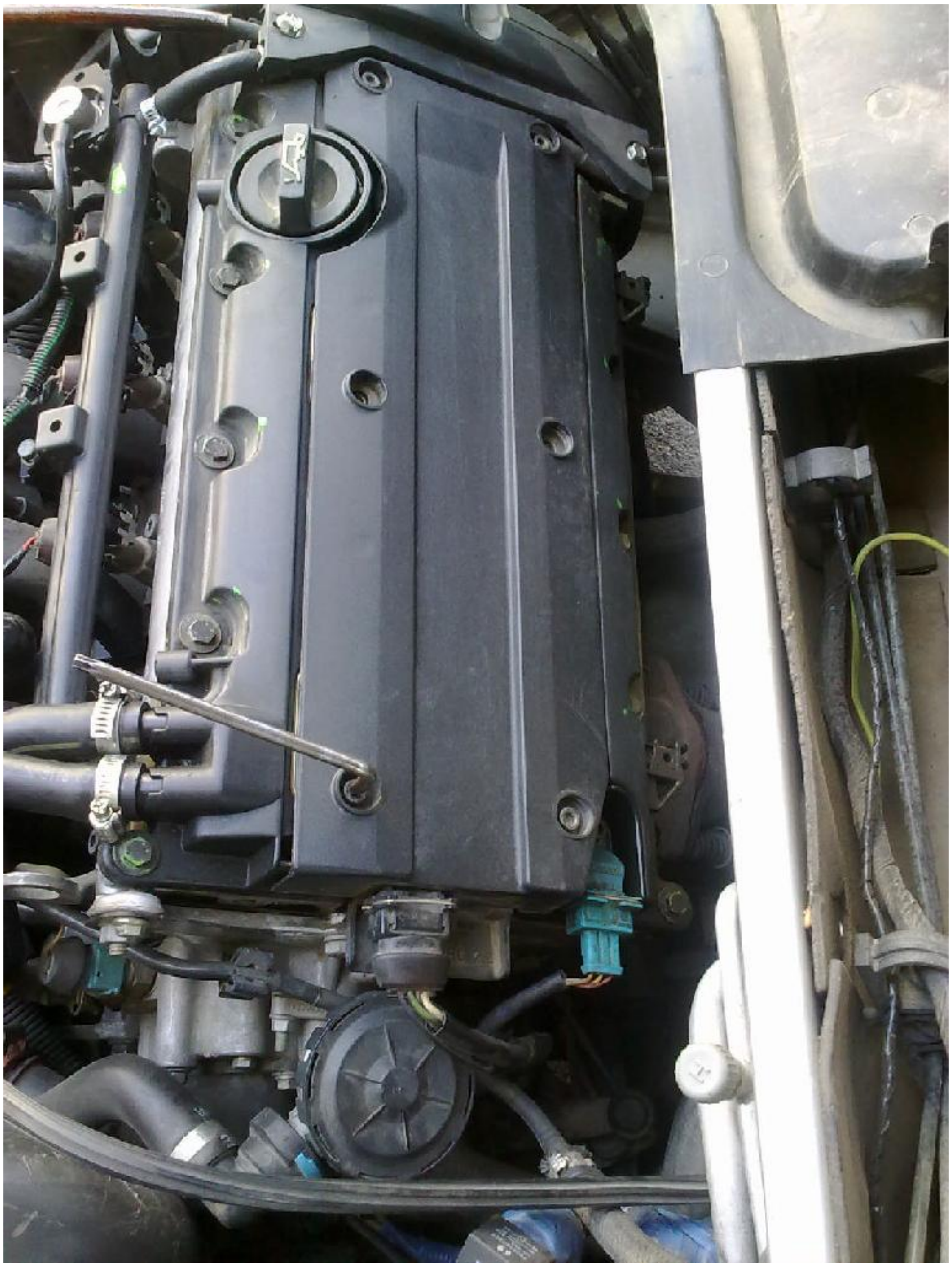
$V=\int\frac{\rho\, dv'}{4\pi|R-R'|}$ $\quad R=0\ ,\ R'=r'\hat{a}_r$

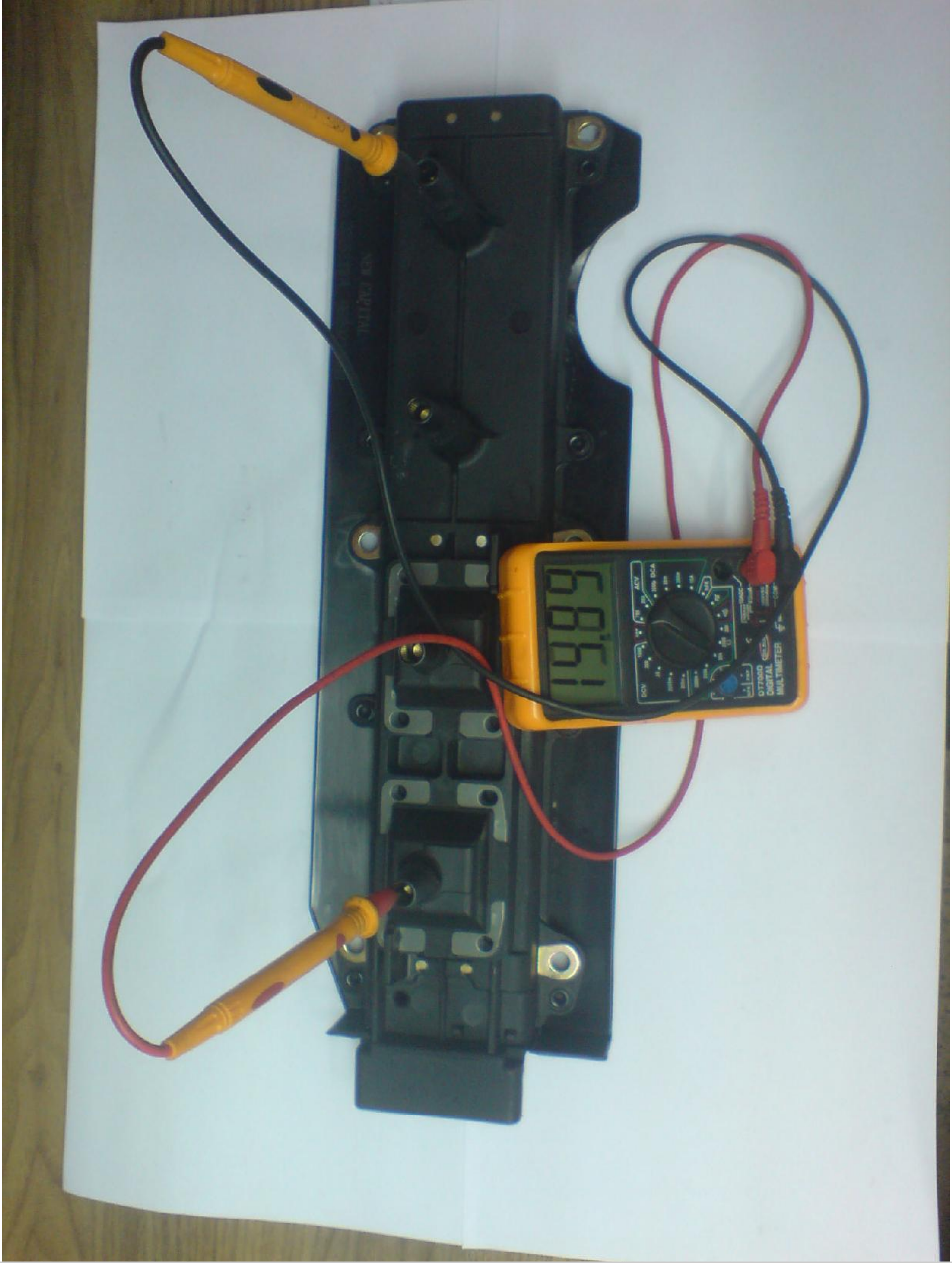
$dv'=r'^2\sin\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi'$ $\quad\Rightarrow\frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0}=V$

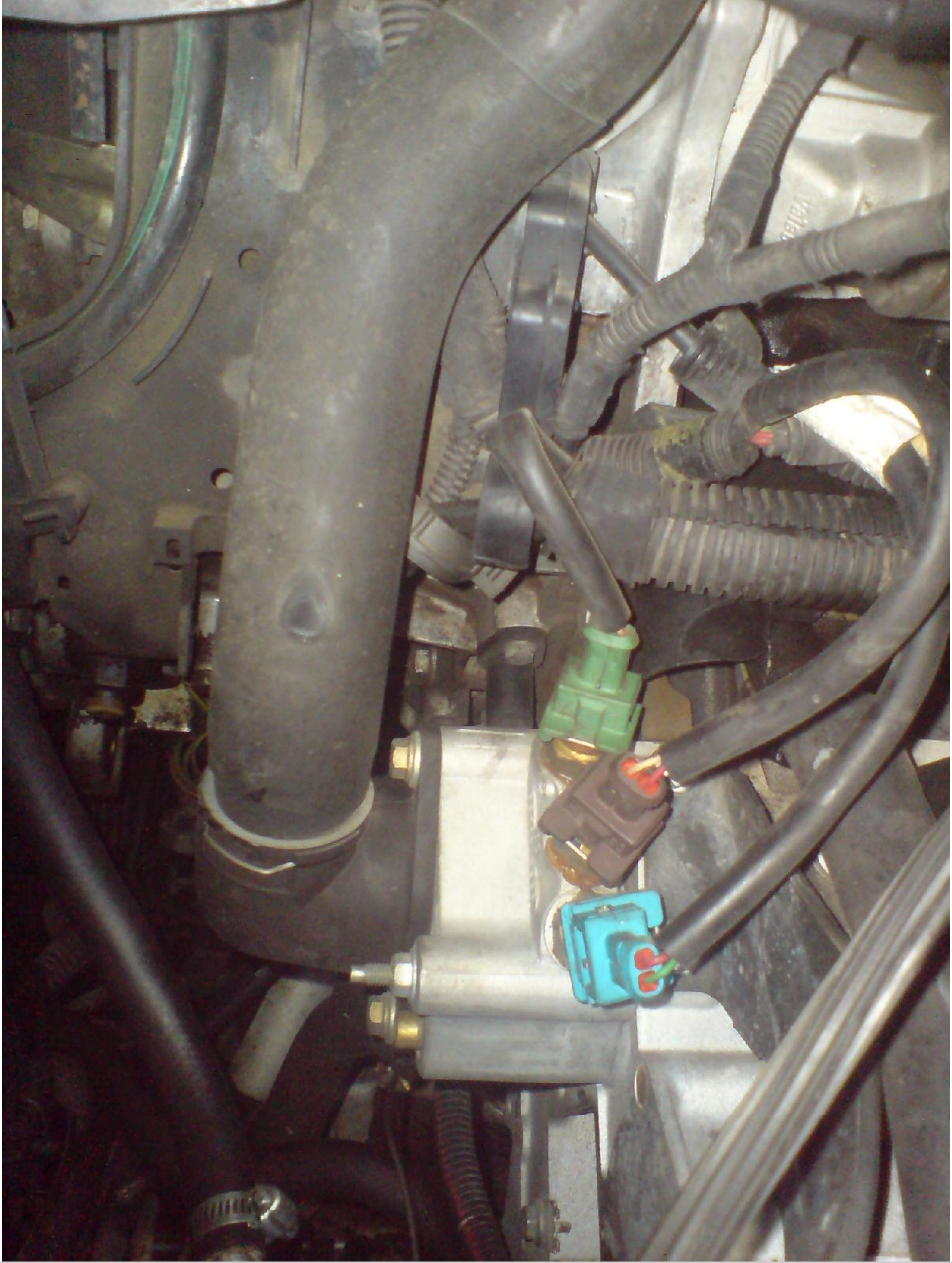
*

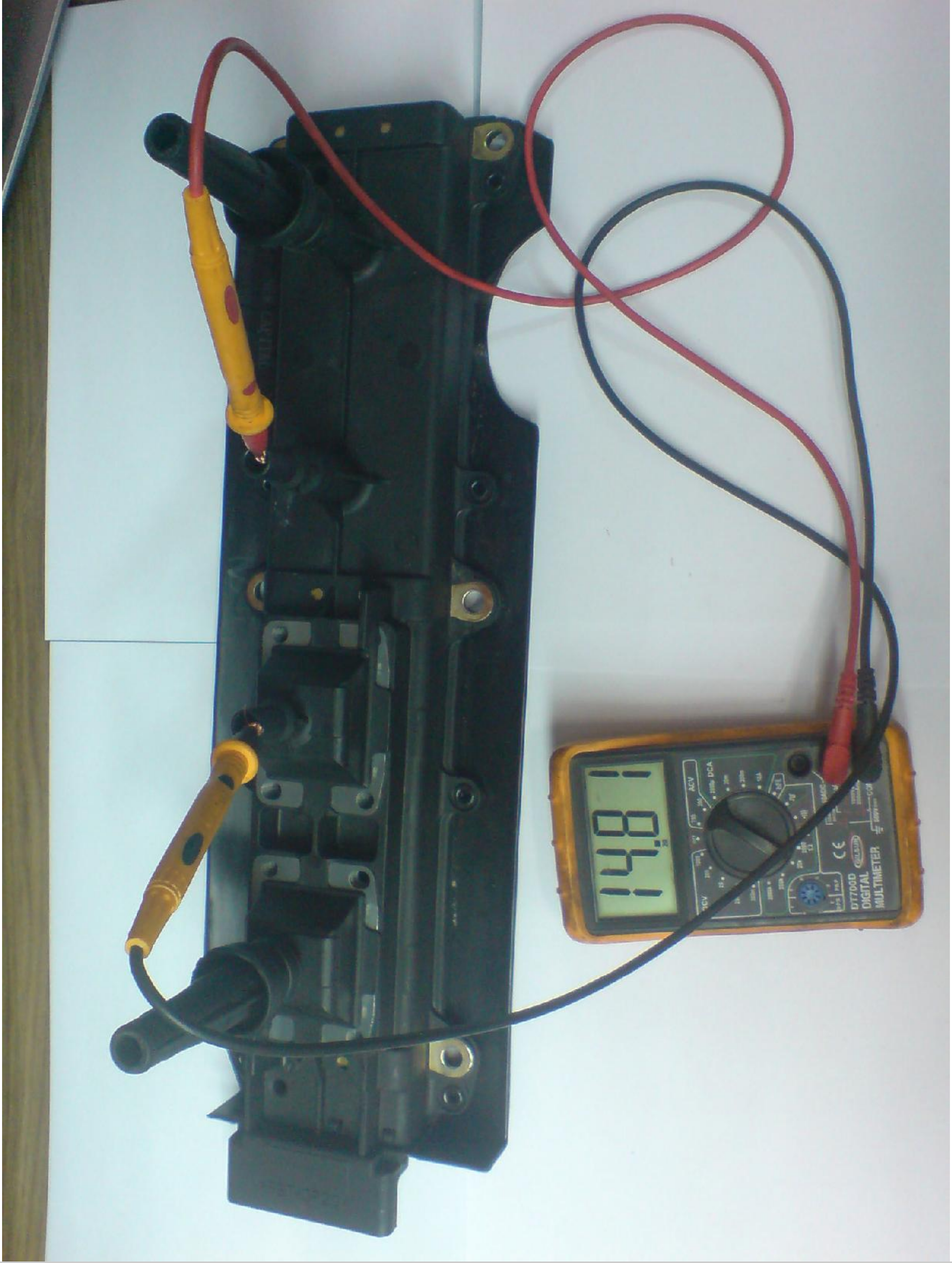
[illegible]






DIGITAL
MULTIMETER




DT700D
DIGITAL
MULTIMETER


DT700D
DIGITAL
MULTIMETER

15.7
DCV
ACV
DCA
OFF
hFE
10ADC
VΩmA
COM
GILSUN
DT700D
DIGITAL
MULTIMETER