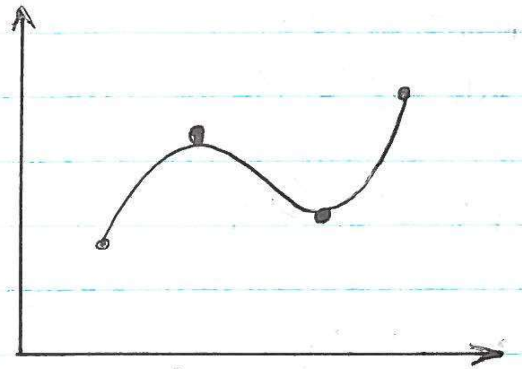
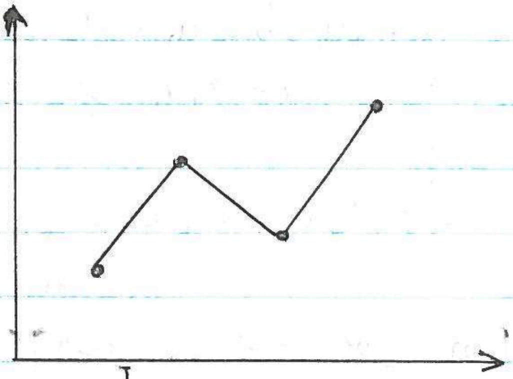
برای رسم بهترین درجه n ام برای بحث ما با روش Polynomial Regrassion معمولاً برای داده های آزمایشگاهی به کار می رود. با در نظر گرفتن خطاها مقدار آنها را به حداقل می رسانیم. در مقایسه با Regrassion در این نقاط هیچگونه خطایی ندارد. آن موقع می بایست یک رفتاری را تخمین بزنیم و روی آن هیچ خطایی نداریم و اگر رفتار f را با ϕ تخمین بزنیم f و ϕ می بایست باهم برابر باشند که در این حالت از Linear Interpolation استفاده می کنیم بدین ترتیب که بین هر ۲ نقطه یک خط راست رسم می کنیم اگر ۲ نقطه خط درجه یک و چنانچه n نقطه داشته باشیم منحنی درجه $(n-1)$ رسم می کنیم. تفاوت Regrasion و Interpolation در زیر نشان داده شده:



Regrassion

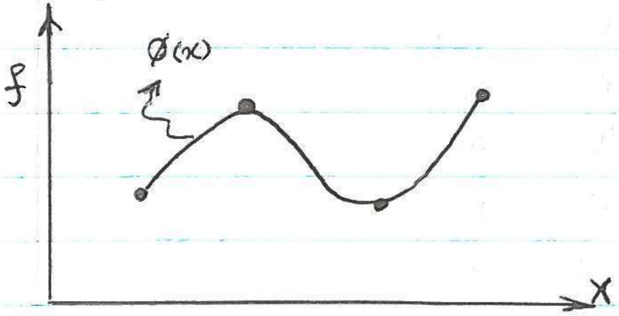


Interpolation

کار دیگری که می توانیم انجام دهیم این است که بین هر ۳ نقطه منحنی درجه ۲ و الی تا نقطه $n+1$ که منحنی درجه n رسم می کنیم. به این کار برای منحنی درجه دوم quadratic و منحنی درجه سوم cubic و ... دیگر روی نقاط هیچ خطایی نداریم. عملیات Regrassion بر روی ماشین حساب انجام می گردد ولی در عملیات Interpolation می بایست به صورت زیر عمل بکنیم:

$$f(x) = \phi(x) + \underbrace{R(x)}_{\text{خطا}} \qquad \underbrace{R(x)=0 \qquad x=x_i \qquad i=0,1,2,\dots,n}_{\text{بر روی نقاط}}$$

پیرامون $R(x)$ هیچ اطلاعی نداریم و از رفتار آن نیز بی خبر هستیم اما با تخمین زدن چند جمله ای به صورت زیر است:



نمودار روبرو نمودار $\phi(x)$ است که فقط نقاط را داریم و از روی آن می خواهیم تخمین بزنیم و از روی آن $f(x)$ را بدست بیاوریم که برای $f'(x)$ داریم:

$$f'(x) = \phi_n'(x) + R'(x)$$

در رابطه بالا $R'(x)$ ما دیگر صفر نیست. این خطاها به تعداد درجات منحنی و تعداد نقاط و اندازه فواصل بستگی دارد. انتخاب ما به طور کلی به صورتهای زیر است:

الف) از چند جمله ای درجه بالا حساب می کنیم که فرمول پیچیده ایجاد می نماید

ب) فاصله نقاط بر روی منحنی را تا حد ممکن کوچک در نظر می گیریم.

از رابطهٔ $f(x)$ انتگرال گیری می کنیم و داریم:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} \phi_n(x)\,dx + \underline{\underline{E}} \quad \boxed{\text{خطا:} \ \int_{x_0}^{x_n} R(x)\,dx = E}$$

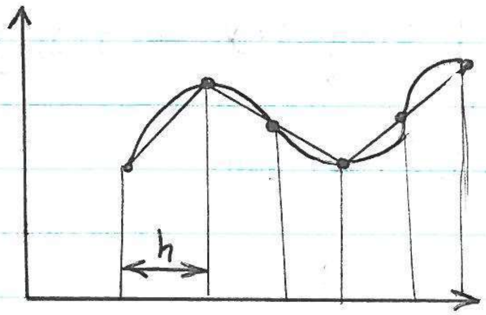
ما انتظار داریم که درجه خطا از انتگرال گیری، از مشتق گیری بیشتر باشد. وقتی سطح منحنی را بدست آوریم باعث می شود درجه خطا بیشتر شود. اگر درجه خطا ۵ باشد با نصف کردن فاصله مقدار خطا ما $\frac{1}{۳۲}$ می گردد:

$$h^{۵} \xrightarrow{\text{فاصله را نصف می کنیم}} \left(\frac{h}{۲}\right)^{۵} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{۳۲}(h)^{۵}$$

اگر بین هر ۲ نقطه بر روی منحنی خط راست رسم کنیم، آنگاه بین این ۲ نقطه فرمول خط را بدست می آوریم و a_0 و a_1 که درست آمد مشتق گیری را هم بدست می آوریم. اگر Interpolation خطی را انجام بدهیم داریم:

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \qquad \text{forward فرمول ۲ نقطه ای}$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \qquad \text{Backward فرمول ۲ نقطه ای}$$



در موارد خاص که می خواهیم بررسی کنیم داریم equally Spaced point داریم:

forward فرمول ۲ نقطه ای $\quad h = x_{i+1} - x_i$

اگر سه نقطه داشته باشیم، فرمولهای ۳ نقطه ای ما به صورت زیر در می آید:

پسرو: $\quad f_i \quad f_{i+1} \quad f_{i+۲} \longrightarrow f_i' = \frac{1}{۲h}\left[-۳f_i + ۴f_{i+1} - f_{۲}\right]$

مرکزی: $\quad f_{i-1} \quad f_i \quad f_{i+1} \longrightarrow f_i' = \frac{1}{۲h}\left[-f_{i-1} + f_{i+1}\right]$

پیشرو: $\quad f_{i-۲} \quad f_{i-1} \quad f_i \longrightarrow f_i' = \frac{1}{۲h}\left[f_{i-۲} - ۴f_{i-1} + ۳f_i\right]$

اگر از ۲ نقطه خط راست رسم کنیم و سطح زیر منحنی را در نظر بگیریم داریم:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{۲}\left(f_0 + f_1\right) \qquad \text{(مشتق گیری به روش دو نقطه ای)}$$

اگر از ۳ نقطه منحنی درجه دوم را بدست آوریم، آنگاه سطح زیر منحنی x_1 و $x_۲$ را بدست بیاوریم داریم:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{۳}\left[f_0 + ۴f_1 + ۲f_۲ + \dots + ۲f_{n-۲} + ۴f_{n-1} + f_n\right] \qquad \left(\text{مشتق گیری سیمپسون } \tfrac{1}{۳}\right)$$

(ضرایب جملات اول و آخر یک / ضرایب جملات فرد ۴ / ضرایب جملات زوج ۲)

تذکر ← انواع انتگرال گیری های عددی به طور خلاصه در صفحه ۲۱ آورده شده است *

هدف نهایی که ما به دنبال آن هستیم رسیدن به یکسری رابطه هایی برای مشتق گیری و یکسری انتگرال گیری بود می توانیم سطح زیر نمودار را محاسبه کنیم. به عنوان مثال وقتی $f(x)$ داشته باشیم می توانیم مقدارها را بین a و b را حساب کنیم.

بین a و b نقاط کافیست به ازای step های مختلف تعیین مقدار کنیم، برای $f(x)$ داریم:

$$f'(x)\Big|_{x=x_i} = \frac{f_{i+h} - f_{i-h}}{2h}$$

مثال:

فرض کنیم معادله دیفرانسیلی با شرایط مرزی به صورت زیر داریم. مقدار $f(x)=x_n$ داریم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = y' \qquad \text{شرط اولیه :} \quad x = x_0 \qquad y = y_0$$

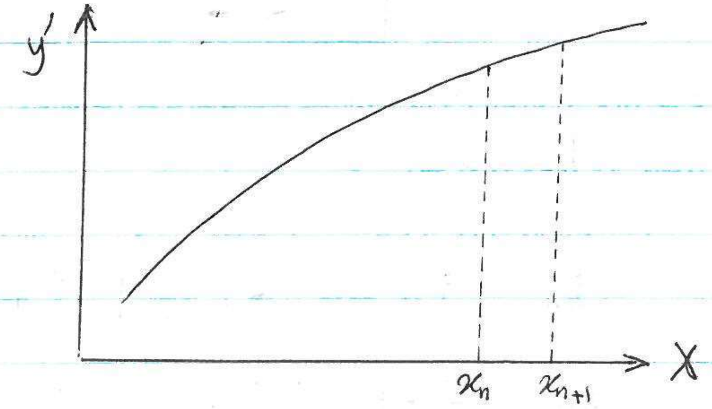
$\boxed{\text{حل}}$

$$\int_{y_0}^{y_1} dy = \int_{x_0}^{x_1} y'dx \Longrightarrow y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} y'dx \Longrightarrow y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} y'dx$$

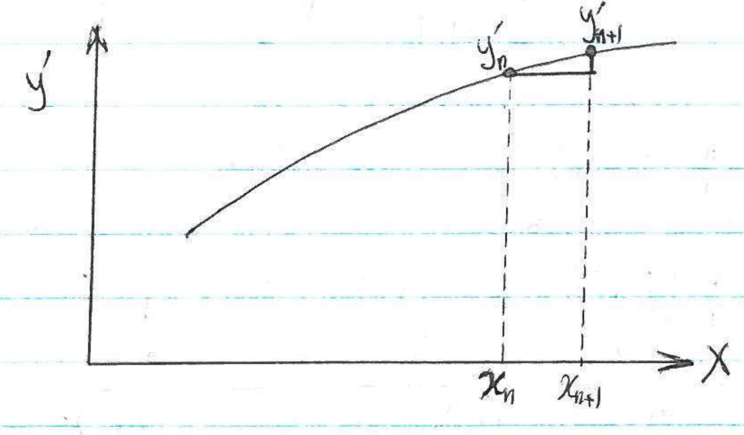
از فرمول بالا انتگرال گیری می کنیم و یک مرحله به جلو می رویم و دفعه بعد انجام می دهیم تا در نهایت به عبارت زیر می رسیم:

$$y_{n+1} = y_n + \int y'dx$$

کاری که ما می خواهیم انجام بدهیم بر روی نمودار زیر نمایش داده شده است:



حالا برای حال ساده ترین حالتی که می توانیم در نظر بگیریم این است که y' را مقدار ثابت در نظر بگیریم:



قانون اویلر:

$$y_{n+1} = y_n + y'_n h$$

حال برای بهتر شدن سطح زیر منحنی از قانون ذوزنقه‌ای [انتگرال گیری] استفاده می کنیم و به اویلر اصلاح شده می رسیم:

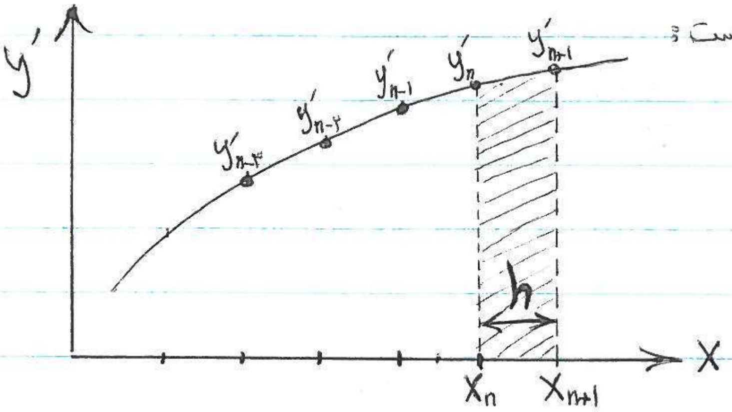
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(y'_n + y'_{n+1}\right) \quad \text{اویلر اصلاح شده}$$

برای حل اویلر اصلاح شده داریم:

$$y'_n = f(x_n , y_n) \qquad\qquad y'_{n+1} = f(x_{n+1} , y^*_{n+1})$$

همانطور که مشاهده می کنید y^*_{n+1} برای ما مجهول است. که برای همین می بایست با روش اویلر معمولی y^*_{n+1} را حساب کنیم. y^*_{n+1} در واقع روش پیشگو است که با بدست آوردن آن یک مقدار حدس اولیه را پیشگویی کرده ایم. به ازاء مقدار پیشگویی شده و آن مقدار عبارتست از y^*_{n+1} و از آن برای محاسبهٔ y_{n+1} اصلی استفاده می کنند.

فرمولهای انتگرال گیری را که می خواهیم حساب کنیم می بایست در کجا استفاده کنیم را در نمودار زیر نشان داده ایم در این رابطه برای ما f نامشخص است:



فرمولهای انتگرال گیری را که داریم می خواهیم برای بدست آوردن سطح زیر نمودار استفاده کنیم. با استفاده از آن در روشهای مختلف برای بدست آوردن انتگرال زیر سطح استفاده می کنیم. همچنین اگر نقاط قبلی را داشته باشیم یک چند جمله ای بدست می آید که با انتگرال گیری از آن می کنیم. کار دیگری که ما انجام می دهیم این است که بین ۲ نقطه n و $n+1$ تعداد بیشماری نقطه در نظر می گیریم و در فواصل خاص مقدار آن را حساب می کنیم و سطح زیر نمودار بدست می آید. روش دیگر رانگ کوتا است که فقط از نقاط حال استفاده می کند. روند کلی استفاده از فرمولهای انتگرال گیری به صورت زیر است:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = y' \longrightarrow \int_{y_0}^{y_1} dy = \int_{x_0}^{x_1} y'\,dx$$

* رانگ-کوتا:

← روش رانگ-کوتا مرتبه ۳:

$$k_1 = hf(x_i , y_i)$$
$$k_۲ = hf\left(x_i + \frac{h}{۲} , y_i + \frac{k_1}{۲}\right)$$
$$k_۳ = hf(x_i + h , y_i + ۲k_۲ - k_1)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{۶}\left(k_1 + ۴k_۲ + k_۳\right)$$

← روش رانگ-کوتا مرتبه ۴:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{۶}\left(k_1 + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴\right)$$
$$k_1 = hf(x_i , y_i)$$
$$k_۲ = hf\left(x_i + \frac{h}{۲} , y_i + \frac{k_1}{۲}\right)$$
$$k_۳ = hf\left(x_i + \frac{h}{۲} , y_i + \frac{k_۲}{۲}\right)$$
$$k_۴ = hf(x_i + h , y_i + k_۳)$$

مثال : فرض کنید معادله روبرو را با شرایط مرزی زیر داریم، برای بدست آوردن جواب معادله به صورت زیر عمل می کنیم :

$$7\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+x+y=0 \qquad \begin{cases} X=X_1 & y=y_1=a \\ X=X_n & y=y_n=b \end{cases}$$

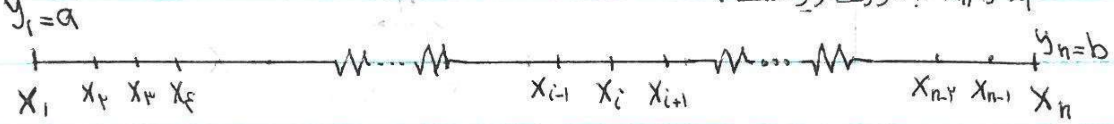
حل) همانطور که در فرمول مشتق گیری بدست آوردیم اگر از فرمول ۳ نقطه ای استفاده کنیم داریم :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}$$ مشتق درجه اول

اگر کارهای گفته شده را انجام دهیم و فرمول درجه اول را بدست آوریم با آن فرمولهای مشتق درجه دوم را هم می توانیم محاسبه کنیم :

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_i}=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}$$ مشتق درجه دوم

برای حل معادلات فوق اگر ۲ شرط داشته باشیم که یکی شرط اولیه و دیگری شرط مرزی است. با توجه به شرایط مرزی x_1 تا x_n به صورت زیر است :



y_i مجهولات ما $\qquad i=1,2,\dots,n \longrightarrow$ n-۲ مجهول داریم

برای بدست آوردن آن n-۲ معادله داریم که برای نقطه i داریم :

$$X=X_i \longrightarrow 7\left[\frac{y_{i+1}-2y_i+2y_{i-1}}{h^2}\right]+4\left[\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right]+X_i+y_i=0$$

$$y_{i-1}\underbrace{\left[\frac{7}{h^2}-\frac{2}{h}\right]}_{A}+y_i\underbrace{\left[1-\frac{14}{h^2}\right]}_{B}+y_{i+1}\underbrace{\left[\frac{2}{h}+\frac{7}{h^2}\right]}_{C}=-X_i$$

اگر رابطه را در نقطه شماره x_2 بنویسیم مقدار A برای ما مشخص است و برای آن ۲ نقطه مجهول داریم. برای نقطه x_{n-1} نیز C ما مشخص است و در آن صورت داریم :

$$i=3,\dots,n-2 \qquad Ay_{i-1}+By_i+Cy_{i+1}=-X_i$$

$$\longrightarrow i=2 \longrightarrow By_i+Cy_{i+1}=-X_i-Aa$$

$$\longrightarrow i=n-1 \longrightarrow Ay_{i-1}+By_i=-X_i-Cb$$

به عبارت دیگر ما یک ماتریس ۳ قطری به صورت زیر بدست می آوریم :

$$\begin{bmatrix} A & C & & & \\ A & B & C & & \\ & A & B & C & \\ & \ddots & A & B & C \\ & & & A & B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X_2-Aa \\ -X_3 \\ \vdots \\ -X_{n-2} \\ -X_{n-1}-Cb \end{bmatrix}$$

ماتریسی که در صفحه قبل بدست آمده را می بایست حل کنیم. دلیل ۳ قطری شدن و خطی شدن رابطه به خاطر خطی بودن معادله است و فرمولهای مورد استفاده فرمولهای ۳ نقطه ای هستند و دیگر اینکه شرایط مرزی ما در ۲ نقطه تعریف می شود. شرط مرزی ما نیز خطی است. اگر به عنوان مثال در یکی از شرایط مرزی رابطه مشتق داشته باشیم (مثل شرط مرزی برای انتقال حرارت برای دیواره عایق که داریم $x=L \rightarrow \frac{dT}{dx}=0$) آنگاه معادله ما خطی نخواهد شده

به طور کلی ما برای حل این مساله کارهای زیر را انجام داده ایم:

① مقادیر A و B و C را با کمک روابط مشتق عددی و فاکتور گیری بدست می آوریم.

② با استفاده از شرایط مرزی معادله اصلی را بدست می آوریم.

③ برای معادله بدست آمده ماتریس تشکیل می دهیم.

④ با کمک روش محاسبه توماس ماتریس بدست آمده در مرحله قبل را برای رسیدن به جواب حل می نماییم.

Interpolation :

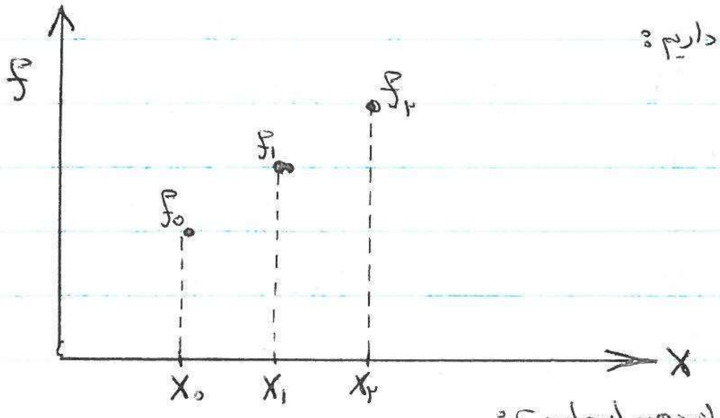
ما کاری که می خواهیم انجام دهیم بدین ترتیب است که به ازاء مقادیر مختلف x ما $f(x)$ داریم و با آن چند جمله ای رسم می کنیم و داریم:

$$f(x) = \phi_n(x) + R(x)$$

ما راجع به $R(x)$ می دانیم که بر روی نقطه ها صفر است و به اندازهٔ h بستگی دارد. ما یکسری نقاط داریم و کاری که می خواهیم انجام دهیم برای نقاط هم فاصله انجام می دهیم و داریم:

$$h = x_{i+1} - x_i$$

ما ضرایب چند جمله ای را حساب می کنیم و اگر ۲ نقطه درجه یک، از ۳ نقطه درجه ۲ و همچنین از n نقطه درجه $n-1$ خواهیم داشت و بر روی نمودار داریم:



ما کاری که می خواهیم انجام دهیم این است:

$\phi_n(x)$ را به صورت روبرو حساب کنیم:

$$\phi_n(x) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2^2$$

در آن صورت f_0 ما به صورت روبرو در خواهد آمد:

$$f_0 = b_0 + b_1 x_0 + b_2 x_0^2$$

معادله دوم برای x_1 به صورت روبرو خواهد شد:

$$f_1 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_1^2$$

معادله سوم برای x_2 به صورت روبرو در می آید:

$$f_2 = b_0 + b_1 x_2 + b_2 x_2^2$$

با انجام ماتریس ضرایب b_0 و b_1 و b_2 بدست می آید. وقتی که b_0 و b_1 و b_2 بدست بیاید. این روابط چون خیلی سخت و طولانی است بنابراین آن را انجام نمی دهیم و ما به چند جمله ای نیوتون می رسیم که برای محاسبه آن می بایست ابتدا چند جمله ای $\phi_n(x)$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{matrix} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{matrix}$$

$$\phi_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\dots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

آنگاه ضرایب ما در این روش مقدار ثابت و x و x^2 و ... بدست می آید و برای این روش فقط یک معادله بدست می آید و کار ما خیلی ساده می شود اگر $x=x_0$ درنظر بگیریم و داریم:

$$x=x_0 \longrightarrow \phi(x_0)=f_0=a_0 \qquad \boxed{a_0=f_0}$$

$$x=x_1 \longrightarrow \phi(x_1)=f_1=a_0+a_1(x_1-x_0)=f_0+a_1h$$

$$\boxed{a_1=\frac{f_1-f_0}{1!\,h}=\frac{\Delta f_0}{h}} \longleftarrow \Delta$$

اپراتور خطا

Δ برای ما اپراتور خطا است که داریم:

$$\left.\begin{aligned} \Delta f_i&=f_{i+1}-f_i \\ \Delta f_0&=f_1-f_0 \end{aligned}\right\} \text{forward difference}$$

ما می بایست این اپراتورها را تعریف کنیم که داریم:

$$\Delta^2 f_0=\Delta.\Delta f_0=\Delta(f_1-f_0)=\Delta f_1-\Delta f_0=(f_2-f_1)-(f_1-f_0)$$

$$x=x_2 \longrightarrow \phi(x_2)=f_2=a_0+a_1\underbrace{(x_2-x_0)}_{2h}+a_2\underbrace{(x_2-x_0)}_{2h}\underbrace{(x_2-x_1)}_{h}$$

$$f_2=a_0+2a_1h+a_2 2h^2 \Longrightarrow f_2=f_0+2(f_1-f_0)+a_2 2h^2$$

$$\boxed{a_0=f_0} \quad \boxed{a_1=\frac{f_1-f_0}{1!\,h}=\frac{\Delta f_0}{h}}$$

$$=f_0+2f_1-2f_0+a_2 2h^2$$

$$=2f_1-f_0+a_2 2h^2$$

$$=\underbrace{(f_2-f_1)}_{\Delta f_1}-\underbrace{(f_1-f_0)}_{\Delta f_0}=a_2 2h^2$$

$$f_2=\Delta f_1-\Delta f_0=a_2 2h^2 \Longleftarrow$$

$$\Delta(f_1-f_0)=a_2 2h^2$$

$$\Delta^2 f_0=a_2 2h^2 \Longrightarrow \boxed{a_2=\frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2}}$$

برای مقادیر بعدی نیز کاری مشابه بالا انجام می دهیم و خواهیم داشت:

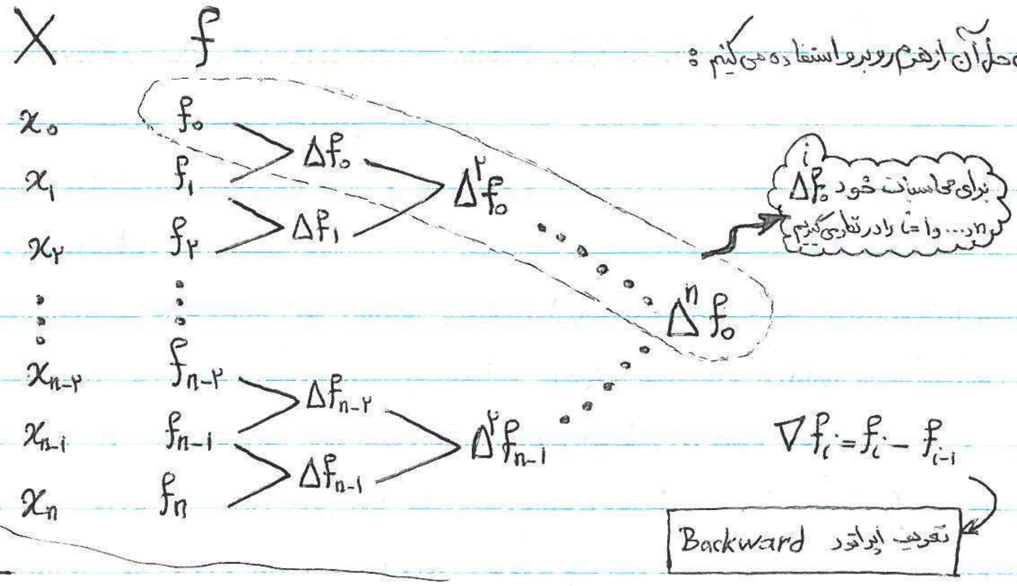
$$x=x_3 \longrightarrow a_3=\frac{\Delta^3 f_0}{3!\,h^3}$$

$$x=x_4 \longrightarrow a_4=\frac{\Delta^4 f_0}{4!\,h^4}$$

$$\vdots$$

$$x=x_n \longrightarrow a_n=\frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n}$$

حال برای حل آن از هرم روبرو استفاده می کنیم :



$$\nabla f_i = f_i - f_{i-۱}$$

$\boxed{\text{Backward}}$ تعریف اپراتور

x	f
۰	۲
۱	۸
۲	۱۱
۳	۷

مثال اگر ما جدولی به صورت روبرو در اختیار داشته باشیم مطلوبست : $f(۲,۶۹) = ?$

حل برای حل دستگاه ابتدا هرم را تشکیل می دهیم :

x	f
۰	۲ ← $f_۰$
۱	۸
۲	۱۱
۳	۷

$\Delta f_۰ = ۸ - ۲ = ۶$

$\Delta f_۱ = ۱۱ - ۸ = ۳$

$\Delta f_۲ = ۷ - ۱۱ = -۴$

$\Delta^۲ f_۰ = ۳ - ۶ = -۳$

$\Delta^۲ f_۱ = (-۴) - ۳ = -۷$

$\Delta^۳ f_۰ = (-۷) - (-۳) = -۴$

$\boxed{h = ۱}$

حال مقادیر $a_۰$ و $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم :

$$a_۰ = f_۰ = ۲ \ / \ a_۱ = \frac{\Delta f_۰}{۱!\,h} = ۶ \ / \ a_۲ = \frac{\Delta^۲ f_۰}{۲!\,h^۲} = \frac{۹}{۲} \ / \ a_۳ = \frac{\Delta^۳ f_۰}{۳!\,h^۳} = \frac{-۴}{۶} = -\frac{۲}{۳}$$

باکمک مقادیر a که در بالا بدست آمد تابع $\phi_۳(x)$ را به صورت زیر بدست می آوریم :

$$\phi(x) = a_۰ + a_۱(x - x_۰) + a_۲(x - x_۰)(x - x_۱) + a_۳(x - x_۰)(x - x_۱)(x - x_۲)$$

$$\phi(x) = ۲ + ۶(x - ۰) + \frac{۹}{۲}(x - ۰)(x - ۱) - \frac{۲}{۳}(x - ۰)(x - ۱)(x - ۲)$$

$$\phi(x) = ۱۲x^۳ - ۱۱۷x^۲ - ۱۴x - ۳۶ = ۰$$

در معادله ای که در بالا بدست آمد عدد ۲,۶۹ را قرار می دهیم و داریم : $\phi(x) = \checkmark$

با محاسبه $\phi(x)$ ما به موارد زیر خواهیم رسید :

① اولین کاری که انجام می دهیم Interpolation (میان یابی) است.

② بعد از بدست آوردن چند جمله ای مقدار مشتق f_i' را بدست می آوریم ،

③ همچنین مقدار انتگرال به صورت $\int_{x_۰}^{x_n} f(x)\,dx$ بدست می آید.

فرمولهای مشتق گیری :

به ازای مقادیر مختلفی از x ما $f(x)$ را داریم و روابط آن را حدس می زنیم که برای این کار معمولاً از روشهای زیر استفاده می کنیم :

Regrassion ①

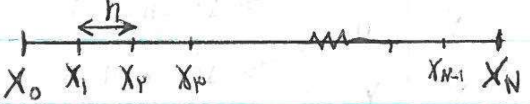
Interpolation ②

برای داده های هم فاصله از ϕ استفاده می کنیم که از روی آن $R(x)$ بدست می آید. $R(x)$ بیانگر خطا ها می باشد. بعد از بدست آوردن رفتار چندجمله‌ای $\phi(x)$ می توان انتگرال گیری و مشتق گیری عددی را برای آن اعمال کرد. مشتق گیری معمولاً بین ۲ نقطه، ۳ نقطه و ... صورت می گیرد.

برای مشتق گرفتن معمولاً اگر از ۲ نقطه استفاده کنیم، معادله درجه اول، اگر از ۳ نقطه استفاده کنیم معادله درجه دوم و ... و اگر از $n+1$ نقطه استفاده کنیم، معادله درجه n اُم بدست می آید. در آن صورت ضرایب مجهول ما عبارت خواهد شد از a_0 و a_1 و a_2 و ... و a_n که برای محاسبه آن می بایست از n معادله n مجهول استفاده کنیم. برای انجام این کار می بایست وقت زیادی را صرف کنیم. از اینرو ما از جدول تفاوت ها استفاده می کنیم. برای استفاده از این جدول از یکسری اپراتور استفاده می کنند به آنها « linear Simble Operation » گفته می شوند. در زیر این اپراتورها و چگونگی آن نمایش داده شده است : (توجه : شمارنده نقطه اول صفر می باشد)

$$X_{i+1} - X_i = h$$

$$X_i = X_0 + ih$$



با توجه به شکل و روابطی که در بالا مشاهده می کنید برای نقاط مختلف جدول زیر را می توان تعیین کرد :

X	x_0	x_1	x_2	...	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
f	f_0	f_1	f_2	...	f_{n-2}	f_{n-1}	f_n

با جدولی که در بالا بدست آمد روابط را براساس سه نقطه و درجه معادله درجه دوم بدست می آوریم که با تعریف یکسری اپراتور بدست آوردن این روابط راحت است :

Operator	Name	Difinition
E	Shift	$E f(x) = f(x+h)$ $E f_i = f_{i+1}$
Δ	forward difference	$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$
∇	Backward difference	$\nabla f_i = f_i - f_{i+1}$

ادامه جدول اپراتورها در صفحه بعد

Operator	Name	Diffinition
δ	Central difference	$\delta f_i = f_{i+\frac{۱}{۲}} - f_{i-\frac{۱}{۲}}$
μ	Avarage difference	$\mu f_i = \frac{۱}{۲}\left[f_{i+\frac{۱}{۲}} - f_{i-\frac{۱}{۲}}\right]$
D	Differential Operator	$Df(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ $Df_i = f'_i$
I	Integral Operator	$If(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx$

اپراتورهایی که در صفحه قبل بیان شده است از پرکاربردترین اپراتورهای ریاضی می باشند. به طور کلی تمامی اپراتورهای مورد نیاز ما در این جدول معرفی شده است. این اپراتورها دارای ویژگیها و خصوصیاتی می باشند که این خصوصیات عبارتند از:

① نحوه استفاده از اپراتورها به ترتیب از سمت راست می باشد:

$$\Delta D f(x) = \Delta f'(x)$$ (اول اپراتور D و بعد Δ مورد استفاده قرار می گیرد)

$$= f'(x+h) - f'(x)$$

$$\Delta D f_i = \Delta f'_i = f'_{i+1} - f'_i \qquad f_i \longrightarrow f(x)\Big|_{x=x_i}$$

$$E^n f(x) = f(x+nh) \xRightarrow{\text{به طور کلی}} E^\alpha f(x) = f(x+\alpha h)$$

$$\underbrace{EE\cdots EE}_{\text{تا } n} f(x) = \underbrace{EE\cdots E}_{n-1} f(x+h) = \cdots = E f(x+(n-1)h) = f(x+nh)$$

اگر ترکیبی از اپراتورها را بخواهیم استفاده کنیم قوانین جبری برای آن صادق است. اگر $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ هرکدام از اپراتورها باشند، داریم:

① $A_۱ + A_۲ = A_۲ + A_۱$

② $A_۱ A_۲ = A_۲ A_۱$

③ $A_۱ + (A_۲ + A_۳) = (A_۱ + A_۲) + A_۳$

④ $A_۱ (A_۲ A_۳) = (A_۱ A_۲) A_۳$

⑤ $A_۱ (A_۲ + A_۳) = A_۱ A_۲ + A_۱ A_۳$

⑥ $E^n D f(x) = E^n f'(x) = f(x+nh) = DE^n f(x) \Longrightarrow E^n D = DE^n$

یکسری روابطی هم برای اپراتور تعریف می کنند که از آنها خیلی استفاده می شود. این روابط عبارتند از:

① $\Delta = E - 1 = E\nabla$

اثبات: $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \Longleftarrow \boxed{Ef(x) = f(x+h)}$

$$= Ef(x) - f(x) \Longrightarrow \Delta f(x) = (E-1) f(x)$$

$$E\nabla f(x) = E\left[f(x) - f(x-h)\right]$$

$$= f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)$$

② $\nabla = 1 - E^{-1}$

اثبات: $(1-E^{-1}) f(x) = f(x) - E^{-1} f(x)$

$$= f(x) - f(x-h) = \nabla f(x)$$

③ $\delta = E^{1/۲} - E^{-1/۲}$

اثبات: $E^{1/۲} f(x) - E^{-\frac{1}{۲}} f(x) = f(x+\frac{1}{۲}) - f(x-\frac{1}{۲}) \Longleftarrow$

$$= \delta f(x)$$

طبق تعریف برای δ داریم:
$\delta f_i = \delta f_{i+\frac{1}{۲}} - \delta f_{i-\frac{1}{۲}}$

④ $\delta^{۲} = \Delta - \nabla$

اثبات: $\delta^{۲} f(x) = \left[f(x+\frac{1}{۲}) - f(x-\frac{1}{۲})\right]^{۲}$

$$= f^{۲}(x+\frac{1}{۲}) + f^{۲}(x-\frac{1}{۲}) - ۲f(x)$$

$$= f(x+1) + f(x-1) - ۲f(x)$$

$$= \left[f(x+1) - f(x)\right] - \left[f(x) - f(x-h)\right]$$

$$= \Delta f(x) - \nabla f(x)$$

⑤ $ID = \Delta$

اثبات: $ID\,f(x) = I\,\frac{df(x)}{dx} = \int_{x}^{x+h} \frac{df(x)}{dx} = f(x+h) - f(x)$

$$= \Delta f(x)$$

⑥ $E = e^{hD}$

اثبات این رابطه در صفحه بعد آمده است

اثبات :

برای اثبات این رابطه از بسط تیلور به صورت زیر استفاده می کنیم :

$$f(x+h)= f(x) + f'(x)\left((x+h)-x\right) + f''(x)\frac{\left((x+h)-x\right)^{۲}}{۲!} + f'''(x)\frac{\left((x+h)-x\right)^{۳}}{۳!} + \cdots$$

$$= f(x) + Df(x)\,h + D^{۲}f(x)\frac{h^{۲}}{۲!} + D^{۳}f(x)\frac{h^{۳}}{۳!} + \cdots$$

h ← اختلاف x و x+h است

D ← اپراتور دیفرانسیل است

$$E f(x) = \underbrace{\left[1 + hD + \frac{(hD)^{۲}}{۲!} + \frac{(hD)^{۳}}{۳!} + \cdots\right]}_{e^{hD}} f(x) = e^{hD} f(x)$$

یادآوری

با کمک بسط مک لوران می توان تابع نمایی $f(x)=e^{a}$ را به صورت زیر بسط داد :

$$e^{a} = 1 + a + \frac{a^{۲}}{۲!} + \frac{a^{۳}}{۳!} + \cdots + \frac{a^{n}}{n!} \qquad n=۰,۱,\ldots,+\infty$$

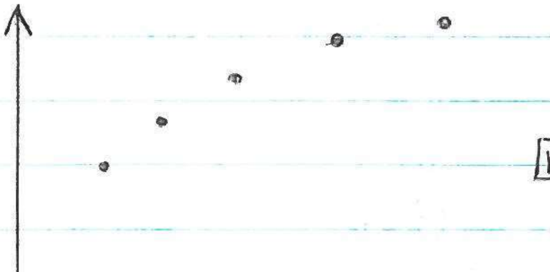
در ادامه ما برای محاسبات مشتق عددی نیازمند سری « binomial » هستیم که عبارت است از :

$$(a+b)^{r} = \binom{r}{۰}a^{r} + \binom{r}{۱}a^{r-۱}b + \binom{r}{۲}a^{r-۲}b^{۲} + \cdots + \binom{r}{r}b^{r}$$

در رابطه بالا عملیات داخل پرانتز به صورت روبرو است :

$$\binom{r}{k} = \frac{r!}{k!\,(r-k)!} = \frac{r(r-۱)(r-۲)\cdots(r-k+۱)}{k!}$$

با این تعاریف که در بالا گفته شد، هدف ما این است که اگر تعدادی نقطه هم فاصله داشته باشیم و برای آنها چند جمله ای تقریب کنیم، داریم :



$$f(x) = \phi_{n}(x) + R(x)$$

$$\boxed{n=۳} \rightarrow \phi_{n}(x) = b_{۰} + b_{۱}x + b_{۲}x^{۲} + b_{۳}x^{۳}$$

با ضرایب $b_{۰}$ و $b_{۱}$ و $b_{۲}$ و $b_{۳}$ که در بالا مشخص شد می خواهیم نمودار هرمی تشکیل بدهیم و با استفاده از آن معادله را حساب کنیم. حال ما می خواهیم چند جمله ای ها را بدست آوریم و برای $\phi_{n}(x)$ ما به صورت زیر عمل می کنیم :

$$\phi_{n}(x) = a_{۰} + a_{۱}(x-x_{۰}) + a_{۲}(x-x_{۰})(x-x_{۱}) + \cdots$$

رابطه بالا با کمک جدول هرمی محاسبه می گردد. و برای انتگرال گیری و مشتق گیری از آنها استفاده می کنیم

که به آن چند جمله ای نیوتون Newton's Interpolating polynomial گفته می شود.

برای نوشتن چند جمله ای نیوتون ۲ سری فرمول مورد استفاده قرار می گیرد:

① فرمول پیشرو نیوتون Newton's forward formola (NFF)

② فرمول پسرو نیوتون Newton's Backward formola (NBF)

برای فرمولهای پیشرو از عملگر Δ و برای فرمولهای پسرو با عملگر ∇ استفاده می کنیم. ابتدا برای پیشرو روابط خود را می نویسیم که داریم:

$$\Delta = E - 1 \longrightarrow E = \Delta + 1$$

$$E^{\alpha} = (1+\Delta)^{\alpha} \longrightarrow$$ با سری binomial این رابطه را بسط می دهیم

$$E^{\alpha} = (1+\Delta)^{\alpha} = 1 + \alpha\Delta + \frac{\alpha(\alpha-1)}{۲!}\Delta^{۲} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-۲)}{۳!}\Delta^{۳} + \dots$$

نقطه اول ما، نقطه (۰) و نقطه آخر (N) است. اگر ما n نقطه داشته باشیم:

$$E^{\alpha} \cdot f(x) \Big|_{x=x_0} = E^{\alpha} f(x_0)$$

برای وقتی که $\alpha=n$ باشد و تعداد نقاط $n+1$ است در این مورد خاص داریم:

$$E^{\alpha} f(x) \Big|_{x=x_0} = E^{\alpha} f(x_0) = f(x_0 + \alpha h) = f(x_0 + nh) = (\text{binomial سری})$$

$$\boxed{\alpha = n}$$

$$f(x_0+nh) = \left[1 + \alpha\Delta + \frac{\alpha(\alpha-1)}{۲!}\Delta^{۲} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-۲)}{۳!}\Delta^{۳} + \dots + \frac{(\alpha(\alpha-1)(\alpha-۲)\dots(\alpha-n-1))\Delta n}{n!}\right] f(x_0)$$

برای جایی که $(\alpha=n)$ است است این چند جمله‌ای ادامه می یابد و بعد از آن قطع می گردد. حال رابطه‌ای که در بالا برای $f(x_0+\alpha h)$ نوشتیم به ازای مقادیر مختلف α درستی آن را بررسی می کنیم:

$\alpha = 0 \rightarrow$ در این حالت تمامی جملات حذف و رابطه ما درست می گردد

$$\alpha = 1 \longrightarrow f_1 = (1+\Delta)f_0 = f_0 + \Delta f_0$$

رابطه درست است $$f_1 = f_0 + (f_1 - f_0)$$

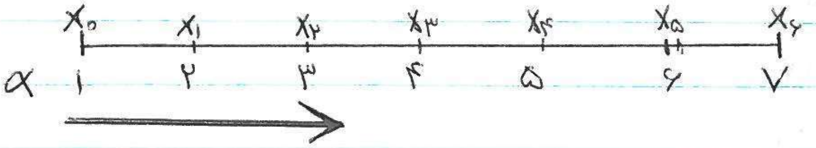
$$\alpha = ۲ \longrightarrow f_۲ = f_0 + ۲\Delta f_0 + \frac{1}{۲}\Delta^{۲} f_0 = f_0 + ۲(f_1 - f_0) + \frac{1}{۲}(\Delta f_1 - \Delta f_0)$$

$$= f_0 + ۲(f_1 - f_0) + \frac{1}{۲}((f_۲ - f_1) - (f_1 - f_0))$$

پس از انجام روابط ریاضی مقدار $f_۲$ باقی می ماند و درستی رابطه را اثبات می کند ما بر روی نقاط هیچ خطایی نداریم و با کمک چند جمله ای نیوتون جدولی به صورت جدول روبرو رسم می کنیم:

α	x	f
۰	x_0	f_0
۱	x_1	f_1
۲	$x_۲$	$f_۲$
⋮	⋮	⋮
n	x_n	f_n

اگر ما درونیابی را انجام بدهیم و طبق نمودار زیر عمل کنیم ، جهت عمل ما در جدول مطابق جهت فلش است :



برای بدست آوردن x غیر صحیح به عنوان مثال $f(۳,۶)$ ابتدا مقدار α را به صورت زیر محاسبه می کنیم :

$$x=۳,۶ \qquad \alpha=\frac{X-X_۰}{h}=\frac{۳,۶-۱}{۱}=۲,۶$$

برای تعیین α با توجه به اینکه x ما کلاً صحیح نیست ما بینهایت جمله خواهیم داشت ، بنابراین برای رفع این مشکل بعد از اولین عدد صحیح پس از α که در اینجا (۳) است ، عبارت را قطع می کنیم . قطعاً یک مقدار خرده‌ای داریم که آن جزء خطاهای موجود در نظر می گیریم و آن را با $R(x)$ نمایش می دهیم که با این فرض داریم :

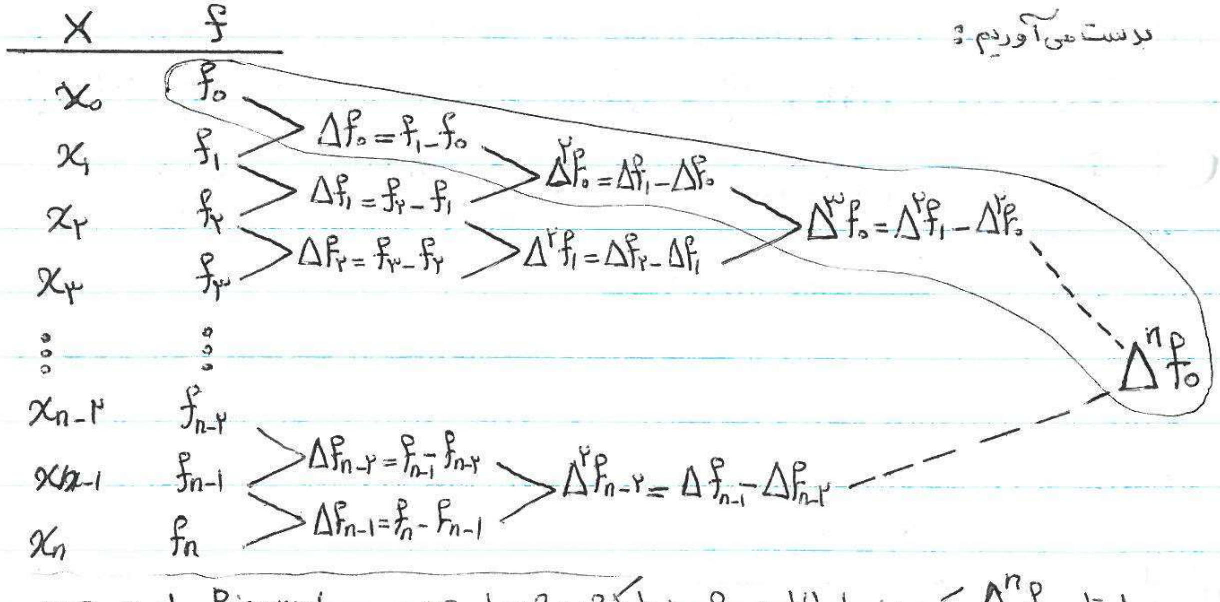
$$\alpha = \left\lfloor \frac{x-x_۰}{h} \right\rfloor +۱$$

یادآوری

علامت $\lfloor\ \rfloor$ که در بالا آمده است نامش براکت است و بیانگر جزء صحیح می باشد به عنوان مثال :

$$x=۲,۷۴۶ \longrightarrow \lfloor x \rfloor = ۲$$

وقتی α حساب شد ، با کمک نمودار هرمی مقادیر $f_۰$ و $\Delta f_۰$ و $\Delta^۲ f_۰$ و ... و $\Delta^n f_۰$ را به صورت زیر بدست می آوردیم :



با مقادیر $\Delta^n f_۰$ که در نمودار بالا دورش خط کشیده شده است ، سری Binomal را به صورت زیر تشکیل می دهیم :

$$f(x_۰+\alpha h)=f_۰+\alpha \Delta f_۰+\frac{\alpha(\alpha-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_۰+\frac{\alpha(\alpha-۱)(\alpha-۲)}{۳!}\Delta^۳ f_۰+\dots$$

مثال) مقدار $f(۳٫۶)$ را برای جدول روبرو حساب کنید:

x	f
$x_۰=۱$	۱۱
$x_۱=۲$	۳۶
$x_۲=۳$	۸۳
$x_۳=۴$	۱۵۸
$x_۴=۵$	۲۶۷

حل) در این مساله $n=۴$ و رابطه ما چندجمله‌ای درجه ۴ است.

این مساله با ۵ نقطه بدست می‌آید و $h=1$ می‌باشد بنابراین ابتدا مقدار α را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha=\frac{x-x_۰}{h}=\frac{۳٫۶-۱}{۱}=۲٫۶$$

پس از محاسبه α با کمک هرم زیر مقادیر $\Delta^n f_۰$ را بدست می‌آوریم:

x	f				
۱	$f_۰=۱۱$				
		$\Delta f_۰=۳۶-۱۱=۲۵$			
۲	۳۶		$\Delta^۲ f_۰=۴۷-۲۵=۲۲$		
		$\Delta f_۱=۸۳-۳۶=۴۷$		$\Delta^۳ f_۰=۲۸-۲۲=۶$	
۳	۸۳		$\Delta^۲ f_۱=۷۵-۴۷=۲۸$		$\Delta^۴ f_۰=۰$
		$\Delta f_۲=۱۵۸-۸۳=۷۵$		$\Delta^۳ f_۱=۳۴-۲۸=۶$	
۴	۱۵۸		$\Delta^۳ f_۲=۱۰۹-۷۵=۳۴$		
		$\Delta f_۳=۲۶۷-۱۵۸=۱۰۹$			
۵	۲۶۷				

با مقادیر $\Delta^n f_۰$ که در بالا دور آن خط کشیده شده است سری binomial به صورت زیر نوشته می‌شود:

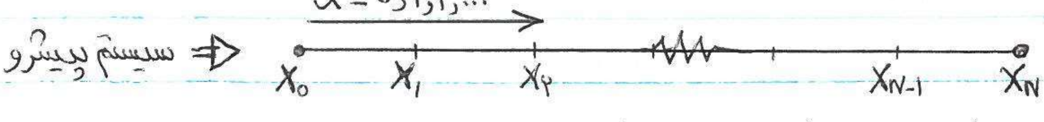
$$f(x_۰+\alpha h)=f_۰+\Delta f_۰+\frac{\alpha(\alpha-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_۰+\frac{\alpha(\alpha-۱)(\alpha-۲)}{۳!}\Delta^۳ f_۰+\frac{\alpha(\alpha-۱)(\alpha-۲)(\alpha-۳)}{۴!}\Delta^۴ f_۰$$

$$f(x_۰+\alpha h)=۱۱+\alpha(۲۵)+\frac{\alpha(\alpha-۱)}{۲!}(۶)+\frac{\alpha(\alpha-۱)(\alpha-۲)}{۳!}(۶)+\frac{\alpha(\alpha-۱)(\alpha-۲)(\alpha-۳)}{۴!}(۰)=$$

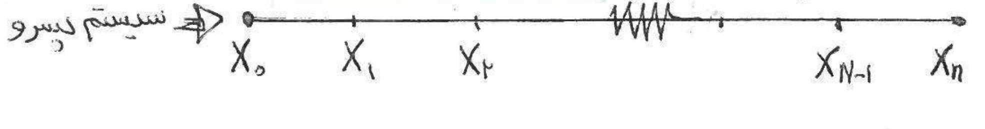
$$f(۳٫۶)=۱۲۴٫۲۵۶$$

آنچه گفته شد مشتق گیری با روش پیشرو بود، حال روابط خود را برمبنا سیستم پسرو می‌نویسیم.

در رابطه پیشرو ما نمودارمان را به صورت زیر بررسی می‌کردیم و مقادیر α ما همواره مثبت $(۰<\alpha)$ می‌شد:



اما در سیستم پسرو ما به مقدار منفی برای α می‌رسیم $(\alpha<۰)$:



دراین رابطه‌ها از ∇ استفاده می‌کنیم ولی نتایجی که حاصل می‌گردد فقط یک چند جمله‌ای درجه n است. با توجه به رابطه پسرو داریم:

$$\nabla = 1 - E^{-1}$$

$$= E^{-1} = 1 - \nabla \longrightarrow E^{\alpha} = (1-\nabla)^{-\alpha}$$

$$f(x_n + \alpha h) = E^{\alpha} f(x_n) = (1-\nabla)^{\alpha - 1} f(x)$$

با استفاده از سری binomial برای موارد تامی که $(\alpha = -n)$ بسط می‌دهیم و داریم:

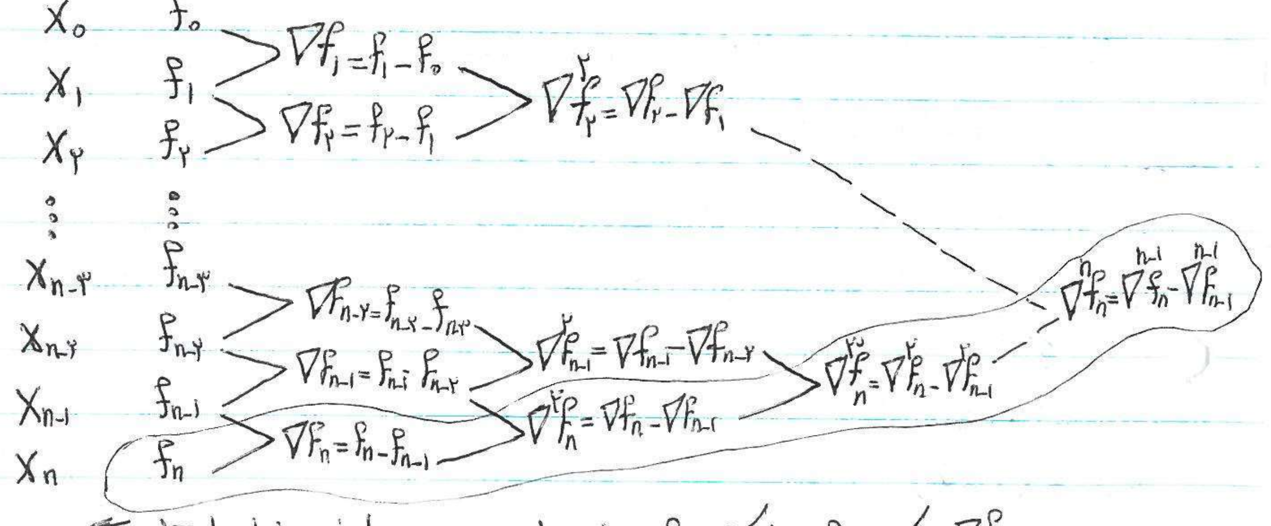
$$f(x_n + \alpha h) = (1-\Delta)^{-\alpha} f(x_n)$$

$$f(x_n + \alpha h) = \left[1 + \alpha \nabla + \frac{\alpha(\alpha+1)}{۲!} \nabla^{۲} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+۲)}{۳!} \nabla^{۳} + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+۲)\dots(\alpha+n-1)}{n!} \nabla^{n}\right] f(x_n) + R(x)$$

برای استفاده از روش پسرو برای تعریف α به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{x - x_n}{h} \longrightarrow x = x_n + \alpha h$$

ما برای استفاده از سری binomial که رابطه آن را در بالا نوشتیم نیازمند ∇f_n و $\nabla^{۲} f_n$ و ... و $\nabla^{n} f_n$ هستیم که برای این کار از نمودار هرمی زیر استفاده می‌کنیم:



مقادیر ∇f_n را که دورش خط کشیده شده برای محاسبه سری binomial استفاده می‌گردد.

مثال) مقدار $f(۳,۶)$ را برای جدول روبرو حساب کنید:

X	f
$x_0 = 1$	۱۱
$x_1 = ۲$	۳۶
$x_۲ = ۳$	۸۳
$x_۳ = ۴$	۱۵۸
$x_۴ = ۵$	۲۶۷

حل در این مساله $n=۴$ و رابطه ما برای چند جمله‌ای درجه ۴ است. این مساله با ۵ نقطه بدست می آید و $h=۱$ می باشد بنابرین مقدار α به صورت زیر حساب می شود:

$$\alpha=\frac{x-x_N}{h}=\frac{۳/۶-۵}{۱}=-۱/۴$$

پس از محاسبهٔ α با کمک هرم زیر مقادیر $\nabla^n f_n$ را بدست می آوریم:

X	f
۱	۱۱
۲	۳۶
۳	۸۳
۴	۱۵۸
۵	$f_۴=۲۶۷$

$\nabla f_۱=۳۶-۱۱=۲۵$

$\nabla f_۲=۸۳-۳۶=۴۷$

$\nabla f_۳=۱۵۸-۸۳=۷۵$

$\nabla f_۴=۲۶۷-۱۵۸=۱۰۹$

$\nabla^۲ f_۲=۴۷-۲۵=۲۲$

$\nabla^۲ f_۳=۷۵-۴۷=۲۸$

$\nabla^۲ f_۴=۱۰۹-۷۵=۳۴$

$\nabla^۳ f_۳=۲۸-۲۲=۶$

$\nabla^۳ f_۴=۳۴-۲۸=۶$

$\nabla^۴ f_۴=۶-۶=۰$

با مقادیر $\nabla^n f_n$ که در بالا دور آن خط کشیده شده است سری binomial به صورت زیر نوشته می شود:

$$f(x_0+\alpha h)=f_۴+\alpha\nabla f_۴+\frac{\alpha(\alpha+۱)}{۲!}\nabla^۲ f_۴+\frac{\alpha(\alpha+۱)(\alpha+۲)}{۳!}\nabla^۳ f_۴+\frac{\alpha(\alpha+۱)(\alpha+۲)(\alpha+۳)}{۴!}\nabla^۴ f_۴$$

$$f(x_0+\alpha h)=۲۶۷+۱۰۹\alpha+\frac{\alpha(\alpha+۱)}{۲}۳۴+\frac{\alpha(\alpha+۱)(\alpha+۲)}{۶}۶+\frac{\alpha(\alpha+۱)(\alpha+۲)(\alpha+۳)}{۲۴}(۰)=$$

$$\Longrightarrow f(۳/۶)=۱۲۴/۲۵۶$$

هدف ما از مشتق گیری عددی حل معادله دیفرانسیل است ، باید ببینیم که در چه مواقعی از مشتق گیری پسرو و در چه مواقعی از مشتق گیری پیشرو و مرکزی باید استفاده کنیم. حال با توجه به موارد گفته شده از این اپراتورها در مشتق گیری استفاده می کنیم:

$$E=e^{hD}$$

$$E=۱+\Delta$$

$$E^{-۱}=(۱-\nabla)$$

با استفاده از اپراتورهای بالا و ترکیب آنها فرمولهای زیر بدست می آید:

$$hD=\ln E=\ln(۱+\Delta)$$

$$hD=-\ln(۱-\nabla)$$

روابط hD که در بالا بدست آمده را با کمک بسط مک لوران به صورت زیر بسط می دهیم:

$$hD=\ln(۱+\Delta)=\Delta-\frac{\Delta^۲}{۲}+\frac{\Delta^۳}{۳}-\frac{\Delta^۴}{۴}+\frac{\Delta^۵}{۵}-\frac{\Delta^۶}{۶}+\cdots$$

$$hD=-\ln(۱-\nabla)=\nabla+\frac{\nabla^۲}{۲}+\frac{\nabla^۳}{۳}+\frac{\nabla^۴}{۴}+\frac{\nabla^۵}{۵}+\cdots$$

(۲) در صفحهٔ ۶۳ ما از Ⓐ شروع کردیم و به یک نقطه قطع کردیم حالا ما در اینجا از A نقطه شروع می کنیم و به ۲ نقطه می رسانیم. (برمبنا ۳ نقطه عمل می کنیم)

$$f_i' = \frac{۱}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^۲}{۲}\right] f_i$$

$$= \frac{۱}{h}\left[\Delta f_i - \frac{۱}{۲}\Delta^۲ f_i\right]$$

$$= \frac{۱}{h}\left[(f_{i+۱} - f_i) - \frac{۱}{۲}(\Delta f_{i+۱} - \Delta f_i)\right]$$

$$= \frac{۱}{h}\left[(f_{i+۱} - f_i) - \frac{۱}{۲}(f_{i+۲} - f_{i+۱} - f_{i+۱} + f_i)\right]$$

پس از مرتب کردن رابطه بالا ⟶ $= \frac{۱}{h}\left[-\frac{۳}{۲} f_i + ۲ f_{i+۱} - \frac{۱}{۲} f_{i+۲}\right]$

$$= \frac{۱}{۲h}\left[\underline{\underline{-۳}}\ f_i + ۴ f_{i+۱} - ۱\ f_{i+۲}\right]$$

توجه:
این روابط بدون استفاده از جدول ۳-۱ نوشته شده است

رابطه ای که در بالا نوشته شده است، در جدول ۳-۱ رابطه شمارهٔ $\underline{\underline{۳}}$ است.

(۳) اگر از A شروع کنیم و بعد از ۳ نقطه قطع کنیم (برمبنا ۴ نقطه ای عمل کنیم) در نهایت به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$f_i' = \frac{۱}{۶h}\left[-۱۱\ f_i + ۱۸\ f_{i+۱} - ۹\ f_{i+۲} + ۲\ f_{i+۳}\right]$$

این رابطه، شماره ۶ است.

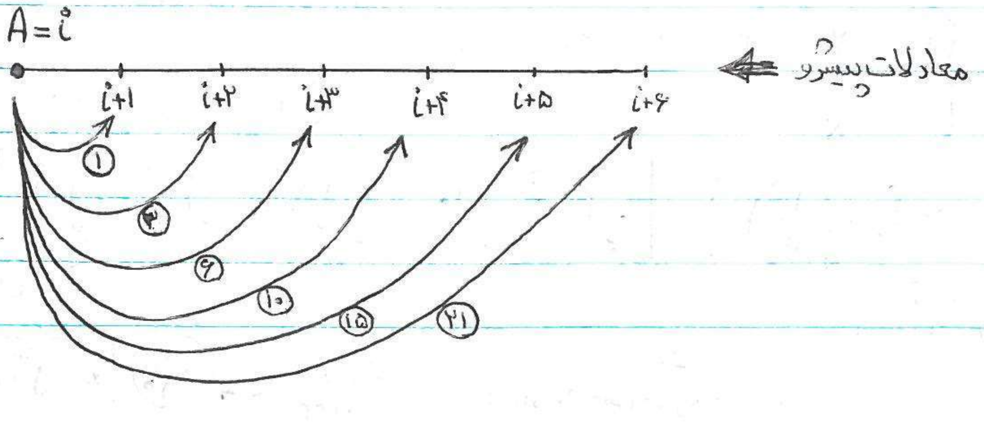
اگر همین کار را برای موارد زیر ادامه دهیم در نهایت داریم:

(۴) پس از ۴ نقطه از Ⓐ (۵ نقطه ای) ⟵ معادله شماره ۱۰

(۵) پس از ۵ نقطه از Ⓐ (۶ نقطه ای) ⟵ معادله شماره ۱۵

(۶) پس از ۶ نقطه از Ⓐ (۷ نقطه ای) ⟵ معادله شماره ۲۱

با توجه به موارد گفته شده در شکل زیر گفته های زیر را عمل می کنیم:



خطای معادله

شماره معادله

TABLE 3-1
FINITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR hy' AN IDISTANT GRID

ضرایبی که در فرمول جلوی $\frac{1}{h}$ قرار می‌گیرد

ضرایبی که در فرمول تفاوتها ظاهر می‌شود

Mult. factor	Coefficients in difference formula							Error		Formula no.	
1	$\underline{-1}$	1						−1/2	$hy''(\xi)$	1	۲ نقطه‌ای
	−1	$\underline{1}$						1/2		2	
1/2	$\underline{-3}$	4	−1					1/3	$h^2y'''(\xi)$	3	۳ نقطه‌ای
	−1	$\underline{0}$	1					−1/6		4	
	1	−4	$\underline{3}$					1/3		5	
1/6	$\underline{-11}$	18	−9	2				−1/4	$h^3y^{(IV)}(\xi)$	6	۴ نقطه‌ای
	−2	$\underline{-3}$	6	−1				1/12		7	
	1	−6	$\underline{3}$	2				−1/12		8	
	−2	9	−18	$\underline{11}$				1/4		9	
1/12	$\underline{-25}$	48	−36	16	−3			1/5	$h^4y^{(V)}(\xi)$	10	۵ نقطه‌ای
	−3	$\underline{-10}$	18	−6	1			−1/20		11	
	1	−8	$\underline{0}$	8	−1			1/30		12	
	−1	6	−18	$\underline{10}$	3			−1/20		13	
	3	−16	36	−48	$\underline{25}$			1/5		14	
1/60	$\underline{-137}$	300	−300	200	−75	12		−1/6	$h^5y^{(VI)}(\xi)$	15	۶ نقطه‌ای
	−12	$\underline{-65}$	120	−60	20	−3		1/30		16	
	3	−30	$\underline{-20}$	60	−15	2		−1/60		17	
	−2	15	−60	$\underline{20}$	30	−3		1/60		18	
	3	−20	60	−120	$\underline{65}$	12		−1/30		19	
	−12	75	−200	300	−300	$\underline{137}$		1/6		20	
1/60	$\underline{-147}$	360	−450	400	−225	72	−10	1/7	$h^6y^{(VII)}(\xi)$	21	۷ نقطه‌ای
	−10	$\underline{-77}$	150	−100	50	−15	2	−1/42		22	
	2	−24	$\underline{-35}$	80	−30	8	−1	1/105		23	
	−1	9	−45	$\underline{0}$	45	−9	1	−1/140		24	
	1	−8	30	−80	$\underline{35}$	24	−2	1/105		25	
	−2	15	−50	100	−150	$\underline{77}$	10	−1/42		26	
	10	−72	225	−400	450	−360	$\underline{147}$	1/7		27	
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6				

متغیری f که در فرمول نوشته می‌شود

در جدول بالا برحسب تعداد نقاط و نقطه مورد نظر می‌توان معادله را نوشت. در ستون وسط که به ستون ضرایب ظاهر شده در فرمول تفاوتها معروف است، ترتیب عدد از بالا به پایین بیانگر نقاط از چپ به راست است. مثلاً برای ۵ نقطه زیر داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

x

مقدارهای f براساس پایین جدول ۱-۳

$$f'_i = \boxed{\frac{1}{12}} \frac{1}{h} \left[-3 f_0 - 10 f_1 + 18 f_2 - 6 f_3 + 1 f_4 \right]$$

از ستون Multi Factor

اعداد از ستون ضرایب فرمولها

میزان خطا:

$$\boxed{-\frac{1}{20}} \; \boxed{h^4 y^{(5)}(\varepsilon)}$$

از جدول Error

حال اگر از نقطه $i+n$ بخواهیم شروع کنیم مجبور هستیم از فرمول پسرو Backward استفاده کنیم

بنابراین از رابطه Ⓑ در صفحه ۶۳ استفاده می کنیم:

① اگر از نقطه i یک نقطه به قبل در نظر بگیریم (بر مبنا ۲ نقطه):

$$f_i' = \frac{1}{h}\nabla f_i$$

$$= \frac{1}{h}\left[f_i - f_{i-1}\right] \Longrightarrow f_i' = \frac{1}{h}\left[-1\ f_{i+1} + \underline{\underline{1}}\ f_i\right]$$

در جدول ۱-۳ رابطه شماره ۲ می باشد.

② اگر از نقطه i دو نقطه به قبل برگردیم (بر مبنا ۳ نقطه):

$$f' = \frac{1}{h}\left[\nabla f_i + \frac{\nabla^2}{2} f_i\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[f_i - f_{i-1} + \frac{1}{2}\left(\nabla f_i - \nabla f_{i-1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[f_i - f_{i-1} + \frac{1}{2}\left(\left(f_i - f_{i-1}\right) - \left(f_{i-1} - f_{i-2}\right)\right)\right.$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2} f_{i-2} - 2 f_{i-1} + \frac{3}{2} f_i\right]$$

$$f_i' = \frac{1}{2h}\left[+1\ f_{i-2} - 4 f_{i-1} + \underline{\underline{3}}\ f_i\right]$$

رابطه ای که در بالا بدست آمد در جدول ۳-۱ رابطه شماره ۵ است.

اگر کارهای بالا را برای موارد زیر ادامه دهیم، در نهایت داریم:

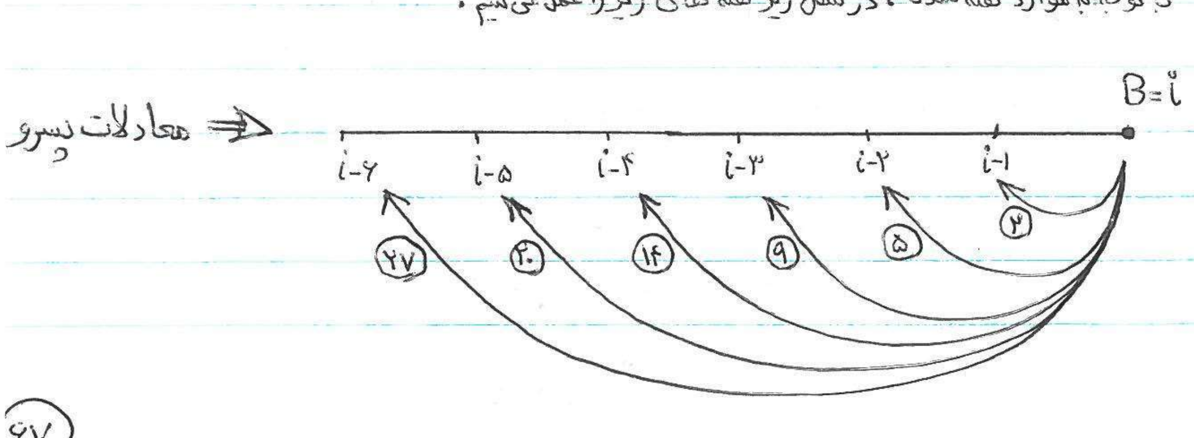
③ ۳ نقطه قبل از Ⓑ (۴ نقطه ای) ⟵ معادله شماره ۹

④ ۴ نقطه قبل از Ⓑ (۵ نقطه ای) ⟵ معادله شماره ۱۴

⑤ ۵ نقطه قبل از Ⓑ (۶ نقطه ای) ⟵ معادله شماره ۲۰

⑥ ۶ نقطه قبل از Ⓑ (۷ نقطه ای) ⟵ معادله شماره ۲۷

با توجه به موارد گفته شده، در شکل زیر گفته های زیر را عمل می کنیم:



با توجه به تمام آنچه گفته شد ما مشاهده می کنیم که یکسری معادلات میانی در جدول ۳-۱ وجود دارد که این فرمولها حالت ویژه ای را ایجاد می کند به عنوان مثال در رابطه <u>۱۱</u> داریم :

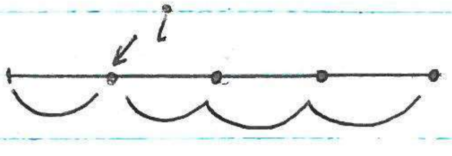
$$f'_i = \frac{1}{12h}\left[\underbrace{-3\,f_{i-1}}\ \underset{*}{\underline{-10}}\ \underbrace{f_i + 18\,f_{i+1} - 6\,f_{i+2} + 1\,f_{i+3}}\right]$$

به این فرمولها ، فرمولهای میانه ای می گویند که نقطه زیرخط ها درمیان این جملات قرار گرفته است . فرمولهای میانه ای برحسب اینکه درکدام نقطه میانه قرار گرفته باشد ، مقدار ضرایب تفاوت ظاهری (Cofficient differenc) آن تغییر می کند ، اما این ضرایب نسبت به ضرایب نقطه مرکزی تقارن دارد و قرینه است . همچنین زمانی که ما تعداد نقاطمان فرد باشد مثلاً ۵ عدد نقطه وسط یعنی نقطهٔ سوم ضریب آن صفر می گردد .

درهنگام بررسی خطاها دراین جدول (۱-۳) خطاها متناسب با h است و متناسب با توان h خطا مقدارش تغییر می کند . هرچه توان h بزرگتر باشد مقدار خطا کمتر می گردد و همچنین رابطه پیچیده تر می گردد . پیچیده شدن رابطه برای ما مشکل ایجاد می کند . بنابرین مناسب ترین رابطه ای که ما می توانیم از آن استفاده کنیم ، فرمولهای ۳ نقطه ای است . برای محاسبه خطا معمولاً از فرمولهای ۳ نقطه ای استفاده می کنیم چون ضریب خطا آن کوچکتر است . بنابرین دقت آن هم بیشتر می گردد . این گفته به خوبی در ستون Error جدول ۳-۱ مشخص است ، همچنین باید به این نکته هم توجه کرد که بیشترین دقت هنگامی بدست می آید که جملات ۲ طرف روش مرکزی با هم برابر باشد .

✠ فرمول های میانی مشتق گیری :

فرمولهای میانی به آن دسته از فرمولهایی گفته می شود که جملات زیرخط دار آن جملات ابتدایی وانتهایی نیست . به عنوان مثال برای فرمول شمارهٔ ⑪ درجدول ۳-۱ برای ۵ نقطه داریم :



$$⑪\quad f_i = \frac{1}{12h}\left[-3\,f_{i-1} \underline{\underline{-10\,f_i}} + 18\,f_{i+1} - 6\,f_{i+2} + f_{i+3}\right]$$

برای توضیح بیشتر می بایست به روابط اپراتورها بازگردیم . یکی از روابط اپراتورها عبارتست از :

$$\begin{tikzcd}
 & (1+\Delta)E^{-1}=1 \\
(1+\Delta)E=1 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & (1+\Delta)^2E^{-2}=1 \\
 & (1+\Delta)^3E^{-3}=1
\end{tikzcd}$$

برای این منظور فرمول Ⓐ را درنظر بگیرید و آن را در رابطه $(1+\Delta=E)$ ضرب کنیم . اگر درفرمول اول آن را ضرب کنیم به یک فرمول پیشرو با یک Shift به عقب و دومی به یک فرمول پیشرو با ۲ Shift به عقب و سومی با سه Shift به عقب و ... حاصل می شود.

$$\boxed{\text{فرمول A}} \qquad f_i' = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots\right] f_i$$

اگر از فرمول پسرو (Backward) استفاده کنیم، آنگاه داریم :

$$\begin{tikzcd}
 & (1-\nabla)E=1 \\
(1-\nabla)=E^{-1} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & (1-\nabla)^2E^2=1 \\
 & (1-\nabla)^3E^3=1
\end{tikzcd}$$

رابطه ای که در بالا حاصل شد را در رابطه پسرو (Backward) اعمال می کنیم و آنگاه با یک Shift به جلو آن را بدست می آوریم

به عنوان مثال فرمول شمارهٔ ۷ را از جدول ۳-۱ می خواهیم با روش پیشرو به وسیله یک Shift به عقب بدست بیاوریم. برای این کار داریم :

$$f_i' = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots\right] f_i$$

$$= \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots\right](1+\Delta)\,\underbrace{E^{-1}f_i}$$

در رابطه بالا $E^{-1}f_i$ برابر با f_{i-1} می باشد. جملات را در این مقدار ضرب می کنیم و جملات توان مشابه Δ را بدست می آوریم :

$$f_i' = \frac{1}{h}\left[\Delta + \left(1-\frac{1}{2}\right)\Delta^2 - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\Delta^3 + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\Delta^4 - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\Delta^5 + \dots\right] f_{i-1}$$

$$f_i = \frac{1}{h}\left[\Delta + \frac{\Delta^2}{2} - \frac{\Delta^3}{6} + \frac{\Delta^4}{12} - \frac{\Delta^5}{20} + \dots\right] f_{i-1} \qquad Ⓒ$$

رابطه بدست آمده در بالا را رابطه C می نامیم . این رابطه را پس از ۳ شماره قطع می کنیم و به فرمول ۴ نقطه ای می رسیم که نقطه اول آن Δf_{i-1} است :

$$f_i' = \frac{1}{h}\left[\Delta f_{i-1} + \frac{1}{2}\Delta^2 f_{i-1} - \frac{1}{6}\Delta^3 f_{i-1}\right]$$

در فرمول بدست آمده در آخر صفحه قبل برای Δ ها داریم :

$$\Delta f_{i-۱} = f_i - f_{i-۱} \quad / \quad \Delta^۲ f_{i-۱} = \Delta f_i - \Delta f_{i-۱} = (f_{i+۱} - f_i) - (f_i - f_{i-۱})$$

$$\Delta^۳ f_{i-۱} = \Delta^۲ f_i - \Delta^۲ f_{i-۱} = (\Delta f_{i+۱} - \Delta f_i) - (\Delta f_i - \Delta f_{i-۱}) = \dots$$

به ازای مقادیر Δ جایگزین آن را در بالا قرار می دهیم . پس از مرتب کردن و جا گذاری در نهایت رابطه زیر برای ما حاصل می گردد :

$$f_i' = \frac{۱}{۶h}\left[-۲ f_{i-۱} - ۳ f_i + ۶ f_{i+۱} - f_{i+۲}\right]$$

معادله بدست آمده در بالا معادلهٔ شماره ۷ است . (در جدول ۳-۱)

حال اگر این کار را برای نقاط بعدی انجام دهیم به طور خلاصه داریم :

* اگر در فرمول Ⓒ بعد از ۲ جمله عبارت را قطع کنیم رابطه برای ۳ نقطه و معادله شماره ۴ حاصل می شود .

* اگر در فرمول Ⓒ بعد از ۳ جمله عبارت را قطع کنیم رابطه برای ۴ نقطه و رابطه شماره ۷ حاصل می شود .

* اگر در فرمول Ⓒ بعد از ۴ جمله عبارت را قطع کنیم رابطه برای ۵ نقطه و معادله شماره ۱۱ حاصل می شود .

* اگر در فرمول Ⓒ بعد از ۵ جمله عبارت را قطع کنیم رابطه برای ۶ نقطه و معادلهٔ شماره ۱۶ حاصل می شود .

* اگر در فرمول Ⓒ بعد از ۶ جمله عبارت را قطع کنیم رابطه برای ۷ نقطه و معادله شماره ۲۲ حاصل می شود .

اگر فرمولهای پسرو (Backward) را هم بدست بیاوریم مثلاً فرمول شماره ۱۲ از جدول ۳-۱ که فرمول ۵ نقطه ای است با ۲ تا دلو می توانیم آن را حساب کنیم . همچنین همین فرمول را از روش پیشرو forward با ۲ shift به عقب می توانیم بدست بیاوریم . برای این کار از فرمول Ⓑ که به صورت زیر است ، استفاده می کنیم :

Ⓑ $$f_i' = \frac{۱}{h}\left[\nabla + \frac{\nabla^۲}{۲} + \frac{\nabla^۳}{۳} + \frac{\nabla^۴}{۴} + \dots\right] f_i$$

$$f_i' = \frac{۱}{h}\left[\nabla + \frac{\nabla^۲}{۲} + \frac{\nabla^۳}{۳} + \frac{\nabla^۴}{۴} + \dots\right] \underbrace{(۱-\nabla)^۲}\ \underbrace{E^۲ f_i}$$

در فرمول بالا داریم :

$$۱ - \nabla^۲ = (۱ - ۲\nabla + \nabla^۲) \qquad E^۲ f_i = f_{i+۲}$$

در این رابطه $E^۲ f_i$ ، ۲ shift به عقب می شود . مقدارهای گفته شده را در رابطه f_i' ضرب می کنیم و داریم :

$$f_i' = \frac{۱}{h}\left[\nabla + \left(\frac{۱}{۲} - ۲\right)\nabla^۲ + \left(\frac{۱}{۳} - ۱ + ۱\right)\nabla^۳ + \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۴}\right)\nabla^۴ + \dots\right]$$

رابطه بدست آمده در پایین صفحه قبل را با روندی که گفته شده اگر مرتب کنیم داریم :

$$f_i' = \frac{۱}{h}\left[\nabla - \frac{۳}{۲}\nabla^{۲} + \frac{۱}{۳}\nabla^{۳} + \frac{۱}{۱۲}\nabla^{۴} + \frac{۱}{۳۰}\nabla^{۵} + \cdots\right] f_{i+۲} \qquad \text{Ⓓ}$$

رابطه حاصل شده در بالا را رابطه Ⓓ می نامیم. حالا عبارت خود را از Ⓓ شروع می کنیم و بعد از ۴ جمله آن را قطع می کنیم و به رابطه ۵ نقطه ای پسرو می رسیم که برای آن داریم :

$$f_i' = \frac{۱}{۱۲h}\left[۱\, f_{i-۲} - ۸\, f_{i-۱} + \underline{\underline{0}}\, f_i + ۸\, f_{i+۱} - ۱\, f_{i+۲}\right]$$

فرمولهایی که در واقع ۳، ۵، ۷ و ۹ نقطه ای هستند ، در مشتق گیری های میانی هنگامی که تعداد جملات ۲ طرف برابر باشد ، ضریب جمله مرکزی صفر و جملات تکراری ۲ به ۲ با همدیگر قرینه هستند.

اگر از Ⓓ شروع کنیم و رابطه خودمان را پس از ۳ جمله قطع می کردیم به عبارت پسرو (Backward) ۲ Shift به جلو می رسیدیم که همان معادله $\underline{\underline{۷}}$ است. به طور کلی برای رابطه ۴ جمله ای می توان به ۲ صورت زیر کار کرد :

← ۲ جمله ای ۲ Shift به عقب با روش پیشرو استفاده کرد.

← ۲ جمله ای با ۲ Shift به جلو با روش پسرو Backward استفاده کرد.

حال اگر رابطه را از Ⓓ مطابق جدول ۳-۱ داشتیم :

✱ اگر از Ⓓ شروع می کردیم و پس از ۵ جمله قطع می کردیم به معادله شماره $\underline{\underline{۱۸}}$ می رسیدیم.

✱ اگر از Ⓓ شروع می کردیم و پس از ۶ جمله قطع می کردیم به معادله شماره $\underline{\underline{۲۵}}$ می رسیدیم.

از بین فرمولهایی که در جدول ۳-۱ بیان شده است ، مهمترین آنها فرمول شماره ۴ است. فرمول سه نقطه ای i است ، این فرمول عبارتست از :

$$f_i' = \frac{۱}{۲h}\left(f_{i+۱} - f_{i-۱}\right)$$

✱ مشتق مرتبه دوم :

برای مشتق مرتبه دوم می بایست از جدول ۳-۱ استفاده بکنیم. در واقع بیشتر روابط مهندسی شامل مشتق مرتبه دوم می گردد. با توجه به تعداد نقاط انتخاب شده روابط این مشتق گیری در جدول ۳-۲ بیان شده است که این جدول در صفحه $\underline{\underline{۷۲}}$ (صفحه بعد توضیح داده خواهد شد.)

ضرایبی که در فرمول تفاوتها ظاهر می گردند.*

شماره معادله

ضرایبی که در فرمولها جلوی $\frac{1}{h}$ قرار می گیرد

TABLE 3-2

ITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR h^2y'' AND EQUIDISTANT G

خطا معادله

Mult. factor	Coefficients in difference formula						Error			Formula no.
1	1	−2	1			−1		1/6		1
	1	−2	1			0	$hy^{(III)}(\xi_1)+$	−1/12	$h^2y^{(IV)}(\xi_2)$	2
	1	−2	1			1		−1/6		3
1/6	12	−30	24	−6		11/12		−1/10		4
	6	−12	6	0		−1/12	$h^2y^{(IV)}(\xi_1)+$	−1/30	$h^3y^{(V)}(\xi_2)$	5
	0	6	−12	6		1/12		−1/30		6
	−6	24	−30	12		11/12		−1/10		7
1/24	70	−208	228	−112	22	−5/6		1/15		8
	22	−40	12	8	−2	1/12		−1/60		9
	−2	32	−60	32	−2	0	$h^3y^{(V)}(\xi_1)+$	1/90	$h^4y^{(VI)}(\xi_2)$	10
	−2	8	12	−40	22	−1/12		1/60		11
	22	−112	228	−208	70	5/6		1/15		12

مهمترین رابطه در جدول فوق فرمول شماره ۲ است. در این فرمول داریم:

② $$f_i'' = \frac{1}{h^۲}\left(f_{i+1} - ۲f_i + f_{i-1}\right)$$

اگر فرمولهای f'' را بخواهیم حساب کنیم مطابق مطالبی که برای اپراتورها گفته بودیم:

$$hD = \ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^۲}{۲} + \frac{\Delta^۳}{۳} - \frac{\Delta^۴}{۴} + \frac{\Delta^۵}{۵} - \cdots \Rightarrow \text{پیشرو}$$

$$hD = -\ln(1-\nabla) = \nabla + \frac{\nabla^۲}{۲} + \frac{\nabla^۳}{۳} + \frac{\nabla^۴}{۴} + \frac{\nabla^۵}{۵} + \cdots \Rightarrow \text{پسرو}$$

اگر عبارت حالت پیشرو را که در بالا بیان کردیم به توان ۲ برسانیم داریم:

$$(hD)^۲ = \left(\Delta - \frac{\Delta^۲}{۲} + \frac{\Delta^۳}{۳} - \frac{\Delta^۴}{۴} + \frac{\Delta^۵}{۵} - \cdots\right)$$

$$= \Delta^۲ + \left(\frac{-1}{۲} - \frac{1}{۲}\right)\Delta^۳ + \left(\frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \frac{1}{۳}\right)\Delta^۴ + \left(\frac{-1}{۴} - \frac{1}{۶} - \frac{1}{۶} - \frac{1}{۴}\right)\Delta^۵ + \left(\frac{1}{۵} + \frac{1}{۸} + \frac{1}{۹} + \frac{1}{۸} + \frac{1}{۵}\right)\Delta^۶$$

اگر همه عبارت بالا را مرتب کنیم که در نهایت به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$hD^۲ = \Delta^۲ - \Delta^۳ + \frac{۱۱}{۱۲}\Delta^۴ - \frac{۵}{۶}\Delta^۵ + \frac{۱۳۷}{۱۸۰}\Delta^۶$$

عبارت بالا را در f_i ضرب می کنیم و آنگاه خواهیم داشت: