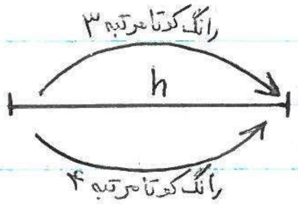
فراوان دارد. در رانگ کوتا مرتبه ۴، برای خطا داریم:

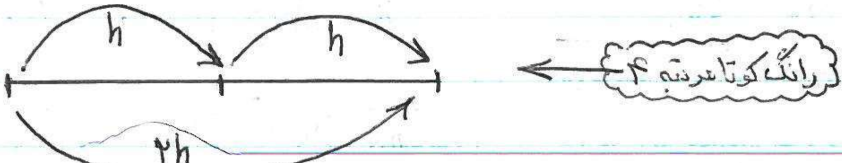
خطای محلی $\Rightarrow O(h^5)$ خطای کلی (Global) $\Rightarrow O(h^4)$

رانگ کوتا مراتب بالاتر را هم در نظر می گیرند ولیکن مرتبه ۴ کاربردی تر است. در رانگ کوتا مرتبه ۴ راه حل داخلی طولانی تر است. طول گام ما (h) از ۲ راه زیر بدست می آید:

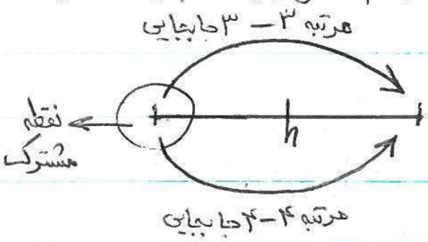
(۱) از روشهای مختلف استفاده می کنیم مثلاً از رانگ کوتاهای مرتبه ۳ و ۴ با مرتبه های h در نظر می گیریم و تفاوت مقدار را با ذکر خطا است



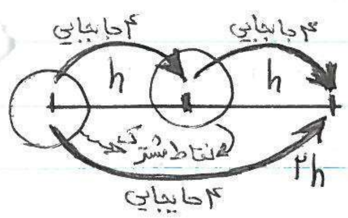
(۲) از مرتبه های مختلف h با معادلات رانگ کوتا یکسان استفاده می کنیم:



آنچه در بالا گفته شد می توان به نحوی تخمین خطا زد ولی هرکدام مشکلی دارند که عبارتست از:



(۱) برای رانگ کوتا مرتبه ۳ ما نیازمند ۳ جابجایی مقدار هستیم و برای رانگ کوتا مرتبه ۴ می بایست ۴ تا جابجایی مقدار بکنیم با توجه به اینکه نقطه ابتدای h ما نقطه مشترک است ما می بایست ۶ تا جابجایی انجام بدهیم



(۲) همانطور که مشاهده می کنید برای هر قسمت h با توجه به اینکه از رانگ کوتا مرتبه ۴ استفاده می کنیم می بایست ۱۲ عمل انجام دهیم و با توجه به ۲ نقطه مشترک در نهایت باید ۱۰ جابجایی مقدار انجام بدهیم ✱

همین جایگذاری مقادیر خود کار می برد. به عنوان مثال در رانگ کوتا مرتبه M مقدار خطا عبارتست از:

خطای محلی $O(h^{m+1}) \longrightarrow 2\phi(h^{m+1}) \Longrightarrow$ خطای مجموع برای ۲ گام با اندازه h

$\longrightarrow \phi(2h)^{m+1} \Longrightarrow$ خطای مجموع برای گام با اندازه 2h می شود

ما ϕ را مقداری ثابت در نظر می گیریم این در حالی است که مقدار ϕ در هر مکان متفاوت است. با داشتن موارد فوق مقدار خطا را به یکی از روشهای روبروی توان حدس زد:

$$y^*_{n+2} - y^{(h)}_{n+2} = 2\phi h^{m+1} \quad (I)$$

$$y^*_{n+2} - y^{(2h)}_{n+2} = \phi(2h)^{m+1} \quad (II)$$

$$\phi = \frac{y_{n+2}^{(h)} - y_{n+2}^{(2h)}}{(2^{m+1}-2)h^{m+1}}$$

برای تخمین زدن خطا و مقایسه آنها داریم :

اگر h بخواهیم میزان خطا را تخمین بزنیم آنگاه به طور خلاصه داریم :

$$\text{خطا کلی} \quad \mathcal{E}_t = \phi . h^{m+1} = \frac{y_{n+2}^{(h)} - y_{n+2}^{(2h)}}{2^{m+1}-2}$$

معمولاً ما در ابتدای حل مساله h را کوچک و کوچکتر می کنیم تا به خطای قابل قبول برسیم با چندبار انجام دادن درنهایت به h مناسب می رسیم. هربار می بایست میزان خطا را حساب کنیم و جاگذاری را انجام بدهیم. روشی دیگر نیز وجود دارد، برای به دست آوردن معیار خطا ما یک Step به اندازهٔ h جلو می رویم و عددی که به دست می آید، تفاوت آن با عدد اول تخمینی از خطا است که رابطه آن در زیر نشان داده شده است :

$$\text{میزان خطا} \quad \mathcal{E}_t = y_{n+1}^{\text{مرتبه ۴}} - y_{n+1}^{\text{مرتبه ۳}}$$

$\boxed{y_{n+1} \text{ ها از رانگ کوتا بدست آمده}}$

رانگ کوتا Fehlberg :

در روش رانگ کوتا Fehlberg ، رانگ کوتا مرتبه ۴ و مرتبه ۵ را با هم ترکیب کرده ایم . تفاوت این ۲ رانگ کوتا به ما میزان خطا را می دهد . اگر مرتبه ۴ و ۵ را در نظر بگیریم ، پارامترهای خاص از یکسری جاگذاری حساب می کنیم و از عملگر مشترک بهره می بریم . مقادیر C و a ها نیز در جدول مشخص هستند . در زیر روابط و مقادیر مربوط به رانگ کوتا Fehlberg را مشاهده می کنید :

An Algorithm for the Runge–Kutta–Fehlberg Method

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{k_1}{4}\right),$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{3h}{8}, y_n + \frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\right),$$

$$k_4 = h \cdot f\left(x_n + \frac{12h}{13}, y_n + \frac{1932k_1}{2197} - \frac{7200k_2}{2197} + \frac{7296k_3}{2197}\right),$$

$$k_5 = h \cdot f\left(x_n + h, y_n + \frac{439k_1}{216} - 8k_2 + \frac{3680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4104}\right),$$

$$k_6 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{8k_1}{27} + 2k_2 - \frac{3544k_3}{2565} + \frac{1859k_4}{4104} - \frac{11k_5}{40}\right);$$

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + \left(\frac{25k_1}{216} + \frac{1408k_3}{2565} + \frac{2197k_4}{4104} - \frac{k_5}{5}\right), \text{ with global error } O(h^4),$$

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{16k_1}{135} + \frac{6656k_3}{12825} + \frac{28561k_4}{56430} - \frac{9k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}\right), \quad \leftarrow \text{use as RK.}$$

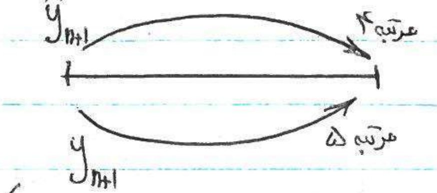
with global error $O(h^5)$;

$$\text{Error, } E \doteq \frac{k_1}{360} - \frac{128k_3}{4275} - \frac{2197k_4}{75240} + \frac{k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}.$$

error for stepsize

$y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}$

مطابق روابطی که در صفحه قبل مشاهده می‌کنید، مقادیر K بین آنها مشترک است. $\hat{y}_{n+1}$ برای رانگ کوتا مرتبه ۴ و y_{n+1} برای رانگ کوتا مرتبه ۵ تنظیم شده است. در رانگ کوتا Fehlberg ما به جای اینکه ۹ تا جاگذاری عملگر (۴ جاگذاری برای رانگ کوتا مرتبه ۴ و ۵ جاگذاری برای رانگ کوتا مرتبه ۵) انجام دهیم، تنها ۶ جاگذاری (به جای مقادیر K) انجام می‌دهیم. برای بدست آوردن میزان خطا نیز تنها کافی است y_{n+1} را از $\hat{y}_{n+1}$ کم کنیم. همچنین میزان خطا نیز بدون محاسبه $\hat{y}_{n+1}$ و تنها با رابطه Error که در خط آخر روابط نوشته شده است می‌توان بدست آورد. به طور خلاصه رانگ کوتا Fehlberg را به صورت نمادین زیر می‌توان نمایش داد:



$$y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} = Error$$

رانگ کوتا Fehlberg هم دقت بیشتر دارد و هم بدون محاسبات اضافی میزان خطا را می‌توان محاسبه کرد.

استفاده از رانگ کوتا برای حل دستگاه معادلات:

ما می‌خواهیم روشهای رانگ کوتا را به دستگاهی از معادلات تعمیم بدهیم. اگر داشته باشیم می‌توانیم روابط را به n تا $order1 = n$ مرتبه اول تبدیل کنیم. به عنوان مثال در رانگ کوتا مرتبه ۴ کلاسیک که ضرایب زیر را دارد می‌توانیم به دستگاهی از معادلات تعمیم بدهیم:

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, w)$$

$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, w)$$

$$\frac{dw}{dx} = f_3(x, y, z, w)$$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

در معادلات مرتبه یک ۴ تا تعیین مقدار داریم به طوری که:

$$K_1 = hf_1(x_n, y_n, z_n, w_n)$$

برای مقدار K_1 بالا ما مقادیر m_1 و L_1 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_1 = hf_2(x_n, y_n, z_n, w_n)$$

$$m_1 = hf_3(x_n, y_n, z_n, w_n)$$

حال مقدار K_2 به همراه m_2 و L_2 به صورت زیر بدست می‌آید:

$$K_2 = hf_1(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}K_1, z_n + \tfrac{1}{2}L_1, w_n + \tfrac{1}{2}m_1)$$

$$L_2 = hf_2(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}K_1, z_n + \tfrac{1}{2}L_1, w_n + \tfrac{1}{2}m_1)$$

$$m_2 = hf_3(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}K_1, z_n + \tfrac{1}{2}L_1, w_n + \tfrac{1}{2}m_1)$$

حال مقدار k_3 به همراه m_3 و l_3 به صورت زیر است:

$$k_3 = hf_1\left(x_n+\tfrac{1}{2}h ,\ y_n+\tfrac{1}{2}k_2 ,\ z_n+\tfrac{1}{2}l_2 ,\ w_n+\tfrac{1}{2}m_2\right)$$
$$l_3 = hf_2\left(x_n+\tfrac{1}{2}h ,\ y_n+\tfrac{1}{2}k_2 ,\ z_n+\tfrac{1}{2}l_2 ,\ w_n+\tfrac{1}{2}m_2\right)$$
$$m_3 = hf_3\left(x_n+\tfrac{1}{2}h ,\ y_n+\tfrac{1}{2}k_2 ,\ z_n+\tfrac{1}{2}l_2 ,\ w_n+\tfrac{1}{2}m_2\right)$$

مقدار k_4 به همراه m_4 و l_4 نیز به صورت زیر در می‌آید:

$$k_4 = hf_1\left(x_n+h ,\ y_n+k_3 ,\ z_n+l_3 ,\ w_n+m_3\right)$$
$$l_4 = hf_2\left(x_n+h ,\ y_n+k_3 ,\ z_n+l_3 ,\ w_n+m_3\right)$$
$$m_4 = hf_3\left(x_n+h ,\ y_n+k_3 ,\ z_n+l_3 ,\ w_n+m_3\right)$$

با مقادیر k ها و m ها و L ها که در بالا بدست آمد در رابطه خود قرار می‌دهیم و مقادیر y_{n+1} و z_{n+1} و W_{n+1} محاسبه می‌شود:

$$x_{n+1} = x_n + h$$

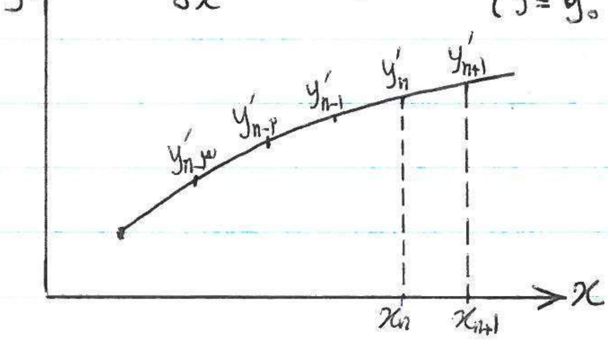
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$z_{n+1} = z_n + \tfrac{1}{6}\left(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4\right)$$

$$W_{n+1} = W_n + \tfrac{1}{6}\left(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4\right)$$

برای معادلات ODE از یکسری روابط استفاده می‌کنیم که در روش رانگ کوتا ساده هستند ولی می‌بایست در آنجا جاگذاری مقادیر انجام بدهیم. اما تعداد این جاگذاری‌ها کار ما را سخت می‌کند حال دوباره به معادله مرتبه اول برمی‌گردیم و داریم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$



کاری که ما انجام می‌دهیم بدست آوردن y' سطح زیر منحنی است. پیش از این سطح زیر منحنی را با روشهای اویلر، اویلر اصلاح شده و ... حساب می‌کردیم. حالا اگر ما برای y'_{n-1} به قبل را بخواهیم بدست بیاوریم از سطح زیر منحنی روبرو استفاده می‌کنیم. با این کار باعث می‌شود تا عملیات ما پیچیده‌تر گردد و برنامه نویسی آن مشکل شود. با این وجود کار ما ساده‌تر می‌گردد. (ابتدا منحنی را برای مقادیر قبل از y'_n حدس می‌زنیم و بعد سطح زیر منحنی آن را حساب می‌کنیم.) در اینجا ما روش Multy Step را با روش هیون (اویلر اصلاح شده) بیان می‌کنیم که در اویلر اصلاح شده از روشهای پیشگو تصحیح کن استفاده می‌کردیم. معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = y' \qquad \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

برای حل این معادله ما به صورت روبرو عمل می کردیم:

مرحله پیشگویی P : $y^*_{n+1}=y_n+y'_n h$

محاسبه مشتق E : $y'^*_{n+1}=f(x_{n+1},y_{n+1})$

مرحله تصحیح مقدار C : $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(y'_n+y'^*_{n+1}\right)$

محاسبه مشتق دیگر E : $y'_{n+1}=f(x_{n+1},y_{n+1})$

درجه خطا مرحله P (پیشگویی) ما به صورت $O(h^2)$ است. برای مرحله C (تصحیح مقدار) میزان خطا نیز $O(h^3)$ است. اگر روش هیون (اویلر اصلاح شده) را بهبود ببخشیم، مرحله P (پیشگویی) را یک درجه بالاتر می بریم:

$$\frac{y^*_{n+1}-y_n}{h}=y'_n$$ مشتق گیری ۲ نقطه ای پیشرو (Forward)

$$\frac{y^*_{n+1}-y_{n-1}}{2h}=y'_n$$ مشتق گیری ۲ نقطه ای مرکزی (Central) $O(h^3)$

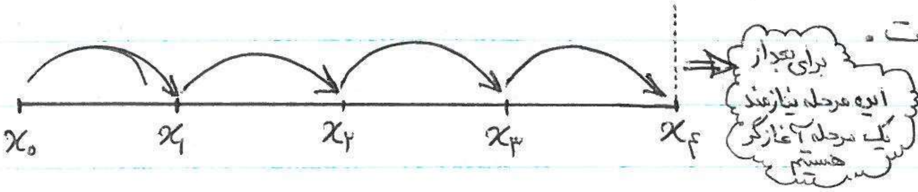
حالا می توانیم مرحله P (پیشگویی) جدید را به صورت زیر در بیاوریم:

$$y^*_{n+1}=y_{n-1}+2h\,y'_n \qquad O(h^3)$$

همانطور که ملاحظه می کنید ما در اینجا نیاز به y_{n-1} داریم در اختیار ما قرار ندارد. ما می توانیم از فرمولهای مشتق گیری Backward (پسرو) هم استفاده کنیم بنابراین اینجا از Multy Step استفاده می کنیم که دارای خواص زیر می باشد:

(۱) روشی پیشگو تصحیح کن هستند.

(۲) خود به خود آغاز نمی شوند و برای آغاز نیاز به یک رانگ کوتا هستیم. در شکل زیر به طور نمادین این حرف نشان داده شده است.



(۳) هرکدام از روشهای پیشگو را به صورت حل تکراری می توانیم بیان کنیم به عنوان مثال در برنامه زیر داریم:

P : $y^*_{n+1}=y_n+y'_n\cdot h$

E : $y'^*_{n+1}=f(x_{n+1},y^*_{n+1})$

C : $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[y'_n+y'^*_{n+1}\right]$

$|y^*_{n+1}-y_{n+1}|<Tolerance$

خیر

بله

E : $y'_{n+1}=f(x_{n+1},y_{n+1})$

(۴) همانطور که قبلاً نیز داشتیم و خطا را تخمین زدیم و برای درجه خطا نیز داشتیم، برای عبارت خطا مقدار خطا را حدس می زنیم و بعد میزان آن را بهبود می بخشیم.

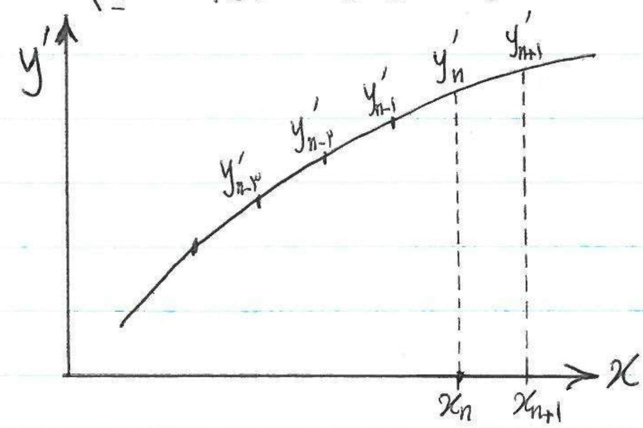
فرم معمولی ما PECE (پیشگو ـ تصحیح کن) است ولی در حالتهای دیگر داریم :

$P(EC)^S E \longrightarrow$ پیشگو تصحیح کن با حلقه تکرار

PMECME

$PM(EC)^S ME$

قبل اینکه جزئیات را بیان کنیم ما یکسری روش داریم که عبارتند از : Addam_Bashforth و Addam_Molton می گویند که به این ۲ روش به طور خلاصه (ABAM.PC) گفته می‌شود. ما در اینجا قصد داریم



فرمول سطح زیر منحنی را بین x_n و x_{n+1} با کمک نقاط قبل بدست آوریم (با کمک حدس زدن نقاط قبلی منحنی را پیش بینی کنیم و با کمک منحنی سطح زیر آن را محاسبه نماییم) برای این کار از روش پسرو (Backward) بدست می آید که برای این کار از اپراتورها استفاده می کنیم.

پیش از این برای اپراتورها داشتیم :

$$I^n D = E^n - 1 \longrightarrow \int_{x_i}^{x_i+nh} \frac{df(x)}{dx}\, dx = f(x_i+nh) - f(x_i)$$
$$= E^n f(x_i) - f(x_i)$$
$$= f(x_i)\,(E^n - 1)$$

به طور کلی رابطه‌ای که ما برای اپراتورها داریم عبارتست از :

$$I^n D = E^n - 1$$
$$\nabla = 1 - E^{-1}$$
$$E = e^{hD}$$

ما از این روابط برای پیشگویی روش Adam Bashforth بدست می آوریم. اگر جایگزین کنیم، داریم :

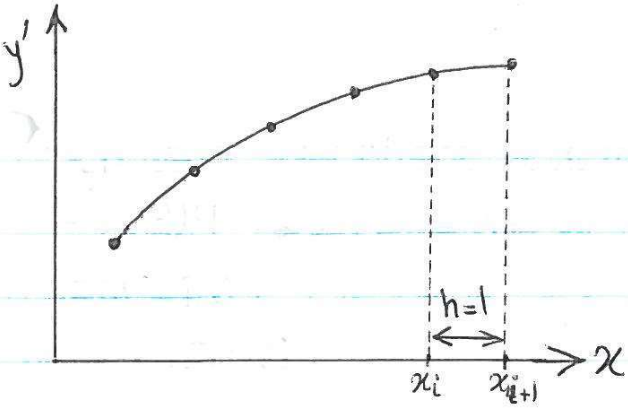
$$\nabla = 1 - e^{-hD}$$
$$\ln(1-\nabla) = -hD \longrightarrow D = \frac{\ln(1-\nabla)}{h}$$

آنگاه ما برای E^n خواهیم داشت :

$$\nabla = 1 - E^{-1} \Rightarrow E^{-1} = 1 - \nabla \rightarrow E^{-n} = (1-\nabla)^n \text{ یا } E^n = (1-\nabla)^{-n}$$

$$I^n D = E^{n} - 1 \Rightarrow I^n = \frac{E^n - 1}{D} \Rightarrow I^n = \frac{-n\left[(1-\nabla)^{-n} - 1\right]}{\ln(1-\nabla)}$$

$D = \frac{\ln(1-\nabla)}{h}$ از بالا داشتیم



نمودار روبرو را در نظر بگیرید . ما در اینجا کاری را که می خواهیم انجام بدهیم این است که سطح زیر منحنی را در شرایط یک گام و $h=1$ است بدست بیاوریم.

برای این کار رابطه ما به صورت زیر در می آید:

$$I f(x)=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \longrightarrow =\frac{-h\left[\frac{1}{1-\nabla}-1\right]}{\ln(1-\nabla)}\, f(x_i)$$

$$=-h\,\frac{\left(\frac{\nabla}{1-\nabla}\right)}{\ln(1-\nabla)}$$

$$=\frac{h\nabla}{(1-\nabla)\left(\nabla+\frac{\nabla^2}{2}+\frac{\nabla^3}{3}+\frac{\nabla^4}{4}+\cdots\right)}$$

اگر عبارت را در همدیگر ضرب کنیم به یک چندجمله‌ای می رسیم و در نهایت عبارت ما به صورت کلی زیر در می آید:

$$=h\left(1+\alpha_1\nabla+\alpha_2\nabla^2+\alpha_3\nabla^3+\cdots\right)$$

h را در هم ضرب می کنیم و توانهای مشترک را با همدیگر جمع می کنیم و در نهایت داریم:

$$=\frac{h\nabla}{\nabla+\left(\frac{1}{2}-1\right)\nabla^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\nabla^3+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\nabla^4+\cdots}$$

$$=\frac{h\nabla}{\nabla-\frac{1}{2}\nabla^2-\frac{1}{6}\nabla^3-\frac{1}{12}\nabla^4-\frac{1}{20}\nabla^5-\cdots}=h\left(1+\alpha_1\nabla+\alpha_2\nabla^2+\alpha_3\nabla^3+\cdots\right)$$

با طرفین وسطین کردن رابطه فوق و برابر هم قرار دادن ۲ طرف در نهایت مقادیر α به صورت زیر حساب می شود:

$$\nabla^2:\quad -\frac{1}{2}+\alpha_1=0 \longrightarrow \alpha_1=\frac{1}{2}$$

$$\nabla^3:\quad -\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2=0 \longrightarrow \alpha_2=\frac{5}{12}$$

$$\nabla^4:\quad -\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2+\alpha_3=0 \longrightarrow \alpha_3=\frac{3}{8}$$

$$\vdots$$

حال اگر مقادیر را ادامه بدهیم و α های بدست آمده را در رابطه انتگرالی قرار دهیم خواهیم داشت:

$$I f(x_i)=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx=h\left[1+\frac{1}{2}\nabla+\frac{5}{12}\nabla^2+\frac{3}{8}\nabla^3+\frac{251}{720}\nabla^4+\frac{475}{1440}\nabla^5+\frac{19087}{60480}\nabla^6+\cdots\right]f(x_i)$$

آنگاه ما برای y_{n+1} خواهیم داشت:

$$y^*_{n+1}=y_n+\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'\,dx$$

$$=y_n+h\left[1+\frac{1}{2}\nabla+\frac{5}{12}\nabla^2+\frac{3}{8}\nabla^3+\frac{251}{720}\nabla^4+\frac{475}{1440}\nabla^5+\frac{19087}{60480}\nabla^6+\cdots\right]y'_n$$

به رابطه‌ای که در صفحه قبل بدست آمد رابطه‌ی Adams Bashforth می‌گویند. برای ما روابط برحسب تعداد جملاتی که قطع می‌کنیم، تعداد نقاط مشخص می‌گردد. این فرمها در جدول ۱-۱ (جدول زیر) مشخص شده است: (در جدول زیر q بیانگر تعداد جملاتی است که قطع می‌کنیم)

Adams–Bashforth

$$y_{n+1} = y_n + h[y_n' + \tfrac{1}{2}\nabla y_n' + \tfrac{5}{12}\nabla^2 y_n' + \tfrac{3}{8}\nabla^3 y_n' + \tfrac{251}{720}\nabla^4 y_n' + \tfrac{475}{1440}\nabla^5 y_n' + \tfrac{19087}{60480}\nabla^6 y_n' + \cdots]$$

Adams–Moulton

$$y_{n+1} = y_n + h[y'_{n+1} - \tfrac{1}{2}\nabla y'_{n+1} - \tfrac{1}{12}\nabla^2 y'_{n+1} - \tfrac{1}{24}\nabla^3 y'_{n+1} - \tfrac{19}{720}\nabla^4 y'_{n+1} - \tfrac{3}{160}\nabla^5 y'_{n+1} - \tfrac{863}{60480}\nabla^6 y'_{n+1} + \cdots]$$

notation $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$

$y'_n = f'_n$

TABLE 1.1

Predictor

ADAMS–BASHFORTH FORMS

q	Coefficient of h	y_n'	y'_{n-1}	y'_{n-2}	y'_{n-3}	y'_{n-4}	y'_{n-5}	local truncation error
0	1	1						$\frac{1}{2} h^2 f'(\gamma)$
1	1/2	3	−1					$\frac{5}{12} h^3 f''(\gamma)$
2	1/12	23	−16	5				$\frac{9}{24} h^4 f'''(\gamma)$
3	1/24	55	−59	37	−9			$\frac{251}{720} h^5 f^{iv}(\gamma)$
4	1/720	1901	−2774	2616	−1274	251		$\frac{475}{1440} h^6 f^{v}(\gamma)$
5	1/1440	4277	−7923	9982	−7298	2877	−475	$\frac{19087}{60480} h^7 f^{vi}(\gamma)$

$$y_{n+1} = y_n + h y_n' \qquad (q = 0)$$

$$y_{n+1} = y_n + (h/2)[3y_n' - y'_{n-1}] \qquad (q = 1)$$

predicts $\longrightarrow$ $$y^*_{n+1} = y_n + (h/12)[23y_n' - 16y'_{n-1} + 5y'_{n-2}] \qquad (q = 2)$$

$$y_{n+1} = y_n + (h/24)[55y_n' - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}] \qquad (q = 3)$$

Error $O\left(h^{q+2} f^{[q+1]}(\gamma)\right)$

اگر معادله‌ی Adams_Bashforth را بعد از یک جمله قطع کنیم تنها y'_n داریم و مطابق جدول بالا ضریب آن یک خواهد شد. چنانچه بعد از ۲ جمله قطع کنیم y'_n و y'_{n-1} داریم و ضرایب نیز ۳ و ۱- می‌شود.

به عنوان مثال برای محاسبهٔ رانگ-کوتا مرتبه ۴ را از جدول ۱-۱ با کمک رابطه AB.PC بدست بیاوریم به صورت زیر در می آید:

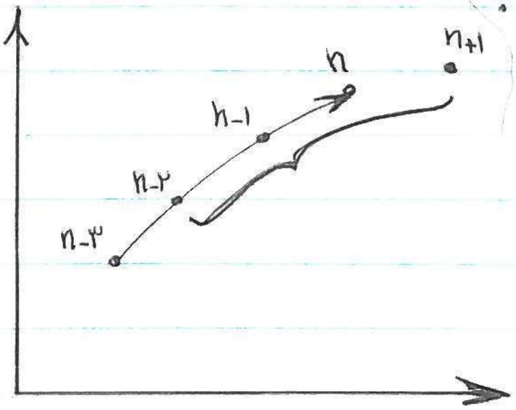
$$y^{*}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55\,y'_n - 59\,y'_{n-1} + 37\,y'_{n-2} - 9\,y'_{n-3}\right]$$

با استفاده از اطلاعات مرحله قبل y'_i را از روش رانگ-کوتا استفاده می کنیم و پس از مرحله P (پیشگویی) می بایست E (مشتق گیری) را هم حساب بکنیم:

$$P \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55\,y'_n - 59\,y'_{n-1} + 37\,y'_{n-2} - 9\,y'_{n-3}\right]$$

$$E \Rightarrow y_{n+1} = f(x_{n+1}, y^{*}_{n+1})$$

کاری که ما انجام داده ایم مطابق نمودار زیر است:



ما تا به اینجا تا مرحله n را y_n پیشگویی کرده ایم پس از آن می بایست از ۴ نقطه بعدی با یک shift به جلو مقدار آن را محاسبه بنماییم. (در نمودار روبرو بخش ← خورده بیانگر مرحله اول است و بخش ﹏ بیانگر زمانی است که یک shift به جلو می رود)

✱ معادلات Adams Moulton:

برای محاسبات Adams.M. با استفاده از اپراتورها به صورت زیر عمل می کنیم:

$$I^n = \frac{E^n - 1}{D} \qquad D = \frac{\ln(1-\nabla)}{-h}$$

برای حالت خاص هنگامی که $(n=1)$ اپراتورهای ما به صورت زیر در می آید:

$$I = \frac{E-1}{D} \Rightarrow I = \frac{E\nabla}{D} = \frac{-hE\nabla}{\ln(1-\nabla)}$$

$$\boxed{E-1 = E\nabla}$$

در رابطه بالا عبارت $\ln(1-\nabla)$ را طبق بسط مک لوران وقتی بسط بدهیم داریم:

$$\ln(1-\nabla) = \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \dots$$

وقتی عبارت بالا را در I قرار بدهیم آنگاه رابطه ما به صورت زیر در خواهد آمد:

$$I = \frac{hE\nabla}{\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \dots} = hE\left(1 + \alpha_1\nabla + \alpha_2\nabla^2 + \alpha_3\nabla^3 + \alpha_4\nabla^4 + \dots\right)$$

جملات بالا را طرفین وسطین می کنیم و در نهایت با مقایسه کردن آنها با همدیگر داریم :

$$\nabla^{2} : \frac{1}{2} + \alpha_1 = 0 \longrightarrow \alpha_1 = \frac{-1}{2}$$

$$\nabla^{3} : \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \longrightarrow \alpha_2 = \frac{-1}{12}$$

$$\nabla^{4} : \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \longrightarrow \alpha_3 = \frac{-1}{24}$$

اگر مقادیر α بدست آمده را جا گذاری کنیم آنگاه داریم :

$$I f(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = hE\left[1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^{2} - \frac{1}{24}\nabla^{3} - \frac{19}{720}\nabla^{4} - \frac{3}{160}\nabla^{5} - \frac{863}{60480}\nabla^{6} - \dots\right] f(x_i)$$

آنگاه برای محاسبهٔ y_{n+1} ما خواهیم داشت :

$$y_{n+1} = y_n + h\left[1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^{2} - \frac{1}{24}\nabla^{3} - \frac{19}{720}\nabla^{4} - \frac{3}{160}\nabla^{5} - \frac{763}{60484}\nabla^{6} - \dots\right] y'_{n+1}$$

در جدول ۱-۲ تمامی ضرایبی که گفته شده است بیان شده است :

Adams _ Moulton

$$y_{n+1} = y_n + h\left[y'_{n+1}\left(1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^{2} - \frac{1}{24}\nabla^{3} - \frac{19}{720}\nabla^{4} - \frac{3}{160}\nabla^{5} - \frac{863}{60480}\nabla^{6} + \dots\right)\right]$$

TABLE 1.2

ADAMS–MOULTON FORMS

Corrector

q	Coefficient of h	y'_{n+1}	y_n'	y'_{n-1}	y'_{n-2}	y'_{n-3}	y'_{n-4}	local truncation error
0	1	1						$-\frac{1}{2}h^2 f'(\gamma)$
1	1/2	1	1					$-\frac{1}{12}h^3 f''(\gamma)$
2	1/12	5	8	−1				$-\frac{1}{24}h^4 f'''(\gamma)$
3	1/24	9	19	−5	1			$-\frac{19}{720}h^5 f^{iv}(\gamma)$
4	1/720	251	646	−264	106	−19		$-\frac{3}{160}h^6 f^{v}(\gamma)$
5	1/1440	475	1427	−798	482	−173	27	$-\frac{863}{60480}h^7 f^{vi}(\gamma)$

$\xrightarrow{\text{corrects}}$ $(q=2)$ $\quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left[5y'_{n+1} + 8y'_n - y'_{n-1}\right]$

اگر رابطه را بعد از یک جمله قطع کنیم فقط y'_{n+1} و اگر بعد از ۲ جمله y'_{n+1} و y_n و ... (درست به مانند روش Adam Bashforth) به عنوان مثال در زیر داریم:

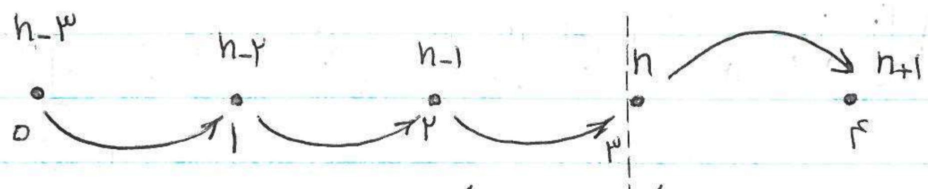
$$P:\ y^{*}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55\,y'_n - 59\,y'_{n-1} + 37\,y'_{n-2} - 9\,y'_{n-3}\right]$$

$$E:\ y^{*}_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

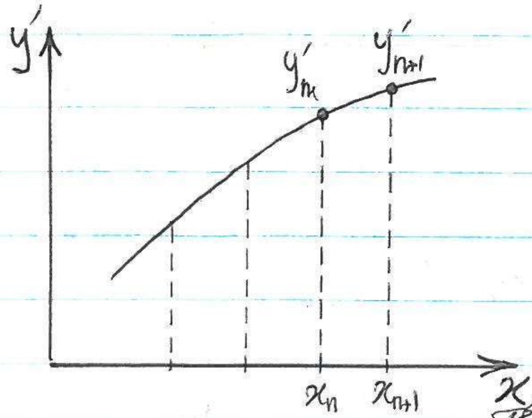
$$C:\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9\,y'^{*}_{n+1} + 19\,y'_n - 5\,y'_{n-1} + 1\,y'_{n-2}\right]$$

$$E:\ y_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

ما برای محاسبات خود به نقاط زیر احتیاج داریم که به طور نمادین در زیر نشان داده شده است:



در ابتدا همواره می بایست از رانگ کوتا استفاده کنیم.



ما در گذشته گفته بودیم که اگر معادله مرتبه اول به صورت زیر داشته باشیم:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=y'$$

$$y_{n+1}=\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'\,dx$$

و آن را بر روی نمودار روبرو نشان بدهیم برای محاسبه آن از روش Single Step استفاده می‌کنیم. این روشها ساده بودند و با جاگذاری مقادیر (Function Evaluation) بدست می‌آمدند. ولی در روشهای Multy Step ما از روی نقاط قبلی بدست می‌آوردیم که بین آن چند نقطه چند جمله‌ای مناسب با آن را fit می‌کردیم. این چند جمله‌ای خود به خود آغاز نمی‌شد و نیازمند یک آغازگر بود که این آغازگرها همانا روشهای رانگ-کوتا ۴ بودند. عملیاتی که ما انجام می‌دادیم به نام پیشگو تصحیح کن (Pridictor Corrector) معروف بودند. در واقع سطح زیر منحنی در n+1 نداریم و با پیشگویی آن را بدست می‌آوریم. نحوه بدست آوردن هم این گونه است که با کمک فرمولهای Backward و با Shift به جلو آن را حساب می‌کردیم. با کمک جداولی که برای روابط ADAMS-BASHFORTH در صفحه ۱۰۵ و همچنین ADAMS MOULTON در صفحه ۱۰۷ موجود است برای این کار استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال اگر با کمک این جدول‌ها برای مرتبه ۴ بخواهیم در نظر بگیریم داریم:

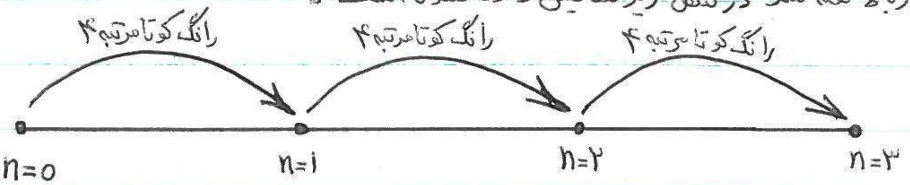
(P) $$y^{*}_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[55\,y'_n-59\,y'_{n-1}+37\,y'_{n-2}-9\,y'_{n-3}\right]$$ پیشگویی

(E) $$y'^{*}_{n+1}=f(x_{n+1}, y^{*}_{n+1})$$ محاسبه مشتق

(C) $$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[9\,y'^{*}_{n+1}+19\,y'_n-5\,y'_{n-1}-y'_{n-2}\right]$$ تصحیح کن

(E) $$y'_{n+1}=f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

آنچه در بالا گفته شد در شکل زیر نمایش داده شده است:



همانطور که می‌بینید درجه function Evaluation با درجه رانگ کوتا برابر شده است. (n=3)

بنابراین پس از طی ۳ مرحله می توانیم به مرحله $n=0$ برگردیم. این روشهای پیشگو تصحیح کن انواع استراتژی ها را دارد و می توان در بعضی مراحل حل تکرار را در آنها اعمال بنمائیم. ما می توانیم y^*_{n+1} را با y_{n+1} مقایسه کنیم اگر خطا قابل قبول باشد به کارمان ادامه می دهیم وگرنه به خط y^*_{n+1} مجدداً برمی گردیم. آنچه گفته شد در زیر مشاهده می کنید:

$$\text{(P)}\quad y^*_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[55y'_n-59y'_{n-1}+37y'_{n-2}-9y'_{n-3}\right]$$

$$\text{(E)}\quad y'^*_{n+1}=f(x_{n+1},y^*_{n+1}) \xleftarrow{\;y^*_{n+1}=y_{n+1}\;} \text{NO}$$

$$\text{(C)}\quad y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[9y'^*_{n+1}+19y'_n-5y'_{n-1}-y'_{n-2}\right]\longrightarrow |y_{n+1}-y^*_{n+1}|<\text{Tolerance}$$

$$\text{(E)}\quad y'_{n+1}=f(x_{n+1},y_{n+1}) \longleftarrow \text{بله}$$

توجه ← برای تعیین ضرایب مرحله (P) از جدول ADAMS_BASHFORTH و برای تعیین مرحله (E) از جدول ADAMS _ MOULTON استفاده می نمایم.

کار دیگری که می توانیم انجام دهیم این است که خطا را تخمین بزنیم و ببینیم قابل قبول است یا خیر. ما می توانیم مقادیر حدس زده شده (Pridict) و اصلاح شده (Corrective) را درست کنیم که برای عبارت خطا به صورت زیر است:

حدس زده شده
$$\text{(P)}\quad y^*_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[55y'_n-59y'_{n-1}+37y'_{n-2}-9y'_{n-3}\right]+\frac{251}{720}h^5f^{IV}(\xi)$$

تصحیح شده
$$\text{(C)}\quad y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[9y'^*_{n+1}+19y'_n-5y'_{n-1}-y'_{n-2}\right]-\frac{19}{720}\;f^{IV}(\xi)$$

در عبارت بالا مقدار «ξ» برای (P) عددی است بین x_{n-1} و x_{n-2} و همچنین برای (C) عددی بین x_{n-2} و x_{n-3} است.

اگر $y(x_{n+1})$ که true solution (حل صحیح) است و آن عبارتست از:

$$y(x_{n+1})=y^*_{n+1}+\frac{251}{720}h^5f^{IV}(\xi)\quad\text{(P)}$$

true solution

$$y(x_{n+1})=y_{n+1}-\frac{19}{720}h^5f^{IV}(\xi)\quad\text{(C)}$$

توجه کنید که در مرحله (C) «تصحیح شده» مقدار خطا کمتر است چون محاسبات از ۲ طرف در نظر گرفته شده است. اگر این ۲ عبارت true solution را از همدیگر کم کنیم داریم:

$$y(x_{n+1})_P-y(x_{n+1})_C=\left(\frac{251}{720}-\left(\frac{-19}{720}\right)\right)h^5f^{IV}(\xi)=\frac{270}{720}h^5f^{IV}(\xi)$$

$$h^5f^{IV}(\xi)=\frac{720}{270}\left(y_{n+1}-y^*_{n+1}\right)h^5f^{IV}(\xi)$$

برای مراحل P «پیشگویی» و C «تصحیح» مقدار خطا به صورت زیر بدست می آید:

$$\text{مقدار خطا}\begin{cases} E_P = \frac{251}{720}\left(y_{n+1} - y^{*}_{n+1}\right) \\ E_C = \frac{-19}{720}\left(y_{n+1} - y^{*}_{n+1}\right) \end{cases} \qquad \text{ضریب اصلاح کننده}\begin{cases} m_P = \frac{251}{720} \\ m_C = \frac{-19}{720} \end{cases}$$

برای مراحل بعدی نیز می توان همین کار را با کمک جداول ADAMS_BASHFORTH برای تعیین مرحله P و با کمک جدول ADAMS_MOULTON برای مرحله C استفاده کرد. به جای اعمال حل تکراری از روش modification (اصلاح کننده) استفاده می کنیم. برای این کار خطایی که بدست می آوریم احتیاج به پیش گویی «Pridict» و تصحیح «Corrective» ندارد. ما در این روش هنوز مقدار دقیقی برای حدس نداریم. از اینرو فرض می کنیم که برای حدس ما عبارت $y_{n+1} - y^{*}_{n+1}$ بین مقادیر مراحل P و C تقریباً برابر است:

$$y_{n+1} - y^{*}_{n+1} \approx y_n - y^{*}_n$$

با این فرضی که ما در بالا کردیم برای مرحله پیشگویی (P) یک modification (اصلاح) انجام می دهیم. این مرحله اصلاح M به صورت زیر نمایش داده شده است:

$$\text{(P)}\quad y^{*}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55\,y'_n - 59\,y'_{n-1} + 37\,y'_{n-2} - 9\,y'_{n-3}\right]$$

$$\text{(M)}\quad y^{*}_{n+1} = y^{*}_{n+1\,P} + \frac{251}{720}$$

$$\text{(E)}\quad y'^{*}_{n+1} = f\left(x_{n+1}, y^{*}_{n+1\,m}\right)$$

$$\text{(C)}\quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9\,y'^{*}_{n+1\,m} + 19\,y'_n - 5\,y'_{n-1} - y'_{n-2}\right]$$

$$\text{(M)}\quad y_{n+1} = y_{n+1\,C} - \frac{19}{720}\left(y_{n+1\,C} - y_{n+1\,P}\right)$$

$$\text{(E)}\quad y'_{n+1} = f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)$$

برای modification ما ابتدا مرحله‌ی (P) را اصلاح می کنیم. پس از آن مرحله‌ی (C) را اصلاح می نماییم. با این کار انواع و اقسام y_{n+1} و y^{*}_{n+1} بدست می آید برای M و P و C که ایجاد مشکل می نماید. از این رو تغییرات زیر را اعمال می نماییم:

$P_n, P_{n+1} \longrightarrow$ Pridication Value مقدارهای حدسی

$m_{n+1} \longrightarrow$ modifiL Predict Value اصلاح مقدارهای حدسی

$C_n, C_{n+1} \longrightarrow$ Corrected Value تصحیح مقادیر

$y_{n+1} \longrightarrow$ modifial Corrected Value اصلاح مقادیر تصحیح شده

با توجه به تغییراتی که در انتهای صفحهٔ قبل گفته شد مراحل کار ما به صورت زیر در خواهد آمد:

(P) $P_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55\, y'_n - 59\, y'_{n-1} + 37\, y'_{n-2} - 9\, y'_{n-3}\right]$

(M) $m_{n+1} = P_{n+1} + \frac{251}{720}(C_n - P_n)$

(E) $m'_{n+1} = f(x_{n+1}, m_{n+1})$

(C) $C_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9\, m'_{n+1} + 19\, y'_n - 5\, y'^{*}_{n-1} + 1\, y'_{n-2}\right]$

(M) $y_{n+1} = C_{n+1} - \frac{19}{720}(C_{n+1} - P_{n+1})$

(E) $y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

به طور کلی ما استراتژی هایی را که در اختیار داریم عبارتست از:

1. PECE
2. $P(EC)^S E$
3. PMECME
4. $PM(EC)^S E$

معمولاً یا از استراتژی (۳) و یا (۴) استفاده می شود. ما می توانیم با modify (اصلاح) کردن در حلقه (۴) به حل صحیح برسیم به عنوان مثال این استراتژی ها را برای مرتبه دوم از روی جداول ADAMS_BASHFORTH و ADAMS_MOULTON محاسبه می کنیم:

$\boxed{\text{استراتژی نخست}}$ ⟵ PECE (بدون حلقه)

(P) $y^{*}_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[3\, y'_n - y'_{n-1}\right]$

رابطه بالا را با رانگ - کوتا مرتبه دوم آغاز می کنیم:

(E) $y'^{*}_{n+1} = f(x_{n+1}, y^{*}_{n+1})$

(C) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[y'^{*}_{n+1} + y'_n\right]$

(E) $y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

$\boxed{\text{استراتژی دوم}}$ ⟵ $P(EC)^S E$ (با حلقه تکرار)

(P) $y^{*}_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[3\, y'_n - y'_{n-1}\right]$

(E) $y'^{*}_{n+1} = f(x_{n+1}, y^{*}_{n+1})$ ⟵ $y^{*}_{n+1} = y_{n+1}$ — NO

(C) $y_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$ ⟶ $|y_{n+1} - y^{*}_{n+1}| < \text{Tolerance}$

(E) $y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$ ⟵ بله

استراتژی سوم ← PMECME (بدون حلقهٔ تکرار)

برای m_p و m_c به صورت زیر بدست می آوریم و گاهی هم به صورت آماده شده به ما می دهند. روش بدست آوردن آنها هم مطابق صفحهٔ ۱۱۰ و ۱۱۱ با برابر هم قراردادن خطاها است:

$$m_p = \frac{5}{6} \qquad m_c = \frac{-1}{6}$$

با داشتن این ۲ مقدار می توان از جداول ADAMS - BASHFORTH و همچنین ADAMS - MOLUTON مقادیر P و M و C و N و y_n و ... را طی مراحل زیر بدست آورد. این مراحل عبارتست از:

P $\quad P_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[3y'_n - y'_{n-1}\right]$

M $\quad m_{n+1} = P_{n+1} + \frac{5}{6}\left[C_n - P_n\right]$

برای محاسبه این مرحله از اطلاعات مراحل قبل استفاده می کنیم:

E $\quad m'_{n+1} = f(x_{n+1}, m_{n+1})$

C $\quad C_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[m'_{n+1} - y'_n\right]$

M $\quad y_{n+1} = C_{n-1} - \frac{1}{6}\left[C_{n+1} - P_{n+1}\right]$

E $\quad y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

استراتژی چهارم ← $PM(EC)^S ME$ (باحلقهٔ تکرار)

P $\quad P_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[3y' - y'_{n-1}\right]$

M $\quad m_{n+1} = P_{n+1} + \frac{5}{6}\left[C_n - P_n\right]$

در اینجا مثل حل تکراری با Relaxation انجام می دهیم

$m_{n+1} = C_{n+1}$

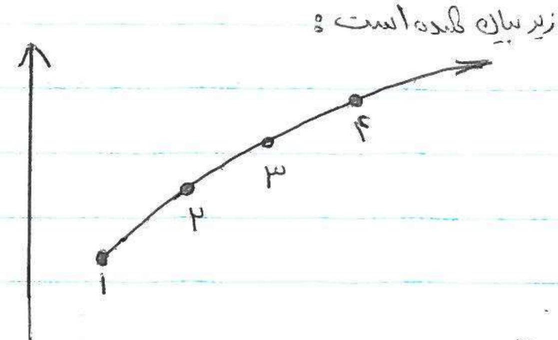
E $\quad m'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$ ← NO

C $\quad C_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[m'_{n+1} + y'_n\right] \longrightarrow |m_{n+1} - C_{n+1}| < Tolerance$

M $\quad y_{n+1} = C_{n+1} - \frac{1}{6}\left[C_{n+1} - P_{n+1}\right]$ ← بله

E $\quad y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

کاری که انجام می دهیم بدین ترتیب است که در شکل زیر بیان شده است:



برای نقاط ① تا ③ مقادیرما معلوم است.

با امتداد نمودار مقدار نقطه ④ را پیش بینی می کنیم

عملیاتی که گفته شد برای مرحله Pridict بوده.

برای مرحلهٔ Corrective مقدارهای ① تا ③ را با یک Shift به جلو بدست می آوریم. مقادیری که توسط P و C بدست آمده را با هم مقایسه می کنیم اگر اختلاف آنها کمتر از Tolerance باشد

عملیات ما به پایان رسیده است وگرنه آنقدر در حلقه جاگذاری را انجام می دهیم تا اینکه اختلاف P و C به حد قل مقدار ممکن برسد.

حال آنچه گفته شد برای دستگاهی به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow y' = f_1(x, y, z, u)$$

$$\frac{dz}{dx} = z' \Rightarrow z' = f_2(x, y, z, u)$$

$$\frac{du}{dx} = u' \Rightarrow u' = f_3(x, y, z, u)$$

ما روابط خودمان را با فرض مرتبه ۲ انجام می دهیم که برای این کار می بایست Pridication خود را به صورت زیر آغاز بکنیم:

(P)
$$y^{*}_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[3y'_n - y'_{n-1}\right]$$

$$Z^{*}_{n+1} = Z_n + \frac{h}{2}\left[3Z'_n - Z'_{n-1}\right]$$

$$U^{*}_{n+1} = U_n + \frac{h}{2}\left[3U'_n - U'_{n-1}\right]$$

حال از رانگ کوتا مرتبه دوم استفاده می کنیم و مرحله Evaluation را به صورت زیر بدست می آوریم:

(E)
$$y'^{*}_{n+1} = f_1(x^{*}_{n+1}, y^{*}_{n+1}, Z^{*}_{n+1}, U^{*}_{n+1})$$

$$Z'^{*}_{n+1} = f_2(x^{*}_{n+1}, y^{*}_{n+1}, Z^{*}_{n+1}, U^{*}_{n+1})$$

$$U'^{*}_{n+1} = f_3(x^{*}_{n+1}, y^{*}_{n+1}, Z^{*}_{n+1}, U^{*}_{n+1})$$

حالا به مرحله Corrector می رویم و داریم:

(C)
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[y'^{*}_{n+1} + y^{*}_{n}\right]$$

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{h}{2}\left[Z'^{*}_{n+1} + Z^{*}_{n}\right]$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{h}{2}\left[U'^{*}_{n+1} + U'_{n}\right]$$

بین مرحله C و E که در بالا گفته شد می توان یک حلقه تکرار گذاشت که مقایسه ای بین $y_{n+1} \leftrightarrow y'^{*}_{n+1}$ و $Z_{n+1} \leftrightarrow Z'^{*}_{n+1}$ و $U_{n+1} \leftrightarrow U'^{*}_{n+1}$ صورت می گیرد که می بایست خطا کمتر از مقدار Tolerance گردد:

مقایسه $y \longrightarrow y_{n+1} \leftrightarrow y'^{*}_{n+1}$: $|y^{*}_{n+1} - y_{n+1}| < \text{Tolerance} \xrightarrow{\text{نه}}$ مرحله E $\quad y'^{*}_{n+1} = y_{n+1}$

مقایسه $Z \longrightarrow Z_{n+1} \leftrightarrow Z'^{*}_{n+1}$: $|Z^{*}_{n+1} - Z_{n+1}| < \text{Tolerance} \xrightarrow{\text{نه}}$ مرحله E $\quad Z'^{*}_{n+1} = Z_{n+1}$

مقایسه $U \longrightarrow U_{n+1} \leftrightarrow U'^{*}_{n+1}$: $|U^{*}_{n+1} - U_{n+1}| < \text{Tolerance} \xrightarrow{\text{نه}}$ مرحله E $\quad U'^{*}_{n+1} = U_{n+1}$

به عبارت دیگر مطلب انتهای صفحه قبل را به صورت زیر نیز می توان بیان کرد :

E

$$y'^{*}_{n+1} = f_1(x_{n+1}, y^{*}_{n+1}, Z^{*}_{n+1}, U^{*}_{n+1}) \leftarrow U^{*}_{n+1} = U_{n+1}$$

$$Z'^{*}_{n+1} = f_2(x_{n+1}, y^{*}_{n+1}, Z^{*}_{n+1}, U^{*}_{n+1}) \leftarrow Z^{*}_{n+1} = Z_{n+1}$$

$$U'^{*}_{n+1} = f_3(x_{n+1}, y^{*}_{n+1}, Z^{*}_{n+1}, U^{*}_{n+1}) \leftarrow U^{*}_{n+1} = U_{n+1}$$

NO

C

$$U_{n+1} = U_n + \frac{h}{2}\left[U'^{*}_{n+1} + U'_n\right] \quad |U'^{*}_{n+1} - U_{n+1}| < Tolerance$$

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{h}{2}\left[Z'^{*}_{n+1} + Z'_n\right] \quad |Z'^{*}_{n+1} - Z_{n+1}| < Tolerance$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[y'^{*}_{n+1} + Z'_n\right] \quad |y'^{*}_{n+1} - y_{n+1}| < Tolerance$$

اگر جوابِ نتیجه جواب مثبت باشد به مرحله آخر یعنی Evaluate می رویم که داریم :

$$y'_{n+1} = f_1(x_{n+1}, y_{n+1}, Z_{n+1}, U_{n+1})$$

$$Z'_{n+1} = f_2(x_{n+1}, y_{n+1}, Z_{n+1}, U_{n+1})$$

$$U'_{n+1} = f_3(x_{n+1}, y_{n+1}, Z_{n+1}, U_{n+1})$$

روش بالا به مانند روش ژاکوبی می ماند اما با روشی به مانند گاوس - سایدل می توان به طور همزمان مقادیر را محاسبه نمود .

مثال) ما معادلاتی به صورت زیر داریم :

$$\frac{dy}{dx} = -0.3y + 0.1Z + 0.1U$$

$$\frac{dZ}{dx} = -0.2Z + 0.1U$$

$$\frac{dU}{dx} = -0.1U$$

مقادیر ابتدایی نیز به صورت زیر است :

$$x = 0 \qquad y = 3 \qquad Z = 2 \qquad U = 1$$

و با حل تحلیلی مقادیر ما به صورت زیر درآمده است :

$$\begin{cases} y = e^{-0.1x} + e^{-0.2x} + e^{-0.3x} \\ Z = e^{-0.1x} + e^{-0.2x} \\ U = e^{-0.1x} \end{cases}$$

حل ما با استفاده از جداول ADAMS_BASHFORT و همچنین ADAMS_MOLOUTN

مرتبه ۴ استفاده می کنیم . برای حل معادلات استفاده شده برای مرتبه ۴ ما به صورت زیر عمل می کنیم :

$$(P)\quad y^{*}_{n+1} = y_n + \frac{h}{۲۴}\left[۵۵\, y'_n - ۵۹\, y'_{n-1} + ۳۷\, y'_{n-۲} - ۹\, y'_{n-۳}\right]$$

$$Z^{*}_{n+1} = Z_n + \frac{h}{۲۴}\left[۵۵\, Z'_n - ۵۹\, Z'_{n-1} + ۳۷\, Z'_{n-۲} - ۹\, Z'_{n-۳}\right]$$

$$U^{*}_{n+1} = U_n + \frac{h}{۲۴}\left[۵۵\, U'_n - ۵۹\, U'_{n-1} + ۳۷\, U'_{n-۲} - ۹\, U'_{n-۳}\right]$$

پس از مرحله (P) «پیشگویی» که در بالا آمده است و قبل از انجام مرحله (C) «تصحیح» باید Evalation انجام بدهیم . بعد از آن یک حلقه تکرار قرار دهیم که یا تکرار است و یا اصلاح شده می باشد . مرحله E به صورت زیر می باشد :

$$(E)\quad y'^{*}_{n+1} = f_1\left(x_{n+1}, y^{*}_{n+1}, Z^{*}_{n+1}, U^{*}_{n+1}\right)$$

$$Z'^{*}_{n+1} = f_۲\left(x_{n+1}, y^{*}_{n+1}, Z^{*}_{n+1}, U^{*}_{n+1}\right)$$

$$U'^{*}_{n+1} = f_۳\left(x_{n+1}, y^{*}_{n+1}, Z^{*}_{n+1}, U^{*}_{n+1}\right)$$

برای مرحلهٔ (C) «تصحیح» نیز به صورت زیر داریم :

$$(C)\quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{۲}\left[y'^{*}_{n+1} + y'_n\right]$$

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{h}{۲}\left[Z'^{*}_{n+1} + Z'_n\right]$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{h}{۲}\left[U'^{*}_{n+1} + U'_n\right]$$

بین مرحله (C) و (E) که در بالا گفته شده است یک حلقه تکرار قرار می دهند که در انتهای صفحهٔ ۱۱۴ و ابتدای صفحه قبل پیرامون آن توضیح داده شده است .

نحوهٔ استفاده از این روش تصحیح کردن در برنامه کامپیوتری که در صفحات آینده آمده است مشخص شده است . در این برنامه از رانگ کوتا مرتبه ۴ استفاده می کنیم که برنامه آن مطابق صفحات آینده است . پس از بیان برنامه هم برای هر قسمت از آن جداگانه توضیحاتی داده شده است :

```
C
C       SOLUTION OF A SET OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
C       USING THE FOURTH ORDER ADAMS-BASHFORTH, ADAMS-MOULTON
C       PREDICTOR-CORRECTOR METHOD WITH AN ITERATIVE ALGORITHM.
C       THE INTEGRATION IS STARTED USING CLASSIC FOURTH ORDER
C       RUNGE-KUTTA METHOD AND THE ITERATION PROCEDURE IS THE
C       THE GAUSS-SEIDEL WITH RELAXATION.
C
C       PROGRAM NAME: ABAMPC4.FOR      (19)
C
C       EXAMPLE CASE: dY/dX = -.3 Y + .1 Z + .1 U
C                     dZ/dX = -.2 Z + .1 U
C                     dU/dX = -.1 U
C
C       WITH INITIAL CONDITIONS: AT X=0, Y=3, Z=2, U=1
C
C       ANALYTICAL SOLUTION IS : Y = EXP(-.1X) + EXP(-.2X) + EXP(-.3X)
C                                Z = EXP(-.1X) + EXP(-.2X)
C                                U = EXP(-.1X)
C
      REAL X(51),Y(51),Z(51),U(51),DYDX(51),DZDX(51),DUDX(51)
      REAL YS(51),ZS(51),US(51),DYDXS(51),DZDXS(51),DUDXS(51)
      REAL YTRUE(51),ZTRUE(51),UTRUE(51),H,K1,K2,K3,K4
      REAL L1,L2,L3,L4,M1,M2,M3,M4
      OPEN(10,FILE='ABAMPC4.RES',STATUS='NEW')
C
C     SET TOLERANCE FOR ITERATION PROCEDURE
C     AND MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS
C
      TOL=0.00000001
      IMAX=50
C
C     SPECIFY THE RELAXATION FACTOR
C
      WRITE(*,7)
  7   FORMAT('  ENTER RELAXATION FACTOR')
      READ(*,8) W
  8   FORMAT(F4.2)
      WRITE(10,9) W
  9   FORMAT(' RELAXATION FACTOR: ',F4.2)
C
C     SPECIFY THE INITIAL CONDITION AND THE STEP SIZE.
C
      X(1)=0.0
      Y(1)=3.0
      Z(1)=2.0
      U(1)=1.0
      H=0.01
C
C     USE RK FOR THE FIRST 4 INTERVALS TO START
C     THE PREDICTOR-CORRECTOR METHOD.
C
      DO 100 J=2,5
      I=J-1
      XT=X(I)
      YT=Y(I)
      ZT=Z(I)
      UT=U(I)
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      DYDX(I)=F1
      DZDX(I)=F2
      DUDX(I)=F3
      K1=H*F1
      L1=H*F2
```

```
      M1=H*F3
C
      XT=X(I)+(H/2.)
      YT=Y(I)+(K1/2.)
      ZT=Z(I)+(L1/2.)
      UT=U(I)+(M1/2.)
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      K2=H*F1
      L2=H*F2
      M2=H*F3
C
      XT=X(I)+(H/2.)
      YT=Y(I)+(K2/2.)
      ZT=Z(I)+(L2/2.)
      UT=U(I)+(M2/2.)
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      K3=H*F1
      L3=H*F2
      M3=H*F3
C
      XT=X(I)+H
      YT=Y(I)+K3
      ZT=Z(I)+L3
      UT=U(I)+M3
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      K4=H*F1
      L4=H*F2
      M4=H*F3
C
      X(J)=X(I)+H
      Y(J)=Y(I)+((1./6.)*(K1+(2.*K2)+(2.*K3)+K4))
      Z(J)=Z(I)+((1./6.)*(L1+(2.*L2)+(2.*L3)+L4))
      U(J)=U(I)+((1./6.)*(M1+(2.*M2)+(2.*M3)+M4))
 100  CONTINUE
C
      J=5
      XT=X(J)
      YT=Y(J)
      ZT=Z(J)
      UT=U(J)
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      DYDX(J)=F1
      DZDX(J)=F2
      DUDX(J)=F3
C
C     END OF THE STARTER SEGMENT
C
      DO 800 N=5,50
      ITER=1
      N1=N-1
      N2=N-2
      N3=N-3
      NN=N+1
      X(NN)=X(N)+H
C
C     PREDICTOR
C
      TEMP=(55.*DYDX(N))-(59.*DYDX(N1))+(37.*DYDX(N2))-(9.*DYDX(N3))
      YS(NN)=Y(N)+((H/24.)*TEMP)
      TEMP=(55.*DZDX(N))-(59.*DZDX(N1))+(37.*DZDX(N2))-(9.*DZDX(N3))
      ZS(NN)=Z(N)+((H/24.)*TEMP)
      TEMP=(55.*DUDX(N))-(59.*DUDX(N1))+(37.*DUDX(N2))-(9.*DUDX(N3))
      US(NN)=U(N)+((H/24.)*TEMP)
C
```

y' z' u'

YS, ZS, US $\}$ predicted values. y^*_{n+1} z^*_{n+1} u^*_{n+1}

```
C       USE GAUSS-SEIDEL ITERATION ON THE CORRECTOR
C
 400    XT=X(NN)
        YT=YS(NN)
        ZT=ZS(NN)
        UT=US(NN)
evaluate CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
y'n+1 <- DYDXS(NN)=F1
correct <- TEMP=(9.*DYDXS(NN))+(19.*DYDX(N))-(5.*DYDX(N1))+DYDX(N2)
y'n+1   Y(NN)=Y(N)+((H/24.)*TEMP)
        Y(NN)=YS(NN)+(W*(Y(NN)-YS(NN)))
        YT=Y(NN)
        CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
        DZDXS(NN)=F2
        TEMP=(9.*DZDXS(NN))+(19.*DZDX(N))-(5.*DZDX(N1))+DZDX(N2)
        Z(NN)=Z(N)+((H/24.)*TEMP)
        Z(NN)=ZS(NN)+(W*(Z(NN)-ZS(NN)))
        ZT=Z(NN)
        CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
        DUDXS(NN)=F3
        TEMP=(9.*DUDXS(NN))+(19.*DUDX(N))-(5.*DUDX(N1))+DUDX(N2)
        U(NN)=U(N)+((H/24.)*TEMP)
        U(NN)=US(NN)+(W*(U(NN)-US(NN)))
        ITER=ITER+1
C
C       CHECK FOR CONVERGENCE
C
        EY=((Y(NN)-YS(NN))/Y(NN))*100.
        EZ=((Z(NN)-ZS(NN))/Z(NN))*100.
        EU=((U(NN)-US(NN))/U(NN))*100.
        IF(ITER .GT. IMAX) GOTO 500
        IF(EY .GT. TOL) GOTO 600
        IF(EZ .GT. TOL) GOTO 600
        IF(EU .GT. TOL) GOTO 600
        GOTO 700
 500    WRITE(10,550)
 550    FORMAT('  CONVERGENCE NOT ACHIEVED IN SPECIFIED ITERATIONS')
        STOP
 600    YS(NN)=Y(NN)
        ZS(NN)=Z(NN)
        US(NN)=U(NN)
        GOTO 400
 700    XT=X(NN)
        YT=Y(NN)
        ZT=Z(NN)
        UT=U(NN)
        CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
        DYDX(NN)=F1
        DZDX(NN)=F2
        DUDX(NN)=F3
 800    CONTINUE
C
C       WRITE RESULTS
C
        DO 900 I=1,51
        YTRUE(I)=EXP(-0.1*X(I))+EXP(-0.2*X(I))+EXP(-0.3*X(I))
        ZTRUE(I)=EXP(-0.1*X(I))+EXP(-0.2*X(I))
        UTRUE(I)=EXP(-0.1*X(I))
        WRITE(10,850) X(I),Y(I),YTRUE(I),Z(I),ZTRUE(I),U(I),UTRUE(I)
 850    FORMAT(F4.2,'   ',2F11.6,'   ',2F11.6,'   ',2F11.6)
 900    CONTINUE
        STOP
        END
        SUBROUTINE DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
```

```
F1=(-0.3*YT)+(0.1*ZT)+(0.1*UT)
F2=(-0.2*ZT)+(0.1*UT)
F3=(-0.1*UT)
RETURN
END
```

RELAXATION FACTOR: 1.00

X	Y	Y_{exact}	Z	Z_{exact}	U	U_{exact}
.00	3.000000	3.000000	2.000000	2.000000	1.000000	1.000000
.01	2.994007	2.994007	1.997002	1.997002	.999000	.999000
.02	2.988028	2.988028	1.994010	1.994010	.998002	.998002
.03	2.982063	2.982063	1.991022	1.991022	.997005	.997005
.04	2.976112	2.976112	1.988040	1.988040	.996008	.996008
.05	2.970174	2.970174	1.985062	1.985062	.995012	.995012
.06	2.964251	2.964251	1.982090	1.982090	.994018	.994018
.07	2.958341	2.958341	1.979122	1.979122	.993024	.993024
.08	2.952445	2.952445	1.976159	1.976159	.992032	.992032
.09	2.946563	2.946563	1.973202	1.973202	.991040	.991040
.10	2.940694	2.940694	1.970249	1.970248	.990050	.990050
.11	2.934839	2.934839	1.967301	1.967301	.989060	.989060
.12	2.928998	2.928998	1.964357	1.964357	.988072	.988072
.13	2.923170	2.923170	1.961419	1.961419	.987084	.987084
.14	2.917356	2.917356	1.958486	1.958486	.986098	.986098
.15	2.911555	2.911555	1.955558	1.955557	.985112	.985112
.16	2.905768	2.905768	1.952634	1.952634	.984127	.984127
.17	2.899994	2.899994	1.949715	1.949715	.983144	.983144
.18	2.894233	2.894233	1.946801	1.946801	.982161	.982161
.19	2.888486	2.888486	1.943892	1.943892	.981179	.981179
.20	2.882753	2.882753	1.940988	1.940988	.980199	.980199
.21	2.877032	2.877032	1.938089	1.938089	.979219	.979219
.22	2.871325	2.871325	1.935194	1.935194	.978240	.978240
.23	2.865631	2.865631	1.932305	1.932304	.977262	.977262
.24	2.859950	2.859951	1.929420	1.929420	.976286	.976286
.25	2.854283	2.854283	1.926539	1.926539	.975310	.975310
.26	2.848628	2.848629	1.923664	1.923664	.974335	.974335
.27	2.842987	2.842987	1.920793	1.920793	.973361	.973361
.28	2.837358	2.837359	1.917928	1.917928	.972388	.972388
.29	2.831743	2.831744	1.915066	1.915066	.971416	.971416
.30	2.826141	2.826141	1.912210	1.912210	.970445	.970446
.31	2.820552	2.820552	1.909359	1.909359	.969476	.969476
.32	2.814975	2.814976	1.906512	1.906512	.968507	.968507
.33	2.809412	2.809412	1.903669	1.903669	.967538	.967539
.34	2.803861	2.803862	1.900832	1.900832	.966571	.966572
.35	2.798323	2.798324	1.897999	1.897999	.965605	.965605
.36	2.792799	2.792799	1.895171	1.895171	.964640	.964640
.37	2.787286	2.787287	1.892348	1.892348	.963676	.963676
.38	2.781787	2.781787	1.889529	1.889529	.962713	.962713
.39	2.776300	2.776300	1.886715	1.886715	.961751	.961751
.40	2.770826	2.770826	1.883906	1.883906	.960789	.960789
.41	2.765365	2.765365	1.881101	1.881101	.959829	.959829
.42	2.759916	2.759916	1.878301	1.878301	.958870	.958870
.43	2.754480	2.754480	1.875505	1.875506	.957911	.957911
.44	2.749056	2.749056	1.872715	1.872715	.956954	.956954
.45	2.743645	2.743644	1.869928	1.869929	.955997	.955997
.46	2.738246	2.738246	1.867147	1.867147	.955042	.955042
.47	2.732860	2.732860	1.864370	1.864370	.954087	.954087
.48	2.727486	2.727486	1.861598	1.861598	.953134	.953134
.49	2.722124	2.722124	1.858830	1.858830	.952181	.952181
.50	2.716775	2.716775	1.856067	1.856067	.951229	.951229

«توضیحات برنامه کامپیوتری»

(۱) صورت مساله است که در صفحهٔ 115 داده شده است.

(۲) مقادیر ابتدایی به ازای x و y و z و U است.

(۳) توابعی است که به کمک حل تحلیلی برای y و z و U بدست آمده است.

(۴) دستوری است که با آن اعلام می‌کنیم که برای مقادیر x و y و z و U و ... چه مقادیری بگیرد عدد (۵۱) که داخل پرانتز آمده است بیانگر تعداد اعداد در نظر گرفته شده است.

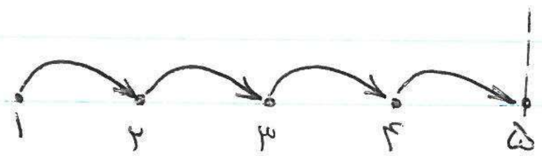
(۵) خطی است که از کاربر تقاضا می‌کند تا محاسبات را آغاز کند

(۶) میزان خطای مجاز «TOL» و همچنین حداکثر تعداد I در طول بازه در این خط مشخص شده

(۷) دستوری است که توسط برنامه برای Relaxation نمودن داده شده است.

(۸) با این دستور مقادیر اولیهٔ x و y و z و U به همراه بازه تغییرات H داده شده است.

(۹) با این دستور به برنامه اطلاع می‌دهیم که برای x و y و z و U با گامهای H شروع به محاسبه مقادیر جدید بنماید. در این قسمت با کمک روش رانگ کوتا تا مرحله ۵ پیش می‌آییم که در ۵ به مرحله (P) و (E) می‌رویم. در روش رانگ کوتا با Function Evaluation انجام بدهیم. به ازای مقادیر x و y می‌بایست حل را پیش ببریم.



ضمیمه: یادآوری در مورد خطاها

۱ـ نمایش اعداد

عدد a را درنظر می‌گیریم و آنرا در مبنای ده به صورت زیر نمایش می‌دهیم :

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_{-m} 10^{-m} \quad .$$

عدد a را می‌توان به صورت زیر نشان داد :

$$a = a_n a_{n-1} \ldots a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m} \quad .$$

بنابراین برای نمایش این عدد $n - m + 1$ رقم مورد نیاز است. ارقام موردنیاز برای نمایش برخی اعداد مثل عدد π، $\frac{1}{3}$ و $\sqrt{2}$ بینهایت است و برای ذخیره کردن این اعداد در کامپیوتر محدودیت وجود دارد و منجر به خطای اجتناب‌ناپذیری می‌شود که بعداً مورد بحث قرار می‌گیرد.

عدد a را می‌توانیم به شکل ممیز شناور نشان دهیم که به صورت زیر است :

$$a = b \times 10^N$$

N یک عدد صحیح مثبت یا منفی اشت و مشخصه یا نمای عدد نامیده می‌شود.

b هم مانتیس عدد نامیده می‌شود و : $0 \leq b < 1$

برای مثال اگر بخواهیم عدد ۳۸/۴۲ به شکل ممیز شناور نشان دهیم داریم : $0/3842 \times 10^2$

اگر بخواهیم عدد a را در کامپیوتر ذخیره کنیم تنها تعداد محدودی از ارقام مانتیس را می‌توانیم به کار ببریم که منجر به خطای گرد کردن می‌شود.

خطای گرد کردن به علت جایگزین کردن یک عدد با شکل ممیز شناور آن حاصل می‌شود.

عدد a را درنظر می‌گیریم :

$$a = 0/d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} d_{k+2} \ldots \times 10^n$$

که $1 \leq d_1 \leq 9$ و $0 \leq d_j \leq 9$ به ازای $j > 1$ است.

I) ***روش قطع کردن:*** در این روش ارقام $d_{k+1} d_{k+2} \ldots$ بریده می‌شود و عدد به صورت زیر درمی‌آید :

$$a = 0/d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n$$