ضمیمه: یادآوری در مورد خطاها

۱ ـ نمایش اعداد

عدد a را درنظر می‌گیریم و آنرا در مبنای ده به صورت زیر نمایش می‌دهیم :

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_{-m} 10^{-m} \quad .$$

عدد a را می‌توان به صورت زیر نشان داد :

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}$$

بنابراین برای نمایش این عدد $n - m + 1$ رقم مورد نیاز است. ارقام موردنیاز برای نمایش برخی اعداد مثل عدد π، $\frac{1}{3}$ و $\sqrt{2}$ بینهایت است و برای ذخیره کردن این اعداد در کامپیوتر محدودیت وجود دارد و منجر به خطای اجتناب‌ناپذیری می‌شود که بعداً مورد بحث قرار می‌گیرد.

عدد a را می‌توانیم به شکل ممیز شناور نشان دهیم که به صورت زیر است :

$$a = b \times 10^N$$

N یک عدد صحیح مثبت یا منفی اشت و مشخصه یا نمای عدد نامیده می‌شود.

b هم مانتیس عدد نامیده می‌شود و : $0 \le b < 1$

برای مثال اگر بخواهیم عدد ۳۸/۴۲ به شکل ممیز شناور نشان دهیم داریم : $0/3842 \times 10^2$

اگر بخواهیم عدد a را در کامپیوتر ذخیره کنیم تنها تعداد محدودی از ارقام مانتیس را می‌توانیم به کار ببریم که منجر به خطای گرد کردن می‌شود.

خطای گرد کردن به علت جایگزین کردن یک عدد با شکل ممیز شناور آن حاصل می‌شود.

عدد a را درنظر می‌گیریم :

$$a = 0/d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} d_{k+2} \dots \times 10^n$$

که $1 \le d_1 \le 9$ و $0 \le d_j \le 9$ به ازای $j > 1$ است.

I) ***روش قطع کردن:*** در این روش ارقام $d_{k+1} d_{k+2} \dots$ بریده می‌شود و عدد به صورت زیر درمی‌آید :

$$a = 0/d_1 d_2 \dots d_k \times 10^n$$

II) **روش گرد کردن** : در این روش داریم:

هرگاه $d_{k+1} \geq ۵$ باشد یک رقم به d_k اضافه می‌کنیم یعنی به بالا گرد می‌کنیم.

هرگاه $d_{k+1} < ۵$ باشد کلیه ارقام بعد از d_k را می‌بریم.

مثال) عدد π را درنظر می‌گیریم می‌خواهیم شکل ممیز شناور آنرا با پنج رقم به دست آوریم :

عدد π را به شکل زیر می‌نویسیم :

$$\pi = ۰/۳۱۴۱۵۹۲۶۵ \ldots \times ۱۰^{۱}$$

شکل ممیز شناور عدد π با روش قطع کردن : $\pi = ۰/۳۱۴۱۵ \times ۱۰^{۱}$

شکل ممیز شناور عدد π با روش گرد کردن : $\pi = ۰/۳۱۴۱۶ \times ۱۰^{۱}$

۲ ـ خطای مطلق و خطای نسبی

هرگاه $\bar{A}$ یک تقریب برای A باشد خطای مطلق به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E_A = |A - \bar{A}|$$

یعنی خطای مطلق، اختلاف مقدار واقعی و مقدار تقریبی است.

خطای نسبی هم به صورت زیر بیان می‌شود :

$$R_A = \frac{E_A}{|A|} = \frac{|A - \bar{A}|}{|A|} \qquad (A \neq ۰)$$

توجه : هرگاه بخواهیم عدد $\bar{A}$ عدد A را با s رقم با معنی تقریب زنیم باید داشته باشیم:

$$\frac{|A - \bar{A}|}{|A|} < ۵ \times ۱۰^{-s}$$

که s بزرگترین عدد صحیح غیرمنفی است.

برای مثال اگر بخواهیم $\bar{A}$ عدد ۱۰۰۰ را با چهار رقم با معنی تقریب بزنیم باید داشته باشیم:

$$\left| \frac{\bar{A} - ۱۰۰۰}{۱۰۰۰} \right| < ۵ \times ۱۰^{-۴}$$

شرط فوق مستلزم آن است که $۹۹۹/۵ < \bar{A} < ۱۰۰۰/۵$ باشد.

۳ـ خطای برشی

خطای برشی عموماً به خطاهایی اطلاق می‌شود که به دلیل جایگزینی یک سری متناهی جهت تقریب زدن حاصل جمع یک سری نامتناهی ایجاد می‌شود.

برای مثال محاسبه انتگرال $\int_{0}^{0/5} e^{x^2}dx$ را درنظر می‌گیریم سری تیلور e^{x^2} عبارت است از :

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\dots$$

اگر در محاسبه انتگرال فوق از سه جمله اول استفاده کنیم داریم :

$$e^{x^2}\approx 1+x^2+\frac{x^4}{2!}$$

خطایی که در اثر این کار حاصل می‌شود خطای برشی است.

نکته: در صورت همگرا بودن یک روش تکراری، خطای برشی با ادامه تکرار کاهش پیدا می‌کند.

۴ـ ارقام با معنی صحیح

هرگاه در یک عدد، بخش کسری n رقم با معنی صحیح داشته باشد خطای نسبی این عدد کوچکتر از $0/5\times 10^{-n}$ است و بالعکس هرگاه خطای نسبی یک عدد کوچکتر یا مساوی $0/5\times 10^{-n}$ باشد این عدد دارای n عدد با معنی صحیح است.

برای مثال اگر عدد $\frac{5}{6}\approx 0/83333333$ در نظر بگیریم این عدد دارای ۸ رقم با معنی است در نتیجه خطای آن از $0/5\times 10^{-8}$ کمتر است.

۵ـ انتشار خطا

I) چهار عمل اصلی

فرض می‌کنیم $\bar{x}$ و $\bar{y}$ یک تقریب برای x و y باشند هرگاه E_x و E_y خطای مطلق این دو تقریب باشند

الف) جمع

$$x+y=(\bar{x}+E_x)+(\bar{y}+E_y)=(\bar{x}+\bar{y})+(E_x+E_y)$$

$$\Rightarrow\quad E_{x+y}=E_x+E_y\quad \text{خطای جمع:}$$

دقت نمایید که خطای ذکر شده تنها ناشی از خطای اعداد xو yاست چون خطای گردکردن ناشی از جمع $\bar{x}$و $\bar{y}$را درنظر نگرفتیم.

ب) تفریق

مانند قسمت الف عمل می‌کنیم و داریم :

$$E_{x-y} = E_x - E_y$$

ج) ضرب

$$xy = (\bar{x} + E_x)(\bar{y} + E_y) = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}E_y + \bar{y}E_x + E_x E_y$$

از عبارت $E_y E_y$ در مقابل سایر جملات صرفنظر می‌کنیم.

$$xy \approx \bar{x}\bar{y} + \bar{x}E_y + \bar{y}E_x$$

$$E_{xy} \approx \bar{x}E_y + \bar{y}E_x$$

د) تقسیم

$$\frac{x}{y} = \frac{\bar{x} + E_x}{\bar{y} + E_y} = \frac{\bar{x} + E_x}{\bar{y}} \left(\frac{۱}{۱ + \frac{E_y}{\bar{y}}}\right)$$

جمله داخل پرانتز را به صورت سری بسط می‌دهیم :

$$\frac{x}{y} = \frac{\bar{x} + E_x}{\bar{y}} \left[۱ - \frac{E_y}{\bar{y}} + \left(\frac{E_y}{\bar{y}}\right)^{۲} - \dots \right]$$

از جمله دوم به بعد را صرفنظر می‌کنیم و داریم :

$$\frac{x}{y} \approx \frac{\bar{x} + E_x}{\bar{y}} \left(۱ - \frac{E_y}{\bar{y}} \right)$$

$$\frac{x}{y} \approx \frac{\bar{x}}{\bar{y}} + \frac{E_x}{\bar{y}} - \frac{\bar{x}}{\bar{y}^{۲}} E_y$$

$$E_{x/y} \approx \frac{E_x}{\bar{y}} - \frac{\bar{x}}{\bar{y}^{۲}} E_y$$

II) توابع

تابع $y = f(x)$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه x دارای خطا باشد $f(x)$ هم دارای خطا خواهد بود که به طریق زیر تعیین می‌گردد:

هرگاه تابع $y = f(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ مفروض باشد به‌طوریکه y مقدار دقیق تابع f در نقطه

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ باشد داریم:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Δx خطای متغیر مستقل x و Δy میزان انتشار خطا در y است.

$$\Delta y \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

مثال) در رابطه $y = a x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{3}}$ ، خطای نسبی در محاسبه y چند درصد می‌باشد؟ (خطای نسبی در اندازه‌گیری x_1 برابر ۸٪ و در مورد x_2 برابر ۳٪ می‌باشد) **(مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۰)**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل)

$$\Delta y \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2$$

$$\Delta y \approx \frac{a}{4} x_1^{-\frac{3}{4}} x_2^{\frac{1}{3}} \Delta x_1 + \frac{a}{3} x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{-\frac{2}{3}} \Delta x_2$$

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{1}{4}\frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{1}{3}\frac{\Delta x_2}{x_2}$$

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{1}{4} \times 8 + \frac{1}{3} \times 3 = \%3$$

مثال) اگر $x = 16$ و خطای اندازه‌گیری آن ۰/۰۱ باشد مقدار خطای اندازه‌گیری $y = 2x^2 + x + 4$ کدام است؟ **(مهندسی نفت ۸۲)**

۱) ۰/۶۵ ۲) ۰/۷۴ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۱۵۲

حل)

$$\Delta y \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta y \approx (4x + 1)\Delta x = (4 \times 16 + 1)(0/01) = 0/65$$

نمونه مسأله

* روش حذفی گاوس - جردن

① دستگاه معادله روبرو را حل کنید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 18 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

حل: سطر اول را در ۲- ضرب می کنیم و همزمان با سطر دوم جمع می کنیم همچنین سطر اول را در ۷- ضرب کرده و با سطر سوم جمع می کنیم، نتیجه چنین می شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & -20 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 0x_1 + 1x_2 + 10x_3 = -3 \\ 0x_1 - 20x_2 - 25x_3 = -9 \end{cases}$$

اگر سطر دوم را در ۲۰ ضرب کنیم و با سطر سوم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 175 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -69 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + 10x_3 = -3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 175x_3 = -69 \end{cases}$$

از معادله سومی که بدست آمد ما برای x_3 داریم:

$$x_3 = \frac{-69}{175}$$

از معادله دومی که بدست آمد ما برای x_2 داریم:

$$x_2 = -3 - 10x_3 = -3 + \frac{690}{175} = \frac{165}{175}$$

از معادله اولی که بدست آمد ما برای x_1 بدست می آوریم:

$$x_1 = 2 - 3x_2 - 4x_3 = \frac{131}{175}$$

---

② دستگاه معادله روبرو را حل کنید:

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 3.8 & 7 \\ 2.6 & 3.1 & 5 \\ 3.7 & 5.8 & 2.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.7 \\ 2.6 \\ 3.4 \end{bmatrix}$$

حل: بزرگترین عنصر در ستون اول ۳٫۷ می باشد، پس جای سطر اول و سوم را عوض می کنیم و داریم:

$$\begin{bmatrix} 3.7 & 5.8 & 2.9 \\ 2.6 & 3.1 & 5 \\ 0.6 & 3.8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 2.6 \\ 5.7 \end{bmatrix}$$

سطر اول را در $-\frac{2.6}{3.7} = -0.703$ ضرب می کنیم و با سطر سوم جمع می کنیم. همچنین سطر اول را هم

نمونه مسأله

در $-\frac{۰/۶}{۳/۷} = ۰/۱۶۲$ ضرب می کنیم و با سطر سوم جمع می کنیم و خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} ۳/۷ & ۵/۸ & ۲/۹ \\ ۰ & -۹۷۷ & ۲/۹۶۱ \\ ۰ & ۲/۸۶۰ & ۶/۵۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳/۴ \\ ۰/۲۱ \\ ۵/۱۶۹ \end{bmatrix}$$

در این مرحله بزرگترین عنصر در ستون دوم که در زیر قطر و یا روی آن قرار گرفته است برابر ۲/۸۶ می باشد، پس سطر دوم و سوم را با یکدیگر عوض می کنیم و سپس سطر دوم را در $-۳/۴۲ = \frac{۰/۹۷۷}{۲/۸۶}$ ضرب و با سطر سوم جمع می کنیم. در این حالت خواهیم داشت:

$$x_۳ = \frac{۱/۹۷۱}{۵/۱۹۴} = ۰/۳۷۹$$

$$x_۲ = \frac{۵/۱۹۴ - ۶/۵۳۰ x_۳}{۲/۸۶} = ۰/۹۳۵$$

$$x_۳ = \frac{۳/۴ - ۵/۸ x_۲ - ۲/۹ x_۳}{۳/۷} = -۰/۸۴۴$$

جوابها تا ۳ رقم اعشار صحیح می باشد

روش تجزیه LU

(۳) ماتریس A را به صورت LU تجزیه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

حل: معادلات را برای مقادیر L و U مطابق زیر بدست می آوریم:

$$L_{۱۱} = ۳ \qquad L_{۲۱} = ۱ \qquad L_{۳۱} = ۲ \qquad U_{۱۲} = \frac{-۱}{۳} \qquad U_{۱۳} = \frac{۲}{۳}$$

$$L_{۲۲} = (۲) - (۱)\left(\frac{-۱}{۳}\right) = \frac{۷}{۳} \qquad L_{۳۲} = -۲ - (۲)\left(\frac{-۱}{۳}\right) = \frac{-۴}{۳}$$

$$U_{۲۳} = \frac{۳ - (۱)\left(\frac{۲}{۳}\right)}{\left(\frac{۷}{۳}\right)} = ۱ \qquad L_{۳۳} = -۱ - (۲)\left(\frac{۲}{۳}\right) - \left(\frac{-۴}{۳}\right)(۱) = -۱$$

$$L = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۱ & \frac{۷}{۳} & ۰ \\ ۲ & -\frac{۴}{۳} & -۱ \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{-۱}{۳} & ۲/۳ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نمونه مساله

۵) دستگاه معادلات خطی زیر را با کمک روشهای زیر حل کنید:

الف) روش ژاکوبی

ب) روش گاوس-سایدل

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & 14 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل) قبل از اینکه بخواهیم مساله را حل کنیم آن را از حالت ماتریسی خارج می کنیم:

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 0x_3 = 12 \\ -4x_1 + 12x_2 - 6x_3 = 0 \\ 0x_1 - 6x_2 + 14x_3 = 0 \end{cases}$$

الف مقادیر $x_1^{(k+1)}$ و $x_2^{(k+1)}$ و $x_3^{(k+1)}$ را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$\rightarrow x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right) = \frac{1}{7}\left(12 + 4x_2^{(k)}\right)$$

$$\rightarrow x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right) = \frac{1}{12}\left(4x_1^{(k)} + 6x_3^{(k)}\right)$$

$$\rightarrow x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right) = \frac{1}{14}\left(6x_2^{(k)}\right)$$

با انتخاب $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ عملیات را آغاز می کنیم:

$$X_1^{(1)} = \frac{1}{7}(12+4) = 2{,}2857$$

$$X_2^{(1)} = \frac{1}{12}(4+6) = 0{,}8333$$

$$X_3^{(1)} = \frac{1}{14}(6) = 0{,}4286$$

مجدداً عملیات را با $X^{(1)} = \begin{bmatrix} 2{,}2857 \\ 0{,}8333 \\ 0{,}4286 \end{bmatrix}$ آغاز می کنیم:

$$X_1^{(2)} = \frac{1}{7}\left(12 + 4 \times 0{,}8333\right) = 2{,}1905$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{12}\left(4 \times 2{,}2857 + 6 \times 0{,}4286\right) = 0{,}9762$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{14}\left(6 \times 2{,}8333\right) = 0{,}3571$$

مقادیر x_1 و x_2 و x_3 که در رابطه بالا بدست آمد به عنوان X مرحله دوم وارد عملیات می کنیم. عملیات خود را آنقدر ادامه می دهیم تا به جواب برسیم. بهترین جوابی که داریم عبارتست از:

$$x_1 = 2{,}264 \qquad x_2 = 0{,}960 \qquad x_3 = 0{,}411$$

نمونه مسأله

۴) دستگاه معادلات خطی روبرو را با کمک LU حل کنید:

$$\begin{bmatrix} ۰/۶ & ۳/۸ & ۷ \\ ۲/۶ & ۳/۱ & ۵ \\ ۳/۷ & ۵/۸ & ۲/۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵/۷ \\ ۲/۶ \\ ۳/۴ \end{bmatrix}$$

حل) معادلات را برای مقادیر L و U مطابق زیر بدست می‌آوریم:

$$L_{11}=۱ \qquad L_{21}=۰/۱۶۲ \qquad L_{31}=۰/۷۰۳ \qquad U_{12}=\underline{۵/۸} \qquad U_{13}=۲/۹$$

$$L_{22}=(۳/۱)-(۲/۶)\left(\frac{۳/۸}{۰/۶}\right)=۱ \qquad L_{32}=(۵/۸)-(۳/۷)\left(\frac{۳/۸}{۵/۶}\right)=۰/۳۴۲$$

$$U_{23}=\frac{۵-(۲/۶)\left(\frac{۳/۱}{۰/۶}\right)}{۱}=۶/۵۷ \qquad L_{33}=(۲/۹)-(۳/۷)\left(\frac{۳/۱}{۵}\right)-(۰/۳۴۲)۲/۶=۱$$

با توجه به عملیات بالا در نهایت داریم:

$$A'=\begin{bmatrix} ۳/۷ & ۵/۷ & ۲/۹ \\ ۰/۶ & ۳/۸ & ۷ \\ ۲/۶ & ۳/۱ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰/۱۶۲ & ۱ & ۰ \\ ۰/۷۰۳ & ۰/۳۴۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳/۷ & ۵/۸ & ۲/۹ \\ ۰ & ۲/۸۶ & ۶/۵۷ \\ ۰ & ۰ & ۵/۱۹۴ \end{bmatrix} = LU$$

توجه ← قبل از محاسبهٔ LU به دلیل اینکه بزرگترین عنصر در ستون اول ۳/۷ می باشد جای سطر اول و سوم را با همدیگر عوض کردیم. همچنین رابطه کلی برای معادله داریم:

$$AX=b \rightarrow \begin{bmatrix} ۳/۷ & ۵/۷ & ۲/۹ \\ ۰/۶ & ۳/۸ & ۷ \\ ۲/۶ & ۳/۱ & ۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵/۷ \\ ۲/۶ \\ ۳/۴ \end{bmatrix}$$

$LZ=b$

در ماتریسهای بالا برای مقادیر b داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰/۱۶۲ & ۱ & ۰ \\ ۰/۷۰۳ & ۰/۳۴ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵/۷ \\ ۲/۶ \\ ۳/۴ \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow Z_1=۵/۷$$

$$\longrightarrow ۰/۱۶۲Z_1+Z_2=۲/۶ \longrightarrow Z_2=۵/۱۴۹$$

$$\longrightarrow ۰/۷۰۳Z_1+۰/۳۴۲Z_2+Z_3=۳/۴ \rightarrow Z_3=۱/۹۷۱$$

$UX=b$

از طرفی ما برای مقادیر b نیز داریم:

$$\begin{bmatrix} ۳/۷ & ۵/۸ & ۲/۹ \\ ۰ & ۲/۸۶ & ۶/۵۷ \\ ۰ & ۰ & ۵/۱۹۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵/۷ \\ ۵/۱۴۹ \\ ۱/۹۷۱ \end{bmatrix}$$

به دلیل پایین مثلثی بودن ماتریس آن را وارونه مورد بررسی قرار می دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۵/۱۹۴\,x_3=۱/۹۷۱ \longrightarrow x_3=۰/۳۷۹ \\ ۲/۸۶\,x_2+۶/۵۳\,x_3=۵/۱۴۹ \longrightarrow x_2=۰/۹۳۵ \\ ۳/۷\,x_1+۵/۸۲\,x_2+۲/۹\,x_3=۵/۷ \longrightarrow x_3=-۱/۸۴۴ \end{array}\right\} \Rightarrow X=\begin{bmatrix} ۰/۳۷۹ \\ ۰/۹۳۵ \\ -۱/۸۴۴ \end{bmatrix}$$

Adams–Bashforth

$$y_{n+1} = y_n + h[y_n' + \tfrac{1}{2}\nabla y_n' + \tfrac{5}{12}\nabla^2 y_n' + \tfrac{3}{8}\nabla^3 y_n' + \tfrac{251}{720}\nabla^4 y_n' + \tfrac{475}{1440}\nabla^5 y_n' + \tfrac{19087}{60480}\nabla^6 y_n' + \cdots]$$

Adams–Moulton

$$y_{n+1} = y_n + h[y_{n+1}' - \tfrac{1}{2}\nabla y_{n+1}' - \tfrac{1}{12}\nabla^2 y_{n+1}' - \tfrac{1}{24}\nabla^3 y_{n+1}' - \tfrac{19}{720}\nabla^4 y_{n+1}' - \tfrac{3}{160}\nabla^5 y_{n+1}' - \tfrac{863}{60480}\nabla^6 y_{n+1}' + \cdots]$$

notation $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$

$y_n' = f_n'$

Predictor

TABLE 1.1

ADAMS–BASHFORTH FORMS

q	Coefficient of h	y_n'	y_{n-1}'	y_{n-2}'	y_{n-3}'	y_{n-4}'	y_{n-5}'	local truncation error
0	1	1						$\frac{1}{2}h^2 f'(\gamma)$
1	1/2	3	−1					$\frac{5}{12}h^3 f''(\gamma)$
2	1/12	23	−16	5				$\frac{9}{24}h^4 f'''(\gamma)$
3	1/24	55	−59	37	−9			$\frac{251}{720}h^5 f^{iv}(\gamma)$
4	1/720	1901	−2774	2616	−1274	251		$\frac{475}{1440}h^6 f^{v}(\gamma)$
5	1/1440	4277	−7923	9982	−7298	2877	−475	$\frac{19087}{60480}h^7 f^{vi}(\gamma)$

$$y_{n+1} = y_n + h y_n' \qquad (q = 0)$$

$$y_{n+1} = y_n + (h/2)[3y_n' - y_{n-1}'] \qquad (q = 1)$$

predicts $\longrightarrow$ $$\overset{*}{y}_{n+1} = y_n + (h/12)[23y_n' - 16y_{n-1}' + 5y_{n-2}'] \qquad (q = 2)$$

$$y_{n+1} = y_n + (h/24)[55y_n' - 59y_{n-1}' + 37y_{n-2}' - 9y_{n-3}'] \qquad (q = 3)$$

Error $O\left(h^{q+2} f^{[q+1]}(\gamma)\right)$

Corrector

TABLE 1.2

ADAMS–MOULTON FORMS

q	Coefficient of h	y_{n+1}'	y_n'	y_{n-1}'	y_{n-2}'	y_{n-3}'	y_{n-4}'	local truncation error
0	1	1						$-\frac{1}{2}h^2 f'(\gamma)$
1	1/2	1	1					$-\frac{1}{12}h^3 f''(\gamma)$
2	1/12	5	8	−1				$-\frac{1}{24}h^4 f'''(\gamma)$
3	1/24	9	19	−5	1			$-\frac{19}{720}h^5 f^{iv}(\gamma)$
4	1/720	251	646	−264	106	−19		$-\frac{3}{160}h^6 f^{v}(\gamma)$
5	1/1440	475	1427	−798	482	−173	27	$-\frac{863}{60480}h^7 f^{vi}(\gamma)$

corrects $(q=2)$ $\longrightarrow$ $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left[5\overset{*}{y}_{n+1}' + 8y_n' - y_{n-1}'\right]$$

TABLE 3-1

FINITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR hy' AN   IDISTANT GRID

Mult. factor	Coefficients in difference formula							Error		Formula no.
1	$\underline{-1}$	1						$-1/2$	$hy''(\xi)$	1
	-1	$\underline{1}$						$1/2$		2
1/2	$\underline{-3}$	4	-1					$1/3$	$h^2y'''(\xi)$	3
	-1	$\underline{0}$	1					$-1/6$		4
	1	-4	$\underline{3}$					$1/3$		5
1/6	$\underline{-11}$	18	-9	2				$-1/4$	$h^3y^{(IV)}(\xi)$	6
	-2	$\underline{-3}$	6	-1				$1/12$		7
	1	-6	$\underline{3}$	2				$-1/12$		8
	-2	9	-18	$\underline{11}$				$1/4$		9
1/12	$\underline{-25}$	48	-36	16	-3			$1/5$	$h^4y^{(V)}(\xi)$	10
	-3	$\underline{-10}$	18	-6	1			$-1/20$		11
	1	-8	$\underline{0}$	8	-1			$1/30$		12
	-1	6	-18	$\underline{10}$	3			$-1/20$		13
	3	-16	36	-48	$\underline{25}$			$1/5$		14
1/60	$\underline{-137}$	300	-300	200	-75	12		$-1/6$	$h^5y^{(VI)}(\xi)$	15
	-12	$\underline{-65}$	120	-60	20	-3		$1/30$		16
	3	-30	$\underline{-20}$	60	-15	2		$-1/60$		17
	-2	15	-60	$\underline{20}$	30	-3		$1/60$		18
	3	-20	60	-120	$\underline{65}$	12		$-1/30$		19
	-12	75	-200	300	-300	$\underline{137}$		$1/6$		20
1/60	$\underline{-147}$	360	-450	400	-225	72	-10	$1/7$	$h^6y^{(VII)}(\xi)$	21
	-10	$\underline{-77}$	150	-100	50	-15	2	$-1/42$		22
	2	-24	$\underline{-35}$	80	-30	8	-1	$1/105$		23
	-1	9	-45	$\underline{0}$	45	-9	1	$-1/140$		24
	1	-8	30	-80	$\underline{35}$	24	-2	$1/105$		25
	-2	15	-50	100	-150	$\underline{77}$	10	$-1/42$		26
	10	-72	225	-400	450	-360	$\underline{147}$	$1/7$		27
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6			

From: Kubicek & Hlavacek

Num. Sol^{n} of non-linear b.v.p. 1983

notes : $y \approx f$ — underline means at the data point.

e.g. eq^{n} # 14 :

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{@\text{ point } i} = \frac{1}{12h}\left[3f_{i-4} - 16f_{i-3} + 36f_{i-2} - 48f_{i-1} + 25f_i\right]$$

$$= \frac{1}{12h}\left[3f_0 - 16f_1 + 36f_2 - 48f_3 + 25f_4\right]$$

TABLE 3-2

ITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR h^2y'' AND EQUIDISTANT G

Mult. factor	Coefficients in difference formula					Error				Formula no.
1	$\underline{1}$	-2	1			-1	$hy^{(III)}(\xi_1)+$	$1/6$	$h^2y^{(IV)}(\xi_2)$	1
	1	$\underline{-2}$	1			0		$-1/12$		2
	1	-2	$\underline{1}$			1		$-1/6$		3
1/6	$\underline{12}$	-30	24	-6		$11/12$	$h^2y^{(IV)}(\xi_1)+$	$-1/10$	$h^3y^{(V)}(\xi_2)$	4
	6	$\underline{-12}$	6	0		$-1/12$		$-1/30$		5
	0	6	$\underline{-12}$	6		$1/12$		$-1/30$		6
	-6	24	-30	$\underline{12}$		$11/12$		$-1/10$		7
1/24	$\underline{70}$	-208	228	-112	22	$-5/6$	$h^3y^{(V)}(\xi_1)+$	$1/15$	$h^4y^{(VI)}(\xi_2)$	8
	22	$\underline{-40}$	12	8	-2	$1/12$		$-1/60$		9
	-2	32	$\underline{-60}$	32	-2	0		$1/90$		10
	-2	8	12	$\underline{-40}$	22	$-1/12$		$1/60$		11
	22	-112	228	-208	$\underline{70}$	$5/6$		$1/15$		12

TABLE 3-3

FINITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR h^3y''' AND $h^4y^{(IV)}$ AND EQUIDISTANT GRID

Mult. factor	Coefficients in difference formula					Error		Formula no.
1	$\underline{-1}$	3	-3	1		$-3/2$	$hy^{(IV)}(\xi)$	1
	-1	$\underline{3}$	-3	1		$-1/2$		2
	-1	3	$\underline{-3}$	1		$1/2$		3
	-1	3	-3	$\underline{1}$		$3/2$		4
1/2	$\underline{-5}$	18	-24	14	-3	$7/4$	$h^2y^{(V)}(\xi)$	5
	-3	$\underline{10}$	-12	6	-1	$1/4$		6
	-1	2	$\underline{0}$	-2	1	$-1/4$		7
	1	-6	12	$\underline{-10}$	3	$1/4$		8
	3	-14	24	-18	$\underline{5}$	$7/4$		9
1	$\underline{1}$	-4	6	-4	1	-2	$hy^{(V)}(\xi)$	10
	1	$\underline{-4}$	6	-4	1	-1		11
	1	-4	6	$\underline{-4}$	1	1		12
	1	-4	6	-4	$\underline{1}$	2		13
	1	-4	$\underline{6}$	-4	1	$-1/6$	$h^2y^{(VI)}(\xi)$	14

An Algorithm for the Runge–Kutta–Fehlberg Method

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{k_1}{4}\right),$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{3h}{8}, y_n + \frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\right),$$

$$k_4 = h \cdot f\left(x_n + \frac{12h}{13}, y_n + \frac{1932k_1}{2197} - \frac{7200k_2}{2197} + \frac{7296k_3}{2197}\right),$$

$$k_5 = h \cdot f\left(x_n + h, y_n + \frac{439k_1}{216} - 8k_2 + \frac{3680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4104}\right),$$

$$k_6 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{8k_1}{27} + 2k_2 - \frac{3544k_3}{2565} + \frac{1859k_4}{4104} - \frac{11k_5}{40}\right);$$

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + \left(\frac{25k_1}{216} + \frac{1408k_3}{2565} + \frac{2197k_4}{4104} - \frac{k_5}{5}\right), \text{ with global error } O(h^4),$$

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{16k_1}{135} + \frac{6656k_3}{12825} + \frac{28561k_4}{56430} - \frac{9k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}\right), \quad \leftarrow \text{use as RK.}$$

with global error $O(h^5)$;

$$\text{Error, } E \doteq \frac{k_1}{360} - \frac{128k_3}{4275} - \frac{2197k_4}{75240} + \frac{k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}.$$

error for stepsize control

$y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}$

```
C
C       PROGRAM FOR GAUSSIAN ELIMINATION WITH PARTIAL PIVOTING
C       FOR THE SOLUTION OF A SYSTEM OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS.
C
C       PROGRAM NAME: GAUSS-E.FOR   (1)
C
C       A    THE COEFFICIENT MATRIX
C       C    THE RIGHT-HAND SIDE VECTOR
C       X    THE SOLUTION VECTOR
C       N    NUMBER OF EQUATIONS
C
```

At the end, Matrix of Equation E

At the end, RHS vector of Equation E

```
        REAL A(10,10),C(10),X(10),TEMP,BIG,SUM
        INTEGER I,J,K,N,PIVOT
        OPEN(10,FILE='GAUSS-E.RES',STATUS='NEW')
        OPEN(9,FILE='GAUSS-E.DAT',STATUS='OLD')
C
C       READ THE COEFFICIENT MATRIX, AND THE
C       RIGHT-HAND-SIDE VECTOR FROM THE DATA FILE.
C
        N=4
C
        DO 3 I=1,N
        READ(9,2)  (A(I,J),J=1,4)
 2      FORMAT(4F6.1)
 3      CONTINUE
C
        DO 5 I=1,N
        READ(9,4) C(I)
 4      FORMAT(F6.1)
 5      CONTINUE
C
        NN=N-1
        DO 100 K=1,NN
```

implementation of equation (F) $k=1,\ldots,n-1$

```
C
C       EMPLOY PARTIAL PIVOTING.
C       FIRST FIND THE PIVOT ELEMENT:
C
        PIVOT=K
        BIG=ABS(A(K,K))
        K1=K+1
        DO 10 I=K1,N
        TEMP=ABS(A(I,K))
        IF(TEMP .LE. BIG) GOTO 10
        BIG=TEMP
        PIVOT=I
 10     CONTINUE
        IF(PIVOT .EQ. K) GOTO 30
```

pivot element: largest element (ABS) below the pivot row.

```
C
C       NEXT INTERCHANGE THE ROWS:
C
        DO 20 J=K,N
        TEMP=A(PIVOT,J)
        A(PIVOT,J)=A(K,J)
        A(K,J)=TEMP
 20     CONTINUE
        TEMP=C(PIVOT)
        C(PIVOT)=C(K)
        C(K)=TEMP
 30     CONTINUE
C
C       PERFORM FORWARD ELIMINATION
C
        DO 50 I=K1,N
        FACTOR=A(I,K)/A(K,K)
```

implementation of equation (F) $i = k+1, \ldots, n$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}$$

$$c_i^{(k)} = c_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} c_k^{(k-1)}$$

$\rightarrow$ FACTOR.

implementation of equation (F) $j = k+1, \ldots, n$

```
      DO 40 J=K1,N
      A(I,J)=A(I,J)-(FACTOR*A(K,J))
 40   CONTINUE
      C(I)=C(I)-(FACTOR*C(K))
 50   CONTINUE
C
C
 100  CONTINUE
C
C
C     PERFORM BACK SUBSTITUTION
C
      X(N)=C(N)/A(N,N)
      DO 150 I=NN,1,-1
      SUM=0.0
      I1=I+1
      DO 120 J=I1,N
      SUM=SUM+(A(I,J)*X(J))
 120  CONTINUE
      X(I)=(C(I)-SUM)/A(I,I)
 150  CONTINUE
C
      WRITE RESULTS
C
      DO 200 I=1,N
      WRITE(10,250) I,X(I)
 250  FORMAT('     X',I1,F10.5)
 200  CONTINUE
      STOP
      END
```

note in equation (F)

$$\left.\begin{array}{l} c_1^{(0)} = c_1 \\ a_{1j}^{(0)} = a_{1j} \quad j=1,\ldots,n \end{array}\right\} \text{i.e. elements unchanged.}$$

equation (G) $i = n-1, \ldots, 1$ $(NN = N-1)$

equation (H)

$$\sum_{j=i+1}^{n} \left(a_{ij}^{(i-1)} \cdot x_j\right)$$

0.0	3.0	-4.0	2.0
2.0	6.0	4.0	-3.0
-1.0	-1.0	2.0	3.0
3.0	0.0	0.0	-5.0

coefficient matrix

26.0
9.0
7.0
-19.0

Right-hand-side vector

X1	2.00000
X2	4.00000
X3	-1.00000
X4	5.00000

Solution

```
C
C       SOLUTION OF A SET OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
C       USING THE FOURTH ORDER ADAMS-BASHFORTH, ADAMS-MOULTON
C       PREDICTOR-CORRECTOR METHOD WITH AN ITERATIVE ALGORITHM.
C       THE INTEGRATION IS STARTED USING CLASSIC FOURTH ORDER
C       RUNGE-KUTTA METHOD AND THE ITERATION PROCEDURE IS THE
C       THE GAUSS-SEIDEL WITH RELAXATION.
C
C       PROGRAM NAME: ABAMPC4.FOR      (19)
C
C       EXAMPLE CASE: dY/dX = -.3 Y + .1 Z + .1 U
C                     dZ/dX = -.2 Z + .1 U
C                     dU/dX = -.1 U
C
C       WITH INITIAL CONDITIONS: AT X=0, Y=3, Z=2, U=1
C
C       ANALYTICAL SOLUTION IS : Y = EXP(-.1X) + EXP(-.2X) + EXP(-.3X)
C                                Z = EXP(-.1X) + EXP(-.2X)
C                                U = EXP(-.1X)
C
      REAL X(51),Y(51),Z(51),U(51),DYDX(51),DZDX(51),DUDX(51)
      REAL YS(51),ZS(51),US(51),DYDXS(51),DZDXS(51),DUDXS(51)
      REAL YTRUE(51),ZTRUE(51),UTRUE(51),H,K1,K2,K3,K4
      REAL L1,L2,L3,L4,M1,M2,M3,M4
      OPEN(10,FILE='ABAMPC4.RES',STATUS='NEW')
C
C       SET TOLERANCE FOR ITERATION PROCEDURE
C       AND MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS
C
      TOL=0.00000001
      IMAX=50
C
C       SPECIFY THE RELAXATION FACTOR
C
      WRITE(*,7)
 7    FORMAT('  ENTER RELAXATION FACTOR')
      READ(*,8) W
 8    FORMAT(F4.2)
      WRITE(10,9) W
 9    FORMAT(' RELAXATION FACTOR: ',F4.2)
C
C       SPECIFY THE INITIAL CONDITION AND THE STEP SIZE.
C
      X(1)=0.0
      Y(1)=3.0
      Z(1)=2.0
      U(1)=1.0
      H=0.01
C
C       USE RK FOR THE FIRST 4 INTERVALS TO START
C       THE PREDICTOR-CORRECTOR METHOD.
C
      DO 100 J=2,5
      I=J-1
      XT=X(I)
      YT=Y(I)
      ZT=Z(I)
      UT=U(I)
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      DYDX(I)=F1
      DZDX(I)=F2
      DUDX(I)=F3
      K1=H*F1
      L1=H*F2
```

```
      M1=H*F3
C
      XT=X(I)+(H/2.)
      YT=Y(I)+(K1/2.)
      ZT=Z(I)+(L1/2.)
      UT=U(I)+(M1/2.)
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      K2=H*F1
      L2=H*F2
      M2=H*F3
C
      XT=X(I)+(H/2.)
      YT=Y(I)+(K2/2.)
      ZT=Z(I)+(L2/2.)
      UT=U(I)+(M2/2.)
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      K3=H*F1
      L3=H*F2
      M3=H*F3
C
      XT=X(I)+H
      YT=Y(I)+K3
      ZT=Z(I)+L3
      UT=U(I)+M3
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      K4=H*F1
      L4=H*F2
      M4=H*F3
C
      X(J)=X(I)+H
      Y(J)=Y(I)+((1./6.)*(K1+(2.*K2)+(2.*K3)+K4))
      Z(J)=Z(I)+((1./6.)*(L1+(2.*L2)+(2.*L3)+L4))
      U(J)=U(I)+((1./6.)*(M1+(2.*M2)+(2.*M3)+M4))
100   CONTINUE
C
      J=5
      XT=X(J)
      YT=Y(J)
      ZT=Z(J)
      UT=U(J)
      CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
      DYDX(J)=F1
      DZDX(J)=F2
      DUDX(J)=F3
C
C     END OF THE STARTER SEGMENT
C
      DO 800 N=5,50
      ITER=1
      N1=N-1
      N2=N-2
      N3=N-3
      NN=N+1
      X(NN)=X(N)+H
C
C     PREDICTOR
C                   y'
      TEMP=(55.*DYDX(N))-(59.*DYDX(N1))+(37.*DYDX(N2))-(9.*DYDX(N3))
      YS(NN)=Y(N)+((H/24.)*TEMP)
                                                 z'
      TEMP=(55.*DZDX(N))-(59.*DZDX(N1))+(37.*DZDX(N2))-(9.*DZDX(N3))
      ZS(NN)=Z(N)+((H/24.)*TEMP)
                                                 u'
      TEMP=(55.*DUDX(N))-(59.*DUDX(N1))+(37.*DUDX(N2))-(9.*DUDX(N3))
      US(NN)=U(N)+((H/24.)*TEMP)
C
```

$\left.\begin{array}{l} YS \\ ZS \\ US \end{array}\right\}$ predicted values. y^*_{n+1} z^*_{n+1} u^*_{n+1}

```
C       USE GAUSS-SEIDEL ITERATION ON THE CORRECTOR
C
 400    XT=X(NN)
        YT=YS(NN)
        ZT=ZS(NN)
        UT=US(NN)
evaluate CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
y'*n+1  DYDXS(NN)=F1
correct TEMP=(9.*DYDXS(NN))+(19.*DYDX(N))-(5.*DYDX(N1))+DYDX(N2)
        Y(NN)=Y(N)+((H/24.)*TEMP)
yn+1    Y(NN)=YS(NN)+(W*(Y(NN)-YS(NN)))
        YT=Y(NN)
        CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
        DZDXS(NN)=F2
        TEMP=(9.*DZDXS(NN))+(19.*DZDX(N))-(5.*DZDX(N1))+DZDX(N2)
        Z(NN)=Z(N)+((H/24.)*TEMP)
        Z(NN)=ZS(NN)+(W*(Z(NN)-ZS(NN)))
        ZT=Z(NN)
        CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
        DUDXS(NN)=F3
        TEMP=(9.*DUDXS(NN))+(19.*DUDX(N))-(5.*DUDX(N1))+DUDX(N2)
        U(NN)=U(N)+((H/24.)*TEMP)
        U(NN)=US(NN)+(W*(U(NN)-US(NN)))
        ITER=ITER+1
C
C       CHECK FOR CONVERGENCE
C
        EY=((Y(NN)-YS(NN))/Y(NN))*100.
        EZ=((Z(NN)-ZS(NN))/Z(NN))*100.
        EU=((U(NN)-US(NN))/U(NN))*100.
        IF(ITER .GT. IMAX) GOTO 500
        IF(EY .GT. TOL) GOTO 600
        IF(EZ .GT. TOL) GOTO 600
        IF(EU .GT. TOL) GOTO 600
        GOTO 700
 500    WRITE(10,550)
 550    FORMAT('  CONVERGENCE NOT ACHIEVED IN SPECIFIED ITERATIONS')
        STOP
 600    YS(NN)=Y(NN)
        ZS(NN)=Z(NN)
        US(NN)=U(NN)
        GOTO 400
 700    XT=X(NN)
        YT=Y(NN)
        ZT=Z(NN)
        UT=U(NN)
        CALL DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
        DYDX(NN)=F1
        DZDX(NN)=F2
        DUDX(NN)=F3
 800    CONTINUE
C
C       WRITE RESULTS
C
        DO 900 I=1,51
        YTRUE(I)=EXP(-0.1*X(I))+EXP(-0.2*X(I))+EXP(-0.3*X(I))
        ZTRUE(I)=EXP(-0.1*X(I))+EXP(-0.2*X(I))
        UTRUE(I)=EXP(-0.1*X(I))
        WRITE(10,850) X(I),Y(I),YTRUE(I),Z(I),ZTRUE(I),U(I),UTRUE(I)
 850    FORMAT(F4.2,'   ',2F11.6,'   ',2F11.6,'   ',2F11.6)
 900    CONTINUE
        STOP
        END
        SUBROUTINE DERIV(XT,YT,ZT,UT,F1,F2,F3)
```

```
      F1=(-0.3*YT)+(0.1*ZT)+(0.1*UT)
      F2=(-0.2*ZT)+(0.1*UT)
      F3=(-0.1*UT)
      RETURN
      END
```

RELAXATION FACTOR: 1.00

x	Y	Yexact	Z	Zexact	U	Uexact
.00	3.000000	3.000000	2.000000	2.000000	1.000000	1.000000
.01	2.994007	2.994007	1.997002	1.997002	.999000	.999000
.02	2.988028	2.988028	1.994010	1.994010	.998002	.998002
.03	2.982063	2.982063	1.991022	1.991022	.997005	.997005
.04	2.976112	2.976112	1.988040	1.988040	.996008	.996008
.05	2.970174	2.970174	1.985062	1.985062	.995012	.995012
.06	2.964251	2.964251	1.982090	1.982090	.994018	.994018
.07	2.958341	2.958341	1.979122	1.979122	.993024	.993024
.08	2.952445	2.952445	1.976159	1.976159	.992032	.992032
.09	2.946563	2.946563	1.973202	1.973202	.991040	.991040
.10	2.940694	2.940694	1.970249	1.970248	.990050	.990050
.11	2.934839	2.934839	1.967301	1.967301	.989060	.989060
.12	2.928998	2.928998	1.964357	1.964357	.988072	.988072
.13	2.923170	2.923170	1.961419	1.961419	.987084	.987084
.14	2.917356	2.917356	1.958486	1.958486	.986098	.986098
.15	2.911555	2.911555	1.955558	1.955557	.985112	.985112
.16	2.905768	2.905768	1.952634	1.952634	.984127	.984127
.17	2.899994	2.899994	1.949715	1.949715	.983144	.983144
.18	2.894233	2.894233	1.946801	1.946801	.982161	.982161
.19	2.888486	2.888486	1.943892	1.943892	.981179	.981179
.20	2.882753	2.882753	1.940988	1.940988	.980199	.980199
.21	2.877032	2.877032	1.938089	1.938089	.979219	.979219
.22	2.871325	2.871325	1.935194	1.935194	.978240	.978240
.23	2.865631	2.865631	1.932305	1.932304	.977262	.977262
.24	2.859950	2.859951	1.929420	1.929420	.976286	.976286
.25	2.854283	2.854283	1.926539	1.926539	.975310	.975310
.26	2.848628	2.848629	1.923664	1.923664	.974335	.974335
.27	2.842987	2.842987	1.920793	1.920793	.973361	.973361
.28	2.837358	2.837359	1.917928	1.917928	.972388	.972388
.29	2.831743	2.831744	1.915066	1.915066	.971416	.971416
.30	2.826141	2.826141	1.912210	1.912210	.970445	.970446
.31	2.820552	2.820552	1.909359	1.909359	.969476	.969476
.32	2.814975	2.814976	1.906512	1.906512	.968507	.968507
.33	2.809412	2.809412	1.903669	1.903669	.967538	.967539
.34	2.803861	2.803862	1.900832	1.900832	.966571	.966572
.35	2.798323	2.798324	1.897999	1.897999	.965605	.965605
.36	2.792799	2.792799	1.895171	1.895171	.964640	.964640
.37	2.787286	2.787287	1.892348	1.892348	.963676	.963676
.38	2.781787	2.781787	1.889529	1.889529	.962713	.962713
.39	2.776300	2.776300	1.886715	1.886715	.961751	.961751
.40	2.770826	2.770826	1.883906	1.883906	.960789	.960789
.41	2.765365	2.765365	1.881101	1.881101	.959829	.959829
.42	2.759916	2.759916	1.878301	1.878301	.958870	.958870
.43	2.754480	2.754480	1.875505	1.875506	.957911	.957911
.44	2.749056	2.749056	1.872715	1.872715	.956954	.956954
.45	2.743645	2.743644	1.869928	1.869929	.955997	.955997
.46	2.738246	2.738246	1.867147	1.867147	.955042	.955042
.47	2.732860	2.732860	1.864370	1.864370	.954087	.954087
.48	2.727486	2.727486	1.861598	1.861598	.953134	.953134
.49	2.722124	2.722124	1.858830	1.858830	.952181	.952181
.50	2.716775	2.716775	1.856067	1.856067	.951229	.951229

امتحان محاسبات عددی

۱) روابط زیر را با استفاده از الف) روش ژاکوبی ب) روش گوس سایدل حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 - x = 16 \end{cases}$$

۲) الف) $x^2 - 8x + 12 = 0$ را از روش NRFP حل کنید.
ب) از روش نیوتن رافسون با ۵ تکرار ژاکوبی حل کنید.

۳) الف) با استفاده از $hD = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \dots$ یک فرمول ۴ نقطه‌ای برای f'_1 با f_1 ، f_{1+2} ، f_{1+1} ، f_{1-1} با استفاده از $E = 1 + \Delta$ محاسبه کنید.
ب) با استفاده از سیمپسون $\frac{3}{8}$ ، $\int_1^2 f(x)\,dx$ با $h = 1$.

۴)
$$\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{d^2y}{dx} + x\frac{dy}{dx} + x = y$$

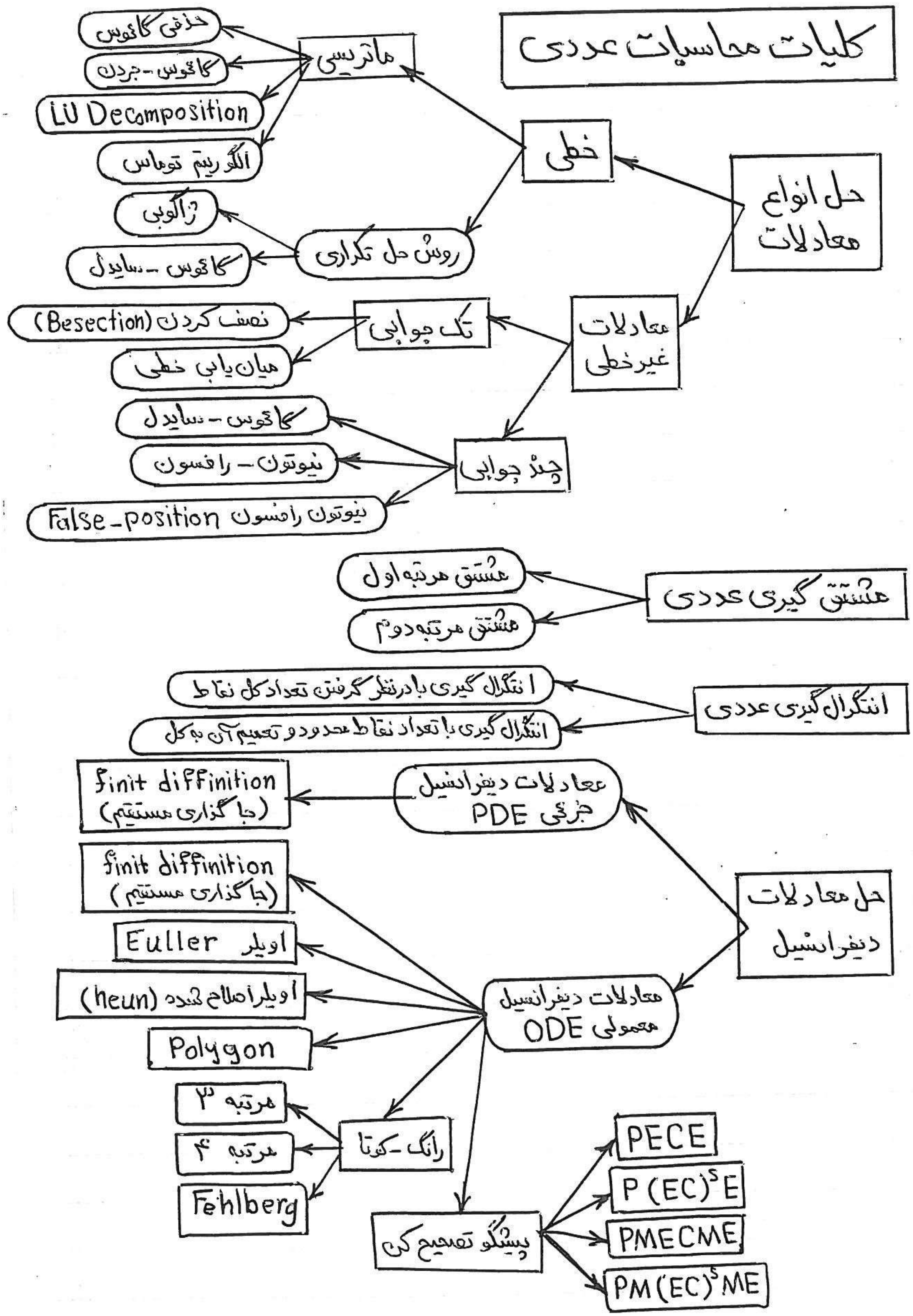
$$\text{at } x = 0 \quad y = 2 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = 1 \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

از روش هیون با گام ۰/۵ در $x = 0.5$ محاسبه کنید:
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(y'_n + y'_{n+1}\right)$$

۵) استفاده از ماشین حساب و جزوه‌ها در P.C (دو برابر) [توضیح فارسی هم قبول است]

بخش چهارم

محاسبات عددی


کلیات محاسبات عددی
حل انواع معادلات
خطی
ماتریسی
حذفی گائوس
گائوس - جردن
LU Decomposition
الگوریتم توماس
روش حل تکراری
ژاکوبی
گائوس - سایدل
معادلات غیرخطی
تک جوابی
نصف کردن (Besection)
میان یابی خطی
چند جوابی
گائوس - سایدل
نیوتون - رافسون
نیوتون رافسون False-position
مشتق گیری عددی
مشتق مرتبه اول
مشتق مرتبه دوم
انتگرال گیری عددی
انتگرال گیری با درنظر گرفتن تعداد کل نقاط
انتگرال گیری با تعداد نقاط محدود و تعمیم آن به کل
حل معادلات دیفرانسیل
معادلات دیفرانسیل جزئی PDE
finit diffinition (جا گذاری مستقیم)
معادلات دیفرانسیل معمولی ODE
finit diffinition (جاگذاری مستقیم)
Euller اویلر
اویلر اصلاح شده (heun)
Polygon
رانگ - کوتا
مرتبه ۳
مرتبه ۴
Fehlberg
پیشگو تصحیح کن
PECE
P(EC)^s E
PMECME
PM(EC)^s ME

* روشهای حل مساله با ماتریس :

$$A \circ X = C \Leftarrow \begin{cases} A \to \text{ماتریس ضریبی که ضرایب معادله را دارد} \\ X \to \text{متغیرهای وابسته} \\ C \to \text{ماتریس پاسخ} \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & x_m \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{array}\right|$$

---

* روش حذفی گاوس :

برمبنای تبدیل ماتریس ضرایب به ماتریس بالا مثلثی است :

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & c_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & c_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & c_3^{(2)} \end{array}\right|$$

عبارت درون پرانتز بیانگر تعداد عملیات بر روی عضو است

رابطه عملیاتی که بر روی هر عضو انجام می‌گیرد عبارتست از :

$$* \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \times a_{kj}^{(k-1)} \qquad * \quad x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[c_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j\right]_{i=n-1,\dots,1}$$

$$* \quad c_i^{(k)} = c_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} c_k^{(k-1)} \qquad * \quad x_n = \frac{c_n}{a_{nn}}$$

---

* گاوس - جردن :

این روش حل همانند گاوس است با این تفاوت که ما ماتریس ضرایب را به ماتریس واحد تبدیل می‌کنیم :

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1^{(3)} \\ 0 & 1 & 0 & c_2^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & c_3^{(3)} \end{array}\right|$$

تذکر

روابطی که مورد استفاده قرار می‌گیرد همان روابط حذفی گاوس است. با این تفاوت که آن روابط در ۳ مرحله انجام شده است و رابطه بالا بدست آمده است *

LU Decomposition :

$A = L \times U$

در این روش ماتریس ضرایب را به ۲ ماتریس مثلثی تبدیل می کنیم :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & 1 & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & 0 & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

در این روش حل معادلات طی ۳ مرحله زیر انجام می گیرد :

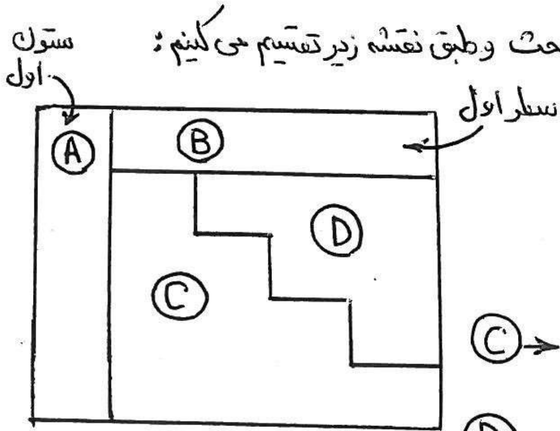
$A = L \times U \longleftarrow$ مرحله اول

$LD = C \longleftarrow$ مرحله دوم

$UX = D \longleftarrow$ مرحله سوم

مرحله اول

در این مرحله ماتریس ضرایب را به مانند ابتدای مبحث و طبق نقشه زیر تقسیم می کنیم :



$$(A) \rightarrow L_{i1} = a_{i1} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$(B) \rightarrow U_{1j} = \frac{a_{1j}}{L_{11}} \qquad j = 2, \ldots, n$$

$$(C) \rightarrow L_{ij} = a_{ij} - \sum_{K=1}^{K=j-1} L_{iK} U_{Kj} \qquad \begin{cases} j = 2, \ldots, n \\ i = j, \ldots, n \end{cases}$$

$$(D) \rightarrow U_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{K=1}^{K=j-1} L_{iK} U_{Kj}}{L_{ii}} \qquad \begin{cases} i = 2, \ldots, n-1 \\ j = i+1, \ldots, n \end{cases}$$

مرحله دوم

نحوه عمل به صورت روبرو است :

$L \times D = C$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}}_{\text{در مرحله اول حساب شد}} \times \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس جواب}}$$

بنا برین مقادیر ماتریس d عبارت خواهد بود از:

$$* \; d_i = \frac{C_i - \sum_{K=1}^{i-1} l_{iK} d_K}{l_{ii}} \qquad i=2,\dots,n$$

$$* \; d_1 = \frac{C_1}{L_{11}}$$

مرحله سوم

نحوه عمل به صورت روبروست:

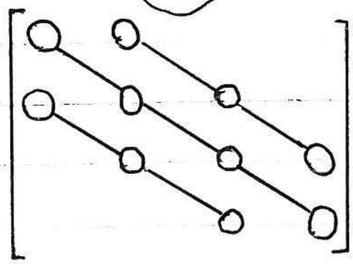
$$D = UX$$

$$\begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & 1 & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & 1 & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

به طور خلاصه مقادیر x عبارت خواهد بود از:

$$* \; X_j = d_j - \sum_{K=j+1}^{n} U_{jK} x_K \qquad j=n-1,\dots,1 \qquad\qquad * \; X_n = d_n$$

الگوریتم توماس:



این روشی است که برای ماتریس ضرایب سه قطری به کار می رود.

ماتریس سه قطری به صورت روبرو است:

مراحل حل این روش عبارت است از:

$A = L.U \longleftarrow$ مرحله اول

$C = L.D \longleftarrow$ مرحله دوم

$D = U.X \longleftarrow$ مرحله سوم

مرحله اول

در این مرحله ماتریس ضرایب به صورت زیر در می آید:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & & & \\ a_{21} & \beta_2 & & \\ & a_{32} & \beta_3 & \\ & & a_{43} & \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & \\ & 1 & \gamma_2 & \\ & & 1 & \gamma_3 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر β و γ عبارتست از:

$$* \ \gamma_j = \frac{a_{j,j+1}}{\beta_j} \longleftarrow \boxed{j=1,\dots,n-1}$$

$$* \ \beta_1 = a_{11}$$

$$* \ \beta_j = a_{jj} - a_{j,j-1} \times \gamma_{j-1} \longleftarrow \boxed{j=2,\dots,n}$$

مرحله دوم

نحوهٔ عمل ما به صورت روبرو است:

$$C = L \times D$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & & & \\ a_{21} & \beta_2 & & \\ & a_{32} & \beta_3 & \\ & & a_{43} & \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

بنابرین مقادیر ماتریس d عبارتست از:

$$d_1 = \frac{C_1}{\beta_1}$$

$$d_K = \frac{C_K - a_{KK-1} d_{K-1}}{\beta} \qquad K=2,\dots,n$$

مرحله سوم

نحوهٔ عمل ما به صورت روبرو است:

$$UX = D$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & \\ & 1 & \gamma_2 & \\ & & 1 & \gamma_3 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

به طور خلاصه مقادیر x عبارت خواهد شد از:

$$* \ X_n = d_n$$

$$* \ X_K = d_K - X_{K+1} \qquad K=1,\dots,n-1$$

روشهای حل تکراری:

★ روش ژاکوبی:

این روش برای n معادله n مجهول به صورت زیر بیان می گردد:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\dots+a_{1n}x_n=C_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\dots+a_{2n}x_n=C_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\dots+a_{nn}x_n=C_n \end{cases}$$

از رابطه ای که در بالا بدست آمده است x_i را استخراج می کنیم:

$$\begin{cases} x_1=\{C_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3-\dots-a_{1n}x_n\}/a_{11} \\ x_2=\{C_2-a_{21}x_1-a_{23}x_3-\dots-a_{2n}x_n\}/a_{22} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n=\{C_n-a_{n1}x_1-a_{n2}x_2-\dots-a_{n\,n-1}x_{n-1}\}/a_{nn} \end{cases}$$

روش حل

① حدس اولیه برای آن می زنیم: $i=1,2,\dots,n$ $\quad x_i^{K}=0$ $\quad$ K=0 مرتبه عملیات

② این حدس اولیه را در رابطه قرار می دهیم تا x_i^{K+1} حساب شود:

$$x_1^{K+1}=\{C_1-a_{12}x_2^{(K)}-a_{13}x_3^{(K)}-\dots-a_{1n}x_n^{(K)}\}/a_{11}$$

$$x_2^{K+1}=\{C_2-a_{21}x_1^{(K)}-a_{23}x_3^{(K)}-\dots-a_{2n}x_n^{(K)}\}/a_{22}$$

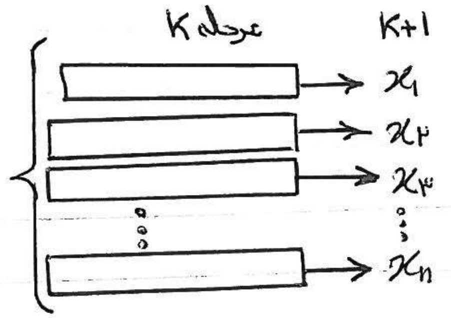
$$\vdots$$

$$x_n^{K+1}=\{C_n-a_{n1}x_1^{(K)}-a_{n2}x_2^{(K)}-\dots-a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(K)}\}/a_{nn}$$

③ روابطی که در بالا گفته شد به شرطی برقرار است که: $a_{ii}\neq 0$ $\quad \boxed{i=1,2,\dots,n}$

④ اگر $|x_i^{K+1}-x_i^{K}|>\text{Tol}$ باشد x_i^{K+1} حساب می شود وگرنه یک شمارنده به x_i اضافه می کند.

به طور نمادین این روش عبارتست:



* روش گاوس - سایدل (جایگزینی متوالی) :

اصول کلی این روش مثل ژاکوبی است . تنها یکسری تغییرات جزئی در آن وجود دارد به طور خلاصه عبارتست :

① حدس اولیه $x_i^{(K)}=0$ $\quad i=1,\dots,n$ $\quad$ $\boxed{\text{مرتبه عملیاتی } K=0}$

② $$x_1^{(K+1)}=\{C_1-a_{12}x_2^{(K)}-a_{13}x_3^{(K)}-\dots-a_{1n}x_n^{(K)}\}/a_{11}$$

$$x_2^{(K+1)}=\{C_2-a_{21}x_1^{(K+1)}-a_{23}x_3^{(K)}-\dots-a_{2n}x_n^{(K)}\}/a_{22}$$

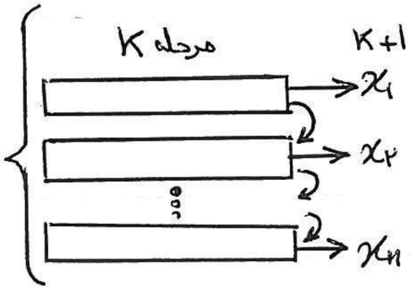
$$x_3^{(K+1)}=\{C_3-a_{31}x_1^{(K+1)}-a_{32}x_2^{(K+1)}-a_{34}x_4^{(K)}-\dots-a_{3n}x_n^{(K)}\}/a_{33}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(K+1)}=\{C_n-a_{n1}x_1^{(K+1)}-a_{n2}x_2^{(K+1)}-\dots-a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(K+1)}-a_{nn}x_n^{(K)}\}/a_{nn}$$

③ $|x_i^{K+1}-x_i^{K}|<Tole \xrightarrow{\text{بله}} x_i$ حساب می‌شود

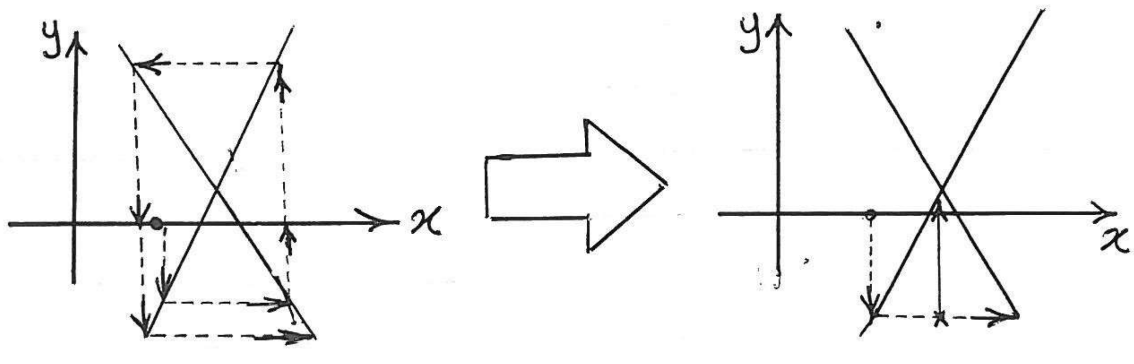
شکل این عملیات به صورت نمادین به شکل زیر است :



* Relaxation :

در روشهای حل تکراری اگر نمودار واگرا شد و یا سرعت همگرایی کم داشت از Relaxation استفاده می‌کنیم . رابطه آن به صورت روبرو است :

$$x_{New}=W\,x_{New}+(1-W)\,x_{old}$$



نمودار واگرا

همان نمودار با اعمال Relaxation