روش گاوس - سایدل (جایگزینی متوالی) :

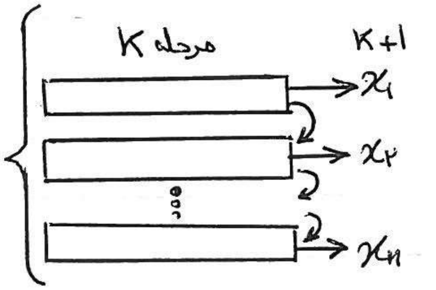
اصول کلی این روش مثل ژاکوبی است . تنها یکسری تغییرات جزئی در آن وجود دارد به طور خلاصه عبارتست :

① حدس اولیه $x_i^{(k)}=0$ $\quad i=1,\dots,n$ $\quad$ $\boxed{\text{مرتبه عملیاتی } K=0}$

②
$$x_1^{(k+1)}=\{C_1-a_{12}x_2^{(k)}-a_{13}x_3^{(k)}-\dots-a_{1n}x_n^{(k)}\}/a_{11}$$
$$x_2^{(k+1)}=\{C_2-a_{21}x_1^{(k+1)}-a_{23}x_3^{(k)}-\dots-a_{2n}x_n^{(k)}\}/a_{22}$$
$$x_3^{(k+1)}=\{C_3-a_{31}x_1^{(k+1)}-a_{32}x_2^{(k+1)}-a_{34}x_4^{(k)}-\dots-a_{3n}x_n^{(k)}\}/a_{33}$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(k+1)}=\{C_n-a_{n1}x_1^{(k+1)}-a_{n2}x_2^{(k+1)}-\dots-a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}-a_{nn}x_n^{(k)}\}/a_{nn}$$

③ $\left|x_i^{k+1}-x_i^{k}\right|<Tole \xrightarrow{\text{بله}} x_i$ حساب می‌شود

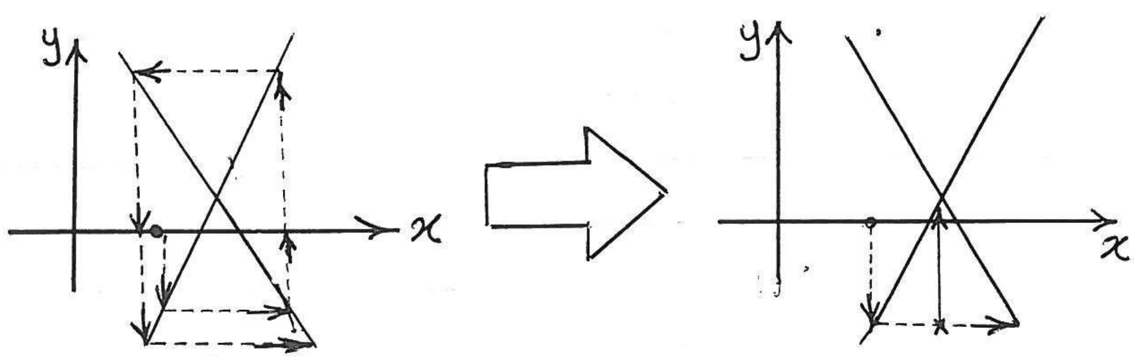
شکل این عملیات به صورت نمادین به شکل زیر است :



Relaxation :

در روشهای حل تکراری اگر نمودار واگرا شد و یا سرعت همگرایی کم داشت از Relaxation استفاده می‌کنیم . رابطه آن به صورت روبروست :

$$x_{New}=W\,x_{New}+(1-W)\,x_{Old}$$



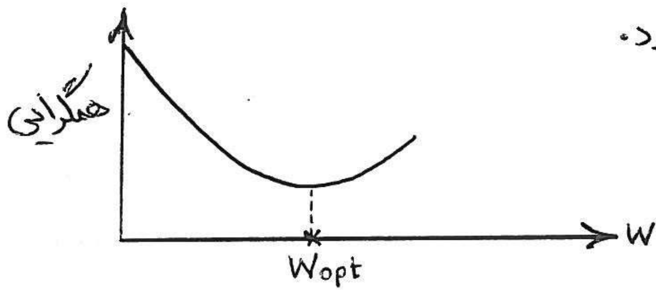
نمودار واگرا

همان نمودار با اعمال Relaxation

← نکات مربوط به Relaxation :

1. محاسبات همیشه با $(W=1)$ آغاز می گردد. یا محاسبات همگرا و یا واگرا می شود.
2. اگر در $(W=1)$ واگرا شود، آنگاه W عبارتست از: $0<W<1$
3. اگر $(W=1)$ همگرا شود، آنگاه W عبارتست از: $1<W<2$
4. افزایش بیش از حد W باعث واگرایی می شود.
5. برای W باید W_{opt} را انتخاب نمود.

برای بدست آوردن W_{opt} مساله را به ازای مقدارهای مختلف حساب می کنیم و داریم:



«معادلات غیر خطی»

* روشهای محاسبات معادله های تک جوابی (روش بسته):

⇐ نصف کردن (Bisection):

مراحل انجام این روش به همراه شکل در زیر بیان شده است:

1) $x_L \cdot f(x_L)<0$

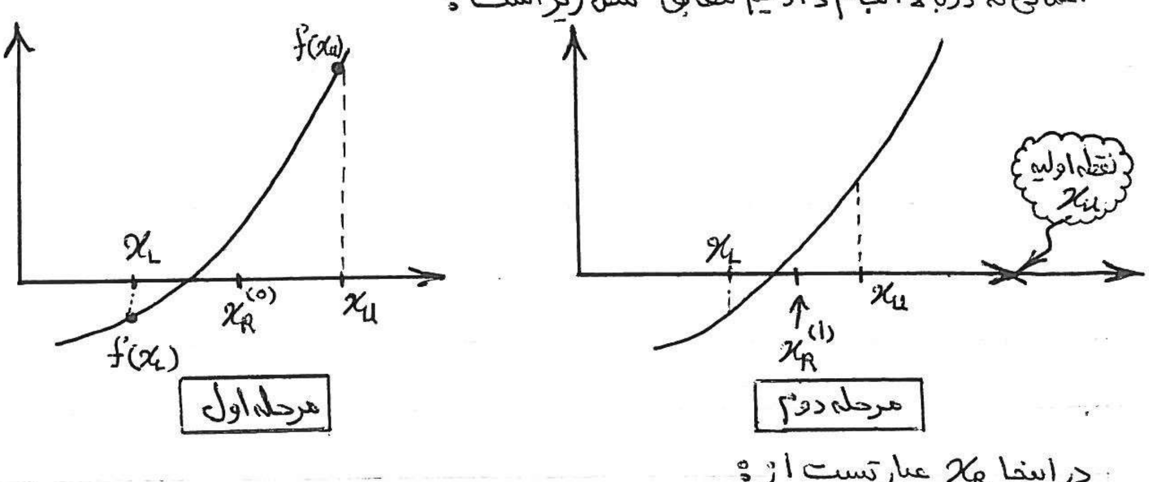
2) $x_R \cdot f(x_R)>0$

3) $f(x_L)\cdot f(x_R)<0 \longrightarrow x_R>0 \Longrightarrow x_u=x_R$

$f(x_L)\cdot f(x_R)>0 \longrightarrow x_R<0 \Longrightarrow x_L=x_R$

$f(x_L)\cdot f(x_R)\cong 0 \longrightarrow$ به جواب می رسیم

اعمالی که در بالا انجام دادیم مطابق شکل زیر است:



در اینجا x_R عبارتست از:

$$x_R^{New}=\frac{x_L+x_u}{2}$$

* میان یابی خطی :

مراحل حل انجام این روش به همراه شکل در زیر نشان داده شده است :

(۱) $x_L \cdot f(x_L) < 0$

$x_u \cdot f(x_u) > 0$

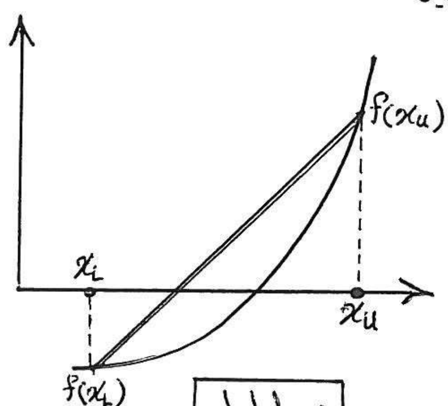
(۲) $x_R = x_u + \dfrac{f(x_0)(x_L - x_0)}{f(x) - f(x_0)}$

(۳) $f(x_L) \cdot f(x_R) < 0 \;\longrightarrow\; x_R = x_u$

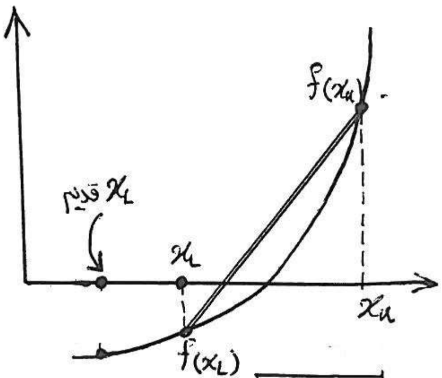
$f(x_L) \cdot f(x_R) > 0 \;\longrightarrow\; x_R = x_L$

$f(x_L) \cdot f(x_R) \cong 0 \;\longrightarrow$ انجام شد

اعمالی که در بالا انجام شد مطابق نمودار زیر است :



مرحله اول



مرحله دوم

---

* روشهای محاسبات معادله‌های چند جوابی (روش باز) :

⇐ روش گاوس - سایدل :

این روش به صورت روبرو است :

$$x = g(x) \longrightarrow x^{(k+1)} = g(x^{k+1})$$

این روش جزء محاسبات حل تکراری است که در گذشته پیرامون آن توضیح داده شده، در حل غیرخطی هم قابل استفاده است.

⇐ نیوتون - رافسون :

رابطه نیوتون - رافسون به صورت روبرو است :

$$x^{k+1} = x^{k} - \frac{f(x^{k})}{f'(x^{k})}$$

نحوهٔ عملکرد نیوتون-رافسون به طور شماتیک در زیر نشان داده شده است:

$$x^k \longrightarrow \boxed{g(x)} \longrightarrow x^{k+1}$$

$$x^k \longrightarrow \boxed{\text{تابع}} \longrightarrow f(x^k)$$

$$x^k \longrightarrow \boxed{\text{DERIN}} \longrightarrow f'(x^k)$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید تابع $g(x)$ مقدار x^k را به x^{k+1} تبدیل می‌کند برای این کار با روش تحلیلی ابتدا x^k به $f(x^k)$ و همچنین x^k به $f'(x^k)$ تبدیل می‌شود که با این ۲ عامل $f(x^k)$ و $f'(x^k)$ مقدار x^{k+1} حساب می‌شود.

⟸ نیوتون - رافسون False-position :

در این روش نیازی نداریم از روش تحلیلی استفاده کنیم و $g(x)$ تعیین کنیم و ... در اینجا فقط $f(x^{k+1})$ را مطابق شکل زیر محاسبه می‌کنیم:

$$x^k \longrightarrow \boxed{\text{Function}} \longrightarrow f(x^k)$$

رابطهٔ این روش به صورت زیر است:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{\left(\dfrac{f(x^k) - f(x^{k-1})}{x^k - x^{k-1}}\right)}$$

در این روش ما نیازمند ۲ حدس مقدار اولیه x^k و x^{k-1} برای حل معادله هستیم

برای چند معادله داریم:

$$\bar{J}(x^r) \cdot \Delta \bar{x}^r = -\bar{f}(\bar{x}^r)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{r+1} - x_1^r \\ x_2^{r+1} - x_2^r \\ \vdots \\ x_n^{r+1} - x_n^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r) \\ f_2(x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r) \\ \vdots \\ f_n(x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r) \end{bmatrix}$$

«مشتق گیری عددی»

اصولاً مشتق گیری بر مبنای جدول ضمیمه شده به این بخش است که داریم:

✻ مشتق مرتبه اول:

برای مشتق مرتبه اول از (Table 3.1) این برگه استفاده می‌کنیم که نحوه استفاده از آن در زیر نشان داده شده است:

ضرایب درون فرمول — خطا — ضرایبی که در جلوی $\frac{1}{h}$ قرار می‌گیرد

Mult. factor	Coefficients in difference formula							Error		Formula no.	
1	$\underline{-1}$	1						−1/2		1	۲ نقطه
	−1	$\underline{1}$						1/2	$hy''(\xi)$	2	
1/2	$\underline{-3}$	4	−1					1/3		3	۳ نقطه
	−1	$\underline{0}$	1					−1/6	$h^2y'''(\xi)$	4	
	1	−4	$\underline{3}$					1/3		5	
1/6	$\underline{-11}$	18	−9	2				−1/4		6	۴ نقطه
	−2	$\underline{-3}$	6	−1				1/12	$h^3y^{(iv)}(\xi)$	7	
	1	−6	$\underline{3}$	2				−1/12		8	
	−2	9	−18	$\underline{11}$				1/4		9	
1/12	$\underline{-25}$	48	−36	16	−3			1/5		10	۵ نقطه
	−3	$\underline{-10}$	18	−6	1			−1/20		11	
	1	−8	$\underline{0}$	8	−1			1/30	$h^4y^{(v)}(\xi)$	12	
	−1	6	−18	$\underline{10}$	3			−1/20		13	
	3	−16	36	−48	$\underline{25}$			1/5		14	
1/60	$\underline{-137}$	300	−300	200	−75	12		−1/6		15	۶ نقطه
	−12	$\underline{-65}$	120	−60	20	−3		1/30		16	
	3	−30	$\underline{-20}$	60	−15	2		−1/60	$h^5y^{(vi)}(\xi)$	17	
	−2	15	−60	$\underline{20}$	30	−3		1/60		18	
	3	−20	60	−120	$\underline{65}$	12		−1/30		19	
	−12	75	−200	300	−300	$\underline{137}$		1/6		20	
1/60	$\underline{-147}$	360	−450	400	−225	72	−10	1/7		21	۷ نقطه
	−10	$\underline{-77}$	150	−100	50	−15	2	−1/42		22	
	2	−24	$\underline{-35}$	80	−30	8	−1	1/105		23	
	−1	9	−45	$\underline{0}$	45	−9	1	−1/140	$h^6y^{(vii)}(\xi)$	24	
	1	−8	30	−80	$\underline{35}$	24	−2	1/105		25	
	−2	15	−50	100	−150	$\underline{77}$	10	−1/42		26	
	10	−72	225	−400	450	−360	$\underline{147}$	1/7		27	

در هنگام استفاده از این جدول می بایست نکاتی را در نظر گرفت که به طور خلاصه در پای همان کاغذ ضمیمه نوشته شده است. مثلاً در مشتق گیری ۴ نقطه ای نسبت به نقطه سوم (Formula NO. 8) رابطه مشتق عددی عبارتست از:

$$\begin{array}{cccc} \circ & \circ & \times & \circ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{array}$$

$$f'_i = \frac{1}{6}\,\frac{1}{h}\left[\bigcirc f_{i-2} + \bigcirc f_{i-1} + \bigcirc f_i + \bigcirc f_{i+1}\right]$$

$\frac{1}{h}$ از ستون ضرایب

اعداد از ستون ضرایب

مشتق مرتبه دوم :

برای مشتق مرتبه دوم از (Table 3.2) برگه ضمیمه استفاده می کنیم که این جدول در زیر نشان داده شده است و نحوه عمل به مانند مرتبه اول است :

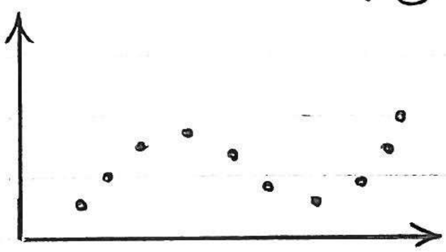
ضرایبی که در فرمول ظاهر می شود

خطا

ضرایبی که در جلوی $\frac{1}{h^2}$ ظاهر می شود.

Mult. factor	Coefficients in difference formula					Error				Formula no.	
	$\underline{1}$	-2	1			-1		$1/6$		1	
1	1	$\underline{-2}$	1			0	$hy^{(III)}(\xi_1)+$	$-1/12$	$h^2y^{(IV)}(\xi_2)$	2	۳ نقطه ای
	1	-2	$\underline{1}$			1		$-1/6$		3	
	$\underline{12}$	-30	24	-6		$11/12$		$-1/10$		4	
1/6	6	$\underline{-12}$	6	0		$-1/12$	$h^2y^{(IV)}(\xi_1)+$	$-1/30$	$h^3y^{(V)}(\xi_2)$	5	۴ نقطه ای
	0	6	$\underline{-12}$	6		$1/12$		$-1/30$		6	
	-6	24	-30	$\underline{12}$		$11/12$		$-1/10$		7	
	$\underline{70}$	-208	228	-112	22	$-5/6$		$1/15$		8	
	22	$\underline{-40}$	12	8	-2	$1/12$		$-1/60$		9	
1/24	-2	32	$\underline{-60}$	32	-2	0	$h^3y^{(V)}(\xi_1)+$	$1/90$	$h^4y^{(VI)}(\xi_2)$	10	۵ نقطه ای
	-2	8	12	$\underline{-40}$	22	$-1/12$		$1/60$		11	
	22	-112	228	-208	$\underline{70}$	$5/6$		$1/15$		12	

« انتگرال گیری عددی »



اگر یکسری نقاط به مانند روبرو داشته باشیم به ۲ روش می توان سطح زیر نمودار روبرو را محاسبه کرد :

① انتگرال گیری با در نظر گرفتن کل نقاط :

n	تعداد نقاط	فرمول انتگرال گیری	نام روش
۱	۲	$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx=\frac{h}{2}(f_0+f_1)$	ذوزنقه
۲	۳	$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx=\frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2)$	سیمپسون $\frac{1}{3}$
۳	۴	$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=\frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3)$	سیمپسون $\frac{3}{8}$
۴	۵	$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx=\frac{2h}{45}(7f_0+32f_1+12f_2+32f_3+7f_4)$	قانون Bools
۵	۶	$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx=\frac{5h}{288}(19f_0+75f_1+50f_2+75f_4+19f_5)$	نیوتون Cots

جدول مشتق عددی

TABLE 3-1
FINITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR hy' AN IDISTANT GRID

Mult. factor	Coefficients in difference formula							Error		Formula no.
1	$\underline{-1}$	1						$-1/2$	$hy''(\xi)$	1
	-1	$\underline{1}$						$1/2$		2
1/2	$\underline{-3}$	4	-1					$1/3$	$h^2y'''(\xi)$	3
	-1	$\underline{0}$	1					$-1/6$		4
	1	-4	$\underline{3}$					$1/3$		5
1/6	$\underline{-11}$	18	-9	2				$-1/4$	$h^3y^{(IV)}(\xi)$	6
	-2	$\underline{-3}$	6	-1				$1/12$		7
	1	-6	$\underline{3}$	2				$-1/12$		8
	-2	9	-18	$\underline{11}$				$1/4$		9
1/12	$\underline{-25}$	48	-36	16	-3			$1/5$	$h^4y^{(V)}(\xi)$	10
	-3	$\underline{-10}$	18	-6	1			$-1/20$		11
	1	-8	$\underline{0}$	8	-1			$1/30$		12
	-1	6	-18	$\underline{10}$	3			$-1/20$		13
	3	-16	36	-48	$\underline{25}$			$1/5$		14
1/60	$\underline{-137}$	300	-300	200	-75	12		$-1/6$	$h^5y^{(VI)}(\xi)$	15
	-12	$\underline{-65}$	120	-60	20	-3		$1/30$		16
	3	-30	$\underline{-20}$	60	-15	2		$-1/60$		17
	-2	15	-60	$\underline{20}$	30	-3		$1/60$		18
	3	-20	60	-120	$\underline{65}$	12		$-1/30$		19
	-12	75	-200	300	-300	$\underline{137}$		$1/6$		20
1/60	$\underline{-147}$	360	-450	400	-225	72	-10	$1/7$	$h^6y^{(VII)}(\xi)$	21
	-10	$\underline{-77}$	150	-100	50	-15	2	$-1/42$		22
	2	-24	$\underline{-35}$	80	-30	8	-1	$1/105$		23
	-1	9	-45	$\underline{0}$	45	-9	1	$-1/140$		24
	1	-8	30	-80	$\underline{35}$	24	-2	$1/105$		25
	-2	15	-50	100	-150	$\underline{77}$	10	$-1/42$		26
	10	-72	225	-400	450	-360	$\underline{147}$	$1/7$		27
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6			

From: Kubicek & Hlavacek

Num. Sol^{n} of non-linear b.v.p. 1983

notes : $y \approx f$ — underline means at the data point.

e.g. eq^{n} # 14 :

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{@\text{ point } i} = \frac{1}{12h}\left[3f_{i-4} - 16f_{i-3} + 36f_{i-2} - 48f_{i-1} + 25f_i\right]$$
$$= \frac{1}{12h}\left[3f_0 - 16f_1 + 36f_2 - 48f_3 + 25f_4\right]$$

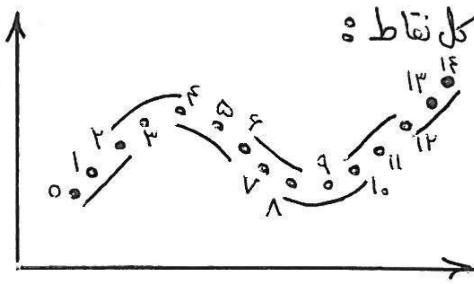
TABLE 3-2
ITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR h^2y'' AND EQUIDISTANT G

Mult. factor	Coefficients in difference formula					Error				Formula no.
1	$\underline{1}$	-2	1			-1	$hy^{(III)}(\xi_1)+$	$1/6$	$h^2y^{(IV)}(\xi_2)$	1
	1	$\underline{-2}$	1			0		$-1/12$		2
	1	-2	$\underline{1}$			1		$-1/6$		3
1/6	$\underline{12}$	-30	24	-6		$11/12$	$h^2y^{(IV)}(\xi_1)+$	$-1/10$	$h^3y^{(V)}(\xi_2)$	4
	6	$\underline{-12}$	6	0		$-1/12$		$-1/30$		5
	0	6	$\underline{-12}$	6		$1/12$		$-1/30$		6
	-6	24	-30	$\underline{12}$		$11/12$		$-1/10$		7
1/24	$\underline{70}$	-208	228	-112	22	$-5/6$	$h^3y^{(V)}(\xi_1)+$	$1/15$	$h^4y^{(VI)}(\xi_2)$	8
	22	$\underline{-40}$	12	8	-2	$1/12$		$-1/60$		9
	-2	32	$\underline{-60}$	32	-2	0		$1/90$		10
	-2	8	12	$\underline{-40}$	22	$-1/12$		$1/60$		11
	22	-112	228	-208	$\underline{70}$	$5/6$		$1/15$		12

TABLE 3-3
FINITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR h^3y''' AND $h^4y^{(IV)}$ AND EQUIDISTANT GRID

Mult. factor	Coefficients in difference formula					Error		Formula no.
1	$\underline{-1}$	3	-3	1		$-3/2$	$hy^{(IV)}(\xi)$	1
	-1	$\underline{3}$	-3	1		$-1/2$		2
	-1	3	$\underline{-3}$	1		$1/2$		3
	-1	3	-3	$\underline{1}$		$3/2$		4
1/2	$\underline{-5}$	18	-24	14	-3	$7/4$	$h^2y^{(V)}(\xi)$	5
	-3	$\underline{10}$	-12	6	-1	$1/4$		6
	-1	2	$\underline{0}$	-2	1	$-1/4$		7
	1	-6	12	$\underline{-10}$	3	$1/4$		8
	3	-14	24	-18	$\underline{5}$	$7/4$		9
1	$\underline{1}$	-4	6	-4	1	-2	$hy^{(V)}(\xi)$	10
	1	$\underline{-4}$	6	-4	1	-1		11
	1	-4	6	$\underline{-4}$	1	1		12
	1	-4	6	-4	$\underline{1}$	2		13
	1	-4	$\underline{6}$	-4	1	$-1/6$	$h^2y^{(VI)}(\xi)$	14

② انتگرال گیری با تعداد نقاط محدود و تعمیم آن به کل نقاط :



در این روش ما به صورت نمادین به مانند شکل روبرو عمل می کنیم :

در این روش گام ما به صورت زیر است :

$$h=\frac{b-a}{2m}$$

a ابتدای بازه

b انتهای بازه

m تعداد نقاط

براساس این روش فرمولهای انتگرال گیری عبارتست از :

ذوزنقه : $\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx=\frac{b-a}{m}\left(f_0+2f_1+2f_2+\dots+2f_{m-1}+f_m\right)$

سیمپسون $\frac{1}{3}$: $\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx=\frac{b-a}{m}\left(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+\dots+2f_{m-2}+4f_{m-1}+f_m\right)$

ضرایب f زوج ← ۲ / ضرایب f فرد ← ۴ / ضرایب اول و آخر ← ۱

سیمپسون $\frac{3}{8}$: $\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx=\frac{3(b-a)}{8}\left(f_0+3f_1+3f_2+2f_0+\dots+2f_{m-3}+3f_{m-2}+3f_{m-1}+f_m\right)$

جملات اول و آخر ← ۱ / ضرایب جملات مضرب ۳ ← ۲ / ضرایب جملات غیرمضرب ۳ ← ۳

« حل معادلات دیفرانسیل با روش عددی »

به طور کلی انواع معادلات دیفرانسیل عبارتست از :

① معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی PDE : وابسته به بیش از یک متغیر مستقل است.

$$\frac{dT}{dx}=\frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt} \longrightarrow$$

این معادله دیفرانسیل وابسته به مکان و زمان می باشد

② معادلات دیفرانسیل معمولی ODE : این معادله وابسته به یک متغیر مستقل است :

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0 \longrightarrow$$

فقط وابسته به x است

---

① معادلات دیفرانسیل PDE :

در این معادلات دیفرانسیل به ازای هر عبارت دیفرانسیلی معادل مشتق عددی آن را جاگذاری می کنیم. مثال :

$$\frac{dT}{dx}=\frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dT}{dx} : \frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{dT}{dt} : \frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{2\Delta t}$$

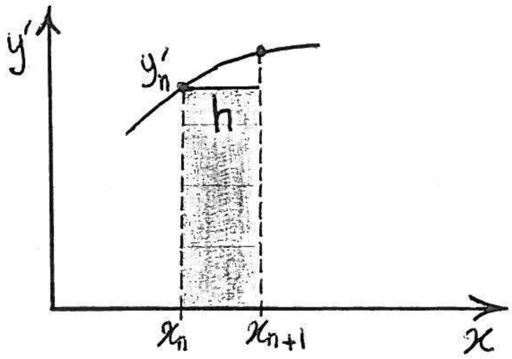
$$\frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{2\Delta x}=\frac{1}{\alpha}\,\frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{2\Delta t}$$

۲) معادلات دیفرانسیل ODE :

روشهایی که برای حل داریم عبارت هستند از :

⇐ finit diffinition : یعنی دقیقاً مثل معادلات دیفرانسیل PDE عمل می کنیم و به جای عبارت دیفرانسیل معادل مشتق عددی آن را قرار می دهیم :

⇐ قانون اویلر :

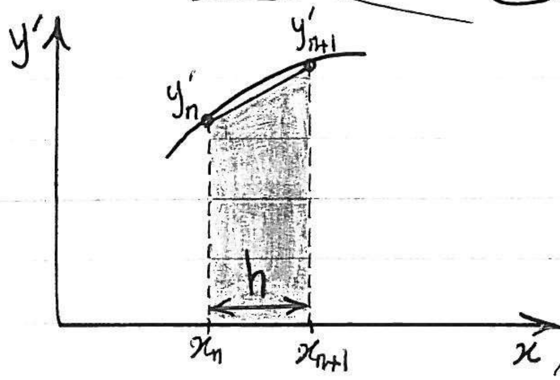


اگر نمودار معادله دیفرانسیلی به صورت روبرو باشد :

$$\frac{dy}{dx}=y' \qquad \begin{cases} x=x_0\\ y=y_0 \\ y'_0=f(x_0,y_0)\end{cases}$$

با توجه به قانون اویلر مقدار y_{n+1} عبارتست از :

$$y_{n+1}=y_n+y'_n\cdot h \qquad \boxed{y'_n=f(x_n,y_n)}$$



⇐ قانون اویلر اصلاح شده (Heun) :

برای اویلر اصلاح شده مطابق نمودار روبرو داریم :

$$\frac{dy}{dx}=y'_{n+1}=f(x_{n+1},y_{n+1})$$

رابطه ای که در این روش استفاده می شود به صورت زیر است :

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(y'_n+y'_{n+1}\right)$$

به طور خلاصه مراحلی را که برای این روش انجام می دهیم عبارتست از :

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(y'_n+y'_{n+1}\right)$$

به طور خلاصه مراحلی را که برای این روش انجام می دهیم عبارتست از :

۱) مرحله پیشگویی : ابتدا y^*_{n+1} را حدس می زنیم. برای بدست آوردن y^*_{n+1} را با اویلر معمولی حساب می کنیم :

$$y^*_{n+1}=y_n+y'_n\cdot h$$

۲) مرحله تصحیح : مقدار y^*_{n+1} بدست آمده از طریق اویلر معمولی را در رابطه دیفرانسیل قرار می دهیم :

$$y'^*_{n+1}=f(x_{n+1},y^*_{n+1}) \longleftarrow \boxed{x_{n+1}=x_n+h}$$

۳) مرحله محاسبه نهایی : مقدار y'^*_{n+1} که در مرحله ۲ بدست آمد را در رابطه اویلر اصلاح شده قرار می دهیم :

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(y'_n , y'^*_{n+1}\right)$$

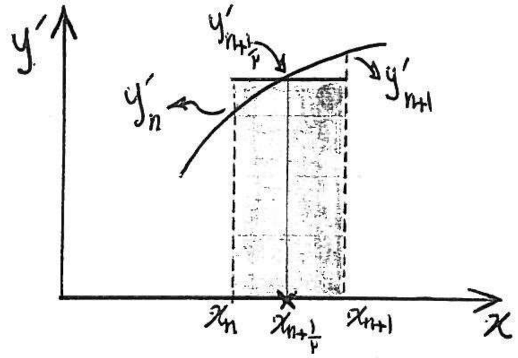
④ مرحله تعیین جواب قطعی : مقدار y_{n+1} را که از روش اویلر و اویلر اصلاح شده بدست آمده مقایسه می کنیم و داریم :

$$\left|y_{n+1}-y^*_{n+1}\right| < Tol \rightarrow$$ y_{n+1} محاسبه شده است

نکته

قوانین اویلر و اویلر اصلاح شده از بسط تیلور پیروی می کند . در اویلر پس از یک جمله قطع شده است و در اویلر اصلاح شده پس از ۲ جمله قطع می شود :

بسط تیلور : $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n$



⇐ روش Polygon :

شکل نمودار این روش به صورت روبرو است :

در این روش برای پیشگویی به جای اینکه یک گام به جلو برویم $\frac{1}{2}$ گام به جلو می رویم :

روش کار Polygon به صورت زیر است :

$$y'_n=f(x_n , y_n)$$

$$y^*_{n+1/2}=y_n+\frac{h}{2}y'_n$$

$$y'^*_{n+1/2}=f(x_{n+1/2} , y^*_{n+1/2})$$

$$y_{n+\frac{1}{2}}=y_n+\frac{h}{2}\,y'^*_{n+1/2}$$

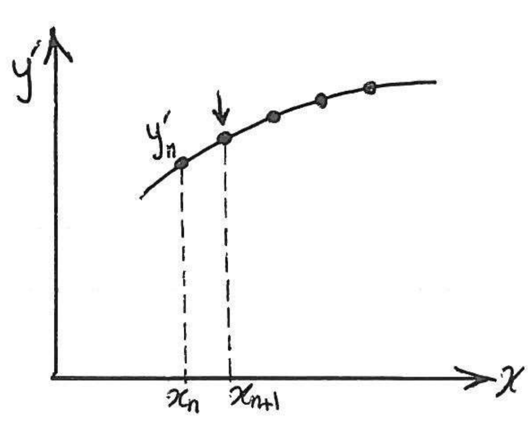
$$\left|y_{n+\frac{1}{2}}-y^*_{n+\frac{1}{2}}\right|<Tole$$

NO

Yes

$$y_{n+1}=y_n+h\,y'_{n+\frac{1}{2}}$$

⇐ رانگ کوتا :



رانگ کوتا روشی است که به وسیله آن از چند نقطه بعد از نقطه مورد نظر y_{n+1} را حساب می کند . انواع رانگ کوتا عبارتست از :

الف) رانگ کوتا مرتبه ۳

ب) رانگ کوتا مرتبه ۴

ج) رانگ کوتا Fehlberg

الف) رانگ کوتا مرتبه ۳:

اگر معادله دیفرانسیل به صورت روبرو باشد:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=y' \qquad \begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$$

جواب معادله : $y_{n+1}=y_n+\sum_{i=1}^{v}\omega_i K_i$

ω_i : Weight factor تابع وزنی

K_i : function Evalution عملگر ارزشی

v : خطا متناسب با روش

K_i در رابطهٔ y_{n+1} عبارتست از:

$$K_i=hf\left(x_n+C_ih\,,\,y_n+\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}K_j\right)$$

بنابراین K_1 تا K_3 برای رانگ کوتا مرتبه ۳ عبارت خواهد بود از:

* $K_1=hf(x_n,y_n)$
* $K_2=hf(x_n+C_2h\,,\,y_n+a_{21}K_1)$
* $K_3=hf(x_n+C_3h\,,\,y_n+a_{31}K_1+a_{32}K_2)$

در رابطهٔ K_i مقادیر ثابت a و C وجود دارد همچنین برای محاسبه y_{n+1} ازمقدار ثابت تابع وزنی ω_i استفاده می‌کنیم. این مقادیر ثابت ازجدول زیر بدست می‌آید:

$C_1=0$			
C_2	a_{21}		
C_3	a_{31}	a_{32}	
	ω_1	ω_2	ω_3

ب) رانگ کوتا مرتبه ۴:

ازنظرعملکرد وروابط مثل رانگ کوتا مرتبه ۳ است یعنی داریم:

شکل معادله $\qquad \frac{dy}{dx}=f(x,y)=y' \qquad \begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$

جواب معادله $\longrightarrow y_{n+1}=y_n+\sum_{i=1}^{v}\omega_i K_i$

$$K_i=hf\left(x_n+C_ih\,,\,y_n+\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}K_j\right)$$

برای محاسبه مقادیر ثابتی که درمعادله رانگ کوتا ظاهر می‌گردد، ۲ حالت داریم:

حالت اول $\longrightarrow$ رانگ کوتا مرتبه ۴ کلی

حالت دوم $\longrightarrow$ رانگ کوتا مرتبه ۴ کلاسیک

براساس هرکدام از ۲ حالت مطرح شده در بالا جدول مقادیر و K_i متفاوت می‌شود که عبارتست از:

حالت اول

$$
\begin{array}{c|cccc}
c_1=0 & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \\
\hline
 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4
\end{array}
$$

* $K_1 = hf(x_n , y_n)$
* $K_2 = hf(x_n + c_2 h \text{ و } y_n + a_{21} K_1)$
* $K_3 = hf(x_n + c_3 h \text{ و } y_n + a_{31} K_1 + a_{32} K_2)$
* $K_4 = hf(x_n + c_4 h \text{ و } y_n + a_{41} K_1 + a_{42} K_2 + a_{43} K_3)$

براین اساس y_{n+1} عبارتست از:

$$y_{n+1} = y_n + (\omega_1 K_1 + \omega_2 K_2 + \omega_3 K_3)$$

حالت دوم

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}
$$

* $K_1 = hf(x_n , y_n)$
* $K_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h \text{ و } y_n + \frac{1}{2} K_1)$
* $K_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h \text{ و } y_n + \frac{1}{2} K_2)$
* $K_4 = hf(x_n + h \text{ و } y_n + K_3)$

براین اساس y_{n+1} به صورت زیر در می آید:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

ج) رانگ کوتا Fehlberg :

دراین رانگ کوتا برای ۲ رانگ کوتامرتبه ۴ و ۵ محاسبات y_{n+1} و k_i به صورت عباراتی چند جمله‌ای در زیر به همراه خطا بیان شده است. تنها کافیست برای محاسبه y_{n+1} برحسب مرتبه ۴ یا ۵ مقادیر x_n و y_n و h را دراین روابط جایگزین می‌کنیم :

An Algorithm for the Runge–Kutta–Fehlberg Method

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{k_1}{4}\right),$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{3h}{8}, y_n + \frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\right),$$

$$k_4 = h \cdot f\left(x_n + \frac{12h}{13}, y_n + \frac{1932k_1}{2197} - \frac{7200k_2}{2197} + \frac{7296k_3}{2197}\right),$$

$$k_5 = h \cdot f\left(x_n + h, y_n + \frac{439k_1}{216} - 8k_2 + \frac{3680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4104}\right),$$

$$k_6 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{8k_1}{27} + 2k_2 - \frac{3544k_3}{2565} + \frac{1859k_4}{4104} - \frac{11k_5}{40}\right);$$

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + \left(\frac{25k_1}{216} + \frac{1408k_3}{2565} + \frac{2197k_4}{4104} - \frac{k_5}{5}\right), \text{ with global error } O(h^4),$$

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{16k_1}{135} + \frac{6656k_3}{12825} + \frac{28561k_4}{56430} - \frac{9k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}\right), \quad \leftarrow \text{use as RK.}$$

with global error $O(h^5)$;

$$\text{Error, } E \doteq \frac{k_1}{360} - \frac{128k_3}{4275} - \frac{2197k_4}{75240} + \frac{k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}.$$

error for stepsize control

⟸ روش پیشگو – تصحیح کن :

این روشها به صورت خودبه خودی آغاز نمی شوند و ابتدا باید با یک رانگ کوتا آغاز شود. این روشها به صورت حل تکراری انجام می شود. تا زمانی که محاسبات ادامه می یابد مقدار خطا هم کاهش پیدا می کند و مقدار خطا بسیار کم می شود. در مرحله پیشگویی از روابط Adams Bashforth و برای تصحیح از روابط Adams Moulten استفاده می کنیم. روشهایی که برای پیشگو تصحیح کن داریم ، عبارتست از :

① PECE

② $P(EC)^s E$

③ PMECME

④ $PM(EC)^s ME$

Adams–Bashforth

$$y_{n+1} = y_n + h[y_n' + \tfrac{1}{2}\nabla y_n' + \tfrac{5}{12}\nabla^2 y_n' + \tfrac{3}{8}\nabla^3 y_n' + \tfrac{251}{720}\nabla^4 y_n' + \tfrac{475}{1440}\nabla^5 y_n' + \tfrac{19087}{60480}\nabla^6 y_n' + \cdots]$$

Adams–Moulton

$$y_{n+1} = y_n + h[y'_{n+1} - \tfrac{1}{2}\nabla y'_{n+1} - \tfrac{1}{12}\nabla^2 y'_{n+1} - \tfrac{1}{24}\nabla^3 y'_{n+1} - \tfrac{19}{720}\nabla^4 y'_{n+1} - \tfrac{3}{160}\nabla^5 y'_{n+1} - \tfrac{863}{60480}\nabla^6 y'_{n+1} + \cdots]$$

notation: $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$

$y_n' = f_n'$

Predictor

TABLE 1.1

ADAMS–BASHFORTH FORMS

q	Coefficient of h	y_n'	y'_{n-1}	y'_{n-2}	y'_{n-3}	y'_{n-4}	y'_{n-5}	local truncation error
0	1	1						$\frac{1}{2}h^2 f'(\gamma)$
1	1/2	3	−1					$\frac{5}{12}h^3 f''(\gamma)$
2	1/12	23	−16	5				$\frac{9}{24}h^4 f'''(\gamma)$
3	1/24	55	−59	37	−9			$\frac{251}{720}h^5 f^{iv}(\gamma)$
4	1/720	1901	−2774	2616	−1274	251		$\frac{475}{1440}h^6 f^{v}(\gamma)$
5	1/1440	4277	−7923	9982	−7298	2877	−475	$\frac{19087}{60480}h^7 f^{vi}(\gamma)$

$$y_{n+1} = y_n + h y_n' \qquad (q = 0)$$

$$y_{n+1} = y_n + (h/2)[3y_n' - y'_{n-1}] \qquad (q = 1)$$

predicts $\longrightarrow$ $$y^*_{n+1} = y_n + (h/12)[23y_n' - 16y'_{n-1} + 5y'_{n-2}] \qquad (q = 2)$$

$$y_{n+1} = y_n + (h/24)[55y_n' - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}] \qquad (q = 3)$$

Error $O\left(h^{q+2} f^{[q+1]}(\gamma)\right)$

Corrector

TABLE 1.2

ADAMS–MOULTON FORMS

q	Coefficient of h	y'_{n+1}	y_n'	y'_{n-1}	y'_{n-2}	y'_{n-3}	y'_{n-4}	local truncation error
0	1	1						$-\frac{1}{2}h^2 f'(\gamma)$
1	1/2	1	1					$-\frac{1}{12}h^3 f''(\gamma)$
2	1/12	5	8	−1				$-\frac{1}{24}h^4 f'''(\gamma)$
3	1/24	9	19	−5	1			$-\frac{19}{720}h^5 f^{iv}(\gamma)$
4	1/720	251	646	−264	106	−19		$-\frac{3}{160}h^6 f^{v}(\gamma)$
5	1/1440	475	1427	−798	482	−173	27	$-\frac{863}{60480}h^7 f^{vi}(\gamma)$

corrects $(q=2)$ $\longrightarrow$ $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left[5y'^{*}_{n+1} + 8y_n' - y'_{n-1}\right]$$

① PECE :

Ⓟ $y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55\, y'_n - 59\, y'_{n-1} + 37\, y'_{n-2} - \cdots\right]$ پیشگویی $\frac{A.B}{\text{جدول}}$

Ⓔ $y'^*_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

Ⓒ $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9\, y'^*_{n+1} + 19\, y'_n - 5\, y'_{n-1} - \cdots\right]$ تصحیح $\frac{A.M}{\text{جدول}}$

Ⓔ $y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

---

② P(EC)^{S}E :

Ⓟ $y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55\, y'_n - 59\, y'_{n-1} + 37\, y'_{n-2} - \cdots\right]$ پیشگویی $\frac{A.B}{\text{جدول}}$

Ⓔ $y'^*_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}) \xleftarrow{y^*_{n+1} = y_{n+1}}$ NO

Ⓒ $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9\, y'^*_{n+1} + 19\, y'_n - \cdots\right] \longrightarrow |y_{n+1} - y^*_{n+1}| < Tol$ تصحیح $\frac{A.M}{\text{جدول}}$

Ⓔ $y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}) \longleftarrow$ Yes

---

③ PMECME :

Ⓟ $P_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55\, y'_n - 59\, y'_{n-1} + 37\, y'_{n-2} - 9\, y'_{n-3} - \cdots\right]$ $\frac{A.B}{\text{جدول}}$

Ⓜ $m_{n+1} = P_{n+1} + \frac{251}{720}(C_n - P_n)$

Ⓔ $m'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

Ⓒ $C_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9\, m'_{n+1} + 19\, y'_n - 5\, y'^*_{n-1} + y'_{n-2} - \cdots\right]$ $\frac{A.M}{\text{جدول}}$

Ⓜ $y_{n+1} = C_{n+1} - \frac{19}{720}(C_{n+1} - P_{n+1})$

Ⓔ $y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

در این روابط بالا داریم :

* $P_n, P_{n+1} \longrightarrow$ Pridiction Value
* $C_n, C_{n+1} \longrightarrow$ Corected Value
* $m_{n+1} \longrightarrow$ Modific Pridict Value
* $y_{n+1} \longrightarrow$ Modifile Corrected

۴) $PM(EC)^S ME$:

P) $P_{n+1} = y_n + \frac{h}{۲۴}\left[۵۵\, y'_n - ۵۹\, y'_{n+1} + ۳۷\, y'_{n-۲} - \cdots\right]$ A.B

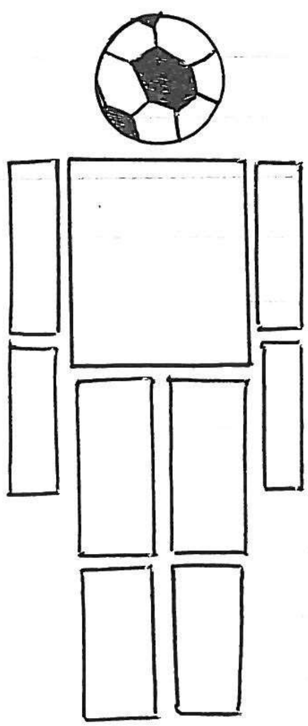
M) $m_{n+1} = P_{n+1} + \frac{۲۵۱}{۷۲۰}\left(C_n - P_n\right)$

E) $m'_{n+1} = f(x_{n+1} , y_{n+1})$ ← $m_{n+1} = C_{n+1}$ NO

C) $C_{n+1} = y_n + \frac{h}{۲۴}\left[۹\, m'_{n+1} + ۱۹\, y'_n - ۵\, y'^{*}_{n-1} - \cdots\right] \longrightarrow |m_{n+1} - C_{n+1}| < Tole$

M) $y_{n+1} = C_{n+1} - \frac{۱۹}{۷۲۰}\left(C_{n+1} - P_{n+1}\right)$ ← Yes

E) $y'_{n+1} = f(x_{n+1} , y_{n+1})$



تهیه و تنظیم:

مسعود زمانی

گرافیک در Matlab

۳-۱- مقدمه

نرم‌افزار Matlab دارای امکانات گسترده‌ای جهت نمایش گرافیکی بوده و شامل توابعی است که امکان رسم نمودارهای دوبعدی، سه‌بعدی، قطبی، ستونی و ... را میسر می‌سازد. همچنین می‌توان در آن گراف‌ها را عنوان‌گذاری و محورها را برچسب‌گذاری نمود. علاوه بر آن فرامینی برای کنترل صفحه گرافیکی و نیز مقیاس‌بندی محورها وجود دارد. در این فصل روند ترسیم نمودارهای دوبعدی و سه‌بعدی را خواهید آموخت.

۳-۲- نمودار دوبعدی

با کمک Matlab می‌توان نمودارها را در صفحه جدید دکارتی ترسیم نمود که در آن مقیاس‌بندی محورها به صورت اتوماتیک انجام می‌گیرد. دستورات گرافیکی دو بعدی Matlab به شرح جدول(۳-۱) می‌باشد.

۳-۲-۱- دستور plot

برای رسم نمودارهای دکارتی استفاده می‌شود و چهار حالت دارد:

- **plot(z)**: عناصر بردار z را برحسب اندیس‌های آن رسم می‌کند.

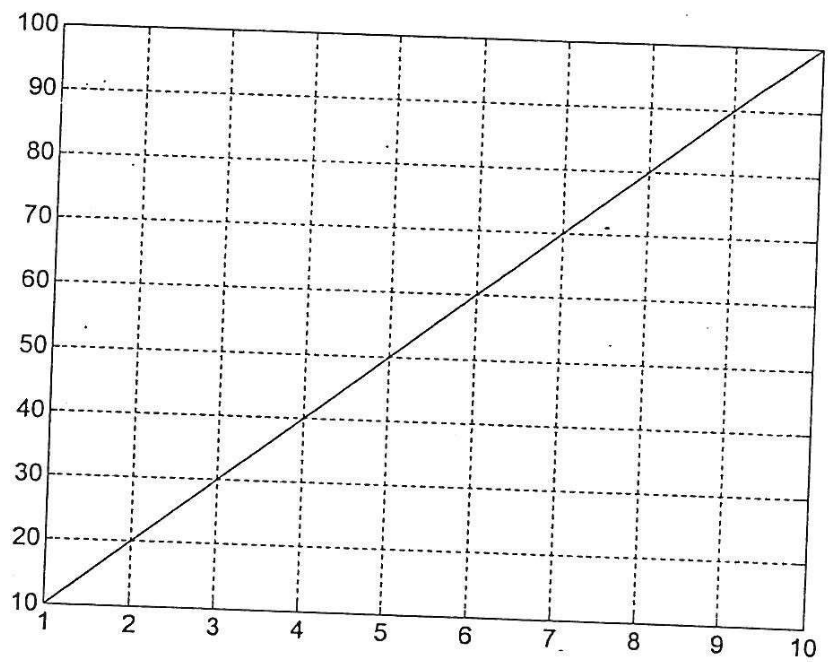
جدول ۳-۱- فرامین گرافیکی دو بعدی

تابع ها رسم دو بعدی	
توضیح	**دستور**
رسم نمودار در صفحهٔ دکارتی	plot
رسم نمودار نیمه لگاریتمی(محور x لگاریتمی)	semilogx
رسم نمودار نیمه لگاریتمی(محور y لگاریتمی)	semilogy
رسم نمودار با دو محور لگاریتمی	loglog
رسم نمودار در صفحهٔ قطبی	polar
ابزار رسم دو بعدی	
شبکه‌ای نمودن صفحه گرافیک	grid
نوشتن عنوان برای شکل	title
برچسب‌گذاری محورx	xlabel
برچسب‌گذاری محورy	ylabel
جایگزینی متن با موشواره در صفحه گراف	gtext
نوشتن متن در جایی مشخص از صفحه گراف	text
تغییر مشخصات مختصات محورها	axis
ایجاد صفحه گرافیکی با شمارهٔ h	figure(h)
نشان دادن صفحهٔ گرافیکی	shf
پاک کردن محتویات صفحه گرافیکی بدون بستن آن	clf
بستن صفحه گرافیکی با شمارهٔ h	close(h)
نگه داشتن نمودار جاری	hold
رسم چند نمودار مجزا در صفحهٔ گراف	subplot
بزرگ نمایی صفحهٔ گرافیکی	zoom

- plot (x,y) : بردار یا ماتریس y را برحسب بردار یا ماتریس هم بعد x رسم می‌کند.
- plot(x,y,'line type') : رسم منحنی y برحسب x با تعیین رنگ و نوع قالب خط.
- plot(x_1,y_1,'r-',x_2,y_2,'g:',...) : رسم چند نمودار به طور همزمان در یک صفحه گرافیکی.

مثال۳-۱:

```
» y = 10:10:100; ↵
» plot(y) ↵
» grid ↵
```

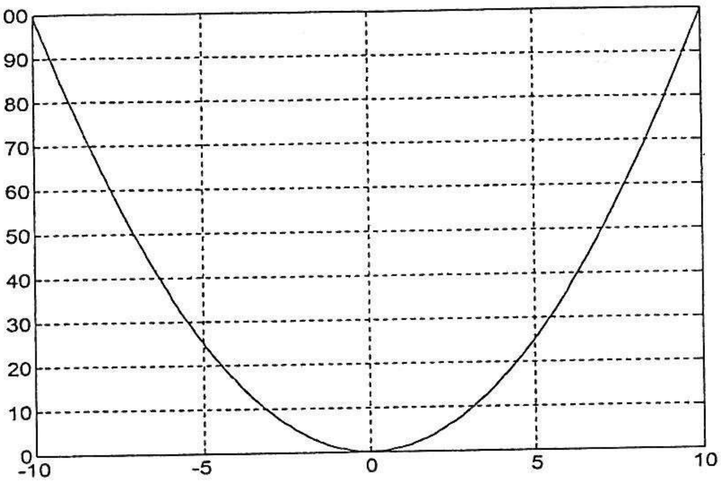


شکل (۳-۱) - نمودار مربوط به مثال ۳-۱

اگر در حالت فوق، آرگومان دستور، یک بردار مختلط باشد قسمت موهومی را برحسب قسمت حقیقی رسم می‌کند. اگر x و y هر دو بردار باشند عناصر بردار y برحسب x رسم می‌شوند.

مثال۳-۲:

```
» x = -10:0.1:10;
» y = x.^2;
» figure(1) , plot(x,y), grid ↵
```

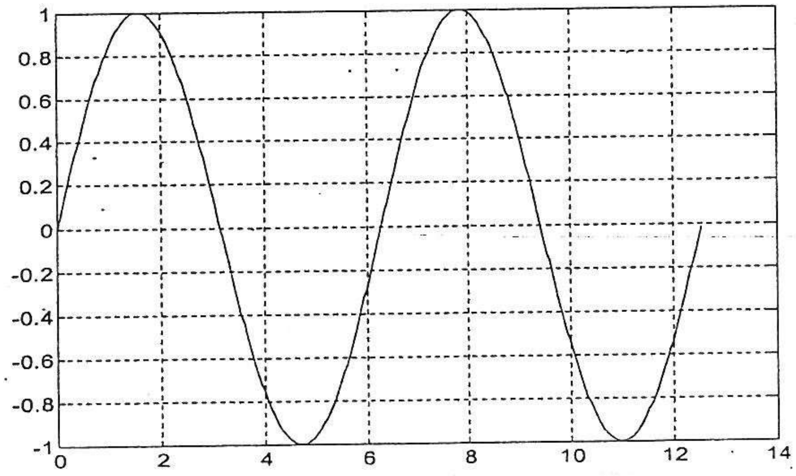


شکل (۳-۲)- نمودار مربوط به مثال ۳-۲

اگر تعداد نقاط کم باشد نمودار هموار نخواهد بود. همچنین باید توجه داشت که اگر x بردار و y ماتریس باشد، در این صورت، ستون‌های y برحسب x رسم می‌شوند و اگر x و y هر دو ماتریس باشند ستون‌های y برحسب ستون‌های x رسم می‌گردند (بایستی x و y هم بعد باشند).

مثال ۳-۳:

```
› x = 0: 0.05 :4*pi;
› y1 = sin(x);    y2 = cos(x);
› figure(1), plot(x,y1), grid
› figure(2), plot(x,y2), grid
```



شکل(۳-۳)- نمودار ۱ مربوط به مثال ۳-۳