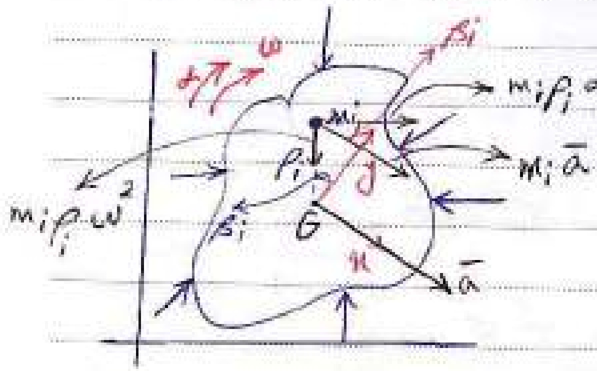
Subject:
Year ۸۸ Month ۸ Date ۳۰

شنبه

Dr Hajmusa

«سینتیک اجسام صلب»

سینتیک اجسام صلب در صفحه:



G مرکز جرم جسم صلب است

ذره‌ای به جرم m به فاصله‌ی ρ از G در نظر می‌گیریم و داریم:

$$a_i = \bar{a} + \underbrace{\omega\times(\omega\times r)}_{\rho_i\omega^2} + \underbrace{\dot{\omega}\times r}_{\rho_i\alpha}$$

حال اگر بخواهیم برآیند نیروهای وارد بر ذره را نشان دهیم، می‌توانیم در قالب ۳ مولفه نشان دهیم

برای ذره i:

$$\sum \vec{F}_i = m_i\rho_i\alpha + m_i\vec{\bar{a}} + m_i\rho_i\vec{\omega}^2$$

برای کلیه ذرات:

$$\sum F_i = \sum m_i\rho_i\alpha + \sum m_i\bar{a} + \sum m_i\rho_i\omega^2$$

$$\sum F = \alpha\cancel{\sum m_i\rho_i} + \bar{a}\sum m_i + \dot{\omega}^2\cancel{\sum m_i\rho_i}$$

نکته:

$$\sum m_i\rho_i = m\bar{\rho} = 0$$

$\bar{\rho}$: فاصله‌ی مرکز جرم تا مبدا مختصات است

$$\Rightarrow \sum F = m\bar{a}$$

ممان اینرسی اجسام مختلف:

1) میله $\Rightarrow I_o = \frac{1}{12} M L^2 \Rightarrow I_E = \frac{1}{3} M L^2$

Subject: Year. Month. Date.

2) دیسک $\quad I_o = \frac{1}{2} M r^2$

جسم صلب، هر نقطه اش، شتاب خودش را دارد اما مبنای کار ما، شتاب مرکز جرم است.

* علامت بار $(-)$، مختصه را منسوب به مرکز جرم می کند

$\bar{M}_i$:

گشتاور وارد بر ذره i حول مرکز جرم

$$\bar{M}_i = \sum \bar{M}_i = m_i \rho_i^2 \alpha + m_i \bar{a} \cos\beta_i \rho_i$$

$$\sum \bar{M}_i = \sum m_i \rho_i^2 \alpha + \sum m_i \bar{a} \cos\beta_i \rho_i$$

$$\sum \bar{M} = \alpha \sum m_i \rho_i^2 + \bar{a} \sum m_i y_i$$

داریم:

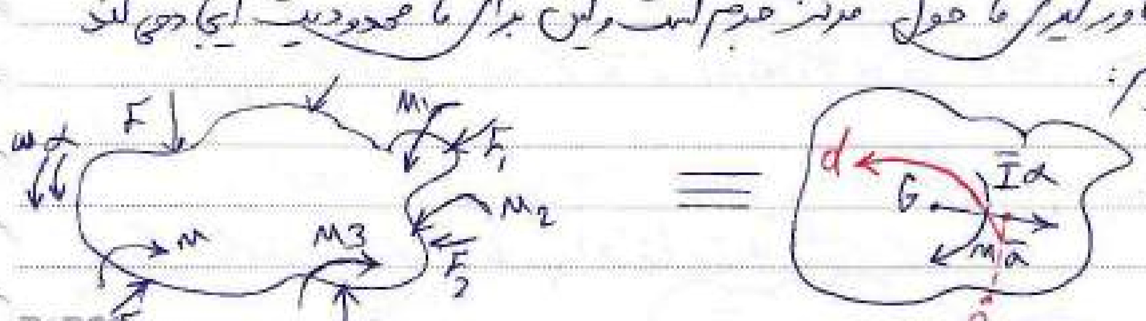
$$\sum m_i \rho_i^2 = \bar{I} \quad , \quad \sum m_i y_i = m\bar{y} = 0$$

$$\boxed{\sum \bar{M} = \bar{I} \alpha}$$

$\bar{I}$: ممان اینرسی (گشتاور لختی) مرکز جرم است، $\quad I = \int r^2 dm$

مقاومت جسم دربرابر تغییر سرعت زاویه ای را ممان اینرسی گویند

نکته: گشتاور گیری ما حول مرکز جرم است و این برای ما محدودیت ایجاد می کند اما داریم:



3) شکل هندسی نامشخص $\Rightarrow \bar{I} = m \times \bar{k}^2$ $\bar{k}$: شعاع ژیراسیون

Subject:
Year: Month: Date: ( )

$$\Rightarrow \sum M_o = \pm \bar{I}\alpha \pm m\bar{a}d$$

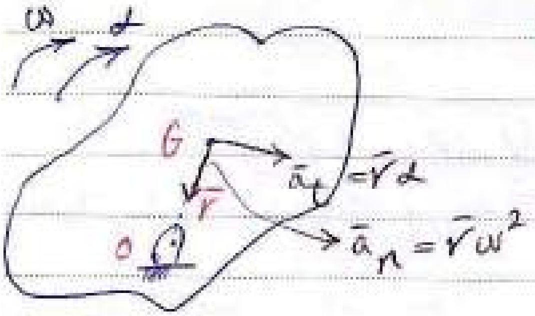
که محدودیت گشتاورگیری حول نقطه خاص (مرکز جرم) از بین رفت !!

حال داریم:

1) برای جسم صلبی که تنها انتقال دارد:

$\sum \bar{M} = 0$, $\sum M_o = m\bar{a}d$

2) جسم صلبی که دارای مرکز دورانی محوری است (نقطه O، شتاب ندارد)

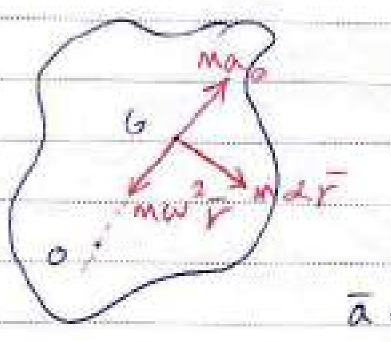


$$\sum F = m\bar{a} \begin{cases} \sum F_t = m\bar{a}_t = m\bar{r}\alpha \\ \sum F_n = m\bar{a}_n = m\bar{r}\omega^2 \end{cases}$$

$$\sum M_o = \bar{I}\alpha + m\bar{r}^2\alpha$$

$$\to \sum M_o = \alpha(\bar{I} + m\bar{r}^2) = I_o\alpha$$

3) اگر نقطه O روی جسم صلب داشته باشیم که شتابش صفر نباشد آنگاه:
شتابش از مرکز جرم بگیریم داریم:



$$\bar{a} = a_o + \omega\times(\omega\times r) + \dot{\omega}\times r$$

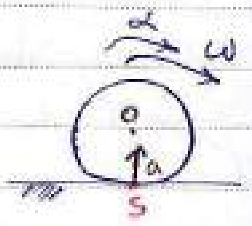
$$\to \sum M_o = \bar{I}\alpha + m\alpha\bar{r}^2 = \alpha(\bar{I} + m\bar{r}^2) = I_o\alpha$$

[redacted]

Subject:
Year: Month: Date:

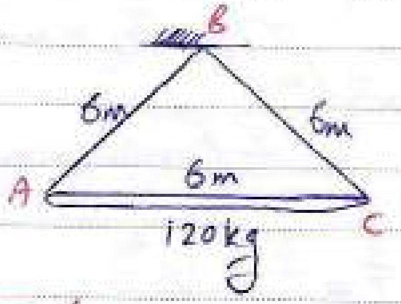
برای حالت عدم می توان مثالی آورد:

اگر دیسک بالانسی (مرکز جرم و مرکز هندسی یکی هستند) داشته باشیم که روی سطح غلتش دارد

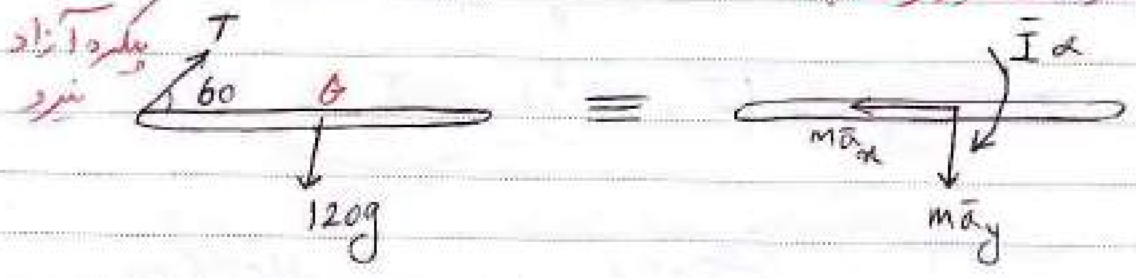


$\Sigma M_s = I_s \alpha$

مثال: کشش کابل AB بلافاصله بعد از پاره شدن کابل BC



پیکره آزاد گشتاور و شتاب



چون مسیر حرکت مرکز جرم را نمی دانیم، این تعداد مجهول واسه ما به وجود آمد که چون مسیر حرکت A را می دانیم (دایره ای به مرکز A و شعاع 6m)

⇐ با قرار دادن دستگاه روی A و بررسی شتاب مرکز جرم داریم:
دستگاه را به A جوش می دهیم

PAPCO

[redacted]

Subject:
Year: Month: Date:

$\bar{a} = a_A + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$

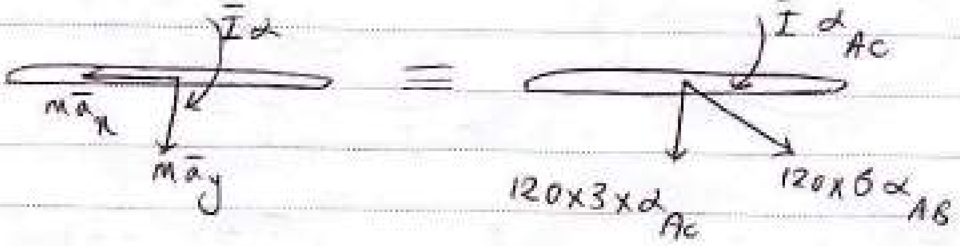
$\rightarrow$

$\bar{a} = a_{A_n} + a_{A_t} + \omega_{AC} \times (\omega_{AC} \times r_{AB}) + \dot{\omega}_{AC} \cdot r_{AB}$

چون در صورت سؤال: بلافاصله قطع شده است ⇐ تنها در لینک AC و AB
α ایجاد شده است و فرصت نکرده که ω ایجاد کند!!

$\rightarrow \bar{a} = a_{A_t} + \dot{\omega}_{AC} \cdot r_{AB}$

$\Rightarrow$



سیر حرکت A مشخص است زیرا:

if: کابل تحت کشش باشد ⇐ سیر حرکت مشخص است

else:
کابل تحت فشار باشد ⇐ T منفی است و سیر حرکت نامشخص است.

اما: ما فرض را بر تحت کشش بودن طناب و ⇐ مشخص بودن سیر حرکت می‌گذاریم

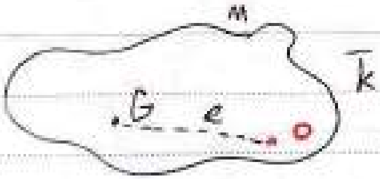
⟸ 3 معادله و 3 مجهول ⟸ مجهولات را می‌یابیم

در میله یکنواخت، ممان اینرسی حول مرکزش برابر است با $\frac{1}{12} m L^2$
L: طول میله است

همچنین، ممان اینرسی میله یکنواخت حول نقطه ابتدایی = $\frac{1}{3} m L^2$

در دیسک یکنواخت، ممان اینرسی حول مرکز برابر است با $\frac{1}{2} m r^2$
r: شعاع دیسک است

همچنین:



k: شعاع ژیراسیون

$$\bar{I} = m\bar{k}^2$$

همچنین
$$I_o = \bar{I} + me^2 = m(\bar{k}^2 + e^2)$$

حال اگر به جای $\bar{k}$، k_o را مسئله به ما بدهد ⟸ $I_o = m k_o^2$

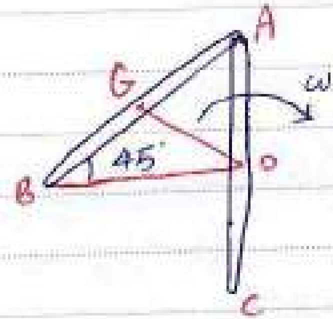
حال به ادامه مثال می‌پردازیم.

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow -T\sin 60 \times 3 = \frac{1}{12} \times 120 \times 6^2 \times \alpha_{AC}$$

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow T\sin 60 - 120g = -360\alpha_{AC} - 720\alpha_{AB}\sin 30$$

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow T\cos 60 = 720\alpha_{AB}\cos 30$$

مثال:



$AB = 0.2\,m \ , \ m_{AB} = 3\,kg$

$\omega_{AC} = 10\,rad/s$

شکل در صفحه افقی قرار دارد

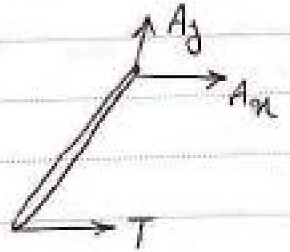
لینک AC با سرعت زاویه‌ای $10\,rad/s$ می‌چرخد

(سرعت زاویه‌ای ثابت)

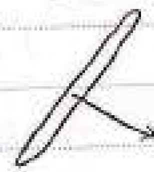
لینک AB در نقطه A به لینک AC مفصل شده است.

⇐ کشش طناب $OB = ?$

در صفحه افقی هستیم ⇐ mg نداریم



$=$



$OG \times \omega^2 = 0.1 \times 10^2 = 10$

$\Rightarrow \sum M_A = \cancel{\bar{I}\alpha} + m\bar{a}d \Rightarrow T \times 0.2 \sin 45 = 3 \times 10 \times 0.1$

$\Rightarrow T = 21.21\,N$

حال α را طوری تعیین کنید که جسم یکپارچه عمل کند:

$\alpha_{Min} < \alpha < \alpha_{Max}$

$=$

فرض می‌کنیم سرعت در حال افزایش باشد ⇐ α

$\Rightarrow \sum M_A = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \Rightarrow T \times 0.2 \sin 45 = \frac{1}{12} \times 3 \times (0.2)^2 \times \alpha + 30 \times 0.1$

$$\Rightarrow T = \frac{3 - 0.01\alpha}{0.2 \sin 45} \Rightarrow$$

اگر α_{max} باشد $\Leftarrow$ T صفر است

$$\Rightarrow 3 - 0.01\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_{max} = 300$$

حال اگر سرعت در حال کاهش باشد $\Leftarrow$ α ↺ (جهت α و ω معکوس یکدیگر است)

$$\Rightarrow T \times 0.2 \sin 45 = \frac{1}{12} \times 3 \times (0.2)^2 \alpha + 30 \times 0.1$$

$$\Rightarrow T = \frac{3 + 0.01\alpha}{0.2 \sin 45}$$

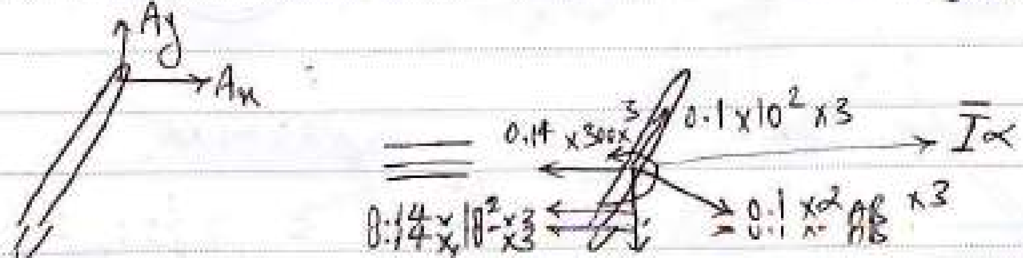
اگر α_{min} باشد $\Leftarrow$ T ماکزیمم است.

$$\Rightarrow \alpha_{min} = \frac{40 \times 0.2 \times \sin 45 - 3}{0.01} = -265.6$$

$$\Rightarrow -۲۶۵/۶ < \alpha < 300$$

حال اگر:

$\alpha = -300$ $\Leftarrow$ شتاب زاویه‌ای لینک AB و همچنین A_x و A_y را بیابید:



برای بدست آوردن a_G چون سیستم یکپارچه نیست، به راحتی نمی‌توان a_G را نوشت $\Leftarrow$ دستگاه را روی A گذاشته و G را بررسی می‌کنیم (با لینک AB حرکت می‌کنیم)

از A به o

$$a_G = a_{A_t} + a_{A_n} + \omega_{Ac} \times (\omega_{Ac} \times r) + \dot{\omega}_{AB} \times r$$

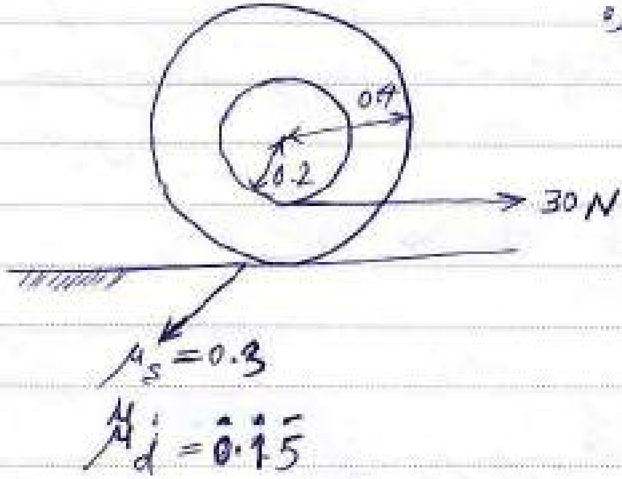
$\Rightarrow \bar{a} = a_G$ ⟶ در شکل صفحه قبل این 4 مولفه را نشان دادیم (α_{AB} یادساعتگرد فرض شد)

چون در لحظه پاره شدن طناب متوقف است $\Leftarrow$ ω_{Ac} صفر است

$$\Rightarrow \Sigma M_A = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \rightarrow$$

$$0 = \frac{1}{12} \times 3 \times (0.2)^2 \times \alpha + 0.3\,\alpha_{AB} \times 0.1 + 42 \times 0.15 \sin 45$$
$$-126 \times 0.1 \cos 45 \Rightarrow \alpha_{AB} =$$

شکل:



بعد از 1.2m جابجایی قرقره

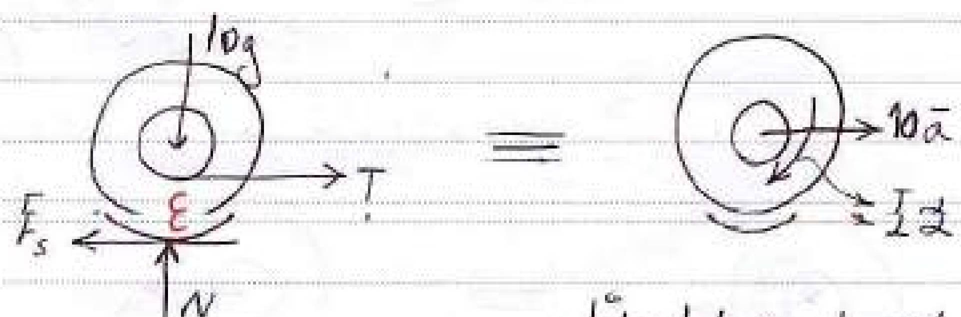
سرعت مرکز قرقره و $\omega = ?$

$m = 10kg$

$\bar{k} = 0.3$

جرم طناب ناچیز است.

برای حل این مساله داریم:



$\Leftarrow$ 4 مجهول و 3 معادله، اما

(چون سطح صاف است $\Leftarrow$ P بی‌نوایت می‌شود $\Leftarrow$ a_n صفر می‌شود)

با فرض غلتش کامل داریم (البته شکل نیز باید بالانس باشد)

حال $I\alpha$ دیگر مجهول نیست زیرا α به $\bar{a}$ مرتبط می‌شود

$$\rightarrow \alpha = \frac{\bar{a}}{r}$$

$$\rightarrow \sum M_c = I_c \alpha \Rightarrow 30 \times 0.2 = (10 \times 0.3^2 + 10 \times 0.4^2) \times \frac{\bar{a}}{0.4}$$

$$I_o = \bar{I} + md^2$$

$$\Rightarrow \bar{a} = 0.96$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = 10g$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 30 - F_s = 10 \times 0.96 \Rightarrow F_s = 30 - 9.6 = 20.4$$

نیروی اصطکاک مورد نیاز جهت عدم لغزش

همچنین داریم:

$$F_{s_{max}} = 0.3 \times 10g = 3g \rightarrow$$ فرض درست است!

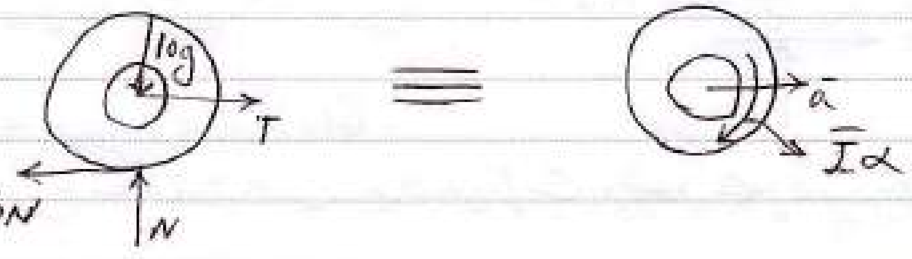
دکتر حاج موسی:

با این μ_s هیچ مشکلی پیش نمی‌آید ⇐ μ_s را برابر 0.2

می‌گیریم تا مشکل پیش بیاید:

که با $\mu_s = 0.2$ ، جسم می‌لغزد ⇐ F_s به N مربوط است!

$\Rightarrow$



$\Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow N = 10g$

$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow -0.15 \times 10g \times 0.4 + 30 \times 0.2 = -10 \times 0.3^2 \times \alpha$

$\Rightarrow \alpha = -0.13 \Rightarrow$ جهت را اشتباه در نظر گرفتیم

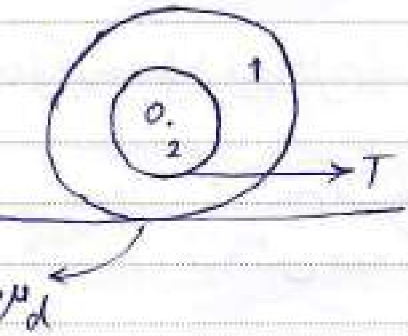
$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow 30 - 0.15 \times 10g = 10\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = 1.52$

$v^2 = 2\bar{a}x \Rightarrow v = \sqrt{2 \times 1.2 \times 1.52}$

برای بدست آوردن ω، از فرمول $\omega^2 = 2\alpha\theta$ نمی‌توان استفاده کرد چون تکلیف θ مشخص نیست (چون لغزش داریم) $\Leftarrow$ حال باید t را از فرمول $v = at$ بدست می‌آوریم سپس از فرمول $\omega = \alpha t$، ω را می‌یابیم

مثال:

حال اگر در همان مثال قبلی دو دیسک به هم جوش نداده شده باشند (روی هم مفصل شده باشند و مفصل نیز روان باشد)



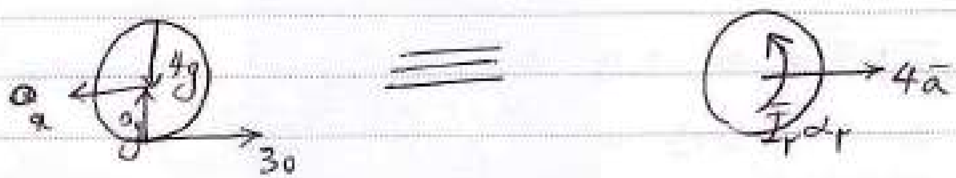
$m_1 = 6\,kg$ $r_1 = 0.4$ $k_1 = 0.25$

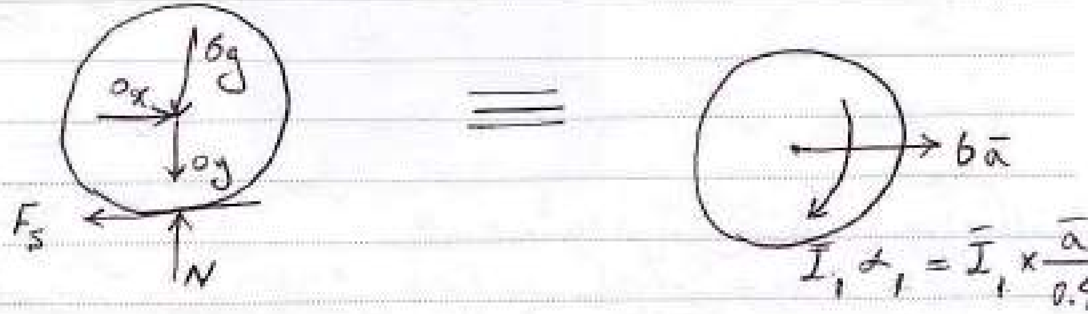
$m_2 = 4\,kg$ $r_2 = 0.2$ $k_2 = 0.15$

$\mu_s = 0.2$ $\mu_d = 0.15$

$\Leftarrow$ ω دو دیسک را

پیکره آزاد دو دیسک را رسم می کنیم (با فرض لغزش)

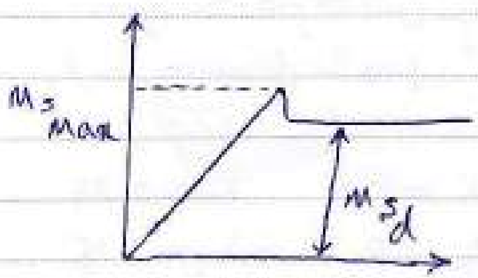




⇐ ۶ معادله و ۶ مجهول (O_x , O_y , $\bar a$, α_2 , N , F_s)

← مانند مثال قبل حل می شود!......

حال اگر مفصل ها غیر ایده آل باشند ⇐



$M_{s_{max}}$ ؛ ماکزیمم گشتاور جهت عدم چرخش دو دیسک نسبت بهم

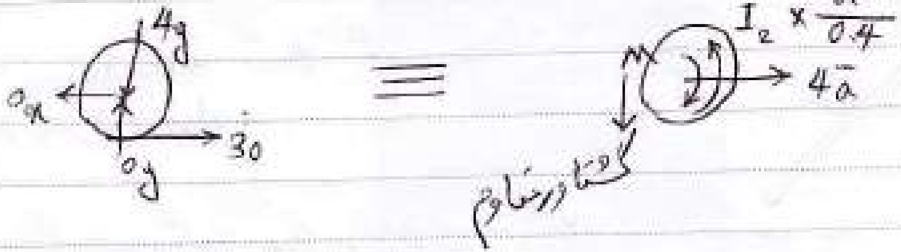
حال اگر در این مثال داشته باشیم:

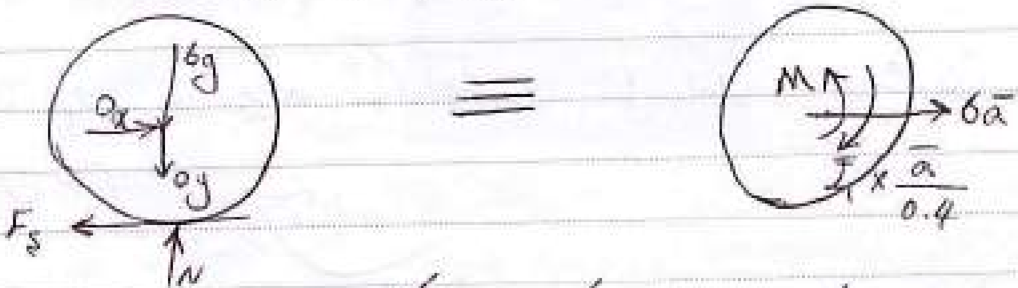
$$M_{s_{max}} = 2\ N.m \quad , \quad M_{s_d} = 0.18$$

حل:

نمی دانیم که سیستم یکپارچه عمل می کند (دو دیسک نسبت به هم نمی چرخند) یا نه!

⇐ با فرض غلتش کامل و یکپارچه عمل کردن سیستم داریم:





⇐ 4 حالت امکان دارد رخ دهد که باید بررسی گردد!!!!

1) غلتش و یکپارچه بودن سیستم   2) لغزش و یکپارچه بودن سیستم

3) غلتش و یکپارچه نبودن سیستم   4) لغزش و یکپارچه نبودن سیستم

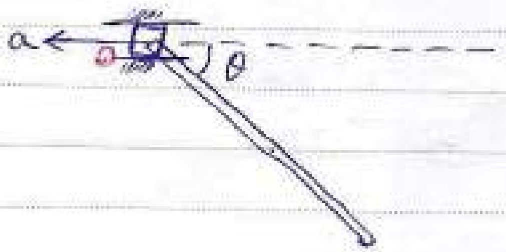
حال اگر در فرض اول (غلتش و یکپارچه بودن سیستم) ، $F_s > F_{s_{max}}$ ⇐

فرض غلتش بودن اشتباه است و اگر $M > M_{s_{max}}$ (گشتاور مقاوم) ⇐

فرض یکپارچه بودن سیستم اشتباه است و ..... به همین ترتیب مسائل را حل می‌کنیم

ex) حال اگر T را مسأله به ما نداده باشد ⇐ T را طوری تعیین کنید که سیستم در آستانه عدم یکپارچگی باشد؟

مثال:



$\Rightarrow$ if $\theta=0 \Rightarrow \omega=0$

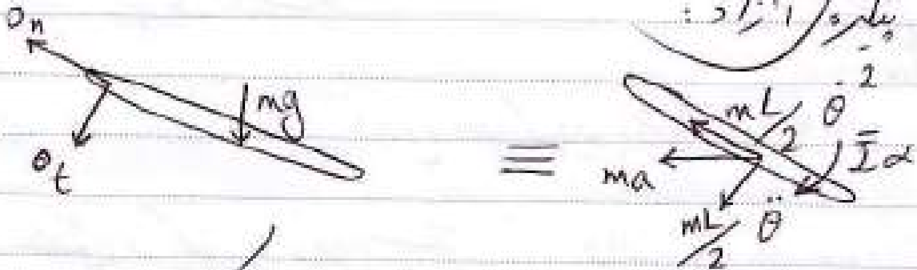
حال در هر θ دلخواه؛

$\omega, \alpha, O_n, O_t = ?$

O_n، O_t: نیروهایی هستند که از طرف مفصل به لینک وارد می‌شوند؛

اولین قدم:

پیکره آزاد:



نکته:

وقتی مرکز دائمی دوران داریم، $\bar a_t$، $\bar a_n$ تعریف می‌کنیم نه $\bar a_x$، $\bar a_y$

$$\vec a_G = \vec a_o + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r) + \dot{\vec\omega} \times \vec r$$

دستگاه را در O قرار داده و به لینک جوش می‌دهیم

O: مرکز دائمی دوران نیست.

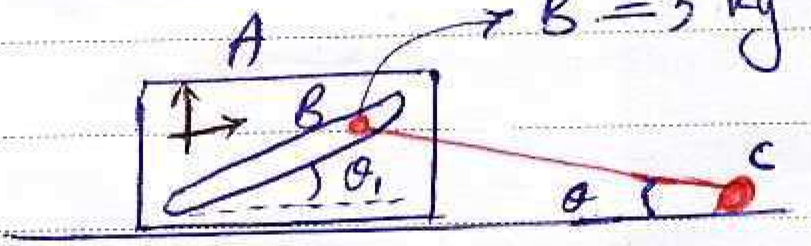
$$\Sigma M_o = \bar I\alpha + m\bar a d$$

$$\Rightarrow mg\frac{L}{2}\cos\theta = \frac{1}{12}mL^2\ddot\theta + \frac{mL^2}{4}\ddot\theta + ma\frac{L}{2}\sin\theta$$

که $\ddot\theta$ برحسب θ یافت می‌شود $\Leftarrow$ با استفاده از فرمول $\omega d\omega = \alpha d\theta$

$\dot\theta$ برحسب θ یافت می‌شود

$\Sigma F_t = ma_t \rightarrow O_t =$ پیدا میشه! ، $\Sigma F_n = ma_n \rightarrow O_n =$ پیدا میشه



$m_B = 5\,kg$, $\theta_1 = 37$; $m_C = 1\,kg$

$m_A = 5\,kg$

$L_{BC} = 0.5\,m$, $\theta = 60$

جرم میله ناچیز است ،

اصطکاک ناچیز است.

موانعی داریم که سیستم تعادل استاتیکی دارد ← حال با برداشتن موانع حرکت آغاز می شود و θ در حال کم شدن است

$V_A , V_C = ?$ ⇐ $\theta = 30$ در موقعیتی که

اصطکاک ناچیز ⇐

$$E_1 = E_2$$

$$\Rightarrow 0 = -5g \times \frac{1}{2}(\sin 60 - \sin 30) + \frac{1}{2} \times 2 \times V_A^2 + \frac{1}{2} \times 5 \times V_B^2 + \frac{1}{2} \times 1 \times V_C^2$$

در راستای x هیچ نیرویی به سیستم وارد نمی شود ⇐ بقای اندازه حرکت خطی

$$\Delta G_x = 0 \Rightarrow G_{1x} = G_{2x} \Rightarrow$$

$$0 = 1 \times V_C - 2 \times V_A + 5\, V_{Bx}$$

جهت ها کاملاً فرضی هستند.

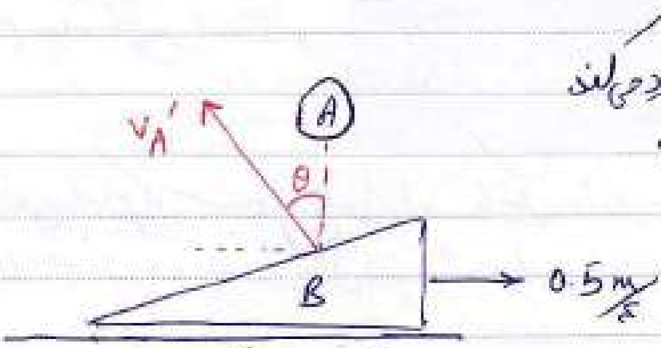
دستگاه را روی A می گذاریم ⇐

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{rel}$$

حال دستگاه را روی C می‌گذاریم:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \omega \times r$$

مثال:



پس از اینکه A به B برخورد می‌کند

قبل از برخورد، B ثابت است

بعد از برخورد نیز، B در راستای

y نمی‌تواند حرکت کند

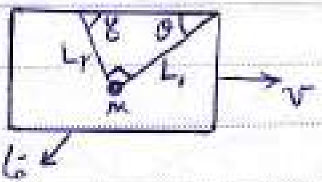
بعد از برخورد B با سرعت $0.5\,\frac{m}{s}$ به سمت راست حرکت می‌کند

سوالات امتحان میان‌ترم دوم دینامیک دانشگاه سمنان (دانشکده مهندسی مکانیک)
سینتیک ذرات

تاریخ آزمون: 12 آذر ۸۸ استاد: دکتر محمد علی حاج عباسی
13-16

تذکر: تمامی سوالات به صورت عددی بودند اما توسط من به صورت پارامتری تغییر یافتند
به علت در دسترس نبودن سوالات

1) max شتاب ترمز و max شتاب پیشرو را به گونه‌ای بیابید که شکل هندسی درون قاب تغییر نکند.

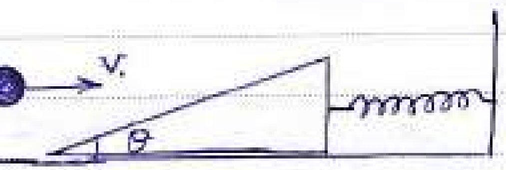


L_1 و L_2 و θ و γ مشخص هستند

ب) حال اگر قاب با 1.5 برابر max شتاب ترمز، ترمز کند ⇐ شتاب زاویه‌ای یکی از این 2 طناب را بیابید:

---

2) پس از برخورد گوی با سطح (با سرعت V_0) سطح به اندازه‌ی d متر جابه‌جا می‌شود



θ و k فنر هم معلوم هستند مطلوبست:

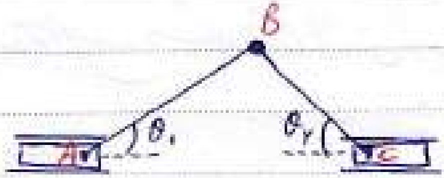
الف) ⇐ سرعت گوی پس از برخورد با سطح ؟؟

ب) زاویه‌ای که گوی با سطح افق پس از برخورد می‌سازد؟؟

پ) ضریب برخورد سطح ؟ ($e=?$)

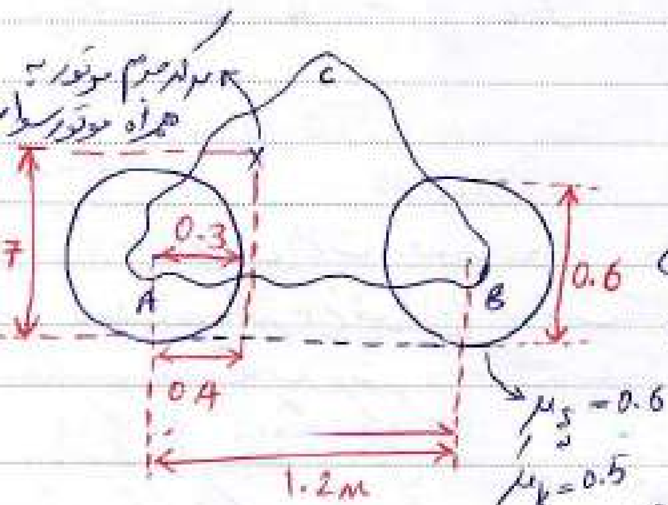
---

3) در A و B و C مفصل‌های غیرروان قرار دارد. ابتدا سیستم تعادل دارد. حال دستگاه رها می‌شود و θ_1 و θ_2 به θ_1' و θ_2' تبدیل می‌شوند ⇐ α و ω لینک‌های AB و BC در وضعیت جدید؟؟



مثال:

موتورسیکلت با سرعت $120\ \frac{km}{h}$ در حال حرکت است. ناگهان مانعی به فاصله 70m از خود می‌بیند (در لحظه‌ای که عکس العمل نشان می‌دهد فاصله‌اش از مانع همان 70m است)



ترمزهای موتورسیکلت دیسکی (آ) هستند و هیچ محدودیتی از نظر ترمز ندارد)

همچنین موتورسیکلت ما، ترمز عقب ندارد!! (به گشتاور مقاومتی از طرف ترمز در چرخ آزاد وجود ندارد)

جرم بدنه موتورسیکلت به جز چرخ‌ها، به همراه جرم شخص

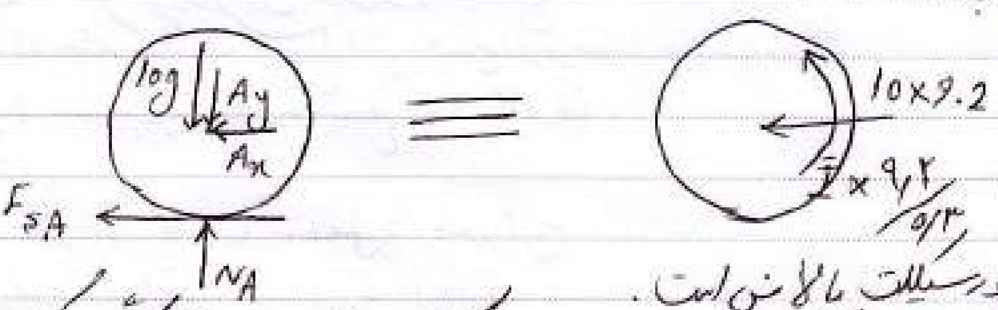
$m_A = m_B = 10kg \qquad m_C = 170kg$

$\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.25\,m \quad , \quad k_C = 0.5$

$V = 120\ \frac{m}{s} \Rightarrow v^2 - v_0^2 = -2a\Delta x \Rightarrow$ ترمز $a = -9.26\ \frac{m}{s^2}$

شتاب ترمز (حداقل شتاب ترمز، جهت برخورد نکردن با مانع)

چرخ عقب:



چرخ عقب موتورسیکلت بالانس است.

با فرض اینکه حرکت کند شدن موتورسیکلت نرمال باشد (نه کله می‌کند و نه سُر می‌خورد) ⇐ حرکت بدنه موتورسیکلت انتقالی است ⇐

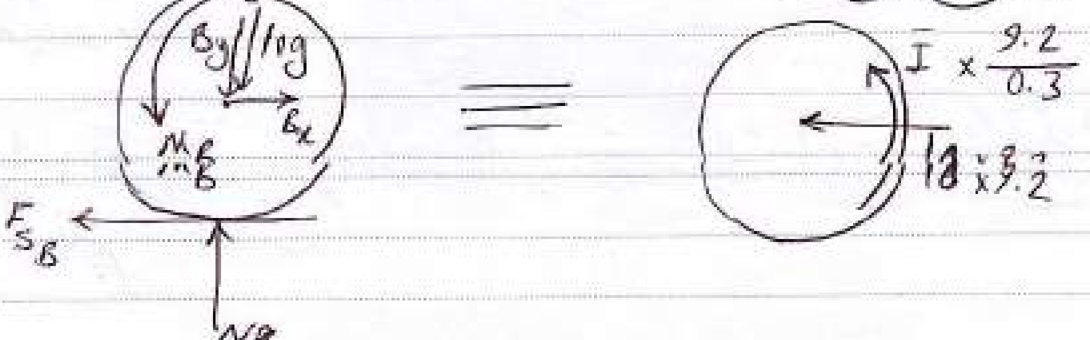
~~و شتاب تمام نقاط آن باهم یکی است ⇐ نقطه A از چرخ نیز همان شتاب~~

همچنین چون چرخ عقب غلتش دارد ⇐ a ها به هم مرتبط هستند

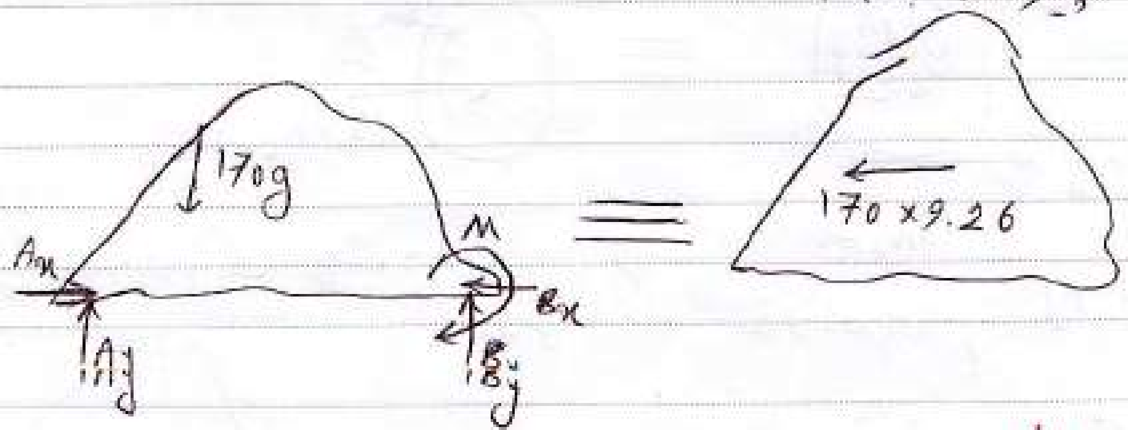
اما: چرخ عقب غلتش تمام لغزش داشته باشد ⇐ دو مجهول داریم (a ها ...

اما: در چرخ های عقب ترمز وجود داشت ⇐ یک گشتاور مقاوم در پیکره آزاد نیز بر روی چرخ قرار داده می‌شود

پیکره آزاد چرخ جلو:



پیکره آزاد بدنه:



حال: ۹ معادله داریم و ۹ مجهول:

اما:

چون F_{S_B} نیرویی است که شتاب ترمز را ایجاد می‌کند ⇐ با محاسبه‌ی F_{S_B}

⇐ اگر $F_{S_B} < F_{S_{Max}}$ ⇐ نیروی اصطکاک جهت توقف موتور تامین می‌شود

else ⇐ " " " نمی‌شود

⇐ موتور سیکلت به مانع برخورد می‌کند

همچنین N_A نیز باید مثبت شود تا موتورسیکلت کله نکند!

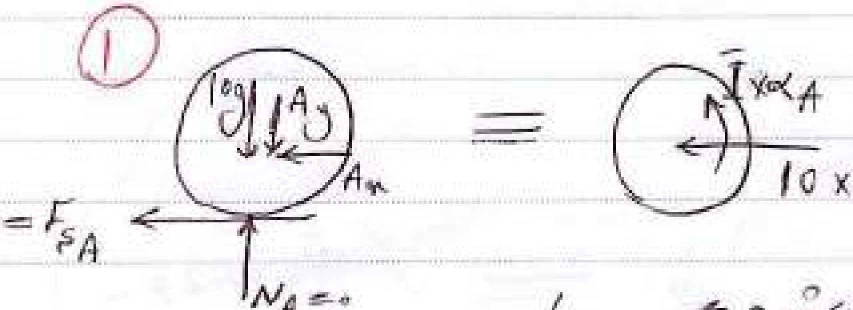
همچنین ترمز نیز باید توانایی ایجاد گشتاور M_B را داشته باشد (در اطلاعات مسئله باید حداکثر گشتاور مقاوم ترمز را به ما بدهند)

سوال:

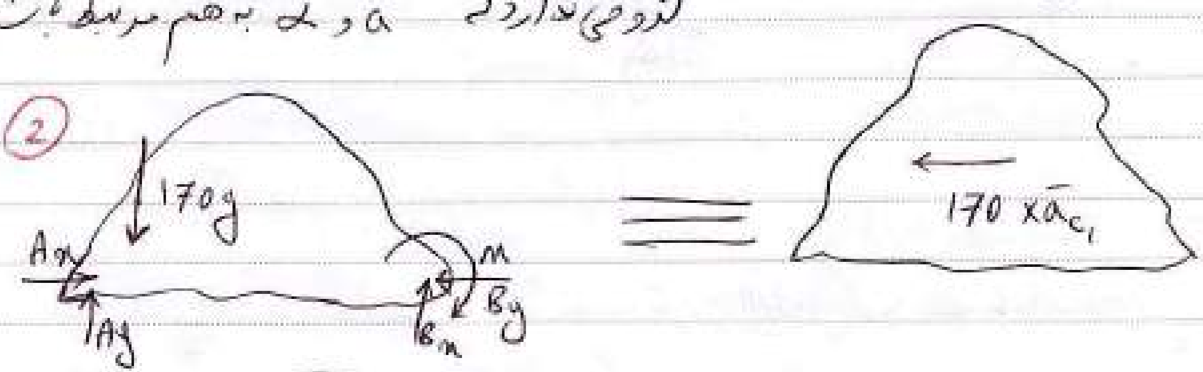
اگر $N_A < 0$ شود ← بدنه موتورسیکلت با چه سرعت زاویه‌ای کله می‌کند؟!

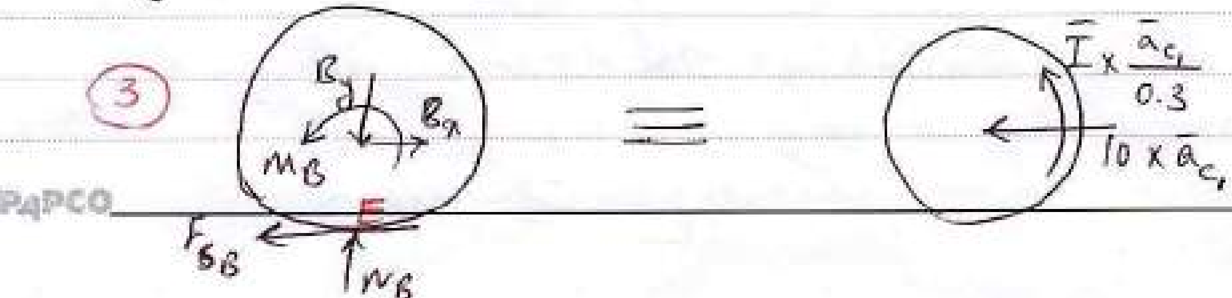
ابتدا با در نظر گرفتن $N_A = 0$ ، شتاب موتورسیکلت را در آستانه کله کنی! پیدا می‌کنیم

←



وقتی چرخ از زمین جدا می‌شود ← لزومی ندارد که $\bar a$ و α به هم مرتبط باشند





$\bar{a}_{c_1}$; $\bar{a}$ از تیر افزایش کم شدن را می‌دهد!

① $\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow 0 = \bar{I}\alpha \Rightarrow \alpha_A = 0$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -A_y - 10g = 0 \Rightarrow A_y = -10g$

$\Sigma F_x = m a_x \Rightarrow A_x = 10\bar{a}_{c_1} \Rightarrow \bar{a}_{c_1} = \dfrac{A_x}{10}$

② $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 170g \xRightarrow{A_y = -10g} B_y = 180g$

$\Sigma F_x = m\bar{a}_{c_1} \Rightarrow A_x - B_x = -170\bar{a}_{c_1} \Rightarrow B_x = 180\bar{a}_{c_1}$

$\Sigma \bar{M}_B = m\bar{a}d \Rightarrow M_B - 10g \times 1.2 - 170g \times 0.8 = -170\bar{a}_{c_1} \times 0.4$

فاصله مرکز جرم تا مرکز جرم

$\Rightarrow M_B = 148g - 68\bar{a}_{c_1}$

③ $\Sigma F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow N_B - 10g - B_y = 0 \Rightarrow N_B = 10g + 180g = 190g$

$\Sigma M_E = I_E\alpha \Rightarrow -148g + 68\bar{a}_{c_1} + 180a_{c_1} \times 0.3 = 10\left((0.25)^2 + (0.3)^2\right) \times \dfrac{a_{c_1}}{0.3}$

$\Rightarrow a_{c_1} = -12.42\, \frac{m}{s}$ → شتاب بیشتر باعث کم شدن می‌شود!

که چون ۹٫۲۶<۱۲٫۴ ⇐ کم نمی‌کند

همچنین:

$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow -F_{s_B} + 180\bar{a}_{c_1} = -10 \times 12.42$

$\Rightarrow F_{s_B} = 2359.8\,N$

$F_{s_{max}} = 0.6 \times 190\,g = ۱۱۸/۴$

کاملاً محال است که موتور در آستانه‌ی کله کردن قرار بگیرد چون F_{s_B} که نیاز داریم تأمین نمی‌شود.

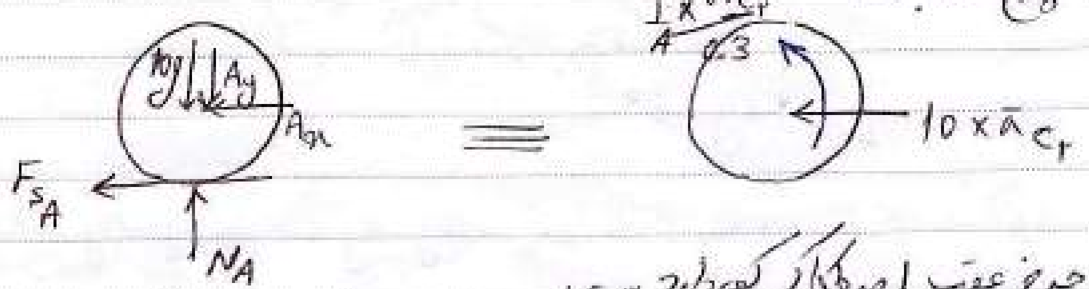
$\Rightarrow 23.59.8 = \mu_s \times 190g \Rightarrow \mu_{s_{min}} = ۱/۲۶$

پس: برای اینکه در آستانه‌ی کله کردن باشیم $\mu_s > ۱/۲۶$ داریم:

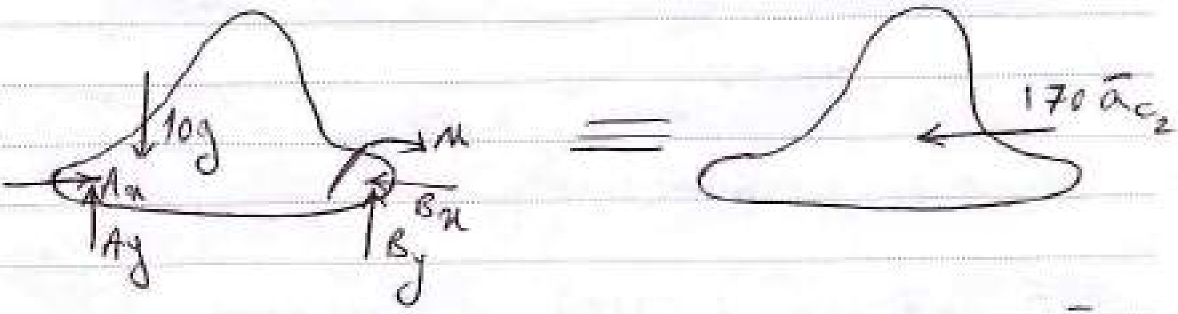
Tex

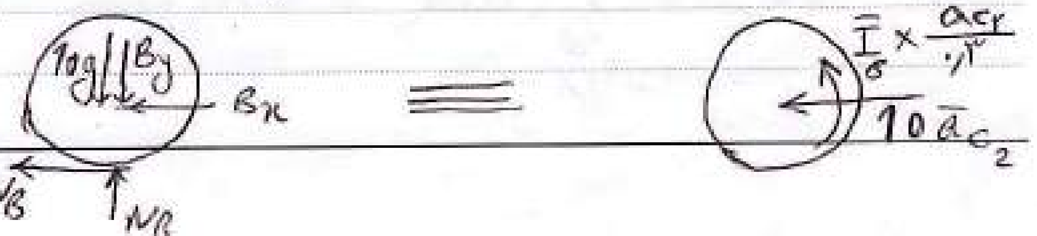
در شتاب‌های کمتر از ۱۲/۳۲ موتور شروع به سُر خوردن می‌کند. این شتاب چقدر است؟

چرخ عقب:



چرخ عقب اصطکاک کمی دارد پس: به راحتی می‌توان آن را تأمین کرد پس برای چرخ عقب سُر خوردنی در کار نیست.





حال اگر $\bar{a}_{c_2} > ۹,۲۶$ بود ⇐ آن گاه موتور به مانع برخورد نمی کند

else:

به مانع برخورد می کند

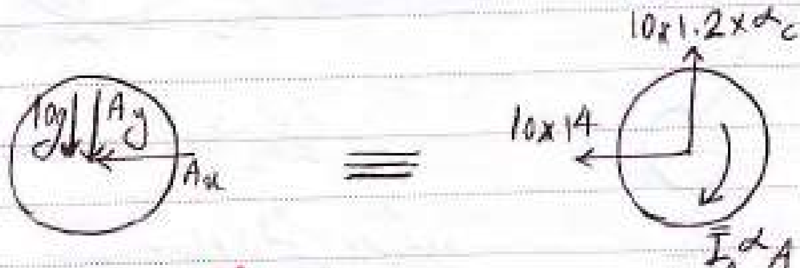
ex) در این شرایط بیشترین شتاب آن در برخورد با مانع =

ex) شتاب مرکز جرم چرخ جلو

حال اگر $\mu_s = \mu_k = ۱,۸$ و $\bar{a} = 14 \frac{m}{s^2}$ ⇐ بدنه موتور سیکلت با

شتاب زاویه ای شروع به کار کردن می کند:

چرخ عقب:

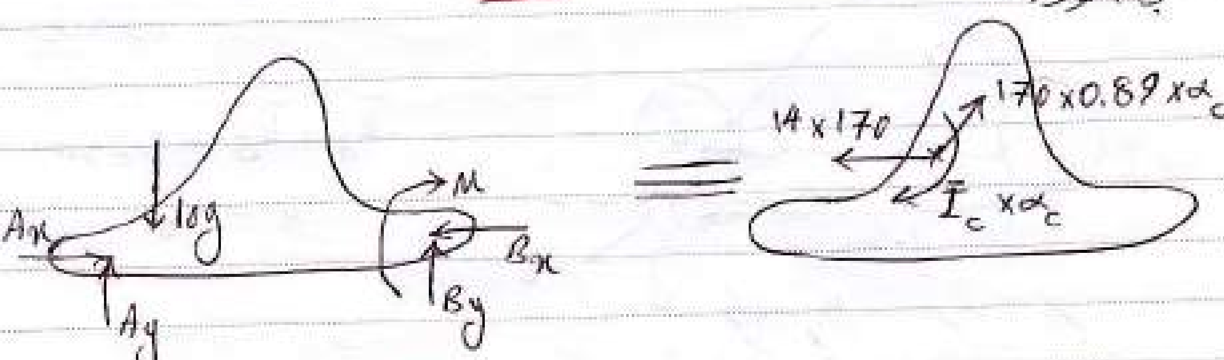


بدنه چ:

$$a_A = a_B + \omega \times (\cancel{\omega \times r}) + \dot{\omega} \times r_{AB}$$

چون شتاب زاویه ای را در لحظه شروع به کار کردن می خواهد ⇐ ω ن

بدنه موتور:

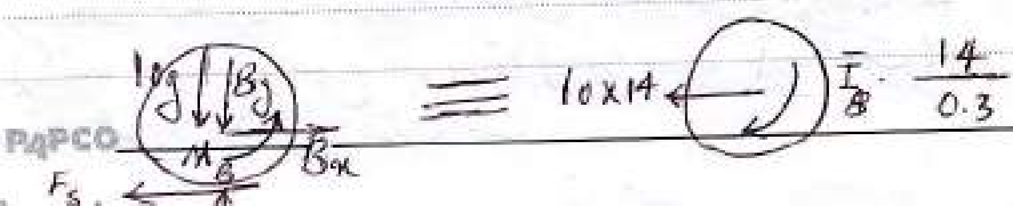


بدنه:

$$a_G = a_B + \omega \times (\cancel{\omega \times r}) + \dot{\omega} \times r_{BC}$$

عمود بر BC

چرخ جلو:

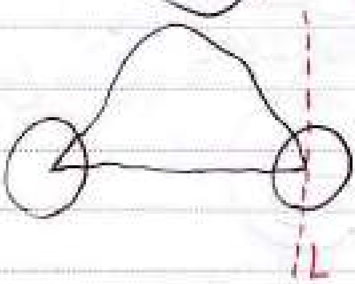


⟸ ۹ معادله و ۹ مجهول ⟸ α را می‌یابیم

سوال

حال با این شتاب وقتی کله می‌کند، آیا موتورسیکلت به حالت اولیه برمی‌گردد یا به جلو برمی‌گردد......؟

به وسیله‌ی a ای که به دست آوردیم، باید θ ماکزیمم را به دست بیاوریم سپس اگر به ازای آن max زاویه‌ی کله‌گی! مرکز جرم بدنه‌ی موتورسیکلت سمت چپ خط L بیفتد

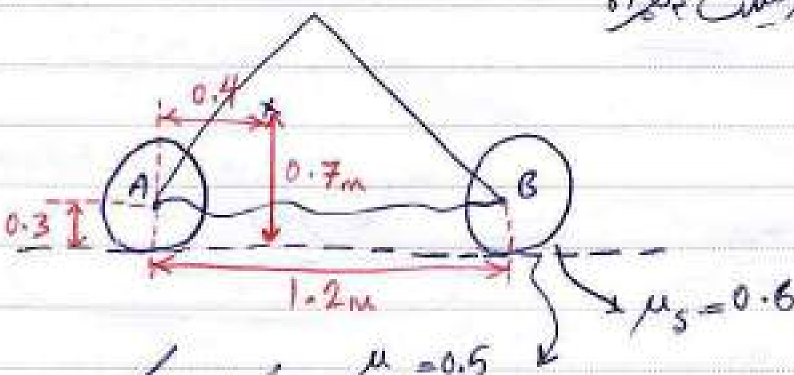


که موتور می‌افتد!! در غیر این صورت: موتور به جای اولش برمی‌گردد

مثال:

حل شده در کلاس بعد از ظهر!

x: مرکز جرم موتورسیکلت به همراه موتورسوار



$\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.25m$

$m_A = m_B = 10kg$

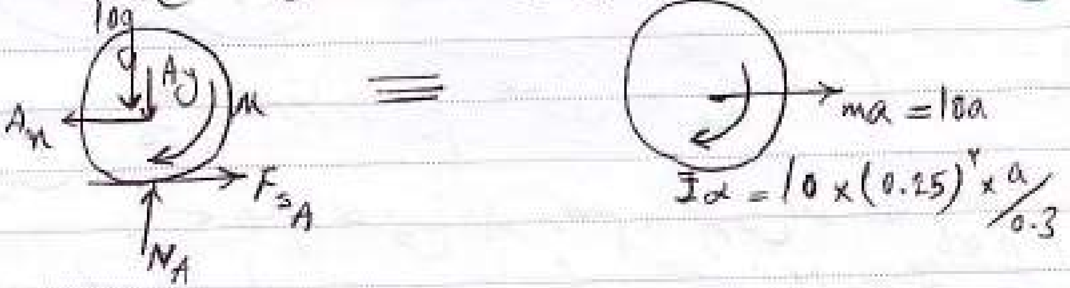
$m_C = 170$ ، $\bar{k}_C = 0.5m$ ، $a = 10\frac{m}{s^2}$ شتابی که شروع به حرکت می‌کند

منظور از c بدنه و موتورسوار بدون در نظر گرفتن چرخ‌ها است.
(گشتاور اینرسی جرم چرخ جلو در مقابل چرخ عقب ناچیز است)
موتور به دیفرانسیل عقب است

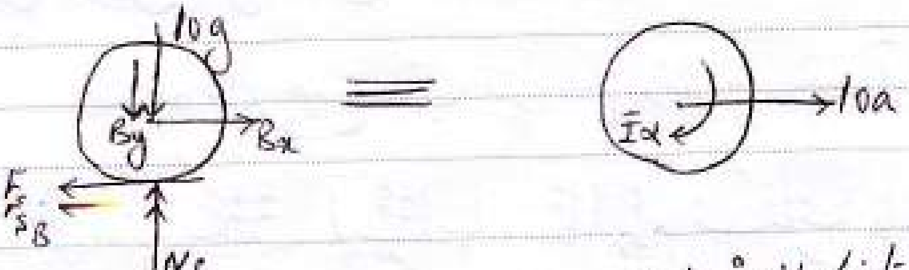
ex) فرض بدون اینکه حرکتی به بدن خود دهد موتورسوار، بلند کردن جلو موتورسیکلت می‌شود یا نه؟

پیکره آزاد تک تک اجزا را می‌کشیم:

چرخ عقب: (با فرض غلتش کامل و اینکه موتورسوار موتور به تک چرخ زنی شده است)

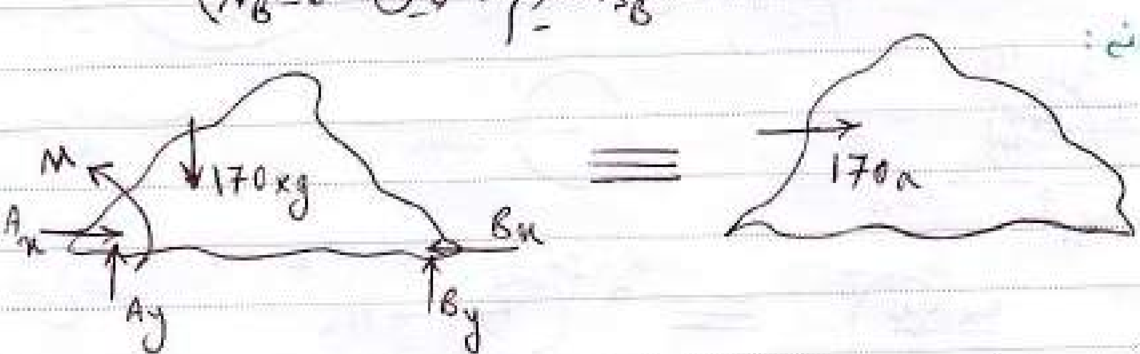


چرخ جلو:



نکته: آستانه بلند شدن ⇐ ($N_B = 0$ همچنین F_{s_B} نداریم)

بدنه:



⇐ ۹ معادله و ۹ مجهول ⇐ F_{s_A} و N_A پیدا میشه ⇐ باید $F_{s_A} < \mu_s N_A$ تا فرض غلتش کامل درست باشد.

همچنین :

if : N_B منفی شود، موتورسوار موفق به تک‌چرخ زنی شد.

else : موتورسوار، موفق به زدن تک‌چرخ نشده است!

ex) حداکثر شتابی که موتورسیکلت می‌تواند در آستانه حرکت داشته باشد برای اینکه جلوی آن بلند نشود را بیابید:

N_B و f_{s_B} را صفر قرار می‌دهیم، همچنین α چرخ جلو دیگر به a مرتبط نیست

⇐ هم α چرخ جلو رو هم a مجهول اند ⇐

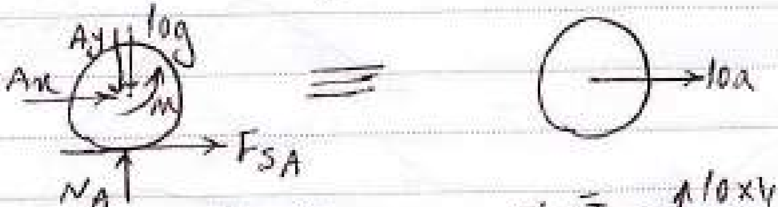
۹ معادله و ۹ مجهول ⇐ a بدست میاد، همچنین $f_{s_A} < \mu_s N_A$ باید باشد تا فرض غلتش کامل داشتن، درست باشد

else :

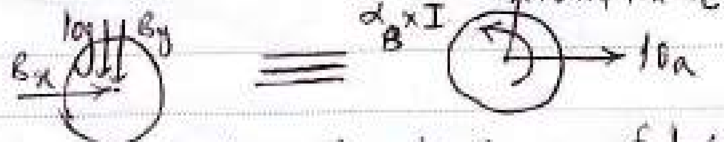
a و α برای چرخ عقب نیز به هم مرتبط نیستند اما $f_{s_B} = \mu_s N_B$

ex) حال موتورسیکلت با شتاب: ۱.۵ برابر شتاب Max که در مثال قبل یافتیم شروع به حرکت می‌کند ⇐ بدنه موتورسیکلت با چه شتاب زاویه‌ای شروع به حرکت می‌کند؟؟ α_c را می‌نامیم:

چرخ عقب:



چرخ جلو:

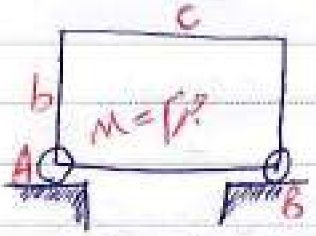


دستگاه را به بدنه جوش دادیم

$$a_B = a_A + \omega\times(\omega\times r) + \dot{\omega}\times r$$

بدنه:

مثال:



جعبه روی دو غلتک روان با جرم ناچیز قرار دارد

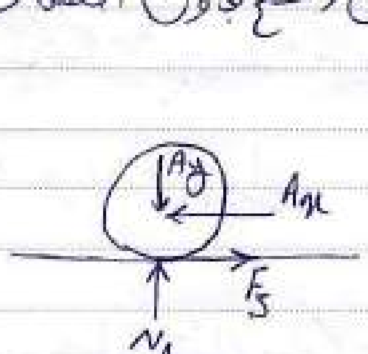
به یکباره، سکوی B فرو می‌ریزد

بلافاصله پس از فروریختن سکوی B عکس العمل تکیه‌گاهی در A را بیابید:

نکته:

غلتک روان با جرم ناچیز، حکم سطح صیقلی (سطح بدون اصطکاک) را دارد

زیرا:



$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow F_s \times r = 0 \times \alpha$$

$$\Rightarrow F_s = 0$$

اما:

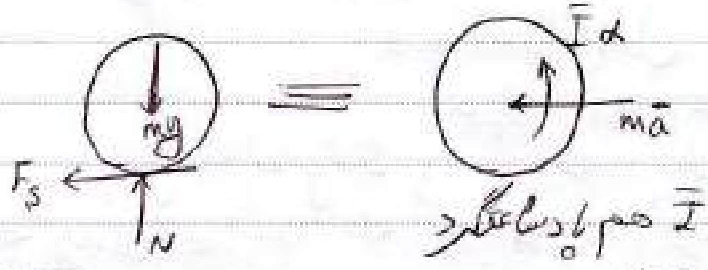
اگر روان نباشد:

$$\Sigma \bar{M} = I\alpha = 0$$

$$F_s \times r - M = 0 \Rightarrow F_s = \frac{M}{r} \neq 0$$

ex)

غلتک صلبی با جرم مشخص، روی زمین غلت می‌دهیم. بعد طی چه مسافتی متوقف می‌شود:



$\bar{a}$: شتاب توقف است

چون $\bar{a}$ به سمت چپ است

با توجه به اینکه غلتش دارد بنابراین $\bar{I}\alpha$ هم پادساعتگرد است (a و α به هم مربوط هستند)

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow +F_s = +m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \frac{F_s}{m} \quad ①$$

$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow -F_s \times r = \bar{I}\,\frac{\bar{a}}{r} \Rightarrow \bar{a} = \frac{-F_s \times r}{\bar{I}} \quad ②$$

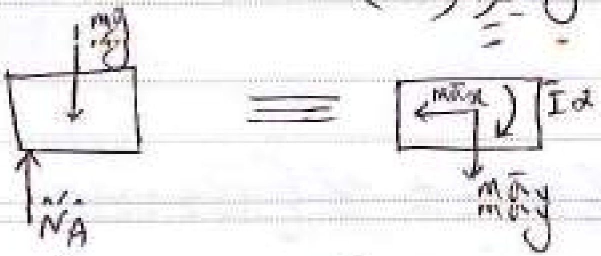
← تنها در حالتی، روابط ① و ② همزمان برقرار هستند که $F_s = 0$ باشد

← $\bar{a} = 0$ ← تا ابد به حرکت خود ادامه می‌دهد

حال به حل مثال می‌پردازیم

(α نیز صفر است)

چونکه گفته "بلافاصله" پس هندسه شکل تغییر نکرده ←



$\Rightarrow$ 3 معادله و 4 مجهول

باید به سراغ نقطه‌ای برویم که اطلاعاتی را از آن داشته باشیم ← چون مسیر حرکت نقطه A مشخص است ← دستگاه را در A می‌گذاریم

$$a_G = a_A + \cancel{\omega \times (\omega \times r)} + \dot{\omega} \times r_{AG}$$

$\Rightarrow$

3 معادله و 3 مجهول

$$\Rightarrow \sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow a_A = \frac{b}{2}\alpha$$

$$\sum M_A = \bar{I}\alpha \pm m\bar{a}d \Rightarrow \dots , \quad \sum F_y = m\bar{a}_y$$

مثال:

گاری با شتاب a به حرکت درمی‌آید

دیسک که فاصله d را طی می‌کند. گاری چه مسافتی را طی کرده است
(فرض: غلتش کامل)

دستگاه را روی c که متعلق به غلتک است گذاشتیم:

$$\bar{a} = a_c + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$

$\Rightarrow$

$$\bar{a}i = a_c i + a_c j - r\omega^2 j - r\alpha i \Rightarrow \bar{a} = a - r\alpha$$

3 معادله و 3 مجهول $\Leftarrow$

$$\Rightarrow \quad \Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow F_s = m(a - r\alpha)$$

$$\Sigma \bar{m} = \bar{I}\alpha \Rightarrow F_s \times r = \frac{1}{2} m r^2 \times \alpha \Rightarrow F_s = \frac{1}{2} m r \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m r \alpha = m(a - r\alpha) \Rightarrow \frac{3}{2} r\alpha = a \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3r} a$$

$$\bar{a} = a - r\alpha \Rightarrow \bar{a} = \frac{1}{3} a$$

a_{rel} اگر نسبت به کاری را همان $r\alpha$ ثابت زیرا:

اگر دستگاه را روی گاری قرار دهیم، داریم:

$\bar{a} = a - a_{rel}$

همچنین داشتیم:

$\bar{a} = a - r\alpha$

$\Rightarrow a_{rel} = r\alpha = r \times \frac{2}{3r} a = \frac{2}{3} a$

$d = \frac{1}{2} a_{rel} \cdot t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{3d}{a} \Rightarrow$

$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a \times \frac{3d}{a} = \frac{3}{2} d$

جهت های در نظر گرفته شده فرضی هستند

سوال:

حداقل ضریب اصطکاک برای داشتن غلتش کامل:

$\Sigma F_y = m\bar{a}_y = 0 \Rightarrow N = mg$

$F_s = \frac{1}{2} m r \times \alpha = \frac{1}{2} m r \times \frac{2a}{3r} \Rightarrow F_s = \frac{ma}{3}$

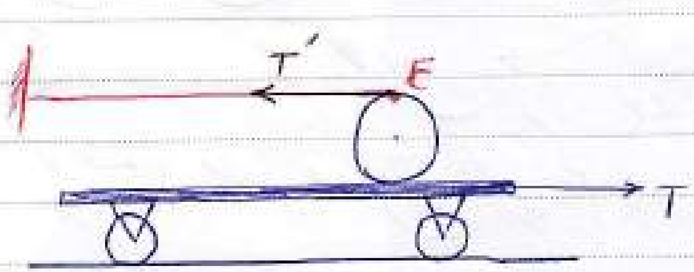
در آستانه لغزش $\Rightarrow \frac{ma}{3} = \mu_s N \Rightarrow \mu_{s_{min}} = \frac{a}{3g}$

حال اگر $\mu_s > \mu_{s_{min}} \Leftarrow$ لغزش داریم $\Leftarrow$ بین $\bar{a}$ و α هیچ

رابطه ای نیست

مثال:

طناب به موازات سطح است



فرض: غلتش کامل

$m_1 =$ جرم غلتک $\quad m_2 =$ جرم بدنه گاری

$r_1 =$ شعاع غلتک $\quad m_3 =$ جرم چرخ $\quad r_2 :$ شعاع هر چرخ

حل:

$T = 1500\,N \;,\; m_1 = 100\,kg \;,\; m_2 = 80\,kg \;,\; m_3 = 20\,kg$

$r_1 = 0.15\,m \;,\; r_2 = 0.1\,m$

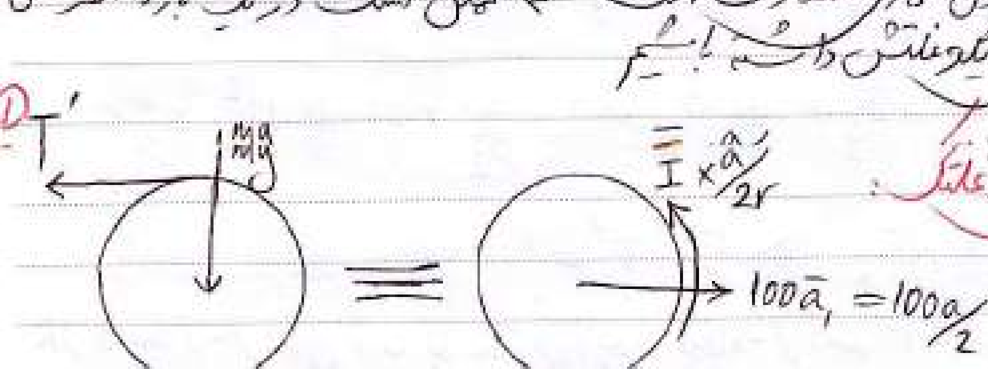
شتاب حرکت گاری و $T' = ?$

اگر فرض را بر غلتش کامل نمی‌گذاشت ⇐ باید تعیین می‌کردیم که لغزش داریم یا غلتش (با توجه به ضریب اصطکاک‌ها و ....)

اما:

چون غلتک در حال حرکت است و N در همه جای گاری یکسان نیست ⇐ μ ها در طول گاری متفاوت است ⇐ ممکن است در یک بازه لغزش و در بازه‌ای دیگر غلتش داشته باشیم

نمودار آزاد غلتک:



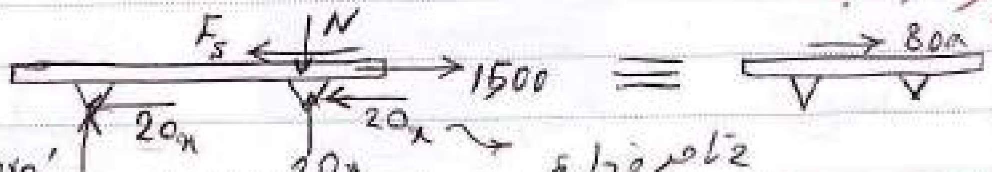
نقطه E، نقطه‌ای است که هم مرکز آنی دوران است، هم نقطه شتاب با زاویه صفر

⇐ شتاب‌ها: $\alpha = \frac{\bar{a}}{r}$, $\alpha = \frac{a}{2r}$

$\Rightarrow \bar{a} = a/2$ ⇒ پیکره آزاد شتاب صفحه قبل را کامل می‌کنیم

پیکره آزاد بدنه:

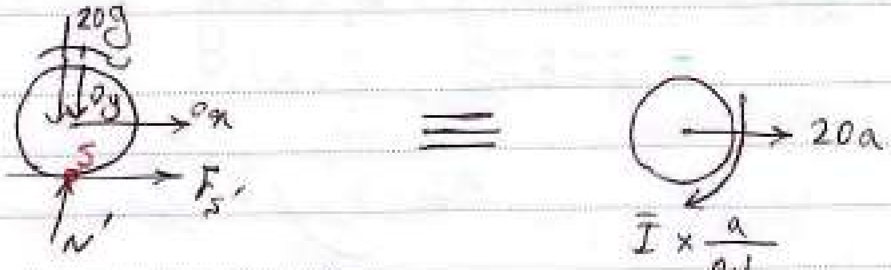
(2)



2 تا چرخ داریم

پیکره آزاد چرخ‌ها:

(3)



جهت‌ها دیمی است (البته می‌شد حدس زد)

$$①: \sum M_E = I_E \alpha \Rightarrow F_s \times 0.3 = \frac{3}{2} \times 100 \times 0.15^2 \times \frac{a}{2 \times 0.15}$$

$$②: \sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow 1500 - F_s - 4 \times O_x = 80a$$

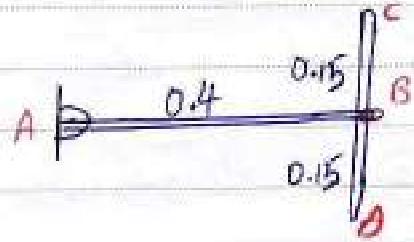
$$③: \sum M_S = I_S \alpha \Rightarrow O_x \times 0.1 = \frac{3}{2} \times 20 \times (0.1)^2 \times \frac{a}{0.1}$$

$$①: \sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow F_s - T' = 100 \times \frac{a}{2} \Rightarrow$$

از 3 معادله اول a به دست می‌آید و از معادله آخر T' یافت می‌شود

تقیه معادلات باقی مانده که خرج نکردیم ، برای چک کردن داده هایی بدست آمده است

مثال :

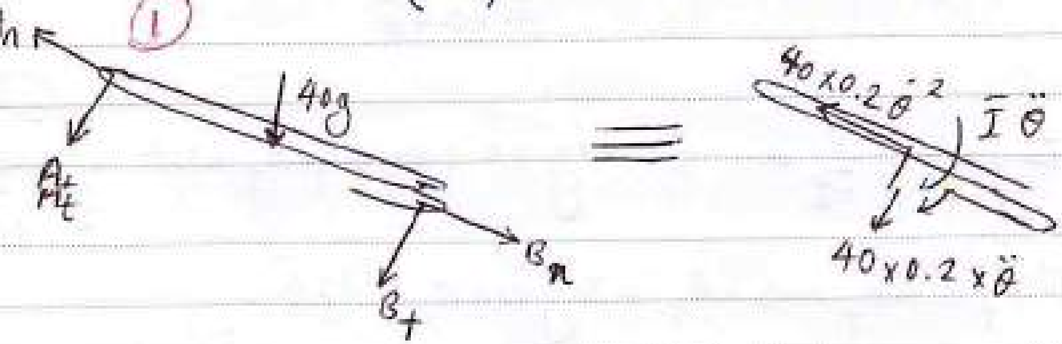


در B مفصل هستند
تمامی مفاصل ، روان هستند
و مقاومت هوا ناچیز است
و $m = 100 \, kg/m$

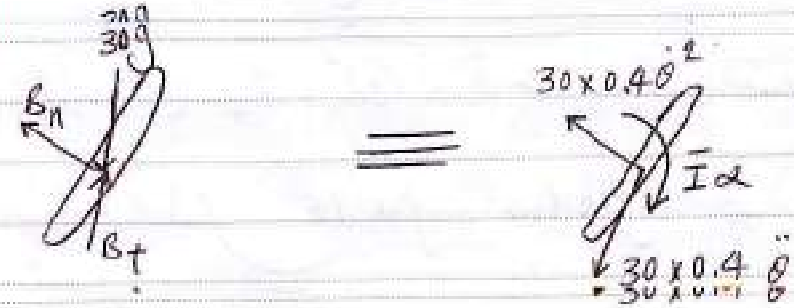
وقتی AB با افق زاویه ۶۰ ساخت ، مساله را تجزیه و تحلیل کنید

(حالت اولیه ، AB افقی است و CD قائم است)

(1)



(2)



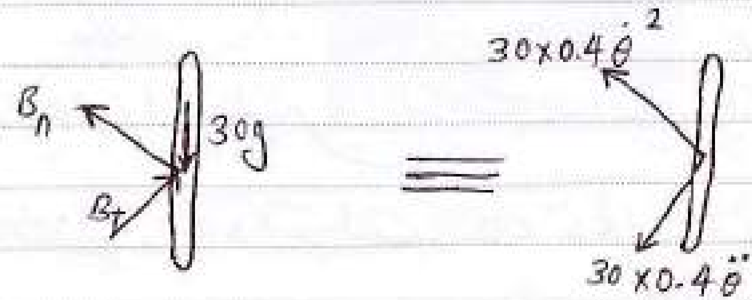
(2) : $\Sigma \bar{M} = \bar{I} \alpha$, $\Sigma \bar{M} = 0 \Rightarrow \bar{I} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$
$\Rightarrow \omega$ ثابت است

که هر ω که در ابتدا دارد ...

یعنی لینک CD نیز به همان صورت قائم خواهند ماند یعنی تنها انتقال دارد

اما اگر: لینک CD به AB جوش بخورد $\Leftarrow$ CD، همراه AB حرکت خواهد کرد $\Leftarrow$ تتا خواهد داشت

پس، دیاگرام آزاد حالت (2) تصحیح می‌کنیم:



(1)'

(1) $\sum M_O = I_O\alpha \Rightarrow 40g\times0.2\cos\theta + B_t\times0.4 = \frac{1}{3}\times40\times(0$

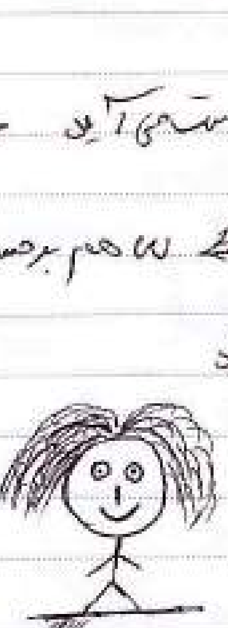
(2) $\sum F_t = m\bar{a}_t \Rightarrow -B_t + 30g\cos\theta = 12\ddot{\theta}$

$\Rightarrow B_t = 30g\cos\theta - 12\ddot{\theta}$

$\Rightarrow$ با قرار دادن B_t در (1)'، $\ddot{\theta}$ برحسب θ بدست می‌آید

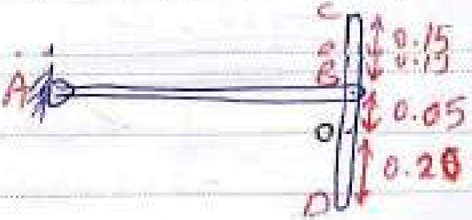
سپس از رابطه $\int\omega\, d\omega = \int\alpha\, d\theta$ $\Leftarrow$ ω هم برحسب θ یافت می‌شود

بقیه هم به همین ترتیب پیدا می‌شوند



اگه به مشکل برخوردید، بعداً ازمن بپرسید!!

حال مرکز جرم لینک CD را منطبق با لینک AB در نظر نمی‌گیریم یعنی:



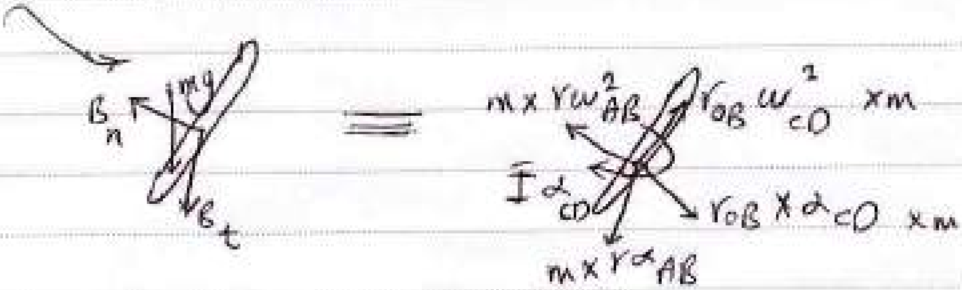
حال با همان اطلاعات سوال قبل شکل را تجزیه تحلیل کنید:

ابتدا دستگاه را روی A گذاشته و به لینک AB جوش می‌دهیم و B را بررسی می‌کنیم ⇐

$$a_B = r\omega_{AB}^2 + r\alpha_{AB}$$

سپس با قرار دادن دستگاه روی B و جوش دادن به لینک CD داریم:

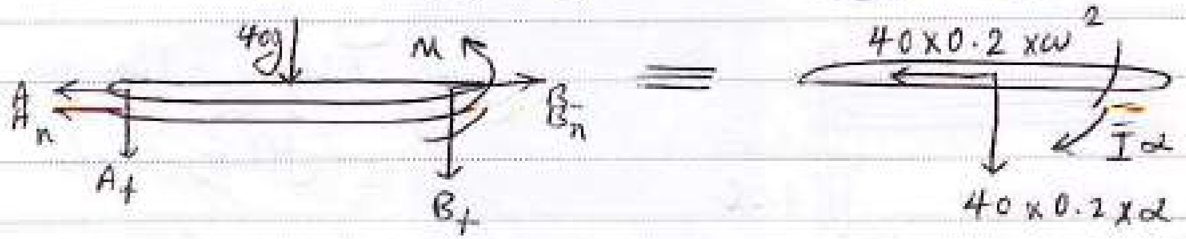
$$a_O = a_B + r\omega_{CD}^2 + r\alpha_{CD}$$



$$\Rightarrow \sum M_B = \bar{I}\alpha \pm mad$$

Year: Month: Date: / /

ex) حال مسأله اول را با فرض اینکه مفاصل غیر روان باشند حل کنید:



نکته:

α و ω، دو مجهول نیستند زیرا می توانیم از فرمول های $\omega d\omega = \alpha d\theta$ و یا $\omega = \alpha t + \omega_0$ یکی را برحسب دیگری یافت.

۲شنبه

متد انرژی در سینتیک اجسام صلب:

Energy Method

داشتیم:

$U = E_2 - E_1$

$E = V_e + V_g + T$

V_g: مبنای سطح پتانسیل، مرکز جرم است.

$V_g = mgh$

V_e:

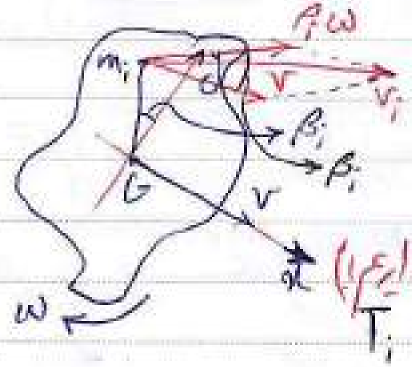
$V_e = \frac{1}{2} k x^2$ x: انحراف نسبت به طول آزاد

T:

جسم صلب در نقاط اش، سرعت خاص خودش را دارا است ⇐

در سینتیک اجسام صلب: $T \neq \frac{1}{2} m v^2$

داریم:



$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

می‌توان نوشت:

$v_i = \bar{v} + \omega \times r + \cancel{v_{rel}}$

$= 0$ (چون با جسم صلب سروکار داریم)

پس داریم:

$T_i = \frac{1}{2} m_i \left(\bar{v}^2 + (\rho_i \omega)^2 + 2 \times \bar{v} \times \rho_i \omega \cos\beta_i\right)$

$\rho_i \cos\beta_i$: تصویر ρ_i است بر روی محور y ⇐ $\rho_i \cos\beta_i = y_i$

$\rightarrow T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = \Sigma \tfrac{1}{2} m_i \left(\bar{v}^2 + (\rho_i \omega)^2 + 2 \bar{v} y_i \omega\right)$$

$$\Rightarrow T = \Sigma \tfrac{1}{2} m_i \bar{v}^2 + \Sigma \tfrac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 + \Sigma m_i \bar{v} y_i \omega$$

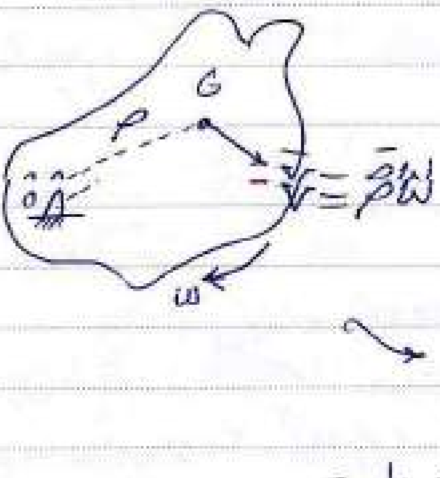
$$\Rightarrow T = \tfrac{1}{2} m \bar{v}^2 + \tfrac{1}{2} \bar{I} \omega^2 + \bar{v} \omega \cancel{\Sigma m_i y_i}$$

$$T = \underbrace{\tfrac{1}{2} m \bar{v}^2}_{\text{ناشی از انتقال جسم صلب است}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} \bar{I} \omega^2}_{\text{مربوط به دوران جسم صلب است}}$$

که جسم صلبی که تنها انتقال دارد ⇐ این Term حذف می‌شود و $T = \tfrac{1}{2} m$

می‌توان آن را در مبحث سینتیک ذرات تجزیه و تحلیل کرد

نکته:



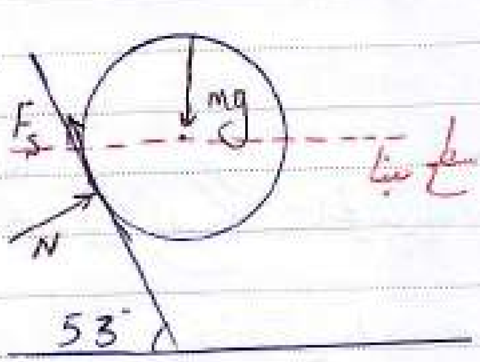
o: مرکز دائمی دوران یا مرکز آنی دوران است.

$$\Rightarrow T = \tfrac{1}{2} m (\bar{\rho} \omega)^2 + \tfrac{1}{2} \bar{I} \omega^2$$

$$T = \tfrac{1}{2} (m \bar{\rho}^2 + \bar{I}) \omega^2 = \tfrac{1}{2} I_o \omega^2$$

I حول مرکز دائمی یا مرکز آنی دوران است

مثال:



$m_{دیسک} = 5\,kg$

$r_{دیسک} = 0.1m$

دیسک یکنواخت است

غلتش کامل است.

دستمال زیر دیسک است

پس از اینکه دستمال را می‌کشیم

دیسک شروع به حرکت می‌کند

← پس از 1.2m جابه‌جایی، ω را بیابید:

اگر در دینامیکی راه‌حل به ما بدهد ← تکلیف ما از اینکه غلتش داریم یا غلتش همراه لغزش! مشخص نیست ← بهترین روش: روش نیرو

در صورتی که در این مسأله غلتش داشته باشیم (در صورت مسأله ذکر شده باشد که غلتش داریم) ← بهترین روش: روش انرژی است

←

F_s برای ما کار انجام نمی‌دهد!! می‌پرسی چرا؟؟!

چون که غلتش داریم ← در محل تماس بین دیسک و سطح، سرعت در آن نقطه صفر است ← جابه‌جایی F_s صفر است زیرا ملاک جابه‌جایی نیرو سرعت است.

در جهت نیرو

$$w = E_2 - E_1 \rightarrow 0 = E_2 - E_1 \rightarrow 0 = E_2 - 0$$

$$\rightarrow E_2 = 0 \rightarrow E_2 = -mgh + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$v = r\omega$

$$\Rightarrow 0 = -5g \times 1.2 \sin 53 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 5 \times 0.1^2 \times \omega^2$$

$\rightarrow \omega =$

(ex)

کار نیروی اصطکاک را بیابید (در صورت لغزش جسم روی سطح)

نکته:

ماشینی که غلتش دارد ⇐ کار نیروی اصطکاک صفر است ⇐ پس چه عاملی باعث حرکت ماشین می‌شود؟

گشتاور معادم چرخ‌ها

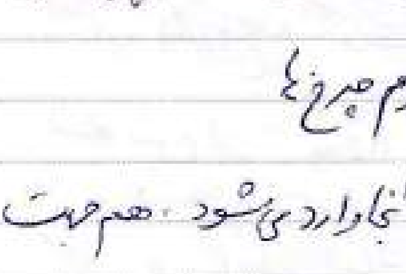
نکته:

if: نیرو و سرعت در نقطه‌ای که نیرو به آنجا وارد می‌شود، هم‌جهت باشند ⇐ کار آن نیرو، مثبت است

خلاف:

کار آن نیرو، منفی است.

نکته:



if: غلتش کامل

$\rightarrow \bar{v} = r\omega$

if: غلتش توأم با لغزش

$\rightarrow r\omega \gtrless \bar{v}$

Take off

$v_c = \bar{v} + r\omega = \bar{v}\,i - r\omega\, i$

$\Rightarrow v_c = \bar{v} - r\omega \Rightarrow$ کار F_s در هر دو حالت منفی است.

هم در غلتش و هم در غلتش همراه لغزش:

چون تنها نیرویی که به ماشین از خارج وارد می‌شود، نیروی اصطکاک چرخ‌های محرک است

⇐ F_s (نیرویی که زمین به چرخ‌ها وارد می‌کند) چرخ‌های محرک به سمت
شتاب ماشین است

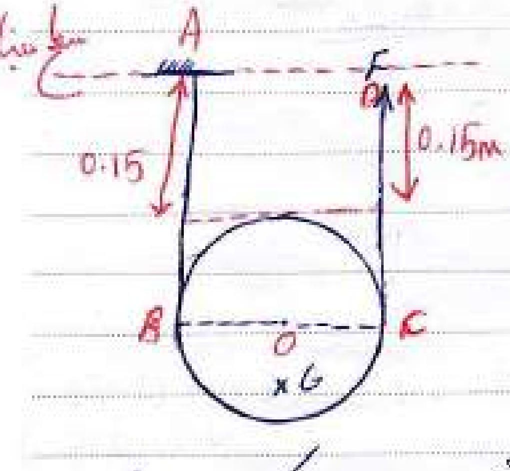
سوال: کار نیروی اصطکاک در ترمز کردن چیست؟ (غلتش توام با لغزش)

در این حالت:

$\bar{v} > r\omega$ ⇐ v_c به سمت راست است

اما در این حالت (ترمز کردن) نیروی اصطکاک به سمت چپ است ⇐

باز هم کار نیروی اصطکاک منفی است.



ex)

m دیسک $= 5\,kg$ $\quad$ r دیسک $= 0.1$

جرم طناب $= 6\,kg/m$

$F = 300\,N$

پس از اینکه مرکز دیسک $0.1m$ جابجا شود ⇐ سرعت مرکز جرم = ؟

فرض: جای مرکز جرم نیم حلقه پایینی است که فاصله‌اش از O برابر $\frac{2r}{\pi}$
لغزشی بین طناب و دیسک وجود ندارد.

نکته:

مجموع کار نیروی اصطکاک بین طناب و دیسک که به صورت زوج عمل و عکس‌العمل

Year. Month. Date. ( )

هستند صفر است چون:

غلتش داریم ⇐ دیسک و طناب نسبت به هم سرعتی

ندارند ⇐ جابجایی آنها یکسان است ⇐ کار این دو نیروی اصطکاک (عمل

و عکس العمل) یکی است و در خلاف جهت هم

نکته:

B مرکز آنی دوران ⇐ $v_C = 2v_0$ ⇐ جابجایی طناب

۲ برابر جابجایی مرکز دیسک است.

$$u = 300 \times (2 \times 0.1) = 60 \ N.m \quad (u = F.d)$$

$$E_1 = \overbrace{-5g \times 0.25}^{V_{g_0}} \overbrace{- 2 \times 0.25 \times 6 \times g \times \frac{0.25}{2}}^{V_{g_{AB}} + V_{g_{CD}}}$$

$$\overbrace{- \pi \times 0.1 \times 6 \times g \times \left(0.25 + \frac{2 \times 0.1}{\pi}\right)}^{V_{g_{BC}}}$$

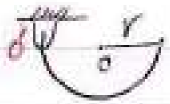
$$E_1 = mgh + \cancel{T}^{\,0}$$

$$E_2 = \overbrace{-5g \times 0.15}^{V_{g_0}} \overbrace{- 0.15 \times 6 \times g \times \frac{0.15}{2}}^{V_{g_{AB}}} + \overbrace{0.35 \times 6 \times g \times (0.175 -}^{V_{g_{CD}}}$$

$$\underbrace{- \pi \times 0.1 \times 6 \times g \times \left(\frac{2 \times 0.1}{\pi} + 0.15\right)}_{V_{g_{BC}}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 5 \times (0.1)^2 \times \omega^2}_{T_0} + \underbrace{0}_{T_{AB}} + \underbrace{\frac{1}{2} \times 0.35 \times 6 \times (2 \times 0.1 \times \omega}_{T_{CD}} \ldots$$

طناب AB دوران ندارد، همچنین: $v_B = 0$: در طول طناب AB: $v = 0$

T_{CD} :  $I_o = mr^2 \Rightarrow I_{o'} = 2mr^2$

$$\Rightarrow + \underbrace{\tfrac{1}{2} \times [2 \times (0.1 \times \pi \times 6) \times (0.1)^2] \times \omega^2}_{T_{BC}}$$

ضریب ۱/۲ بکار رفته شده.

به نیم حلقه است

$m_{BC} = \frac{2\pi r}{2} \times 6$ ، $E_1 = mgh = m_{دیسک}\,gh + m_{BC}\,gh + 2m_{AB}\,gh$

$m_{AB}\,gh = m_{CD}\,gh$

$E_2 = mgh + T$ ، $T_{CD} = \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} m (2r\omega)^2$

$T_o = \frac{1}{2} I_B\, \omega^2$

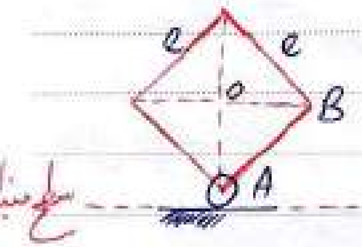
ex) plate ای با جرم m و ابعاد e×e موجود است

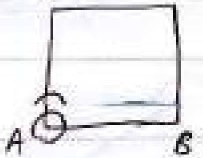
غلتک ریز و بی جرم است و جرم ندارد

غلتک رها از حالت سکون سطح بدون اصطکاک است

در لحظه قبل از برخورد نقطه B با زمین

سرعت نقطه A = ?





$\dot{u} = 0$ ، $E_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} mge$

$$E_2 = mg\frac{e}{2} + \frac{1}{2} m \times \bar{v}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m (2e^2)\right)\omega^2$$

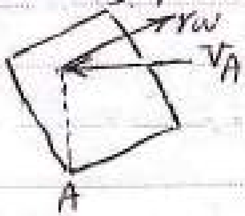
$$I_o = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

یک معادله و 2 مجهول داریم ← از سینماتیک کمک می‌گیریم.

Dr Hajmusa :

برای 1000 امین بار: به سراغ نقطه‌ای می‌رویم که بیشترین اطلاعات را راجع به آن داشته باشیم (از مسیر حرکت که از همه مهمتر است گرفته تا زن و بچه و ......!!)

در حالت میانی داریم: دستگاه را روی A گذاشتیم و به plate جوش می‌دهیم پس:



$$\vec{v} = \vec{v}_A + r \times \vec{\omega}$$

پس:

در حالت ثانویه (حالت نهایی) داریم:

$$\bar{v}_x = v_A + \frac{\sqrt{2}}{2} r\omega \times \cos 45 = v_A + r\omega$$

$$\bar{v}_y = \frac{\sqrt{2}}{2} r\omega \times \sin 45 \Rightarrow \bar{v}_y = \frac{r\omega}{2}$$

3 معادله و 4 مجهول ($\bar{v}_x$ و $\bar{v}_y$ و v_A و ω)

حال چه کنیم؟؟

پیکره آزاد نیرو را برای حالت میانی می‌کشیم:

$\Rightarrow$ $\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow m\bar{a}_x = 0 \Rightarrow$

$\bar{a}_x = 0 \Rightarrow$

$\bar{v}_x$ ثابت است

چون $\bar{v}_x$ در حالت ابتدایی صفر است $\Leftarrow$ $\bar{v}_x$ در حالت نهایی هم صفر است که $\Leftarrow$

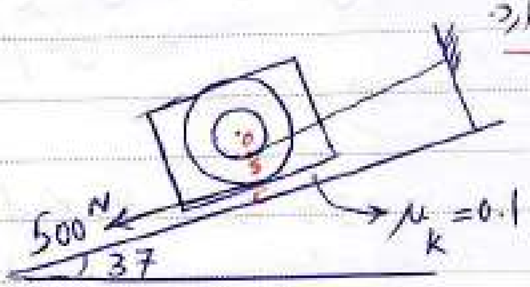
$$v_A + \frac{r\omega}{2} = 0$$

Subject:
Year: ۸۸ Month: آذر Date: ۱۶

دوشنبه:

!! بعدازظهر 13-16

مثال: هیچ لغزشی بین طناب و قرقره وجود ندارد.



جرم جعبه بدون قرقره $m_1 = 10\,kg$

جرم قرقره $m_2 = 3\,kg$

$r_1 = 0.05\,m$

$r_2 = 0.15\,m$

شعاع ژیراسیون قرقره $\bar{k} = 0.1\,m$

گشتاور مقاوم دینامیکی قرقره $M_k = 3\,N.m$

استاتیکی قرقره " " $M_s = 3.5\,N.m$

$\Leftarrow$ فرض براین است قرقره حتماً می‌چرخد!!

مرکز هندسی قرقره، همان سرعت جعبه را دارا است و از آنجایی که مرکز آنی در نقطهٔ S است (طناب بالایی سرعت ندارد) $\Leftarrow$ سرعت مرکز قرقره به سمت راست است $\Leftarrow$ جعبه به سمت بالا حرکت می‌کند

با اعمال نیروی 500N که در طول حرکت ثابت است $\Leftarrow$ سرعت جعبه پس از 2 متر جابجایی جعبه به سمت بالا بدست آورید؟

قرقره حتماً می‌چرخد (فرض مسأله)

$U = E_2 - E_1$

* برای محاسبه کار، جابجایی نیرو مد نظر است $\Leftarrow$ کار نیروی 500N مثبت است

$V_c = (0.15 - 0.05) \times \omega$ ، $V_0 = 0.05 \times \omega \Rightarrow \frac{V_c}{V_0} = 2$

جابجایی نیروی 500N به سمت چپ است چون V در نقطهٔ C به سمت چپ است (سرعت 00)

جابجایی نیروی 500 بیشتر می‌شود، 2 برابر جابجایی جعبه است $\Leftarrow$

$U = 500 \times 4 - 0.1 \times 13g\,\cos 37 \times 2 - \underbrace{3 \times 40}_{M\theta}$

Year. Month. Date. ( )

گشتاور متقاومی به جعبه وارد می شود که با گشتاور متقاومی که به قرقره وارد می شود زوج عمل و عکس العمل هستند که چون جعبه نمی چرخد ⇐ گشتاورش کار انجام نمی دهد

اما برای محاسبه کار گشتاور قرقره داریم:

$W = M\theta$

بین طناب و قرقره لغزش داریم $S = r\theta \Rightarrow 2 = 0.05\theta \Rightarrow \theta = 40\,rad$

$E_1 = 0$

داریم:

$E_2 = mgh + \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2}[\bar{I} + md^2] \times \omega^2$

$\rightarrow E_2 = 2 \times 13g \times \sin 37 + \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2}\left(3 \times \left(\underbrace{0.1^2}_{k^2} + 0.05^2\right)\right)(\ldots$

→ v_0 یافت می شود !!

(new ex

اگر در همان مثال قبلی، الکتروموتور را در o قرار دهیم که گشتاوری پادساعتگرد به اندازه $750\,N.m$ را روی قرقره اعمال می کند

⇐ چون گشتاور نیروی $500\,N$ حول o برابر $75\,N.m$ است ⇐

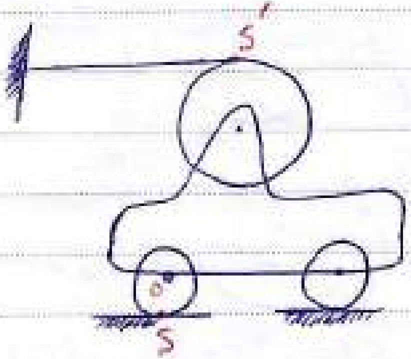
گشتاور الکتروموتور بر گشتاور نیروی $500\,N$ می چربد ⇐ M کل، پادساعتگرد خواهد بود

⇐ سرعت در نقطه c به سمت راست خواهد بود

⇐ کار نیروی $500\,N$، منفی است (چون جابجایی اش، خلاف جهت نیرو است)

همچنین چون جهت سرعت در B به سمت چپ است ⇐ جعبه به سمت پایین حرکت می کند

مثال:



قرقره : $m_1 = 100kg$

$r_1 = 0.4m$

$\bar{k}_1 = 0.3m$

جرم چرخ $= m_2 = 40kg$

$r_2 = 0.3m$

$\bar{k}_2 = 0.15$

جرم بدنه $= m_3 = 500kg$

فرضیات:

مرکز جرم بدنه به گونه‌ای است که کله کردن منتفی است

گشتاوری که موتور به چرخ عقب وارد می‌کند $M = 600_{N.m}$ است

اصطکاک و باد هم منتفی است ؛ سیستم اتلافاتی ندارد.

بعد از 20m جابه‌جایی اتومبیل، سرعت اتومبیل چقدر است.

غلتش داریم ⇐ کار نیروی اصطکاک صفر است

$U = M\theta \, , \, \theta = \frac{S}{r} = \frac{20}{0.3} \Rightarrow U = ۶۰۰ \times ۶۶/۶$

$E_1 = 0$

$E_2 = \frac{1}{2} m_3 v^2 + \frac{1}{2}\left(m_1(\bar{k}_1^2 + r_1^2)\right)\left(\frac{v}{0.4}\right)^2$

$+ 4 \times \frac{1}{2}\left(m_2(\bar{k}_2^2 + r_2^2)\right)\left(\frac{v}{0.3}\right)^2$

در S و S' ، $v = 0$ ← حکم مرکز آنی دوران را دارند ⇐ $I_S = I_O + mr^2$

$I_O \to \bar{k}^2 m$

Subject:

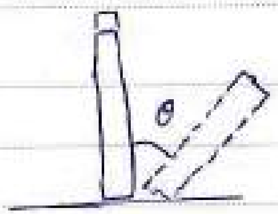
Year: Month: Date:

مثال:

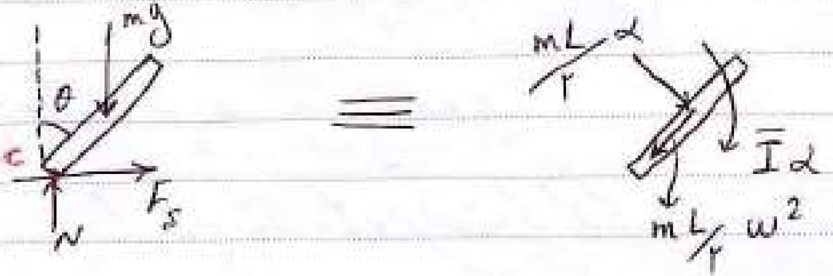
میله ای به صورت قائم داریم به طول L و جرم m با ضریب اصطکاک μ_s

سرنوشت حرکت چه می شود؟!

در چه θ ای لغزش start می خورد؟!



در ابتدا زمانی که لغزش نداریم:



$$\Sigma M_c = I_c\,\alpha \Rightarrow mg\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{1}{12}mL^2\alpha + \frac{mL^2}{4}\alpha$$

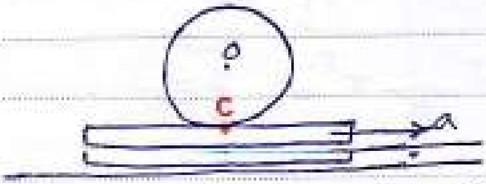
$$\rightarrow mg\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{1}{3}mL^2\alpha$$

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow mg - N = \frac{mL}{2}\alpha\cdot\cos\theta + \frac{mL}{2}\omega^2\cdot\sin\theta$$

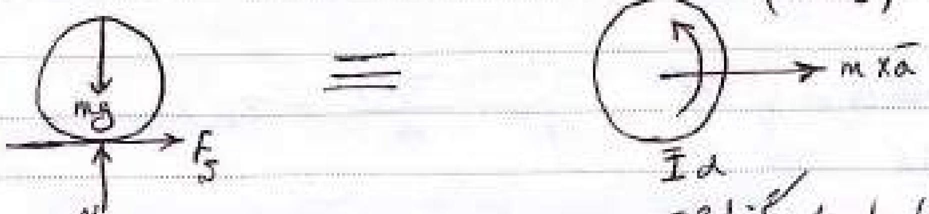
$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow F_s = \frac{mL}{2}\alpha\cdot\sin\theta - \frac{mL}{2}\omega^2\cdot\cos\theta$$

مثال:

دیسکی روی plate قرار دارد. plate را با شتاب a می کشیم (غلتش کامل بین دیسک و صفحه) ← کار نیروی اصطکاک روی دیسک طی 360° دوران دیسک چقدر است؟



داریم: (نیروی اصطکاک به نقطه ای وارد می شود که آن نقطه سرعت دارد ← F_s برای ما کار انجام می دهد)



دستگاه را روی plate گذاشته و با جسم حرکت می کنیم

$$\bar a\, i = a_C\, j + a_C\, i - r\omega^2 j - r\alpha\, i$$

$$\to \bar a = a - r\alpha$$

مسیر حرکت plate یک خط افقی است ← $\bar a_n$ نداریم

حال داریم:

$$\sum F_n = m\bar a_n \Rightarrow F_s = m(a - r\alpha)$$

$$\sum \bar M = I\alpha \Rightarrow +F_s \times r = +\frac{1}{2} m r^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2F_s}{mr}$$

$$\to F_s = m\left(a - \frac{2F_s}{m}\right) \Rightarrow F_s = \frac{ma}{3}$$

Year . Month . Date . ( )

چون غلتش کامل داریم پس ،

جابجایی دیسک و plate یکی است .

می پرسی چرا ؟؟؟؟

زیرا بی دلیل اینکه ......!!

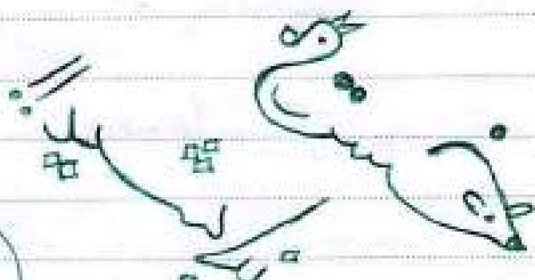
$$\Rightarrow \alpha = \frac{+2F_s}{mr} \quad \left(F_s = \frac{ma}{3}\right) \Rightarrow \alpha = +\frac{2}{3}\frac{a}{r}$$

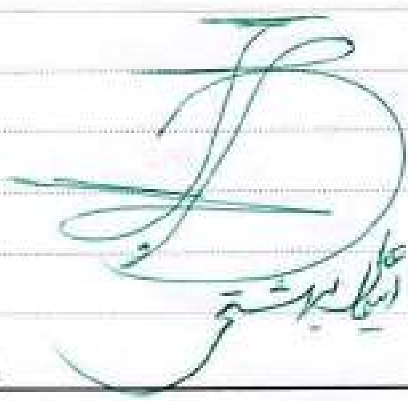
$$s = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2\theta}{\alpha}$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{2 \times 2\pi}{\frac{2}{3} \times \frac{a}{r}} = \frac{6\pi r}{a} \Rightarrow$$

جابجایی plate $d = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a \times \frac{6\pi r}{a} = 3\pi r$

$\Rightarrow$ کار نیروی اصطکاک $= F_s \cdot d = \pi r m a$

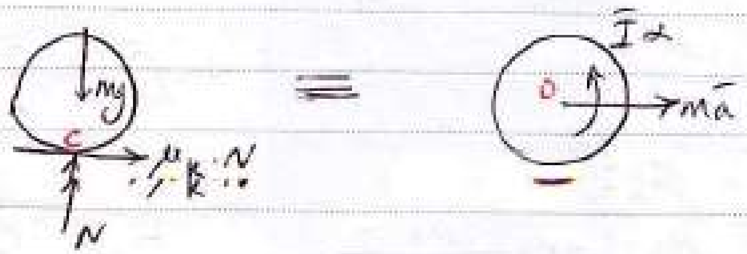




PAPCO

مثال:

همان مثال قبلی را با فرض اینکه بین قطعه و Plate لغزش وجود داشته باشد حل کنید.



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg \Rightarrow F_s = \mu_k \, mg$$

$$\Sigma F_x = m\bar a_x \Rightarrow \mu_k \cdot mg = m\bar a \Rightarrow \bar a = \mu_k \cdot g$$

$$\Sigma \bar M = \bar I \alpha \Rightarrow \mu_k \cdot mg \times r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2\mu_k g}{r}$$

برای یافتن مسافت پیموده شده قطعه پایینی (در واقع همان جابجایی نیروی اصطکاک) داریم:

ابتدا جابجایی مرکز دیسک را می یابیم:

برای این کار: دستگاه o را در مرکز دیسک قرار داده و نقطه c را بررسی می کنیم

$$v_c = \bar v + r\omega \quad , \quad a_{c_t} = \bar a + r\alpha$$

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow 2\pi = \frac{1}{2} \times \frac{2\mu_k \cdot g}{r} \times t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2\pi r}{\mu_k \cdot g}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \mu_k \cdot g \times \frac{2\pi r}{\mu_k \cdot g} = \pi r$$

ل داریم: اگر L جابه‌جایی قطعه زیری باشد (جابه‌جایی F_s)

$$\frac{s}{L} = \frac{\bar{v}}{v_c} = \frac{\bar{a}}{a_{c_t}}$$

چون v: نداریم ⇐ نسبت جابه‌جایی‌ها با نسبت شتاب‌ها برابر است

$$\Rightarrow \frac{s}{L} = \frac{\mu_k g}{\mu_k g + 2\times\frac{2\mu_k g}{2}} \rightarrow \frac{s}{L} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow L = 3s = 3\pi r$$

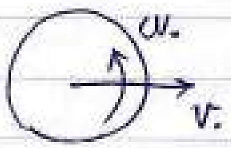
L در حالتی که غلتش داشتیم با حالتی که لغزش داشتیم یکی شد پس می‌توان
نتیجه گرفت که:

L هیچ ربطی به μ_k ندارد؛ چون که:

با افزایش μ_k ⇐ F_s زیاد می‌شود ⇐ a زیاد می‌شود اما از طرفی t^2
هش می‌یابد

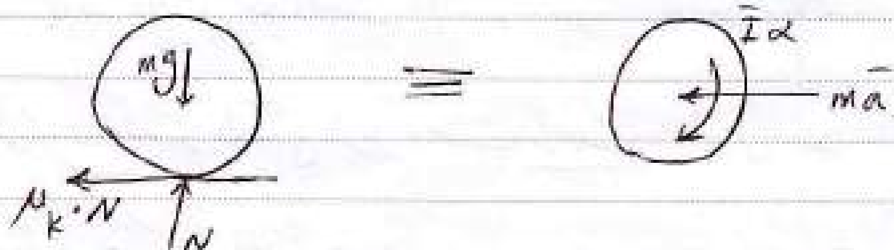
مثال:

دیسکی را با دست خود چرخانده
سپس با سرعت v_0 به سمت جلو پرتابش می‌کنیم
که دیسک بر روی سطحی با μ_s و μ_k قرار می‌گیرد
⇐ سرنوشت حرکت دیسک بلافاصله پس از تماس
با سطح را تجزیه و تحلیل کنید.



وقتی لغزش نداریم، هیچ لزومی ندارد که جهت اصطکاک را درست انتخاب کنیم
و دقت به خرج بدهیم چون:
F_s مجهول است

حال:



ω باید ساعتگرد است و v به سمت راست است
که دیسک تمایل دارد که به سمت
چپ حرکت کند (مخالفت با حرکت کند)

$\Rightarrow$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow +\mu_k \cdot mg = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \mu_k \cdot g$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow \mu_k \cdot mg \times r = \frac{1}{2} mr^2 \Rightarrow \alpha = \frac{2\mu_k \cdot g}{r}$$

$v = v_0 - at \Rightarrow v = v_0 - \mu_k g t$

$\rightarrow$

$\omega = \omega_0 - \frac{2\mu_k g}{r} t$

حرکت تا زمانی ادامه دارد که لغزش تبدیل به غلتش شود

زمانی که دیگر بوکس و باد گردش تمام می شود و به حرکت خود ادامه می دهد
حرکت دورانی گوی تمام می شود و حرکت انتقالی اش شروع می شود

$\Rightarrow$

$r\omega = v_0 - \mu_k g t_c$, $\omega = \omega_0 - \frac{2\mu_k g}{r} t_c$

$\rightarrow \omega = \omega_0 - \frac{2}{r}(v_0 - r\omega) \Rightarrow \omega = \frac{2v_0}{r} - \omega_0$

$\Rightarrow$ if: $\frac{2v_0}{r} > \omega_0 \Rightarrow$ بنا به ω جدید بوده است!!

$\rightarrow$ گوی به حرکت غلتشی خود به سمت راست ادامه می دهد

else:

گوی به حرکت غلتشی خود " " چپ "

$0 - t_c$; (بوکس و باد!) لغزش داشتیم

$t_c - \infty$; غلتش داریم

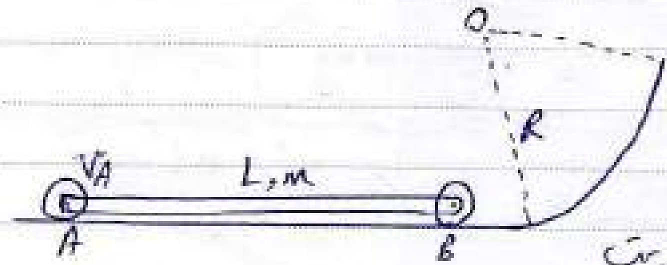
Subject:
Year. Month. Date. / /

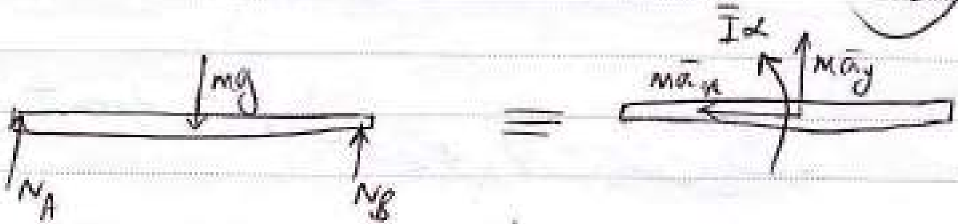
New example:

مثال:
بلافاصله پس از ورود
چرخ جلو به قوس

$\rightarrow N_B , N_A = ?$

A دارای سرعت ثابت است:
اگر ترمز کند یک چرخ عقب متصل است
یکی آزاد





A دارای سرعت ثابت است و در حال حرکت به سمت راست است.
B نیز مسیر حرکتش مشخص است

حال: دستگاه را روی A گذاشته و به میله جوش می‌دهیم:

$$\rightarrow \bar{a} = \cancel{a_A}^{0} + \omega\times(\cancel{\omega\times r}) + \dot{\omega}\times r \Rightarrow \bar{a}_y = \frac{L}{2}\alpha j$$

بلافاصله پس از ورود به قوس ω نداریم اما α داریم

$$\Rightarrow \bar{a}_x = 0$$

حال:
دستگاه را روی B گذاشته و به میله جوش می‌دهیم:

$$\bar{a} = a_B + \omega\times(\cancel{\omega\times r})^{0} + \dot{\omega}\times r \Rightarrow$$

$$\bar{a}_y = a_{B_t} i + \frac{v_A^2}{R} j - r\alpha j \qquad (a_B = a_{B_t} + \cancel{a_{B_n}})$$

$\frac{v_B^2}{R}$

Year. Month. Date:

$$\Rightarrow a_{B_t} = 0 \;,\; \bar{a}_y = \frac{V_A^2}{R} - \frac{L}{2}\alpha$$

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow N_A + N_B - mg = m\bar{a}_y$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow N_B \times \frac{L}{2} - N_A \frac{L}{4} = \frac{1}{12} mL^2 \alpha$$

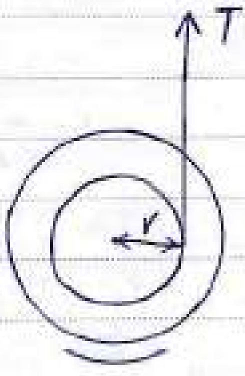
$$\rightarrow N_B - N_A = 7mL\alpha$$

← 4 معادله، 4 مجهول ← مجهولات یافت می‌شوند

یکشنبه

مثال

تحلیل حرکت یویو:



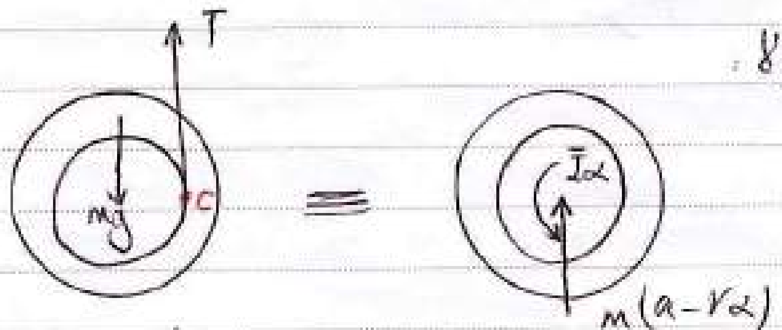
جرم یویو $= m$

شعاع یویو $= r$

شعاع ژیراسیون یویو $= \bar{k}$

شتاب دست ما: a است که می‌تواند به سمت بالا یا پایین باشد

الف) a به سمت بالا:



دستگاه را روی c قرار داده و به یویو جوش می‌دهیم ← مرکز جرم را بررسی می‌کنیم.

$$\bar{a} = \bar{a}_{c_y}\, j + \bar{a}_{c_x}\, i + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$

$$\rightarrow \bar{a}_y = a_{c_y} + \dot{\omega} \times r \rightarrow \bar{a}_y = a - r\alpha$$

با $\bar{a}_x$ کار نداریم!!

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \rightarrow 0 = m\bar{a}_x \rightarrow \bar{a}_x = 0$$

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \rightarrow mg - T = m(a - r\alpha)$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow T \times r = \bar{I}\alpha = m\bar{k}^2\alpha$$

$$\Rightarrow T = \frac{m\bar{k}^2\alpha}{r}$$

$$\Rightarrow -m\frac{\bar{k}^2}{r}\alpha \pm mg = -m(a - r\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{a+g}{r - \frac{\bar{k}^2}{r}}$$

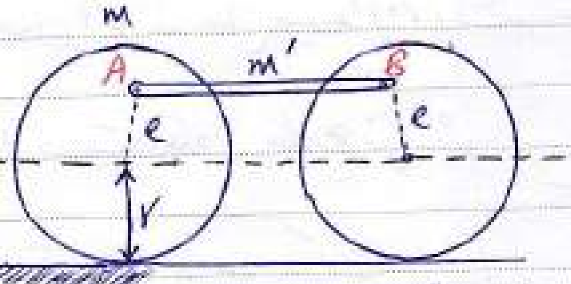
$$\hookrightarrow T = \frac{m\bar{k}^2}{r}\left(\frac{a+g}{r - \frac{\bar{k}^2}{r}}\right) \Rightarrow T = \frac{m(a+g)}{\left(\frac{r}{\bar{k}}\right)^2 - 1}$$

$\Rightarrow$ if $|-a| > g \Rightarrow T < 0$ طناب شل می شود

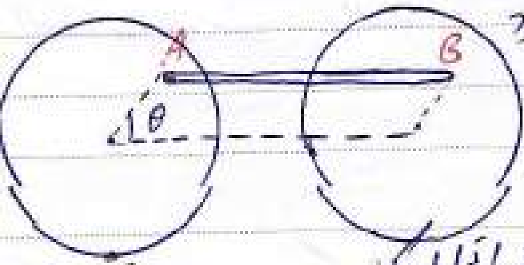
else

$T > 0$

مثال:



میله در نقطه A و B به 2 دیسک مفصل شده است و تمامی مفاصل روان هستند
اصطکاک به اندازه کافی داریم
با یک انحراف جزئی سیستم از حالت تعادل خارج می‌شود
پس از اینکه سیستم از حالت تعادل خارج شود
و به حالت روبه‌رو در بیاید



(جرم دیسک‌ها m است و دارای شعاع r هستند
طول لینک L است و دارای جرم m' است) مسأله را تحلیل کنید:

$E_2 - E_1 = U \rightsquigarrow U = 0 \Rightarrow E_1 = E_2$

$E_1 = m' g e$

لینک AB نیز انتقال دارد ← $T = \frac{1}{2} m v^2$ و تمامی نقاطش دارای سرعت یکسانی هستند

$$E_2 = \underbrace{m' g e \sin\theta}_{V_g \text{ لینک}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v_A^2}_{T \text{ لینک}} + \underbrace{2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m r^2\right) \times \omega^2\right]}_{T \text{ دیسک‌ها}}$$

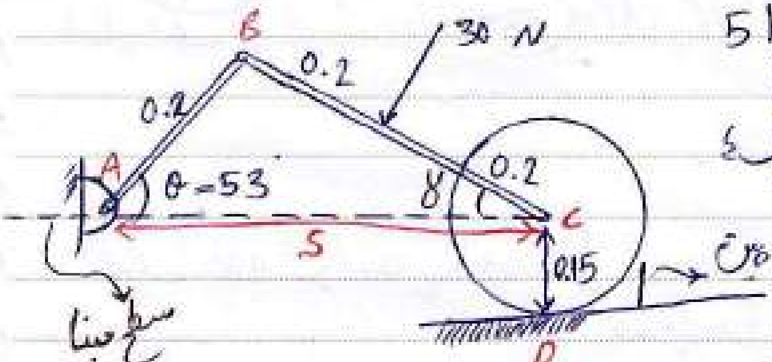
C: مرکز آنی دوران است (غلتش داریم) که

$v_A = S\omega \rightsquigarrow v_A = \sqrt{e^2 + r^2 + 2er\sin\theta}\ \omega$

Year. Month. Date. ( )

ل اگر نفاصل غیرهوال باشند ⇐
با یک انحراف جزئی دیگر سیستم
حالت تعادل خارج نمی شود که
⇐ criticle θ را می یابیم
ان θ به بعد حرکت داریم!

بته در صورت مسئله باید M_s ، M_d را بدهند



ل: جرم دیسک = 5 kg
A و B و C مفصل
هستند ، $m = 10 \, kg/m$ لینک ها
برداشتن پین ،
G
$\theta = 20$

⇐ کلیه اطلاعات سینماتیکی را بیابید؟!! (اصطکاک به اندازه کافی داریم!)

$u = E_2 - E_1$

تعادل داریم:

$E_1 = 0.1 \sin 53 \times 2g + 0.1 \sin 53 \times 4g$

$0.1 \sin\theta = 0.2 \sin\gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 = 23.57$

$E_2 = 0.1 \sin 20 \times 2g + 0.1 \sin 20 \times 4g + \frac{1}{2} \overbrace{(\underbrace{\tfrac{3}{2} \times 5 \times 0.15}_{I_D}}^{T_C}$

$^{1}_{BC}$

$$+\frac{1}{2}\times 4\times \bar{v}_{BC}^{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}\times 4\times 0.4^{2}\times \omega_{BC}^{2}$$

$(\bar{v}_x^2+\bar{v}_y^2)$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\times 2\times 0.2^{2}\right)\omega_{AB}^{2}$$

⇐ ایجاد ۱ معادله، ۵ مجهول ⇐ از سینماتیک کمک می‌گیریم!!

دستگاه را در B قرار داده و به لینک BC جوش می‌دهیم و C را بررسی می‌کنیم

$$v_c = v_B + \omega\times r \rightarrow 0.15\,\omega_c\, i = 0.2\,\omega_{AB}(\sin 20 i - \cos 20 j) + 0.4\,\omega_{BC}(\sin 9.85 i + \cos 9.85 j)$$

داشتیم:

$$0.2\sin 20 = 0.4\sin\theta_1 \Rightarrow \theta_1 = 9.85$$

$$\rightarrow 0.15\,\omega_c = 0.2\,\omega_{AB}\sin 20 + 0.4\,\omega_{BC}\sin 9.85$$

$$0 = 0.2\,\omega_{AB}(-\cos 20 j) + 0.4\,\omega_{BC}(\cos 9.85)$$

حال دستگاه را در B قرار داده و مرکز جرم CB را بررسی می‌کنیم و به لینک BC جوش می‌دهیم.

$$\bar{v}_x i - \bar{v}_y j = 0.2\,\omega_{AB}(\sin 20 i - \cos 20 j) + \omega_{BC}\times 0.2(\sin 9.85 i + \cos 9.85 j)$$

$$\Rightarrow \bar{v}_x = 0.2\,\omega_{AB}\cdot\sin 20 + 0.2\,\omega_{BC}\cdot\sin 9.85$$

$$\bar{v}_y = 0.2\,\omega_{AB}\cos 20 - 0.2\,\omega_{BC}\cos 9.85$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

...ی برای محاسبه u داریم :

نیروی $30N$ را به نقطه c منتقل می کنیم ⇐

...ل ایجاد شده را نیز در c قرار می دهیم.

...ن کار را به این دلیل انجام دادیم که :

مسیر نقطه ای که نیروی $30N$ روی آن

...ت ، مشخص نیست !

کار نیروی $30N$ و کوپل مربوطه را محاسبه می کنیم:

$$u = \underbrace{+6 \times \frac{(23.57-9.85)}{180}}_{\text{کار کوپل مربوطه}} - \underbrace{\int 30 \sin\beta \, ds}_{\text{کار نیروی } 30N}$$

...ت :

$$\text{کار } M = \int M \, d\theta = M\theta$$

...ر $30 \sin\beta$ کار انجام می دهد

$$\text{کوپل } M = F \times r = 30 \times 0.2 = 6 N$$

$$s = 0.2 \cos\theta + 0.4 \cos\beta \quad ,$$

$$\frac{0.4}{\sin\theta} = \frac{0.2}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\theta = 2\sin\beta \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-4 \ldots}$$

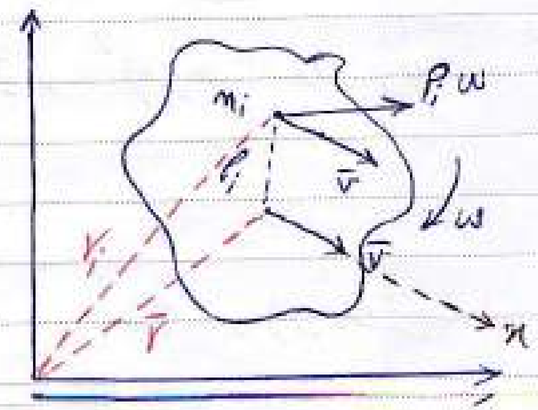
$$\Rightarrow s = 0.2\sqrt{1-4\sin^2\beta} + 0.4\cos\beta$$

Subject:
Year: ۸۸ Month: آذر Date: ۲۳

دوشنبه ۷ صبح

momentom method:

متد اندازه حرکت:



جسم مطلب هم دارای انتقال است هم دارای دوران

اندازه حرکت m_i برابر است با:

$$G_i = m_i v_i \Rightarrow G = \Sigma m_i v_i = \frac{d}{dt} \Sigma m_i r_i$$

$$= \frac{d}{dt} m\bar{r} = m\bar{v}$$

$\bar{r}$: بردار موقعیت مرکز جرم است

$$\Rightarrow \int \Sigma F \, dt = \Delta G \quad \begin{cases} \int \Sigma F_x \, dt = \Delta G_x \\ \int \Sigma F_y \, dt = \Delta G_y \end{cases}$$

حال برای اندازه حرکت زاویه‌ای داریم:

$$H_i = \rho_i \times m_i v_i = \rho_i \times m_i (\vec{\bar{v}} + \vec{\rho_i \omega})$$

ضرب خارجی

(سرعت ذره m_i را با قرار دادن دستگاه بر روی مرکز جرم می‌یابیم)

$$\Rightarrow \bar{H} = \Sigma \rho_i \times m_i (\bar{v} + \rho_i \omega)$$

داریم:

$$\Sigma \rho_i \times m_i \bar{v} = -\bar{v} \times \Sigma m_i \rho_i = -\bar{v} \times m\bar{\rho}$$

PAPCO

... فاصله مبدا تا مرکز جرم است $\Leftarrow$ $(o=\bar{G})\quad o = m\bar{\rho}\times\bar{v}$

$$\sum \rho_i \times m_i(\rho_i\omega) = \sum \rho_i^2 m_i \omega = \omega \sum m_i\rho_i^2 = \ldots$$

$$\bar{H} = \bar{I}\omega$$

...ت:

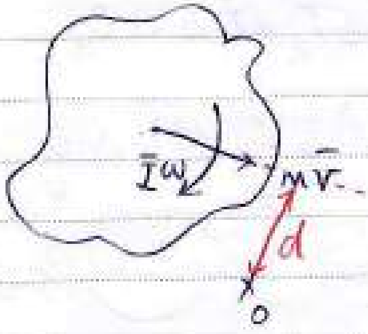
$\rho_i\omega$ بر ρ_i عمود است و $m_i\rho_i^2 = I_i$

... در حالت کلی:

$$\int \sum \bar{M}\, dt = \Delta\bar{H}$$

... فرمول محدودیت دارد چون گشتاورگیری حول مرکز جرم است

... رفع این محدودیت داریم:



$$\Rightarrow H_o = \pm\bar{I}\omega \pm m\bar{v}d$$

خطر!

در این روش جهت ها بسیار مهم هستند

... روش اندازه:

دیدیم که اندازه‌ای بود اما در این روش باید برداری باشد!

... در ادامه آن محدودیت داریم:

$$\int \sum M_G\, dt = \Delta H_G$$

ما باز خود نقطه O محدودیت دارد زیرا برای آنکه بتوانیم از این فرمول استفاده

...م ⇐

shoulde:

$$V_O = 0 \quad \text{یا} \quad V_O \parallel \bar{V}$$

اصلاً داشته باشیم:

$\bar{V} = 0$ (مرکز جرم، مرکز دوران هم باشد)

...:

در این روش، همانند سینتیک ذرات،

iR:

سیستمی متشکل از چند عضو داشته باشیم می‌توانیم، اندازه حرکت
خطی یا زاویه‌ای را برای تک تک اعضای سیستم بنویسیم یا برای کل سیستم
بنویسیم زیرا:

در نقاطی که اعضای سیستم به هم متصل هستند اندازه
حرکت خطی یا زاویه‌ای، زوج عمل و عکس العمل هستند

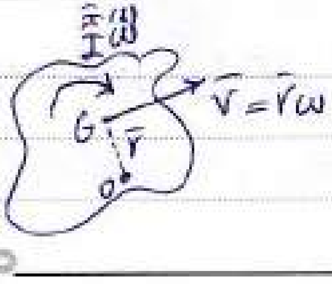
همچنین اگر در نقاط اتصال گشتاور نیز داشته باشیم (مفاصل غیر روان)

⇐ G و H را باز هم می‌توان برای تک تک اعضا نوشت یا برای کل
سیستم زیرا:

در اینجا dt یعنی زمان اثرگذاری نیرو مهم است

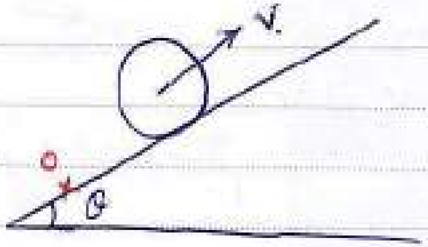
برعکس: در سینتیک انرژی، جابه‌جایی (کار نیرو) مهم بود!!

اگر مرکز آنی یا دائمی دوران داشته باشیم:



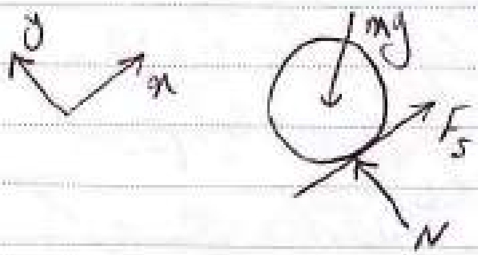
$$\Rightarrow H_O = \bar{I}\omega + m\bar{r}^2\omega \Rightarrow H_O = I_O\omega$$

example:



... را روی سطح شیبدار
... سرعت اولیه v_0 به سمت
... غلت می‌دهیم

... سرعت دیسک را برحسب
... ی از زمان بیابید (با فرض
... ستن غلتش کامل)
... م دیسک m و شعاع آن r است.



$$\Rightarrow (F_s - mg\sin\theta)t = \Delta G$$

$$\left[\Delta G = \int_0^t F_x\,dt\right]$$

... حالت داریم:

در زمان t گوی هنوز در حال بالا رفتن است

〃 در حال پایین آمدن است

... و زمان توقف را t_c بنامیم که با فرض $t > t_c$

$$(F_s - mg\sin\theta)t = -mV - mV_0 = -m(V + V_0)$$

$$(mg\sin\theta - F_s)t = m(V + V_0)$$

... دارد 2 مجهول (F_s , V) که از اندازه حرکت زاویه‌ای کمک می‌گیریم

Subject :

Year.　Month.　Date.　/ /

$$\int_0^t \Sigma M_o\,dt = \Delta H_o$$

$$\Rightarrow mg\sin\theta \times r \times t = \Delta H_o$$

$N = mg \times \cos\theta$ ⇐ گشتاور نشان حول O ، همدیگر را خنثی می‌کنند

$$\Rightarrow \quad mg\sin\theta \times r \times t = \overbrace{+\underbrace{\frac{1}{2}mr^2\omega}_{\bar{I}\omega} + \underbrace{mr\omega \times r}_{m\bar{v}d}}^{H_{o_2}}$$

$$-\left[-\frac{1}{2}mr^2\omega_0 - mr^2\omega_0\right] \qquad \left(\omega_0 = \frac{v_0}{r}\right)$$

$$\Rightarrow (g\sin\theta).t = \frac{3}{2}r\omega + \frac{3}{2}r\omega_0 \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{2}{3r}g\sin\theta \times t - \omega_0 \Rightarrow$$

if $\omega = 0 \Rightarrow \frac{2}{3r}g\sin\theta \,.\, t - \omega_0 = 0 \Rightarrow$

$$t_c = \frac{3r\omega_0}{2g\sin\theta} \Rightarrow t_c = \frac{3V_0}{2g\sin\theta}$$

از تفاوت‌ها صرف‌نظر کنیم $\frac{1}{3}$

در حالت اول: اگر $\omega > 0$ ⇐ دیسک در حال پایین آمدن است (فرض براین بود که دیسک در حال پایین آمدن است)

else: دیسک همچنان در حال بالا رفتن است (خلاف فرض)

⇒ V برحسب t یافت شد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

New example:

همان مثال قبلی، اما با فرض لغزش
در این حالت، یقیناً را هم داریم ⇐ ?? $\bar{V} = f(t)$

$$\int_0^t \Sigma M_o \, dt = \Delta H_o \Rightarrow \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 + m \bar{v} \times r$$
$$- \left[-\frac{1}{2} m r^2 \omega_0 - m \bar{v}_0 \times r \right] = mg \sin\theta \times r \times t$$

همچنین:

$$\int_0^t \Sigma F_x \, dt = \Delta G_x \Rightarrow$$

$$(\mu_k \, mg \cos\theta - mg \sin\theta) t = -mv - mv_0$$

⇐ 2 معادله و 2 مجهول (v, ω)

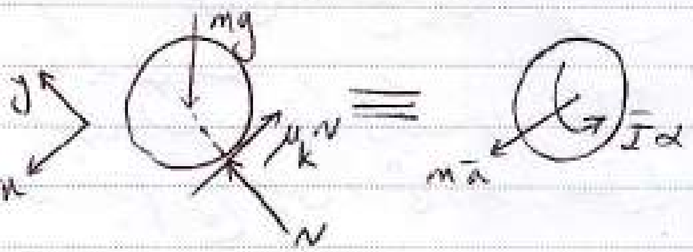
t_c: زمانی است که حرکت جسم به سمت پایین آغاز می‌شود و این حالت در زمانی اتفاق می‌افتد که:
لغزش تبدیل به غلتش بشود

$$\text{if } t > t_c \Rightarrow$$ غلتش خواهیم داشت

Subject:
Year. Month Date. ( )

New example:

آیا در مثال قبلی، در نیمه راه، لغزش به غلتش تبدیل می‌شود؟
(یعنی در ابتدا غلتش توام با لغزش داشته باشیم آیا حرکت تا ابد ادامه پیدا می‌کند؟)



$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow$

$-\mu_k mg\cos\theta + mg\sin\theta = m\bar{a}$

$\Rightarrow \bar{a} = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$

$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow \mu_k \cdot mg\cos\theta \times r = \frac{1}{2}mr^2\alpha$

(ابتدا با فرض لغزش، شروع به حل کردن مسأله کردیم)

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\mu_k g\cos\theta}{r}$$

داریم:

$\bar{v} = \bar{v}_0 + g(\sin\theta - \mu_k \cdot \cos\theta)t \qquad (v = v_0 + at)$

$\omega = \omega_0 + (\frac{2}{r}\mu_k g\cos\theta)t \qquad (\omega = \omega_0 + \alpha t)$

هر وقت این دو به هم برسند، غلتش آغاز می‌شود

$$\Rightarrow \bar{v}_0 + g(\sin\theta - \mu_k \cdot \cos\theta)t_c = r(\omega_0 + (\frac{2}{r}\mu_k g\cos\theta)t_c)$$

$$\rightarrow t_c = \frac{v_0 - r\omega_0}{g(3\mu_k \cdot \cos\theta - \sin\theta)}$$

$\rightarrow$ if $v_0 > r\omega_0 \Rightarrow 3\mu_k \cdot \cos\theta - \sin\theta > 0 \xrightarrow{\text{یا}} \mu_k > \frac{\tan\theta}{3}$

که تحت این شرایط لغزش تبدیل به غلتش می‌شود

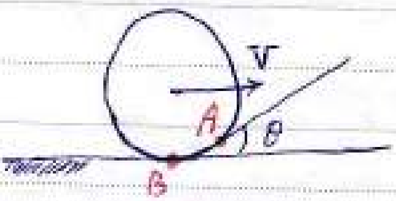
else: $\mu_k < \frac{\tan\theta}{3}$

example:

دیسکی در حال غلتش با سرعت v

است

ناگهان به سطح شیب دار



رد دیسک می شود

با فرض اینکه زمانی که دیسک وارد سطح شیب دار

می شویم هیچ پرش (تقرب قلقلی! نه هوا!!) نداشته باشیم سرعت

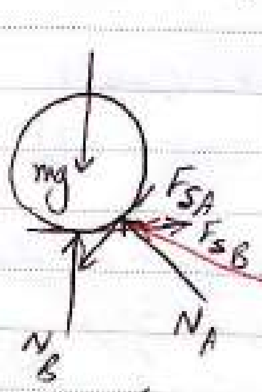
یسک را پس از ورود به سطح شیب دار بیابید:

قبل از ورود به سطح شیب دار، مرکز آنی دوران نقطه B است اما در لحظه‌ای که

وارد سطح شیب‌دار می شود با فرض اینکه نه پرش داریم نه لغزش و باد

ردن (در لحظه t-0 که بسیار کوتاه است)

$$\int_0^t \Sigma M_A \, dt = \Delta H_A$$



$Q_A = \int_0^t F_A \, dt$

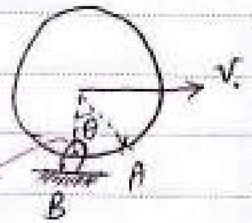
گشتاور mg و N_B حول A گشتاور معمولی است (با گشتاور وزن مقایسه

می شوند!!) که زمان نیز بسیار کوتاه است

$\rightsquigarrow \Delta H_A = 0 \Rightarrow$

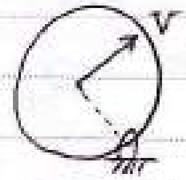
$H_{A_1} = H_{A_2} \Rightarrow$

①: در لحظه صفر



مرکز آنی دوران

②: در لحظه t



①:

$$H_{A_1} = \frac{1}{2} m r^2 \times \frac{v_0}{r} + m V_0 \times r\cos\theta$$

$\Rightarrow$

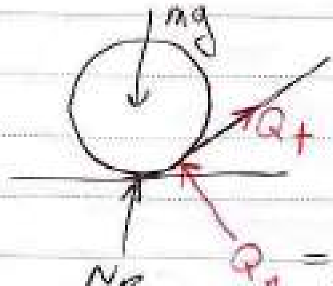
②: $$H_{A_2} = \frac{3}{2} m r^2 \omega$$

$$\omega = \frac{2}{3r}\left(\frac{1}{2}V_0 + V_0\cos\theta\right) = \frac{2V_0}{3r}\left(\frac{1}{2} + \cos\theta\right)$$

برای اطمینان از درستی مسئله، به سراغ نقطه‌ای می‌رویم که تکلیف‌اش مشخص است

که در $\theta = 0$ داریم: $\omega = \frac{V_0}{r}$ ✓

حال برای یافتن Q داریم:



$$Q_t = \int_0^t \Sigma F_t \, dt$$

$$Q_n = \int \Sigma F_n \, dt$$

$$\int \Sigma F_n \, dt = \Delta G_n \quad , \quad Q_n = G_{n_2} - G_{n_1}$$

$$\Rightarrow Q_n = 0 - (-m V_0 \sin\theta) = m V_0 \sin\theta$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ثانویه ↗ اولیه ↗

$$Q_t = \frac{2mV_0}{3}\left(\frac{1}{2} + \cos\theta\right) - mV_0 \cos\theta$$

$$\rightarrow \quad Q_t = \frac{mV_0}{3}\left[1 - \cos\theta\right]$$

$$\Rightarrow \quad Q = \sqrt{Q_t^2 + Q_n^2}$$

در طراحی ها ، Q_{max} مهم است نه Q متوسط !!

$$\frac{Q_t}{Q_n} = \frac{\int_0^t F_t \cdot dt}{\int_0^t F_n \cdot dt} \simeq \frac{F_t}{F_n} = \frac{F_s}{N} = \mu_{s_{min}}$$

← نیروی اصطکاک مورد نیاز جهت عدم لغزش و باید تامین شود

حداقل ضریب اصطکاکی که باید داشته باشیم تا

این مساله تا θ های کمتر از 90° این گونه حل می شود زیرا در θ های بزرگ، فرض عدم پس زدن، غلط است!

بعد از ظهر

دوشنبه :

مقدار اندازه حرکت :

example)

لینکی داریم که در نقطه O مفصل شده است که طول آن L و جرمش m است

حالت اولیه میله افقی است و همچنین در صفحه افقی قرار داریم . به میله گشتاور ثابت M وارد می کنیم که ω لینک را برحسب تابعی از زمان بیابید :

فرضیات :

مقاومت هوا و گشتاور در تمام لینک ناچیز است .

داریم :

$$\sum m_o \, dt = \Delta H_o$$

$$Mt = I_o \omega = \frac{1}{3} mL^2 \omega$$

گشتاور

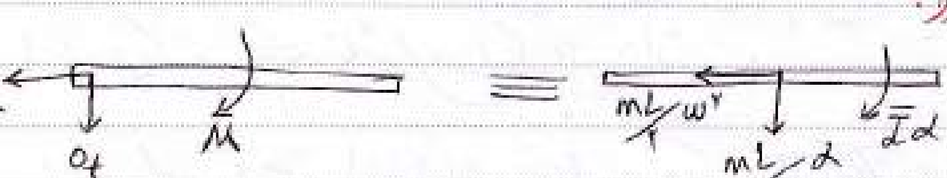
$$\Rightarrow \omega = \frac{3Mt}{mL^2}$$

جرم

$$\int \sum F_t \, dt = \Delta G_t \rightarrow \int_0^t O_t \, dt = m\bar{v} = m \times \frac{L}{2} \times \frac{3Mt}{mL^2}$$

$$O_t \cdot t = \frac{3Mt}{2L} \rightarrow O_t = \frac{3M}{2L}$$

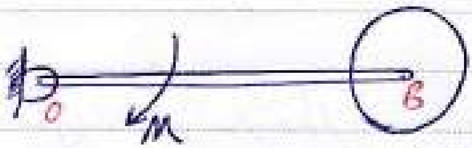
تحلیل از شکل نیرو :



New example)

به میله گشتاور M وارد می‌شود

که اگر دیسک دارای شعاع r و جرم m' باشد



میله دارای طول L و جرم m باشد

در سه حالت

۱) مفصل روان ۲) مفصل غیر روان 3) دیسک و لینک جوش شود

ω_{OB} را بیابید (در صفحه افقی مستقیم و مقاومت هوا ناچیز است)

حالت 3: در این حالت، لینک و دیسک تبدیل به یک عضو می‌شوند

$$\int \Sigma M_O \, dt = \Delta H_O \Rightarrow Mt = (I_{\text{میله حول } O} + I_{\text{دیسک حول } O})\,\omega$$

$$Mt = \left[\frac{1}{3} mL^2 + \frac{1}{2} m'r^2 + m'L^2\right]\omega_{OB}$$

حالت 1:

$$I\omega + m\bar{v}d$$

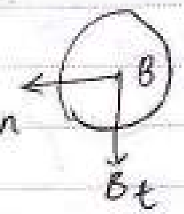
$$\int \Sigma M_O \, dt = \Delta H_O \Rightarrow$$

$$Mt = \frac{1}{3} mL^2\omega + \frac{1}{2} m'r^2\omega' + m' \times L\omega \times L$$

منظور سرعت زاویه‌ای مطلق دیسک است

اگر مفصل B روان نبود که چون گشتاور متمم آن، زوج عمل و عکس العمل ایجاد می‌کرد ⇐ تاثیر در انتگرال نداشت

۲ معادله و ۲ مجهول (ω و ω') ⇐ دیسک را به تنهایی نشان دهیم



$$\int \Sigma \bar{M}\, dt = \Delta H_B \Rightarrow 0 = \Delta H_B$$

$$H_{B_1} = H_{B_2} \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} m' r^2 \omega' \Rightarrow \omega' = 0$$

دیگر فقط انتقال دارد (دوران ندارد)

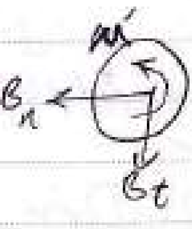
حالت 2: اگر گیر مفاصل زیاد باشد (منظور مفصل B است) ← مثل حا

از روش نیرو حداقل M' لازم برای یکپارچه حرکت کردن سیستم را می یابیم

با فرض اینکه M' کوچک است و سیستم یکپارچه عمل می کند داریم:

$$Mt = \frac{1}{3} mL^2 \omega + \frac{1}{2} m' r^2 \omega' + m'L^2 \omega$$

داریم:



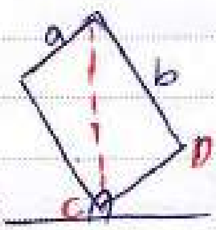
$$\int \Sigma \bar{M}\, dt = \Delta H_0$$

$$M't = \frac{1}{2} m' r^2 \omega'$$

مثال:

جعبه‌ای با ابعاد $a \times b$ داریم. قطر آن بصورت قائم است.

(1)

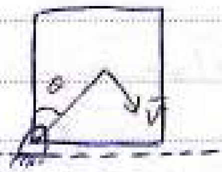


سطح مبنا

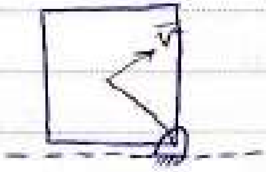
انحراف جزئی ایجاد می‌کنیم، حول c شروع به دوران می‌کند

ضریب اصطکاک در c، جهت عدم لغزش، به اندازه کافی است

داریم:



(2) لحظه قبل از برخورد گوشه D با زمین (پین نیز هم نداریم)



(3) لحظه بعد از برخورد گوشه D با زمین

← که کار کردن حول نقطه D با چه ω ای آغاز می‌شود؟

حل:

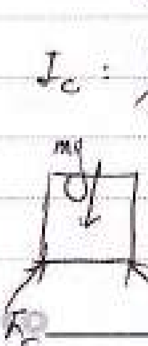
فاصله زمانی بین (2) و (3) خیلی کوتاه است.

بین (1) و (2) اتلاف انرژی نداریم (کار خارجی نداریم) پس: $E_1 = E_2$

با استفاده از نتیجه:

$$mg\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = mg\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}m(a^2+b^2)\right]\omega_2^2$$

نکته: $I_c : \frac{1}{12}(a^2+b^2)m + m(a^2+b^2)/4 = \frac{1}{3}m(a^2+b^2)$



بین (2) (3) F_D ضربه‌ای است و F_c به صفر میل می‌کند

$$F_D \Rightarrow Q = \int_0^t F_D\, dt$$

Subject:

Year: Month: Date: ( )

$$\Rightarrow \int_0^t \Sigma M_O \, dt = \Delta H_O$$

از گشتاور mg و N نیز به علت معمولی بودن آن در مقابل نیروی ضربه ای F_D صرف نظر می کنیم

$$\Delta H_O = 0 \Rightarrow H_{O_2} = H_{O_3}$$

$$-\frac{1}{12} m(a^2+b^2)\omega_2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\omega_2 \times \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \frac{b}{2} \times m$$

$$+ \frac{m\sqrt{a^2+b^2}}{2} \times \omega_2 \times \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \frac{a}{2} = -\frac{1}{3} m(a^2+b^2)\omega_3$$

$\Leftarrow$ ω_3 یافت می شود!!

$\Leftarrow$ حال می توانیم Q و همچنین $\mu_{3_{min}}$ جهت عدم لغزش در B را یابیم

$$\Rightarrow \int_0^t \Sigma F_x \, dt = \Delta G_x \Rightarrow$$

$$-Q_x = \frac{m\sqrt{a^2+b^2}}{2}\omega_3 \times \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{m\sqrt{a^2+b^2}}{2}\omega_2 \times \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\int_0^t \Sigma F_y \, dt = \Delta G_y \Rightarrow$$

$$+Q_y = \frac{m\sqrt{a^2+b^2}}{2} \times \omega_3 \times \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{-m\sqrt{a^2+b^2}}{2}\omega_2 \times \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

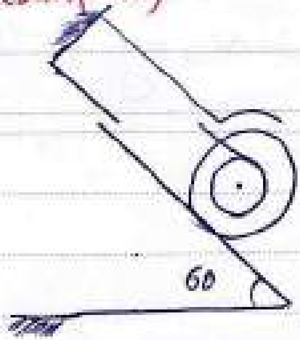
$$\Rightarrow Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}$$

داریم:

$$\frac{Q_x}{\cdots} \simeq \frac{F_x}{\cdots} = \frac{F_s}{\cdots} = \mu_s$$

Subject:
Year. Month. Date. / /

example)



$m = 5\,kg$ $r_1 = 0.1\,m$

$r_2 = 0.15\,m$

$\bar{k} = 0.11\,m$

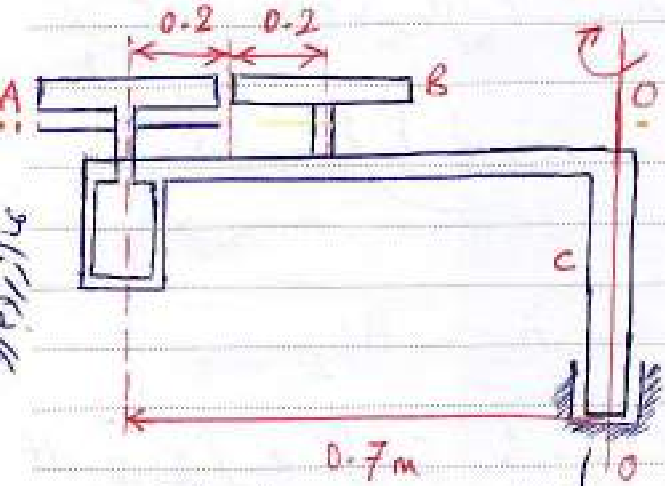
$\mu_s = 0.05$, $\mu_d = 0.04$

سرعت مرکز دیسک برحسب تابعی از زمان = ?

فرض مسئله:

طناب نسبت به قرقره لغزش ندارد.

شنبه



این یاتاقان روان است

$\bar{m}_A = 18\,kg$

$\bar{k}_A = 85\,mm$

$r_A = 0.2\,m$

$m_B = 5\,kg$

$\bar{k}_B = 0.14\,m$

$r_B = 0.2\,m$

$m_c = 24\,kg \qquad k_{oo} = 0.45$

شعاع ژیراسیون C حول oo

$\omega_{1c} = \dfrac{2\pi \times 38}{60}\ rad/s\ \,j$

$\omega_{A/C} = \dfrac{2\pi \times 1720}{60}\ rad/s$

A: شامل چرخ دنده، روتور و یک محور است

C: شامل تیر L شکل و استاتور الکتروموتور است

C حول oo می‌چرخد و الکتروموتور خاموش است (A, B نسبت به C دوران ندارند) حال:

کلید الکتروموتور را می‌زنیم. هنگامی که دور الکتروموتور به 1720 دور بر دقیقه برسد ← ω_c را در این حالت بیابید:

(دور الکتروموتور، دوری است که روتور نسبت به استاتور دارد)

Subject:
Year: Month: Date: ( )

اگر در C یا تاتاماتان غیر روان باشد، با زهم برای ما مشکلی ایجاد نمی کند
زیرا، گشتاوری را B به C و C به B وارد می کند که زوج عمل و عکس العمل هستند

$$\int \Sigma \cancel{M_0}\, dt = \Delta H_0 \Rightarrow H_{0_1} = H_{0_2}$$

ΣM_0 را صفر است زیرا، یاتاقان اصلی را روان فرض کردیم و از مقاومت هوا صرف نظر کردیم!!

نکته:
گشتاوری که روتور به استاتور وارد می کند و بر عکس، استاتور به روتور وارد می کند، زوج عمل و عکس العمل هستند که دارای چرخش یکسان نیستند
که کار آنها همدیگر را خنثی نمی کند $\Leftarrow E_1 \neq E_2$

حال ادامه مسئله:

$H_{0_1} = I_{00} \cdot \omega \leftarrow$ چون سیستم یکپارچه عمل می کند

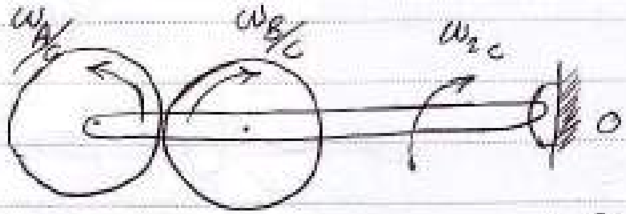
$$\rightarrow H_{0_1} = \pi\big(\underbrace{24 \times 0.45^2}_{\bar{I}_{C_{00}}} + \underbrace{5 \times 0.14^2 + 5 \times 0.3^2}_{\bar{I}_{B_{00}}} + \underbrace{18(0.085^2 + \dots}_{I_{A_{00}}}$$

با فرض اینکه جهت ω_c عوض نشود داریم:

$H_0 = 24 \times 0.45^2\, \omega \quad + \quad \bar{I}\omega + m\bar{v}d$

Subject:
Year: Month: Date: ( )

تمارین ۸۱ :



$\omega_{A/C} = \omega_{B/C}$ ⇐ چون بین دو دیسک غلتش داریم و شعاع دو دیسک برابر است

$$\ldots + \bar{I}\omega = \underbrace{5\times0.14^2(57\pi+\omega_{2c}) + 5\times0.3\,\omega_{2c}\times0.3}_{H_{O_B}}$$

$$H_{O_A} = \bar{I}\omega + m\bar{v}d$$

$$H_{O_A} = 18\times0.085^2(\omega_{2c}-57\pi) + 18\times0.7^2\,\omega_{2c}$$

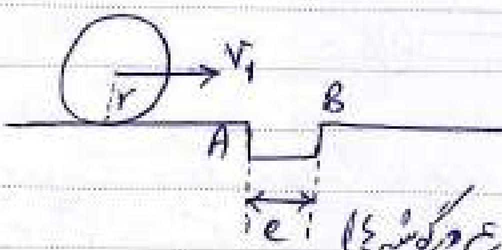
$$\longrightarrow H_{O_2} = 24\times0.45^2\,\omega_{2c} + H_{O_A} + H_{O_B}$$

⟶ معادله را حل ⇐ ω_{2c} یافت می‌شود.

۴. هندسه شکل تغییر کند (زمان کوتاه نباشد) ←

important)

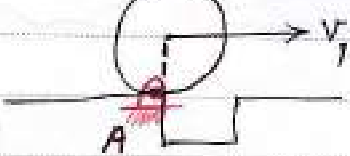
(example



دیسک که در حال غلتش است سمت
به چاله‌ای می‌رسد (دیسک کاملاً صلب)

مسأله را تجزیه و تحلیل کنید (لغزش نداریم و در گوشه‌ها)
v_4 را بیابید! (پرش هم نداریم)

1:



در وضعیت 1، دیسک حول o
می‌چرخد!

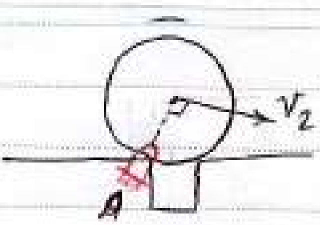
$t_2 - t_1$ ، زمان قابل توجه

$t_3 - t_2$ زمان بسیار کوچک

$t_4 - t_3$ زمان قابل توجه

زمان‌ها نسبت به هم سنجیده می‌شوند

2:

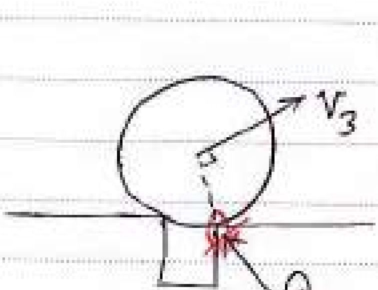


در وضعیت 2، دیسک مماس بر گوشه
دوم است (B).

بین ① و ② اتلاف کننده انرژی نداریم

$\Rightarrow E_1 = E_2$ → v_2 یافت می‌شود

3:

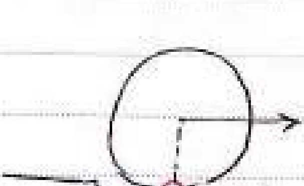


بین ② و ③، چون به مرور زمان N_A
کاهش و N_B افزایش می‌یابد ⇐
در B ضربه خواهیم داشت

$$\Rightarrow \int \sum M_B \, dt = \Delta H_B$$

0 ← زمان بسیار کوتاه است

4:



$\Rightarrow H_{o_2} = H_{o_3} \Rightarrow$ v_3 یافت می‌شود

یکشنبه :

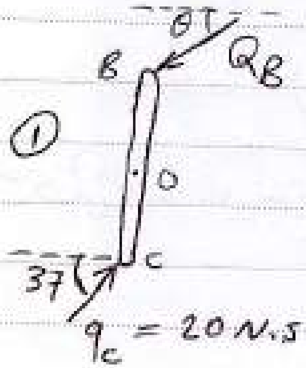
example)

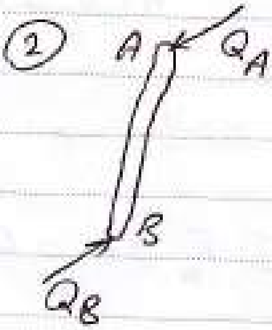
ω هر کدام از لینک ها پس از بدست

وارد شدن ضربه ($m = 4kg$) زمان بسیار کوتاه (0_t)

حل :

⇒





$q = \int F \, dt = 20 N.s$

حال داریم ،

① $\int_0^t \Sigma M_B \, dt = \Delta H_B$

* وقتی ضربه را به وارد می کنیم یک α نامحدود در لینک ها ایجاد می شود چون زمان بسیار کوتاه است ⇐ ω محدود است ⇐ این ω نمی تواند θ به ما بدهد ⇐ هندسه شکل تغییر نمی کند (طی زمان 0_t)

(چرخش میله ها تنها تحت تأثیر ω است نه α)

پس :

با قرار دادن دستگاه بر روی B داریم :

$\bar{V}_{Bc} = V_B + \omega_{Bc} \times r_{OB}$ ⇒ چون میله نیم‌خیده است ⇐ V_B در راستا زاست

همچنین $\omega \times r$ نیز در راستا زاست ⇐ $\bar{v}$ در راستا زاست.

Subject:
Year: Month: Date: ( )

$\Rightarrow \int_0^t \Sigma M_B \, dt = \Delta H_B$ ✓ برقرار است!!

$+20\cos 37 \times 1.2 = \frac{1}{12} \times 4 \times (1.2)^2 \omega_{BC} +$

$4(v_B + 0.6\,\omega_{BC}) \times 0.6$ → 1 معادله 2 مجهول

help me!! → حال از اندازه حرکت خطی کمک می‌گیریم

$\int \Sigma F_x \, dt = \Delta G_x \Rightarrow$

$20\cos 37 - Q_{B_x} = 4(v_B + 0.6\,\omega_{BC})$

2: $\int_0^t \Sigma M_A \, dt = \Delta H_A \Rightarrow$

$Q_{B_x} \times 1.2 = \frac{1}{3} \times 4 \times 1.2^2 \times \frac{v_B}{1.2}$

⇐ 3 معادله 3 مجهول (ω_{BC}, Q_{B_x}, v_B)

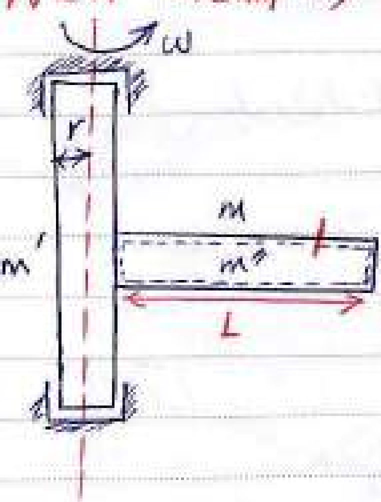
همچنین با خرج کردن معادله بعد ($\int_0^t \Sigma F_x \, dt = \Delta G_x$) می‌توانیم Q_{A_x} را نیز بدست آوریم که اگر این کار را انجام دهیم خواهیم دید که:

$Q_{C_x} > Q_{B_x} > Q_{A_x}$

همچنین:

1 $\Sigma F_y \, dt = \Delta G_y \Longrightarrow (\Delta G_y = 0)\ \Sigma F_y \, dt = 0$

New example)



پین مانع حرکت لوله با جرم "m داخل لوله m می باشد!

به یکباره پین می شکند و حال اگر میله به اندازه $\frac{L}{2}$ از داخل لوله بیرون بیاید

⟵ سرعت نسبی که میله نسبت به لوله دارد و همچنین ω میله را بیابید.

فرضیات مسئله: یاتاقان ها روان هستند و مقاومت هوا ناچیز است

solve:

$$\int \Sigma M_o \, dt = \Delta H_o$$

$$\Delta H_o = 0 \Leftarrow \int \Sigma M_o \, dt = 0$$ ⟸ با توجه به فرضیات مسئله

$$\rightarrow H_{o_1} = H_{o_2} \Rightarrow$$ (۱: حالتی است که پین می شکند)

$$\rightarrow \frac{1}{2} m' r^2 \omega_0 + \left(\frac{1}{12} m L^2 + m\left(\frac{L}{2}+r\right)^2\right)\omega_0 +$$

$$\left(\frac{1}{12} m'' L^2 + m''\left(\frac{L}{2}+r\right)^2\right)\omega_0 = H_{o_1}$$

$$H_{o_2} = \frac{1}{2} m' r^2 \omega + \left(\frac{1}{12} m L^2 + m\left(\frac{L}{2}+r\right)^2\right)\omega +$$

$$\frac{1}{12} m'' L^2 \omega + \underbrace{m''(L+r)\omega \times (L+r)}_{m'' \bar{v} d}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{rel} + \overrightarrow{(L+r)\omega}$$

$\Rightarrow H_{O_1} = H_{O_2} \Rightarrow$ ω به دست می‌آید

چون بین میله و لوله اصطکاک وجود ندارد $\Leftarrow E_1 = E_2$

$\Leftarrow$ v_{rel} به دست می‌آید

if: بین میله و لوله اصطکاک وجود داشته باشد:

$\Rightarrow E_1 \neq E_2$

امّا:

همچنان: $H_{O_1} = H_{O_2}$ زیرا

نیروی اصطکاک بین لوله و میله زوج عمل و عکس العمل هستند $\Leftarrow$ گشتاورشان
حول O همدیگر را خنثی می‌کنند

حال برای محاسبه v_{rel} داریم:

$$E_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m' r^2\right)\omega_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m L^2 + m\left(r+\frac{L}{2}\right)^2\right)\omega_1^2$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m'' L^2 + m''\left(r+\frac{L}{2}\right)^2\right)\omega_1^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m' r^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m L^2 + m\left(r+\frac{L}{2}\right)^2\right)\omega^2$$

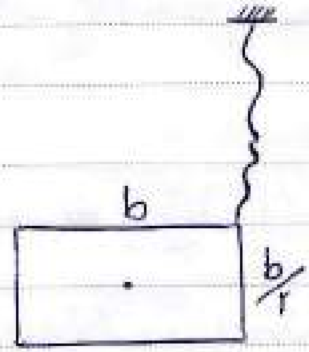
$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m'' L^2\right)\omega^2}_{\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2} + \underbrace{\frac{1}{2} m''\left(v_{rel}^2 + ((L+r)\omega)^2\right)}_{\frac{1}{2} m \bar{v}^2}$$

$$\bar{v}^2 = v_{rel}^2 + ((L+r)\omega)^2$$

$\rightsquigarrow E_1 = E_2 \rightarrow$ v_{rel} یافت می‌شود

نکته: اگر یاتاقان‌ها غیر روان باشند اما گشتاور مقاوم ثابتی داشته باشد

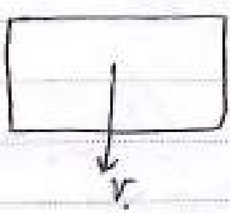
مثال:

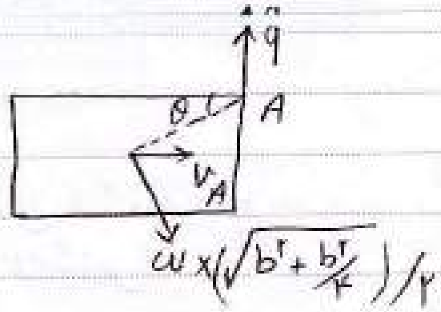


جرم جعبه m است و در ابتدا
طناب شل است

سرعت مرکز جعبه پس از اینکه طناب کاملاً
سفت شد؟
(پس زنش هم نداریم)

①





$\bar{V} = V_A + \omega \times r$

چون پس زنش نداریم ← سرعت نقطه A عمود بر طناب است چون جعبه
پس از سفت شدن طناب با فرض عدم پس زنش، حول نقطه A می‌چرخد

حال داریم:

$$\int_0^t \sum F_x \, dt = \Delta G_x \Rightarrow \left(\sin\theta = \frac{b}{2\sqrt{b^2+\frac{b^2}{4}}}\right)$$

$$0 = m\left(V_A + \omega b \times \frac{\sqrt{1.25}}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{1.25}}\right) \Rightarrow V_A = -\frac{\omega b}{4}$$

حال 2 مجهول داریم و ۱ معادله!!

$$\int_0^t \sum F_y \, dt = \Delta G_y$$

نیروی وزن در مقابل q ، ضربه‌ای است

$$\Rightarrow q = m\left(-\frac{\omega b\sqrt{1.25}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1.25}} + V_0\right) \Rightarrow q = m\left(V_0 - \frac{\omega b}{2}\right)$$

$$\int \sum \bar{M}\, dt = \Delta \bar{H} \Rightarrow q \times \frac{b}{2} = \frac{1}{12} m \left(b^2 + \frac{b^2}{4}\right) \omega - 0$$

در لحظه اول، دوران نداریم (فقط انتقال داریم) ⇐ ω صفر است

$$\Rightarrow q = \frac{1}{6} m \times 1.25 \times b\omega \Rightarrow$$

3 معادله و 3 مجهول ⇐ v_A یافت می‌شود.

جهت v_A پس از اینکه ⇐ پیش زنش داشته باشیم if:
طناب سفت شد نیز علاوه بر اندازه‌اش نامشخص است

یک مجهول دیگر به معادلات ما اضافه خواهد شد ⇐ 3 معادله و 4 مجهول

در ادامه حل این مسأله داریم:

$$\ldots\ldots \Rightarrow \omega = \frac{V_0}{0.7b}, \quad V_A = -0.35 V_0$$

$$\bar{v} = \left(-0.35V_0 + \frac{V_0}{4 \times 0.7}\right) i - \frac{V_0}{1.4} j = \frac{-V_0}{1.4} j$$

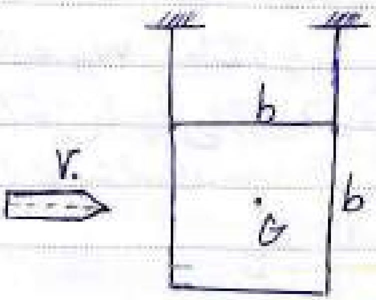
$$\Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} m V_0^2, \quad E_2 = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m \frac{V_0^2}{1.96} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m \left(b^2 + \frac{b^2}{4}\right)\right) \frac{V_0^2}{b^2 \times 0.49}$$

$$E_2 = 0.36 m V_0^2 \Rightarrow E_1 \neq E_2$$

Subject:
Year. Month. Date: ( )

example) good!!



گلوله‌ای با جرم m و با سرعت اولیه V_0

به جعبه‌ای با ابعاد $b \times b$ و جرم M

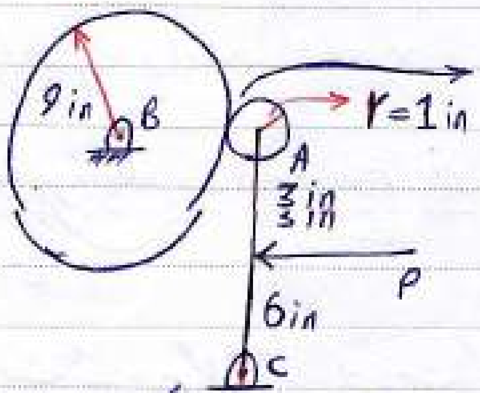
برخورد می‌کند

که سرعت مرکز جرم گلوله پس از برخورد گلوله

بیابید:

زمان برخورد گلوله با جعبه بسیار کوتاه است به صورتی که شکل تغییر نمی‌کند

~ New example ~



$\mu_K = 0.2$

$W_B = 50\,Lb$, $W_A = 10$

[illegible] چرخ‌ها صلب هستند و مقاومت هوا ناچیز است.

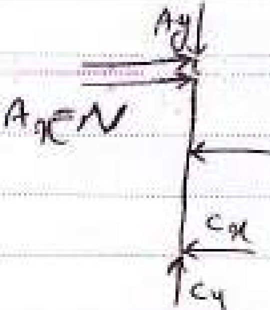
$P = 10\,Lb$

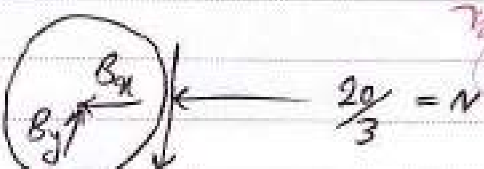
(الکتروموتور به A متصل است) ثابت است $\omega_A = \frac{1200 \times 2\pi}{60} = 40\pi \ rad/s$

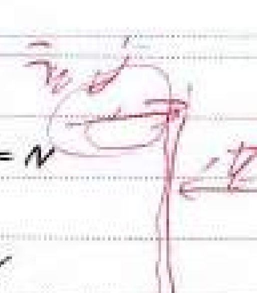
در ابتدا 2 دیسک باهم تماس ندارند ⇐ با اعمال نیروی P ، دو دیسک را به هم تماس می دهیم ⇐ مساله را تجزیه و تحلیل کنید!! (هر چیزی رو که می توانید بدست بیاورید)

در ابتدا:

لغزش داریم و سپس با افزایش ω_B ⇐ لغزش به غلتش تبدیل می شود و دو دیسک با سرعت ثابت نسبت به هم خواهند چرخید:







$F_s = 0.2 \times \frac{20}{3}$

$N \times 9 = 10 \times 6 \Rightarrow N = \frac{20}{3} \Leftarrow \Sigma M_c = 10 \times 6$

پس از 10 s ، سرعت زاویه ای دیسک بزرگ را بیابید:

Subject:

Year. Month. Date. ( )

اینجا زمانِ تبدیل لغزش به غلتش را می‌یابیم ⇐

if: $t_c < 10$ $\Rightarrow$ ω دیسک بزرگ، ω ای است که غلتش داریم

else: ⇝ باید محاسبه کنیم!! (hard!)

$$\Rightarrow \int_0^t \Sigma M_B \, dt = \Delta H_B \Rightarrow$$

$$\left(\frac{4}{3} \times \frac{9}{12}\right) t = \frac{1}{2} \times \frac{50}{32.2} \times \left(\frac{9}{12}\right)^2 \omega_2 \qquad (1)$$

وقتی لغزش تبدیل به غلتش می‌شود ⇐ ω تغییر نخواهد کرد ⇐

f_s باید صفر شود زیرا شتاب زاویه‌ای مان صفر خواهد شد!

البته اگر حالت ایده‌آل را در نظر نگیریم (یاتاقان‌ها روان و مقاومت هوا ناچیز!)

که حتی اگر لغزش به غلتش تبدیل شود باز هم f_s خواهیم داشت

یعنی به طور کلی:

f_s مرتبط با گیر سیستم است (پس از لغزش)

f_s در غلتش می‌تواند بین

0 و $f_{s_{max}}$ تغییر کند. ok!!

در لحظه‌ای که غلتش آغاز خواهد شد ⇐ $\omega_1 = \omega_2$

$$\Rightarrow \quad r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{1200 \times 2\pi}{60 \times 9}$$

$$\rightsquigarrow \left(\frac{4}{3} \times \frac{9}{12}\right) t_c = \frac{1}{2} \times \frac{50}{32.2} \times \left(\frac{9}{12}\right)^2 \times \frac{1200 \times 2\pi}{60 \times 90}$$

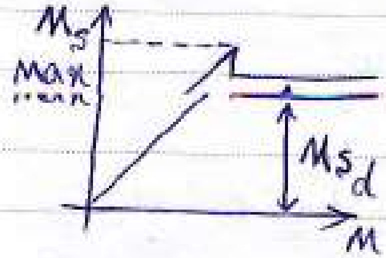
$1200 \times 2\pi$

if $t < t_c \Rightarrow$ زمان را مستقیماً در معادله 1 گذاشته ، ω را محاسبه می‌کنیم

good example)

حال در ادامه همان مثال، اگر مفصل B غیر روان باشد ⇐ مسئله را تحلیل کنید!

نمودار گشتاور مقاوم مفصل B ⟵



$$\Sigma M_B = M \Rightarrow F_s \cdot r = M$$

$$M = \frac{4}{3} \times \frac{9}{12} = 1 \ \text{Lb.Ft}$$

if $M > M_s \Rightarrow$ دیسک بزرگ خواهد چرخید

else, دیسک بزرگ نخواهد چرخید

⇐ با در نظر گرفتن: $M_{s_d} = 0.7$, $M_{s_{max}} = 0.8$ جلو می‌رویم!!

$$\int_0^t \Sigma M_B \, dt = \Delta H_B \Rightarrow$$

$$\left(\frac{4}{3} \times \frac{9}{12} - 0.7\right) t = \frac{1}{2}\left(\frac{50}{32.2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 \omega_2$$

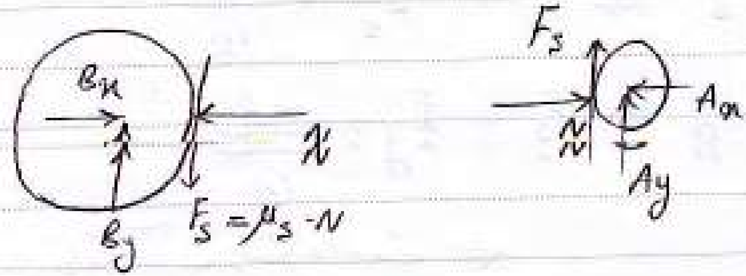
Subject:
Year: Month: Date: / /

WOW example) ⇒ اگر $\mu_s \to 0$ ⇐ مساله گولاخ می‌شود!!

$2|\mu_s$

حال اگر در همان مثال اول، اگر ω_A ثابت نباشد (الکتروموتور به A متصل نباشد)
که با تجزیه و تحلیل مساله، هر چیزی را که می‌توانید (تا پتانسیل اش را دارید!!) بیابید:

ω_A ثابت نیست ⇐ ω_A قبل از برخورد دو دیسک با هم، همان ω_A ای است
که در مثال به ما داده‌اند



$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow N = \frac{20}{3}$$

حال:

$$\int_0^t \Sigma M_A \, dt = \Delta H_A \Rightarrow$$

$$\left(\frac{4}{3}\times\frac{1}{12}\right)t = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{32.2}\right)\left(\frac{1}{12}\right)^2 \omega_A + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{32.2}\right)\left(\frac{1}{12}\right)^2 \times 40\pi$$

همچنین:

$$\int_0^t \Sigma M_B \, dt = \Delta H_B \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\times\frac{1}{12}\right)t = \frac{1}{2}\left(\frac{50}{32.2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 \omega_B$$

حال اگر بخواهیم t_c را پیدا کنیم داریم:

$$1\times\omega_A = 9\times\omega_B \rightsquigarrow$$

t_c پیدا می‌شود!!

question)

چرا وقتی غلتش آغاز می‌شود، $F_s = 0$

زیرا:

$$F_s \times r_B = \bar{I}_B \alpha_B \Rightarrow F_s = \bar{I}_B \times \frac{\alpha_B}{r_B}$$

$$F_s \times r_A = \bar{I}_A \alpha_A \Rightarrow F_s = \bar{I}_A \times \frac{\alpha_A}{r_A}$$

چون غلتش آغاز شده است ⇐ $r_A \alpha_A = r_B \alpha_B$

$$\rightsquigarrow \bar{I}_B \frac{r_A \alpha_A}{r_B^2} = \bar{I}_A \frac{\alpha_A}{r_A} \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{I}_B}{\bar{I}_A} = \frac{r_B^2}{r_A^2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} m_B r_B^2}{\frac{1}{2} m_A r_A^2} \Rightarrow m_B = m_A$$

لزومی ندارد که $m_B = m_A$ ⇐

F_s باید صفر باشد

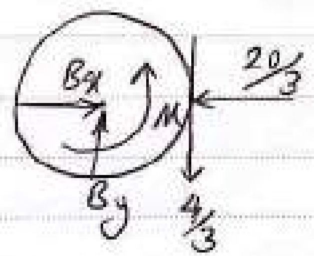
تذکر: در مهندسی، بررسی نقطه با لحاظ شرایط خاص، دلیلی برای حل مسأله نیست

top example)

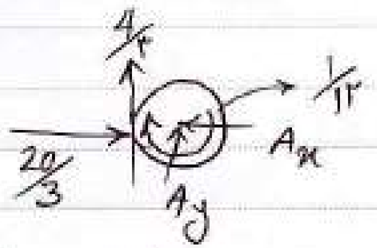
دوباره همان مثال !

اگر در مفاصل A و B گشتاور مقاوم وجود داشته باشد (غیر روان باشند) ← زمان توقف سیستم را بیابید (آیا ۲ دیسک باهم متوقف می شوند؟)

B:



A:



$M_{sd_A} = 1/12$

Solve:

Ⓑ: $\int_0^t \Sigma M_B \, dt = \Delta H_B \Rightarrow$

$$\left(\frac{4}{3} \times \frac{9}{12} - 0.7\right) t = \frac{1}{2}\left(\frac{50}{32.2}\right)\left(\frac{9}{12}\right)^2 \omega_B$$

Ⓐ: $\int_0^t \Sigma M_A \, dt = \Delta H_A \Rightarrow$

$$\left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right) t = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{10}{32.2}\right)\left(\frac{1}{12}\right)^2 \omega_A + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{32.2}\right)\left(\frac{1}{12}\right)^2 \times 40\pi$$

با فرض تبدیل لغزش به غلتش ←

$1 \times \omega_A = 9\,\omega_B$

Subject:
Year: Month: Date: ( )

else: تا هم متوقف خواهند شد!

حال این زمان توقف را چگونه بیابیم؟؟

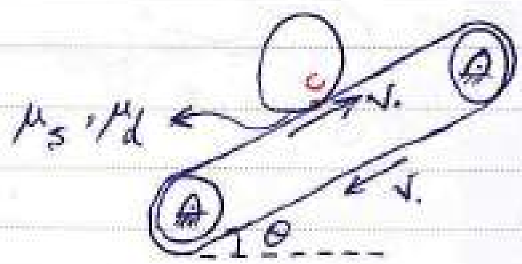
Subject :
Year . ۸۸ Month . ۹ Date . ۳۰

13-16 بعد از ظهر

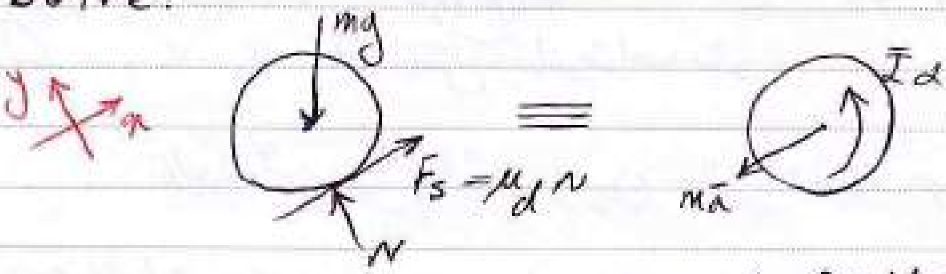
دوشنبه :

مثال :

دیسکی به جرم و شعاع : m , r
بر روی تسمه نقاله ای قرار گرفته است
که تسمه با سرعت ثابت می چرخد
← بررسی حرکت دیسک :



solve:



قطعاً در ابتدا لغزش داریم چون در ابتدا سرعت دیسک صفر است اما سرعت تسمه V_0 است اما از لحظه ای که سرعت دیسک برابر V_0 شود بی لغزش خواهیم داشت

با فرض لغزش :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow \mu_d \times mg\cos\theta - mg\sin\theta = -m\bar{a}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{a} = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)$$

$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \rightarrow \mu_d\, mg\cos\theta \times r = \tfrac{1}{2} m r^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = (2\mu_d\, g\cos\theta)/r$$

$$V_c = \bar{V} + \omega \times r$$

با فرض $\sin\theta > \mu_d \cos\theta$:

$$V_c = -\bar{V} + r\omega$$

چون شتاب مرکز دیسک ثابت است ($\bar{a} = ect$ ، $\alpha = ect$) $\Leftarrow$ $\bar{V} = \bar{a}t \,,\; \omega = \alpha t$

$$V_c = -g(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)t + 2\mu_d g\cos\theta \cdot t$$

$$\rightsquigarrow V_c = gt(3\mu_d \cos\theta - \sin\theta)$$

if: $V_c > 0 \Rightarrow$ این حرکت (لغزش) تا زمانی ادامه پیدا می‌کند تا اینکه $V_c = V_0$ $\Leftarrow$ غلتش آغاز خواهد شد

else:

تا ابد لغزش خواهیم داشت (چون V_c و V_0 خلاف جهت هم هستند)

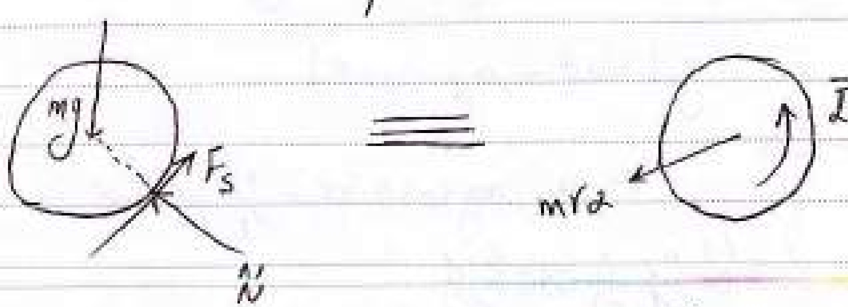
$\Leftarrow$ با افزایش زمان V_c همان طور افزایش خواهد یافت (غلتش نداریم)

حال در حالت if ، زمانی که لغزش به غلتش تبدیل می‌شود (ما می‌خواهیم این گونه شود)

$$V_c = V_0 \rightsquigarrow t_c = \frac{V_0}{g(3\mu_d \cos\theta - \sin\theta)}$$

$\Rightarrow 3\mu_d \cos\theta > \sin\theta$

حال زمان بعد از t_c را بررسی می‌کنیم.



$$\sum F = m\bar{a} \Rightarrow F_s - mg\sin\theta = -mr\alpha \Rightarrow F_s = -mr\alpha + mg\sin\theta$$

3: لحظه آغاز غلتش داریم

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow F_s \cdot r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha \Rightarrow F_s = \frac{1}{2} m r \alpha$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} r\alpha = -r\alpha + g\sin\theta \Rightarrow \frac{3}{2} r\alpha = g\sin\theta \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3r} g\sin\theta$$

$$\rightarrow F_s = \frac{1}{2} m \times \frac{2}{3} g\sin\theta \Rightarrow F_s = \frac{mg}{3}\sin\theta$$

حال سرعت مرکز دیسک را در لحظه ابتدای غلتش (لحظه آخر لغزش) را می‌یابیم

$$\bar{v} = r\omega - v_c = r\omega - v_0 \,, \quad \omega = \alpha t_c \,, \quad \alpha = \frac{2\mu_d g\cos\theta}{r}$$

$$\rightarrow \bar{v}_2 = v_0\left(-1 + \frac{2\mu_d\cos\theta}{3\mu_d\cos\theta - \sin\theta}\right)$$

حال $\bar{v}$ را در موقعیت 3 می‌یابیم.

$$\bar{v}_3 = v_0 + r\omega \,, \quad \omega = \omega_2 + \alpha t \rightarrow \bar{v}_3 = v_0 + (\omega_2 + \alpha t) r$$

نیروی اصطکاک بین 1-2 و 2-3 با هم کاملاً متفاوت است.

۵۲) حل تمرین: مثال را دوباره حل کنید: ⟸ 12/ صفحه ۸۸ جزوه

$$\Rightarrow N = mg\cos\theta \ ,$$

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow \mu_d \cdot mg\cos\theta - mg\sin\theta = -m\bar{a}$$

$$\rightarrow \bar{a} = g(\sin\theta - \mu_d \cos\theta) \qquad \text{بافرض: } \sin\theta > \mu_d \cos\theta$$

$$\Sigma \bar{M} = I\alpha \Rightarrow \mu_d \cdot mg\cos\theta \times r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{2\mu_d \cdot g\cos\theta}{r}$$

حال در پایان لغزش:

$$V_c = \bar{V} + \omega \times r \Rightarrow V_c = g(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)t + (2\mu_d \, g\cos\theta)t$$

$$V_c = at + V_0 \Rightarrow V_c = gt(-\sin\theta + 3\mu_d \cos\theta)$$

بافرض : $3\mu_d \cos\theta > \sin\theta$

if $V_c = V_0$ $\rightarrow$ غلتش آغاز می‌شود

else: هیچگاه غلتش آغاز نخواهد شد

$$\Rightarrow V_0 = V_c \Rightarrow \underset{\text{criticle}}{t_c} = \frac{V_0}{g(3\mu_d \cos\theta - \sin\theta)}$$

1 لغزش داریم 2 غلتش آغازی 3 غلتش داریم

$$\Rightarrow \omega_2 = \alpha t_c = \frac{2\mu_d \, g\cos\theta}{r} \times \frac{V_0}{g(3\mu_d \cos\theta - \sin\theta)}$$

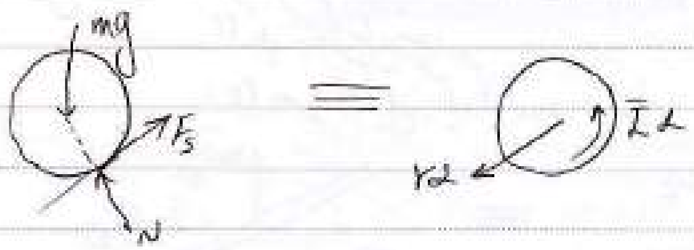
$$(\omega_2 = \alpha t + \omega_1) \Rightarrow \omega_2 = \frac{2V_0}{(3 \ \ \tan\theta \ \ )}$$

$$\bar{V}_2 = \bar{a}t + \cancel{\bar{V}_1} \Rightarrow \bar{V}_2 = g(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)\frac{V_0}{g(3\mu_d\cos\theta - \sin\theta)}$$

$$\rightarrow \bar{V}_2 = V_0 \frac{\sin\theta - \mu_d\cos\theta}{3\mu_d\cos\theta - \sin\theta} \Rightarrow \bar{V}_2 = V_0 \frac{\tan\theta - \mu_d}{3\mu_d - \tan\theta}$$

که چون $\bar{a}$ به سمت پایین بدست آمد ← $\bar{V}_2$ هم به سمت پایین است.

حال وضعیت 3



$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow F_s - mg\sin\theta = -mr\alpha$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow F_s \cdot r = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mr\alpha - mg\sin\theta = -mr\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2}r\alpha = g\sin\theta \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3r}g\sin\theta$$

$$\Rightarrow \omega_3 = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \omega_3 = \frac{2V_0}{r\left(3 - \frac{\tan\theta}{\mu_d}\right)} + \frac{2}{3r}g\sin\theta \cdot t$$

$$\Rightarrow \bar{V}_3 = V_0 - r\omega_3 \rightarrow \bar{V}_3 = V_0 - \left(\frac{2V_0}{3 - \frac{\tan\theta}{\mu_d}}\right) - \frac{2}{3}g\sin\theta \times t$$

Subject:
Year: Month: Date: ( )

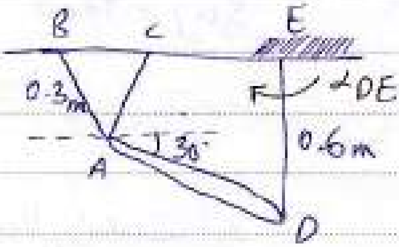
example)

میله توسط 3 کابل مهار شده است. طول میله $1.2m$ ، $m=12kg$

⇐ یکی از 3 کابل را به دلخواه پاره می‌کنیم

وضعیت حرکت پس از پاره شدن یکی از کابل‌ها

(بعد پاره شدن دو کابل دیگر سفت است)

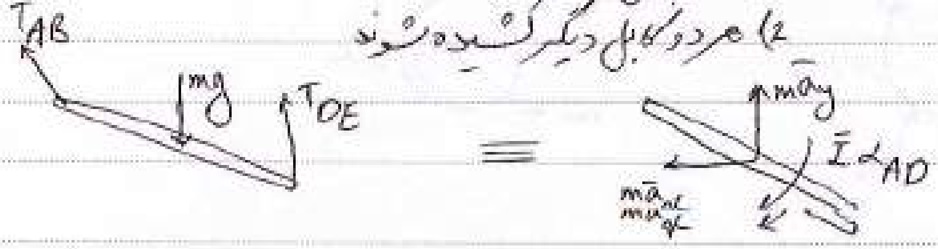


کابل AC را پاره می‌کنیم.

2 فرض محتمل است:

1) یک کابل شل شود

2) هر دو کابل دیگر کشیده شوند



⇐ 3 معادله و 5 مجهول

$$\bar{a} = a_{A_t} + \dot{\omega} \times r \Rightarrow$$

$$\bar{a} = 0.3\,\alpha_{AB}(-\cos 30\, i - \sin 30\, j) + 0.6\,\alpha_{AD}(-\sin 30\, i - \cos 30\, j)$$

$$\bar{a}_x i + \bar{a}_y j = -0.6\,\alpha_{DE}\, i + 0.6\,\alpha_{AD}(\sin 30\, i + \cos 30\, j)$$

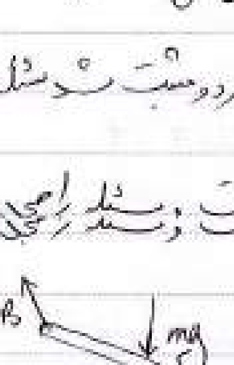
⇐ 7 معادله و 7 مجهول

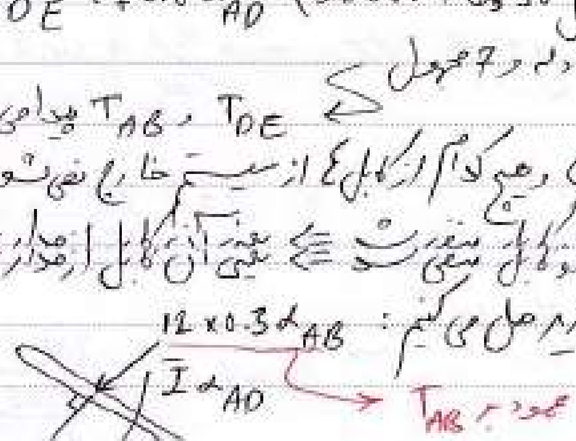
T_{DE} و T_{AB} پیدا می‌شود ⇐ اگر هر دو مثبت شدند مسئله

تمام است و هیچ کدام از کابل‌ها از سیستم خارج نمی‌شود

اما اگر یکی از دو کابل منفی شد ⇐ یعنی آن کابل از مدار خارج شده است و مسئله را مجدداً

به صورت زیر حل می‌کنیم:



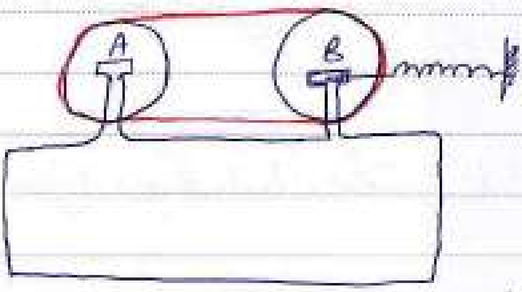


Subject:
Year. Month. محرم Date. 12

صبح 7-10

example)

تسمه و چرخ خودشان مطلوب است
2 پولی دیگر تسمه دو دیسک یکنواخت
که وزن آن‌ها معلوم است توسط یک
فنر کشش اولیه در تسمه‌ها ایجاد می‌شود



$W_A = W_B = 30\ Lb$

فنر $F = 15\ Lb$ $\quad r = 1.5\ ft$

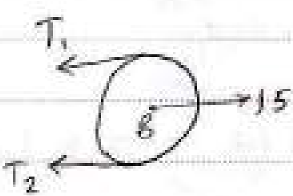
گشتاور $M_A = 20\ Lb.ft$

$\Rightarrow \begin{cases} t = ? \\ \omega = 600\ rpm \end{cases}$ ← دور سیستم

کشش در دو طرف تسمه $\begin{cases} T_1 = ? \\ T_2 = ? \end{cases}$

فرض: جرم تسمه ناچیز است؛

/solve/.



$\Rightarrow \Sigma M_B = 0 \Rightarrow T_1 r - T_2 r = 0$

$\Rightarrow T_1 = T_2 = T$

$\Rightarrow 15 = 2T \Rightarrow T = 7.5$

حال دستگاه را روشن می‌کنیم (الکتروموتور در A می‌باشد):

$\Sigma M_A = M + T_2 r - T_1 r = 0$

* اگر دور ثابت باشد در نهایت $\alpha = 0$ می‌شود و عبارت $I\alpha$ برابر صفر خواهد شد

$\Rightarrow$

$M = (T_1 - T_2) r$ ⟵ زمانی صحیح است که دور ثابت باشد

* هر چه M بیشتر ⇐ $T_1 - T_2$ بیشتر می‌شود یعنی T_1 همین طور بیشتر از T_2 می‌شود
تقریباً شبیه به زنجیر در چرخه، که البته حالت خوبی نیست چون امکان در رفتن وجود دارد

و سیستم از کار می‌افتد.

ولی در اینجا به دنبال شرایطی می‌گردیم که دور ثابت شده، یعنی

$$M + T_2 r - T_1 r = \bar{I}\alpha$$

← دیدگاه نیرو

حال از دیدگاه اندازه حرکت، مسئله را بررسی می‌کنیم:

$$\int_0^t \Sigma M_A \, dt = \Delta H_A$$

$$\Rightarrow (M + T_2 r - T_1 r)\, t = H_{2A} - \cancel{H_{1A}}^{\,0}$$

در سیستم انگلیسی هیچ گاه جرم را نمی‌دهند

$$(M + T_2 r - T_1 r)\, t = H_{2A} \quad , \quad H_{2A} = \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{30}{32.2}}_{m_A} \times \underbrace{(1.5)^2}_{r} \times \underbrace{\left(\frac{2\pi \times 600}{60}\right)}_{\omega}$$

$$\Rightarrow \left(20 + 1.5(T_2 - T_1)\right) t = \frac{15}{32.2} \times 1.5 \times 20\pi \quad (1)$$

یک معادله و 3 مجهول (T_1 و T_2 و t) پس به سراغ B می‌رویم و همین معادله را تکرار می‌کنیم

* باید ببینیم که در B مصرف کننده داریم که در این صورت باید گشتاور مقاوم در B قرار دهیم ولی در غیر این صورت گشتاور مقاوم نداریم.

$$\int_0^t \Sigma M_B \, dt = \Delta H_B \Rightarrow$$

$$(T_1 r - T_2 r)\, t = H_{2B} = \frac{1}{2} \times \frac{30}{32.2} \times (1.5)^2 \times \left(\frac{2\pi}{60} \times 600\right) \quad (2)$$

ωها برابر است زیرا شعاع‌ها یکسان است و بین تسمه و چرخ تسمه لغزش وجود ندارد

← 2 معادله و 3 مجهول ← باید به دنبال معادله سوم باشیم ←

Subject:
Year: Month: Date: ( )

** در شرایط دینامیکی، چرخ دنده B در راستای x دارای شتاب مثبت بین a_x تا ...

تا زمانی معتبر است که T_2 صفر نشود. $\Rightarrow$ $T_1 + T_2 = 15$ (3)

$\Leftarrow$

3 معادله و 3 مجهول

* حال اگر دور را مجهول قرار دهیم (گشتاور متناسب دوری باشد)

بین تسمه و چرخ دنده لغزش نداریم. برای این کار نیاز به حداقل اصطکاک داریم:

static: $\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\beta}$ β: زاویه بین T_1 و T_2 که برحسب رادیان است

$T_1 > T_2$ با شرط

$\Rightarrow \ln \frac{T_1}{T_2} = \mu\beta \Rightarrow$

هرچه اختلاف T_1 و T_2 بیشتر باشد $\Leftarrow$ Ln بزرگتر $\Leftarrow$ $\mu\beta$ برای عدم لغزش باید بیشتر

که باید یا μ را زیاد کنیم یا β، که این اوصاف در شرایط استاتیکی بود و در دینامیک

اگر وزن تسمه مطرح شود $\Leftarrow$ کار کمی فرق می‌کند

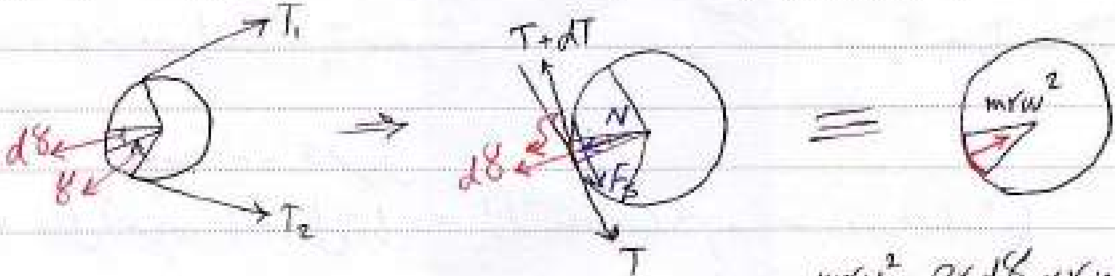
* گشتاور انتقالی به اختلاف T_1 و T_2 بستگی دارد.

اگر کمی 1mm که اندازه آن فرق داشته باشد، شکل به صورت روبه‌رو تبدیل می‌شود

$\Leftarrow$ لغزش در جایی اتفاق می‌افتد که زاویه تماس کمتری داشته باشد

continue on the next page $\Rightarrow$

بیکره آزاد تکه کوچک از تسمه را رسم می کنیم.



$$mr\omega^2 = \rho r d\theta \times r\omega^2$$

* شکل را در صفحه افق می گیریم تا از وزن صرف نظر کنیم
هدف : گشتاور انتقالی max را می خواهیم پیدا کنیم

محدودیت : گشتاور انتقالی max وقتی می باشد که در آستانه لغزش باشد یعنی در آستانه لغزش
پس $F_s = \mu_s N$

(زمانی که هنوز به دور نهایی نرسیده است و یا رسیده (2 حالت)

1) ابتدا دور ثابت ← $\alpha = 0$ پس فقط شتاب نرمال داریم . $\rho\,(kg/m)$ جرم واحد طول تسمه است

→ اگر چگالی را دادند ⇐ $\frac{kg}{m^3} \times m^2 = \frac{kg}{m} = \rho$

اصل دالامبر :
در بیکره آزاد هرچی وجود دارد برعکس می کنیم و در بیکره نیرو قرار می دهیم و می گوییم در بیکره ی نیرو ، یک نیروی گریز از مرکز وارد می شود و بیکره آزاد شتاب را حذف می کنیم.

Continue on the next page

دیگر جهت دره می باشد چون المان کوچک می باشد:

$\sum F_t = ma_t$

$\Rightarrow (T+dT)\cos\frac{d\theta}{2} - T\cos\frac{d\theta}{2} - F_s = 0$

دور ثابت است!

$\Rightarrow dT = \mu_s N$ ①

$\sum F_n = ma_n \Rightarrow N - (T+dT)\sin\frac{d\theta}{2} - T\sin(\frac{d\theta}{2}) = r^2\omega^2\rho\, d\theta$

هم ارز مثلثاتی: $\sin\frac{d\theta}{2} = \tan\frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$ $\quad \frac{d\theta}{2} \to 0$

$\Rightarrow N - T\,d\theta = (r\omega)^2 \rho\, d\theta \Rightarrow N = (T+\rho(r\omega)^2)\,d\theta$ ②

①,② $\Rightarrow dT = (T+\rho(r\omega)^2)\,d\theta \times \mu_s$

$\Rightarrow \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T+\rho(r\omega)^2} = \int_0^{\beta} \mu_s\, d\theta \xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{انتگرال}}$

β را از هندسه شکل بدست می آوریم

$\Rightarrow$

$\ln(T+\rho(r\omega)^2)\Big|_{T_2}^{T_1} = \mu_s\beta \Rightarrow \ln\frac{T_1+\rho(r\omega)^2}{T_2+\rho(r\omega)^2} = \mu_s\beta$

$\Rightarrow \frac{T_1-\rho(r\omega)^2}{T_2-\rho(r\omega)^2} = e^{\mu_s\beta} \to$ لازم

منفی درست است

$\Leftarrow$ اگر لازم از اختیار کمتر بود، عملی است

در غیر این صورت عملی نیست

(منفی درست است چون جهت a را اشتباه گرفته بودیم)

حال به ازای یک T_1 و T_2 ثابت، هرچه $\rho(r\omega)^2$ بیشتر شود کسر در کل بزرگتر می‌شود یعنی

← $\beta\mu_s$ بیشتری نیازمند هستیم. هرچه تسمه سنگین‌تر باشد نیاز به μ_s بیشتری داریم
یعنی هرچه جرم را کمتر کنیم مناسب‌تر می‌باشد

رابطه بالا در کتاب طراحی اجزا ۱ آن را می‌خوانیم (صفحه قبلی)

* حال اگر دور ثابت نباشد، در یک جزء شتاب داریم:

$$\Rightarrow \sum F_t = ma_t \Rightarrow$$

$$(T+dT)\cos\frac{d\theta}{2} - T\cos\frac{d\theta}{2} - F_s = \rho r^2\alpha\, d\theta$$

$$\boxed{dT - F_s = \rho r^2 \alpha\, d\theta}$$

اگر در شرایط max ایستاده باشیم ⇐

$$dT - \mu_s N = \rho r^2 \alpha\, d\theta \quad (1)$$

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow -N + (T+dT)\sin\frac{d\theta}{2} + T\sin\frac{d\theta}{2} = \rho r^2\omega^2 d\theta$$

$$N = -\rho r^2 \omega^2 d\theta + T d\theta \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow dT = \mu_s(T - \rho r^2\omega^2)\, d\theta + \rho r^2 \alpha\, d\theta$$

$$\Rightarrow dT = d\theta\,(\mu_s T - \mu_s \rho r^2 \omega^2 + \rho r^2 \alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{\mu_s T - \mu_s \rho r^2\omega^2 + \rho r^2 \alpha} = d\theta \xRightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}}$$

$$Ln\,\frac{\mu_s T_1 - \mu_s \rho r^2\omega^2 + \rho r^2\alpha}{\mu_s T_2 - \mu_s \rho r^2\omega^2 + \rho r^2\alpha} = \mu_s \beta$$

چون در هر دو طرف μ_s داریم ⇐ نمی‌توانیم زیاد از آن بحث کنیم

μ_s ای که داریم باید در این رابطه صدق کند وگرنه به این مرحله نخواهیم رسید.

جمع بندی:

* اگر نیروی خواسته شد ⇐ روش نیرو
* شتاب = ? ⇐ روش نیرو

* بعد از طی مسافت مشخص یا بعد از طی زمان مشخص یا زاویه مشخص ⇐ سرعت خواسته شود ⇐ Energy method ← مسافت ، روش اندازه حرکت ← نسبت به زمان

* بعد از طی مسافت مشخص ← سرعت چند نقطه یا سرعت زاویه‌ای ⇐ روش انرژی ⇐
که کار عامل خارجی بود

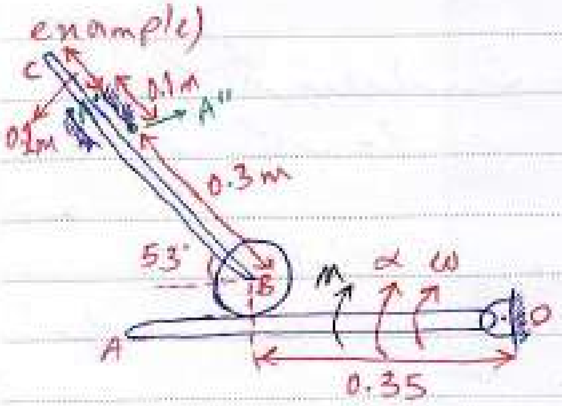
اگر بحث کار نیروی اصطکاک پیش بیاید موقعی که نیروی اصطکاک به نقطه‌ای وارد شود در آن نقطه سرعت داشته باشیم البته در راستای نیروی اصطکاک. در لغزش معمولاً این گونه
اما اگر لغزش نداشتیم دقت می‌خواهد

وقتی بحث لغزش پیش می‌آید $F_f = \mu N$ ، اگر μ ثابت باشد کار راحت است ولی اگر ثابت نبود، دو حالت پیش می‌آید که μ تابع موقعیت یا تابع طول باشد چون از متد انرژی استفاده می‌کنیم، طول و زاویه در روابط ظاهر می‌شود پس برای محاسبه‌ی کار نیروی اصطکاک مشکلی به وجود نمی‌آید اما اگر μ تابع سرعت باشد (بدترین حالت) که چنین حالتی در اکثر موارد ذره‌ای پیش می‌آید که حرکت در مسیر منحنی می‌باشد که حتماً به معادله دیفرانسیل می‌رسیم.

۱۲ اسفند ۸۸

اسماعیل بهشتی

example)



تحلیل نیروها در قسمت های مختلف:

$\begin{cases} m_{OA} = 10\,kg \\ OA = 0.5\,m \end{cases}$ $\begin{cases} m_B = 4\,kg \\ r_B = 0.1\,m \end{cases}$

$m_{CB} = 8\,kg$ $\begin{cases} \alpha = 10\,rad/s^2 \\ \omega = 4\,rad/s \end{cases}$

شکل در صفحه قائم قرار دارد. گشتاور M را بیابید که ω و α داده شده را ایجاد کند (راهنما (میله راهنما) صیقلی است)

:or

نیروی O چه نیرویی را تحمل می کند

:or

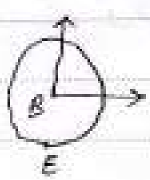
اگر غلتش کامل باشد حداقل اصطکاک را بیابید.

:or

نیروی موجود در مفصل B

* راه حل

چون می خواهیم از متد نیرو استفاده کنیم و α و ω را داریم ⇐ اول باید α, ω هر جزء را مشخص کنیم:



$v_E = v_B + \omega \times r$

$\Rightarrow (0.35 \times 4) j = v_B(-\cos 53 i + \sin 53 j) + \omega_{دیسک} \times 0.1$

با فرض پادساعتگرد بودن ω_B

$\rightarrow 1.4 = 0.8 v_B \Rightarrow v_B = 1.75$

$0 = -1.75 \times 0.6 + 0.1 \omega_B \Rightarrow \omega_B = 10.5\,rad/s$

Subject:
Year: Month: Date:

$a_E = a_B + \omega\times(\omega\times r) + \dot{\omega}\times r$

سرعت E و 'E یکی است ولی شتابشان با هم متفاوت است.

$\ddot{a}_E = a_B + \omega\times(\omega\times r) + \dot{\omega}_B\times r$

حال دستگاه را روی o قرار می‌دهیم و E را بررسی می‌کنیم

$\ddot{a}_E = \cancel{a_0} + \omega_{OA}\times(\omega_{OA}\times r_{OE}) + \dot{\omega}_{OA}\times r_{OE} + 2\cancel{\omega}\times v_{rel} + a_{rel}$

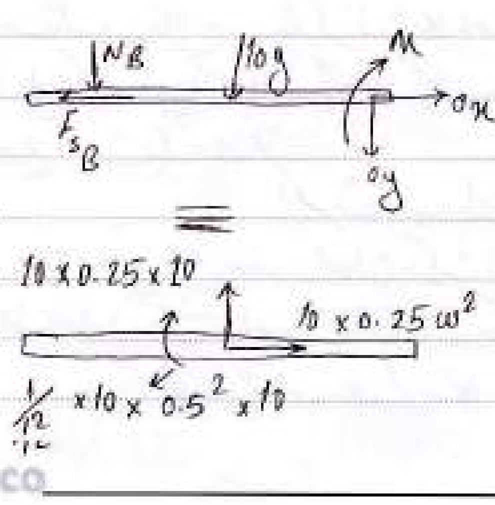
سرعتی که 'E نسبت به دستگاه دارد صفر است و E، دستگاه هر دو روی دیسک هستند
سرعت E نسبت به 'E هم صفر است (غلتش کامل داریم) پس v_{rel} صفر است
اما:

$a_{rel} = a_{E/E'} + \cancel{a_{E'/O}}$

$a_{E/E'}$ فقط در جهت نرمال داریم چون غلتش کامل داریم

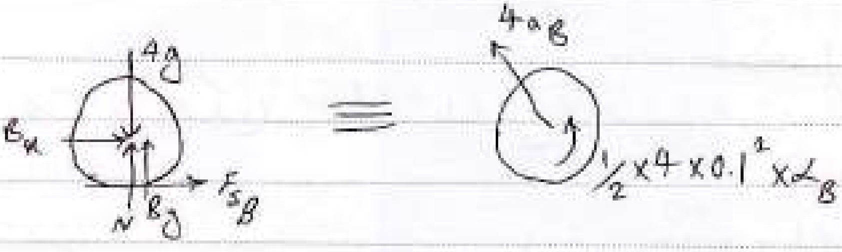
$a_E = (0.35\times 4^2)i + 0.35\times 10j + 0.1(10.5+4)^2$

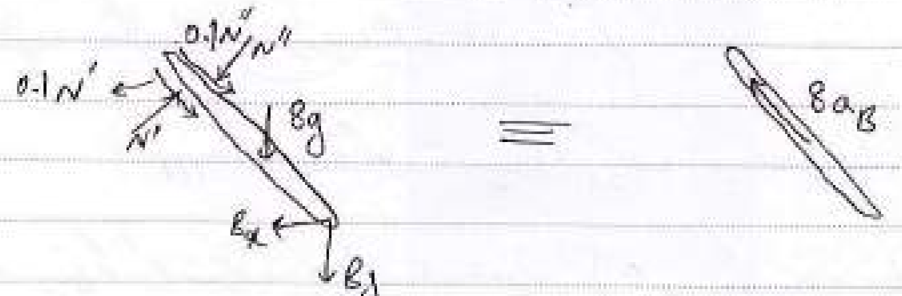
$\Leftarrow$ a_E را داریم که با گذاشتن در رابطه بالا a_{B_t} پیدا می‌شود، نقطه B شتاب لینک BC است، لینک صرفاً دارای انتقال است.



داریم:
چون در صفحه قائم هستیم
پس وزن داریم
مفصل P روان است
جهت چپ یا راست بودن F_s را فرضی قرار دادیم

Subject:
Year: Month: Date: ( )





7 معادله و 7 مجهول

......

با فرض وجود اصطکاک:

در اثر چرخش، نیروی تماس‌ها، در نقطهٔ A' و A است (به دلیل وجود لقی)

نکات کلی:

اگر نیروهای وارده به قسمت‌های مختلف مکانیزم را خواستند ← متد نیرو

اگر نیروها را دادند و شتاب را خواستند ← متد نیرو

مسئله در زمان بسیار کوتاه (لحظه) انجام می‌شود (مثلاً لحظه‌ای پس از پاره شدن کابل، کشش کابل دیگر یا شتاب زاویه‌ای لینک چقدر است که البته بحث برخورد مطرح نیست) ←

اگر شتاب را نخواستند، متد نیرو و اگر نیرو را خواستند باز هم متد نیرو

لحظه:
① بحث برخورد اندازهٔ حرکت (نیروی ضربه‌ای که خود نیرو را نمی‌توان یافت ولی ضربه آن را می‌توان محاسبه کرد)
② شتاب معمولی دارد ولی ناچیز، ثابت ماندن ω و عدم تغییر هندسه

Subject:
Year: Month: Date:

متد نیرو: رسم پیکره آزاد تک تک اجزاء، حتماً باید از سینماتیک بهره برد (از نقاطی که مسیر حرکت مشخص دارند غافل نشوید!)

سؤالاتی که صرفاً بحث سرعت در آن ها مطرح است متد انرژی یا اندازه حرکت

متد انرژی:

زمانی مطرح می شود که بحث فاصله و زاویه مطرح است

در متد اندازه حرکت:

بحث زمان مطرح است.

متد انرژی:

$U = E_2 - E_1$ ، زمانی از این متد استفاده می کنیم که محاسبه U آسان است، از مواردی که پیچیده کردن U را مشکل می سازد، کار نیروی اصطکاک است

اصطکاک زمانی کار انجام می دهد که نقطه اثر کننده در راستای نیروی اصطکاک دارای مولفه سرعت هست یا نه؟

اگر بود کار انجام می دهد، اگر نبود نه!

اگر اصطکاک لغزشی باشد قطعاً نیروی اصطکاک کار انجام می دهد، اما اگر لغزشی نباشد کار اصطکاک در اکثر موارد صفر است.

در موارد زیر صفر نیست:

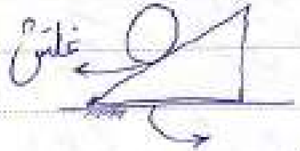
دیسک روی سطح می غلتد اما خود سطح هم سرعت داشته باشد.

در مواردی که N ثابت است محاسبه کار نیروی اصطکاک سخت نیست اما اگر N تغییر کند (N تابعی از موقعیت باشد (زاویه یا طول)) خیلی سخت نیست! انتگرالی می شود

اما اگر تغییرات N تابع سرعت باشد به معادله دیفرانسیل برخورد می کنیم و بهتر است از متد نیرو استفاده کنیم.

Subject:
Year Month Date ( )

بقای انرژی و اندازه حرکت، هم‌زمان استفاده می‌شود:



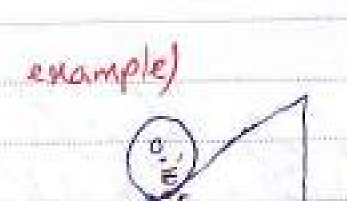
لغزش نداریم پس کار اصطکاک صفر است
(نیروی اصطکاک زوج عمل و عکس‌العمل اند
⇐ سرعت‌ها یکی است، جابه‌جایی‌ها یکسان
پس کار آنها همدیگر را خنثی می‌کند)
اما اگر لغزش داشته باشیم ⇐ زوج عمل و عکس‌العمل با جابه‌جایی غیر یکسان، پس کار داریم ⇐ اگر لغزش بود از شد نیرو می‌رویم.

بعد از استفاده از بقای انرژی مکانیکی و رابطه سینماتیکی ⇐ تعداد مجهول‌ها نمی‌خوانند
⇐ در جهت x، کل سیستم بقای اندازه حرکت خطی دارد.

تحت برخورد، اندازه حرکت ثابت مثل

!

example)



اگر بگوید
ضریب اصطکاک چقدر نیاز به منظور عدم لغزش وجود دارد
به سراغ شد انرژی و اندازه حرکت می‌رویم. چون غلتش کامل
است و اصطکاک صفر

⇐ برای 0.3m جابه‌جایی، مسئله را تحلیل کنید. $r_o = 0.2m$

راه حل:
فقط در راستای x بقای اندازه حرکت دارد نه در راستای کل (به خاطر N وارده از زمین)

$$\Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow$$

دوران

$$0 = -0.3 \times 4g\sin 37^\circ + \frac{1}{2} \times 3 \times V_E^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 4 \times 0.2^2\right) w^2$$

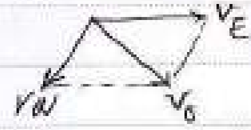
$$+ \frac{1}{2} \times 4 \times \left[(V_E - 0.2w\cos 37)^2 + (0.2w\sin 37)^2\right]$$

انتقالی

Subject:
Year: Month: Date: ( )

دستگاه را روی o قرار می دهیم و داریم:

$\vec{V}_E = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{V}_o = \vec{V}_E - \vec{\omega} \times \vec{r}$

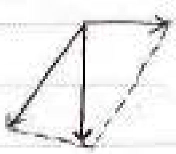


مطلق $V_o = V_E - r\omega \cos 37$

حال در ادامه داریم:

$Q_{1x} = Q_{2x} \Rightarrow 0 = +3V_E + 4(V_E - 0.2\omega\cos 37)$

البته شکل صحیح تر به این صورت است

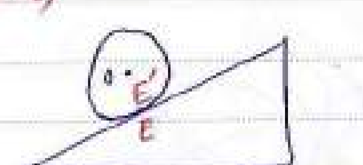


چون:
دیسک به راست و صفحه به چپ می رود

★ اگر μ_s و μ_k را بدهند که باید تشخیص دهیم که لغزش داریم یا غلتش
که البته باید (سهم است) از منع نیرو استفاده کنیم

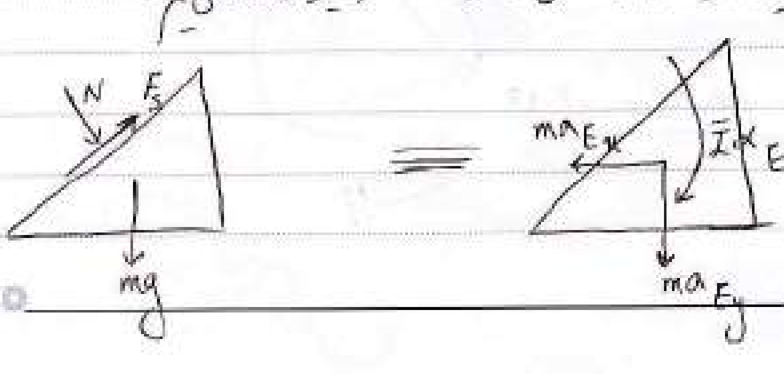
example)

اگر در مثال قبل سطح زیر را فرو بریزد،
بعد از ۲ ثانیه، هر کدام از آنها دارای
چه سرعتی است؟

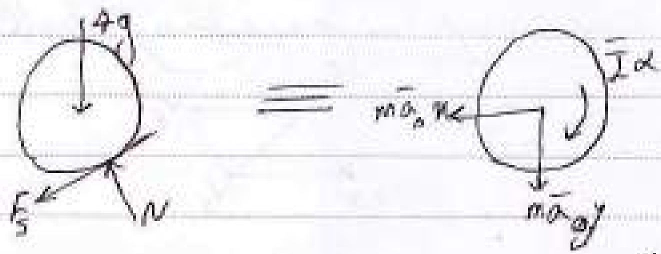


solve/.

در راستای x بنا به اندازه حرکت خطی نداریم (به خاطر نیروی وزن)
و بنابراینکه همچنان دیسک و صفحه تماس دارد، n را نیز لحاظ کنیم



Subject.
Year. Month. Date. ( )



چون فرض را بر تماس دو جرم گرفتیم و
با فرض غلطش حل کردیم ⇐

از سینماتیک کمک می‌گیریم ⇐ بلافاصله پس از فرو رفتن:

$$a_o = a_{E'} + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + 2\cancel{\omega} \times v_{rel} + \cancel{a_{rel}}$$

$$a_{E'} = a_E + r\omega_o^2$$

13 اسفند ۸۸

!!