Subject:
Year. Month. Date. ( )

«بنام او که هستی جاویدان زاوست»

«دینامیک»

Dynamics

استاد:

DR: حاجی موسی

جزوه‌نویس: (به قلم)!!

اسماعیل بهشتی

اسماعیل بهشتی

سال تحصیلی!!
1388-89
882

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

«بنام یگانه آفریننده هستی»

شنبه
88/7/4

دینامیک:

تحلیل سرعت و شتاب هدف سینماتیک است

سینتیک بین سرعت و شتاب با جرم و نیرو رابطه برقرار می‌کند

$v = \frac{ds}{dt}$ → سافت $= \dot{s}$, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{s}$

$a = \frac{dv}{ds} \times \frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} \Rightarrow$

$$\begin{cases} ds = v\,dt \\ dv = a\,dt \\ v\,dv = a\,ds \end{cases} \xrightarrow[\text{ثابت}]{\text{حرکت با سرعت}} \Delta s = vt$$

حرکت با شتاب ثابت:

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = a\int_0^t dt \Rightarrow v_2 - v_1 = at \Rightarrow v = at + v_1 \quad (1)$$

$$\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = a\int_{s_1}^{s_2} ds \Rightarrow \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = a\Delta s$$

$$\Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta s \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + 2a\Delta s$$

داریم:

$$\int ds = \int v\,dt \xrightarrow{(1)} \int ds = \int (v_1 + at)\,dt$$

$$\Rightarrow \Delta s = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$$

فقط برای حرکت شتاب دار ثابت
چون رابطه (1) در حرکت شتاب دار ثابت مد نظر بود.

PaPCO

چه زمانی a ثابت است؟

$$\sum F = ma \Rightarrow a = \frac{\sum F}{m}$$

پس باید نسبت $\frac{\sum F}{m}$ ثابت باشد (ممکن است مثل پرتاب موشک، m نیز متغیر باشد)

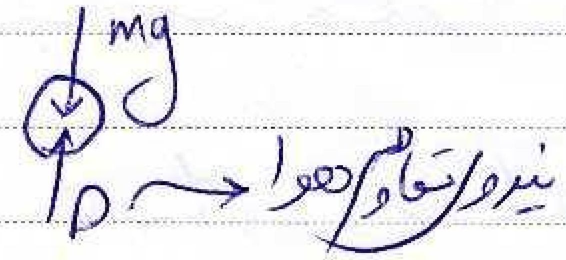
نکته:

۱) بعضی اوقات میشود شتاب را برحسب t (زمان) فرمول بندی کرد $a = f(t)$، مثلاً در پرتاب موشک که جرمش متناسب با زمان تغییر می‌کند و $\sum F$ نیز ثابت است.

۲) بعضی اوقات نیز می‌توان شتاب را برحسب s (مسافت) فرمول بندی کرد مثل دستگاه جرم - فنر

$$a = g(s)$$

۳) بعضی اوقات نیز می‌توان شتاب را برحسب سرعت (v) فرمول بندی کرد مثل سقوط آزاد در شرایط طبیعی



$$\Rightarrow \sum F = mg - D = ma$$

$$\Rightarrow a = g - \frac{D}{m}$$

و هر چه سرعت بیشتر ← نیروی مقاوم هوا (D) بیشتر، یعنی

$$D = c' + w(v)$$

c' ← در هوا این عدد ثابت، بسیار کوچک است

$$\Rightarrow a = g - \frac{c' + w(v)}{m}$$

داریم:

اگر a برحسب t ($f(t)$) باشد که شکلی پیش نمی‌آید زیرا مثلاً:

$dv = a\,dt \Rightarrow$ با انتگرال گیری از طرفین و البته جایگذاری a برحسب t

v را می‌توان برحسب t یافت، سپس با استفاده از فرمول $ds = v\,dt$

s برحسب t پیدا می‌شود.

اگر $a=k(v)$ ⇐ با جداسازی تابع ⇐ $\frac{v}{k(v)}\,dv = ds \Rightarrow s(v) \Rightarrow$

معکوس داریم: $v=f(s) \Rightarrow \frac{ds}{f(s)} = dt$

اگر $a=g(s)$ ⇐

$v\cdot dv = a\,ds \Rightarrow$

با انتگرال گیری از طرفین، v برحسب s یافت می‌شود

و با استفاده از

$\frac{ds}{v}=dt$

و با جایگذاری v برحسب s ⇐ s برحسب t پیدا می‌شود.

⇐

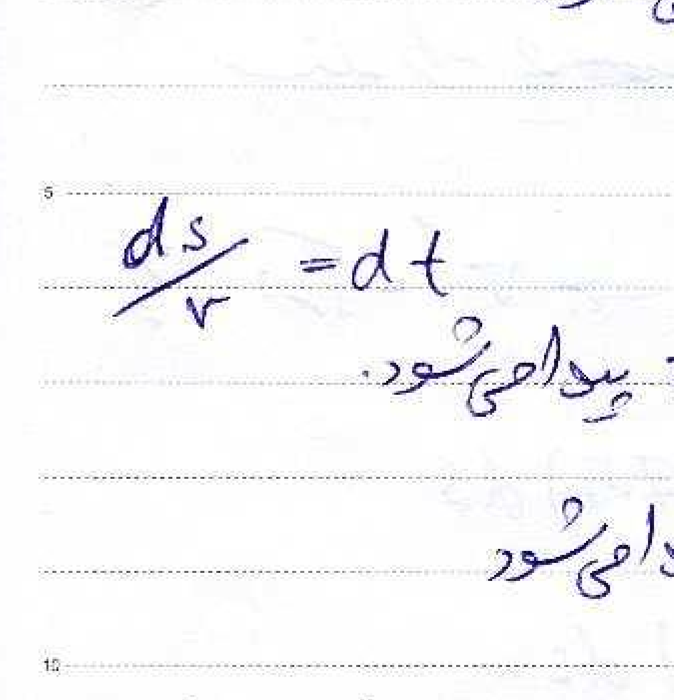
با ۲ مشتق گیری از آن، a برحسب زمان پیدا می‌شود

البته با استفاده از $ds = v\,dt$ و جایگذاری s برحسب t ⇐ $v(t)$ یافت می‌شود.

مثال:

شکل روبه‌رو، شکل یک سرعت‌گیر دو مرحله‌ای را نشان می‌دهد

که $v = 5\,\frac{m}{s}$



⇐

در لحظه‌ی برخورد سرعتش کم می‌شود

در این صورت جسم کجا متوقف می‌شود؟

فرض می‌کنیم فنر دومی وجود نداشته باشد

⇐ با این فرض نقطه‌ی توقف را می‌یابیم ⇐ اگر قبل از 0.5m بود که ok! و اگر بعد از 0.5 بود که ......

$v\,dv = a\,ds \Rightarrow \int v\,dv = \int a\,ds$ ، $a = As$ و $A = \frac{10}{0.5} = 20$

نمودار بالا برای فنر است ⇐ جهت شتاب جسم و فنر برعکس می‌باشد ⇐

برای جسم $A=-20 \Rightarrow \int v\,dv = -\int 20s\,ds \Rightarrow$

$\int_5^0 v\,dv = -\int_0^s 20s\,ds \Rightarrow$

لینک AB دوران دارد ← سرعت در تمام نقاطش یکی نیست (در A سرعت صفر و در B بیشترین سرعت)

$-\frac{1}{20}\times 25 = -s^2 \Rightarrow s=1.12$

← نقطه توقف بعد از فنر و سطح است

←

مسئله را به 2 قسمت (قبل 0.5^m و بعد از آن) تقسیم می‌کنیم

① $\int_5^{v'} v\,dv = -\int_0^{0.5} 20s\,ds \Rightarrow v' = \sqrt{20}\ \frac{m}{s}$

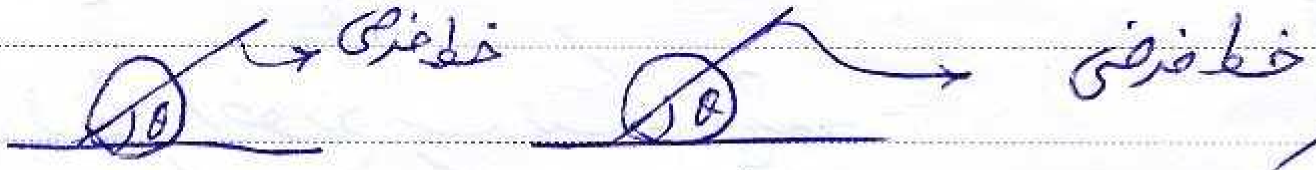
② $\Rightarrow \int_{+v'}^{0} v\,dv = \int_{0.5}^{s} (-5s-2.5)\,ds$

$\Rightarrow \int_{\sqrt{20}}^{0} v\,dv = \int_{0.5}^{s} (-5s-2.5)\,ds$

$\frac{1}{2}(0-20) = -\frac{5}{2}\left(s^2-\frac{1}{4}\right) - 2.5\left(s-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow s = 1.36m$

دوران:

ماشین در لحظه ترمز کردن که چرخ‌ها قفل می‌کنند، چرخ‌ها دوران ندارند (انتقال دارند یا شرمی صفرند) زیرا θ تغییری نمی‌کند



اما اگر زاویه θ تغییر کند ← دارای دوران است

سرعت زاویه‌ای = سرعت دوران   α : شتاب زاویه‌ای = شتاب دوران

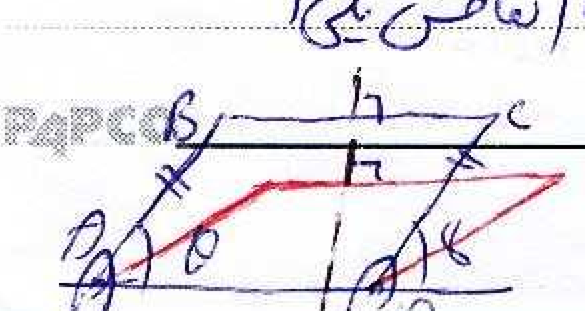
تعداد θ اهمیتی ندارد بلکه تغییراتش مهم است

$\text{سرعت زاویه‌ای} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega \qquad \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

نکته:

1) سرعت مرکز دوران صفر و یگانه (مستقل) است

2) جسم صلبی که دوران ندارد سرعت و شتاب آن در تمام نقاطش یکی است



لینک BC دوران ندارد اما لینک AB یا DC دوران دارند و چون موازی‌اند ← ω ها برابر دارند

دوشنبه:

88/7/6

دینامیک دکتر حاج موسی:

$$ds = v\,dt$$
$$dv = a\,dt$$
$$v\,dv = a\,ds$$

این سه رابطه در حرکت زاویه‌ای نیز صادق است
با این تفاوت که:

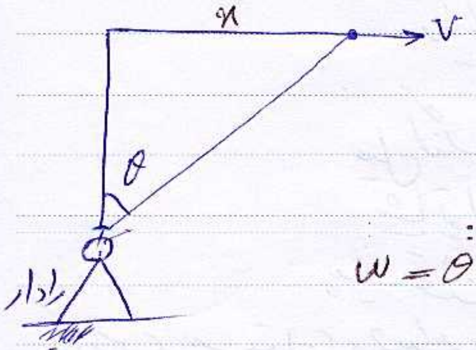
$s \to \theta \;,\; v \to \omega \;,\; a \to \alpha$

یعنی:

مثلاً: $\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta$

مثال:

هواپیمایی در حال حرکت با سرعت ثابت v در ارتفاع ثابت h است
ω و α رادار را بیابید.



$$\omega = \dot{\theta} \;,\; \alpha = \ddot{\theta} \Rightarrow$$

در روش مستقیم:
با بیان روابط هندسی برقرار کنیم بین پارامتری هندسی که تغییراتش نسبت به زمان معلوم است
بین پارامتر یا هندسی که تغییراتش نسبت به زمان مطلوب است.

در این روش از هندسه شکل استفاده می‌کنیم

$$\tan\theta = \frac{x}{h} \Rightarrow x = h\cdot\tan\theta \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dh}{dt}\cdot\tan\theta + \frac{d\theta}{dt}\cdot h\cdot(1+\tan^2\theta)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \dot{h}\tan\theta + \dot{\theta}(1+\tan^2\theta)h \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{h(1+\tan^2\theta)}$$

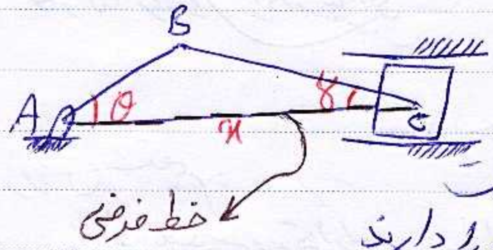
$$\ddot{x} = 2\dot{\theta}\tan\theta(1+\tan^2\theta) + \ddot{\theta}(1+\tan^2\theta)h \Rightarrow \ldots\ldots$$

ویژگی این روش این است که:
جواب بدست آمده، جواب کلی است

آما:
به علت هندسی بودن این روش، این روش زیاد توصیه نمی شود.

مثال:
مکانیزم لنگ و لغزان

کار این مکانیزم این است که:
حرکت دورانی را به حرکت رفت و برگشت تبدیل می کند
و یا بالعکس



AB: میل لنگ
BC: شاتون
عضو C: پیستون

کورس پیستون = 2 برابر شعاع میل لنگ است
و شاتون و میل لنگ توانایی عبور از روی هم را دارند

این مساله این گونه قابل طرح است که سرعت و شتاب پیستون را به ما بدهند و
سرعت و شتاب زاویه ای میل لنگ را از ما بخواهند و یا بالعکس

در این مساله:

$\dot{\theta}$: سرعت زاویه ای میل لنگ
$\ddot{\theta}$: شتاب 〃 〃

$$\Rightarrow \begin{aligned} a_c &= f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) \\ v_c &= g(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = v_c \quad , \quad \ddot{x} = a_c$$

$$① \quad AB\cos\theta + BC\cos\gamma = x$$

$$AB\sin\theta = BC\sin\gamma \Rightarrow \sin\gamma = \frac{AB}{BC}\sin\theta \Rightarrow$$

$$\dot{\gamma}\cos\gamma = \frac{AB}{BC}\dot{\theta}\cos\theta$$

تلسکوپی

اگر لینک BC یک لینک آنتی باشد دیگر BC ثابت نیست و داریم $\dot{BC}$ که برابر است با V_{BC} و $\ddot{BC}$ که برابر است با a_{BC} ⇐ سیستم 2 درجه آزادی دارد، یکی θ مستقل و دیگری لینک BC

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma} = \sqrt{1-\left(\frac{AB}{BC}\sin\theta\right)^2}$$

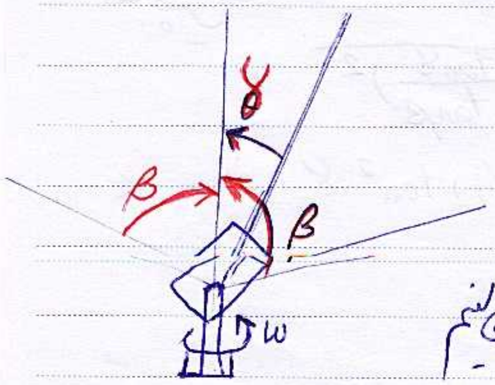
$$\Rightarrow \dot{\gamma} = \frac{AB}{BC}\dot{\theta}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\left(\frac{AB}{BC}\sin\theta\right)^2}}$$

$\dot{\gamma}$: سرعت زاویه‌ای شاتون

$$① \Rightarrow -AB\sin\theta \times \dot{\theta} - BC\,\dot{\gamma}\sin\gamma = \dot{x} = v_C$$

⇐

با جایگذاری $\dot{\gamma}$ ، v_C برحسب $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ یافت می‌شود.



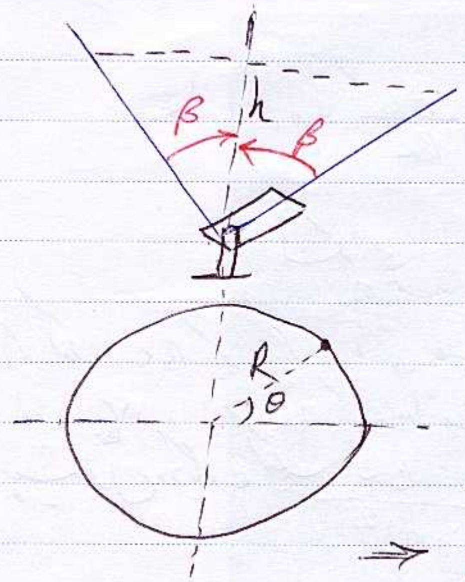
مثال:

پایه به الکتروموتور متصل است

پایه‌ی نورافکن در زاویه‌ی β فیکس شده است

حال الکتروموتور را با سرعت زاویه‌ای ω روشن می‌کنیم

از دید ناظری که از روبه‌رو نگاه می‌کند ⇐ $\dot{\gamma}$ و $\ddot{\gamma} = ?$



در یک ارتفاع دلخواه داریم:

$$s = R\cos\theta = h\tan\gamma$$

$$\left(\frac{s}{h} = \tan\gamma \Rightarrow s = h\tan\gamma\right)$$

$$\frac{R}{h} = \tan\beta \Rightarrow R = h\tan\beta$$

$$\Rightarrow \cancel{h}\tan\beta\cos\theta = \cancel{h}\tan\gamma$$

$$\Rightarrow \tan\gamma = \tan\beta\cos\theta$$

همچنین:

در واقع $\dot{\theta}$ $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ همان ω است پس:

$$\dot{\gamma}(1+\tan^2\gamma) = -\dot{\theta}\sin\theta \cdot \tan\beta \Rightarrow$$

$$\dot{\gamma} = -\dot{\theta}\sin\theta \cdot \tan\beta \,/\, 1+\tan^2\gamma$$

همچنین:

$$\cos\theta = \frac{\tan\gamma}{\tan\beta} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{\tan\gamma}{\tan\beta}\right)^2}$$

$$\dot{\gamma} = \left(-\omega\sqrt{1-\left(\frac{\tan\gamma}{\tan\beta}\right)^2} \cdot \tan\beta\right) / 1+\tan^2\gamma \quad \Leftarrow$$

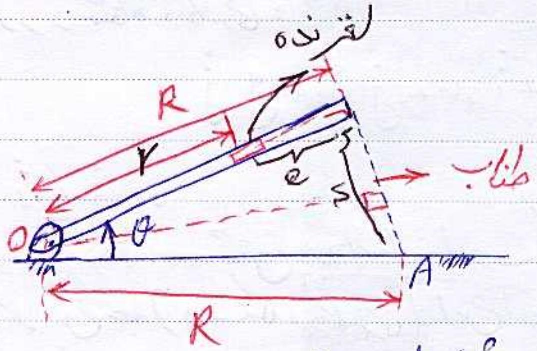
حال اگر $\theta=0$ ، $r=h$ ، $OA=cR$ ⇐ $\dot r , \ddot r = ?$

Subject: $cR = L + h \quad , L = \ell + s \Rightarrow s + \ell = cR - h \quad , r + \ell = R \Rightarrow \ell = R - r$

Year. Month. Date. ( )

$\Rightarrow s + R - r = cR - h \Rightarrow r = s + h + R(1-c) \quad , s^2 = R^2 + c^2R^2 - 2cR^2\cos\theta$

مثال:



فرضیات: $\theta = 0 , r = 0 \Rightarrow \ell = R$

ℓ طول طناب است.

در هر θ دلخواه، $\dot\theta$ و $\ddot\theta$ معلوم است

⇐ سرعت و شتاب لغزنده نسبت به لنگ شیاردار یعنی:

$\dot r , \ddot r = ?$

$$\Rightarrow \ell = R = e + s \quad , R = e + r \Rightarrow s = r$$

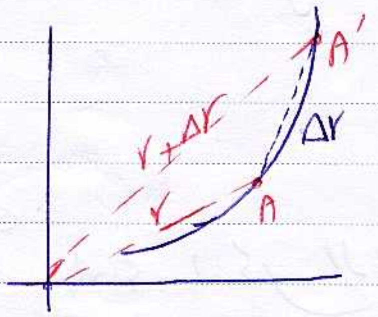
$s = r = 2R\sin\frac{\theta}{2}$ ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز هم است

$\Rightarrow \dot r =$

....

مثال: استاد مشمول شو!!!

حرکت منحنی‌الخط در صفحه:



$$\bar v = \frac{\Delta r}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$v = \frac{dr}{dt}$$ بردار سرعت در جهت بردار r است

v (بزرگ) یعنی بردار سرعت است اما v (کوچک) اندازه سرعت است

همچنین:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$$

نکته = همیشه بردار سرعت بر مسیر حرکت مماس است

در دستگاه دکارتی :

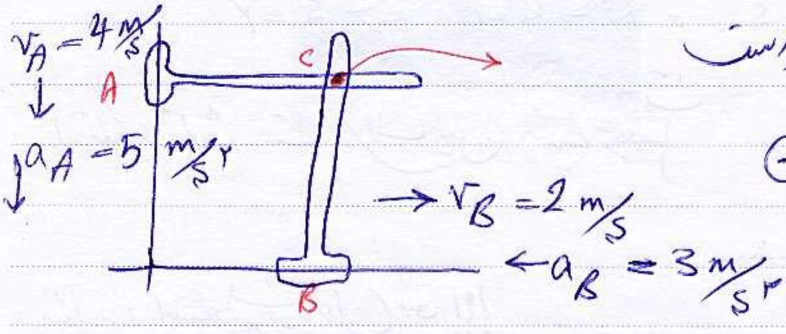
$$r = xi + yj \Rightarrow \dot{r} = \dot{x}i + \dot{i}x + \dot{y}j + y\dot{j}$$

$\dot{i}$ یا $\dot{j}$: مشتق بردار یکه است که تنها جهتش قابل تغییر است

در این جا (دستگاه دکارتی) این اتفاق نمی افتد ⇐

$$\dot{r} = \dot{x}i + \dot{y}j = v$$
$$\ddot{r} = \ddot{x}i + \ddot{y}j = a$$

مثال :



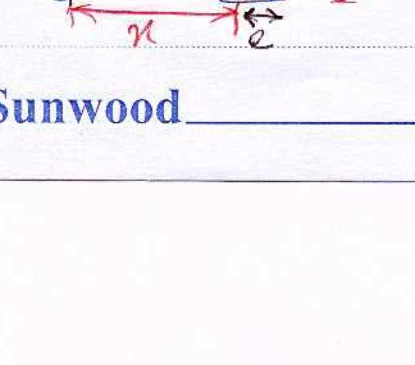
این پین داخل هر دو شیار است

در یک لحظه خاص ⇐ v, a پین $= ?$

$$v_c = v_x i + v_y j \Rightarrow v = 2i - 4j \Rightarrow |v| = v = \sqrt{20}$$

$$a_c = -3i - 5j \Rightarrow a = \sqrt{34}$$

مثال :



داده ها، داده های سوال قبلی است

⇐ $v_c, a_c = ?$

$$X = x \pm e$$
$$Y = y - s$$

$$\frac{s}{X} = \tan 20 \Rightarrow s = X \tan 20 \qquad \Rightarrow \begin{cases} X = x + Y \tan 25 \\ Y = y - X \tan 20 \end{cases}$$

$$\frac{e}{Y} = \tan 25 \Rightarrow e = Y \tan 25$$

$$\dot{X} = \dot{x} + \dot{Y} \tan 25 \qquad (\dot{x} = v_B , \dot{y} = v_A) \rightarrow$$

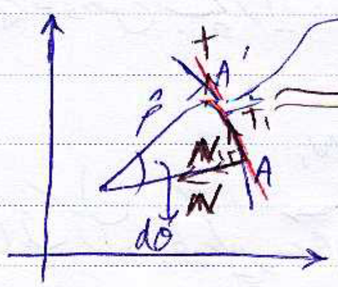
$$\Rightarrow \dot{Y} = \dot{y} - \dot{x} \tan 20$$

$$\dot{X} = \dots \qquad \dot{Y} = \dots$$

$$, \; v_c = \dot{X} i + \dot{Y} j$$

$$, \; \dots$$

۸۸/۷/۱۱ — شنبه



$$\rightarrow ds = \rho d\theta$$

بردار یکه

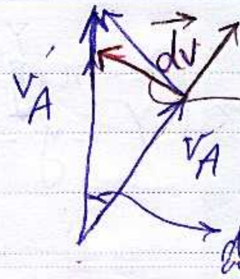
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\rho d\theta}{dt} = \rho \dot{\theta}$$

$$v = \rho \dot{\theta} t_1 = v t_1$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} t_1 + v \dot{t}_1$$

t_1 یک بردار یکه است ← مقدارش ثابت است اما جهتش تغییر می‌کند

هر راستایی که بردار سرعت داشته باشد، بردار شتاب نیز همان گونه است



$dv_t = dv$

$dv_N = v\,d\theta$

$$a = \frac{dv}{dt} \begin{cases} a_t = \dfrac{dv_t}{dt} = \dfrac{dv}{dt} = \dot{v} \\ a_N = \dfrac{dv_N}{dt} = \dfrac{v\,d\theta}{dt} \end{cases}$$

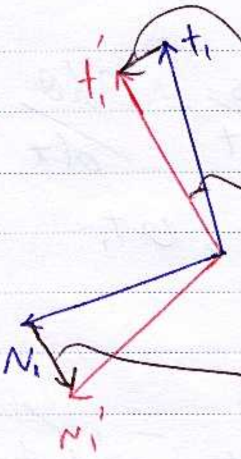
مولفه‌ی تانژانت یعنی

مولفه‌ی نرمال

همیشه به سمت مرکز انحنا است

$$\Rightarrow a_N = v\dot{\theta} = \rho\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{\rho}$$

اینو حفظ کن
یعنی به ذهن بسپار!!



$\vec{dt_1} = 1\, d\theta\, N_1$

dt_1 را یک کمان در نظر بگیر $dt_1 = 1 \times d\theta$

اندازه‌ی بردار واحد t_1، ۱ است

$\vec{dN_1} = -1\, d\theta\, t_1$

$$\dot{t}_1 = \frac{dt_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt} N_1 = \dot{\theta} N_1$$

$$\dot{N}_1 = \frac{dN_1}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} t_1 = -\dot{\theta} t_1$$

برای کلیه‌ی بردارهای چرخنده است
با هر اسمی که داشته باشند
چه زاویه، چه r و θ و ....

$\dot{\theta}$: سرعت زاویه‌ای دستگاه است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

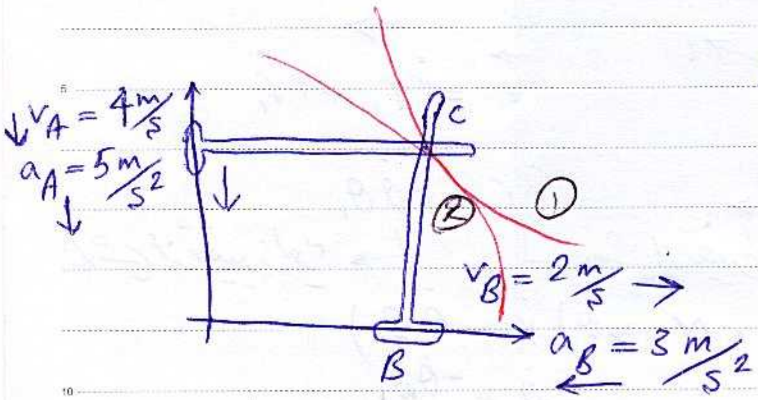
از نظر ریاضی :

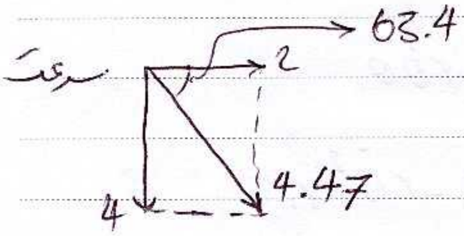
$$a = \dot{v}\, t_1 + v\, \dot{t}_1 \Rightarrow a = \dot{v}\, t_1 + v \dot{\theta}\, N_1 = \frac{v^2}{\rho} N_1 + \dot{v}\, t_1$$

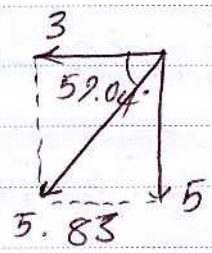
مثال:

شعاع انحنا مسیر حرکت = ?

مرکز انحنا = ?







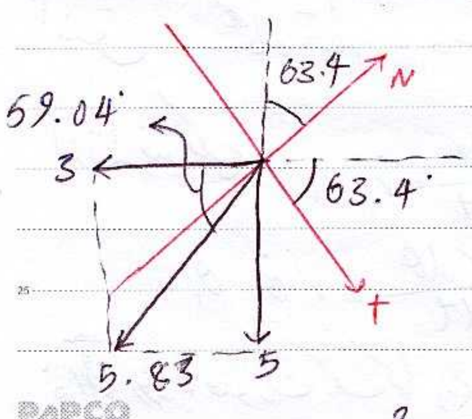
همیشه بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است.

داریم:

$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

a مطلق را داریم که از جمع a_N و a_t بدست می‌آید

با یافتن a_N ، ρ را می‌یابیم ⇐



$$\Rightarrow a_N = 5.83\cos(-90 + 63.4 + 59.04)$$

$$\rightarrow a_N = 4.92$$

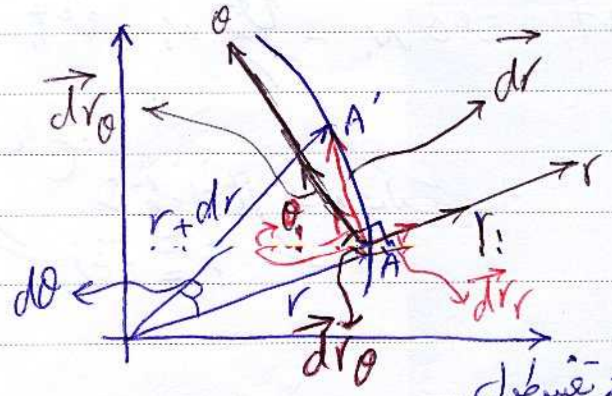
a_N در جهت a است (چون + شد) ⇐

جهت تقعر رو به پایین یعنی منحنی 2

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = 4.06\ m$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

دستگاه قطبی:



$$\vec{r} = r r_1$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r} r_1 + r \dot{r}_1$$

$$= \underbrace{\dot{r} r_1}_{\text{ناشی از تغییر طول}} + \underbrace{r \dot{\theta} \theta_1}_{\text{ناشی از تغییر زاویه}}$$

$$(\dot{t}_1 = \dot{\theta} N_1 \Rightarrow (t \to r,\ N \to \theta)\ \dot{r}_1 = \dot{\theta}\theta_1)$$

$$\dot{\theta}_1 = -\dot{\theta} r_1$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{r} r_1 + \dot{r}\dot{r}_1 + \dot{r}\dot{\theta}\theta_1 + r\ddot{\theta}\theta_1 + r\dot{\theta}\dot{\theta}_1$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{r} r_1 + \dot{r}\dot{\theta}\theta_1 + \dot{r}\dot{\theta}\theta_1 + r\ddot{\theta}\theta_1 - r\dot{\theta}^2 r_1$$

$$\Rightarrow \vec{a} = r_1(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \theta_1(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

جهت r در راستای خود r است
اما جهت N در راستای مرکز انحنای منحنی است

فرق دستگاه قطبی با دستگاه مماسی!!

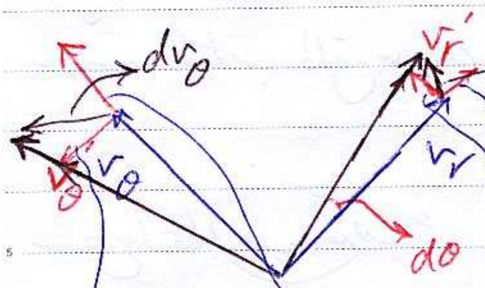
از نظر فیزیکی:

$$\vec{v} = \frac{\vec{dr}}{dt} \begin{cases} v_r = \dfrac{\vec{dr_r}}{dt} = \dfrac{dr}{dt} = \dot{r}\, r_1 \\ v_\theta = \dfrac{\vec{dr_\theta}}{dt} = \dfrac{r\,d\theta}{dt} = r\dot{\theta}\,\theta_1 \end{cases}$$

$\vec{dr_\theta}$ را به صورت یک کمان در نظر می‌گیریم که $\Leftarrow$ $|\vec{dr_\theta}| = r\,d\theta$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$dv_{rr} =$ تغیر v_r است $= d\dot{r}$

$dv_{r\theta} = \dot{r}\, d\theta$

$dv_{\theta r} = r\dot{\theta}\, d\theta$

$dv_{\theta\theta} = d(r\dot{\theta})$

$\Big\}\ v_\theta = r\dot{\theta}$

پس داریم:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \longrightarrow \begin{cases} a_r = \dfrac{d\dot{r}}{dt} - \dfrac{r\dot{\theta}\, d\theta}{dt} \\[2mm] a_\theta = \dot{r}\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{d(r\dot{\theta})}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

نکته:
اگر بخواهیم دوباره مشتق گیری کنیم، دوباره dv_{rr} و یا $dv_{r\theta}$ و ... هر کدام دارای 2 مولفه خواهند بود

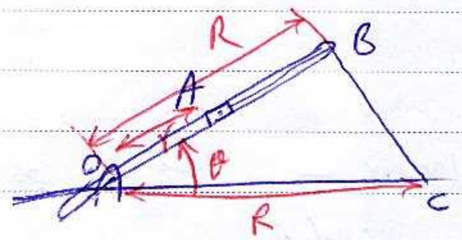
* سرعت و شتاب زاویه ای که ما محاسبه می کنیم، سرعت و شتاب زاویه ای دستگاه ماست.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

سرعت و شتاب مطلق پین A = ؟



$\begin{cases} \theta = ٠ \\ r = ٠ \end{cases}$

شعاع انحنای مسیر حرکت؟

$R = 0.4\ m$

$\dot{\theta} = 2\ rad/s \qquad \ddot{\theta} = 5\ rad/s^2 \qquad \theta = 37^\circ$

$$\begin{matrix} r + AB = R \\ BC + AB = R \end{matrix} \Rightarrow r = BC\ ,\ BC = 2R\sin\frac{\theta}{2} = r = 0.207\,m$$

$$\dot{r} = R\dot{\theta}\cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow (0.207\,m = r)\ \dot{r} = 0.773\ \frac{m}{s}$$

$$\ddot{r} = R\ddot{\theta}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{R\dot{\theta}^2}{2}\sin\frac{\theta}{2} = 1.73\ \frac{m}{s^2}$$

$\dot{r}$ و $\ddot{r}$ هم‌علامت‌اند ⇐ جهت سرعت و شتاب یکی است.

$\dot{r}$ مثبت شد ⇐ r در حال افزایش است

$$v = 0.773\,r_1 + 0.207 \times 2\,\theta_1 = 0.773\,r_1 + 0.414\,\theta_1$$

$$\vec{a} = (1.73 - 0.207 \times 4)\,r_1 + (2 \times 0.773 \times 2) + 0.207 \times 5)\,\theta_1 \Rightarrow$$

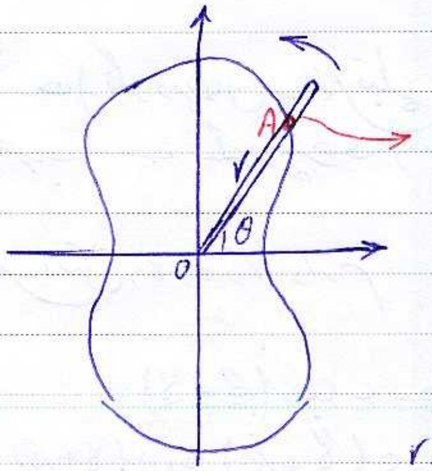
$$\vec{a} = 0.902\,r_1 + 1.035\,\theta_1$$

P4PCO

Subject:
Year. ۸۸ Month. 7 Date. 13

دوشنبه

مثال:



لینک OA روی بادامک در حال دوران است (حول مبدا)

A پین

اگر بادامک ثابت باشد: در $\theta = 30$ ، a_A , v_A را بیابید:

$r = b - c\cos\theta$

b و c ثابت اند که به ابعاد بادامک مربوط اند

$b = 0.1 \; , c = 0.075 \; , \; \begin{cases} \dot{\theta} = \frac{4}{3}\pi \; rad/s \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \theta = 30^\circ \\ v_A , a_A = ? \end{cases}$

(ω) سرعت زاویه ای لینک $\frac{4}{3}\pi \; rad/s$ است و لینک با سرعت ثابت حرکت می کند ($\alpha = 0$)

$r = 0.1 - 0.075\cos 30 \; , \; \dot{r} = 0.075 \times \frac{4}{3}\pi \sin 30$

$\ddot{r} = \cancel{0.075} + 0.075 \times \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 \times \cos 30$

$\dot{r} = c\dot{\theta}\sin\theta \quad , \quad \ddot{r} = c\ddot{\theta}\sin\theta + c\dot{\theta}^2\cos\theta$

$\Rightarrow$ $\dot{r}$ و $\ddot{r}$ را پیدا کردیم پس با جایگذاری در فرمول های زیر به خواسته ی سوال می رسیم

$v = \dot{r}\, r_1 + r\dot{\theta}\, \theta_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} v_r = \\ v_\theta = \end{cases}$

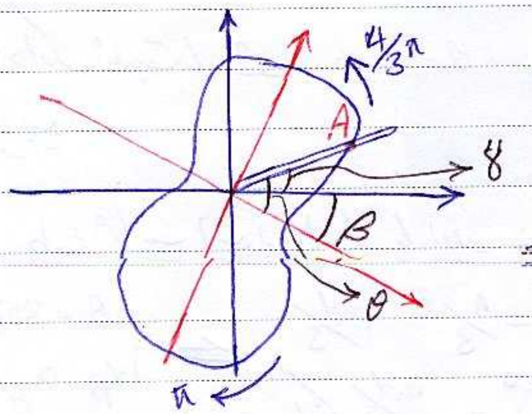
$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$

مثال:

حال اگر در همان مثال قبلی، بادامک نیز با سرعت زاویه‌ای π (ثابت) در جهت ساعتگرد بچرخد (با همان اطلاعات مثال قبل) $\Leftarrow$ $v_A , a_A = ?$

برای یافتن r، $\dot r$ و $\ddot r$ داریم:



$$r = b - c\cos(\beta+\gamma)$$
$$\Rightarrow \dot r = c(\dot\gamma+\dot\beta)\sin(\gamma+\beta)$$
$$\Rightarrow \ddot r = c(\dot\gamma+\dot\beta)^2\cos(\gamma+\beta) + c(\ddot\gamma+\ddot\beta)\sin(\gamma+\beta)$$

نکته:

$\dot\beta$ در واقع، سرعت زاویه‌ای بادامک است و
$\dot\gamma$ در واقع، سرعت زاویه‌ای لینک است
و چون حرکت بادامک و لینک در خلاف جهت هم است $\theta = \beta + \gamma$

همچنین برای یافتن v_A، a_A داریم:

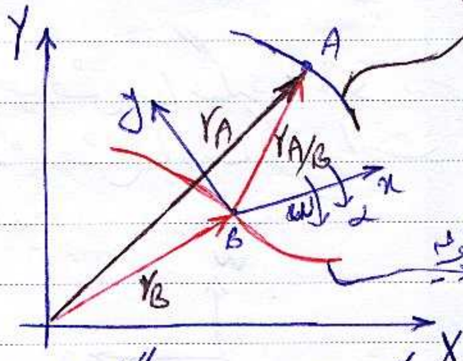
$$v_r = \dot r \quad , \quad v_\theta = r\dot\theta$$
$$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 \quad , \quad a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta$$

که
$\dot\theta$ و $\ddot\theta$ در این جا به ترتیب سرعت و شتاب زاویه‌ای لینک است و نباید با $\theta = \beta + \gamma$ که تنها یک حرف است (ظاهری است) اشتباه گرفته شود.

همچنین θ در $r = b - c\cos\theta$، زاویه‌ای است که لینک با محور بادامک می‌سازد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



سیر حرکت نسبی

دستگاه فرعی با سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای $\dot{\omega}$ در حال چرخش است

سیر حرکت مبدا دستگاه مختصات ثانویه

از ن: منظور بردار یکه روی دستگاه مختصات متحرک است (دستگاه ثانویه)

سیر حرکت مطلق ذره A در شکل دیده نمی‌شود

وضعیت مبدا دستگاه مختصات ثانویه و وضعیت ذره A نسبت دستگاه مختصات ثانویه هم معلوم است ⇐

وضعیت حرکت ذره نسبت به مبدا دستگاه مختصات

نیکی (Fix اصلی) = ؟

$r_A = r_B + r_{A/B}$ → r_A نسبت به B → $r_A = r_B + r$

$\Rightarrow r_A = r_B + (xi + yj) \Rightarrow v_A = v_B + (\dot{x}i + \dot{i}x + \dot{y}j + y\dot{j})$

$\Rightarrow v_A = v_B + (\dot{x}i + \dot{y}j) + (x\dot{i} + y\dot{j}) \Rightarrow$

سرعت مبدا دستگاه مختصات ثانویه

سرعت ذره A نسبت به دستگاه مختصات Fix

$\Rightarrow v_A = v_B + v_{rel}$

مماس بر سیر حرکت ذره در دستگاه مختصات ثانویه

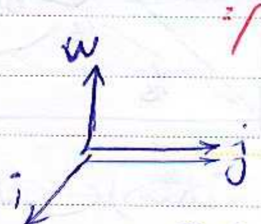
relative ⇒ سرعت نسبی

بردار ω، همیشه و همیشه بر صفحهٔ دوران عمود است که

اگر چرخش ساعتگرد باشد به سمت داخل صفحه است

اگر چرخش پادساعتگرد باشد به سمت بیرون صفحه است

داریم:



$\dot{i} = \dot{\theta} j \quad , \quad \dot{j} = -\dot{\theta} i \qquad (1)$

$\Rightarrow \omega \times i = \omega j \quad , \quad \omega \times j = -\omega i \qquad (2)$ قانون دست راست جهت را مشخص می‌کند

$(1),(2) \Rightarrow \dot{i} = \omega \times i \quad , \quad \dot{j} = \omega \times j \qquad (\omega = \dot{\theta})$

$$\Rightarrow v_A = v_B + v_{rel} + (x\,\omega \times i + y\,\omega \times j) \Rightarrow$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{rel} + \omega \times (xi + yj) \Rightarrow$$

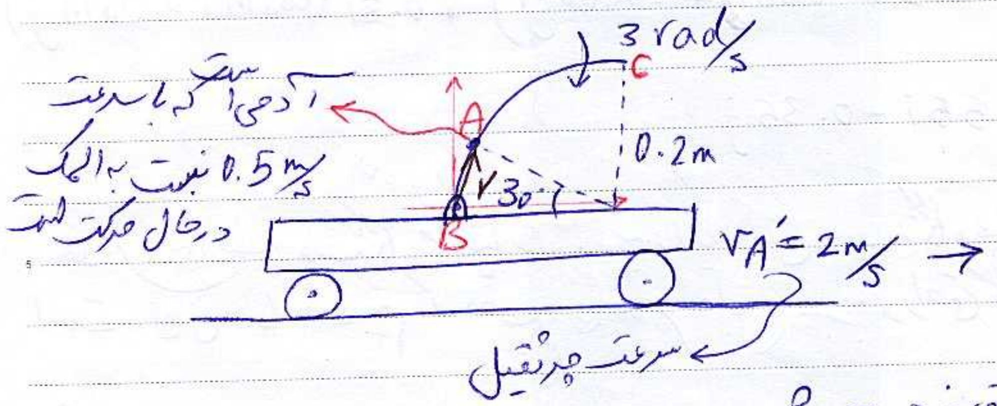
$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{rel} + \omega \times \vec{r}$$

وجود دارد اگر دستگاه مختصات ثانویه در حال چرخش باشد و ذره روی مبدأ نباشد $(r=0)$

V_{rel} وجود دارد در صورتی که: موقعیت ذره نسبت به دستگاه مختصات ثانویه تغییر کند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



سرعت مطلق فرد = ?

روش تحلیلی

$$v_A = v_B + v_{rel} + \omega \times r$$

راستا و اندازه v_A مجهول است

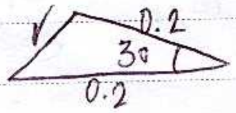
راستای v_{rel} مماس بر الماک است (وقتی الماک می‌چرخد ⇐ دستگاه مختصات ثانویه هم می‌چرخد)

بردار r، بردار است که از مبدا دستگاه مختصات ثانویه شروع می‌شود و به نقطه مورد بررسی ختم می‌شود.

$\omega \times r$ بر r عمود است اما جهتش بستگی به ω دارد.

⇐ در صفحه همیشه مقدار $\omega \times r$ برابر است با $|\omega||r|$

چهار انگشت در جهت ω، پیچش در جهت r ⇐ شصت جهت $\omega \times r$ را نشان می‌دهد

⇒ 

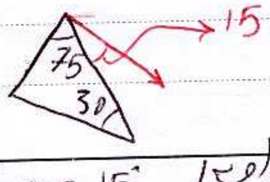
$\Rightarrow |r| = 2 \times 0.2 \times \sin 15 = 0.103\ m$

$|v_A| = v_A$

$|v_{rel}| = 0.5\ m/s$ ∠60 مماس بر مسیر حرکت ذره

$|v_B| = 2\ m/s \rightarrow$

$|\omega \times r| = 3 \times 0.103 = 0.31$



$\omega \times r$ با افق زاویه 15° می‌سازد

Subject:

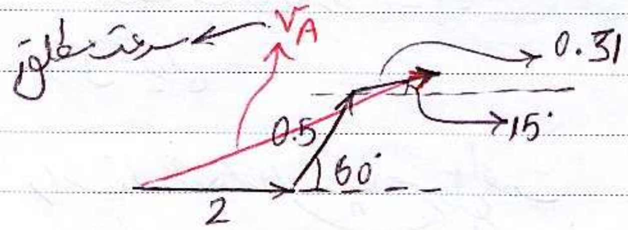
Year. Month. Date. ( )

$$V_A = 2i + 0.5(\cos 60\, i + \sin 60\, j) + 0.31(\cos 15\, i - \sin 15\, j)$$

$$V_A = 2.55i + 0.35j$$

1) نحوه انتخاب دستگاه مختصات ثانویه و اینکه این دستگاه چرخدار یا نه، با خودمان است یعنی ما هستیم که تصمیم می‌گیریم (طبق تجربه و راحتی کار)

روش ترسیمی:



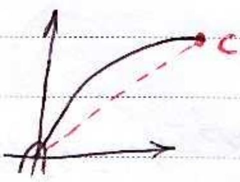
2) سرعت نوک الک = ?

$$V_c = V_B + \cancel{V_{rel}} + \omega \times r$$

3) حال اگر دستگاه مختصات را به الک جوش ندهیم ← $V_c = ?$

$$V_c = V_B + V_{rel} + \cancel{\omega \times r}$$

اما در واقع $\omega \times r$ بالایی همان V_{rel} پایینی است.



نکته‌اش در صفحه بعد ← $V_{rel} = \omega \times r$

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۷ Date. ۱۸ ( )

شنبه

شتاب:

$$v_A = v_B + v_{rel} + \omega \times r = v_B + (\dot{x}i + \dot{y}j) + \omega(xi + yj)$$

$$\Rightarrow a_A = a_B + (\ddot{x}i + \ddot{y}j) + (\dot{x}\dot{i} + \dot{y}\dot{j}) + \dot{\omega}(xi + yj) + \omega(\dot{x}i + \dot{y}j + x\dot{i} + y\dot{j})$$

$$\Rightarrow a_A = a_B + a_{rel} + \dot{\omega} \times r + 2\omega \times v_{rel} + \omega \times (\omega \times r)$$

داریم:

$$\dot{x}\dot{i} + \dot{y}\dot{j} = \dot{x}\,\omega \times i + \dot{y}\,\omega \times j) = \omega(\dot{x}i + \dot{y}j) = \omega \times v_{rel}$$

$$\omega(x\dot{i} + y\dot{j}) = \omega \times (x\omega \times i + y\omega \times j) = \omega \times (\omega \times r)$$

پس:

$\leftarrow$ شتاب کُلیوریس است شتاب کوریولیس

$$a_A = a_B + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + 2\omega \times v_{rel} + a_{rel}$$

اگر مسیر حرکت ذره A مشخص باشد:

$$a_A = a_{An} + a_{At}$$

در راستای مرکز مسیر است و اندازه‌اش $\frac{v^2}{\rho}$ است

و همچنین راستای a_{At} که مشخص است در راستای مماس بر مسیر حرکت، اما اندازه‌اش معلوم نیست.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

راستای اندازه a_{B_n} معلوم است اما تنها جهت a_{Bt} معلوم است
را البته اگر اندازه آن را نیز مساله به ما می دهد

همیشه راستای $\omega\times(\omega\times r)$ از نقطه مورد بررسی است تا مبدا دستگاه
مختصات ثانویه و مقدار عددی آن $r\omega^2$ است

ω و ω در صفحه، راستایشان عمود بر صفحه است اما در فضا 100٪
راستایشان یکی نیست

$\Leftarrow$ $\omega\times r$، راستایش عمود بر r است و اندازه‌اش $r\omega$ است

$\omega\times v_{rel}$: شرط وجودیت:
1) چرخش دستگاه
2) تغییر مکان ذره نسبت به دستگاه مختصات ثانویه

اندازه‌اش برابر است با:

ωv_{rel}

اما جهتش:
قاعده دست راست:
4 انگشت جهت ω (یا داخل صفحه یا بیرون صفحه)
چرخش 4 انگشت در جهت v_{rel}
جهت شصت برابر است با جهت $\omega\times v_{rel}$ که

اگر چرخش ساعتگرد باشد به سمت داخل صفحه و اگر پادساعتگرد باشد به سمت بیرون صفحه است

نکته: همواره راستای $\omega\times v_{rel}$ عمود بر v_{rel} است

ما می‌توانیم v_{rel} نداشته باشیم اما a_{rel} داشته باشیم
مثل موقعیتی که چرخی روی زمین می غلتد
اگر دستگاه مختصات ثانویه را روی زمین جوش دهیم
$\Rightarrow v_{rel}=0$; $a_{rel_t}=0$ اما: $a_{rel_n}=r\omega^2$

می خواهیم جهت $A \times B$ را مشخص کنیم: چهار انگشت در جهت A، بچرخش در جهت $B \Rightarrow$ شست جهت $A \times B$ را مشخص می کند **

Subject:
Year: $A \times B$ ~~Month~~ $B \times A$ Date.

a_{rel_n} برابر است با $\frac{V_{rel_n}^2}{\rho}$ شعاع مسیر حرکت ذره نسبت به دستگاه مختصات ثانویه

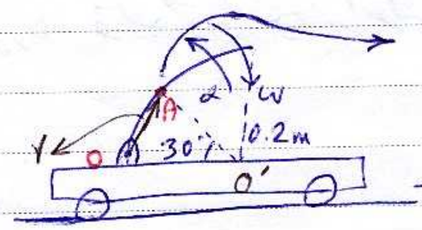
که جهتش نیز مشخص است

a_{rel_t}: جهتش که مشخص است اما اندازه اش می تواند مجهول باشد

$\Rightarrow$

$$a_{A_n} + a_{A_t} = a_{B_n} + a_{B_t} + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + 2\omega \times V_{rel} + a_{rel_n} + a_{rel_t}$$

مثال:



$V_{rel} = 0.5 \frac{m}{s}$

$\dot{V}_{rel} = a_{rel_t} = 0.8 \frac{m}{s^2}$

$v = 2 \frac{m}{s}$ $\omega = 3 \frac{rad}{s}$

$a = 5 \frac{m}{s^2}$ $\alpha = 4 \frac{rad}{s^2}$

شتاب مطلق ذره A ؟ (در لحظه خاص $\theta = 30°$)

یا مسیر حرکت مطلق ذره A برای ما قابل تجسم است که در این صورت a_A را بصورت a_{A_n} و a_{A_t} می نویسیم، یا قابل تجسم نیست که در این صورت دو مجهول خواهیم داشت (در حالت اول یک مجهول داریم که در واقع همان اندازه ی $|a_{A_t}|$)

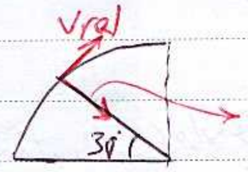
در ابتدا باید سیر a_A و a_B و a_{rel} را در صورت امکان تشخیص دهیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسیر a_B در راستای افق است ← a_{B_n} نداریم زیرا $r=\infty$

$$\ddot{a}_A = \underbrace{\cancel{a_{B_n}}}_{0} + a_{B_t} + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + 2\omega \times v_{rel} + a_{rel_n} + a_{rel_t}$$

ccw ، $\omega \times r$ ($\dot{\omega} \times r$)



جهت $2\omega \times v_{rel}$ با استفاده از قاعده دست راست

(راستایش همواره عمود بر v_{rel} است)

* دستگاه ثانویه را به الک جوش دادیم ← مسیر حرکت ذره نسبت به الک همان مسیر حرکت ذره نسبت به دستگاه ثانویه است.
←

$$a_{rel} = a_{rel_n} + a_{rel_t}$$

a_{rel_n} اندازه‌اش برابر است با $\frac{v_{rel}^2}{\rho}$

ρ ← شعاع انحنای منحنی نسبت به دستگاه مختصات ثانویه

$|a_{B_t}| = |a_B| = 5 \longrightarrow$

$|\omega \times (\omega \times r)| = 0.103 \times 9 = 0.927$ 75°

$|\dot{\omega} \times r| = 0.103 \times 4 = 0.412$ 75°

جهتش در واقع جهت α است
α پادساعتگرد ← جهتش به سمت خارج صفحه است

$|2\omega \times v_{rel}| = 2 \times 3 \times 0.5 = 3$ 30°

$|a_{rel_n}| = \frac{0.5^2}{0.2} = 1.25$ 30°

$|a_{rel_t}| = 0.8 \frac{m}{s^2} = \dot{v}_{rel}$ 60°

شعاع انحنای مسیر مطلق حرکت ذره A ؟

$a_{A_n} = \frac{v_A^2}{r} \Rightarrow r = \frac{v^2}{a_{A_n}}$ → سرعت مطلق A

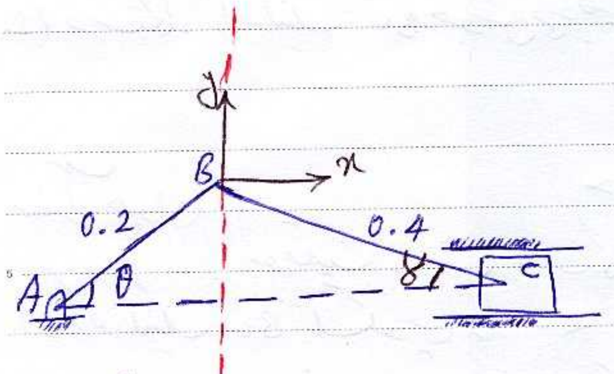
P4PCO

[redacted]

Subject:
Year. ۸۸ Month. 7 Date. 20

دوشنبه

مثال:



در لحظه خاصی که
$\theta = 30^\circ , \dot{\theta} = 2 \ rad/s$
$\ddot{\theta} = 5 \ rad/s^2$
$\Rightarrow v_C , a_C = ?$

در حرکت های نسبی، باید به دنبال 2 نقطه که بیشترین اطلاعات را راجع به سیر حرکتش و احیاناً سرعت و شتاب زاویه ای آن داریم، بگردیم که ⟸

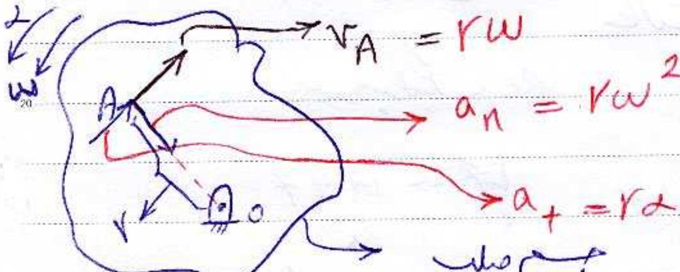
دستگاه مختصات ثانویه را روی یکی از آن 2 نقطه در نظر گرفته و سرعت و شتاب نسبی نقطه دیگر را نسبت به آن می سنجیم و ......

⟸ دستگاه مختصات ثانویه را روی B در نظر می گیریم:

1) دستگاه انتقالی: (دستگاه روی خط قرمز جا به جا شود)

$$v_C = v_B + \cancel{\omega \times r}_{\,0} + v_{rel}$$

نکته بسیار مهم:

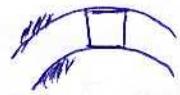


اگر نقطه O، مرکز دائمی دوران باشد و سرعت و شتاب زاویه ای عضو نیز مشخص باشد

⟸ خیلی آسان می توانیم سرعت و شتاب را برای هر نقطه روی این عضو می توانیم محاسبه کنیم ⟸ v_B قابل محاسبه است

اما برای v_{rel} داریم: $\Rightarrow v_{rel} = \dot{\theta} \times r$

⟸ اگر لینک BC را تلسکوپی بگیریم ⟸ $v_{rel} = \dot{\theta} \times r + \dot{r}$

اگر  ⇐ a_{C_n} هم می‌داشتیم

2) دستگاه را به لینک BC جوش می‌دهیم:

$V_C = V_B + \omega_{BC}\times r_{BC} + \cancel{V_{rel}}$ ⟶ صفر است چون:

موقعیت C نسبت به دستگاه مختصات ثانویه تغییر نمی‌کند (نه r تغییر می‌کند نه θ)

اما اگر لینک BC تلسکوپی بود ⇐

r تغییر می‌کرد ⇐ $V_{rel} \neq 0$

3) دستگاه مختصات ثانویه را به لینک AB جوش دهیم:

$$\Rightarrow V_C = V_B + \omega_{AB} r_{BC} + V_{rel}$$

که V_{rel} برابر است با:

$$V_{rel} = r_{BC}\times(\omega_{AB} \pm \omega_{BC})$$

اگر ωها در خلاف جهت هم باشند ⇐ با هم جمع می‌شوند

اگر ωها در جهت هم باشند ⇐ از هم کم می‌شوند

بهترین حالت: (توصیه حاج‌عوضی)

حالت دوم ②

$\Rightarrow |\omega_{BC}\times r_{BC}| = 0.4\,\omega_{BC}$ عمود بر لینک BC

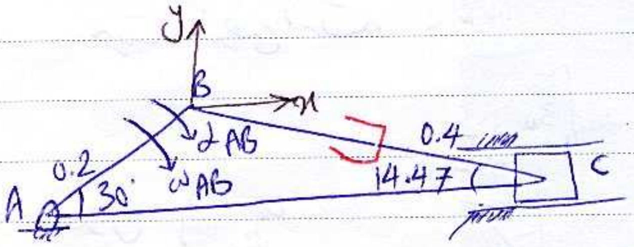
$\frac{0.4}{\sin 30} = \frac{0.2}{\sin \gamma} \Rightarrow \gamma = 14.47$ ⟶ 14.47

$V_B = 0.2\times 2 = 0.4 \Rightarrow$ (در جهت عمود بر AB (مماس بر مسیر حرکت)) با فرض ω_{BC} پادساعتگرد

$|V_C| = V_C \longrightarrow$ 30

$$\Rightarrow V_C i = 0.4(\sin 30 i - \cos 30 j) + 0.4\,\omega_{BC}(\sin 14.47 i - \cos 14.47 j)$$

$$a_{C_t} = a_{B_n} + a_{B_t} + \omega_{BC}\times(\omega_{BC}\times r_{BC}) + \dot{\omega}_{BC}\times r_{BC} + \cancel{2\omega\times V_{rel}}^{\,0} + \cancel{a_{rel}}^{\,0}$$



مثال: مثال قبلی با 2 درجه آزادی:

میله BC تلسکوپی است

$$\begin{cases} \omega_{AB} = 2\ rad/s \\ \alpha_{AB} = 5\ rad/s^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{BC} = -0.3\ m/s \\ \ddot{BC} = -0.5\ m/s^2 \end{cases}$$

مثبت $\dot{BC}$ ⇐ جهت BC و $\dot{BC}$ یکی است

مثبت $\ddot{BC}$ ⇐ طول BC در حال افزایش

2 نقطه را باید برگزینیم که بیشترین اطلاعات راجع به مسیر حرکتش و احیاناً سرعت و شتاب زاویه‌ای آن معلوم باشد

⇐

B: مسیر حرکتش دایره‌ای است به مرکز A و شعاع 0.2m

C: مسیر حرکتش روی افق است

⇐

دستگاه را روی B در نظر گرفته و نقطه C را نسبت به آن بررسی می‌کنیم

⇐

$$V_C = V_B + \omega \times r + V_{rel}$$

دستگاه ثانویه به لینک BC جوش داده شده ⇐

$$\overset{\checkmark 0}{V_C} = \overset{\checkmark\checkmark}{V_B} + \overset{\checkmark 0}{\omega_{BC}} \times r_{BC} + \overset{\checkmark\checkmark}{V_{rel}}$$

در اینجا V_{rel} از تغییر θ و یا تغییر طول BC رخ می‌دهد

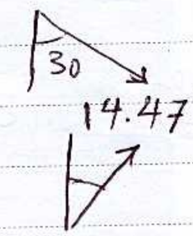
که در اینجا تغییرات θ را نداریم ⇐

$$V_{rel} = \dot{BC}$$

جهت فرضی است.

$|v_C| = v_C$ $\longrightarrow$

$|v_B| = 0.2\times 2 = 0.4$



$|\omega_{BC}\times r_{BC}| = 0.4\,\omega_{BC}$

با فرض ω_{BC} ↺

$v_{rel} = 0.3$

$$\Longrightarrow\quad v_C\, i = 0.4(\sin 30\, i - \cos 30\, j) + 0.4\,\omega_{BC}(\sin 14.47\, i + \cos 14.47\, j) + 0.3(-\cos 14.47\, i + \sin 14.47\, j)$$

2 معادله، 2 مجهول $\Leftarrow$

$v_C =$

$\omega_{BC} =$

حال برای شتاب داریم:

$$\overset{\checkmark 0}{a_{C_t}} = \overset{\checkmark\checkmark}{a_B} + \overset{\checkmark\checkmark}{\omega_{BC}\times(\omega_{BC}\times r_{BC})} + \overset{\checkmark 0}{\dot{\omega}_{BC}\times r_{BC}} + \overset{\checkmark\checkmark}{2\,\omega_{BC}\times v_{rel}} + \overset{\checkmark\checkmark}{a_{rel}}$$

$\Leftarrow$ چون شعاع مسیر حرکت C بی‌نهایت است $\Leftarrow$ $0 = a_{C_n}$

a_B نیز برابر $a_{B_t} + a_{B_n}$

$a_{B_n} = \omega_{AB}^2 \times r_{AB}$

$a_{Bt} = r_{AB}\times \alpha_{AB}$

$\omega_{BC}\times(\omega_{BC}\times r_{BC})$: جهتش در خلاف جهت r_{BC}

$\omega_{BC}\times v_{rel}$ $\Rightarrow$ با فرض درستی فرض قبلی!! $\Leftarrow$ جهتش عمود بر r_{BC} و به سمت پایین است

a_{rel} $\Rightarrow$ ((جهتش مشخص است (جهت حرکت مشخص است))

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال اگر دستگاه مختصات ثانویه، انتقالی باشد ⇐

$$v_C = v_B + \cancelto{0}{\omega \times r} + v_{rel}$$

اما:

$$v_{rel_r} = \dot{r} \quad , \quad v_{rel_\theta} = r\dot{\theta} \Rightarrow$$

$\omega \times r$ قبلی به صورت $r\dot{\theta}$ ظاهر شده است.

$$a_C = a_B + \omega_{BC} \times (\omega_{BC} \times r_{BC}) + \dot{\omega}_{BC} \times r_{BC} + 2\omega_{BC} \times v_{rel} + a_{rel}$$

تمام جملاتی که ω دارند ⇐ حذف می‌شوند

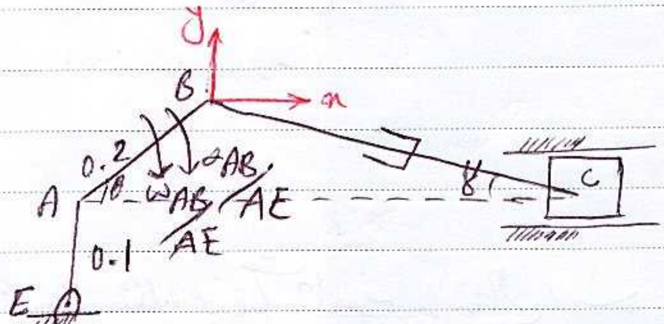
اما:

$$a_{rel} =$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال.

مثال قبل قبل با 3 درجه آزادی:



$\theta = 30 \Rightarrow$
$\gamma = 14.47$

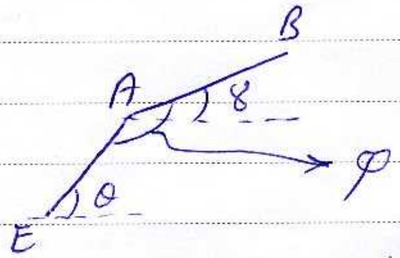
$$\begin{cases} \omega_{AB/AE} = 2\ rad/s \downarrow \\ \alpha_{AB/AE} = 5\ rad/s^2 \downarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{B}_c = 0.3\ m/s \\ \ddot{B}_c = 0.5\ m/s^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_{AE} = 3\ rad/s \\ \alpha_{AE} = 6\ rad/s \end{cases}$$

پایه الکتروموتور به لینک AE متصل شده است ⇐

چون سرعت الکتروموتور برابر است سرعت روتور (چرخنده) نسبت به استاتور (معمولا ثابت) ⇐ ω_{AB} نسبت به AE سنجیده می شود



$\Rightarrow \omega_{AB} = \dot{\gamma}$ علامت زاویه ها مثبت نظر گرفته

$\omega_{AE} = \dot{\theta}$

$$\omega_{AB/AE} = \dot{\varphi} \Rightarrow \omega_{AB/AE} = \omega_{AE} + \omega_{AB}$$

خلاف جهت هم است

$$\Rightarrow \omega_{AB} = \omega_{AB/AE} - \omega_{AE}$$

$$\Rightarrow \omega_{AB} = -2+3 = 1\ rad/_{s} \circlearrowleft = \dot{\theta}$$
$$\alpha_{AB} = -5+6 = 1\ rad/_{s^2} = \ddot{\theta}$$

مسأله از ما سرعت و شتاب زاویه‌ای پیستون را می‌خواهد:

با درنظر گرفتن دستگاه مختصات ثانویه روی A $\Leftarrow$ سرعت و شتاب زاویه‌ای B را می‌یابیم (دستگاه مختصات ثانویه را به AB جوش دادیم)

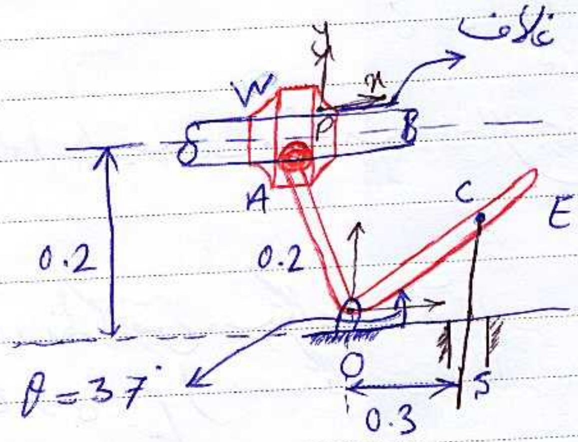
$$\Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega_{AB} \times r_{AB} + \cancelto{0}{v_{rel}}$$

$$\vec{a}_B = a_A + \omega_{AB} \times (\omega_{AB} \times r_{AB}) + \dot{\omega}_{AB} \times r_{AB} + \cancelto{0}{2\omega \times v_{rel}} + \cancelto{0}{a_{rel}}$$

$$a_A \to a_{A_n} + a_{A_t}$$

$$a_{A_t} \to \text{عمود بر } AE$$

مثال:



پین A مقید است که همواره داخل شیار قائم حرکت کند

پین C هم مقید است داخل شیار L شکل باشد

سرعت و شتاب عضو CS = ?

که در واقع همان سرعت و شتاب پین C است.

نکته: زیرا جسم صلبی که دارای انتقال است ⇐ سرعت و شتاب همه نقاطش یکی است
دوران ندارد

Mr. Haj musa:

مسئله پیچیده به پیچیده و مشکل نیست بلکه مجموعه‌ای از نکات ساده است.

اطلاعات مسئله:

$V_W = 0.2\ m/s \ ,\ a_W = 0 \Rightarrow a_{CS} = ?$

ابتدا باید ... یا لینک L شکل را بیابیم
دستگاه مختصات ثانویه را در O به لینک L شکل جوش می‌دهیم.

$$\overset{\checkmark}{V_C} = \overset{\text{صفر}}{\cancel{V_O}} + \overset{\checkmark}{\omega_{AE} \times r} + \overset{\checkmark}{V_{rel_2}}$$

V_C در جهت قائم است و $\omega \times r$ عمود بر شیار و V_{rel} در راستای شیار است

V_{rel} از تغییر طول OC رخ می‌دهد (زاویه ثابت است)

برای یافتن ω لینک 2 شکل:

به کمک صحبت های حاجی:

ابتدا ما باید 2 نقطه را که بیشترین اطلاعات را راجع به آن داریم بیابیم:

1) نقطه A: دایره‌ای به شعاع 0.2 و مرکز O مسیر حرکتش است

2) نقطه‌ای بر روی غلاف (غلاف جسم صلبی است که تنها انتقال دارد)

⇐ دستگاه را بر روی نقطه‌ای در غلاف (انتخابی) بر می‌گزینیم ⇐ آن نقطه را P می‌نامیم

$$v_A = v_P + \cancel{\omega} \times r + v_{rel}$$

$|v_A| = 0.2 \times \omega_{AOE}$ ↗ 37°   با فرض ω_{AOE} ↺

$|v_P| = 0.2 \longrightarrow$ $|v_{rel}| = v_{rel} \uparrow$ فرض

$\Rightarrow$

$$0.2\,\omega_{AOE}(\cos 37\, i + \sin 37\, j) = 0.2\, i + v_{rel}\, j$$

$\Rightarrow$

$$0.16\,\omega_{AOE} = 0.2 \Rightarrow \omega_{AOE} = \frac{5}{4}$$

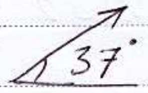
$$0.12\,\omega_{AOE} = v_{rel_1}$$

$$a_A = \cancel{a_P} + a_{rel} \Rightarrow a_{A_t} + a_{A_n} = a_{rel_t}$$

اگر شیار غلاف منحنی شکل می‌بود! ⇐ a_{rel_n} هم می‌داشتیم!!

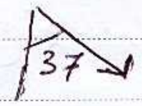
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$|a_{At}| = 0.2\,\alpha_{AoE}$ — راستایش عمود بر A_o است



بافرض α_{AoE} ⟸

$|a_{An}| = 0.2\left(\frac{5}{4}\right)^2$ — از A به سمت O



$|a_{rel_t}| = a_{rel_t}$ — بافرض : ↓

$$\Rightarrow 0.2\,\alpha_{AoE}(\cos 37\, i + \sin 37\, j) + \frac{5}{16}(\sin 37\, i - \cos 37\, j) = -a_{rel}\, j \Rightarrow$$

2 معادله و 2 مجهول

a_{rel} و α_{AoE} ⟵ j و i

⟸ با این اطلاعات v_c پیدا می‌شود.

حال:

$$a_c = \cancel{a_o} + \omega \times (\omega \times r_{oc}) + \dot{\omega} \times r_{oc} + 2 \times \omega \times v_{rel_2} + a_{rel_t}$$

بافرض ساعتگرد ω و v_{rel_2} از O به C ⟸ جهتش طبق قاعده دست راست عمود بر OE و به سمت بالا است.

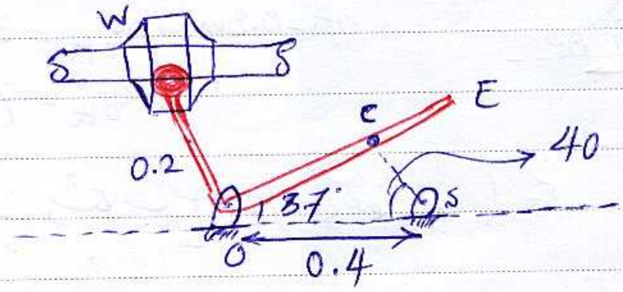
a_{rel} فقط در جهت تانژانت داریم

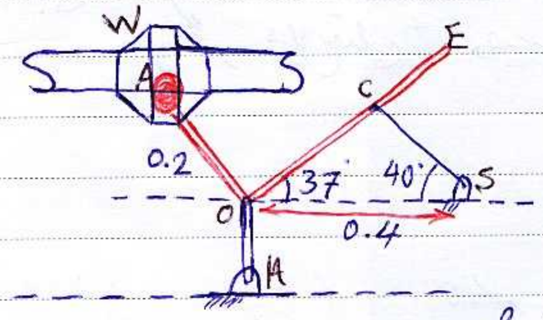
[redacted]

Subject:
Year.　Month.　Date.　( )

حاجی:

حال اگر سؤال قبلی را متوجه شدید، سؤال زیر را حل کنید:





مثال:

حال با همان اطلاعات مثال قبل و اینکه

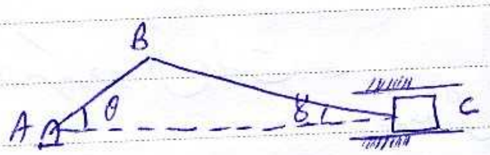
$OH = 0.2m$ ، $\omega_{OH} = 3\ rad/s$

$\alpha_{OH} = 7\ rad/s^2$

که سرعت و شتاب پین C را (همان عضو CS) = ؟

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در مکانیزم لنگ ولغزان :
شتاب Max پیستون را
برحسب θ بیابید ($\dot{\theta}$ ثابت است)



نمودار $a-\theta$?

$$AC = AB\cos\theta + BC\cos\gamma$$

$$, \frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin\theta} \Rightarrow \sin\gamma = \sin\theta \times \frac{AB}{BC} \quad ① \Rightarrow$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\left(\frac{AB}{BC}\sin\theta\right)^2} \Rightarrow AC = AB\cos\theta + BC\sqrt{\cdots\cdots}$$

$$\Rightarrow \dot{AC} = AB\,\dot{\theta}\sin\theta - BC\,\dot{\gamma}\sin\gamma$$

$$\xRightarrow[\text{نسبت به زمان}]{① \text{ مشتق}} \dot{\gamma}\cos\gamma = \dot{\theta}\cos\theta \times \frac{AB}{BC} \Rightarrow \dot{\gamma} = \dot{\theta}\,\frac{\cos\theta}{\cos\gamma} \times \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \dot{AC} = -AB\,\dot{\theta}\sin\theta - BC\,\dot{\theta}\cos\theta \times \frac{AB}{BC} \times \frac{1}{\sqrt{\cdots}} \times \frac{AB}{BC}\cdot\sin\theta$$

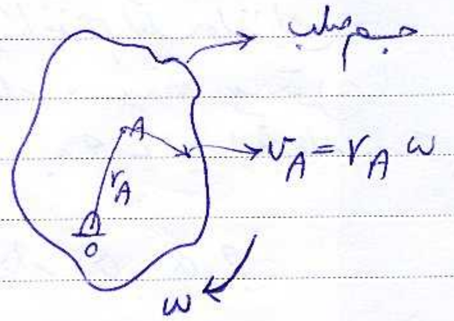
$$\ddot{AC} = f(\theta, \dot{\theta}, AB, AC) \Rightarrow$$

در طراحی این مکانیزم:
طول AB خیلی مهم است

$\Leftarrow$ در ماشین های پرقدرت (پرتوان)، AB بزرگ انتخاب می شود
اما: در ماشین های پرشتاب، AB کوتاه انتخاب می شود.

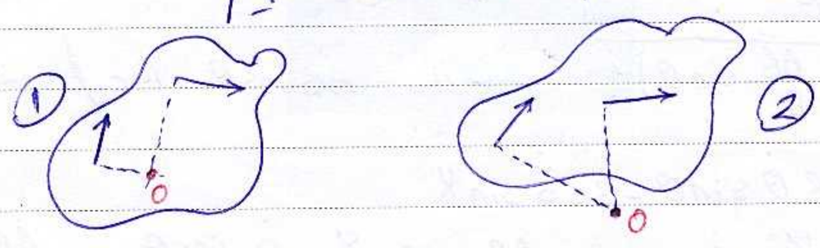
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مرکز آنی دوران:



O مرکز دوران است ⇐ سرعتش صفر است

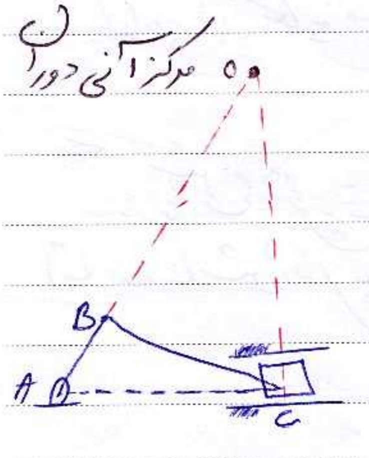
اگر سرعت 2 نقطه از جسم صلب را داشته باشیم با عمود کردن راستایشان بر هم ، مرکز دوران را می یابیم



نقطه دوران خارج از جسم صلب هم می تواند بیفتد

در شکل های ① و ② ، مرکز دورانی که بدست آوردیم ، مرکز آنی دوران است یعنی تنها سرعت در آنجا صفر است اما شتاب نه!!

اما در مرکز دوران دائم ، نه تنها سرعت بلکه شتاب هم در آنجا صفر است.



⇐ در یک زمان مشخص می توانیم سرعت را برای هر نقطه دلخواه (تنها سرعت را می توان از این روش یافت یعنی این روش برای یافتن شتاب کاربرد ندارد) بیابیم

برای دو نقطه B و C ؛ (نقطه A را نمی توان در نظر گرفت چون خودش مرکز دائمی دوران است)

⇒

$v_B = r_{AB} \times \omega_{AB}$ ($v_B = r_{OB} \times \omega_{BC}$) ⇒

$$r_{AB}\,\omega_{AB} = r_{OB} \times \omega_{BC} \Rightarrow \omega_{BC} = \frac{r_{AB}}{r_{OB}}\,\omega_{AB}$$

$$\Rightarrow$$

$$V_C = r_{OC} \times \omega_{BC} = \frac{r_{OC} \times r_{AB}}{r_{OB}} \times \omega_{AB}$$

تحلیل فیزیکی:

اگر یک میله را به BC جوش دهیم بطوری که آن میله از O بگذرد (جوش دادیم ⇐ کلاً یک سیستم است) ⇐ یک نقطه از میله ⇐ در آن نقطه از میله سرعت در آن لحظه در O صفر است (جسم صلبی که دوران دارد هر نقطه اش به دور خودش را می زند (سرعت ها مختلف اند))

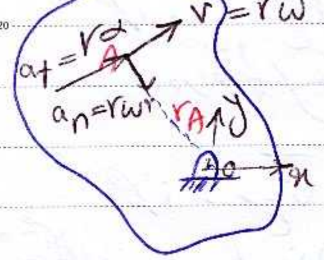
اما:

شتاب O صفر نیست زیرا مرکز دوران تغییر می کند (سرعت در لحظه بعد در نقطه دیگری صفر است) (سرعت در لحظه بعد در آن نقطه صفر نیست)

مرکز آنی دوران:

نقطه ای است واقع بر روی جسم صلب یا امتداد مجازی جسم صلب، که در آن لحظه خاص سرعتش صفر است.

این روش برای شتاب قابل استفاده نیست زیرا:



دستگاه مختصات نوع ۲ را در O در نظر می گیریم پس:

$$v_A = \cancel{v_O} + r \times \omega + \cancel{v_{rel}} \Rightarrow v_A = r\omega$$

$$a_A = \cancel{a_O} + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$

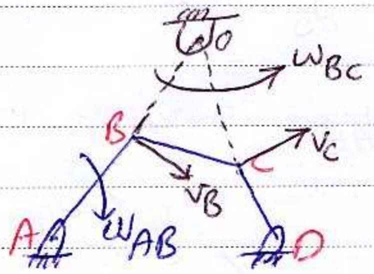
اگر O مرکز دائمی دوران باشد ⇐ $a_O = 0$

اما اگر O مرکز آنی دوران باشد ⇐ $a_O \neq 0$

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۷ Date. 25

شنبه:

مرکز آنی دوران:



$v_B = \omega_{AB} \times r_{AB}$,
$v_B = \omega_{BC} \times r_{OB}$ $\Rightarrow \omega_{BC} = \frac{r_{AB}}{r_{OB}} \times \omega_{AB}$

$\Rightarrow$

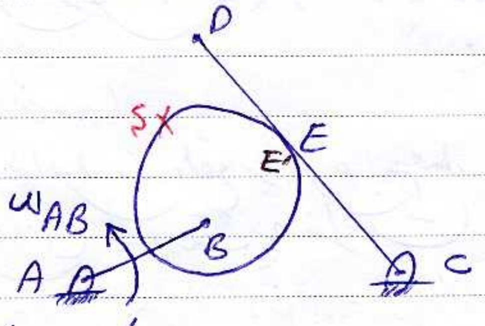
$$|v_C| = r_{OC} \times \frac{r_{AB}}{r_{OB}} \omega_{AB} \quad , \quad \omega_{CD} = \frac{v_C}{r_{CD}}$$

$\Rightarrow$

$$\omega_{CD} = \frac{r_{OC}}{r_{CD}} \times \frac{r_{AB}}{r_{OB}} \omega_{AB}$$

جهت ω_{BC} و v_C از روی جهت v_B یافت شده است.

مثال مَن درآوردی!!!



E متعلق به لینک CD است

و E' متعلق به دیسک است

⇐

ح۱: $\vec{v}_E = \vec{v}_{E'}$ ⇐ این دو جسم نسبت به هم (لینک و دیسک) در نقطه‌ی تماس غلتش دارند

ح۲: $\vec{v}_E \neq \vec{v}_{E'}$ ⇐ این دو جسم نسبت به هم در نقطه‌ی تماس غلتش توأم با لغزش دارند (یا لغزش کامل)

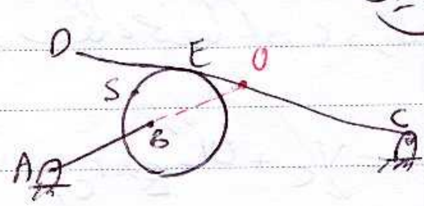
در مسأله فرض می‌کنیم که غلتش داریم ⇐ $v_D , v_S = ?$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

از مرکز آنی دوران داریم:

استاد سرعت در 2 نقطه از دیسک را داریم: یکی نقطه B که عمود بر لینک AB، و دیگری E (با توجه به غلتش و $V_E = V_{E'}$)

$\Leftarrow$



$$\omega_{دیسک} \leftarrow \omega_B = \frac{r_{AB}\,\omega_{AB}}{r_{OB}}$$

$$V_{E'} = V_E = \omega_B \times r_{OE'}$$

$$V_E = V_{E'} = \frac{r_{AB}}{r_{OB}}\,\omega_{AB} \times r_{OE'} \quad , \quad V_E = \omega_{CD} \times r_{CE}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{CD} = \frac{r_{AB} \times r_{OE'}}{r_{OB} \times r_{CE}}\,\omega_{AB}$$

$\Leftarrow$ V_D و V_S را با توجه به اینکه ω لینک CD و دیسک را داریم می‌توانیم بیابیم:

$$V_D = r_{OD} \times \omega_{CD} \quad , \quad V_S = \omega_B \times r_{OS}$$

$\Leftarrow$ سرعت هر نقطه دیگر را نیز که روی لینک و یا دیسک باشد را نیز می‌توانیم بیابیم.

نکته:

سرعت زاویه‌ای همیشه راجع به یک جسم صلب گفته می‌شود اما سرعت می‌تواند راجع به نقطه نیز مطرح گردد.

شتاب زاویه‌ای نیز همین گونه است.

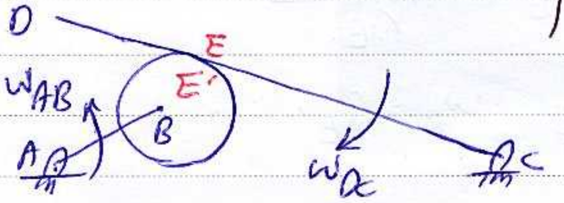
Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال اگر لغزش نیز داشته باشیم !!! (غلتش توأم با لغزش)

⇐

چون مسأله با 2 درجه آزادی می‌شود ⇐ در صورت مسأله یک دسته اطلاعات دیگر نیز باید باشد ⇐ ω_{DC} نیز برای ما معلوم است

دستگاه مختصات را در C در نظر می‌گیریم:



$$\ddot{V}_{E'} = \cancel{V_C} + \omega_{CE} \times r_{CE} + V_{rel}$$

دستگاه را به DC جوش دادیم:

$$V_{rel} = \cancel{V_{E_{rel}}} + V_{E'/E} \Rightarrow V_{rel} = V_{E'/E}$$

جهتش مماس بر لینک است از دید دیسک. نمی‌تواند در شکم لینک برود!

اما:

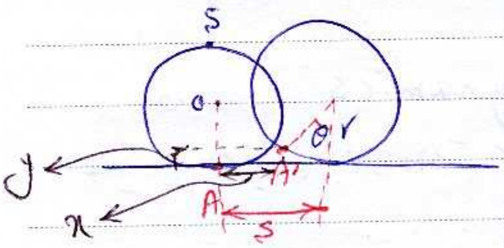
حال دستگاه ثانویه را در B جوش داده بر دیسک در نظر می‌گیریم:

$$\ddot{V}_{E'} = V_B + \omega_B \times r_{BE} + \cancel{V_{rel}}$$

زیرا E نقطه‌ای از دیسک است که همراه با دیسک در حال چرخش است.

Subject:
Year.	Month.	Date.	( )

سینماتیک چرخ :



if $s = r\theta \Rightarrow$ غلتش کامل

if $s = 0 \Rightarrow$ لغزش کامل

if $s \neq r\theta \Rightarrow$ غلتش همراه با لغزش

در غلتش کامل داریم:

$$x = r\theta - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta)$$
$$y = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta) \Rightarrow$$

$$\dot{x} = r\dot{\theta}(1 - \cos\theta)$$
$$\dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow$$

سرعت نقطه‌ای از چرخ که با زمین در غلتش کامل، در تماس است، در واقع همان سرعت زمین است (صفر است)

نکته‌ی بالا در واقع همان تعریف غلتش کامل صفحه‌ی قبل است.

حال برای شتاب داریم:

$$\ddot{x} = r\ddot{\theta}(1 - \cos\theta) + r\dot{\theta}^2\sin\theta + \ddot{X}$$
$$\ddot{y} = r\ddot{\theta}\sin\theta + r\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{Y}$$

شتاب سطح زیرین

در $\theta = 0$ داریم $\ddot{x} = 0$ یعنی: شتاب نسبی جسم در راستای x ها صفر است

اگر سطح زیرین (زمین) شتاب نداشته باشد!! شتاب در راستای x صفر است

$$\ddot{y} = r\omega^2$$

در واقع مرکز چرخ هنگام غلتش کامل چرخ، مرکز دائم دوران نسبت زمین؛ مرکز دائم دوران نباید موقعیتش نسبت به زمان تغییر کند ← و a_n هم دارد

ω و α، سرعت و شتاب زاویه‌ای چرخ نسبت به زمین است

Mr. Hajmusa:

در Dynamics همیشه هنگام مطرح کردن سرعت و شتاب همیشه و همیشه، از خودت بپرس! سرعت و شتاب نسبت به چی و کجا !!

حال:

با توجه به اینکه، سرعت در A صفر شد ⇐ A را مرکز آنی دوران در نظر گرفته و داریم:

سرعت مرکز چرخ $= V_0 = r\omega$

سرعت مرکز چرخ در واقع برابر است با: سرعت ماشین

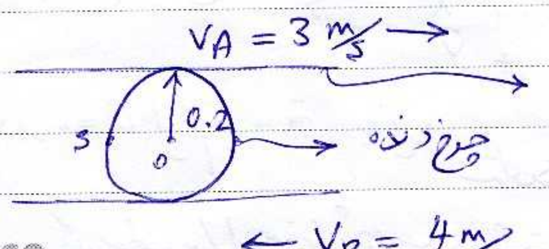
$V_s = 2r \times \omega \Rightarrow V_s = 2V_0$

اگر لغزش کامل داشته باشیم (ماشین گیر کرده در برف که بوکس و باد!! می‌کند) ⇐ مرکز دوران، مبدا چرخ است.

اگر غلتش کامل داشته باشیم ⇐ نقطه تماس با زمین، مرکز آنی دوران

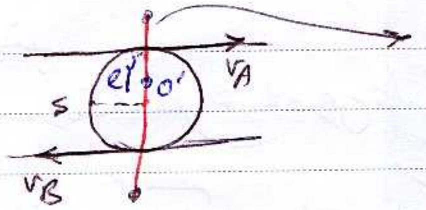
اگر غلتش همراه با لغزش باشد ⇐ مرکز دوران، بین O و A است

مثال:



شانه $\Rightarrow \vec{V_0}, \vec{V_c} = ?$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مرکز آنی دوران روی این خط است

اما اگر فرض کنیم که مرکز آنی دوران بالا باشد ⇐ با توجه به V_A ⇐ ω ساعتگرد ⇐ جهت V_B باید به راست باشد ×

و اگر فرض کنیم که مرکز آنی دوران پایین باشد ⇐ با توجه به V_B ⇐ ω ساعتگرد ⇐ جهت V_A باید به چپ باشد ×

⇐ مرکز آنی دوران در داخل چرخ دنده است (نزدیک به نقطه دارای سرعت کمتر)

⇐

$$3 = e\omega \Rightarrow \omega = \frac{3}{e}$$

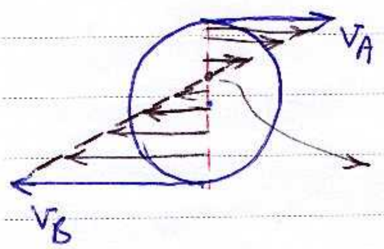
$$4 = (0.4-e)\,\omega \Rightarrow 4 = (0.4-e)\frac{3}{e} \Rightarrow e = \frac{1.2}{7}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{21}{1.2} \Rightarrow V_o = \frac{21}{1.2}\left(0.2 - \frac{1.2}{7}\right)$$

$$V_s = r_{os'} \times \omega \quad , \quad r_{os'} = \sqrt{\left(0.2-\frac{1.2}{7}\right)^2 + (0.2)^2}$$

v Profile :

پروفیل سرعت :



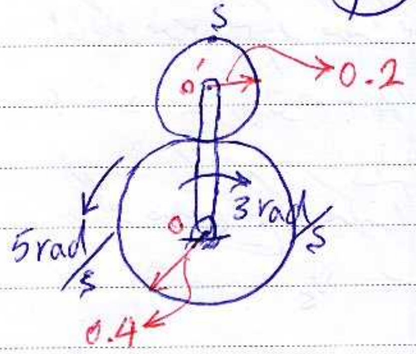
تناسب بین اندازه V_A و V_B باید رعایت شود.

مرکز آنی دوران

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲۷ مهر ۸۸ — دوشنبه

سرعت نقطه s با فرض غلتش کامل دو دیسک روی هم:



ابتدا باید مرکز آنی دوران دیسک بالایی را پیدا کنیم برای این کار نیاز به 2 نقطه روی دیسک داریم که سرعتشان معلوم باشد ⇐

$v_{o'} = (0.4+0.2)\times 3 = 1.8$

$v_{\text{تماس}} = 5\times 0.4 = 2$

چون غلتش کامل داریم ⇐ سرعت در محل تماس در 2 دیسک برابر است

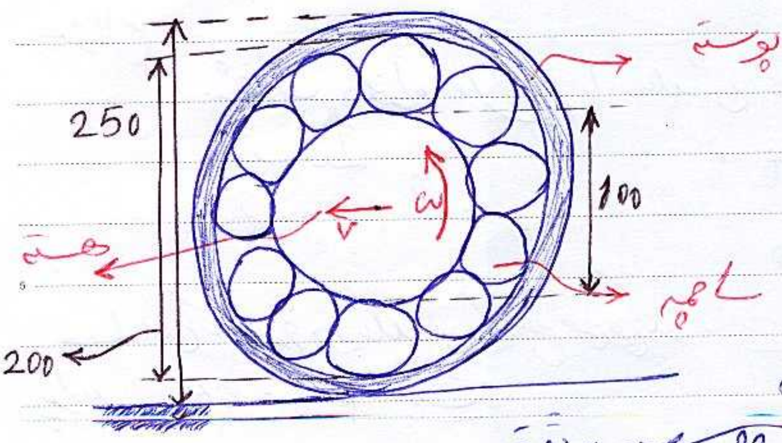
$$\Rightarrow \frac{1.8}{e} = \frac{2}{0.2-e} \Rightarrow \omega_{o'} = \frac{1.8}{e}$$

$$\Rightarrow (e = 0.1) \quad \omega_{o'} = 18 \ rad/s$$

$$\Rightarrow v_s = (0.2+e)\,\omega_{o'} = 0.3\times 18 = 4.8$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

شکل:



بلبرینگ روی زمین می غلتد

هسته با سرعت زاویه‌ای ω و سیستم با $V = 0.9$ می چرخد

$\omega = 240\,rpm$

سرعت زاویه‌ای ساچمه چه؟ ← دور بر دقیقه

سرعت زاویه‌ای پوسته $\omega_1 = \frac{0.9}{0.125} = 7.2\ rad/s$

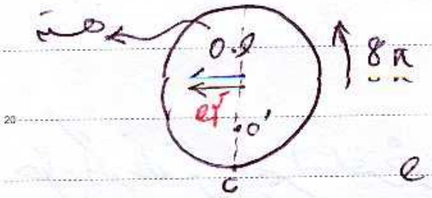
چون غلتش کامل داریم.

سرعت نقاط تماس ساچمه با بقیه‌ی اعضا برابر سرعت آن اعضا است.

حال باید مرکز آنی دوران هسته را بیابیم ←

$\omega_{\text{هسته}} = \frac{240 \times 2\pi}{60} = 8\pi\ rad/s$

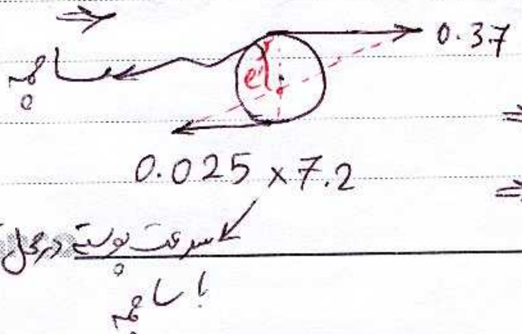
با توجه به جهت V و ω



← مرکز آنی دوران پایین مرکز هسته است.

$e \times 8\pi = 0.9 \Rightarrow e = 0.035$

$\Rightarrow v_c = 0.015 \times 8\pi = 0.37 \Rightarrow$ برابر با سرعت در نقطه‌ی تماس با ساچمه است ←



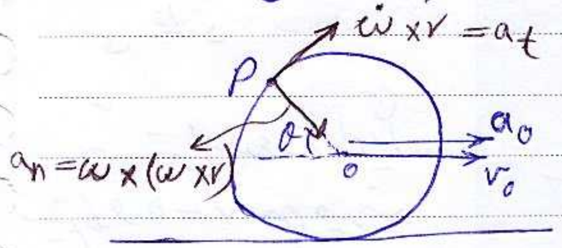
$\Rightarrow \frac{0.37}{e'} = \frac{0.18}{0.05 - e'} \Rightarrow e' = 0.03$

$\Rightarrow \omega_{\text{ساچمه}} = \frac{0.37}{0.03} = 12.3$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سؤال :

شتاب یک نقطه دلخواه روی چرخ را در غلتش کامل چگونه می‌توان یافت :



$a_P = ?$

مسافتی که چرخ در غلتش کامل طی می‌کند برابر $s = r\theta$ است :

$$\dot s = r\dot\theta \Rightarrow \dot\theta = \frac{\dot s}{r} \Rightarrow \omega = \frac{v_0}{r}$$

$$\ddot s = r\ddot\theta \Rightarrow \ddot\theta = \frac{\ddot s}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{a_0}{r}$$

دستگاه را روی مبدا O جوش می‌دهیم :

$$a_P = a_0 + \omega \times (\omega \times r) + \dot\omega \times r$$

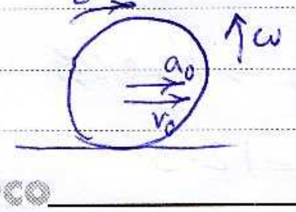
$$\Rightarrow a_P = a_0 + \left(r\left(\frac{v_0}{r}\right)^2\right)_n + \left(\left(\frac{a_0}{r}\right) r\right)_t \Rightarrow$$

$$a_P = \left(a_0 + \frac{v_0^2}{r}\cos\theta + a_0\sin\theta\right)i + \left(a_0\cos\theta - \frac{v^2}{r}\sin\theta\right)j$$

if $\theta = 270°$ (تماس با زمین) $\Rightarrow a_P = \frac{v^2}{r}\, j$

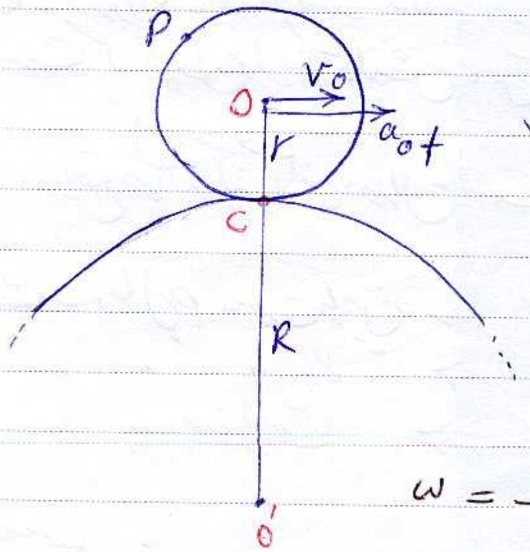
حال اگر غلتش همراه لغزش باشد :

چون در این حرکت سرعت و شتاب با سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای ارتباطی ندارد ⇐ ω و α را نیز مسئله باید علاوه بر v_0 و a_0 بدهد



PAPCO

مثال:



چرخ دنده پایین ثابت است اما
چرخ دنده بالایی دارای غلتش کامل است

سرعت و شتاب مرکز چرخ دنده را داریم
⇐ شتاب نقطه دلخواه P را می‌خواهیم:

$$\omega = \frac{v_o}{r}$$

چون غلتش کامل داریم و دیسک پایینی ثابت است ⇐
در محل تماس دو دیسک:
سرعت صفر است و شتاب در جهت نرمال برابر $r\omega^2$ و
شتاب در جهت تانژانت هم صفر است ⇐
می‌توان این نقطه را مرکز آنی دوران در نظر گرفت ⇐

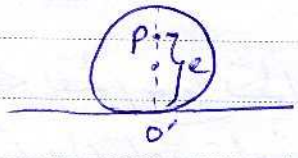
$$v_o = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_o}{r}$$

نکته: جهت ω و α از جهت v_o و a_o بدست می‌آید (a در جهت α) (v در جهت ω)

همچنین:

$$\alpha = \frac{a_{ot}}{r}$$

زیرا:
(اثبات α): (شتاب تانژانت صفر):
دیسک در غلتش کامل ⇐ محل تماس مرکز آنی دوران ⇐
a_{ot} و v_o را هم داریم:



$$a_p = a_{o'} + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$

$$\Rightarrow a_p = r\omega^2 j + (-e\omega^2) j + e\alpha i$$

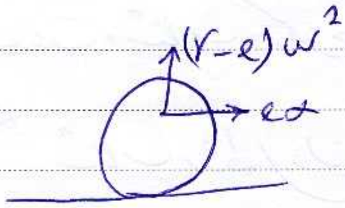
$$\Rightarrow a_p = \omega^2 (r-e) j + e\alpha i$$

Subject:
Year. Month. Date.

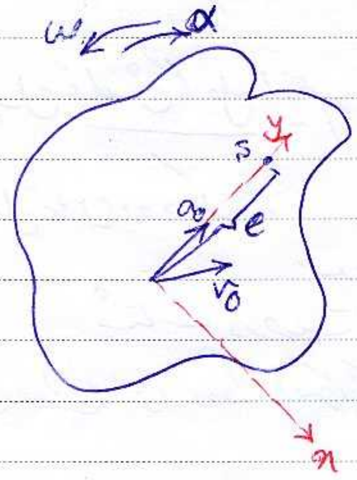
$e\alpha$ راستای

e: در واقع فاصله‌ای است که نقطه‌ی مورد بررسی تا نقطه‌ای دارد که شتابش در راستای x صفر است که چون اینجا غلتش کامل داریم:

این نقطه (نقطه‌ی شتاب تانژانت صفر) در واقع همان مرکز آنی دوران است:



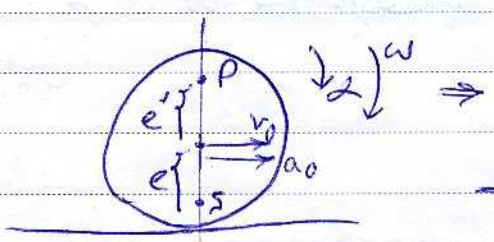
شتاب نرمال P به سمت پایین $\Leftarrow$ if $e>r$
if $e<r \Rightarrow$ بالا " " "
if $e=r \Rightarrow$ صفر است " "



همچنین:

$$a_s = a_0 + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$
$$\Rightarrow a_s = a_0 j - e\omega^2 j + e\alpha i$$
$$\Rightarrow a_{s_i} = e\alpha$$

همچنین:



$$\Rightarrow a_s = a_0 + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$
$$\Rightarrow a_s = a_0 i + e\omega^2 j - e\alpha i$$

if:
$$\Rightarrow a_{s_x} = 0 \Rightarrow a_0 = e\alpha \Rightarrow e = \frac{a_0}{\alpha}$$

$\Leftarrow$ نقطه‌ی s را نقطه‌ی شتاب تانژانت صفر گوییم $(a_{s_x} = 0)$ که برای یافتن این نقطه داریم:

$$e = \frac{a_0}{\alpha}$$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

که اگر غلتش کامل داشته باشیم این نقطه همان مرکز آنی دوران است.

حال برای شتاب نقطه P داریم:

$$a_{P_x} = (e' + e)\alpha$$

یعنی: اگر نقطه شتاب تانژانت صفر را بیابیم ⇐ شتاب هر نقطه دلخواه روی سیستم را نیز می‌توانیم با استفاده از فرمول زیر (البته شتاب تنها در راستای تانژانت (x)) بیابیم:

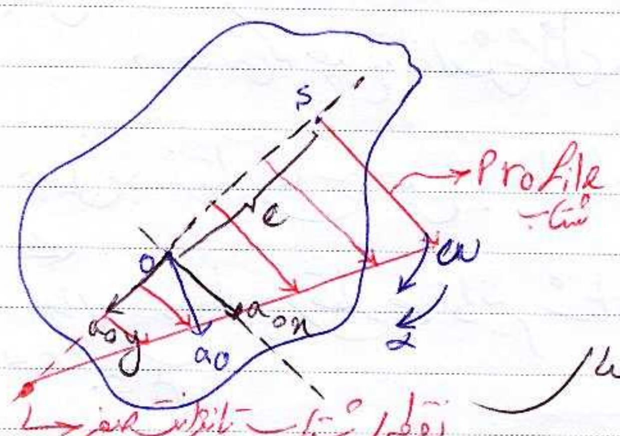
$$a_{P_x} = e\alpha$$

که:

α: شتاب زاویه‌ای دستگاه ما است

e: فاصله نقطه مورد بررسی تا نقطه شتاب تانژانت صفر است

بالاخره: حالت کلی:



شتاب نقطه o را داریم ⇐ شتاب نقطه s را می‌خواهیم

با در نظر گرفتن دستگاه مختصاتی که یک راستای آن از s بگذرد داریم:

$$\Rightarrow a_{s_x} = a_{o_x} + e\alpha$$

⇐ هرچه e کمتر شود (از بالا به پایین حرکت می‌کنیم) ⇐ به نقطه‌ای می‌رسیم که یعنی به مبدا می‌رسیم و حال: $a_{s_x} = a_{o_x}$

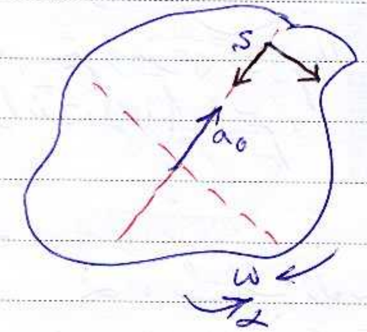
Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر همچنان به حرکت خود ادامه دهیم در نقطه‌ای پایین‌تر از مرکز (o) داریم:

$$a_{o_x} = e\alpha$$

یعنی $a_{s_x} = 0$ که در واقع این نقطه همان نقطه‌ی شتاب تانژانت صفر است

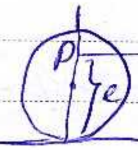
حال اگر محور را دقیقاً بر روی بردار شتاب در نظر بگیریم:



$$\Rightarrow a_{s_x} = \cancel{a_{o_x}}^{0} + e\alpha$$

$$\Rightarrow a_{s_x} = e\alpha$$

از این حالت خاص: زیاد استفاده می‌کنیم

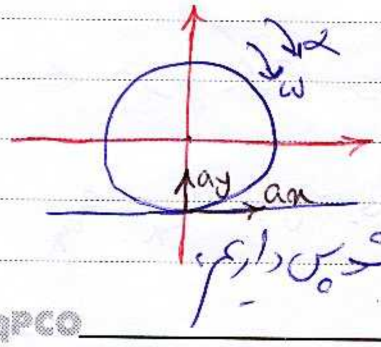


پس: در حالتی که چرخ غلتش کامل دارد داریم: $e\alpha = a_{P_x}$

چون در نقطه‌ی تماس چرخ با سطح تماس، شتاب در جهت x ها داریم

⇐ برای هر نقطه روی فلکر می‌توانیم شتاب در جهت x آن را با استفاده از $e\alpha$ بیابیم

حال اگر: غلتش توام با لغزش باشد:

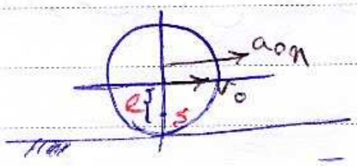


نقطه‌ی تماس چرخ با زمین را نمی‌توان به عنوان نقطه‌ی تانژانت صفر در نظر گرفت. اما حتماً نقطه‌ای هست که شتاب تانژانت در آنجا صفر باشد پس داریم:

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

توجه کن که سطح زیر ثابت است.



فرض می‌کنیم که آن نقطه باشد ⇐

$$a_{on} = e\alpha \Rightarrow e = \frac{a_{on}}{\alpha}$$

همچنین نقطه‌ای وجود دارد که سرعت در آنجا صفر است
یعنی مرکز آنی دوران ⇐

$$e'\omega = v_0 \Rightarrow e' = \frac{v_0}{\omega}$$

e' و e در حالتی که غلتش کامل داشته باشیم روی هم می‌افتند!!!
البته امکان دارد که
نسبت $\frac{a_{on}}{\alpha}$ و v_0/ω نیز با هم برابر شود اما غلتش کامل نداشته باشیم.

حال به ادامه‌ی مثال می‌رسیم!!!

چون چرخ زیری ثابت است ⇐
محل تماس 2 دیسک همان مرکز آنی دوران
و نقطه‌ی شتاب تانژانت صفر است ⇐

$$\omega = \frac{v_0}{r} , \quad \alpha = \frac{a_{ot}}{r}$$

$$\Rightarrow a_p = a_{ot}\, i - \frac{v_0^2}{(r+R)^2}\, j + r\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 j - \frac{a_{ot}}{r} \times r\, i$$

شتاب نرمال a_0

مرکز چون o می‌چرخد دایره‌ی کوچکتر

است

با توجه به جهت r و a_{ot} ⇐ α پادساعتگرد و

$$\Rightarrow a_p = v_0^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+R}\right) \Rightarrow a_p = v_0^2 \frac{1}{r(1+\frac{1}{R})}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ز) اگر سطح زمین صاف و بدون انحنا (خط مستقیم) باشد ⇐

$R \to \infty \Rightarrow$

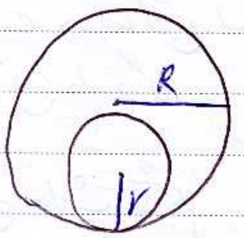
$$a_p = \frac{v_0^2}{r}$$

حال اگر:

$R \to 0 \Rightarrow$ یعنی مثلاً دیسک بالایی حول یک نقطه بچرخد

$\Rightarrow a_p = 0$ (سرعت مرکز دوران صفر است)

حال اگر چرخش داخلی باشد یعنی:



$$\Rightarrow a_p = v_0^2 \left(\frac{R}{r(R-r)} \right)$$

زیرا:

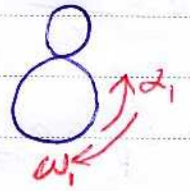
$$a_p = a_{ot}\, i + \frac{v_0^2}{(R-r)} j + r\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 j - \frac{a_{ot}}{r} \times r\, i$$

حال اگر در مثال قبلی (چرخش خارجی) دیسک پایین نیز با سرعت و شتاب زاویه‌ای

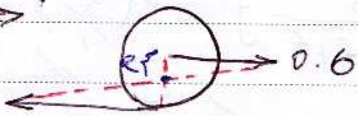
ω_1 و α_1 بچرخد ⇐ $a_c = ?$

$a_{ot} = 0.6\ m/s^2$, $v_{ot} = 2\ m/s$, $R = 0.4\,m$, $r = 0.2\,m$

$\alpha_1 = 2\ rad/s^2$ $\omega_1 = 3\ rad/s$



'O' مرکز دائمی دوران ⇐



$R\alpha_1 = 0.8$

$$\Rightarrow \frac{0.6}{\ell} = \frac{0.8}{0.2-\ell} \Rightarrow \ell = 0.08\,m$$

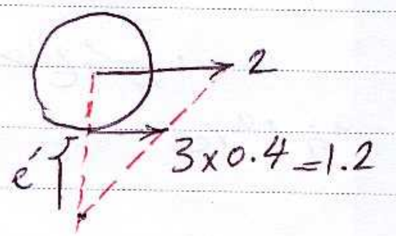
$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{0.6}{0.08} = 7 \swarrow \alpha_2$$

[redacted]

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال برای یافتن ω_2 نیاز به مرکز آنی دوران داریم ⇐

v_c و a_{c_t} را با استفاده از



V_2 و a_2 ← جهتشان را با استفاده از قاعده دست راست در دیسک دوم تشخیص می‌دهیم.

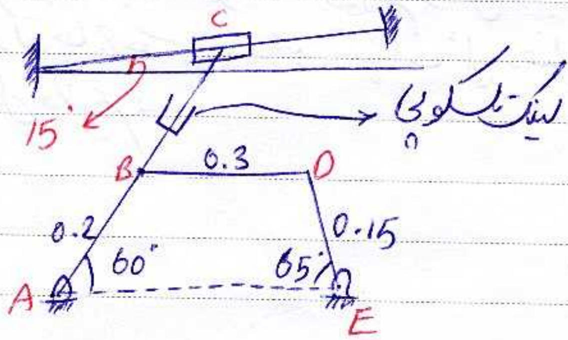
$$\frac{1.2}{e'} = \frac{2}{0.2+e'} \Rightarrow e' = 0.3 \Rightarrow \omega_2 = \frac{2}{0.3+0.2} = 4$$

$$\Rightarrow a_p = a_o + \omega\times(\omega\times r) + \dot{\omega}\times r$$

$$a_p = a_{o_t}\, i - \left(\frac{v_o^2}{R+r}\right) j + r\omega_2^2\, j - r\alpha_2\, i$$

$$\Rightarrow a_p = (0.6-1.4)\,i + \left(0.8 - \tfrac{20}{3}\right) j = -0.8i - 5.9j$$

مثال:



$V_c = 2\,\frac{m}{s}$ →

$a_c = 3\,\frac{m}{s^2}$

$\Rightarrow \alpha_{ED} = ?$

فرض می‌کنیم عضو BDE وجود خارجی نداشته باشد ⇐

دستگاه را روی A می‌گذاریم و به لینک تلسکوپی جوش می‌دهیم ⇐

$$\overset{\checkmark\checkmark}{V_c} = \cancel{V_A} + (\omega\times r) + v_{rel} = \overset{\checkmark 0}{\omega_{Ac}}\times r_{Ac} + \overset{\checkmark 0}{v_{rel}}$$

جهت معلوم — جهت معلوم

PAPCO

$$a_C = a_A + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + 2\omega \times v_{rel} + a_{rel}$$

نکته:

پروفسور حاج حسینی:

a_{rel} و a_A و a_C : مسیر حرکتشان را خوب بررسی کنید

(100 بار گفتم!)

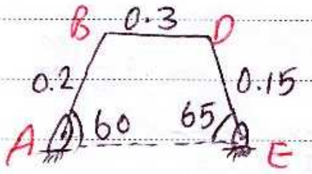
$$\Rightarrow a_{C_t} = \cancel{a_A} + \omega_{AC} \times (\omega_{AC} \times r_{AC}) + \dot{\omega}_{AC} \times r_{AC} + 2\omega_{AC} \times v_{rel} + a_{rel}$$

راستا معلوم

چون لینک تلسکوپی داریم ← (← هیچ گونه دورانی حول A ندارد)

$a_{rel_n} = 0$ و تنها a_{rel_t} داریم که جهتش عمود بر لینک تلسکوپی است.

⇐ ω_{AC} و α_{AC} را می‌یابیم حال:



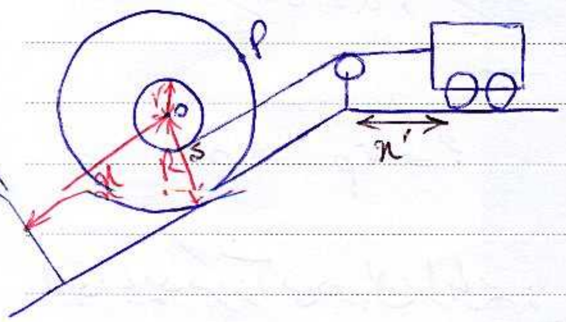
از قسمت بالا صرف نظر می‌کنیم و شکل روبرو سوال ماست!

(دکتر حاج حسینی: از این تیپ سوال خیلی پیش میاد!)

حال داریم:

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

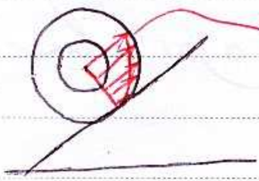


وقتی $x = 0$ ⇐ /

ماشین با شتاب $3\ \frac{m}{s^2}$ حرکت می‌کند

حال وقتی $x = 2.5$ ⇐ $a_P = ?$

با فرض: غلتش کامل قرقره ، $r = 0.2 , R = 0.3$



$$\Rightarrow \frac{v_o}{v_s} = \frac{x}{x'}$$

$$\Rightarrow \frac{0.3\omega}{0.1\omega} = \frac{2.5}{x'} \Rightarrow x' = 0.83$$

$$v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2 \times 3 \times 0.83} = 2.23\ \frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$v_s = \omega \times 0.1 \Rightarrow 2.23 = \omega \times 0.1 \Rightarrow \omega = 22.3\ \frac{rad}{s}$$

چون غلتش کامل است و سطح زیر ثابت است ⇐

$$a_{s_t} = 0.1 \times \alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 30\ \frac{rad}{s^2}$$

$$\Rightarrow a_o = 30 \times 0.3 = 9\ \frac{m}{s^2} \quad , \quad v_o = 0.3 \times 22.3 = 6.69\ \frac{m}{s}$$

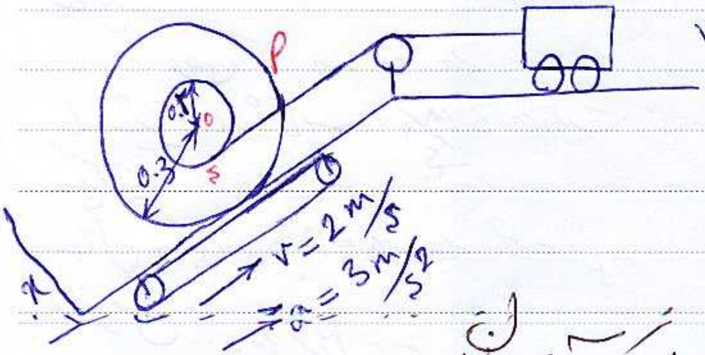
حال دستگاه را بر روی o قرار می‌دهیم و به آن جوش می‌دهیم ⇐

$$v_P = v_o + \omega \times r + \cancel{v_{rel}} = 6.69 + 22.3 \times 0.3$$

$$a_P = a_o + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r = 9 + (22.3)^2 \times 0.3 + 30 \times 0.3$$

Subject: Mec20.blogfa.com ibm_raby@yahoo.com

Year. Month. Date.



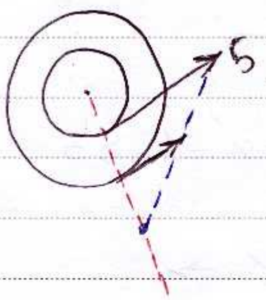
$v = 5\,\frac{m}{s}$, $a = 3\,\frac{m}{s^2}$

$? = v_p$, a_p

ابتدا باید مرکز آنی دوران را بیابیم ؛

سپس v_o و a_o را بیابیم (با استفاده از مرکز آنی دوران)

دستگاه را روی o جوش داده و a_p و v_p را بیابیم ؛



PAPCO