Subject:
Year. Month. Date. ( )

«بنام او که هستی جاوید زاد اوست»

«دینامیک»

Dynamics

استاد:

Dr: حاج موسی

جزوه نویس: (به قلم) !!

اسماعیل بهشتی

اسماعیل بهشتی

سال تحصیلی !!

1388-89

882

Subject:
Year: ۹۸ Month: آبان Date: 2

بنام خدا

شنبه

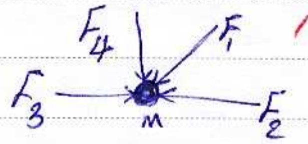
استاتیک + سینماتیک = سینتیک

«سینتیک ذرات»

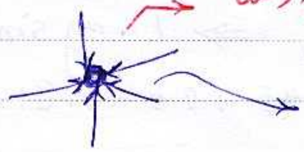
$$\Sigma F = ma \left< \begin{array}{l} \Sigma F_x = ma \\ \Sigma F_y = ma \\ \Sigma F_z = ma \end{array} \right. \Rightarrow$$ سه مجهول می‌توان داشت

⇐ ابتدا پیکره‌ی آزاد جسم را می‌کشیم

پیکره آزاد نیرو ←   پیکره آزاد شتاب ←



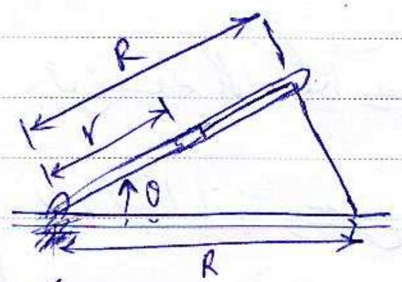
$\equiv$



مولفه‌ی شتاب

تحلیل مولفه‌ی شتاب سخت و مهم است.

مثال:



$\theta = 37^\circ$, $\dot{\theta} = 2\,rad/s$

$\ddot{\theta} = 5\,rad/s^2$, $R = 0.4\,m$

$\theta = ? \Rightarrow \ddot{r} = ?$

با فرض اینکه هیچ اصطکاکی بین جرم و شیار وجود ندارد ⇐ $T = ?$ کشش طناب

if: $m_A = 0.5\,kg$

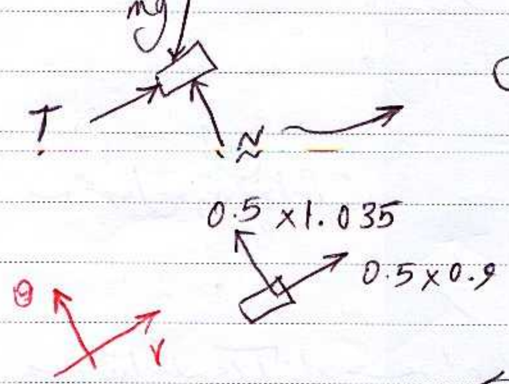
شکل در صفحه قائم است!

اگر شکل در صفحه افقی باشد ⇐ نیروی وزن را عمود بر صفحه در نظر می‌گیریم

⇐ چون بحث ما در صفحه است ⇐ mg , N همدیگر را خنثی می‌کنند

می‌دانیم که هیچ شتابی در راستای عمود بر تابلو نداریم)

ابتدا پیکره آزاد کلی جسم برای نیروهای وارد بر آن:



با فرض تماس جسم با سطح زمین

پیکره آزاد شتاب:

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

حال 2 مجهول (N , T) داریم و 2 معادله $\Leftarrow$

$$\sum F_r = m a_r \Rightarrow T - mg\sin\theta = 0.45$$
$$\Rightarrow T = 0.45 + 0.5 \times 9.81 \times \sin 37$$

$$\sum F_\theta = m a_\theta \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0.5 \times 1.035$$
$$\Rightarrow N = 0.5 \times 1.035 + 0.5 \times 9.81 \times \cos 37$$

$\Leftarrow$ در این مسأله اگر اصطکاک وجود داشت $\Leftarrow$ چون لغزش داشتیم $\Leftarrow$

$f_s = \mu_s N \Rightarrow$

N را ابتدا یافته و سپس T را می‌یافتیم.

حل: مسأله را به صورت پارامتری حل می‌کنیم. از سطح بالای لینک شیاردار را نیز بررسی داریم

یعنی N منفی معنی ندارد!)

$$\sum F_r = m a_r \rightarrow T - mg\sin\theta = m a_r$$
$$\sum F_\theta = m a_\theta \rightarrow N - mg\cos\theta = m a_\theta$$
$$\rightarrow \begin{cases} T = m(g\sin\theta + a_r) \\ N = m(g\cos\theta + a_\theta) \end{cases} \quad (3) \rightarrow$$

حال با اطلاعات مسأله قبلی، حداکثر شتاب ترمز را بیابید.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

T هیچگاه منفی نمی‌تواند باشد چون طناب نمی‌تواند تحت فشار قرار گیرد $\Leftarrow$

$|a_{r_{max}}| = g\sin\theta \Rightarrow a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -g\sin\theta$

$r = 2R\sin\theta/2 \Rightarrow \dot{r} = \dot{\theta}R\cos\theta/2 \;,\; \ddot{r} = \ddot{\theta}R\cos\frac{\theta}{2} - \frac{R\dot{\theta}^2}{2}\sin\theta$ (2)

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -g\sin\theta \Rightarrow \ddot{r} = -g\sin\theta + r\dot{\theta}^2$ (1)

$\Rightarrow$

(1) ج ب: $\ddot{r} = -5.058$

$\Rightarrow$

(2) $-5.058 = \ddot{\theta}\times 0.4\times\cos\frac{37}{2} - \frac{4}{2}\times 0.4\sin\frac{37}{2}$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = -12.66$

$\Leftarrow$

شتاب ترمز باید کمتر از $|\ddot{\theta}|$ باشد تا T منفی شود

اما امکان دارد قبل از شل شدن T ، N منفی شده باشد (القرنده کله می‌کند!)

(البته اگر سطحی بالای لینک نباشد)

$a_{\theta} = 2\times 0.773\times 2 - 0.207\times 12.66 \Rightarrow a_\theta = 0.47 \Leftarrow$

N را از رابطه (3) می‌یابیم

$\Rightarrow$

$N > 0 \Rightarrow$

شتاب ترمز باید کمتر از 12.66 باشد

حال اگر N منفی می‌شد $\Leftarrow$ باید در نظر گرفتن $N = 0 \Leftarrow$ $\ddot{\theta}$ را می‌یافتیم که

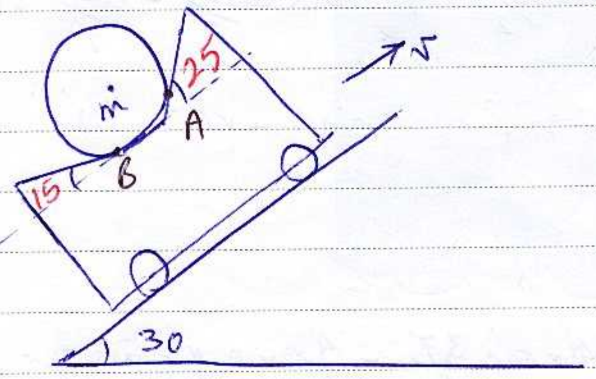
البته باید $|\ddot{\theta}| < 12.66$

یعنی اگر می‌خواستیم با در نظر گرفتن $N = 0$ پیش برویم $\Leftarrow$ باید با آن $\ddot{\theta}$ای که می‌یافتیم $\Leftarrow$ $T > 0$ می‌شد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جسم صلبی (جسمی که تغییر شکل آن نا چیز و گستردگی جرم (دارای ابعاد باشد) داشته باشد) که دارای انتقال است و
همچنین جسمی که گستردگی جرم ندارد را می توان ذره و ابطش را بر اساس سینتیک تجزیه و تحلیل کرد.

مثال:



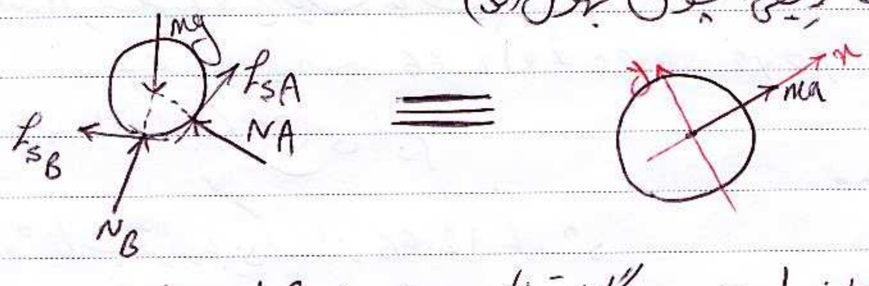
محدوده شتاب حرکت گاری را به گونه ای تعیین کنید که سیستم به صورت یکپارچه عمل کند

$< a <$

ماکزیمم شتاب حرکت ، ماکزیمم شتاب ترمز

سیستم یکپارچه ⇐ تمام عضوهای سیستم باید دارای یک شتاب باشند

داریم: (جهت ها دیفی ها ست چون مجهول اند)



چون سطح زیری صاف است ⇐ گاری تنها در جهت + شتاب دارد ⇐
چون سیستم یکپارچه است ⇐ گوی نیز تنها در جهت + شتاب دارد

وقتی شتاب حرکت max شود ⇐ f_{sA} و N_A صفر خواهد شد؛
چون غلتش داریم ⇐ f_s ، N به هم ربطی ندارند
⇐ چون برای محاسبه a_{max} ، a_{min} ها f_s صفر می شود

~~اما اگر f_s ها صفر نمی شد ⇐ با یافتن f_s ها ⇐ باید $f_s < \mu_s N$ ⇐ لغزش داشتیم~~

اگر $f_s > \mu_s N$ ⇐ غلتش داشتیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال:

$$\sum \bar{M} = 0 \Rightarrow F_{s_B} \times r = 0 \Rightarrow F_{s_B} = 0$$

$$\Rightarrow \sum F_x = m a_x$$

$$m a_{max} = -mg \sin 30 + N_B \sin 45$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -mg \cos 30 + N_B \cos 45 = 0 \Rightarrow N_B = \frac{mg \cos 30}{\cos 45}$$

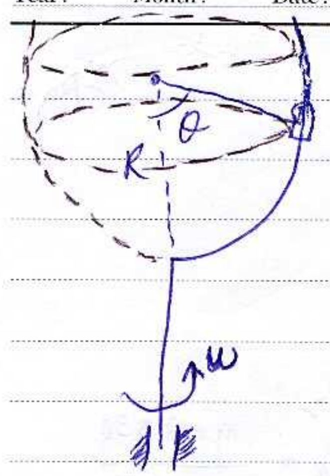
$$\Rightarrow a_{max} = 0.37 g$$

حال برای یافتن a_{Min} که در واقع همان ماکزیمم شتاب ترمز است داریم:

N_B و $f_{s_B} = 0$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

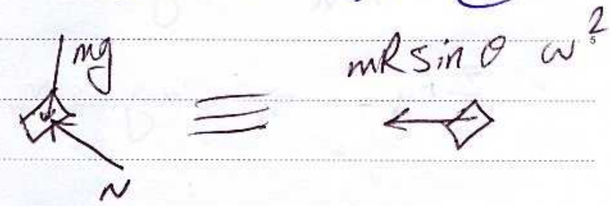


با فرض عدم اصطکاک بین مهره و میله راهنما

و ثابت بودن ω

$\Leftarrow$

تابع θ را بر حسب ω بنویسید:



: Dr حاجی

از این مسیر لامذهب غافل نشوید!!

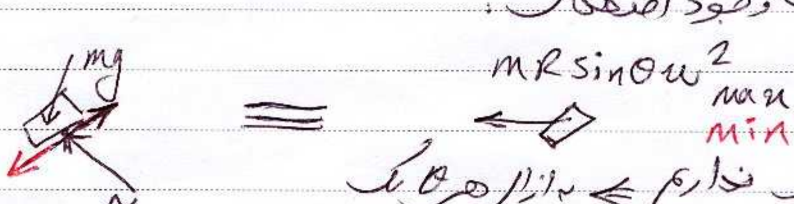
چون ω ثابت است $\Leftarrow$ مسیر حرکتمان دایره‌ای است به شعاع $R\sin\theta$

$$\Sigma F_y = ma_y \longrightarrow -mg + N\cos\theta = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\Sigma F_x = ma_x \longrightarrow N\sin\theta = mR\sin\theta\,\omega^2 \longrightarrow \cos\theta = \frac{g}{R\omega^2}$$

$\Leftarrow$ هرگاه $\omega \to \infty$ $\Leftarrow$ $\theta \to 90$ $\Leftarrow$ هیچگاه $\theta = 90$ نمی‌شود

حال در صورت وجود اصطکاک:



وقتی اصطکاک نداریم $\Leftarrow$ به ازای هر θ یک ω منحصر به فرد داریم

اما وقتی اصطکاک داریم $\Leftarrow$ به ازای هر θ یک بازه از ω داریم

چون ω را کمینه یا بیشینه را می‌خواهیم بدست آوریم $\Leftarrow$ جسم در آستانه لغزش به سمت پایین یا بالا است.

ω_{max} $\longleftarrow$ جسم در آستانه لغزش به سمت بالا

PAPCO

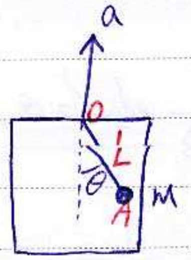
Subject: سلین
Year: ۸۸ Month: ۱۱ Date: 4 ( )

دوشنبه

مثال:

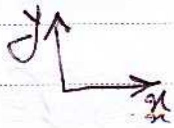
آسانسور با شتاب a در حال حرکت است

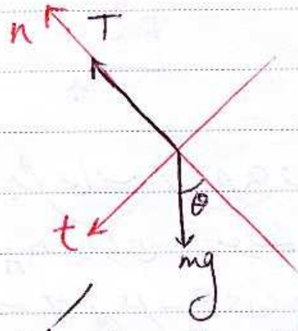
در هر θ دلخواه ⇐ $T = f(\theta)$ ؟



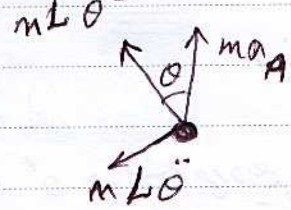
دستگاه را روی O قرار داده و به A جوش می‌دهیم!

$$\Rightarrow a_A = \vec{a}_0 + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$





$\equiv$



۳ مجهول داریم و ۲ معادله زیرا

اگر راستاها را به گونه‌ای مشخص شده تعیین کنیم

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow mg\sin\theta = mL\ddot{\theta} - ma_0\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin\theta\,(g + a_0)}{L}$$

اگر آسانسور در خلا سقوط کند ⇐ $a_0 = -g$ ⇐ $\ddot{\theta} = 0$

یا اگر نمی‌چرخد یا با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد.

حال داریم:

$$\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta \Rightarrow \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \int_{\theta_0}^{\theta} \ddot{\theta}\, d\theta \Rightarrow$$ $\dot{\theta}$ پیدا شد!

$$\sum F_n = ma_n \rightarrow \dots \rightarrow T = f(\theta)$$

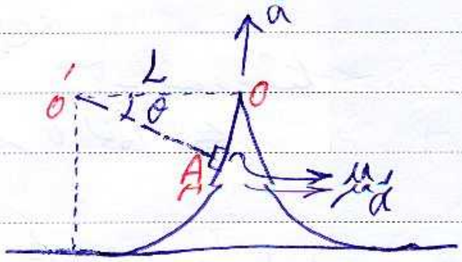
سوال: اگر آسانسور را یک دفعه قطع کنیم ⇐ شتاب زاویه‌ای و کشش طناب: بلافاصله پس از قطع شدن = ?

چون گفته: بلافاصله بعد از قطع شدن ⇐ α داریم اما ω نداریم!!

(در لحظهٔ شروع حرکت، شتاب داریم اما سرعت نداریم!!)

$a_A = a_0 + \dot{\omega} \times r + \cancel{\omega \times (\omega \times r)}^{\,0} + \cancel{2\omega \times V_{rel}}^{\,0} + a_{rel}$

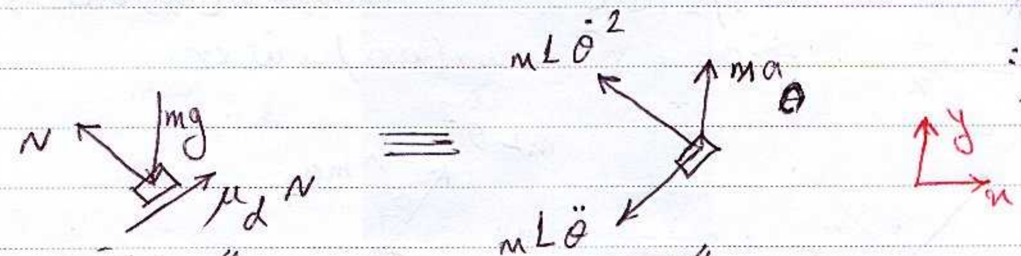
مثال:



در هر θ دلخواه

$N = ?$

داریم:



(البته برای محاسبه a_A: دستگاه را در O' جوش می‌دهیم (دستگاه مختصات ثانویه))
که a_A دارای 3 مولفه می‌شود که در بالا نشان دادیم)

$$\Sigma F_t = ma_t \Rightarrow mg\cos\theta - \mu_d N = mL\ddot{\theta} - ma_0\cos\theta$$

$$\Sigma F_n = ma_n \rightarrow N - mg\sin\theta = mL\dot{\theta}^2 + ma_0\sin\theta$$

$$\rightarrow N = m(g\sin\theta + L\dot{\theta}^2 + a_0\sin\theta)$$

$$\xrightarrow{\Sigma F_t = ma_t} mg\cos\theta - m\mu_d(g\sin\theta + L\dot{\theta}^2 + a_0\sin\theta) = m(L\ddot{\theta} - a_0\sin\theta)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\Sigma F_x = m a_x \longrightarrow 7.36\cos 30 - 18.4\sin 30 - F_s' = 5.64$

$\Longrightarrow F_s' = -8.46$

این نیروی اصطکاک ، نیروی اصطکاک مورد نیاز جهت عدم لغزش است.

اما با $\mu_s = 0.5$ ⟸ چون $f_{s_{max}} = \mu_s \cdot N$ ⟸ $f_{s_{max}} = 29.4$
⟸ هیچ مشکلی نداریم اما:

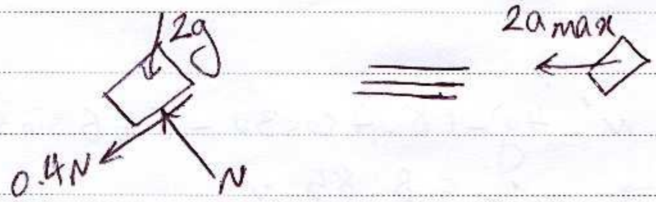
DY حاجی: μ_s بین گوی و گاری را به جای 0.5 ، 0.1 می دهم تا مشکل پیش بیاید!!!!

پس:
باید شتاب را کم کنیم تا گوه نلغزد اما از طرفی با کم کردن شتاب (شتاب min) ⟸ گوی بالایی، روی گوه می لغزد.

اما:
می توانیم μ_s بین گوی و گوه را طوری تعیین کنیم تا با آن شتاب min که برای گوه یافتیم ⟸ گوی نلغزد

اما:
کلاً حرف های DY حاجی را بیخیال می شیم و $a_{min} = 1.41\ \frac{m}{s^2}$

حال برای a_{max}:
با فرض در آستانه لغزش بودن گوی به بالا.

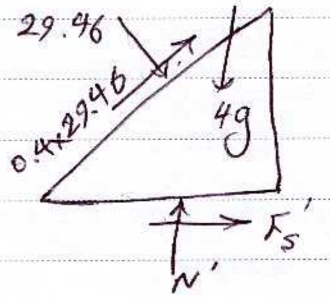


پس داریم:

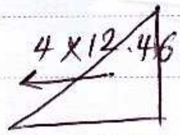
$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow N\cos 30 - 0.4\,N\sin 30 - 2g = 0$$
$$\Longrightarrow N = 29.46\ N$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow 29.46\sin 30 + 0.4\times 29.46\cos 30 = 2a_{max}$$
$$\longrightarrow a_{max} = 12.46\ m/s^2$$

حال با این شتاب برای گوه داریم:



$\equiv$



$$\longrightarrow \sum F_x = ma_x \Rightarrow$$
$$-F_s' - 11.78\cos 30 - 29.46\sin 30 = 49.84$$
$$\Rightarrow F_s' = -74.77\,N$$

این اصطکاک مورد نیاز بین گوه و گاری جهت عدم لغزش گوه است.

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow N' - 29.46\cos 30 + 11.78\sin 30 - 4g = 0$$
$$\Rightarrow N' = 58.86$$

$$\Rightarrow F'_{s_{max}} = 0.5\times 58.86 = 29.$$

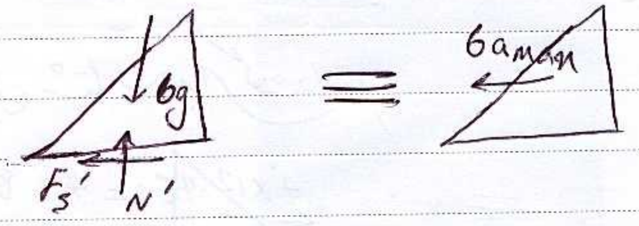
چون: $F_s' > F_{s_{max}}'$ ⇐ اصطکاک مورد نیاز تامین نمی‌شود

⇐ فرض غلط است ⇐ روز از نو، روزی از نو.

Subject:
Year.　　Month.　　Date.　　( )

برای یافتن a_{max} : چون بازای هر $a < a_{min}$ ، گوی و گوه روی هم نمی لغزند
و چون فرض اولیه ما غلط شد (یعنی ابتدا گوی روی گوه بلغزد) ⇐

برای یافتن a_{max} با فرض لغزش گوه روی گاری ⇐ گوی و گوه را یکپارچه در نظر می گیریم ⇐



$$\Sigma F_x = ma_x \quad , \quad \Sigma F_y = ma_y$$

$$6g - N' = 0 \Rightarrow N' = 7g \Rightarrow f_{s'} = \mu_s N'$$

$$\Rightarrow F_{s'} = 3g$$

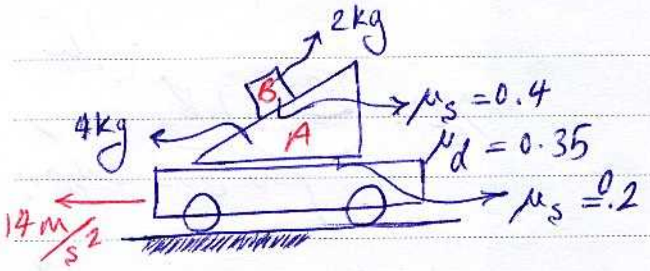
$$F_{s'} = 6a_{max} \rightarrow a_{max} = \frac{3g}{6} = g/2 = 4.9 \, m/s^2$$

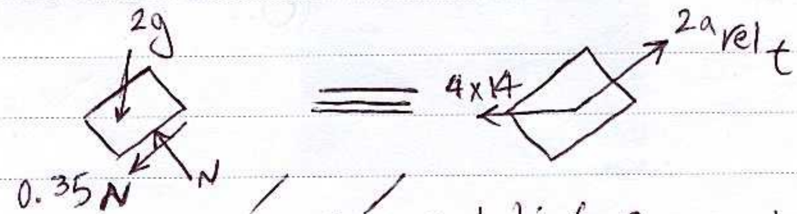
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

گاری را با شتاب $14\ m/s^2$ به حرکت درمی‌آوریم

شتاب نسبی جسم B را بیابید؟





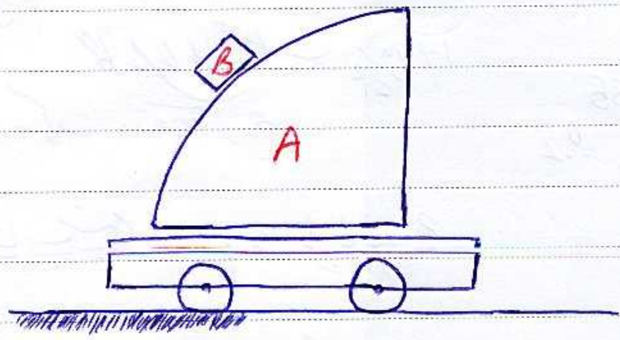
a_{rel_n} نداریم چون جسم B روی خط راست حرکت می‌کند

$$a_B = a_A + a_{rel}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

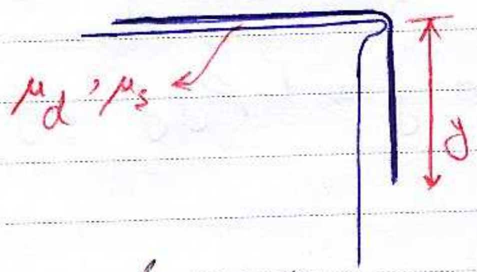
گاری را با شتاب $14 \, m/s^2$ به حرکت در می‌آوریم



شتاب نسبی جسم B را بیابید (با همان اطلاعات مسئله قبل)

[redacted]

مثال:



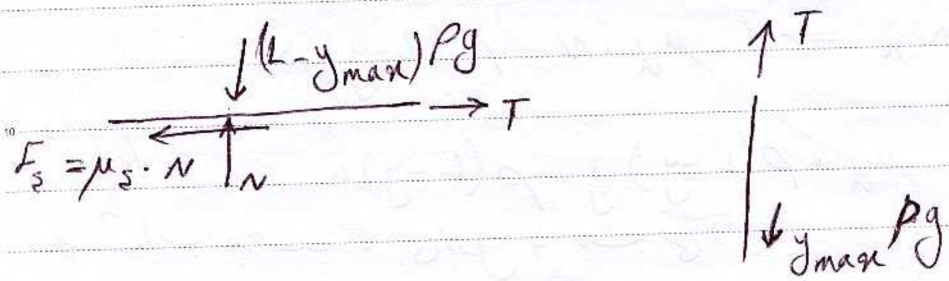
طول طناب L ، جرم واحد طول آن ρ است

$$\Rightarrow a = f(y) \quad ??$$

$$v_{max} = ?$$

ابتدا باید y_{max} جهت تعادل استاتیکی را بیابیم (y_{min} جهت حرکت دینامیکی $= y_{max}$)

پس:

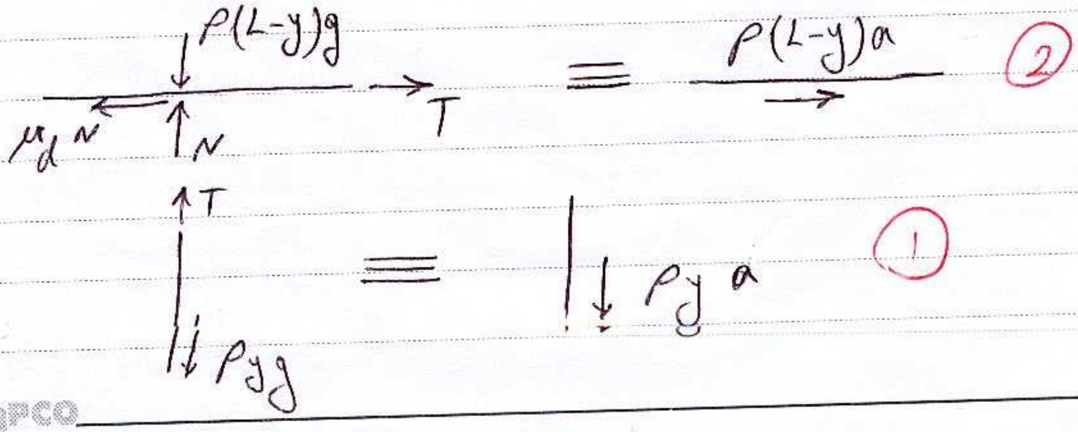


$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = (L - y_{max})\rho g$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow y_{max}\rho g = \mu_s (L - y_{max})\rho g$$

$$\rightarrow \frac{L}{1+\frac{1}{\mu_s}} = y_{max} \Rightarrow \frac{1}{\mu_s} = \frac{L}{y_{max}} - 1$$

حال برای $y > y_{max}$ داریم:



Subject:
Year. Month. Date. ( )

a_x با a_y برابر است زیرا مثلاً اگر از قرقره 9 استفاده کنیم $\Leftarrow a_x \neq a_y$

1 : $T = y_{max}\rho g \quad , \quad \Sigma F_y = ma_y \Rightarrow T - \rho y g = -\rho y a$

$$\Rightarrow T = \rho y (g-a)$$

2 :

$$\Sigma F_y = ma_y = 0 \Rightarrow N = \rho (L-y) g$$

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow T - \mu_d \cdot N = \rho (L-y) a$$

داریم:

$$\rho y (g-a) - \mu_d \times \rho (L-y) g = \rho (L-y) a$$

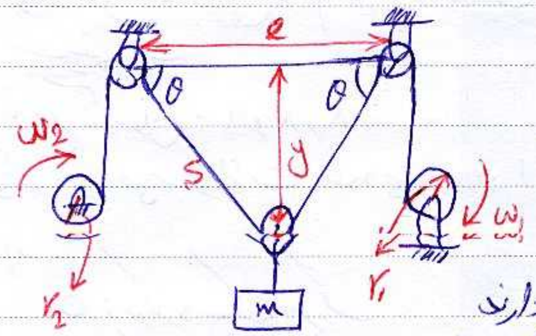
⇐ شتاب برحسب تابعی از y بدست می‌آید.

$$\rightarrow \int_0^{v_{max}} (v\,dv) = \int_{L(1+\frac{1}{\mu_s})}^{L} (a\,dy) \Rightarrow$$

$$(v_{max})^2 = \frac{2aL}{\mu_s}$$

P4PCO

مثال:



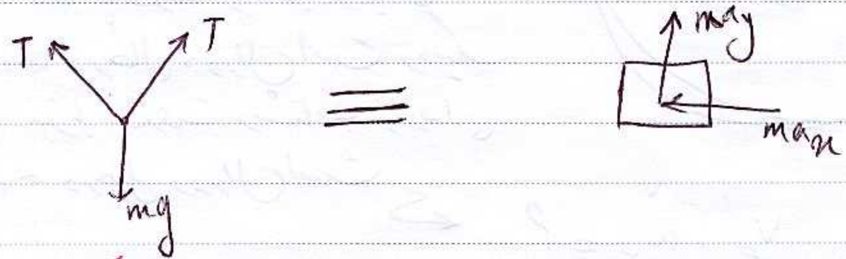
کشش کابل برحسب تابعی از y ؟

شعاع قرقره‌ها در مقایسه با بقیه ابعاد ناچیز و جرم کابل هم ناچیز است

و قرقره‌ها نیز روان هستند و جرم ناچیزی دارند

ω_1 و ω_2 نیز ثابت هستند

داریم:



پس:

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow ma_x = 0 \Rightarrow a_x = 0$$

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow -mg + 2T\sin\theta = ma_y$$

$$\longrightarrow -mg + 2T\frac{y}{\sqrt{(\frac{\ell}{2})^2 + y^2}} = m\ddot{y} \quad ①$$

می‌توان نوشت:

$$s^2 = y^2 + \ell^2/4 \Rightarrow 2\dot{s}s = 2\dot{y}y \Rightarrow \dot{s} = \frac{y\dot{y}}{s} \Rightarrow \dot{y} = \frac{s\dot{s}}{y}$$

$$\dot{s}^2 + s\ddot{s} = \dot{y}^2 + y\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{\dot{s}^2 + s\ddot{s} - \dot{y}^2}{y} = \frac{\dot{s}^2 + s\ddot{s} - \frac{s^2\dot{s}^2}{y^2}}{y}$$

داریم: $\dot{s} = \frac{-r_2\omega_2 + r_1\omega_1}{2} \Rightarrow \ddot{s} = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \ddot{y} = f(y)$

با جایگذاری $\ddot{y} = f(y)$ در ① $\longrightarrow T = k(y)$

weblog: Mec20.blogfa.com ۸۸/۸/۱۲

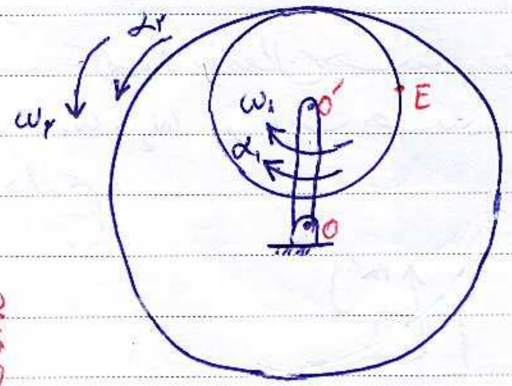
Subject:
Year. Month. Date. ( )

سوالات امتحان میان ترم اول دینامیک دانشگاه سمنان (دانشکده مهندسی مکانیک)
سینماتیک

تاریخ آزمون: ۸۸/۸/۱۱ استاد: دکتر محمد علی حاج موسی

تذکر: تمامی سوالات، عددی بودند اما توسط من به صورت پارامتری تغییر کرده اند!!!

۱)



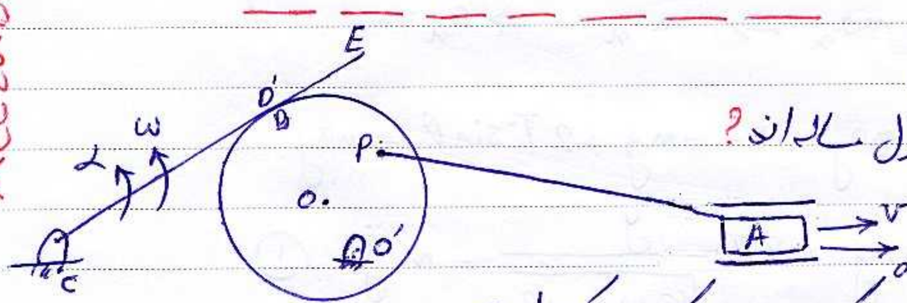
O: مرکز دیسک بزرگ

O': مرکز دیسک کوچک

لینک OO' با سرعت و شتاب زاویه ای ω_1 و α_1 در حال دوران است و دیسک بزرگ نیز با سرعت و شتاب زاویه ای ω_2 و α_2 در حال دوران است

$V_E , a_E = ?$

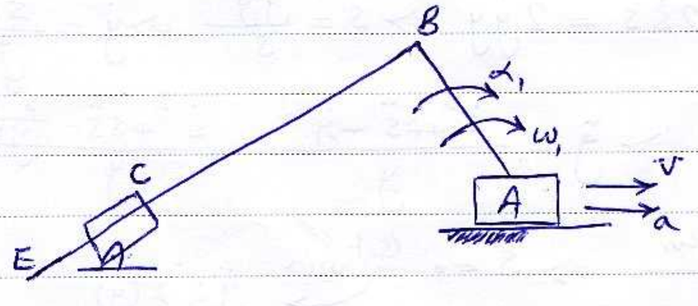
۲)



V و a را داریم ⇐ α و ω مجهول مسائلند؟

O': مرکز دوران دیسک و O مرکز دیسک است

۳)



V و a و α_1 و ω_1 را داریم

اگر میله BE از داخل غلاف عبور کرده باشد و با آن بچرخد ⇐ $\alpha_{BE} , \omega_{BE} = ?$

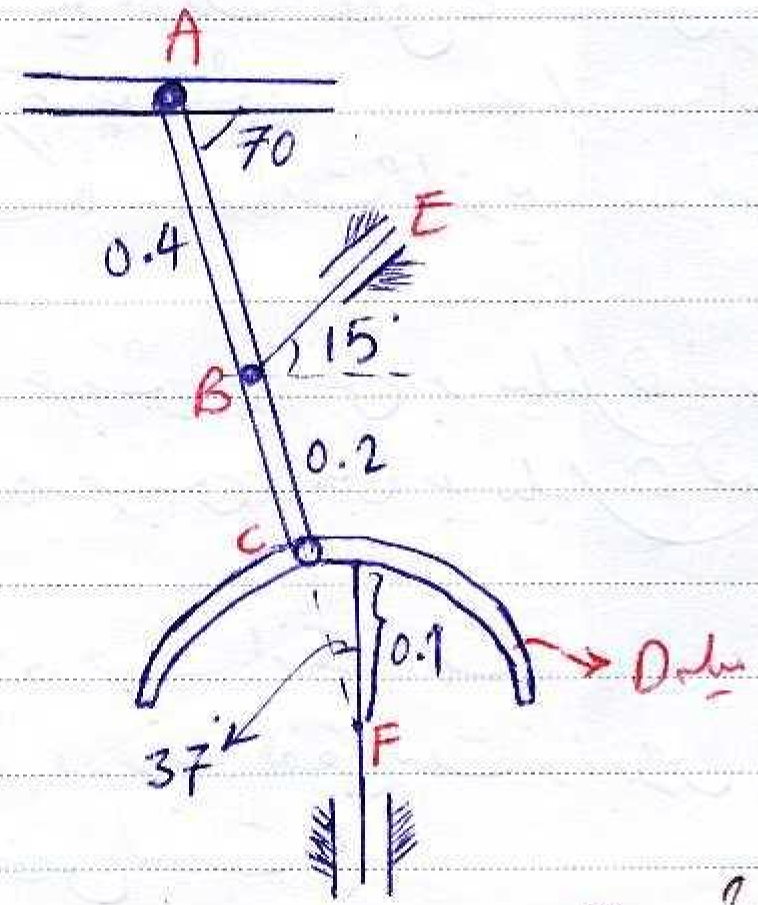
اسماعیل بهشتی

Subject: ۸۸ / ۸ / ۸+۱
Year. Month. Date. ( )

~~مثال ۵~~

مثال

شنبه



$V_F = 2\ \frac{m}{s} \uparrow$

$a_F = 3\ \frac{m}{s^2} \uparrow$ $\rightarrow V_c, a_c = ?$

DV حاج بهوسی:

در مسائل، به نقاطی که مسیر حرکتشان مشخص است، بسیار زیاد توجه کن!!

برای یافتن V_c داریم:

ابتدا دستگاه را روی F قرار داده و به آن جوش می‌دهیم:

$$V_c = V_F + \cancel{\omega \times r} + V_{rel} \quad (1)$$

سپس دستگاه مختصات ثانویه را روی A قرار داده و به لینک AC جوش می‌دهیم

$$V_c = V_A + \omega_{AC} \times r_{AC} + \cancel{V_{rel}} \quad (2)$$

سپس دستگاه مختصات ثانویه را روی B قرار داده و به لینک AC جوش می‌دهیم

$$V_c = V_B + \omega_{AC} \times r_{BC} + \cancel{V_{rel}} \quad (3)$$

حال برای شتاب داریم:

$$a_C = a_F + a_{rel_n} + a_{rel_t}$$

$$a_C = a_A + \omega_{AC} \times (\omega_{AC} \times r_{AC}) + \dot{\omega}_{AC} \times r_{AC}$$

$$a_C = a_B + \omega_{AC} \times (\omega_{AC} \times r_{BC}) + \dot{\omega}_{AC} \times r_{BC}$$

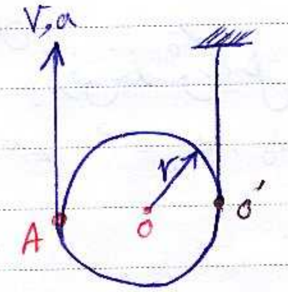
① سیر حرکت مطلق، مشخص نیست ← اندازه و جهت V_C مجهول است
لینک F چرخش ندارد ← با توجه به اینکه دستگاه را به لینک F جوش داده‌ایم ←
ω دستگاه مختصات ثانویه صفر است.

V_{rel} جهتش مماس بر میله D است.
a_{rel_t} جهتش مماس بر میله D است و a_{rel_n} جهتش، در جهت مرکز دایره است

② V_A در جهت افقی است و چون دستگاه را به لینک AC جوش داده‌ایم ← $\omega = 0$
a_A در جهت افقی است و با فرض پادساعتگرد بودن $\dot{\omega}$ ← جهت $\dot{\omega} \times r$ نیز مشخص است

③ V_B در جهت لینک BE است و با فرض $\dot{\omega}_{AC}$ پادساعتگرد ←
$\dot{\omega}_{AC} \times r$ نیز جهتش مشخص است

مثال:



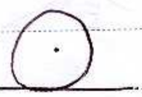
سرعت مرکز دایره (قرقره) = ?

با فرض غلتش کامل:

چون غلتش کامل داریم پس:

سرعت هر نقطه از قرقره در تماس با طناب برابر است با سرعت طناب در آن نقطه.

چون سرعت طناب در O' برابر صفر است $\Leftarrow$ سرعت قرقره هم در آن نقطه صفر است و آن نقطه را می‌توان مرکز آنی دوران در نظر گرفت

در واقع این شکل را می‌توان با شکل  (غلتش چرخ بر روی سطح زمین) یکی گرفت

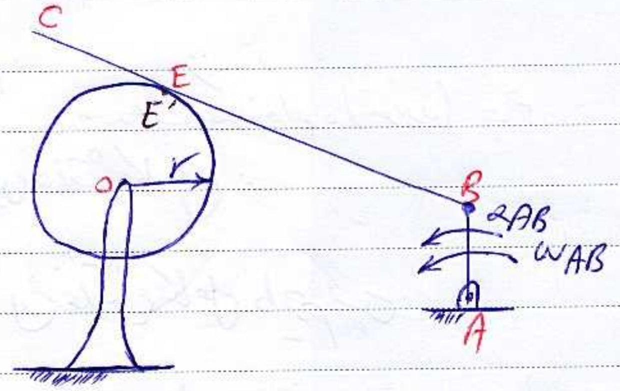
این نقطه (O') علاوه بر مرکز آنی دوران بودن، مرکز شتاب تانژانت صفر نیز است $\Leftarrow$

$$v_A = v = 2r\,\omega_{\text{دیسک}} \Rightarrow \omega = \frac{v}{2r}$$

$$a_{A_t} = a = 2r\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{a}{2r}$$

$$v_O = r \times \frac{v}{2r} = \frac{v}{2} \quad , \quad a_O = r \times \frac{a}{2r} = \frac{a}{2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مثال:
با فرض غلتش کامل
$\omega_o , \alpha_o = ?$

چون غلتش کامل داریم

دستگاه مختصات نوسان را روی B گذاشته و به لینک BC جوش دهیم ؛ لذا :
$$V_{E'} = V_B + \omega_{BC} \times r_{BE} + V_{rel}$$

که با توجه به غلتش کامل بودن:
$$V_{rel_{E'}} = \cancel{V_{rel_E}}^{\,0} + \cancel{V_{E/E'}}^{\,0}$$
چون غلتش داریم صفر شد

پس چون دستگاه را به لینک BC جوش دادیم
$$\overset{\checkmark 0}{V_{E'}} = \overset{\checkmark\checkmark}{V_B} + \overset{\checkmark 0}{\omega_{BC}} \times r_{BE}$$

جهت $V_{E'}$: مماس بر لینک BC است
جهت V_B : عمود بر AB است و برابر است با $\omega_{AB} \times r_{AB}$

جهت $\omega_{BC} \times r_{BE}$ نیز با فرض پادساعتگرد بودن ω_{BC} معلوم است
با توجه به قاعده دست راست: عمود بر BC و به سمت پایین (o) است.
حال برای a داریم:

$$\overset{\checkmark 0}{a_{E'_t}} + \overset{\checkmark\checkmark}{a_{E'_n}} = \overset{\checkmark\checkmark}{a_{B_n}} + \overset{\checkmark\checkmark}{a_{B_t}} + \overset{\checkmark\checkmark}{\omega_{BC} \times (\omega_{BC} \times r_{BE})}$$
$$+ \overset{\checkmark 0}{\dot{\omega}_{BC}} \times r_{BE} + \overset{\checkmark\checkmark}{a_{rel}} + \cancel{2 \times \omega \times V_{rel}}^{\,0}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

توضیحات:

چون مسیر حرکت B و E' را می‌دانیم پس مولفه‌های شتابشان را به دو مولفه در راستای تانژانت و نرمال تجزیه می‌کنیم

پس:

$a_{E't}$: جهتش مماس بر لینک BC

$a_{E'n}$: اندازه: $=\frac{(V_{E'})^2}{r}$ (عمود بر لینک BC) جهتش به سمت مرکز دایره

a_{Bt} : جهتش عمود بر لینک AB ، $|a_{Bt}| = r_{AB} \times \alpha_{AB}$

a_{Bn} : جهتش مماس بر لینک AB ، $|a_{Bn}| = r_{AB} \times (\omega_{AB})^2$

$\omega_{BC} \times r_{BE}$; اندازه‌اش مجهول ، جهتش را با فرض پادساعتگرد بودن α_{BC} مشخص می‌کنیم

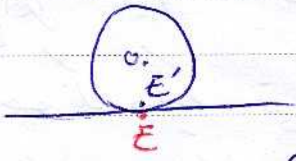
a_{rel} : جهتش در راستای مرکز دایره است (به سمت O) و اندازه‌اش برابر است با $r(\omega_0 \pm \omega_{BC})^2$

اگر ω_0 و ω_{BC} خلاف جهت هم ← $\omega_0 + \omega_{BC}$

" " در جهت هم ← $\omega_0 - \omega_{BC}$ (با فرض پادساعتگرد بودن ω_0)

برای درک بهتر a_{rel} :

چرخی که با زمین در تماس است را در نظر بگیرید:



$a_{rel\,E/E'\,t} = 0$ است (غلتش داریم!)

$$a_{rel_{E'}} = \cancel{a_{rel_{E'/E}}} + a_{rel_E}$$

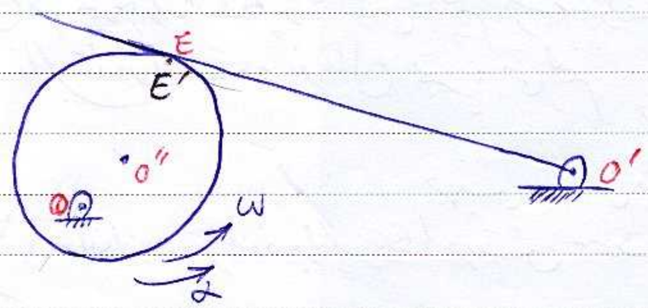
نسبت به زمین ، نسبت به زمین

$$\rightarrow a_{rel_E} + a_{rel_{E'}} = r(\omega_{چرخ} \pm \omega_{سطح\ زمین})^2$$

جهت نیز به سمت مرکز دایره است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



دیسک حول مرکز دورانش یعنی O در حال دوران است، اگر "O" مرکز دیسک باشد

$? = \omega_{O'E}$, $\alpha_{O'E}$

داریم:

راستای سرعت نقطه E' عمود بر OE' است

در صورتی که راستای سرعت نقطه E در جهت EO' است زیرا عمود بر لینک

← چون راستای E و E' 100% متفاوت خواهد بود و هیچ گاه باهم یکی نخواهد شد

← با اطمینان کامل می توان گفت که لغزش داریم (لغزش کامل)

حال با قرار دادن دستگاه مختصات نوع دوم روی نقطه O

$$V_E = \cancel{V_O} + \omega_O \times r_{OE} + V_{rel}$$

$V_{rel} = \cancel{V_{E/E'}} + V_{E'/E}$ ← $V_{rel} = V_{E'/E}$ که جهت آن، در جهت لینک $O'E$ است

چونکه دیسک نمی تواند در شکم لینک فرو برود.

$$a_{E_t} + a_{E_n} = \cancel{a_O} + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + 2\omega \times V_{rel} + a_{rel_t} + a_{rel_n}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

a_{E_t} : عمود بر لینک $O'E$ است

a_{E_n} : در جهت لینک $O'E$ است

برای اینکه درک روشنی از a_{rel} داشته باشیم بهتر است که:

این شکل را با چرخی که روی زمین در حال غلتش توام با لغزش است مقایسه کنیم

پس:

هم a_{rel_t} داریم هم a_{rel_n}

همچنین جهت a_{rel_n}، در جهت مرکز دایره است نه مرکز دوران

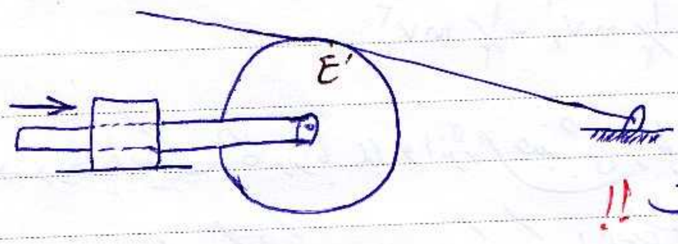
نکته: اگر دیسک در O فیکس نشده بود ⇐ امکان داشت که غلتش داشته باشیم

زیرا:

دیگر نمی‌توان گفت که:

100٪ جهت سرعت نقطه E'

مماس بر دایره (عمود بر OE') است !!

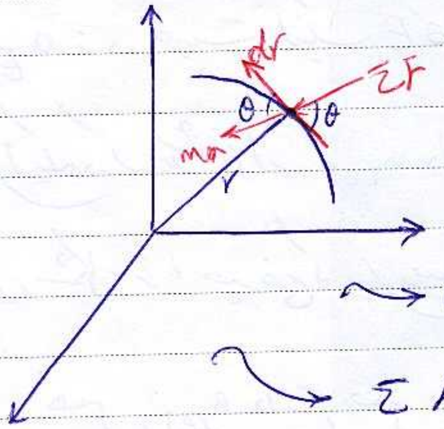


امتحان پایان ترم: ساعت 13-16 دوشنبه

Subject: ساعت 7 صبح تا 10 صبح →

Year. ۸۸ Month. ۸ Date. ۱۱

Energy method: بررسی مبحث انرژی:



$\Sigma F = ma \rightarrow$ کلیه نیروهای خارجی وارد بر ذره

$\Sigma F \cdot dr = ma \cdot dr$

$\rightarrow ma \cdot dr = \Sigma F \cos\theta \, ds = \Sigma m a_t \, ds$

مقدار dr

$\rightarrow \Sigma F \cdot dr = m a_t \, ds$

می توان نوشت:

$a_t \, ds = v \, dv$ زیرا: $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \times \frac{ds}{dt} \rightarrow$

$$a_t \, ds = v \, dv$$

$\Sigma F \cdot dr = m v \, dv \rightarrow \int \Sigma F \cdot dr = \int_{v_1}^{v_2} m v \, dv$

$\rightarrow F_t \, ds$

$\Rightarrow \int \Sigma F \cdot dr = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$

* در دینامیک کار را با u و انرژی جنبشی را با T نشان می‌دهیم

$\Sigma F \cdot dr = du \rightarrow$ کار کلی یک جابه‌جایی کوچک انجام می‌شود

$\rightarrow \Sigma F \cdot dr = T_2 - T_1 = \Delta T \rightarrow u = \Delta T$

*

$du = \Sigma F \cos\theta \, ds$

یکی از تعاریف کار: مولفه نیرو در راستای جابه‌جایی × جابه‌جایی نیرو

PAPCO

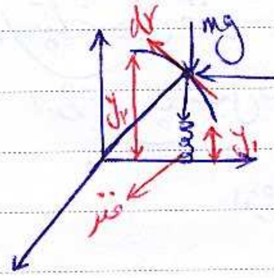
Subject:
Year. Month. Date. ( )

یا : مولفه جابه‌جایی در راستای نیرو x نیرو

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F'} + m\vec{g}$$

$\sum F'$: نیروهای خارجی وارد بر ذره به جز وزن

P_1 : نیرو و جابه‌جایی نیرو در جهت هم باشند کار + است
P_2 : " " در خلاف جهت هم باشند کار − است



$$u = \int (\sum F' + mg) \cdot dr = \Delta T$$

$$\rightarrow \int \sum F' \cdot dr + \int mg \cdot dr = \Delta T$$

$$\rightarrow \int \sum F' \cdot dr - \int_{y_1}^{y_2} mg \cdot dy = \Delta T$$

به خاطر خلاف جهت بودن mg و dy منفی است

$$\rightarrow \int \sum F' \cdot dr = \Delta T + (mg y_2 - mg y_1)$$

* انرژی پتانسیل ثقلی: $V_g = mgy$

$$\rightarrow \int \sum F' \cdot dr = \Delta T + \Delta V_g$$

$$\sum \vec{F'} = \sum \vec{F''} + kx n$$

n : تغییر طول نسبت به حالت آزاد
$\sum F''$: کلیه نیروهای وارد بر جسم به جز نیروهای وزن و فنر

$$\rightarrow \int \sum F' \cdot dr = \int \sum F'' \cdot dr + \int kn \cdot dr = \Delta T + \Delta V_g$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\rightarrow \int \Sigma F''.dr - \int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \Delta T + \Delta V_g$$

* dr در راستای فنر برابر dx است
* فنر تحت کشش است ← نیرو به سمت پایین آن ← منفی است

$$\rightarrow \int \Sigma F''.dr = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

* انرژی پتانسیل فنر: $V_e = \frac{1}{2} k x^2$

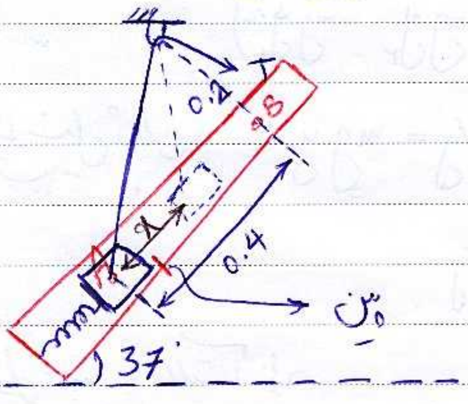
$$\rightarrow E = T + V_g + V_e$$

انرژی مکانیکی ، انرژی جنبشی ، انرژی پتانسیل ثقلی ، انرژی پتانسیل فنر

$$\Rightarrow U' = \int \Sigma F''.dr = \Delta E$$

کار کلیه نیروهای خارجی وارد بر ذره به استثنای وزن و فنر

* کار نیروهای خارجی وارد بر ذره به استثنای نیروی وزن و فنر برابر است با تغییرات انرژی مکانیکی



مثال:

شیاری صیقلی با افق زاویه 37 می‌سازد.
فنر در ابتدا تحت کشش است، نیروهای رو به بالا بیشتر از نیروهای رو به پایین است (حساب کردیم)

برای اینکه جسم حرکت نکند یک پین جلوی جسم می‌گذاریم حال پین را می‌کشیم
فنر به جسم متصل است

← سرعت جسم هنگام عبور از نقطه B چقدر است؟

فرضیات:

T همواره ثابت است و در همه جا یکسان است و $T = 900N$

قرقره هم کاملاً روان است و دارای جرم ناچیزی است

$k = 1000\ N/m$, $m = 0.5\,kg$ = جرم جسم

x : انحراف فنر نسبت به طول آزاد = $+0.2m$

+ یعنی فنر تحت کشش است ←

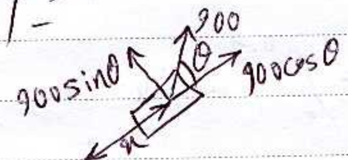
حل به روش ثبت انرژی:

$$U = E_2 - E_1 \quad , \quad E_1 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (0.2)^2 = 20$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times V^2 + 0.5\,g \times 0.4 \sin 37 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (0.2 + 0.4)^2$$

سطح مبنا را روی خود جسم در حالت A در نظر گرفتیم

جسم در میانه راه:



$900 \sin\theta$ چون در راستای جابه‌جایی نیست، کار انجام نمی‌دهد

و نیروی به جز وزن و فنر عبارت اند از T, N که

N نیز چون در راستای خودش جابه‌جایی ندارد پس کارش برابر صفر است

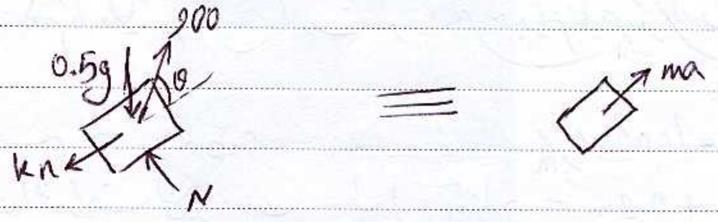
$$\rightarrow U = \int_0^{0.4} 900 \times \frac{(0.4 - x)}{\sqrt{0.04 + (0.4 - x)^2}}\, dx$$

$$\left(U = \int 900 \cos\theta \, dx \quad , \quad \cos\theta = \frac{0.4 - x}{\sqrt{0.04 + (0.4 - x)^2}} \right)$$

در این روش انتگرال سخت شد!!

2 راه داریم برای اینکه به انتگرال سخت برخورد نکنیم :

۱) روش نیرو :



$$\rightsquigarrow \quad \sum F_x = m a_x \Rightarrow 900\cos\theta - k(x+0.2) - 0.5g\sin 37 = ma$$

$$\cos\theta = \frac{0.4 - x}{\sqrt{0.04 + (0.4-x)^2}} \xrightarrow{\div m}$$

$$\frac{-1000(x+0.2)}{0.5} - \frac{0.3}{0.5}g + \frac{800}{0.5} \times \frac{0.4 - x}{\sqrt{0.04+(0.4-x)^2}} = a$$

$$\rightsquigarrow \int_0^v v\,dv = \int_0^{0.4} a\,dx \rightsquigarrow \frac{1}{2}v^2 = \int_0^{0.4} a\,dx$$

$\rightsquigarrow$ حل می‌شه!!

حال

با دیدگاه جدید از روش انرژی آشنا می‌شویم که دیگه به انتگرال سخت برخورد نکنیم و آن هم سیستم است

* اگر سیستم ما متشکل از چند عضو باشد آنگاه در اتصال‌ها اگر زوج نیروهای عمل و عکس‌العمل، جابه‌جایی یکسان داشته باشند ← کار آن‌ها همدیگر را خنثی می‌کند

نتیجه: اگر ما بخواهیم a را بنویسیم، کار نیروی داخلی را در نظر نمی‌گیریم

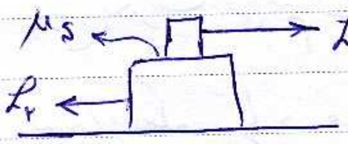
Subject:
Year. Month. Date. ( )

تغییر انرژی مکانیکی کل سیستم

$W = E_2 - E_1$

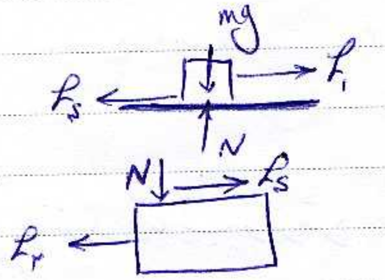
→ کار عوامل خارجی وارد بر جسم به جز وزن و فنر

داریم:



فرض می‌کنیم f_2 قوی‌تر از f_1

حال اگر لغزش پیش نیاد ⇐



f_s به سمت چپ و جابه‌جایی به سمت راست

⇐ علامت کار −

f_s به سمت راست و جابه‌جایی هم به سمت راست

⇐ علامت کار +

پس: کار نیروی داخلی (عمل و عکس العمل) همدیگر را خنثی می‌کند چون هم جابه‌جایی‌ها و نیروها با هم برابرست اما $W_1 = -W_2$

حال: اگر فرض کنیم که لغزش داشته باشیم

⇐ دیگر جابه‌جایی‌ها با هم برابر نمی‌شد ⇐ مجموع کار نیروهای عمل و عکس العمل صفر نمی‌شد !!

* سیستم: مجموعه‌ای از عناصر که به نوعی حرکتشان به هم وابسته است

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل

سراغ مثال قبلی می‌رویم و داریم:

سیستمی تعریف می‌کنیم شامل جرم - فنر - طناب - قرقره.

به جای آنکه تنها جسم را منحصراً مورد بررسی قرار دهیم، کل سیستم را بررسی می‌کنیم

$$U = E_2 - E_1$$

$\hookrightarrow$ کار نیروهای خارجی وارد بر کل سیستم

فنر و طناب و قرقره جرمی ندارند $\Leftarrow$ انرژی جنبشی آن‌ها صفر است

اما:

برای محاسبه E_1 داریم:

$$E_1 = \frac{1}{2} \times 1000 \times (0.2)^2 + 0 + 0 + 0$$

انرژی جنبشی اولیه جسم صفر است چون $V_1 = 0$

طناب و قرقره هم نه انرژی جنبشی دارند نه پتانسیل

انرژی پتانسیل اولیه جسم نیز صفر است چون روی سطح مبنا است.

$$E_2 = \frac{1}{2}(1000)(0.6)^2 + \underbrace{0.4 \sin 37 \times 0.5g}_{\text{انرژی پتانسیل جسم}} + \underbrace{\frac{1}{2} \times 0.5 \times V^2}_{\text{انرژی جنبشی جسم}} + \overset{\text{قرقره}}{0} + \overset{\text{طناب}}{0}$$

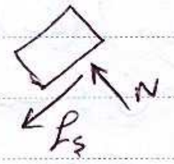
U : کار کلیه عوامل خارجی وارد بر سیستم بجز وزن و فنر

Subject:
Year. Month. Date. ( )

عکس العمل فنر: جابه جایی در راستای نیرو ندارد پس کارش صفر است

در قرقره ها نیز نیرو داریم اما جابه جایی نداریم پس کار صفر است

همچنین اگر قرقره ها روان نبود ⇐ گشتاور داشت و باید کار گشتاور را حساب می کردیم



N نیز کاری انجام نمی دهد چون در راستای N جابه جایی نداریم

همچنین چون سطح صیقلی است ⇐ f_s نداریم

حال: تنها کار طناب باقی ماند ⇐

طناب را می کشیم که دو مولفه داریم:
یکی در راستای شیار و دیگری عمود بر شیار که T در راستای عمود بر شیار مهم نیست زیرا کارش صفر است

$$u = 900\,(\underbrace{\sqrt{(0.4)^2 + (0.2)^2} - 0.2}_{\text{جابه جایی در راستای نیرو}})$$

همچنین کار + است چون نیرو و جابه جایی هم جهت اند

سوال:
محل توقف جسم کجاست؟

$E_2 =$ داریم

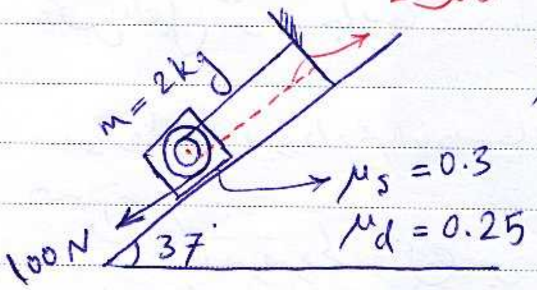
$$E_3 = 0.5\, g \sin 37\, (0.4 + x_1) + \frac{1}{2} \times 1000\, (0.6 + x_1)^2$$

$${}_2U_3 = -900\left(\sqrt{0.04 + x_1^2} - 0.4\right)$$

وقتی جسم از B عبور می کند
⇐ جهت T عکس می شود T

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۸ Date. ۸x2

شنبه



مثال:

قرقره روان با جرم ناچیز و $r_1/r_2 = 1/3$

سرعت جعبه بعد از 1.2 m جابجایی = ?

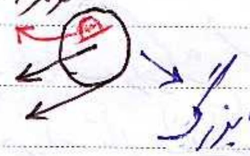
با کمک انرژی سیستم، مثال را حل می‌کنیم

سطح مبدا (مبنا) را در همان وضعیت ۱ قرار می‌دهیم:

جسم به سمت پایین حرکت می‌کند چون:

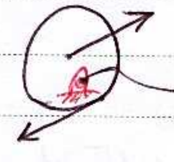
مرکز آنی قرقره کوچک در نقطه تماسش با طناب است و چون مرکز قرقره زیر مرکز آنی است ⟸ سرعتش در جهت جهت سرعت قرقره پایینی (بزرگ) است

مرکز آنی دوران



قرقره بزرگ

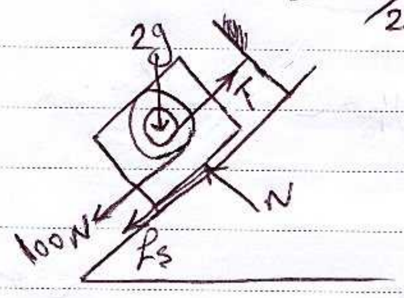
حالت 2 : اما :

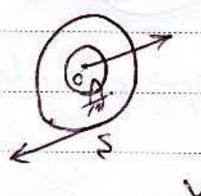


مرکز آنی دوران

برای حالت دوم، مثال را حل می‌کنیم:

$E_1 = 0$, $E_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times v^2 + 2g \times 1.2 \sin 37$





$v_o = r_1 \omega$

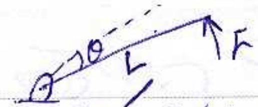
$v_s = (r_2 - r_1)\omega$

$\rightarrow \frac{v_s}{v_o} = \frac{r_2}{r_1} - 1$

$\rightarrow \frac{v_s}{v_o} = 2 \rightarrow v_s = 2v_o$

پس وقتی جسم به اندازه x جابجا می‌شود نیروی 100N به اندازه 2x جابجا می‌شود

نکته:



$\Rightarrow u=\int F \cdot ds \xrightarrow{ds = L d\theta} u=\int F L \, d\theta \rightarrow u = \int M \, d\theta$

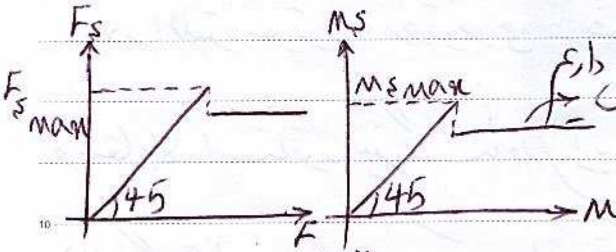
مفصل‌های غیر روان همواره کار منفی ایجاد می‌کنند

$u = -0.25 \times 2g \cos 37 \times 1.2 + 100 \times 2.4$

کار نیروی $100N$ مثبت شد چونکه، کار برابر است نیرو ضرب در جابه‌جایی نیرو در راستای نیرو؛

$100N$

داریم: جابه‌جایی جسم به سمت بالا است اما جابه‌جایی نیروی ... به سمت پایین است.



از این جا به بعد چرخش داریم

حال اگر قرقره‌ها روان نباشند:

با فرض:

$M_d = 2.5 \, N.m$ ، $M_s = 3 \, N.m$ ، $r_2 = 0.2$ ، $r_1 = 0.1$

اصولاً باید ما ابتدا گشتاور مورد نیاز در قرقره جهت اینکه قرقره بچرخد را یافته و سپس اگر آن گشتاور از M_s بیشتر بود $\Leftarrow$ قرقره خواهد چرخید

در غیر این صورت قرقره نخواهد چرخید و گشتاور، کاری انجام نخواهد داد

اما:

ما به طراح سوال اطمینان می‌کنیم و فرض را بر چرخش قرقره خواهیم گذاشت

*

$u = \int M \omega \, dt \Leftarrow$ کار گشتاور $= u = \int M \, d\theta = M\theta$

گشتاور

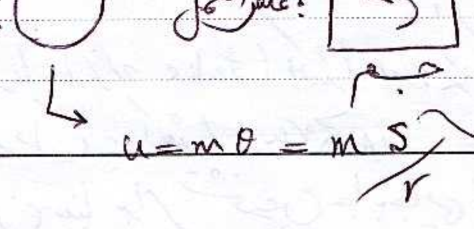
تغییر زاویه طی گشتاور اعمال شده

در این جا داریم:

عمل: قرقره

عکس‌العمل:

جسم



چون جسم نمی‌چرخد $\Leftarrow$ کار گشتاور (گشتاور عکس‌العملی!!) صفر است

$u = M\theta = M \frac{S}{r}$ جابه‌جایی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته: وقتی دو جسم نسبت به هم غلتش دارند ⟸ جابه‌جایی‌شان نسبت به هم صفر است

* اگر نیرو به نقطه‌ای از جسم که سرعت ندارد وارد شود ⟸ آن نیرو کار انجام نمی‌دهد

مثل: کار نیروی اصطکاک در غلتش کامل با شرط ثابت بودن سطح زیرین صفر است (چون سرعت صفر است ⟸ جابه‌جایی صفر است)

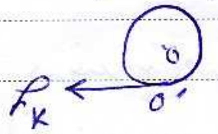
* در الکتروموتور، روتور می‌چرخد و گشتاور را به استاتور وارد می‌کند

و متقابلاً استاتور نیز گشتاور را به روتور وارد می‌کند

(البته گشتاور روتور محرک است نه گشتاور مقاوم)

اما:
تنها گشتاور روتور کار انجام می‌دهد چون تنها روتور می‌چرخد

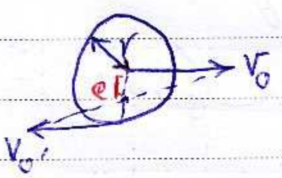
* ماشینی که در حال بوکس و باد است ⟸ (در چنین بوکس و باد، حرکت هم می‌کند!!)



$$W_{f_k} = f_k \times d$$

اما این جابه‌جایی با جابه‌جایی مرکز چرخ یکی نیست چون $V_{o'} \neq V_o$

اما می‌توانیم جابه‌جایی نیروی اصطکاک را با توجه به جابه‌جایی مرکز چرخ بیابیم



$$\frac{V_o}{e} = \frac{V_{o'}}{r-e}$$

برای یافتن جهت نقطه o':

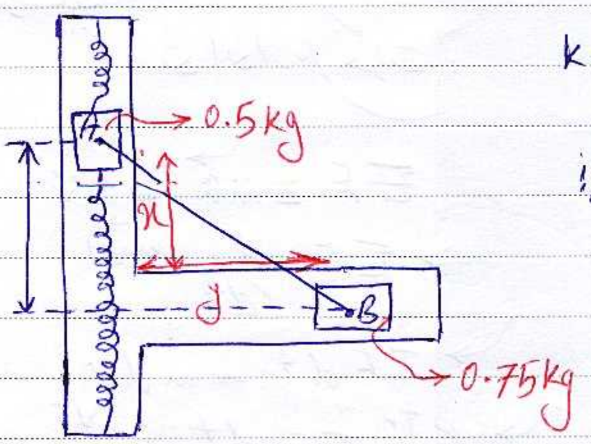
$$V_{o'} = (V_A - r\omega)\, i$$

در بوکس و باد (take off) اگر $V_A < r\omega$ ⟸ ⟵ : جهت f_k

اما در ترمز کردن، اگر $V_A > r\omega$ ⟸ ⟶ : جهت f_k

* بهترین مبنا برای تشخیص جابه‌جایی نیرو، بررسی سرعت در نقطه مورد نظر است

Subject :
Year . Month . Date . ( )



$k = 10\,\frac{N}{m}$

فنرها طول آزاد خود را در $x = 0$ دارند

جرم لینک ناچیز است

* اگر جرم لینک مطرح بود، چون هم گستردگی دارد هم دوران ← در این مبحث، مساله را نمی‌توان حل کرد (سینتیک ذرات)

$x_0 = 0.4\,m \rightsquigarrow v_A = v_B = 0 \Rightarrow v_A, v_B = ?$ در هر x دلخواه

$U = E_2 - E_1$

تنها نیروهای خارجی، N است که کار انجام نمی‌دهد ⟸ $U = 0$ ⟸ $E_2 = E_1$

همچنین، چون شکل در صفحه افقی قرار دارد ⟸ بحث انرژی پتانسیل [illegible]

$E_1 = 2 \times \frac{1}{2} \times 10 \times (0.4)^2$

↳ چون 2 فنر داریم (یکی فشرده می‌شود و دیگری کشیده)

$E_2 = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 10 \times x^2\right) + \frac{1}{2} \times 0.5 \times v_A^2 + \frac{1}{2} \times 0.75 \times v_B^2$

← معادله 2 مجهول

← باید از سینماتیک کمک بگیریم و رابطه بین V_A و V_B برقرار کنیم:

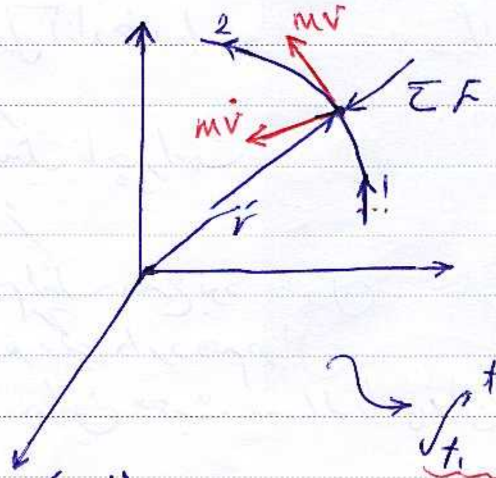
$x^2 + y^2 = 0.6 \rightsquigarrow 2\dot{x}x + 2\dot{y}y = 0 \rightsquigarrow \dot{x} = \frac{-y\dot{y}}{x}$

$\rightsquigarrow v_A = \frac{-y v_B}{x} = \frac{-v_B\sqrt{0.36 - x^2}}{x}$

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۸ Date. ۱۸ ( )

دوشنبه

momentom method — متد اندازه حرکت:



$$\Sigma F = m\vec{a} = m\dot{v}$$
$$\rightarrow \Sigma F = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$
$$\rightarrow \Sigma F\, dt = m\, dv$$
$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F \cdot dt = \int_{v_1}^{v_2} m\, dv$$
$$\rightarrow \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F\, dt}_{\text{ضربه خطی}} = m(V_2 - V_1) = G_2 - G_1 = \Delta G$$

کلیه نیروهای خارجی وارد بر جسم

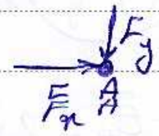
اندازه حرکت خطی

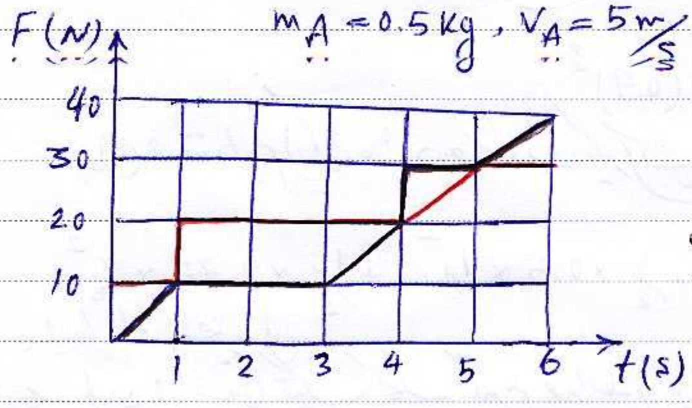
$t_1 - t_2$ زمانی است که نیرو به جسم وارد می شود

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F \cdot dt \left\langle \begin{array}{l} \int \Sigma F_x \cdot dt = \Delta G_x \\ \int \Sigma F_y \cdot dt = \Delta G_y \\ \int \Sigma F_z \cdot dt = \Delta G_z \end{array} \right.$$

مثال:

$m_A = 0.5\,kg$, $V_A = 5\,m/s$ $37°$





V_A بعد از ۶ ثانیه را بیابید =?

$$\int \Sigma F_x\, dt = \Delta G_x$$
$$\rightarrow +125 = 0.5(V_x + 4) \rightarrow 5\cos 37$$
$$\Rightarrow V_x = 246$$

$$\int \Sigma F_y\, dt = \Delta G_y \Rightarrow 105 = 0.5(V_y - 3) \Rightarrow V_y = 213$$
$$\rightarrow v = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{213}{246}$$

PAPCO

نکته: ← $\Sigma F = \dot{G}$

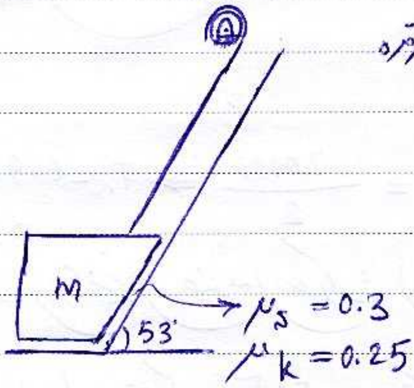
site: Mec20.blogfa.com   E_mail : ibm_ruby@yahoo.com

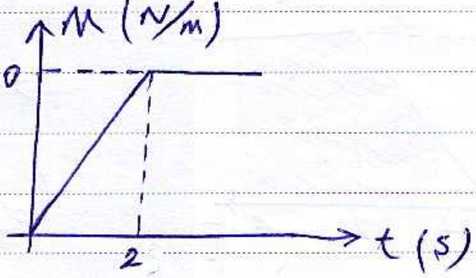
Subject :

Year .   Month .   Date .   ( )

مثال :

شعاع قرقره $r = 0.1\,m$, $m = 1000\,kg$



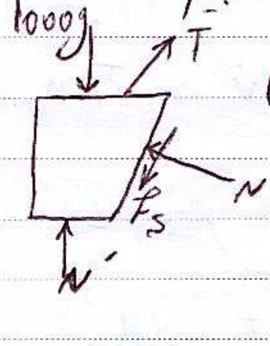


قرقره به یک الکتروموتور متصل شده است . نمودار تغییرات گشتاور وارده از الکتروموتور به قرقره نیز معلوم است

6 ثانیه بعد از زدن کلید الکتروموتور ⇐ $v_{\text{جسم}} = ?$

وقتی ما کلید الکتروموتور را می‌زنیم ، بلافاصله قرقره حرکت نمی‌کند (کشش کابل باید به یک اندازه‌ی خاصی برسد)

⇐ زمان حرکت را با کمک گرفتن از استاتیک می‌یابیم :



وقتی حرکت می‌کنیم ⇐ N' صفر می‌شود (آستانه‌ی لغزش)

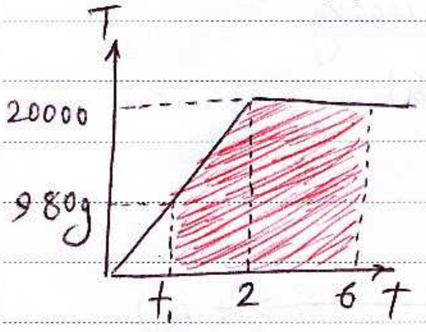
پس داریم :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - 1000g\cos 53 = 0$$

$$\Rightarrow N = 600g$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T - 1000g\sin 53 - 0.3 \times 600g = 0 \Rightarrow T = 980g$$

از روی نمودار $M-t$، $T-t$ را بایستی رسم ($\frac{M-t \text{ نمودار}}{\text{۲ قرقره}}$) $(M=T.r)$

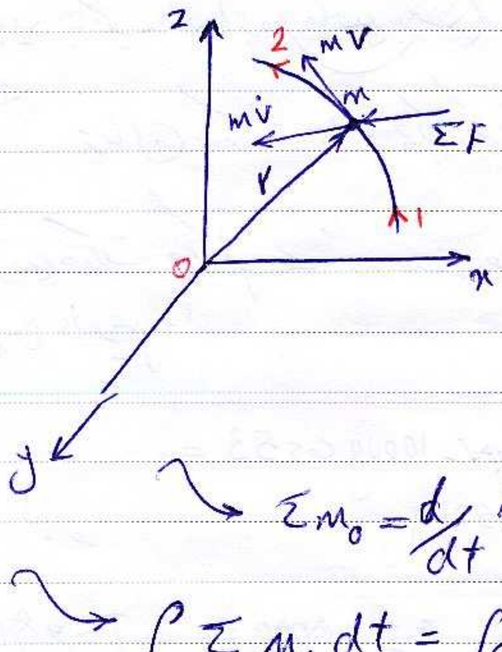


$$\Rightarrow \frac{980}{t_1} = \frac{20000}{2} \Rightarrow t_1 = 0.961$$

نکته: بازه‌ی زمانی ضربه‌ی حرکت $\left(\int_{t_1}^{t_2} \sum F_x \, dt\right)$ بازه‌ای است که در آن به جسم نیرو وارد می‌شود

حال داریم:

$$20000 \times 4 + \left(\frac{2 \times 20000}{2} - \frac{980g \times 0.961}{2}\right) - 1000g \sin 53 \,(6-0.961)$$
$$- 0.25 \times 600g\,(6-0.961) = 1000 \times v_x \rightarrow v_x =$$



$$\Sigma M_O = r \times \Sigma F = r m \dot{V}$$
$$\dot{H}_O = \frac{d}{dt}(r \times mV) = \cancel{\dot{r} \times mV}$$
$$+ r \times m\dot{V} \Rightarrow \Sigma M_O = \dot{H}_O$$

$$\underline{H_O} = \underline{r} \times m \underline{V}$$ اندازه حرکت زاویه‌ای

$$\Sigma M_O = \frac{d}{dt} H_O \Rightarrow \Sigma M_O \, dt = dH_O$$

$$\underbrace{\int \Sigma M_O \, dt}_{\text{ضربه زاویه‌ای}} = \int dH_O = H_{O_2} - H_{O_1} = \Delta H_O$$

گشتاور کلیه نیروهای خارجی حول O

Subject:
Year. Month. Date. ( )

بردار گشتاور عمود بر صفحه دوران است

$$\int \Sigma M_o \, dt \begin{cases} \int \Sigma M_{o_x} \, dt = \Delta H_{o_x} \\ \int \Sigma M_{o_y} \, dt = \Delta H_{o_y} \\ \int \Sigma M_{o_z} \, dt = \Delta H_{o_z} \end{cases}$$

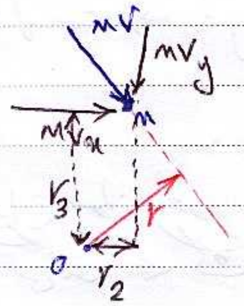
$$H_o = r \times mv = (xi + yj + zk) \times m(v_x i + v_y j + v_z k)$$

$$\rightarrow H_o = m \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \begin{cases} H_{o_x} = (y v_z - z v_y) m \\ H_{o_y} = (z v_x - x v_z) m \\ H_{o_z} = (x v_y - y v_x) m \end{cases}$$

* در صفحه فقط H_{o_z} داریم

همچنین در صفحه فقط ضربه زاویه ای در راستای محور z داریم

حال برای مسائل در صفحه داریم:



با فرض mv به عنوان یک نیرو اگر گشتاورش را حول o بیابیم

← اندازه حرکت زاویه ای را یافته ایم

$$\rightarrow H_{o_z} = mv \times r$$

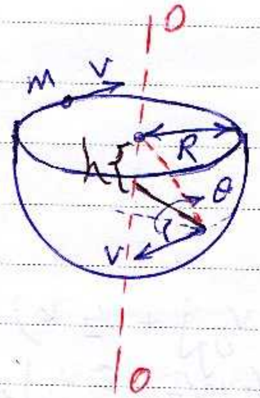
یا اینکه :

$$H_{o_z} = mv_y \times r_2 + mv_x \times r_3$$

ضرب معمولی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



گلوله‌ای درون این لیوان حرکت می‌کند (یک حرکت مارپیچی) تا به انتها برسد

سطح درون لیوان صیقلی است و

$0 < h < R$

$0 < r < R$

r : شعاعی است که گوی در هر لحظه از پایین آمدنش دارد.

θ : زاویه‌ای است که بردار سرعت با صفحه‌ای می‌سازد که محور عمود بر آن OO است

تنها نیروی خارجی N است که چون حرکتی در آن جهت نداریم ⇐

$U = E_2 - E_1 = 0 \rightarrow E_2 = E_1 \rightarrow$

$\frac{1}{2} m v_0^2 = -mgh + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2gh \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$

$\int_0^t \Sigma M_{O_O} \, dt = \Delta H_O$

نیروی وزن موازی محور OO است و نیروی عکس‌العمل عمودی سطح محور OO را قطع می‌کند ⇐ گشتاورشان حول محور OO صفر است

$\rightarrow \Delta H_O = 0 \Rightarrow H_{O_2} = H_{O_1} \rightarrow m v_0 R = m \sqrt{v_0^2 - 2gh} \times \cos\theta \times \sqrt{R^2 - h^2}$

$\rightarrow \cos\theta = \frac{v_0 R}{\sqrt{(v_0^2 - 2gh)(R^2 - h^2)}}$

برخورد گوله‌ها (اجسام بهتره!!)

t_1: زمانی است که طول می‌کشد تا بیشترین تغییر شکل در دو جسم رخ دهد (max انحراف رخ داده باشد)

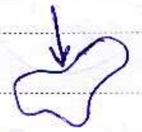
t_1 زمانی است که max انحراف اتفاق افتاده باشد که از نظر سینماتیکی یعنی در راستای برخورد، سرعت نسبی نداشته باشیم

t زمانی است که دو جسم در آستانه جدا شدن از هم هستند

$t_1 - 0$ را زمان هم‌رسی گویند (انرژی جمع می‌شود)
$t - t_1$ را زمان وارسی گویند (انرژی آزاد می‌شود)

$$\int_0^t F\,dt = \Delta G_A$$

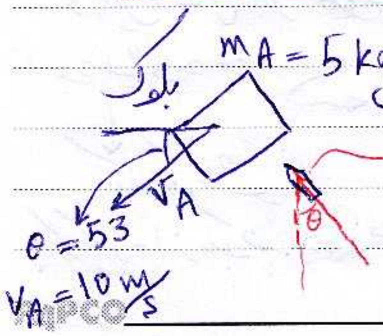
$$\Rightarrow \Delta G_A + \Delta G_B = 0$$



$$-\int_0^t F\,dt = \Delta G_B$$

اندازه حرکت خطی کلی تغییر نمی‌کند $\Delta G_{کل} = 0$
هنگام برخورد n جسم با هم در غیاب هرگونه ضربه خارجی

مثال: وقتی گلوله به بلوک برخورد می‌کند ⇐ با هم شروع به حرکت می‌کنند ⇐ v را در لحظه برخورد بیابید؟



$V_B = 300\ m/s$
$m_B = 0.05\,kg$
$\theta = 15$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$G_{x_1} = G_{x_2} \Rightarrow G_{x_1A} + G_{x_1B} = G_{x_2A} + G_{x_2B}$$

$$\rightarrow -5 \times 10 \cos 53 - 0.05 \times 300 \sin 15 = -5.05\, V_x$$

$$G_{y_1} = G_{y_2} \Rightarrow -5 \times 10 \sin 53 + 300 \cos 15 \times 0.05 = 5.05 \times V_y$$

$$\rightarrow V_x = 6.7 \quad , \quad V_y = -5.05 \Rightarrow V = 8.39$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \times 0.05 \times 300^2 + \frac{1}{2} \times 5 \times 10^2 = 2500$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \times 5.05 \times 8.39^2 = 177.7 \qquad \Rightarrow E_1 \neq E_2$$

* تنها در برخورد الاستیک ؛ $E_1 = E_2$

برخورد الاستیک برخوردی است که در آن:
انرژی جمع شده در زمان همرسی
با انرژی آزاد شده در زمان وارسی برابر باشد

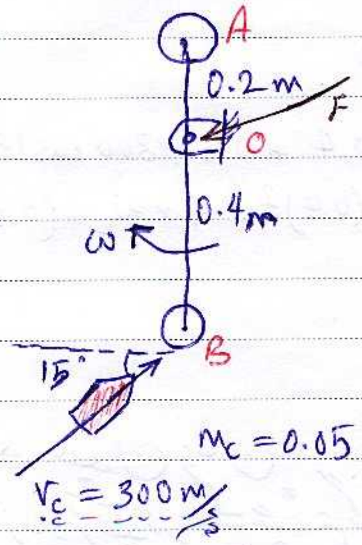
* در E تنها $|v|$ مهم است اما در G علاوه بر $|v|$، جهت v نیز مهم است

در این مثال اگر گلوله از شکم بلوک عبور کند یا اصلاً هنگام برخورد، گلوله نابود شود!! ← مسأله غیرقابل حل!! است

تکه تکه شود

اگر گلوله از بلوک (هنگام برخورد) خارج می‌شد ← 2 معادله، 4 مجهول ← غیرقابل حل

مثال:



مفصل O، کاملاً روان است

گلوله ای را به سمت B شلیک می کنیم

V_A را در لحظه برخورد بیابید؟

$m_A = m_B = 0.5\,kg$

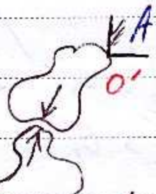
$\omega = 10\, rad/s$

وقتی گلوله به B برخورد می کند، یک نیروی بسیار زیاد از طرف مفصل به سیستم وارد می شود ⇐ $G_1 \neq G_2$ زیرا: $Q = \int F dt \begin{cases} Q_x = \Delta G_x \\ Q_y = \Delta G_y \end{cases}$

$Q_x, Q_y \neq 0$

$\int_0^t F\, dt$ منظور است که t زمانی است که نوک گلوله به B برخورد کرده تا گلوله کاملاً داخل B فرو رفته باشد.

* اگر ۲ جسم برخورد کنند و ما گشتاور را حول O محاسبه کنیم



O.
چون نیروهای برخورد زوج عمل و عکس العمل هستند پس گشتاور یکدیگر را خنثی می کنند

نیروهای وزن نیز با ضرب در یک مقدار کوچک، بسیار ناچیز خواهند شد و در نظر گرفته نمی شوند (البته اگر با افق زاویه دار باشد)

اما نیرویی که از طرف سطح A به جسم وارد می شود زیاد است و نمی توان از آن صرف نظر کرد پس $H_{O_1} \neq H_{O_2}$ ⇐

پس گشتاور را حول O' محاسبه کنیم ⇐

$H_{O_1} \simeq H_{O_2}$ →

زیرا اگر با افق زاویه می داشت که وزن دو گلوله باعث ایجاد گشتاور می شود که البته می شود از آنجا صرف نظر کرد (زیرا زمان برخورد بسیار کوتاه است)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow \int \Sigma M_o \, dt = \Delta H_o = 0 \rightarrow H_{O_1} = H_{O_2}$$

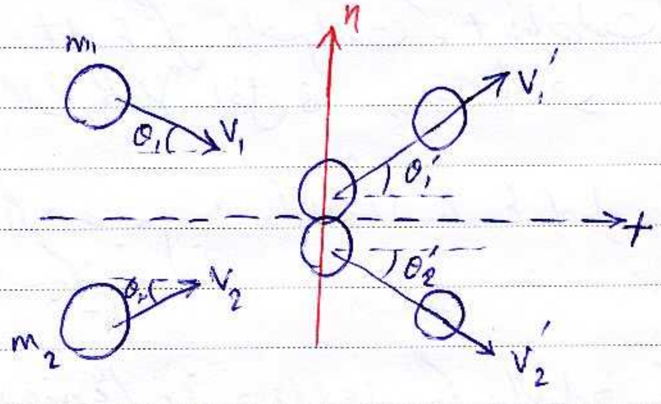
$$-0.5\times 0.2\times 10\times 0.2 - 0.5\times 0.4\times 10\times 0.4 + 0.5\times 300\cos 15\times 0.4 = 5\cdot 0.5\,\omega_2\times(0.4)^2 + 5\times \omega_2\times(0.2)^2$$

ω_2 را می‌یابیم

* چون زمان t بسیار کوچک در نظر گرفته شده است و w نمی‌تواند تاثیر زیادی بگذارد که چشم‌گیر باشد
که پس از برخورد نیز پاندول را قائم در نظر گرفتیم

23 آبان ۸۸

شنبه:
برخورد دو گوی



$m_2, m_1, \theta_1, \theta_2, V_1, V_2$ را داریم
$\leftarrow V_1', V_2', \theta_1', \theta_2'$

در راستای t نیروی بین این دو تبادل نمی‌شود زیرا سطح دو گوی صیقلی است
در راستای t، به هیچ کدام از گوی‌ها نیرویی وارد نمی‌شود

راستای n، راستای برخورد است

ضربه در راستای n وارد می‌شود. (با وصل کردن مرکز 2 گوی به هم ← راستای n را می‌یابیم) (t عمود بر n است)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در راستای t:

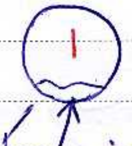
$$\cancel{m_1} V_1 \cos\theta_1 = \cancel{m_1} V_1' \cos\theta_1'$$
$$\cancel{m_2} V_2 \cos\theta_2 = \cancel{m_2} V_2' \cos\theta_2'$$

در راستای n: (چون 2 گوی به هم ضربه وارد می‌کنند ⇐ ΔG تک‌تک! برابر صفر نیست!)

$$-m_1 V_1 \sin\theta_1 + m_2 V_2 \sin\theta_2 = m_1 V_1' \sin\theta_1' - m_2 V_2' \sin\theta_2'$$

معادله‌ی چهارم باید به جنبش این 2 گوی بستگی داشته باشد

$0 \rightarrow t_1$ $\qquad$ $t_1 \rightarrow t$



ضربه جذب می‌کند $\qquad$ ضربه‌ی پس داده

$$\int_0^{t_1} F\,dt \qquad \int_{t_1}^{t} F'\,dt$$

$$\Rightarrow e = \frac{\int_{t_1}^{t} F'\,dt}{\int_0^{t_1} F\,dt}$$

$0 < e < 1$

زیرا:

ضربه همواره جذب می‌شود اما احتمال دارد هیچ ضربه‌ای پس ندهد (ضربه‌ی کاملاً پلاستیک ← مثل برخورد دو قطعه خمیر با هم) و یا اینکه کل ضربه‌ی جذب شده را پس دهد (ضربه‌ی کاملاً الاستیک!)

حال با داشتن e معادله‌ی چهارم را می‌سازیم:

نتیجه‌ی ضربه = تغییر اندازه حرکت خطی در راستای خودش

$\int_0^{t_1} F\,dt$ = تغییر اندازه حرکت خطی جسم! در راستای نرمال طی زمان 0 تا t_1

PAPCO

Subject:
Year.　Month.　Date.　( )

در لحظهٔ t_1 ، سرعت نسبی دو گوی صفر است.

→ $V_{1n} = V_{2n}$

سرعت جسم 1 در راستای نرمال در لحظهٔ t_1 = V_0

سرعت جسم 2 در راستای نرمال در لحظهٔ t_2 = V_0

با فرض به سمت بالا بودن V_0 داریم:

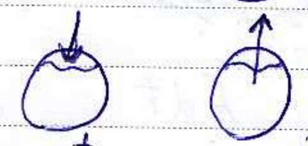
ضریب برخورد

برای جسم 1:

$$e = \frac{m_1 V_1' \sin\theta_1' - m_1 V_0}{+m_1 V_0 + m_1 V_1 \sin\theta_1}$$

حال برای جسم 2:

$$e = \frac{-m_2 V_2' \sin\theta_2' - m_2 V_0}{m_2 V_0 - m_2 V_2 \sin\theta_2}$$



$\int_0^{t_1} F\,dt$　　$\int_{t_1}^{t} F'\,dt$

← 5 معادله و 5 مجهول را (V_0 نیز مجهول است)

می‌توانیم با حذف V_0 از 2 معادلهٔ بالا ← 4 معادله و 4 مجهول خودمان برسیم (V_0 زیاد به درد ما نمی‌خورد!!)

→

$$e = \frac{V_1' \sin\theta_1' + V_2' \sin\theta_2'}{V_1 \sin\theta_1 + V_2 \sin\theta_2}$$

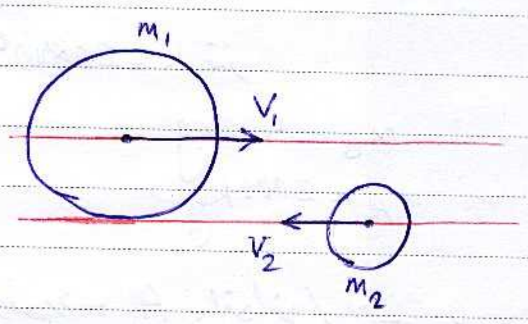
نکته:

$$e = \frac{|\text{سرعت نسبی در راستای برخورد در هنگام دور شدن}|}{|\text{سرعت نسبی در راستای برخورد در هنگام نزدیک شدن}|}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

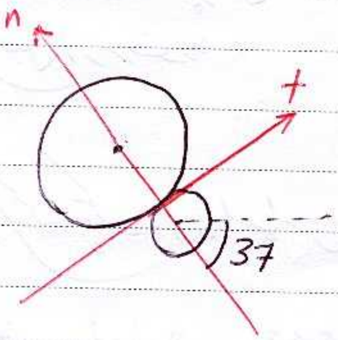
مثال



$m_1 = 23\,kg$, $r_1 = 75$
$m_2 = 4\,kg$, $r_2 = 50$
$V_1 = 4\ m/s$
$V_2 = 12\ m/s$
$e = 0.4$

ابتدا باید جهت n و t را می‌یابیم!!

اگر در هنگام برخورد 2 گوی باهم، مرکز گوی‌ها را به هم وصل کنیم ⇐ جهت n را یافته‌ایم



بقای اندازه حرکت گوی 1 در راستای t:

① $V_1 \cos 53^\circ = V'_{1t}$

جهت V'_{1t} را فرضی انتخاب کردیم

$\rightarrow V'_{1t} = 4\cos 53 = 2.4$

حال: (جهت V_2' را به سمت پایین + گرفتیم)

② $-V_2 \cos 53 = -V'_{2t} \rightarrow V_2' = 7.2 \rightarrow V'_{2t} = 7.2$

بقای اندازه حرکت خطی کل در راستای n:

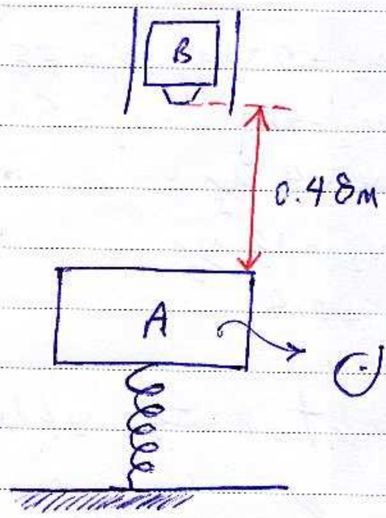
③ $-m_1 V_1 \cos 37 + m_2 V_2 \cos 37 = V'_{1n} \cdot m_1 - m_2 \cdot V'_{2n}$

فرض کردیم، گوی 1 پس از برخورد به سمت بالا و گوی 2 به سمت پایین می‌آیند.

④ $e = \dfrac{V'_{2n} + V'_{1n}}{4\cos 37 + 12\cos 37} = 0.4 \rightarrow$ V'_{1n} و V'_{2n} را می‌یابیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



فنر $k=2.88\times10^{6}\ N/m$

$m_B = 500kg$

$m_A = 3000kg$

پس از برخورد، A به اندازه‌ی 0.02m پایین می‌آید

⟸ الف) $e=?$

ب) Max پرش B پس از برخورد با A = ?

لحظه‌ی قبل از برخورد:

$$v_{1B}=\sqrt{2gh}=3.07\ m/s$$

لحظه‌ای که تیک (B) تماس بر سندان (A) شود را $t=0$ در نظر می‌گیریم

انحراف سندان (0.02m) از 0 تا t رخ می‌دهد

داریم:

0 تا t_1: زمان اثرگذاری B بر A (زمان برخورد است که بسیار کوتاه است)

t_1 تا t: زمانی است که سندان مستقل در حال پایین آمدن است (تیک پرش کرده و سندان به تنهایی در حال پایین آمدن است)

چون $t_1 << t$ ⟸ می‌توان از انحراف سندان بین زمان 0 تا t_1 صرف نظر کنیم ⟸ t_1 تا $0 \simeq t$ تا t_1

Subject:
Year. Month. Date. ( )

لحظه پس از برخورد:

$$\text{جرم } A: \; u = \overset{t}{E_2} - \overset{t_1}{E_1}$$

طی زمان $t_1 - t$ هیچ نیروی خارجی به جرم A وارد نمی‌شود $\Leftarrow u = 0$

$$E_{A_{t_1}} = E_{A_t}$$

در زمان t_1 را سطح مبنا می‌گیریم:

$$E_{A_t} = -3000g \times 0.02 - \frac{1}{2} \times 2.88 \times 10^6 \times \left(0.02 + \frac{3000g}{2.88 \times 10^6}\right)^2$$

نکته:

(Δ استاتیکی: میزان تغییرات فنر نسبت به حالت آزاد، وقتی که جرمی روی فنر است)

$$\text{تغییرات فنر نسبت به حالت آزاد فنر} = 0.02 + \frac{mg}{k}$$

داریم:

$$E_{A_{t_1}} = \frac{1}{2} \times 3000 \times V_{A_{t_1}}^2 + \frac{1}{2} \times 2.88 \times 10^6 \times \left(\frac{3000g}{2.88 \times 10^6}\right)^2$$

سرعت جرم A را در لحظه جدایش تیک از سلول می‌یابیم

حال داریم:

$$\int_0^{t_1} \Sigma F_y \, dt = \Delta G_y$$

$\int_0^{t_1} \Sigma F_y \, dt$: تقریباً برابر صفر است زیرا:

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ضربه ای که فنر به سیستم وارد می کند برابر است با

$k \times \Delta x$

Δx ، انحرافی است که فنر در زمان t_1 تا ۰ دارد که چون این جابه جایی خیلی کوچک است و k نیز محدود است ⟸ ۰ می توان در نظر گرفت

(اما اگر جسم A روی زمین باشد ⟸ ∞ ⟸ $k \to \infty$!!

⟵ $\int_0^{t_1} \Sigma F_y \, dt \neq 0$ می شد)

حال می توان نوشت :

$$G_{0y} = G_{t_1 y} \rightarrow$$

$$-500 \times 3.07 = -3000 \times V_{A t_1} + 500 \, V_{B t_1}$$

معلوم

(با فرض اینکه ، پس از جدایش A و B ، B به سمت بالا پرتاب شود)

با یافتن : $V_{B t_1}$

if $V_{B t_1} > 0 \rightarrow$ فرض درست ✓

else $\rightarrow$ فرض غلط ×

⟵ یعنی با سرعت کمتری نسبت به سقوط ، به سمت پایین می آید

$$e = \frac{V_{A t_1} + V_{B t_1}}{3.07}$$

$V_{B t_1} = \sqrt{2gh} \rightarrow$ ارتفاع اوج گیری می آید

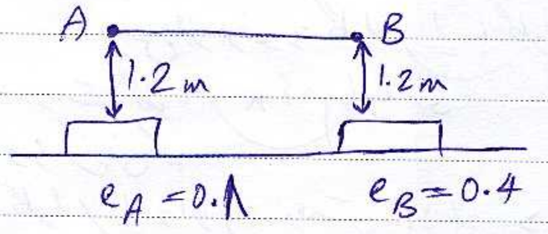
PAPCO

Subject:

Year. ۸۸ Month. آبا Date. 25

دوشنبه

مثال:

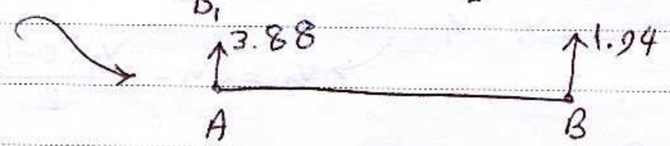


سرعت زاویه ای میله AB پس از برخورد با موانع:

$$V_{A_1} = V_{B_1} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\times 1.2} = 4.85\ m/s$$

$$0.8 = \frac{V_{A_2}}{V_{A_1}} \rightarrow V_{A_2} = 0.8\times 4.85 = 3.88$$

$$0.4 = \frac{V_{B_2}}{V_{B_1}} \rightarrow V_{B_2} = 0.4\times 4.85 = 1.94$$



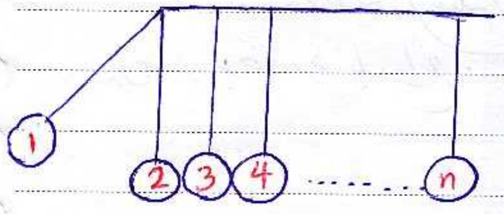
$$V_B = V_A + \omega\times r \rightarrow 1.94i = 3.88i - 0.8\omega i$$

$$\Rightarrow \omega = 2.4$$

Subject:

Year.　　Month.　　Date.　(　)

مثال:



پس از برخورد گلوله 1 با گلوله 2
سرعت گلوله n ام را بیابید
در صورتی که
گلوله 1 دارای سرعت V_0 باشد

ابتدا فرض می کنیم گوی 1 هنگام برخورد به گوی 2، برگشت داشته باشد
حال داریم:

$$mV_0 = -mV_1 + mV_2 \Rightarrow V_2 = V_0 + V_1$$

V_1: سرعت گلوله 1 پس از برخورد است

V_2: سرعت گلوله 2 پس از برخورد است

,

$$e = \frac{V_1 + V_2}{V_0} \Rightarrow V_2 = eV_0 - V_1 \rightarrow V_2 = eV_0 - \frac{V_0(e-1)}{2}$$

چون $e-1<0$ ⇐ V_2 منفی می شود یعنی گلوله شماره 1 پس از برخورد
برنمی گردد

حال برای بقیه گلوله ها داریم:

$$V_0 + V_1 = eV_0 - V_1 \Rightarrow 2V_1 = V_0(e-1) \Rightarrow V_1 = \frac{V_0(e-1)}{2}$$

→ گلوله 1 برنمی گردد → $V_1 = \frac{V_0(1-e)}{2}$

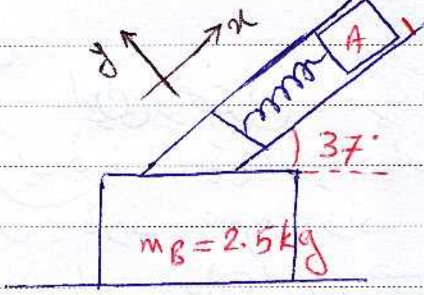
$$V_2 = \frac{eV_0}{2} + \frac{V_0}{2} = V_0\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$\rightarrow V_n = V_0\left(\frac{1+e}{2}\right)^{n-1}$$ ✓

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



$m_A = 1.5kg$, $k = 400$ N/m

فنر را 0.5m فشرده کرده و مانعی جلوی آن می گذاریم ⇐

حال با رها کردن مانع، سرعت پس زنش! جسم B و همچنین سرعت گلوله A را بیابید:

(با فرض هیچ گونه اتلاف انرژی (عدم وجود اصطکاک))

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 400 \times 0.5^2 = \frac{1}{2} \times 2.5 V_B^2 + \frac{1}{2} \times 1.5 V_A^2 + 1.5g \times 0.5 \sin 37$$

E_1 ← قبل از پرتاب ، E_2 ← بعد از پرتاب

کل سیستم در جهت x، بقای اندازه حرکت خطی دارد چون هیچ نیرویی در جهت x به جسم وارد نمی شود پس:

$$G_{x_1} = G_{x_2} \rightarrow 0 = -2.5 V_{B_x} + 1.5 V_{A_x}$$

($G_{y_1} \neq G_{y_2}$ زیرا در راستای y، نیروی N به جسم وارد می شود و $G_1 \neq G_2$)

سرعت مطلق A در راستای شیار قرار ندارد، سرعت نسبی A با افق زاویه 37 می سازد

حال 2 معادله داریم و 3 مجهول (V_{A_y} ، V_{A_x} ، V_B) ⇐ معادله سوم را از سینماتیک می یابیم ⇐

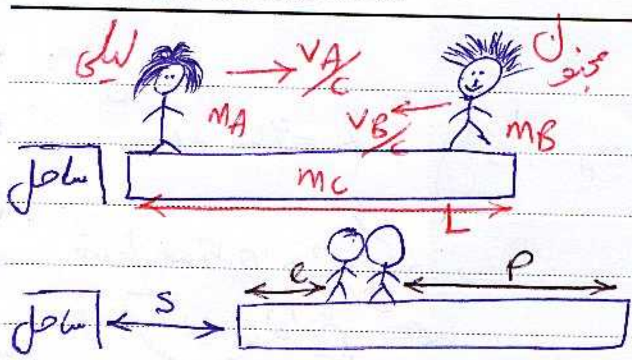
$$V_A = V_B + V_{rel} \Rightarrow V_{A_x} i + V_{A_y} j = -V_B i + V_{rel} (\cos 37 i + \sin 37 j)$$

⇐ 4 معادله و 4 مجهول (V_{rel} را نیز می یابیم)

[redacted]

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



لیلی و مجنون ، هر کدام روی یک طرف قایقی ایستاده اند!! سپس به طرف هم می دوند حال پس از رسیدن این دو به هم تخته چه فاصله ای از ساحل گرفته است؟

$$S = ?$$

با قرار دادن دستگاه بر روی تخته، داریم:

$V_A = V_C + V_{A/C}$, $V_B = V_C - V_{B/C}$

$\rightarrow m_C V_C + m_A (V_C + V_{A/C}) + m_B (V_C - V_{B/C}) = 0$

$\rightarrow S = V_C t$, $e = V_{A/C} t$, $P = V_{B/C} t$, $P + e = L$

$\rightarrow (V_{A/C} + V_{B/C}) t = L \Rightarrow t = \dfrac{L}{V_{A/C} + V_{B/C}}$

همچنین داریم:

$V_C (m_C + m_A + m_B) = m_B (V_{B/C}) - m_A V_{A/C}$

$\rightarrow V_C = \dfrac{m_B V_{B/C} - m_A V_{A/C}}{m_C + m_A + m_B} \Rightarrow$ V_C پیدا میشه!

اگر $m_B V_{B/C} < m_A V_{A/C}$ ⇐ تخته تمایل به حرکت به طرف چپ را دارد

که تخته جا به جا نمی شود (با توجه به اینکه جرم لیلی کمتر از جرم مجنون است ⇐

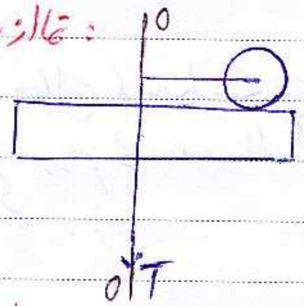
مجنون باید با سرعت بیشتری به سمت لیلی بدود تا قایق حرکت نکند و ..... (!!!)

$\rightarrow S = V_C \times t \Rightarrow$ S پیدا می شود

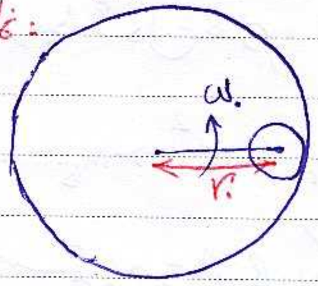
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: گلوله کوچکی بر روی یک صفحه دیسک مانند با سرعت زاویه ای ω در حال چرخش است و نخی به آن متصل کرده و از مرکز دیسک عبور می دهیم. حال نخ را با کشش T می کشیم

نما از روبرو :



نما از بالا :



الف) به ازای هر r دلخواه که $r<r_0$ ، $\dot{r}$ را بیابید؟

ب) سرعت پایین آمدن طناب و ω جدید طناب؟

داریم:

$T \longleftarrow \bullet \qquad \overset{mr\omega_0^2}{\longleftarrow} \bullet \quad \Rightarrow$

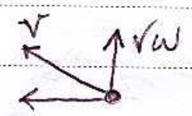
تا وقتی که $T = mr\omega_0^2$ ، طول طناب تغییر نمی کند

$U = E_2 - E_1$

$$\text{if } \; T > mr\omega \Rightarrow T(r_0 - r) = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$$

پس:

$$(r_0\omega_0)^2 + \frac{2T(r_0-r)}{m} = v^2$$



ب) با گشتاورگیری حول محور oo داریم:

$$\int \Sigma M_0 \, dt = \Delta H_0 \Rightarrow \Delta H_0 = 0 \Rightarrow H_{0_1} = H_{0_2}$$

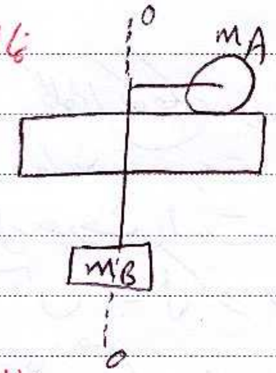
$$\Rightarrow m r_0^2 \omega_0 = m r^2 \omega \quad (H_0 = r \times mv,\ v = r\omega) \Rightarrow \omega = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \omega_0$$

$\dot{r}^2 = v^2 - (r\omega)^2 \Leftarrow \dot{r} =$ سرعت پایین آمدن طناب

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

نما از روبه‌رو



حال با جدا شدن $\frac{1}{3}$ جرم B، مساله را تجزیه و تحلیل کنید!!

حل:

قبل از جدا شدن جرم:

نما از بالا

$$m_B g = m_A r_0 \omega_0^2 \Rightarrow m_B = m_A \frac{r_0 \omega_0^2}{g}$$

الان سیستم را جرم A، B و دیسک و..... در نظر می‌گیریم که

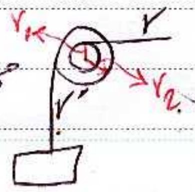
$u = 0$

در مساله‌ی قبل، سیستم A بود ⇐ T (نیروی دست ما) عامل خارجی بود؛

$E_1 = E_2$ ← بعد از جدا شدن جرم

$$\frac{1}{2} m_A (r_0\omega_0)^2 = \frac{2}{3\times 2} m_B \times \dot{r}^2 + \dots$$

نکته: اگر در نقطه‌ی O، قرقره‌ای به شکل



می‌داشتیم ⇐ $\dot{r}' \neq \dot{r}$

$$\left(\dot{r}' = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)\dot{r} \Leftarrow r_1\omega = \dot{r},\ r_2\omega = \dot{r}'\right) \Rightarrow \frac{1}{3} m_B \times \dot{r}'$$

اما ادامه‌ی سوال:

$$\frac{1}{2} m_A (r_0\omega_0)^2 = \frac{1}{3} m_B \times \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_A (\dot{r}^2 + r^2\omega^2) + \frac{2}{3} m_B g (r - r_0)$$

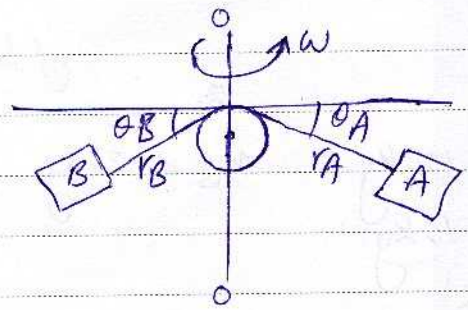
اینجا داریم ۲ مجهول ⇐ $\dot{r}$ و ω مجهول اند ⇐

$$H_{O_1} = H_{O_2} \Rightarrow m r_0 (r_0\omega_0) = m r (r\omega) \Rightarrow \omega = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \omega_0$$

سوال: در چه r ای $\dot{r} = 0$ (حالت تعادل ثانویه) = ?

Subject:
Year. Month. Date. ( )

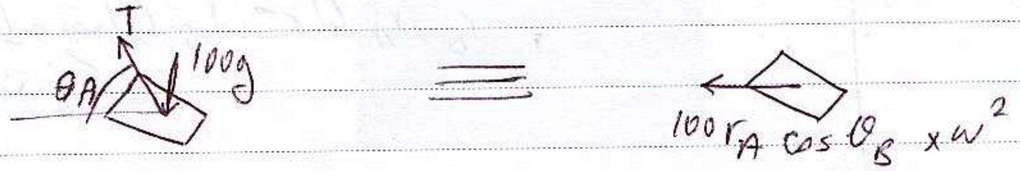
مثال:

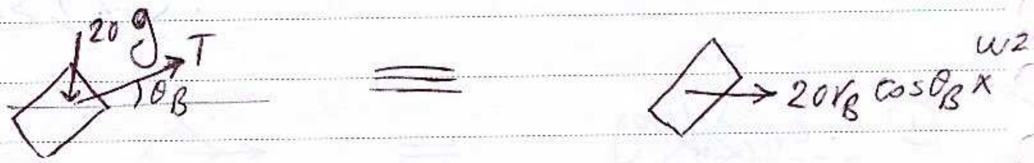


رابطه بین این ها $(\omega, \theta_A, \dots)$!!

حساب کنید:

$m_A = 100kg$ $\quad$ $m_B = 20kg$

①


②


① $\rightsquigarrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 100g = T \sin\theta_A$

② $\rightsquigarrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 20g = T \sin\theta_B$

$\Rightarrow 5 = \dfrac{\sin\theta_A}{\sin\theta_B}$

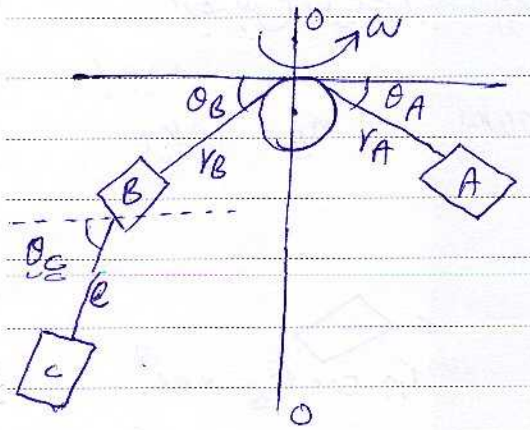
① $\rightsquigarrow \Sigma F_x = ma_x \Rightarrow T\cos\theta_A = 100 r_A \cos\theta_A \times \omega^2$

② $\rightsquigarrow \Sigma F_x = ma_x \Rightarrow T\cos\theta_B = 20 r_B \cos\theta_B \times \omega^2$

$\Longrightarrow \dfrac{r_A}{r_B} = 1/5 \rightsquigarrow r_B = 5 r_A$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال،

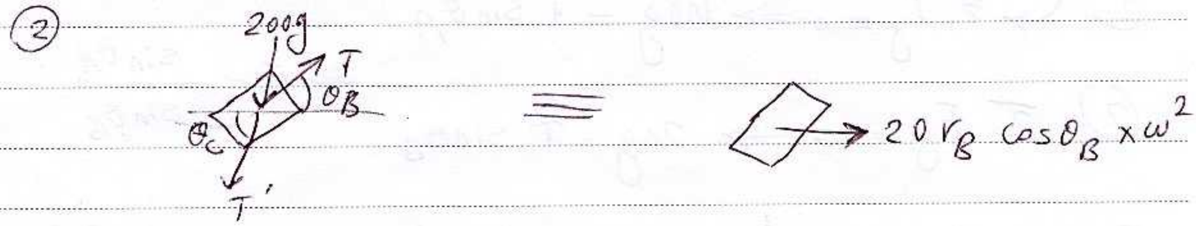


$m_A = 100\,kg \quad m_B = 20\,kg$

$m_C = 10\,kg$

e همواره مقدار ثابتی است اما r_A و r_B می توانند تغییر کنند.

رابطه بین این ها را بیابید:



$① : \sum F_y = 0 \Rightarrow -100g + T\sin\theta_A = 0 \Rightarrow T\sin\theta_A = 100g$

$② : \sum F_y = 0 \Rightarrow -20g + T\sin\theta_B - T'\sin\theta_C = 0$

$\Rightarrow T\sin\theta_B = T'\sin\theta_C + 20g$

$③ :$

$T'\sin\theta_C - 10g = 0 \Rightarrow T'\sin\theta_C = 10g$

②, ③ $\longrightarrow \left(T'\sin\theta_c - 10g = 0 \Rightarrow T'\sin\theta_c = 10g\right)$

$$T\sin\theta_B = 30g \xrightarrow[\text{ازلی}]{\text{با توجه}} \frac{\sin\theta_A}{\sin\theta_B} = \frac{10}{3}$$

①: $\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow (100\, r_A \cos\theta)\,\omega^2 = T\cos\theta_A$

$\Rightarrow T = (100\, r_A)\,\omega^2$

②: $\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow T\cos\theta_B - T'\cos\theta_c = 20\, r_B \cos\theta_B \times \omega^2$

③: $\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow T'\cos\theta_c = 10\,(r_B\cos\theta_B + e\cos\theta_c) \times \omega^2$

$\longrightarrow T\cos\theta_B = \left(10\,(r_B\cos\theta_B + e\cos\theta_c) + 20\, r_B\cos\theta_B\right)\omega^2$