دینامیک

دکتر رضا انصاری

کتاب مرجع

Engineering mechanics, dynamics, 6th Edition (2006) J.L. Meriam and L.G. Kraige

سایر مراجع

Engineering mechanics, dynamics, J.H. Shames

Vector mechanics for engineers, dynamics, F.P. Beer and E.R. Johnstone

دینامیک برداری، دکتر منصور نیکخواه بهرامی

مباحث دینامیک

بخش اول : دینامیک ذرات

۱)آشنایی با دینامیک

۲)سینماتیک ذرات

۳)سینتیک ذرات
- الف) نیرو ، جرم و شتاب
- ب) کار و انرژی
- ج) ضربه و مومنتوم
- د) کاربرد های ویژه

۴)سینتیک مجموعه ذرات

بخش دوم : دینامیک اجسام صلب

۵)سینماتیک اجسام صلب در صفحه
۶)سینتیک اجسام صلب در صفحه

الف) نیرو ، جرم و شتاب
ب) کار و انرژی
ج) ضربه و ممنتوم

۷)آشنایی با دینامیک سه بعدی اجسام صلب

الف) سینماتیک
ب) سینتیک

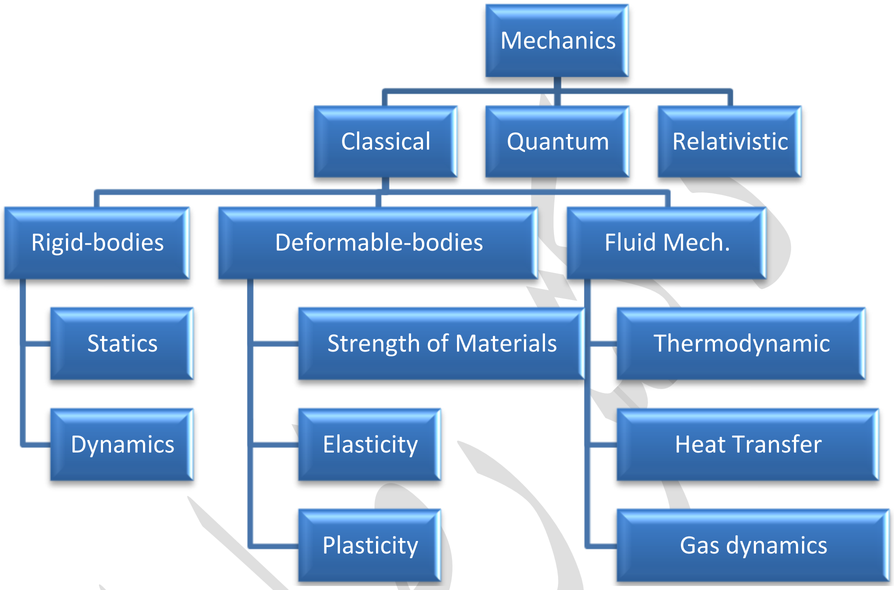
مقدمه (آشنایی با دینامیک)

سه شاخه اصلی رشته مکانیک عبارتند از

۱. مکانیک کلاسیک
۲. مکانیک کوانتوم
۳. مکانیک نسبیت

تقسیم بندی مکانیک کلاسیک

مکانیک اجسام صلب   مکانیک اجسام تغییر شکل پذیر   مکانیک سیالات



تعریف دینامیک

شاخه ای از علم مکانیک است که با حرکت اجسام صلب تحت نیرو سر و کار دارد. تغییر در طبیعت اجتناب ناپذیر و مطالعه تکامل اساس دینامیک را بنیان می نهد.

شاخه های دینامیک

سینماتیک

سینتیک

تاریخ های مهم در تکامل دینامیک

1687 → Principia by Newton

1717 → Principle of virtual work by Bernolli

1740 → Systems of particles by Euler

1743 → D'Alember's principle

1765 → Rigid bodies by Euler

1775 → The Newton-Euler formulation for Force and moment balances

(They constitute the basis of Newtonian mechanics)

1780 → Lagrange's equations

1829 → Gauss's variational principle

1830 → Hamilton's equations and Hamilton's principle

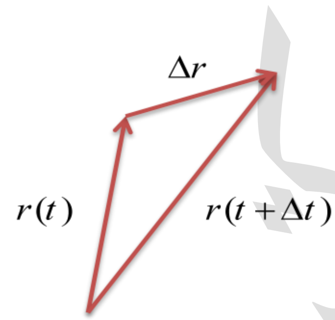
1829 → Jourdian's principle

1870-1910 → Gibbs – Appell's equations

1970 → kane's equations

سینماتیک ذرات :

حرکت منحنی الخط در صفحه



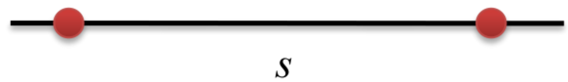
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

$$|\vec{r}| = b \ \ ,\vec{r}.\vec{r} = b^2 \quad b = constant \quad parameter \qquad \vec{r}.\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}.\vec{r} = 0$$

$$\vec{r}.\frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \qquad \vec{r} \perp \dot{\vec{r}}$$



$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$vdv = ads \longrightarrow \dot{s}d\dot{s} = \ddot{s}ds$$

درنیروهای گرانش وفنر : $a = a(s) \longrightarrow \ vdv = a(s)ds$

$$if\ a = costant \ \longrightarrow \ v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0)$$

$$if\ a = variable \longrightarrow \frac{vdv}{a(v)} = ds$$

مثال : یک ذره درامتداد خط مستقیم حرکت می کند که جابجایی آن ازرابطه $s = 2t^3 - 24t + 6$ تبعیت می کند . زمان لازم برای اینکه این ذره به سرعت $72\frac{m}{s}$ برسد رابدست آورید. شتاب ذره وقتی سرعت آن $30\frac{m}{s}$ است و جابجایی خالص ذره در بازه زمانی [1, 4] رابدست آورید ؟

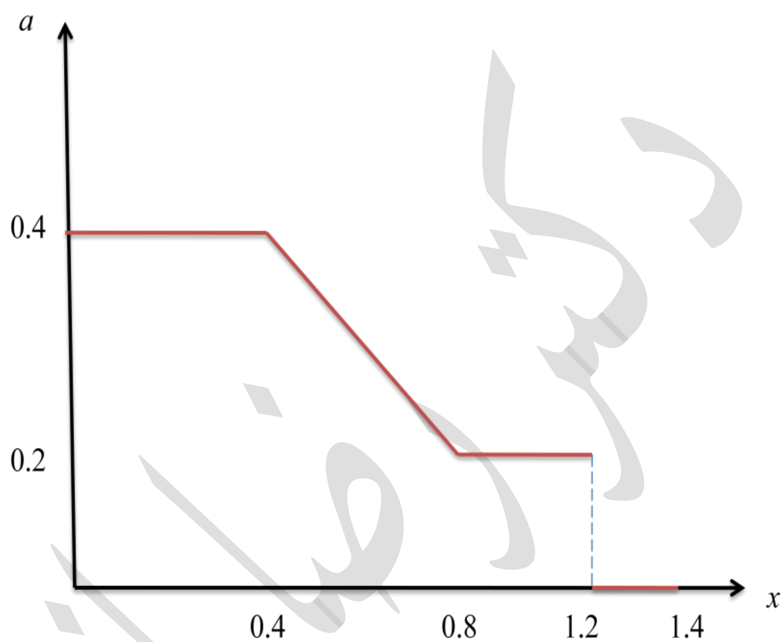
$$\dot{s} = v = 6t^2 - 24 = 72 \qquad\qquad t = 4s$$

$$\ddot{s} = \dot{v} = a = 12t$$

$$if\ \ v = 30\frac{m}{s} \longrightarrow \ t = 3s \longrightarrow \ a = 36\frac{m}{s^2}$$

$$s|_{t=4s} - s|_{t=1s} = \Delta s = 54m$$

مثال : منحنی شتاب-تغییرمکان ذره ای که با سرعت اولیه $0.1\frac{m}{s}$ شروع به حرکت می نماید به صورت زیرداده شده است . سرعت ذره را در $x=1.4\ m$ بدست آورید ؟



$$\int vdv = \int adx$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int adx$$

$$v^2 - {v_0}^2 = 2\int adx = 2(area) \longrightarrow v^2 - (0.1)^2 = 2(0.36) \longrightarrow v = 0.85\frac{m}{s}$$

مثال : بااستفاده از یک چترمقاومتی شتاب $\frac{m}{sec^2}$ $a = -0.004v^2$ به هواپیمایی در حال فرود وارد می شود. مدت زمان لازم برای اینکه سرعت این هواپیما از $80\frac{m}{s}$ به $10\frac{m}{s}$ برسد را تعیین کنید؟ مسافت طی شده در طی این مدت زمانی را بدست آورید؟

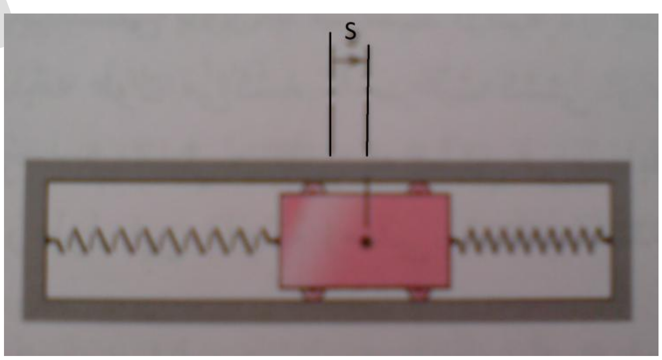
$$a = -0.004v^2 \longrightarrow \frac{dv}{dt} = -0.004v^2$$

$$\int_{v_0=80}^{v=10} \frac{dv}{v^2} = -0.004 \int_{t_0=0}^{t} dt \qquad\qquad t = 21.875s$$

$$-0.004v^2 ds = vdv$$

$$-0.004 \int_{s_0=0}^{s} ds = \int_{v_0=80}^{v=10} \frac{dv}{v} \longrightarrow s = 519.86m$$

مثال : لغزنده ای بین دو فنر در شیار راهنمای افقی بااصطکاک ناچیز حرکت کرده و دارای سرعت v_0 درامتداد s به هنگام عبور درنیمه راه $t = 0$ و $s = 0$ می باشد. مجموعه دو فنر نیروی بازدارنده ای را برحرکت لغزنده اعمال می نمایند که به آن ، شتاب متناسب با جابجایی ولی درجهت خلاف حرکت یعنی برابر با $a = -k^2s$ می دهد که درآن k ثابت است. جابجایی s و سرعت v رابه صورت تابعی از زمان t بدست آورید.



$$ads = vdv$$

$$-k^2\int sds = \int vdv \longrightarrow \frac{-k^2s^2}{2} + c_1 = \frac{1}{2}v^2$$

$$if\ s_0 = 0\ \ \&\ v = v_0 \longrightarrow\ c_1 = \frac{1}{2}{v_0}^2$$

$$-\frac{k^2s^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{2}v^2 \longrightarrow\ \ v = \sqrt{{v_0}^2 - k^2s^2}$$

از طرفی: $\int \frac{ds}{\mathrm{dt}} = \int \sqrt{\mathrm{v}_0^2 - \mathrm{k}^2\mathrm{s}^2} \longrightarrow \int_{\mathrm{s}_0=0}^{\mathrm{s}} \frac{\mathrm{ds}}{\sqrt{\mathrm{v}_0^2-\mathrm{k}^2\mathrm{s}^2}} = \int_{\mathrm{t}_0=0}^{\mathrm{t}} \mathrm{dt}$

$$\frac{1}{\mathrm{k}}\arcsin\left(\frac{\mathrm{ks}}{\mathrm{v}_0}\right) = \mathrm{t}$$

$$s = \frac{v_0}{k}\sin(kt) \qquad \rightarrow \quad v = v_0\cos(kt)$$

نکته :

$$\ddot{s} + k^2s = 0$$

$$s = Ce^{(\alpha t)}$$

این معادله s رابایددرمعادله اصلی جایگذاری کرد ، این معادله s به عنوان یک ریشه درنظرگرفته می شود.

$$\alpha^2 + k^2 = 0 \quad \alpha = \pm ki$$

$$s = c_1 e^{ikt} + c_2 e^{-ikt} \quad or \quad s = A\sin(kt) + B\cos(kt)$$

$$1)\ t = 0 \longrightarrow s = 0 \longrightarrow B = 0$$

$$2) t = 0 \longrightarrow \dot{s} = v_0 \longrightarrow A = \frac{v_0}{k} \longrightarrow s = \frac{v_0}{k}\sin(kt)$$

مثال : یک سفینه فضایی درفاصله s_0 ازمرکز زمین قراردارد. سرعت به طرف بیرون v_0 برای آنکه به فاصله تعیین شده h از مرکز زمین منتقل شود راحساب کنید ؟

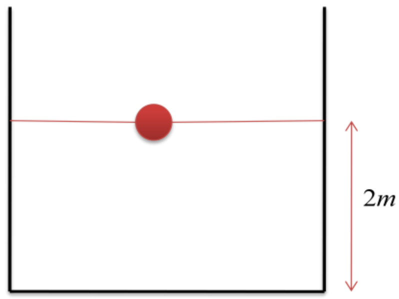
$$a = -g\frac{R_E^2}{s^2} \quad at \quad s = R_E \quad \rightarrow a = g$$

$$vdv = ads \longrightarrow \int_{v_0}^{0} vdv = -gR_E^2 \int_{s_0}^{h} \frac{ds}{s^2} \Longrightarrow \frac{1}{2}{v_0}^2 = gR_E^2\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{s_0}\right)$$

$$\longrightarrow v_0 = \sqrt{\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{s_0}\right) \times 2gR_E^2} \quad if \quad h \longrightarrow \infty \quad v_0 = R_E\sqrt{\frac{2g}{s_0}}$$

تمرین : ثابت کنید که برای یک سیاره فرضی دوبعدی سرعت فرار وجود ندارد ؟

مثال : یک گلوله فولادی ازحالت سکون درداخل ظرفی که محتوی یک سیال مخصوص است ازارتفاع ۲ متری رها می شود. شتاب گلوله برابر $a = 0.9\mathrm{g} - \mathrm{Cv}$ است که در آن C ثابت می باشد. اگر مدت زمانی که گلوله به ته ظرف می رسد ۲ ثانیه باشد ، مقدارC رامحاسبه کنید ؟



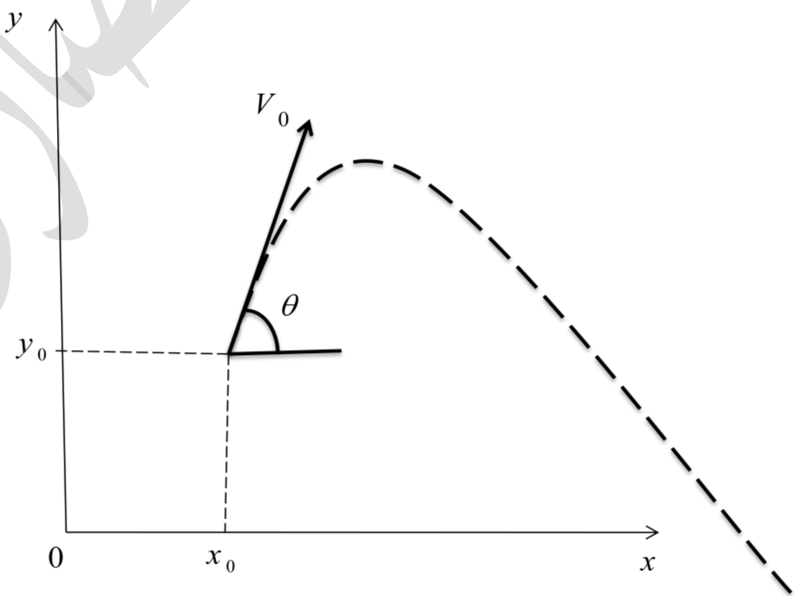
$$\frac{dv}{dt} = 0.9g - Cv \longrightarrow \int_{v_0=0}^{v} \frac{dv}{0.9g - Cv} = \int_{t_0=0}^{t} dt$$

$$v = \frac{0.9g}{C}\left(1 - e^{-Ct}\right)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{0.9g}{C}\left(1 - e^{-Ct}\right)$$

$$s = \frac{0.9g}{c^2}\left(Ct - 1 + e^{-Ct}\right) \longrightarrow c = 8.3\frac{1}{s}$$

حرکت پرتا بی:



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$$

$$a_x = 0 \qquad and \qquad a_y = -g$$

$$a_x = \ddot{x} = 0 \longrightarrow \dot{x} = v_0 cos\Theta$$

$$x = (v_0 t \cos\theta) + cte \;\longrightarrow\; x = (v_0 t \cos\theta) + x_0$$

$$a_y = -g \longrightarrow \ddot{y} = -g \longrightarrow \dot{y} = -gt + cte = -gt + v_0 \sin\theta$$

$$\longrightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta + cte = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta + y_0$$

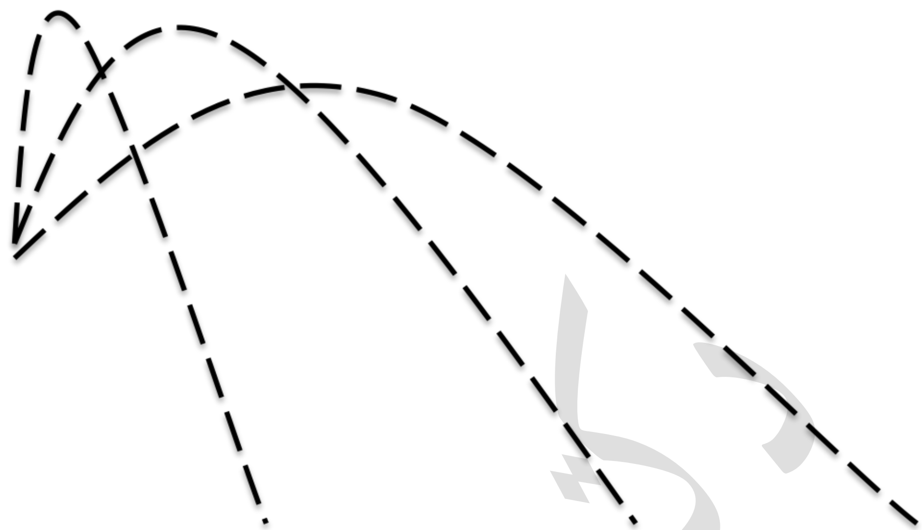
برای به دست آوردن معادله مسیر t را از معادله x حذف و در معادله y جاگذاری می کنیم .

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 cos\Theta} \longrightarrow y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta}\right)^2 + \tan\Theta\,(x - x_0) + y_0$$

$$if \;\; x_0 \quad and \quad y_0 = 0 \longrightarrow t = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \quad , \quad R = \frac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{2g}$$

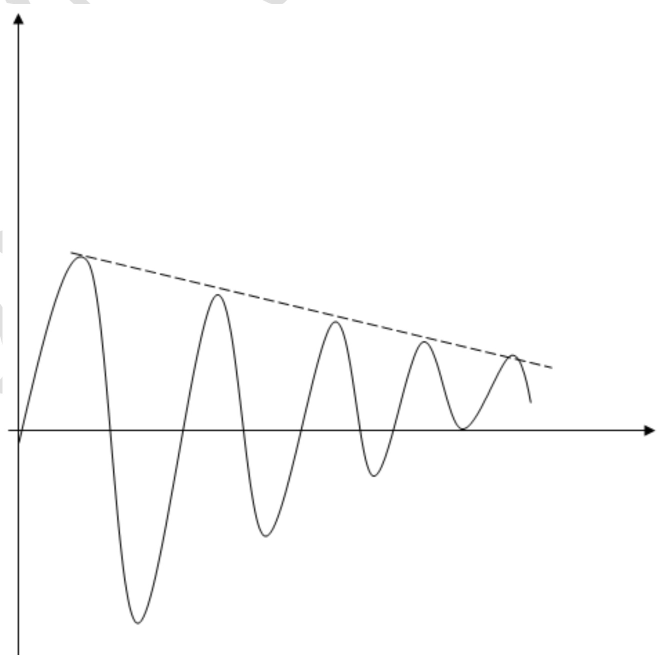
پوش منحنی های مسیر حرکت پرتابه به ازای زوایای مختلف پرتاب :

پوش (envelope) منحنی است که بر تمام منحنی های زیر مماس باشد .



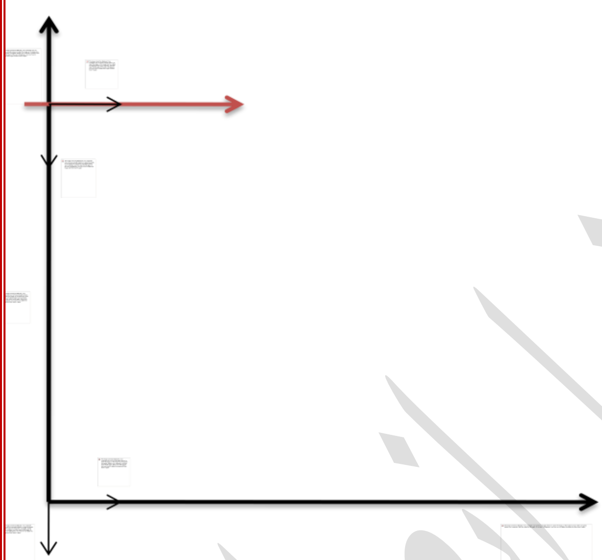
$m = tan\theta$

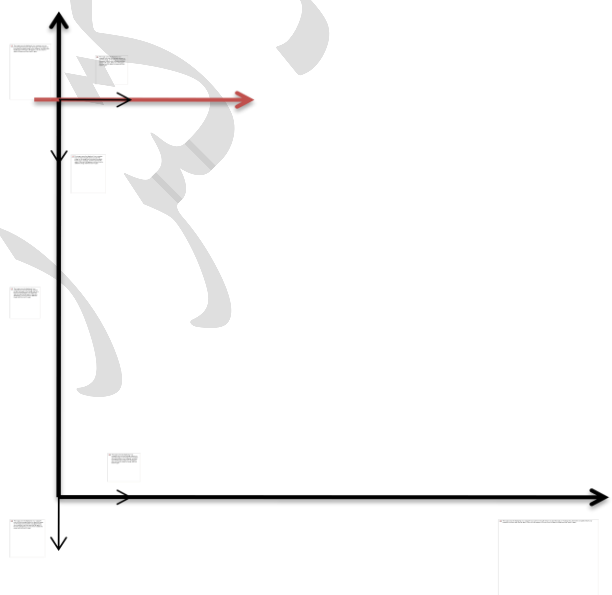
$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2 \cos\theta^2} + x \tan\Theta$$



$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}(1+m^2) + mx$$

$$0 = \frac{-gx^2}{v_0^2} m + x \longrightarrow m = \frac{v_0^2}{gx} \quad \longrightarrow y = \frac{-gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}$$





$$\mathrm{a_x} = 0 \longrightarrow \mathrm{v_x} = \mathrm{v_0} \longrightarrow x = v_0 t$$

$$\mathrm{a_y} = \mathrm{g} \longrightarrow \mathrm{v_y} = \mathrm{gt} \longrightarrow \quad \mathrm{y} = \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = h$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \longrightarrow t = (\frac{2h}{g})^{\frac{1}{2}}$$

$$s = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\frac{\mathrm{s_M}}{\mathrm{s_E}} = \sqrt{\frac{\mathrm{g_E}}{\mathrm{g_M}}} = \sqrt{6}$$

$$a_x = 0 \longrightarrow x = v_0 t$$

$$\mathrm{a_y} = \mathrm{g} \longrightarrow \dot{\mathrm{y}} = \mathrm{gt} \longrightarrow \mathrm{y} = \frac{1}{2}gt^2 - h \longrightarrow y = 0 \longrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

تمرین) مسیر حرکت یک پرتابه را که با سرعت $24\ \frac{m}{sec}$ با زاویه $30°$ بالای افق پرتاب می شود ، را با فرض $w = 9\ N$ و ضریب مقاومت هوای $c = 0.58\ \left(\frac{N.s}{m}\right)$ به دست آورید ؟ نیروی مقاومت هوا را متناسب با سرعت پرتابه در نظر بگیرید .

مثال) یک روتور جت با دور $10000\ rpm$ در حال چرخش است که ناگهان سوخت آن قطع می گردد ، در صورتی که $\alpha = -0.02\omega$ باشد مدت زمان لازم برای آنکه دور موتور به $1000\ rpm$ برسد را تعیین نمایید ؟ همچنین تعداد دورهایی که روتور در طول این مدت می چرخد را به دست آورید ؟

$$v = \dot{s} \qquad \omega = \dot{\theta}$$

$$a = \dot{v} = \ddot{s} \qquad and \qquad \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

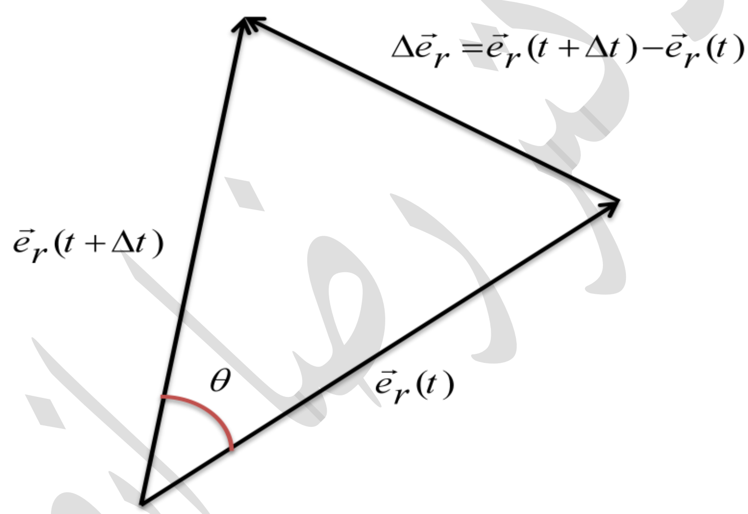
$$vdv = ads \qquad \omega d\omega = \alpha d\theta$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -0.02\omega \longrightarrow \int_{10000\times\frac{2\pi}{60}}^{1000\times\frac{2\pi}{60}} \frac{d\omega}{\omega} = -0.02\int_0^t dt \longrightarrow t = 115.1$$

$$\omega d\omega = -0.02\omega d\theta \;\longrightarrow\; \int_{10000\times\frac{2\pi}{60}}^{1000\times\frac{2\pi}{60}} d\omega = -0.02\int_0^{\theta} d\theta$$

$$\theta = 15000\pi(rad) \;\longrightarrow\; \theta = 7500(rev)$$

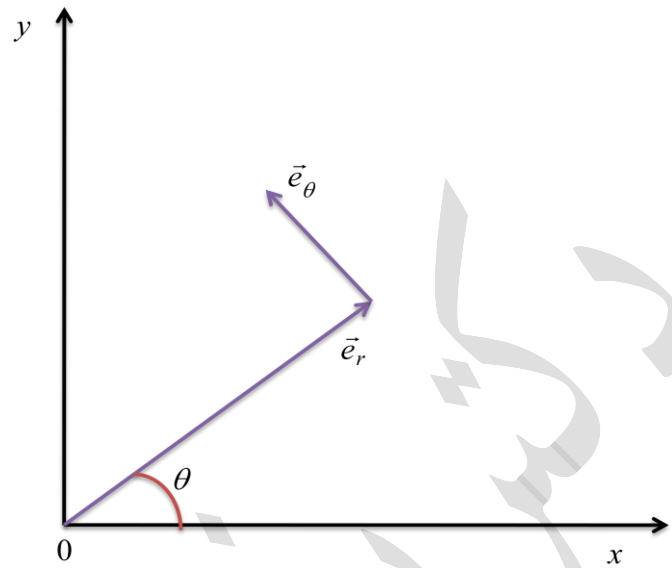
مشتق زمانی یک بردار :



$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{e_r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}\overrightarrow{e_\theta}}{\Delta t}$$

$$\left(if\,\frac{\Delta\theta}{2} \le 6^{\circ} \longrightarrow sin\frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}\right) \longrightarrow \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

روش دیگر اثبات ($\dot{\theta}$) :



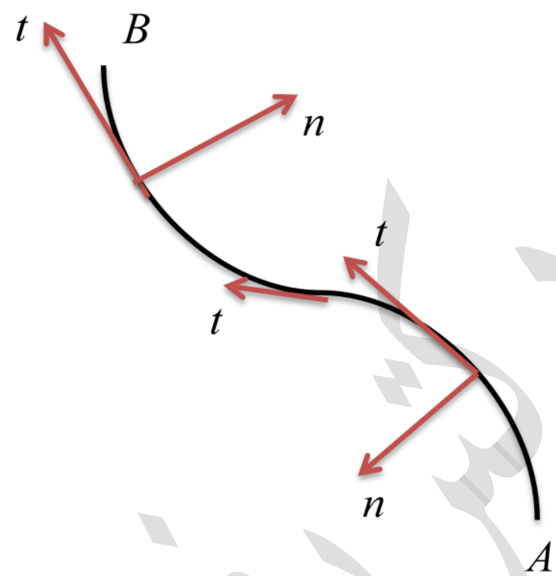
$$\vec{e_r} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$$

$$\vec{e_\theta} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \frac{d\vec{e_r}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e_r}$$

مختصات مسیر :

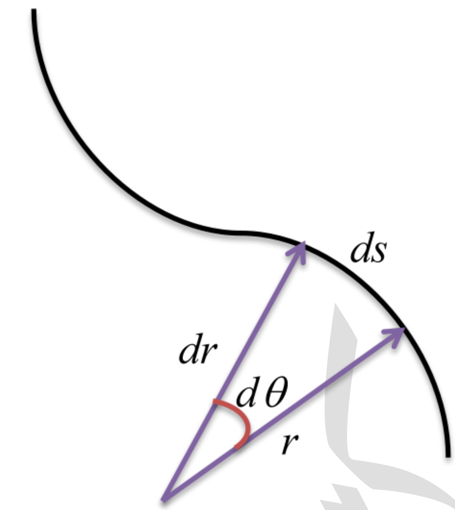


در نقطه عطف :

انحنا $=0$

شعاع انحنا $=\infty$

√ n همواره به طرف مرکز انحنا و t مماس بر مسیر می باشد .



$$d\vec{r} = \vec{e_t}ds \longrightarrow \vec{e_t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{ds}{dt} \longrightarrow \vec{v} = \dot{s}\vec{\mathrm{e}_\mathrm{t}}$$

$$\dot{\vec{e_t}} = \dot{\theta}\vec{\mathrm{e}_\mathrm{n}} \qquad and \qquad \dot{\vec{e_n}} = -\theta\vec{\mathrm{e}_\mathrm{t}}$$

$$ds = \rho d\theta \longrightarrow \vec{v} = \rho\dot{\theta}$$

$$\vec{\mathrm{a}} = \dot{\mathrm{v}}\vec{\mathrm{e}_\mathrm{t}} + \mathrm{v}\dot{\vec{e_t}} = \dot{\mathrm{v}}\vec{\mathrm{e}_\mathrm{t}} + \mathrm{v}\dot{\theta}\vec{\mathrm{e}_\mathrm{n}}$$

$$\mathrm{a}_\mathrm{t} = \dot{\mathrm{v}}$$

$$\mathrm{a}_\mathrm{n} = \mathrm{v}\dot{\theta} = \frac{\mathrm{v}^2}{\rho} = \rho\dot{\theta}^2$$

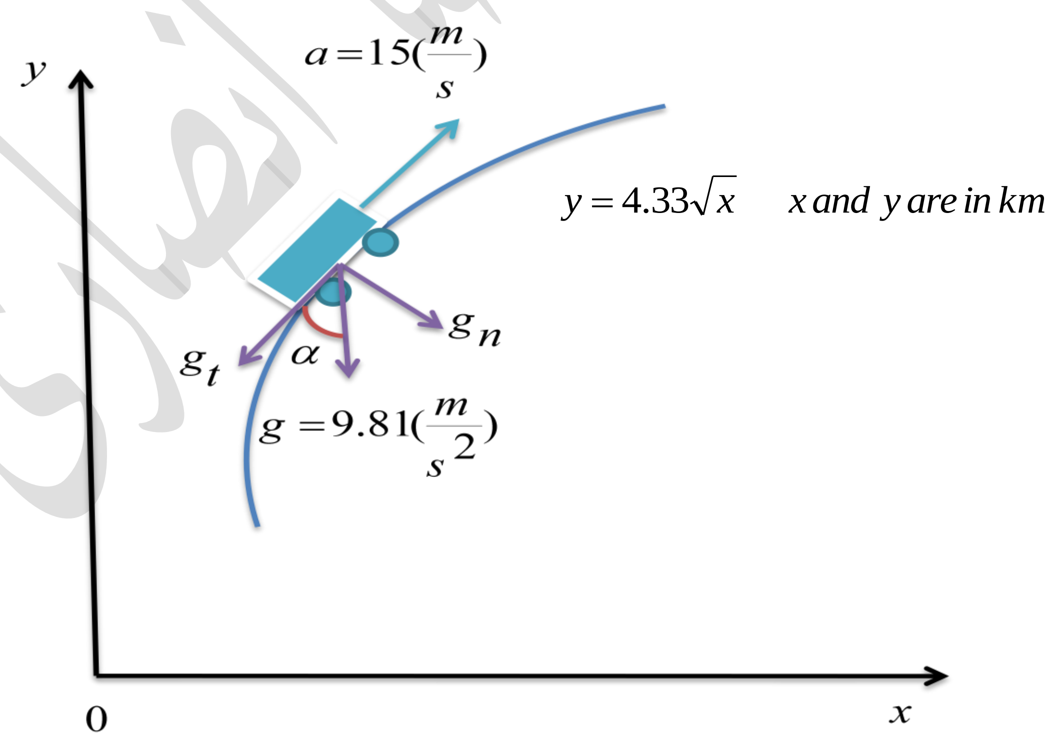
√برای حرکت دایره ای ρ مقدار ثابتی دارد $\rho = R$

$$a_n = v\omega = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

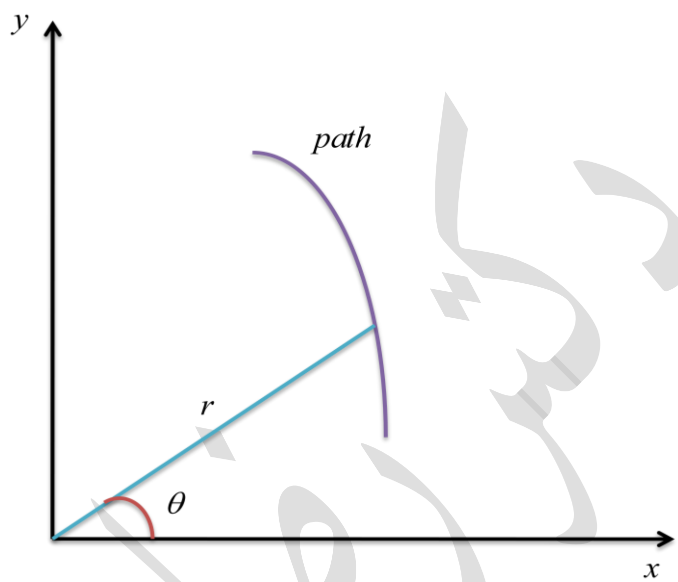
$$a_t = \dot{v} = R\alpha$$

$$\rho = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad (if \qquad y = f(x) \longrightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx})$$

مثال) سرعت و شتاب راکت نمایش داده شده در شکل زیر را در موقعیت$x = 3\ (km)$ به دست آورید ؟



مختصات قطبی :



$$\vec{r} = r\overrightarrow{e_r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\overrightarrow{\dot{e_r}} \qquad and \quad \overrightarrow{\dot{e_r}} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \qquad \vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

$$v_r = \dot{r} \qquad and \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \;\longrightarrow\; v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

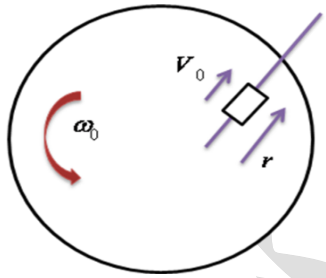
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \left(\ddot{r}\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\overrightarrow{\dot{e_r}}\right) + \left(\dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\theta}\overrightarrow{\dot{e_\theta}}\right)$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad and \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$\longrightarrow a = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\theta}^2}$$

تمرین) شخصی بر روی یک دیسک دوار در راستای شعاع آن که با سرعت زاویه ای ثابت ω_0 در حال دوران است به سمت بیرون با سرعت ثابت V_0 در حال حرکت است . سرعت و شتاب را به دست آورید ؟



$$\begin{cases} \dot{r} = v_0 \\ \ddot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = \omega_0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_0\overrightarrow{e_r} + r\omega_0\overrightarrow{e_\theta} \qquad and \qquad \vec{a} = -r{\omega_0}^2\overrightarrow{e_r} + 2v_0\omega_0\overrightarrow{e_\theta}$$

تمرین)

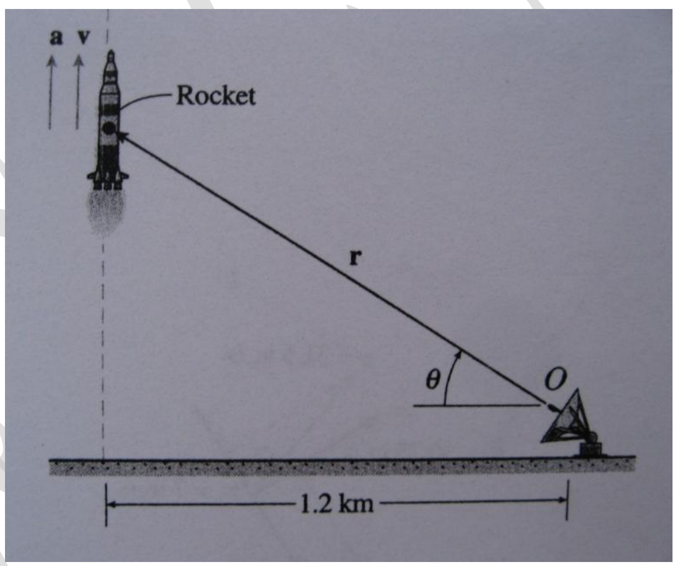
$$\begin{cases} \theta = 0.2t + 0.02t^3 \\ r = 0.2 + 0.04t^2 \end{cases}$$

$$if \quad t = 3(s) \quad \Longrightarrow \quad v \;\; and \;\; a = ?$$

مثال) یک راکت به وسیله ی یک رادار در حال مانیتور شدن است اطلاعات ردیابی به صورت زیر است

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0.2 \ \dfrac{rad}{s} \\ \ddot{\theta} = 0.1 \ \dfrac{rad}{s^2} \end{cases}$$

وقتی که زاویه $\theta = 45^\circ$ **است مطلوبست تعیین سرعت و شتاب راکت نشان داده شده در شکل زیر ؟**



$$r = \frac{1}{2} sec\theta \longrightarrow r = 1697.06m$$

$$\dot{r} = 1200 tan\theta sec\theta \ \dot{\theta} \ \longrightarrow \ \dot{r} = 339.4 \frac{m}{s}$$

$$\ddot{r} = 1200\left[(sec^3\theta + tan^2\theta sec\theta)\dot{\theta}^2 + tan\theta sec\theta\ddot{\theta}\right] = 373.35 \frac{m}{s^2}$$

$$v = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

$$|v| = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\theta}^2} \longrightarrow |v| = 480\frac{m}{s}$$

$$a = \left(\ddot{r} - 2\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot{r}\theta + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta}$$

$$|a| = \sqrt{ar^2 + a\theta^2} \rightarrow |a| = 432\frac{m}{s^2}$$

مثال) یک ذره روی مسیری که معادله ی آن به صورت $r = 2\theta$ حرکت می کند اگر θ به صورت $t^{\,2}$ مشخص شود $(\theta = t^2)$. سرعت و شتاب ذره را وقتی $\theta = 60$ درجه می باشد را بدست آورید؟

$$if \quad \theta = t^2 \rightarrow \dot{\theta} = 2t \qquad and \qquad \ddot{\theta} = 2$$

$$and \quad if \begin{cases} r = 2\theta \\ \theta = t \end{cases} \longrightarrow r = 2t^2 \longrightarrow \dot{r} = 4t \longrightarrow and \longrightarrow \ddot{r} = 4$$

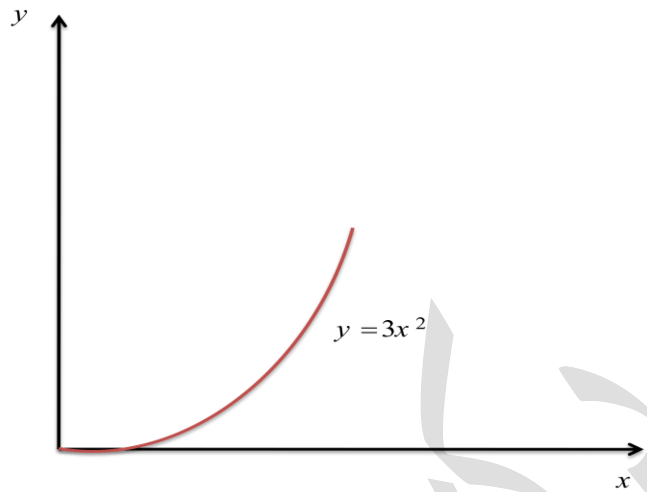
$$\frac{\pi}{3} = t^2 \longrightarrow t = 1.023$$

$$\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \longrightarrow \vec{v} = 4.09\overrightarrow{e_r} + 4.28\overrightarrow{e_\theta} \longrightarrow |\vec{v}| = 5.92\left(\frac{ft}{s}\right)$$

$$a = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta} \Longrightarrow a = -4.77\overrightarrow{e_r} + 20.94\overrightarrow{e_\theta}$$

$$|\vec{a}| = 21.5\ \frac{ft}{sec^2}$$

مثال) ذره ای با سرعت $10\frac{ft}{sec}$ روی منحنی $y = 3x^2$ در حال حرکت است . شتاب ذره را در $x = 5\ ft$ را بدست آورید؟

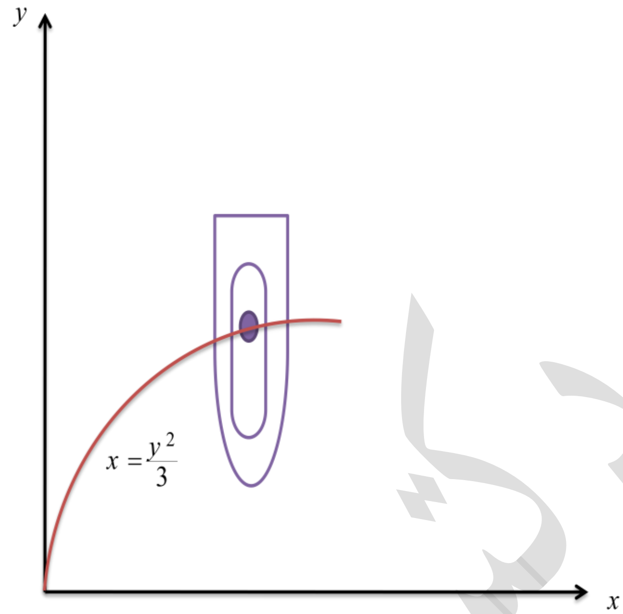


$$\begin{cases} v = 10\dfrac{ft}{s} \\ x = 5\,ft \end{cases}$$

$$if \quad v_t = const \longrightarrow a_t = 0 \longrightarrow \vec{a} = a_n\overrightarrow{e_n} = \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{e_n}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow \frac{6}{(1+36x^2)^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{6}{(901)^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow \vec{a} = \frac{100\times 6}{(901)^{\frac{3}{2}}}\overrightarrow{e_n}$$

مثال) ذره ای بر روی منحنی $x = \frac{y^2}{3}$ حرکت می نماید. سرعت و شتاب ذره را در $y = 2m$ تعیین نمایید؟



$$x = \frac{y^2}{3} \longrightarrow \dot{x} = \frac{2y\dot{y}}{3}$$

$$if \begin{cases} \dot{x} = 2(\frac{m}{s}) \\ y = 2(m) \end{cases} \longrightarrow \dot{y} = 1.5$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \qquad |v| = 2.5(\frac{m}{s})$$

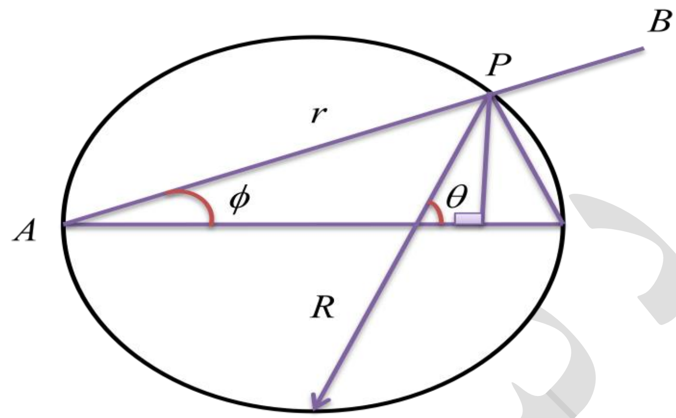
$$if \quad v = \dot{x} = const \longrightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3}\ \dot{y}^2 + \frac{2}{3}y\ddot{y} \longrightarrow \ddot{y} = -1.125(\frac{m}{s^2})$$

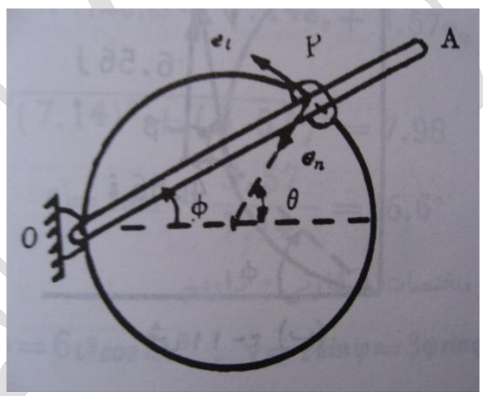
$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \longrightarrow a = 1.125(\frac{m}{s^2})$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{3} \longrightarrow y' = \frac{3}{2y} \qquad and \qquad y'' = -\frac{9}{4y^3} \longrightarrow \rho = 6.94m$$

$$a_n = \frac{v^2}{p} \longrightarrow a_n = 0.9\left(\frac{m}{s^2}\right) \longrightarrow a_t = \sqrt{a^2 - a_n^2} \Longrightarrow a_t = 675 \times 10^{-3}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

مثال) میله ای AB با سرعت زاویه ای $\dot{\Phi}$ در حال دوران است مطلوبست سرعت و شتاب ذره ای P در شکل زیر ؟



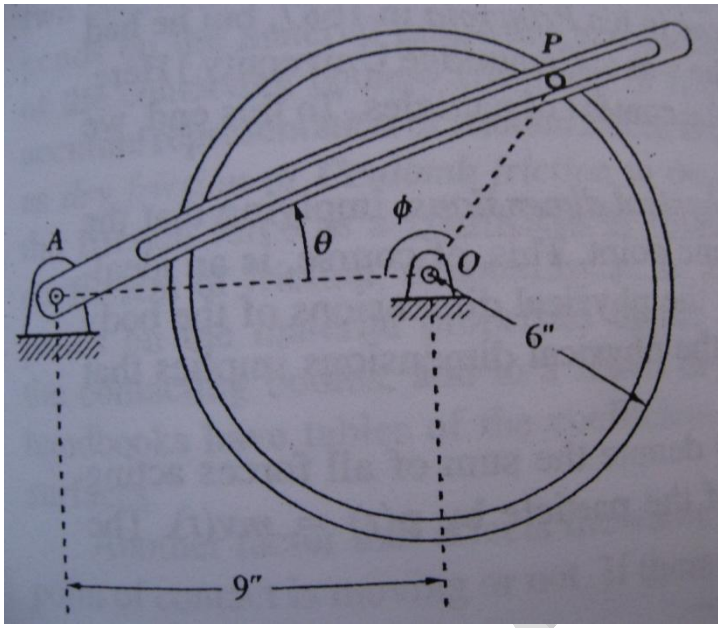


$$OP = R \qquad and \qquad \theta = 2\varphi \longrightarrow \ \dot{\theta} = 2\dot{\varphi}$$

$$v = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta$$

$$\vec{\dot{r}} = 0 \longrightarrow v = 2R\dot{\varphi}e_\theta \qquad and \qquad a = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta^2}\right)e_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)e_\theta$$

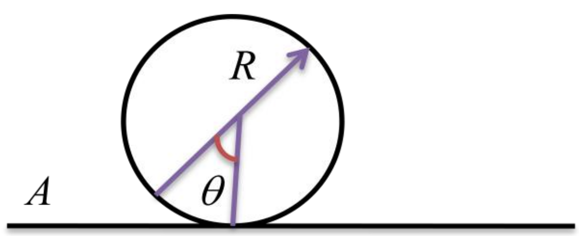
$$\ddot{r} = 0 \qquad and \qquad \dot{r} = 0 \qquad and \qquad \ddot{\theta} = 0 \longrightarrow \ a = -4R\dot{\varphi^2}\ e_r$$



$$y = f(x) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$r = f(\theta) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad r' = \frac{dr}{d\theta}$$

مثال) دیسکی مطابق شکل زیر بر روی سطحی صاف به شعاع R غلتی بدون لغزش انجام میدهد. سرعت و شتاب نقطه A را به دست آورید ؟



$No\ Slip: x = R\theta$

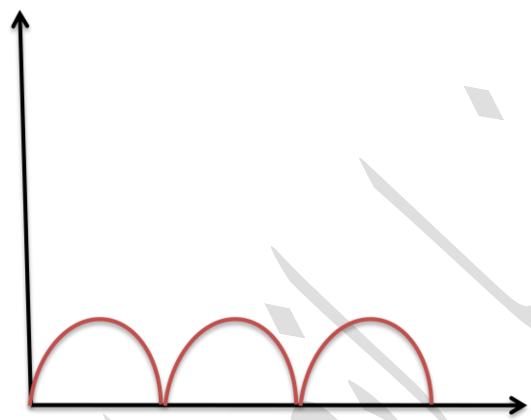
$x_A = x - R\sin\theta = R(\theta - \sin\theta)$

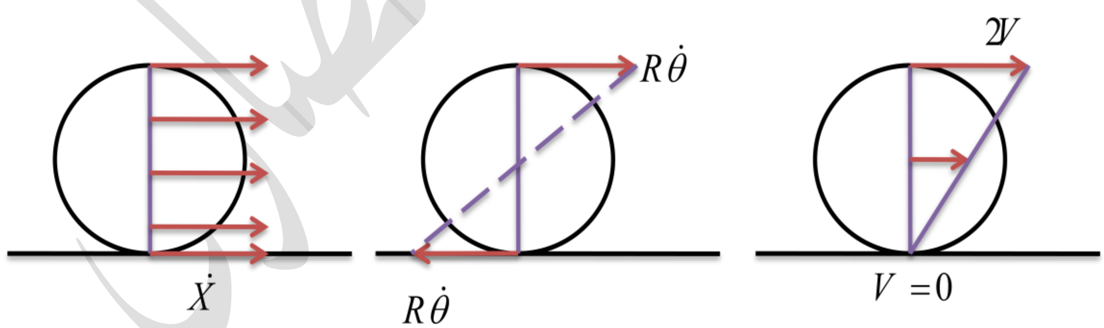
$y_A = R(1 - \cos\theta)$

$v_A = \dot{x_A}\vec{i} + y_A\vec{j} \longrightarrow v_A = R(\dot\theta - \dot\theta\cos\theta)\vec{i} + (R\dot\theta\sin\theta)\vec{j}$

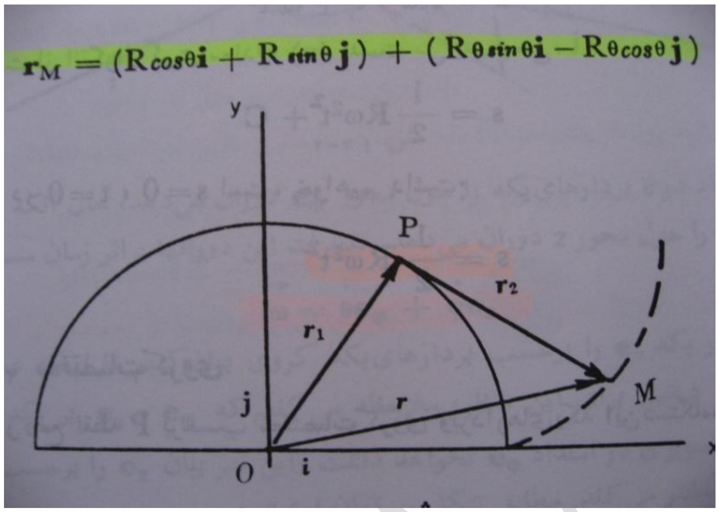
$a_A = R(\ddot\theta + \dot\theta^2\sin\theta - \ddot\theta\cos\theta)\vec{i} + (R\ddot\theta\sin\theta + R\dot\theta^2\cos\theta)\vec{j}$

$if\ \ \theta = 0 \Longrightarrow v_A = 0 \qquad and \qquad a_A = R\dot\theta^2\vec{j}$





تمرین) در حالتی که انتهای یک نخ را که بر روی یک قرقره پیچیده شده است را باز نماییم (به اندازه ی مشخص) سرعت و شتاب انتهای آزاد نخ و طول نخ باز شده را بدست آورید؟



$$\begin{cases} x_p = Rcos\theta + R\theta sin\theta \\ y_p = Rsin\theta - R\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$\theta = \omega t$$

$$\vec{r_p} = x_p\vec{i} + y_p\vec{j}$$

$$\vec{r_p} = (Rcos\omega t + R\omega tsin\omega t)\vec{i} + (Rsin\omega t - R\omega tcos\omega t)\vec{j}$$

$$\vec{v_p} = \dot{\vec{r_p}} \longrightarrow v_p = (-R\omega sin\omega t + R\omega sin\omega t + R\omega^2 tcos\omega t)\vec{i}$$

$$+(R\omega cos\omega t - R\omega cos\omega t + R\omega^2 tsin\omega t)\vec{j}$$

$$\vec{v_p} = R\omega^2 tcos\omega t\vec{i} + R\omega^2 tsin\omega t\vec{j}$$

$$a = \dot{\vec{v_p}}$$

$$|\vec{v_p}| = R\omega^2 t = \frac{ds}{dt} \longrightarrow s = \frac{1}{2}r\omega^2 t^2 + c$$

$$if\ \ t_0 = 0 \ \longrightarrow\ s_0 = 0 \longrightarrow\ \ c = 0 \longrightarrow\ s = \frac{1}{2}R\omega^2 t^2$$

سینماتیک سه بعدی :

$$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \\ \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k} \\ \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{r} = r\overrightarrow{e_r} + z\vec{k} \\ \vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\vec{k} \\ \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\vec{k} \end{cases}$$

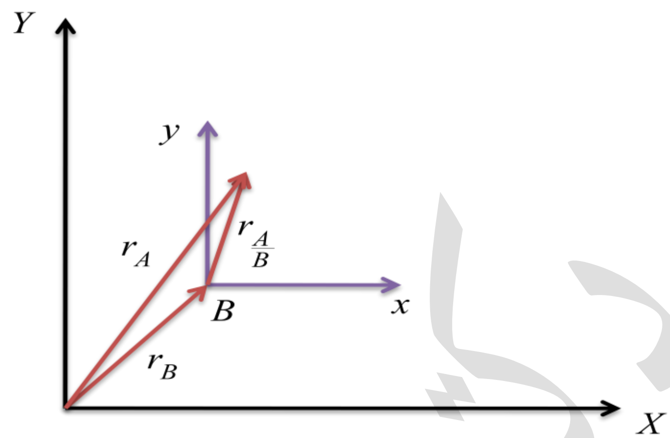
$$\vec{v} = v_r\overrightarrow{e_r} + v_\theta\overrightarrow{e_\theta} + v_\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta}\cos\varphi \\ v_\varphi = r\dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_r\overrightarrow{e_r} + a_\theta\overrightarrow{e_\theta} + a_\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

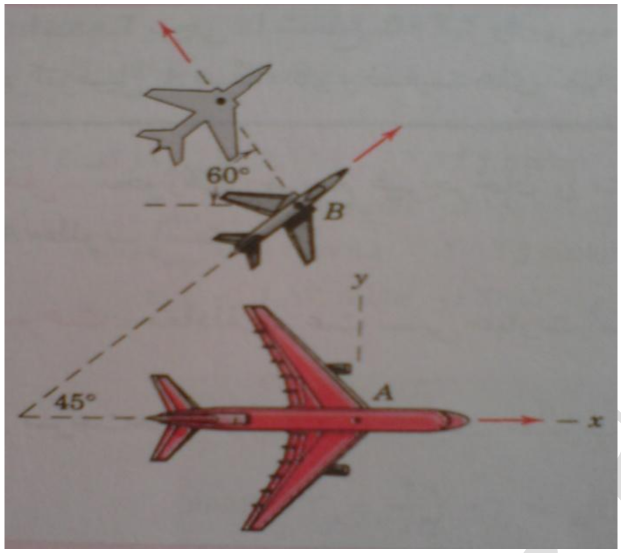
$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2 cos^2\varphi \\ a_\theta = cos\frac{\varphi}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) - 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi \\ a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) + r\dot{\theta}^2 sin\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

حرکت نسبی :



$$\begin{cases} r_A = r_B + r_{A/B} \\ v_A = v_B + v_{A/B} \\ a_A = a_B + a_{A/B} \end{cases}$$

مثال) سرنشینان هواپیمای جت A که با تندی $800\frac{km}{h}$ به سمت شرق پرواز می کند هواپیمای جت دوم Bرا مشاهده می کنند که از زیر هواپیمایشان در خط افق پرواز کرده و می گذرد . اگرچه که دماغه هواپیمای Bدر راستای $45°$ شمال شرقی قرار دارد از نظر سرنشینان هواپیمای Aچنین به نظر می رسد که B درحال دور شدن از آن ها تحت زاویه $60°$ مطابق شکل می باشد . سرعت واقعی B را تعیین کنید ؟



$$solve\ 1: \frac{v_B}{sin60} = \frac{v_A}{sin75} \qquad v_B = 717\left(\frac{m}{s}\right)$$

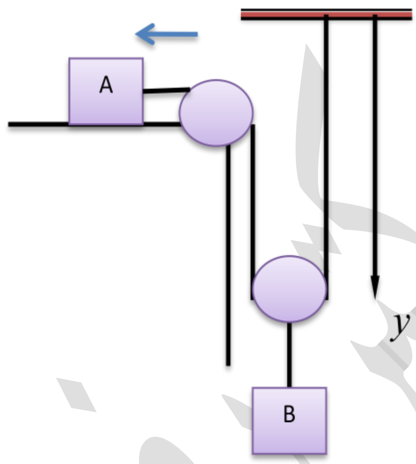
$$solve\ 2: v_B = v_A + v_{B/A}$$

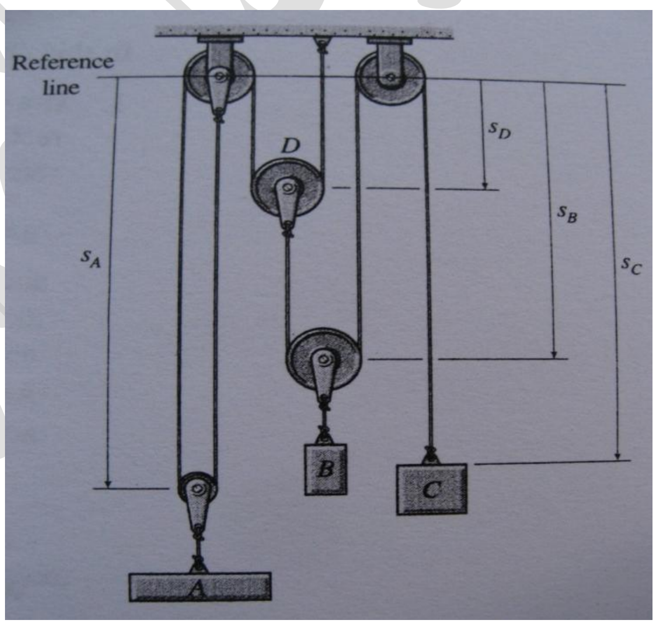
مثال) از منظر A ، قایق Bبا سرعت $\left(\frac{mil}{h}\right)$ 30 عمود بر مسیر A از آن دور می شود. اگر سرعت مطلق A ، $\left(\frac{mil}{h}\right)$ 40 باشد ، سرعت مطلق قایق B را تعیین نمایید؟

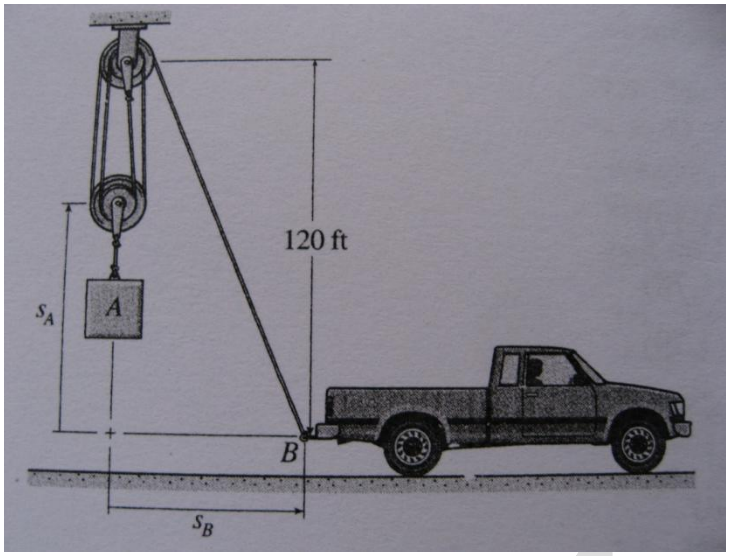
$$v_B{}^2 = 40^2 + 30^2 \qquad \begin{cases} v_B = 50(\frac{mil}{h}) \\ \theta = 36.87° \end{cases}$$

درجه آزادی :

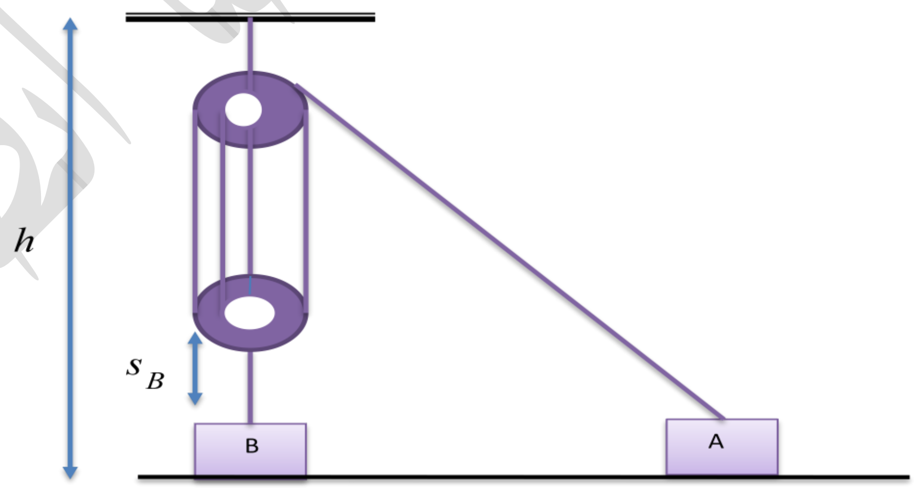
تعریف درجه آزادی : تعداد مختصه های مستقل مورد نیاز برای تعیین موقعیت همه ی اجزای یک سیستم در هر لحظه از زمان درجه ی آزادی آن سیستم نامیده می شود.







تمرین) تراکتور A با شتاب ثابت a_A از زیر قرقره شروع به حرکت می نماید سرعت بالا رفتن وزنه ی B بعد از زمان گذشت t (s) را بدست آورید؟



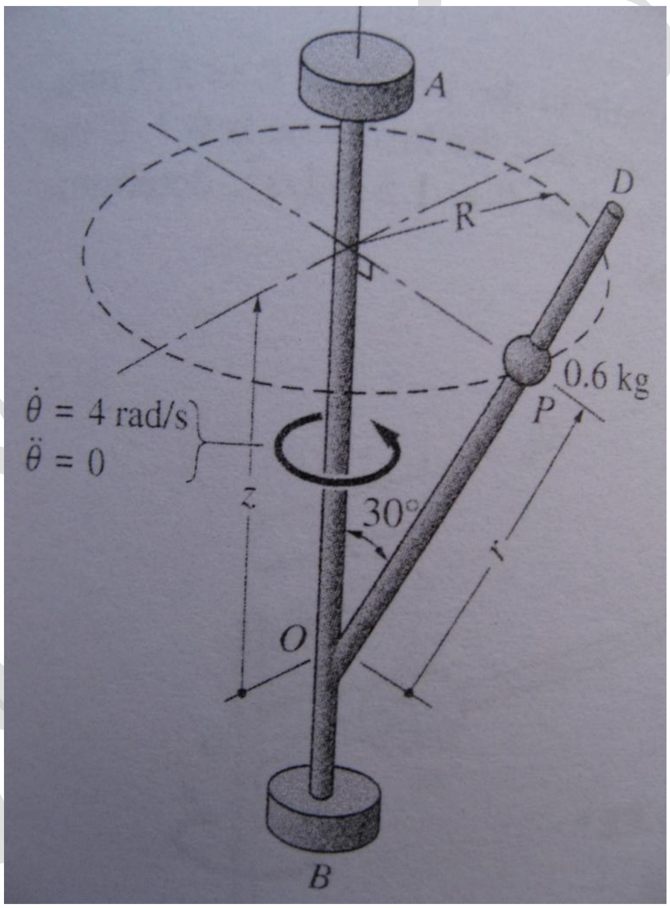
$$L = 4(h - s_B) + \sqrt{h^2 + s_A^2} + Constant$$

$$\dot{L} = 0 \qquad -4v_B + \frac{2s_A v_A}{2\sqrt{h^2 + s_A^2}} = 0 \qquad v = \frac{s_A v_A}{4\sqrt{h^2 + s_A^2}}$$

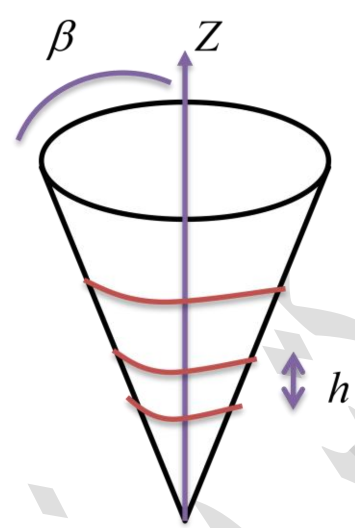
$\ddot{s_A} = a_A \longrightarrow \dot{s_A} = a_A t + c\big(if\ t_\circ = 0\ \ and\ \ \dot{s_A}|_{t=t_0} = 0\big) \longrightarrow c = 0$

$\dot{s_A} = a_A \times t \longrightarrow s_A = \dfrac{1}{2} a_A \times t^2 + C\big(if\quad t_0 = 0\ \ and\ \ s_A|_{t=t_0} = 0\ \big)$

$\longrightarrow s_A = \dfrac{1}{2} a_A t^2$



مثال) حرکت ذره ای روی سطح مخروطی قائم با روابط $r = ht\ \tan\beta$ ، $\theta = 2\pi t$، $z = ht$ تعریف می گردد مقادیر سرعت و شتاب ذره را در لحظه ی معین t بدست آورید؟



$$if \quad r = ht\,tan\beta \quad \longrightarrow \quad \dot{r} = h\,tan\beta \quad \longrightarrow \quad \ddot{r} = 0$$

$$if \quad \theta = 2\pi t \quad \longrightarrow \quad \dot{\theta} = 2\pi \quad \longrightarrow \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$if \quad z = ht \longrightarrow \dot{z} = h \longrightarrow \ddot{z} = 0$$

$$v = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta + \dot{z}k$$

$$v = htan\beta e_r + 2\pi ht\,tan\beta e_\theta + he_k$$

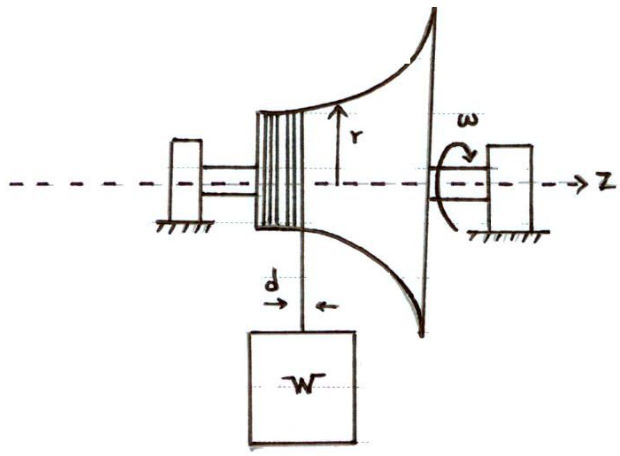
$$|v| = h\,tan\,\beta\sqrt{1 + 4\pi^2t^2 + cot^2\beta}$$

$$a = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)e_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)e_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

$$a = -4\pi^2 ht\,tan\,\beta e_r + 2h\,tan\beta\ 2\pi e_\theta + 0$$

$$|a| = 4\pi h\,tan\beta\sqrt{1 + \pi^2t^2}$$

مثال) در شکل زیر شعاع r قرقره را بر حسب z چنان تعیین نمایید که وزنه با سرعت $v=0.4+\frac{t^2}{8000} \quad (\frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}})$ بالا کشیده می شود ؟



$$\begin{cases} \omega = 10\, rpm \\ d = 0.5\, in \\ t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\dot{z} = \frac{d}{T} = \frac{d}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega d}{2\pi}$$

$$\dot{z} = \frac{10\frac{2\pi}{60}\left(\frac{0.5}{12}\right)}{2\pi} \longrightarrow \dot{z} = 0.00694\left(\frac{ft}{s}\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.00694 \qquad t = 144z \qquad (1)$$

در $z_0 = 0$ و $\mathrm{t}_0 = 0$ ثابت انتگرال صفر می شود.

سرعت محیطی این قرقره:

$$r\omega = 0.4 + \frac{t^2}{8000} \qquad r\left(\frac{2\pi}{60}10\right) = 0.4 + \frac{t^2}{8000} \qquad (2)$$

۱ را در ۲ جایگذاری می کنیم :

$$r = 0.382 + 2.482z^2$$