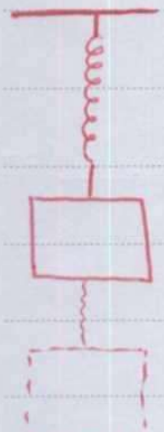
Subject: ۹۰,۱۱,۱۶ جلسه اول — دکتر احمدیان — ارتعاشات

Year. Month. Date. ( )

برای جرم و فنر ارتعاشات را بعد از رسیدن به تعادل بررسی می‌کنیم. مهم نیست که دستگاه جرم و فنر قائم است یا افقی. در قائم: از زمانی که کش آمده در افقی: از همان طول طبیعی



$$M\ddot{X} + kX = 0 \quad (1)$$ معادله‌ی جرم و فنر

X از نقطه‌ی تعادل است.

$$X = Ae^{i}$$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم بر } M]{(1)} \ddot{X} + \frac{k}{M}X = 0 \xrightarrow[\text{فرکانس طبیعی}]{\sqrt{\frac{k}{M}} = \omega} \ddot{X} + \omega^2 X = 0$$

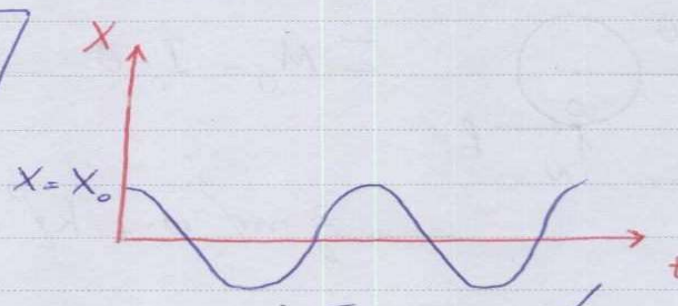
$$X = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \qquad X = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ X = X_0 \end{array}\right\} \rightarrow X_0 = A\sin 0 + B\cos 0 \rightarrow \underline{X_0 = B}$$

پس $\rightarrow X = A\sin\omega t + X_0\cos\omega t \quad \Big| \begin{array}{l} t = 0 \\ \dot{X} = 0 \end{array}$

$$\rightarrow A\omega\cos 0 - X_0\omega\sin 0 = 0 \rightarrow \underline{A = 0}$$

بنابراین $\rightarrow$ $\boxed{X = X_0\cos\omega t}$

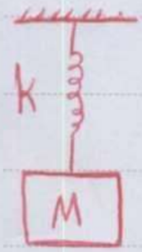


معادله‌ی کلی سیستم ارتعاشی $X = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ می‌باشد.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

حال اگر با سرعت اولیه رها کنیم:

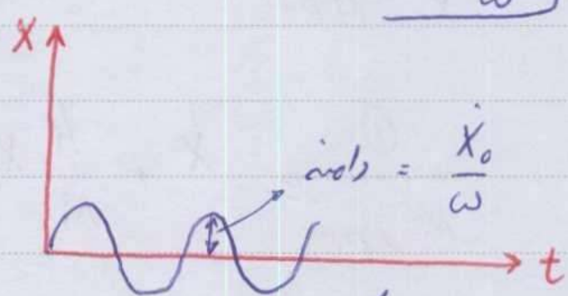


$$\ddot{x} + kx = 0 \qquad \begin{vmatrix} t=0 \\ x=0 \end{vmatrix} \text{①} \quad \begin{vmatrix} t=0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \end{vmatrix} \text{②}$$

$$\text{①} \longrightarrow 0 = 0 + B\cos 0 \longrightarrow \boxed{B=0} \qquad x = A\sin\omega t$$

$$\left.\begin{matrix} t=0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \dot{x}_0 = A\omega \cancel{\cos\omega t}^{\,1} - B\omega\sin 0 \longrightarrow \boxed{A = \frac{\dot{x}_0}{\omega}}$$

معادله‌ی ارتعاشی $\boxed{x = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t}$



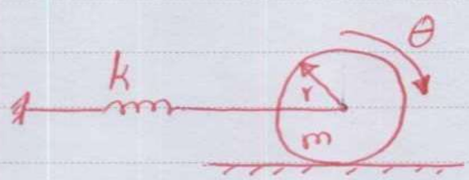
$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t$$

اگر بکشیم و با ضربه رها کنیم:

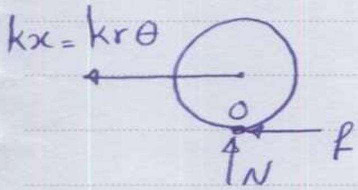
یعنی جرم را به مقدار x_0 پایین می‌کشیم و با سرعت $\dot{x}_0$ رها می‌کنیم.

جلسه‌ی دوم 90, 11, 18

مثال: فرکانس طبیعی سیستم؟



راه اول:

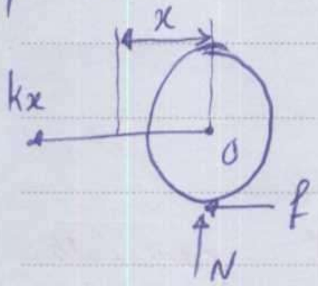


$$\Sigma M_O = I_O\ddot{\theta} \longrightarrow \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} = -kr\theta(r)$$

$$\longrightarrow \frac{3}{2}m\cancel{r^2}\ddot{\theta} + k\cancel{r^2}\theta = 0 \longrightarrow \frac{3}{2}m\ddot{\theta} + k\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{3}\frac{k}{m}\theta = 0 \longrightarrow \text{فرکانس طبیعی} \quad \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}}$$

راه دوم:



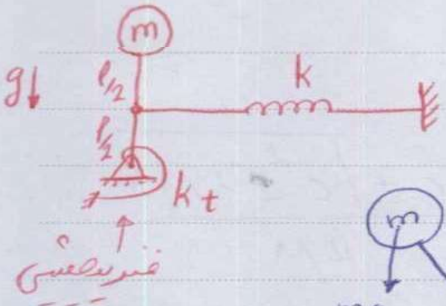
$$m\ddot{x} = -kx - f \quad ①$$

$$② \quad \Sigma M_O = I\ddot{\theta} \longrightarrow fr = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\ddot{x}}{r}\right)$$

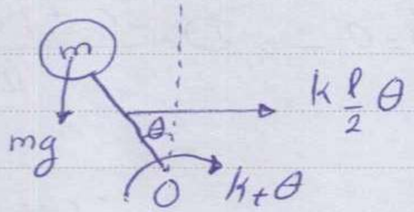
$$\longrightarrow fr = \frac{1}{2}mr\ddot{x} \longrightarrow \boxed{f = \frac{1}{2}\ddot{x}} \quad ③$$

$$①, ③ \longrightarrow m\ddot{x} = -kx - \frac{1}{2}\ddot{x} \longrightarrow \frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0 \longrightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}}$$

مثال: فرکانس طبیعی سیستم روبرو؟



برای حل استاتیکی سیستم را منحرف می‌کنیم:



تقریباً $mgl\theta$

$$\Sigma M_O = I_O\ddot{\theta} \longrightarrow -k_t\theta - k\frac{l}{2}\theta\left(\frac{l}{2}\right) + mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta}$$

$$ml^2\ddot{\theta} + \left(k_t + k\frac{l^2}{4} - mgl\right) = 0$$

$$\longrightarrow \omega_n = \left(\frac{k_t + k\,l^2/4 - mgl}{ml^2}\right)^{1/2}$$

سه حالت ممکن است پیش بیاید:

Subject:

Year. Month. Date. ( )

① $\to k_t + k\frac{l^2}{4} > mgl$ سیستم پایدار است.

② $\to k_t + k\frac{l^2}{4} = mgl$ سیستم در مرز پایداری است.

③ $\to k_t + k\frac{l^2}{4} < mgl$ سیستم ناپایدار است.

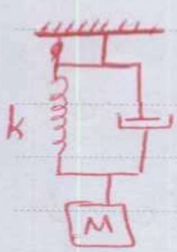
جلسه سوم ۱۱,۲۳

میرایی

damping

$f_s = c\dot{x}$ نیروی میرایی با سرعت متناسب است و از رابطه ی روبرو محاسبه می شود.

ضریب میرایی را با C نشان می دهند.



$$M\ddot{x} + kx + c\dot{x} = 0$$

معادله مشخصه $MD^2 + cD + k = 0 \to D = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4Mk}}{2M}$

$$X = Ae^{D_1 t} + Be^{D_2 t}$$

بحث در حالات مختلف:

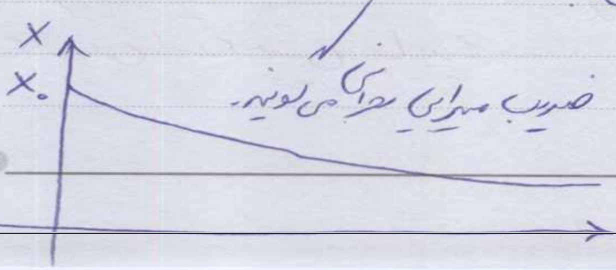
$c^2 - 4km = 0$ ①

$$X = Ae^{-\frac{c}{2M}t} + (Bte^{-\frac{c}{2M}t})$$

شرایط اولیه $\left| \begin{matrix} t = t_0 = 0 \\ X = X_0 \end{matrix} \right. \to X = X_0 e^{-\frac{c}{2M}t}$

در این حالت سیستم ارتعاش نخواهند داشت.

در این حالت، حالت بحرانی می گویند و به c ضریب میرایی بحرانی می گویند.



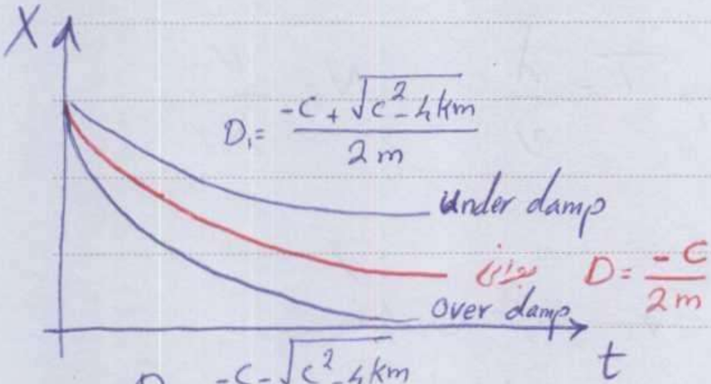
$$\boxed{C_{cr} = 2\sqrt{km}}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

دو D بدست می‌آید که هر دو منفی خواهد بود. یعنی کمتر از حالت $c^2-4km>0$ ②

قبلی ولی نزولتر.



$$D_2=\frac{-c-\sqrt{c^2-4km}}{2m}$$

در این حالت هم نوسان رخ نمی‌دهد.

$c^2-4km<0$ ③

$$D=\frac{-c\pm i\sqrt{4km-c^2}}{2m}$$

$$X=e^{-\frac{c}{2m}t}\left[A\sin\mu t+B\cos\mu t\right]\qquad \mu=\sqrt{\frac{4km-c^2}{4m^2}}=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}$$

در این حالت دامنه‌ی نوسانات کم می‌شود تا صفر گردد. ξ کمیتی بین صفر و یک است.

به کمیت $\frac{c}{c_{cr}}$ ، ξ می‌گویند.

$$\frac{c}{2M}=\frac{c}{c_{cr}}\cdot\frac{c_{cr}}{2M}=\xi\cdot\frac{2\sqrt{KM}}{2M}=\xi\sqrt{\frac{K}{M}}=\xi\omega_n$$

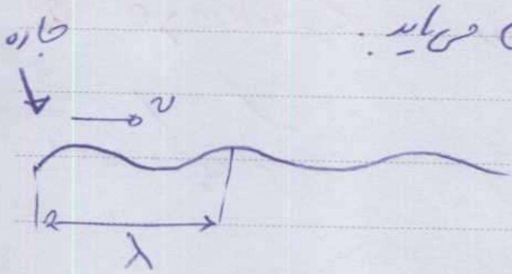
در معادله‌ی بالا به جای $\frac{c}{2M}$ ، $\xi\omega_n$ قرار می‌دهیم و معادله را بازنویسی می‌کنیم.

$$X=e^{-\xi\omega_n t}\left[A\sin\mu t+B\cos\mu t\right]\qquad \boxed{\mu=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

ω_n همان فرکانس طبیعی سیستم است. فرکانس میرایی $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$$X=e^{-\xi\omega_n t}\left(A\sin\omega_d t+B\cos\omega_d t\right)$$

با توجه به اینکه $\omega_d < \omega_n$ پس فرکانس نوسانات کاهش می‌یابد.



$$\frac{\lambda}{T} = v \to T = \frac{\lambda}{v} \quad , N = \frac{v}{\lambda}$$

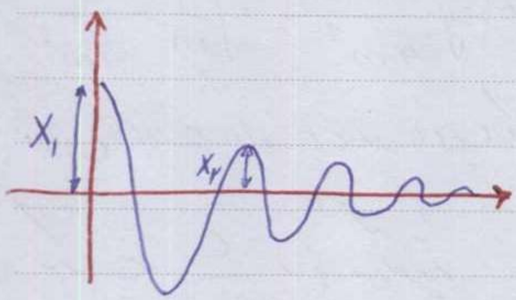
$$2\pi N = \frac{2\pi v}{\lambda} = \omega$$ ← فرکانس جاده

اگر فرکانس جاده با فرکانس ماشین یکی شود تشدید رخ می‌دهد که خوب نیست.

Force Vibration:

معادله کلی $M\ddot{X} + C\dot{X} + kX = f_0 \sin \Omega t$

جلسه چهارم ۹۰،۱۱،۲۵



$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{e^{-\xi\omega_n(t+T)}} = e^{\xi\omega_n T}$$

دوره تناوب $\frac{2\pi}{\omega_d}$ می‌باشد.

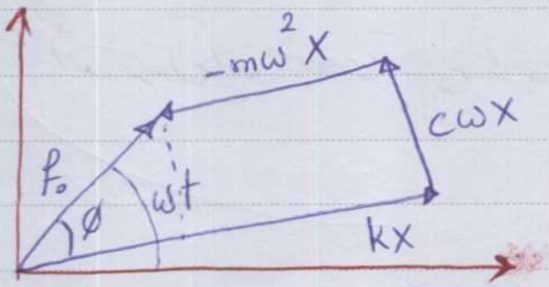
$$\ln\frac{X_1}{X_2} = \xi\omega_n T \approx 2\pi\xi$$

بدون تقریب: $\ln\frac{X_1}{X_2} = \xi\omega_n\frac{2\pi}{\omega_d} = \xi\omega_n\frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n} = \xi\frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نمایش برداری معادله‌ی ارتعاشی:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \sin \omega t$$



$$\tan\phi = \frac{c\omega X}{kX - m\omega^2 X} = \frac{\frac{c}{c_{cr}} \cdot c_{cr}\,\omega}{k\left(1 - \frac{m}{k}\omega^2\right)}$$

$$\tan\phi = \frac{\xi \, \frac{2\sqrt{km}}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{2\xi \, \omega/\omega_n}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)}$$

اختلاف فاز $= \phi$

معادله‌ی ارتعاشی در این حالت $X = A\sin(\omega t - \phi)$ می‌باشد که ϕ از رابطه‌ی بالا به دست می‌آید. اگر A را هم بیابیم مسئله حل می‌شود. (منظور از X در دیاگرام بالا همان بیشینه دامنه یعنی A می‌باشد).

می‌توان فرمول فیثاغورس را برای مثلث قائم‌الزاویه نوشت:

$$f_0^2 = (kA - m\omega^2 A)^2 + (c\omega A)^2$$

$$\longrightarrow A = \frac{f_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{f_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}}$$

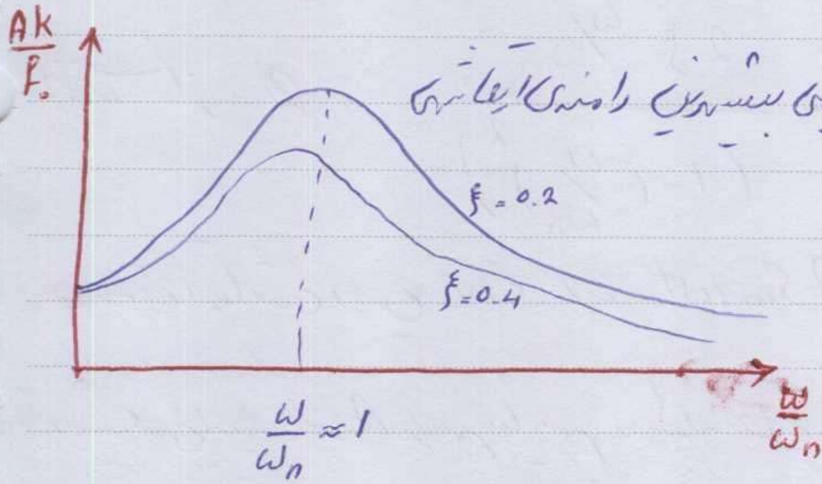
دامنه‌ی ارتعاشی

$$= \frac{f_0/k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{c}{c_{cr}} \cdot \frac{2\sqrt{mk}}{k}\,\omega\right)^2}} = \frac{f_0/k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}$$

در نهایت جواب آخر سؤال: $X = A \sin(\omega t - \phi)$ $\boxed{\frac{\phi}{\omega} : \text{lag time}}$

اگر فرمول آخر صفحه‌ی قبل را بی‌بعد کنیم:

$$\frac{Ak}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}$$



زمانی که $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ تشدید رخ می‌دهد یعنی بیشترین دامنه‌ی ارتعاش را خواهیم داشت.

اگر $\xi = 0$ باشد ناگهان دامنه تا مقدار خیلی زیادی افزایش می‌یابد.

جلسه پنجم ۹۰/۱۱/۳۰

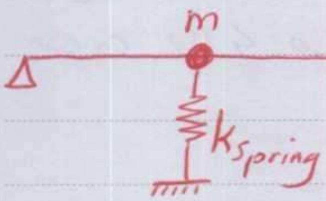
فرکانس طبیعی سازه‌های مکانیکی:

$$\delta = \frac{f l^3}{3EI} \longrightarrow f = \frac{3EI}{l^3} \cdot \delta \longrightarrow \boxed{k = \frac{3EI}{l^3}}$$

ضریب سختی سازه

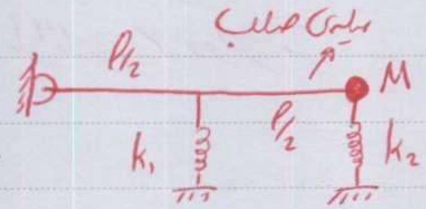
چون اگر تغییر طول δ ایجاد کنیم هر دوی فنر و تیر به یک اندازه تغییر طول می‌دهند پس همانند دو فنر موازی با هم عمل می‌کنند.

$$k_{eff} = k_{beam} + k_{spring}$$

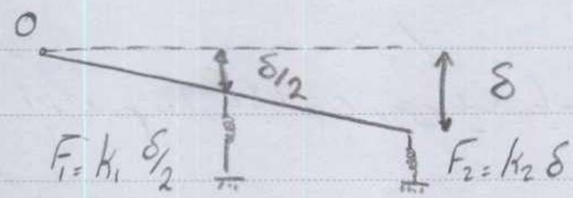


با محاسبه‌ی جابجایی در وسط تیر در اثر اعمال یک نیرو می‌توان k را به دست آورد.

فرکانس این سیستم؟



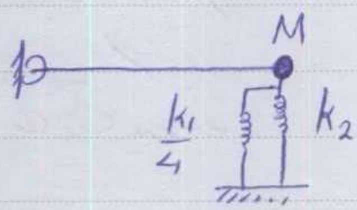
یک تغییر فرم δ به سیستم اعمال می‌کنیم:



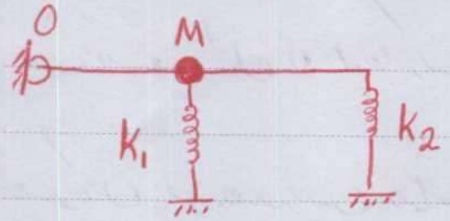
معادله

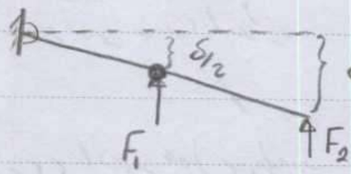
این T به این معنی است که می‌توانیم $T = F_1 \frac{l}{2} = \frac{k_1}{4} \delta . l$ گشتاور نیروی F_1 حول O

به جای فنر وسطی یک فنر با سختی $\frac{k_1}{4}$ با k_2 موازی کنیم. پس سیستم معادل می‌شود:



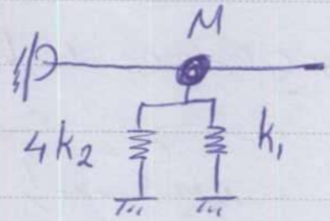
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1/4 + k_2}{M}}$$





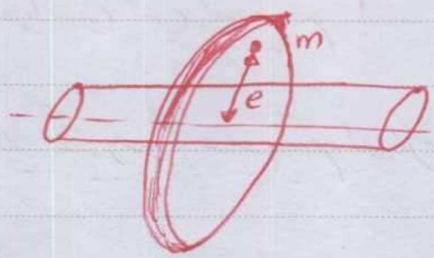
پس می‌توانیم فنری با $T = k_2\,\delta\,.\,l = k_2\left(\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)4$ معادل فنر 2 حول O

سختی $4k_2$ همراه با k_1 در وسط تیر بگذاریم.



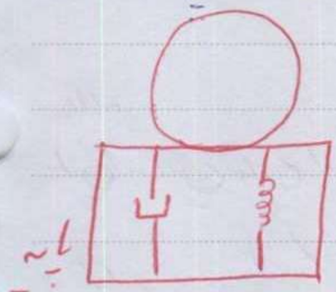
$$\omega = \sqrt{\frac{4k_2 + k_1}{M}}$$

نابالانسی دوار:



نیروی مرکزگرا $F = me\omega^2$

اگر جسم دوار نابالانسی روی یک پایه باشد، می‌توانیم پایه را با یک فنر و دمپر مدلسازی کنیم:



در این حالت معادله‌ی دیفرانسیل همان معادله‌ی دورانی است که قبلاً بحث شد ($m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$) فقط در حل این مسائل دامنه‌ی ارتعاشی تفاوت می‌کند:

$$x = X \sin(\omega t - \phi)$$

$$X = \frac{me\omega^2}{k\sqrt{\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]}}$$

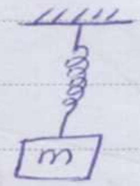
Subject:

Year. Month. Date. ( )

انرژی :

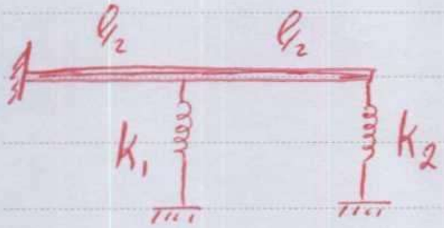
انرژی پتانسیل فنر = $\frac{1}{2}kx^2$

$$\text{Total} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$



انرژی جنبشی = $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$$\frac{d}{dt}(E)=0 \longrightarrow \frac{1}{2}k(2x\dot{x}) + \frac{1}{2}m(2\ddot{x}\dot{x})=0 \longrightarrow \boxed{m\ddot{x}+kx=0}$$



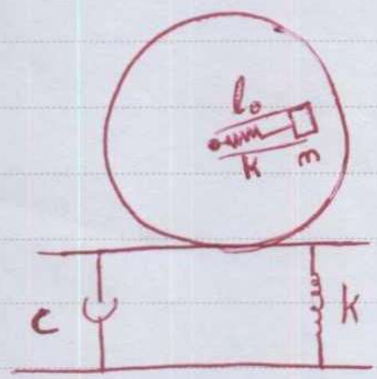
سوال:

فرکانس نوسانی با استفاده از روش انرژی برای دو حالت زیر:

۱، جرم در نقطه ی وسط باشد و تیر صلب

۲، تیر صلب ~~است~~ و دارای توزیع جرم است.

جلسه ششم ۹۰،۱۲،۷

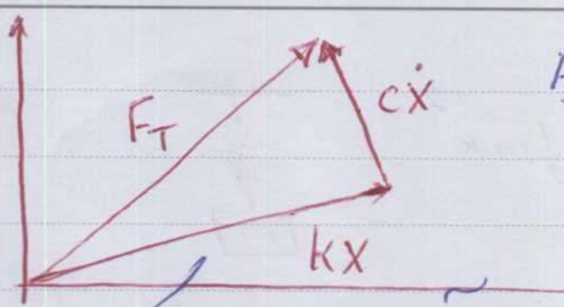


سوال: معادله ی نوسان پایه هنگام چرخش دیسک. سیستم افقی است.

$$me\omega^2 = m(l_0+\Delta)\omega^2 = k\Delta$$

$$F_0 = me\omega^2 \sin \omega_1 t$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$F_T = \sqrt{(kX)^2 + (c\omega X)^2}$$

$$= kX\sqrt{1 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

F_T نیرویی است که پایه هنگام لرزش و نوسان اجسام روی آن احساس می‌کند.

$$\frac{F_0}{kX} = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

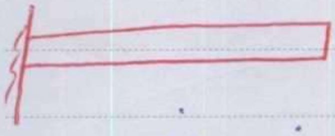
Subject:

Year. Month. Date. ( )

جلسه هفتم ۱۲٫۹

روش انرژی: با برابر قرار دادن U_{max} و T_{max} می‌توانیم فرکانس طبیعی سیستم را بیابیم.

تیر یک سر درگیر:



$$\text{انرژی پتانسیل} = \int \frac{1}{2}\varepsilon\sigma\, dV$$

ρ: جرم واحد طول

$$\text{انرژی جنبشی} = \int \frac{1}{2}\dot{y}^2 \rho A\, dx = \omega^2 \int \frac{1}{2} y^2 \rho A\, dx$$

بنابراین:

$$\omega^2 = \frac{\int \frac{1}{2}\varepsilon\sigma\, dV}{\int \frac{1}{2} y^2 \rho A\, dx} = \frac{\int \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}\, dA\, dx}{\int \frac{1}{2} y^2 \rho A\, dx} = \frac{\int \frac{1}{2E}\left(\frac{MC}{I}\right)^2 dA\, dx}{\int \frac{1}{2} y^2 \rho A\, dx}$$

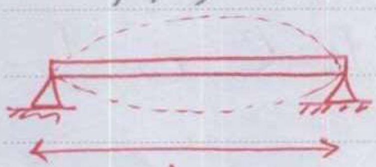
در نهایت

$$\omega^2 = \frac{\int EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx}{\int \rho y^2\, dx} \longleftarrow$$

این معادله، معادله‌ی کلی برای محاسبه‌ی فرکانس طبیعی تیرها است.

$$\omega^2 = \frac{\int EI\, y''^2\, dx}{\int \rho y^2\, dx}$$

مثال: تیر دو سر ساده:



شکل ارتعاش این تیر را می‌توانیم بنویسیم:

$$y = A\sin\frac{\pi x}{L}$$

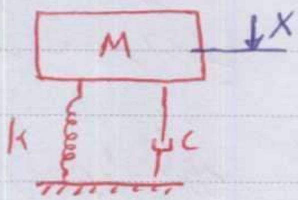
$$\omega^2 = \frac{\int_0^L EI\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)\right)^2 dx}{\int_0^L \rho\left(\sin^2\frac{\pi x}{L}\right) dx} = \frac{EI}{\rho}\cdot\frac{\pi^4}{L^4}$$

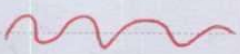
$I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + k\theta = T_0 \sin\omega t$

ارتعاشات مهندسی :

جلسه هفتم ---- ۱۲٫۱۴

زلزله :





$y = y_{max} \sin\omega t$

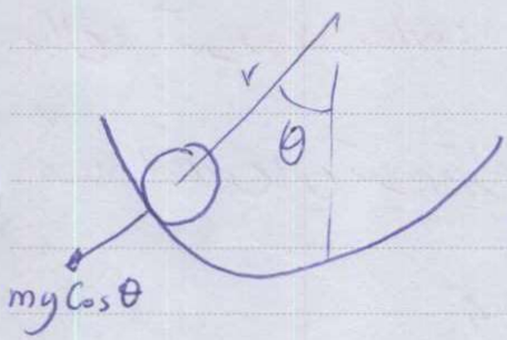
$M\ddot{X} + C(\dot{X} - \dot{y}) + k(X - y) = 0$ تغییر متغیر $X - y = z$

$M(\ddot{z} + \ddot{y}) + C\dot{z} + kz = 0$

$\rightarrow m\ddot{z} + C\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = m y_{max} \omega^2 \sin\omega t$

$X = z + y$

یافتن C معادل :



$$W = \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \mu m g \cos\theta \, r \, d\theta = \pi C_{eq} \omega X^2$$

درحالت میرایی غیرلزجی می‌توانیم C_{eq} را از طریق معادلت انرژی به دست آوریم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه نهم ۱۳۹۱/۱/۱۵ سه‌شنبه

تبدیلِ لاپلاس: $F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt$

تبدیلِ لاپلاس ! اگر $f(t)=1 \longrightarrow F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^\infty = \boxed{\frac{1}{s}}$

معکوس لاپلاس: $f(t)=\int_0^{+\infty} F(s) e^{-st}\, ds$

احتمالاً فرمول معکوس غلط است $\longleftarrow$ $F(s)=\frac{1}{s} \longrightarrow f(t)=\int_0^{+\infty} \frac{1}{s} e^{-st}\, ds = -e^{-st}\Big|_0^\infty = 1$

$X(s)=\int_0^\infty X(t) e^{-st}\, dt \qquad \int_0^\infty \dot X(t) e^{-st}\, dt = \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{u} \frac{x\, dt}{du} = e^{-st} X(t)\Big|^\infty ---$

درنهایت:

$$\boxed{\mathcal{L}\, \dot X(t) = s X(s) - X(0)}$$

حل معادله‌ی ارتعاشی با استفاده از تبدیل لاپلاس:

$$m\ddot X + c\dot X + kX = f(t)$$

$$\mathcal{L}(m\ddot X) + \mathcal{L}(c\dot X) + \mathcal{L}(kX) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(s) e^{st}\, ds$$

$$m\left[s^2 X(s) - sX(0) - \dot X(0)\right] + c\left[sX(s) - X(0)\right] + kX(s) = F(s)$$

$$X(s)\left[ms^2 + cs + k\right] = F(s) + \dot X(0) + \cancel{sX(0)} + \cancel{cX(0)}$$

با فرض جابجایی اولیه نداشته باشیم

$X(0)$ و $\dot X(0)$ بستگی به شرایط اولیه سیستم یعنی مکان و سرعت اولیه دارند.

! $F(s)=0$:
$c=0$

$$X(s) = \frac{m\dot X(0)}{ms^2 + \cancel{c}s + k} = \frac{\dot X(0)}{s^2+\omega^2}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$X_{(s)} = \frac{\dot{X}_{(0)}}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega \dot{X}_{(0)}}{\omega(s^2+\omega^2)} \qquad X_{(t)} = \frac{\dot{X}_{(0)}}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$\mathcal{L}\sin\omega t = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$f_{(t)} = f_0 e^{-\alpha t}$ ۱,۲

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_{(t)} = f_0 e^{-\alpha t}$$

وقتی در لاپلاس مخرج ۱ یا ۲ درجه بزرگتر از صورت باشد

$$X_{(s)} = \frac{\gamma s + z}{s^2 + \alpha s + \beta}$$

باید کسر را شکست . به ریشه‌ها مخرج کسر را می‌شکنیم.

$$X_{(s)} = \frac{u_1}{(s+\alpha)} + \frac{u_2}{(s+\beta)}$$

تمرین $\quad X_{(s)} = \dfrac{}{s^4+\alpha s^2+\beta} = \dfrac{a_1 s + a_2}{s^2+\gamma} + \dfrac{b_1 s + b_2}{s^2+\xi}$

«ضربه»

$\delta(t-t_0)$ این تابع همه جا صفر است ولی در $t=t_0$ می‌شود یک. یک تغییر سرعت در لحظه‌ی t_0 معادل تابع δ است.

$$\text{Pulse} = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(mv) = f \rightarrow m(v_2 - v_1) = \int f\,dt \qquad \hat{f} = \int f\,dt$$

$$m(v_2 - \overset{0}{v_1}) = \hat{f} \rightarrow \boxed{V_0 = \frac{\hat{f}}{m}} \qquad X = \frac{\dot{X}_{(0)}}{\omega}\sin\omega t = \frac{\hat{f}}{m\omega}\sin\omega t$$

به جای سرعت اولیه در فرمول X باید impulse تقسیم بر جرم را قرار دهیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه دهم ۱۳۹۱/۱/۲۰

Impulse را به $\longrightarrow \dfrac{Impulse}{m}$ = سرعت اولیه

اگر نیرویی تا زمان T_p به سیستم اعمال شود، مجموعه‌ای از یک Impulse داریم و در این صورت باید از انتگرال کانولوشن استفاده کنیم.

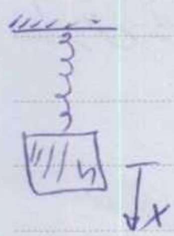
$$x = \int_0^{T_p} f(\xi)\, h(t-\xi)\, d\xi$$

گاهی اوقات که در انتگرال $e^{-\alpha}$ داریم بهتر است از روش زیر انتگرال بگیریم:

$$\int_0^{T_p} - = \int_0^{\infty} - \;-\; \int_{T_p}^{\infty} -$$

لاگرانژ:

$\mathcal{L} = T - U$ = انرژی جنبشی - انرژی پتانسیل



$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ U &= \frac{1}{2} k x^2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

معادله‌ی لاگرانژ $\longrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = f_i$

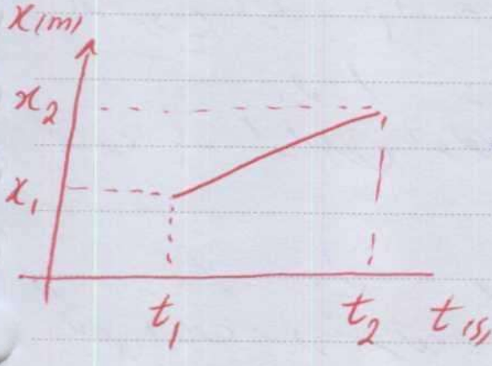
q_i یک متغیر فضایی است که مثلاً می‌تواند x یا y یا z یا V باشد. در مثال بالا:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = f_i \\ &\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{در نهایت}} \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = f_x \rightarrow m\ddot{x} + kx = f$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

همانطور که معلوم شد معادله‌ی دیفرانسیل به معادله‌ی سیستم ارتعاشی رسیدیم. دیفرانسیل برای سیستم‌های چند درجه آزادی هم استفاده می‌شود.



$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad \text{یا} \quad \boxed{\dot{x} = \frac{X_n - X_{n-1}}{\Delta t}} \quad \text{I}$$

یعنی هر جا $\dot{x}$ داشتیم معادله‌ی I را اجرا می‌کنیم.

$$\ddot{x} = \frac{X_{n+1} - 2X_n + X_{n-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \rightarrow m\left(\frac{X_{n+1} - 2X_n + X_{n-1}}{(\Delta t)^2}\right) + c\left(\frac{X_n - X_{n-1}}{\Delta t}\right) + kX_n = f$$

از این رابطه عبارت X_{n+1} را استخراج می‌کنیم:

$$X_{n+1} = ---$$

$$= f(X_n, X_{n-1}, \Delta t)$$

مثال $\rightarrow$ for $t = 5s$, $\Delta t = 0.15$ $\xrightarrow{\text{جدول نقطه}}$ می‌کنیم

X_{n+1}	X_n	X_{n-1}

$n = 1$ گام اول $\Delta t = 0.15 \rightarrow X_0 =$ شرایط اولیه

مسئله:

معادله‌ی $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ را برای $m = 1\,kg$, $k = 1$, $c = 2$ در نظر بگیرید. x را بر حسب t در 6 ثانیه‌ی اول رسم کنید. $\Delta t = 0.25$ و با پاسخ دقیق مقایسه کنید.

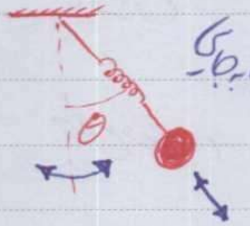
$X(0) = 0$

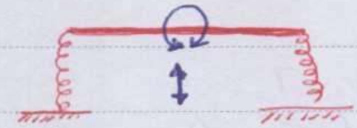
$X(1) = 0$

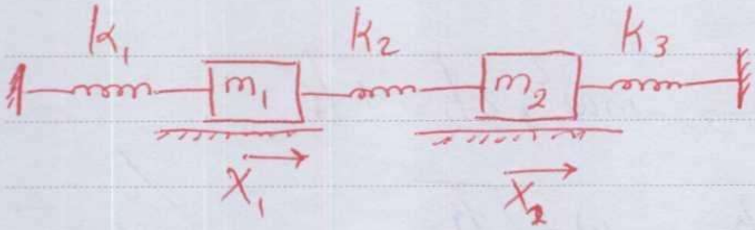
Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه یازدهم ۱۳۹۱/۱/۲۲

دستگاه‌های دو درجه آزادی







معادلات ارتعاشی مربوط به سیستم مقابل را بنویسید.

$$m_1 \ddot{X}_1 + k_1(X_1 - 0) + k_2(X_1 - X_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{X}_2 + k_2(X_2 - X_1) + k_3(X_2 - 0) = 0$$

اگر فرکانس دوران را ω فرض کنیم در نتیجه

$$\ddot{X}_2 = -\omega^2 X_2 \qquad \ddot{X}_1 = -\omega^2 X_1$$

از X_1 معادله‌ی اول فاکتور می‌گیریم.

$$\begin{cases} -m_1\omega^2 X_1 + k_1 X_1 + k_2(X_1 - X_2) = 0 \\ -m_2\omega^2 X_2 + k_2(X_2 - X_1) + k_3 X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2) - k_2 X_2 = 0 \\ X_2(-m_2\omega^2 + k_2 + k_3) - k_2 X_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} X_1(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2) + X_2(-k_2) = 0 \\ X_1(-k_2) + X_2(-m_2\omega^2 + k_2 + k_3) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = 0$$

برای این که معادله جواب داشته باشد باید دترمینان ضرایب صفر باشد.

$$AX = 0$$

P4PCO

$\det(A)=0$ با فرض $k_1=k_2=k_3=k$ و $m_1=m_2=m$ سوال را حل می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}-m\omega^2+2k & -k\\ -k & -m\omega^2+2k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}=0$$

$$\det(A)=(-m\omega^2+2k)^2-k^2=0 \rightarrow -m\omega^2+2k=\pm k$$

$$\rightarrow \begin{cases}-m\omega^2+2k=k \rightarrow m\omega^2=k \rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\\ -m\omega^2+2k=-k \rightarrow m\omega^2=3k \rightarrow \omega=\sqrt{\frac{3k}{m}}\end{cases}$$

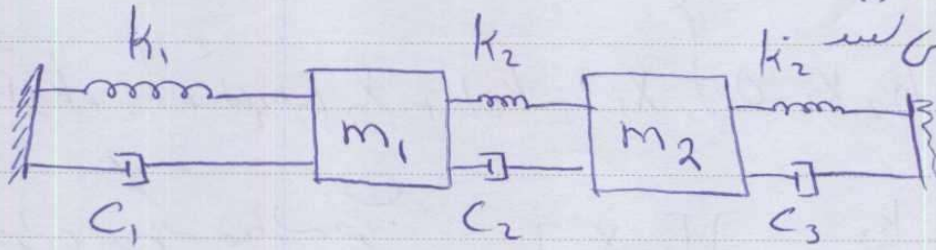
نتیجه این که این سیستم دارای دو فرکانس طبیعی است

$$(-m\omega^2+2k)X_1-kX_2=0$$

$$\rightarrow \frac{X_2}{X_1}=\frac{-m\omega^2+2k}{k}\quad \xrightarrow{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}\ \frac{X_2}{X_1}=1 \qquad \xrightarrow{\omega=\sqrt{\frac{3k}{m}}}\ \frac{X_2}{X_1}=-1$$

دو جسم هم دامنه اند و با جهت هم حرکت می‌کنند.

دو جسم هم دامنه اند ولی در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند



میرا گشته:

$$m_1\ddot{X}_1+k_1(X_1-0)+k_2(X_1-X_2)+C_1(\dot{X}_1-0)+C_2(\dot{X}_1-\dot{X}_2)=0$$

$$m_2\ddot{X}_2+k_2(X_2-X_1)+k_3(X_2-0)+C_2(\dot{X}_2-\dot{X}_1)+C_3(\dot{X}_2-0)=0$$

فرض می کنیم $x = Xe^{i\omega t}$. این فرض برای حالت قبلی درست بود ولی برای

این حالت جدید جواب نمی دهد. در این حالت فرض می کنیم $x = Xe^{\omega t}$ پس:

$$\dot{x} = \omega X e^{\omega t} = \omega x \,, \quad \ddot{x} = \omega^2 X e^{\omega t} = \omega^2 x$$

پس در معادلات صفحه‌ی قبل عبارات روبرو را جایگزین می کنیم، $\ddot{X}_1 = \omega^2 X_1 \quad \dot{X}_1 = \omega X_1$

$$\ddot{X}_2 = \omega^2 X_2 \quad \dot{X}_2 = \omega X_2$$

$$\begin{bmatrix} m_1\omega^2 + k_1 + k_2 + c_1\omega + c_2\omega & -k_2 - c_2\omega \\ -k_2 - c_2\omega^2 & m_2\omega^2 + k_2 + k_3 + c_2\omega + c_3\omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0$$

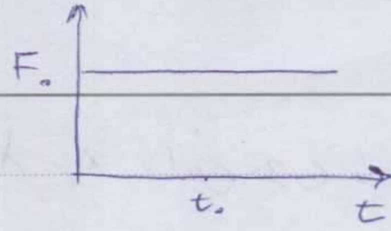
پاسخ های مثبت ω غیرقابل قبول است بلکه ω باید منفی شود یا مختلط

چون اگر $\omega > 0$ باشد دامنه مرتب زیاد می شود و این فیزیکی نیست.

$\omega = -\alpha - i\beta$ یا $-\alpha + i\beta$

[illegible]

جلسه دوازدهم ۹۱/۱/۲۷



پاسخ سیستم جرم، فنر و دمپر به پله :

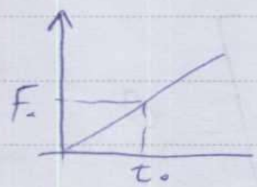
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$h(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d} \sin(\omega_d t)$$

پاسخ به پله $\rightarrow$ $$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_d}\int_0^t e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{F_0}{k}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)\right] \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

اگر پله از زمان t_0 شروع می‌شد در جواب آخر هر جا به جای t می‌گذاریم $\underline{t-t_0}$



پاسخ سیستم جرم، فنر و دمپر به شیب :

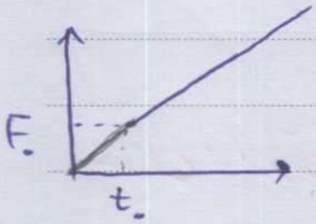
$$x(t) = \frac{F_0}{t_0 k}\left[t - \frac{2\xi}{\omega_n} + e^{-\xi\omega_n t}\left(\frac{2\xi}{\omega_n}\cos\omega_d t - \left\{\frac{\omega_d^2 - \xi^2\omega_n^2}{\omega_n^2\omega_d}\right\}\sin\omega_d t\right)\right]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

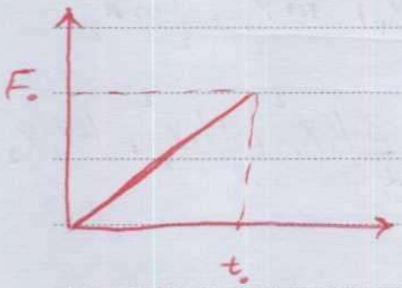
فصل ٤

پاسخ به پله واحد $x(t)=\int_0^t \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{k}(1-\cos\omega_n t)$

پاسخ به شیب $x(t)=\frac{F_0}{m\omega_n t_0}\int_0^t \tau\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau=\frac{F_0}{t_0 k}\left(t-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\right)$



سؤال: پاسخ به شکل روبرو را بیابید.



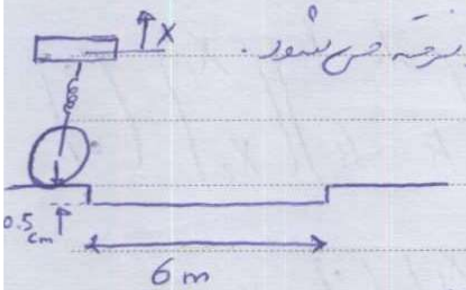
$$F(t)=\frac{F_0}{t_0}t\,u(t)-\frac{F_0}{t_0}(t-t_0)u(t-t_0)-F_0u(t-t_0)$$

$$x(t)=\frac{F_0}{t_0 k}\left(t-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\right)u(t)-\frac{F_0}{t_0 k}\left[(t-t_0)-\frac{\sin\omega_n(t-t_0)}{\omega_n}\right]u(t-t_0)$$

$$-\frac{F_0}{k}\left[1-\cos\omega_n(t-t_0)\right]u(t-t_0)$$

سؤال: واگنی با سرعت ثابت $3\,m/s$ در امتداد ریلی حرکت می‌کند. قسمتی از ریل به طول $6\,m$ به اندازه‌ی $0.5\,cm$ جابجا شده است. پاسخ واگن را به این جابجایی بیابید.

حل: فرض می‌کنیم قسمت جابجا شده به صورت پالس پله‌ای در نظر گرفته می‌شود.



$$-k(x-y)=m\ddot{x} \longrightarrow m\ddot{x}+kx=ky$$

$$y(t)=-0.5\,u(t)+0.5\,u(t-2)$$

درنهایت $X(t)=0.5(-1+\cos\omega_n t)u(t)+0.5[1-\cos\omega_n(t-2)]u(t-2)$

سیستم‌های دو درجه آزادی

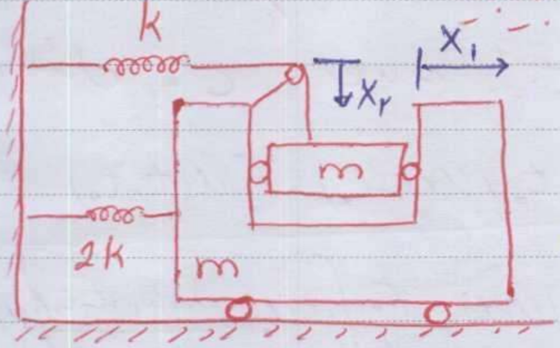
روش لاگرانژ $L = T - U$ $\qquad \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$

چون معمولاً انرژی پتانسیل به $\dot{q}$ بستگی ندارد:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

$Q_i =$ کار نیروهای ناپایستار

سؤال: با روش لاگرانژ معادلات ارتعاشی سیستم زیر را بیابید.



$$T = \frac{1}{2}m(\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2) + \frac{1}{2}m(\dot{X}_1)^2 = m\dot{X}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2}k(X_1+X_2)^2 + \frac{1}{2}2k X_1^2 = \frac{3}{2}kX_1^2 + \frac{1}{2}kX_2^2 + kX_1X_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 2m\dot{x}_1 \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 2m\ddot{x}_1 \qquad \frac{\partial U}{\partial x_1} = 3kx_1 + kx_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2 \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = kx_2 + kx_1$$

$$2m\ddot{x}_1 + 3kx_1 + kx_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + kx_2 + kx_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & k \\ k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

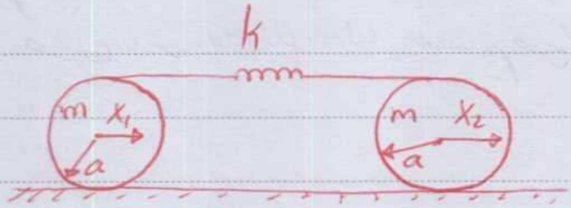
$$\begin{vmatrix} 3k - 2m\omega^2 & k \\ k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow$$

$$\omega_1^2 = \frac{2k}{m} \qquad \begin{bmatrix} -k & k \\ k & -k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad -x_1 + x_2 = 0 \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k}{2m} \qquad \begin{bmatrix} 2k & k \\ k & \frac{k}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 2x_1 + x_2 = 0 \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سؤال: با روش لاگرانژ معادله‌ی ارتعاشی سیستم زیر را بیابید.



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m a^2\right)\left(\frac{\dot{x}_1}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m a^2\right)\left(\frac{\dot{x}_2}{a}\right)^2 = \frac{3}{4} m \dot{x}_1^2 + \frac{3}{4} m \dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} k (2x_2 - 2x_1)^2 = 2k(x_2 - x_1)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2} m \dot{x}\right) = \frac{3}{2} m \ddot{x}_1 \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2} m \dot{x}_2\right) = \frac{3}{2} m \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 4k(x_2 - x_1) \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = 4k(x_2 - x_1)$$

معادلات ارتعاشی:

$$\frac{3}{2} m \ddot{x}_1 + 4k_1 x_1 - 4k x_2 = 0$$

$$\frac{3}{2} m \ddot{x}_2 - 4k x_1 + 4k x_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} m\omega^2 + 4k & -4k \\ -4k & -\frac{3}{2} m\omega^2 + 4k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1^2 = 0 \longrightarrow Q_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \omega_2^2 = \frac{16k}{3m} \longrightarrow Q_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

معادله ارتعاشی تیر بدون بارگذاری، تحت تاثیر وزن خودش:

$$EI \frac{d^4 \omega}{dx^4} + \rho \frac{d^2 \omega}{dt^2} = 0$$

ρ = جرم واحد طول $\qquad$ ω = خیز تیر در هر نقطه

از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم:

$$\omega(x, t) = \omega(x) \cdot \omega(t)$$

$$EI \frac{d^4}{dx^4}\left(\omega(x)\omega(t)\right) + \rho \frac{d^2}{dt^2}\left(\omega(x) \cdot \omega(t)\right) = 0$$