به نام او

Subject
Date ①

ارتعاشات
دکتر : مرادی

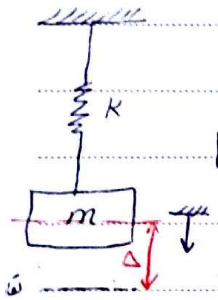
ارتعاشات : تحلیل رفتار نوسانی (تکرار یک حرکت دینامیکی) یک جسم

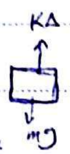
نوسان کمک فنر خودرو (+) ، نوسان آونگ (+) ، زلزله (−) ، نوسان اولتراسونیک در سنگ شکن (−) ، جذب انرژی از امواج

ارتعاشات خطی ← فرض خطی بودن برای نوسانات کوچک اعتبار دارد.

ارتعاشات غیرخطی ← در پدیده‌ای با دامنه‌ی نوسانی بزرگ رخ می‌دهد، مثلاً تخریب سازه غیرخطی است.

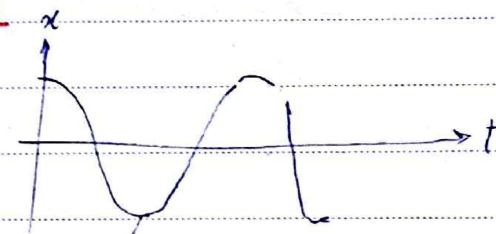
ارتعاشات
آزاد ← ارتعاشات ناشی از شرایط اولیه (یعنی دیگر نیرویی که ارتعاش دارد نمی‌دهیم) که به علت میرا بعد از مدتی از بین می‌رود (ازرا)
اجباری ← ارتعاشات تحت تحریک خارجی (ماندگار)



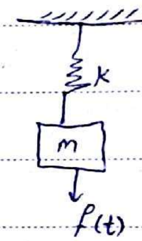


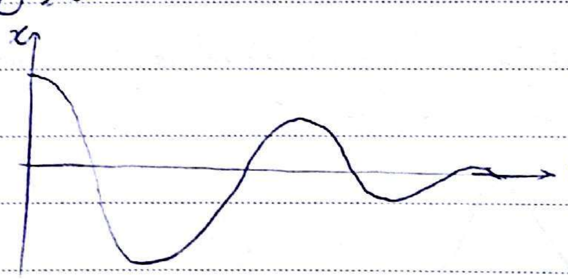
$mg = k\Delta \rightarrow \Delta = \frac{mg}{k}$

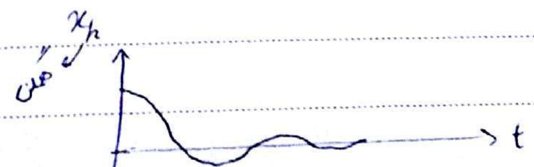
$$\begin{cases} x(0) = 5\,cm \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$



حالت ایده آل



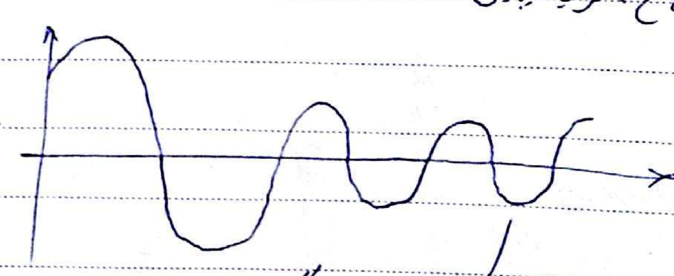


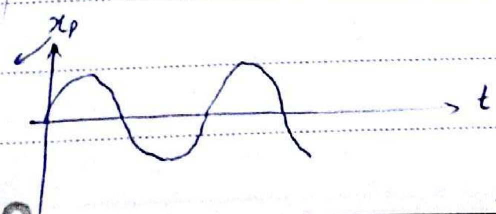


همگن

پاسخ به تحریک اجباری

$x = x_h + x_p$





خصوصی

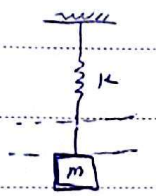
ارتعاشات آزاد (آزاد) پس از مدتی از بین می‌روند
و ارتعاشات اجباری (ماندگار) باقی می‌مانند

به نام دوست
2

Subject
Date

مولد ارتعاشات آزاد همیشه شرایط اولیه نیست !

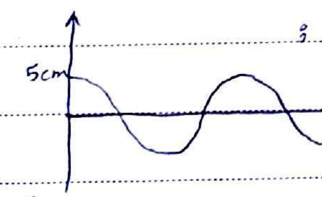
ارتعاشات آزاد یا ازاد : ناشی از شرایط اولیه (I.C) و یا برخی از عوامل داخلی ایجاد حرکت می‌باشد.
مثلاً آزاد شدن یک تنش پسماند



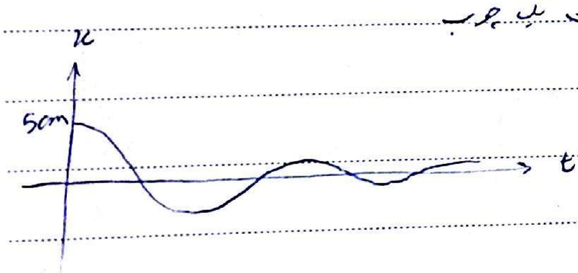
$I.C: \; x(0) = 5cm$

$\dot{x}(0) = 0$

حالت ایده‌آل :



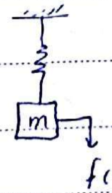
میرایی (استهلاک) <
اصطکاک بین سطوح و یا بین اجزاء داخلی یک سیستم
سایر عواملی که باعث اتلاف می‌شوند در هر رشته آ مثل برق و یا صدا و گرمای ناشی از شکست یک چوب



حالت واقعی (با میرایی)

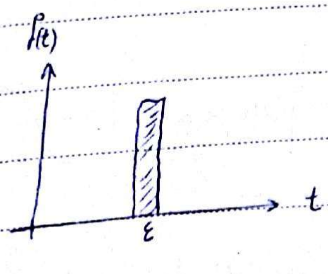
ارتعاشات اجباری (یا ماندگار ... Steady state) ←

ارتعاشات ماندگار با دامنه‌ی متغیر هم داریم.

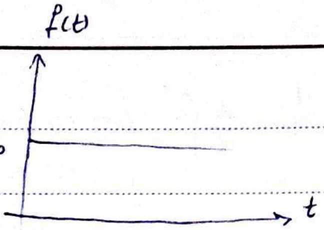


تحریک : <
نیرو (عمدتاً)
جابه‌جایی ← مثلاً سرعت‌گیر

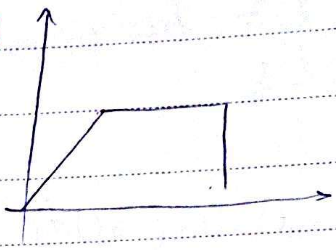
1) تحریک ضربه (Impulse)



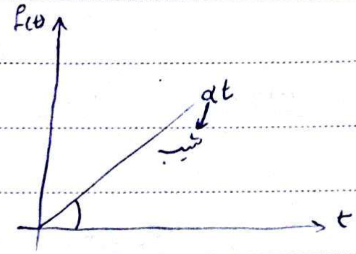
2) (Step تحریک پله

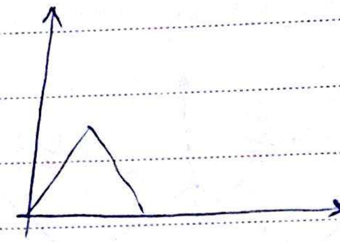


5)

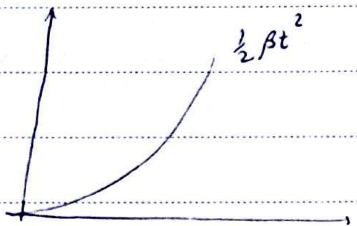


3)
Ramp تحریک رمپ



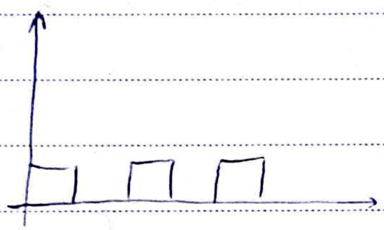


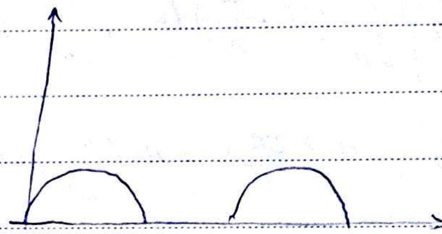
4) تحریک سهمی



* موارد 1 تا 5 تحت عنوان ارتعاشات گذرا بحث می‌شوند

6) periodic





7) Harmonic ← حرکت هارمونیکی پریودیک است ولی نه برعکس
Sin , Cos

$f_0 \sin(\omega t) \rightarrow$ SyS $\rightarrow x_0 \sin(\omega t)$

نکته: در تحریک‌های هارمونیک، فرکانس تحریک و پاسخ یکسان است. *

برای یافتن پاسخ یک سیستم به تحریک پریودیک: تحریک پریودیک را با کمک بسط فوریه به صورت جمعی از هارمونیک‌ها مدل‌سازی می‌کنیم (تا زمانی که فرض خطی بودن داریم جمع آثار برقرار است)

یادآوری ریاضی:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

$\omega_n = n\omega_0$
← فرکانس پایه (همان فرکانس تحریک)

به نام او

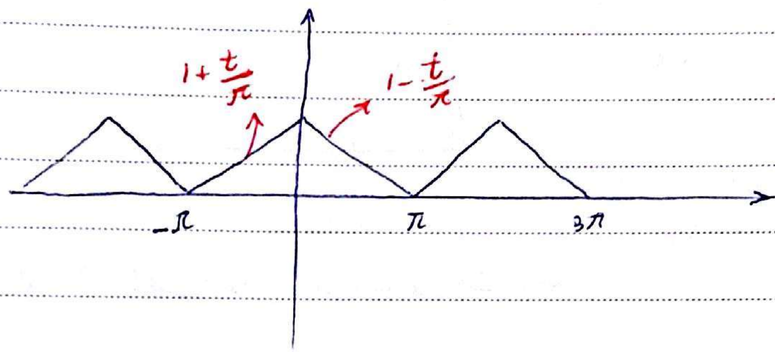
4

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(\omega_n t)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\sin(\omega_n t)\,dt$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega_m t)\sin(\omega_n t)\,dt \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

به طور مشابه برای $\cos$

مثال : $T = 2\pi$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}\left(1+\frac{t}{\pi}\right)dt + \int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{t}{\pi}\right)dt\right\} = 1$$

چون تابع زوج است $b_n = 0$ ،

$$\omega_n = n\omega_0 = n\left(\frac{2\pi}{T}\right) = n\left(\frac{2\pi}{2\pi}\right) = n$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}\left(1+\frac{t}{\pi}\right)\cos(nt)\,dt + \int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{t}{\pi}\right)\cos(nt)\,dt\right\} = \frac{2}{(n\pi)^2}\left\{(-1)^n - 1\right\} \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{-4}{(n\pi)^2} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n \text{ فرد}} \frac{1}{n^2}\cos(nt) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left[\cos t + \frac{1}{9}\cos 3t + \dots\right]$$

هارمونیک اول

هارمونیک دوم

* پاسخ کل = جمع پاسخ به هارمونیک های ساده فقط (اصل جمع آثار) برای سیستم های خطی اعتبار دارد.

نکته : در ارتعاشات آزاد ، sys با فرکانس طبیعی نوسان می‌کند.

نکته : در ارتعاشات اجباری ، sys با فرکانس تحریک نوسان می‌کند.

نکته : فرکانس یا فرکانس‌های طبیعی یک سازه ، تنها تابعی از جرم و سختی (صلبیت ، stiffness) سازه می‌باشند.

$\omega_n = f(k, m)$

PAPCO

$f = \nu = \frac{1}{T}$ (Hz)

(rad/s) $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 2\pi f$

مثال : نوسانات حل آونگ مانند تاب : حالت اول : ارتعاشات آزاد (رها کردن)

حالت دوم : اجباری (هل دادن هر 2 تا 3 بار یک بار)

حالت سوم : رزونانس (هل دادن هر یک بار)

نکته : اگر فرکانس تحریک با یکی از فرکانس‌های طبیعی سازه برابر باشد پدیده رزونانس با دامنه‌ی زیاد ارتعاشات داریم.

رزونانس : اگر فرکانس تحریک سازه به یکی از فرکانس‌های طبیعی سازه نزدیک باشد پدیده تشدید داریم که همراه با دامنه‌ی بزرگ نوسان می‌باشد

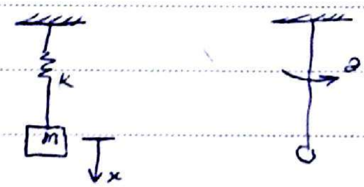
درجات آزادی : به تعداد درجات (راستاهای) حرکت ارتعاشی که جهت توصیف نوسانات جسم به طور مستقل نیاز است

جسم صلب در فضای سه بعدی ← حداکثر 6 درجه آزادی

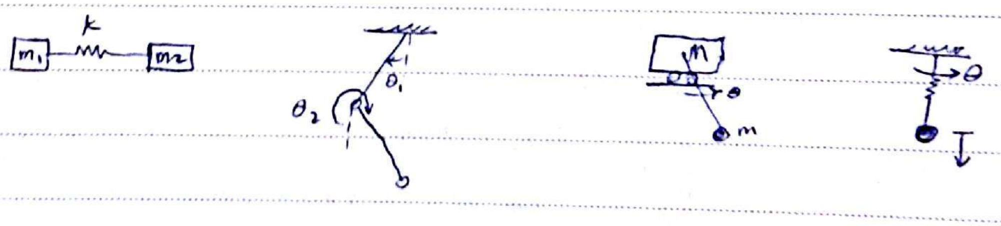
گاه در این مسائل ممکن است ارتعاشات در تعداد درجات آزادی کمتری انجام شوند ← قید

دامنه‌ی نوسانات در سایر جهات نسبت به جهات دیگر خیلی کم باشد

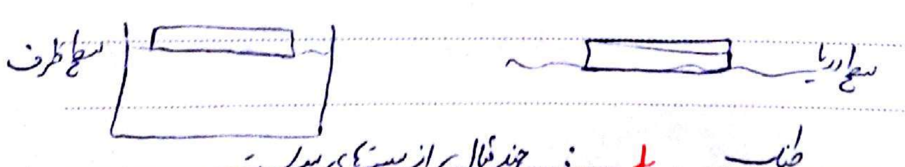
سیستم یک درجه آزادی : SDOF



سیستم دو درجه آزادی : 2DOF

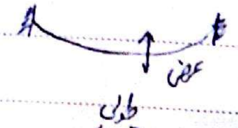


سیستم‌های پیوسته : بی‌نهایت درجه آزادی



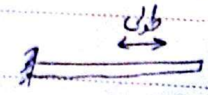
چند مثال از سیستم‌های پیوسته :

1 طناب



PDE (2)

2 میله

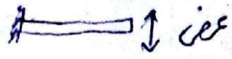


PDE (2)

3 شفت

PDE (2)

4 تیر



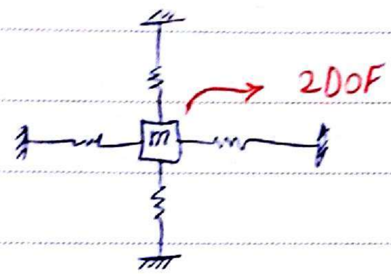
PDE (4)

Subject ω_n : 1 ، 3 ، 7 ، 20 ، 100 ، 2000...

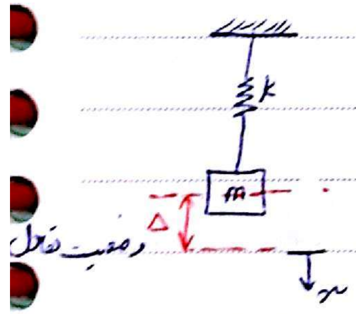
Date درجات آزادی : 2 ، 5 — مثلاً در این سیستم می‌توان سه درجه آزادی در نظر گرفت

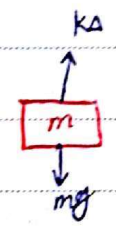
نکته: یک سیستم به تعداد درجات آزادی‌اش فرکانس طبیعی دارد

نکته: یک سیستم پیوسته در حالت کلی به صورت یک سیستم بی‌نهایت درجه آزادی مدل می‌شود، اما در طبیعت ممکن است تنها تعداد محدودی از فرکانس‌های طبیعی تحریک شوند (مثلاً 2، 3، ...، 16..) بنابراین معمولاً تعداد درجات آزادی را همان تعداد فرکانس‌های تحریک شده می‌گیرند.



ارتعاشات آزاد سیستم یک درجه آزاد بدون میرایی:

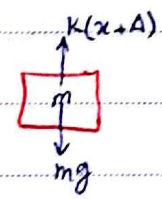




معادله استاتیکی:

$$\Sigma F_x = m a_x = 0$$

$$\Rightarrow mg - k\Delta = 0$$



معادله دینامیکی:

$$\Sigma F_x = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow mg - k(x+\Delta) = m\ddot{x}$$

جایگزینی معادله استاتیکی در معادله دینامیکی:

نیروی اینرسی — نیروی بازگرداننده

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

یادآوری ریاضی: معادله دیفرانسیل مرتبه 2 با ضرایب ثابت:

$$ay'' + by' + c = 0$$

معادله مشخصه

$$aD^2 + bD + c = 0 \rightarrow D_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Subject به نام دوست
Date (7)

1) $D_{1,2} = P_1 , P_2 \Rightarrow y(x) = C_1 e^{P_1 x} + C_2 e^{P_2 x}$

2) $D_{1,2} = P \Rightarrow y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{Px}$

3) $D_{1,2} = P \pm jq \Rightarrow y(x) = e^{Px}\left(C_1 \cos(qx) + C_2 \sin(qx)\right)$

شکل مدال : $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$

الف : $m\ddot{x} + kx = 0 \rightsquigarrow mD^2 + k = 0 \longrightarrow D_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$

$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

$\boxed{x(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t)} \longleftrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$x(t) = C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t)$

$x(0) = 10\ cm$, $\dot{x}(0) = 0$ $\Rightarrow$ $C_1 = 0$, $C_2 = 10\ cm$ $\Rightarrow x(t) = 0.1 \cos(\omega_n t) \Rightarrow x(t) = 0.1 \cos(10 t)$

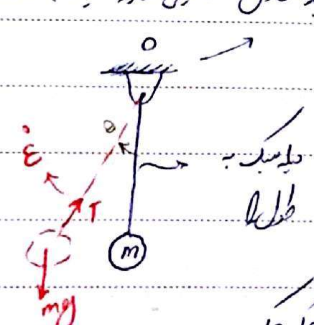
$k = 1000\ N/m$

$m = 10\ kg$ $\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10$

در حالت کلی : مسائل یک درجه آزادی بدون میرایی دارای معادله‌ی حاکم به فرم $\ddot{X} + \omega_n^2 X = 0$ و پاسخ به فرم $x(t) = C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t)$ می باشد

چون در ابتدا تعادل استاتیکی دارد نیاز به معادله‌ی استاتیکی نیست

مثال :



$$\underset{\text{G مرکز جرم / مرکز دوران}}{\Sigma M} = \underset{\text{G مرکز جرم / مرکز دوران}}{I}\ \ddot{\theta}$$

$\longrightarrow \Sigma M_O = I_O \ddot{\theta} \Rightarrow \underbrace{-mgl\sin\theta}_{\text{nonlinear}} = I_O \ddot{\theta}$

برای θ کوچک $\Longrightarrow ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

PAPCO

$I_O = I_{\text{مرکز گلوله}} + md^2 = \frac{2}{5}m\cancel{r^2} + ml^2$ $\qquad \omega_n^2 = \frac{g}{l}$

چون شعاع کوچک ← 0

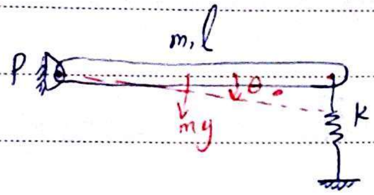
مثال:

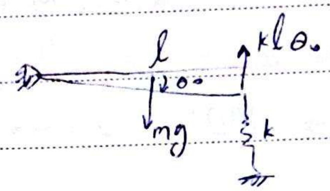
$\sum M_0 = I_0\ddot{\theta} \rightarrow mgl\theta = ml^2\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{l}\theta = 0$

حرکت نوسانی نیست!!

$\rightarrow \theta(t) = C_1 e^{\omega_n t} + \underbrace{C_2 e^{-\omega_n t}}_{0,\ t\to\infty}$

مثال:





معادله استاتیک: $\sum M_P = 0 \longrightarrow -k(l\theta_0)l + mg\frac{l}{2} = 0$

جهت مثبت $\ddot{\theta}$ ؟

معادله دینامیک: $mg(\frac{l}{2}) - kl\,l(\theta_0+\theta) = \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}$

$\theta_0 \rightarrow \theta + \theta_0$

جایگزینی معادله استاتیک در دینامیک:

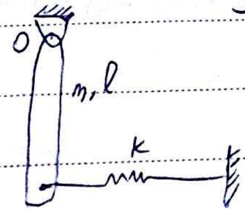
$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + kl^2\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

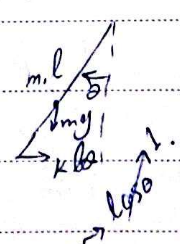
یادآوری: کره حول مرکز $I = \frac{2}{5}mr^2$ میله حول نقطه وسط $I = \frac{1}{12}ml^2$

دیسک حول مرکز $I = \frac{1}{2}mr^2$ میله حول انتها $I = \frac{1}{3}ml^2$

نیم دیسک حول مرکز $I = \frac{1}{2}mr^2$ جرم نیم دیسک

مثال: در اینجا نیازی به معادله استاتیکی نیست چون سیستم در ابتدا در حال تعادل است





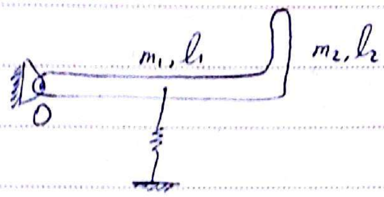
$\sum M_O = I_O\ddot{\theta} \Rightarrow -mg\frac{l}{2}\theta - (kl\theta)l = \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}$

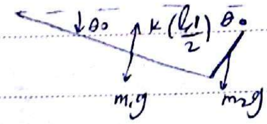
$l\cos\theta$

$\Rightarrow \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + (mg\frac{l}{2} + kl^2)\theta = 0 \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{mg\frac{l}{2} + kl^2}{\frac{ml^2}{3}}$

نکته : در مسائلی که وزن مجموعه توسط حداقل یک فنر تحمل شود عبارت مربوط به وزن در ω_n ظاهر نمی‌شود و در مسائلی که وزن توسط فنر تحمل نمی‌شود عبارت وزن در ω_n ظاهر می‌شود.

مثال :





معادله استاتیکی : $\Sigma M_0 = 0 \Longrightarrow m_1 g \frac{l_1}{2} + m_2 g (l_1 + \frac{l_2}{2}\overset{\sin\theta_0}{\theta_0}) - (k\frac{l_1}{2}\theta_0)(\frac{l_1}{2}) = 0$

معادله دینامیکی : $\Sigma M_0 = I_0\alpha = I_0\ddot{\theta} \xrightarrow{\theta_0 \to \theta + \theta_0} m_1 g\frac{l_1}{2} + m_2 g(l_1 + \frac{l_2}{2}(\theta_0+\theta)) - (k\frac{l_1}{2}(\theta_0+\theta))(\frac{l_1}{2}) = 0$

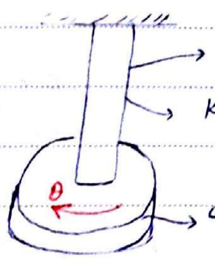
جایگذاری معادله استاتیکی در دینامیکی $\Longrightarrow m_2 g\frac{l_2}{2}\theta - k\frac{l_1^2}{4}\theta = I_0\ddot{\theta}$

چون m_2 به طور مستقیم توسط فنر تحمل نمی‌شود

$$I_0\ddot{\theta} + \left(k\frac{l_1^2}{4} - m_2 g\frac{l_2}{2}\right)\theta = 0 \Longrightarrow \omega_n = \frac{k\frac{l_1^2}{4} - m_2 g\frac{l_2}{2}}{I_0}$$

$$I_0 = \frac{m_1 l_1^2}{3} + \frac{1}{12} m_2 l_2^2 + m_2\left(l_1^2 + \frac{l_2^2}{4}\right)$$

مثال : ارتعاشات پیچشی



کل اتصال شفت و دیسک : $-k_t\theta = J\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow J\ddot{\theta} + k_t\theta = 0 \Longrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J}}$$

$J_{\text{دیسک}} = \frac{1}{2}mr^2 \Longrightarrow \theta = \frac{Tl}{GJ} \Rightarrow T = k_t\theta \Rightarrow k_t = \frac{T}{\theta}$ ($J \to I_p$)

$$\Rightarrow k_t = \frac{GJ}{l} \quad (J \to I_p)$$

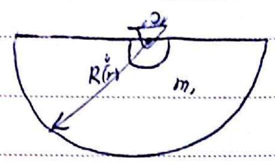
Subject

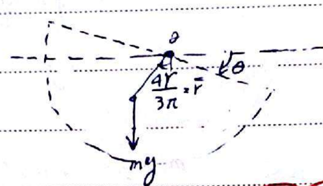
Date

کاربرد: یافتن K اجسام با هندسه پیچیده ← یافت با اطلاعات معلوم حل می‌کنیم و یک θ_0 به جسم می‌دهیم و رها می‌کنیم

⇐ مقدار نوسانات در 1 ثانیه را می‌شماریم ← Hz ← W_n ← $\omega_n=\sqrt{\frac{K_t}{J}}$

مثال: نیم استوانه بین شده

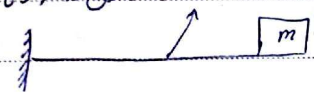


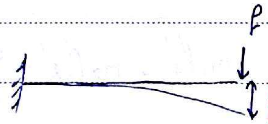


$$\Sigma M_o = I_o\ddot\theta \Rightarrow -mg\bar r\underbrace{\sin\theta}_{\theta} = \frac{1}{2}mr^2\ddot\theta$$

$$\Rightarrow \ddot\theta + \frac{8g}{3r\pi}\theta = 0 \qquad , \quad \omega_n=\sqrt{\frac{8g}{3r\pi}}$$

مثال: اگر میله به صورت یک جسم یک درجه آزاد مدل شود. (نه پیوسته)



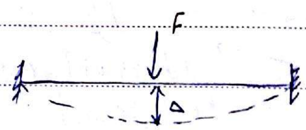


$\Delta=\frac{Pl^3}{3EI}$ حفظ شود → $k=\frac{3EI}{l^3}$

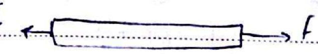
* در این مثال مستقیماً حل حالت دینامیک می‌نویسیم

$m\ddot x + kx = 0$

$k=\frac{3EI}{l^3}$



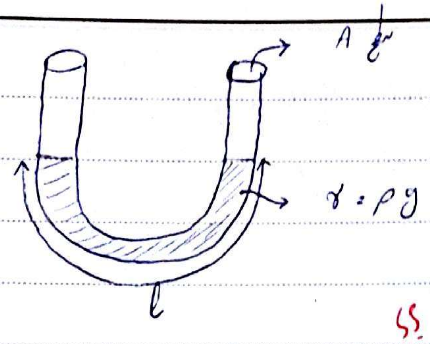
$\Delta=\frac{Fl^3}{48EI}$

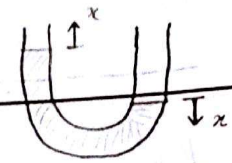


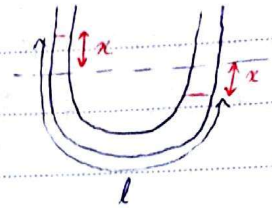
$\delta=\frac{Fl}{EA}$

حالت‌های مختلف مدلسازی فنر را از کتاب

مثال :







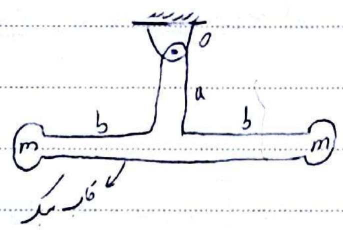
جبر ؟!

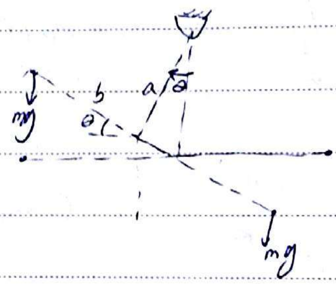
$\Sigma F = m\ddot{x}$

نیروی عامل خط تعادل

$$\Rightarrow \underbrace{-2Ax\rho g}_{\text{جرم اختلاف سطح}} = (\rho A l)\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2g}{l}x = 0 \ , \ \omega_n = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

مثال :





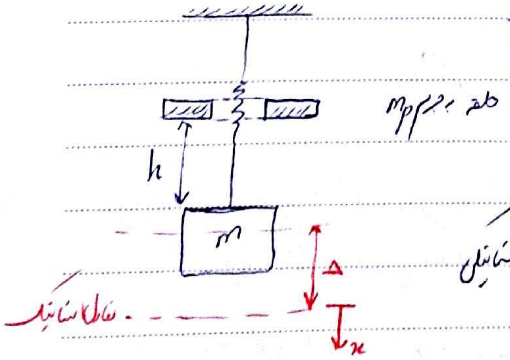
$d^2 = a^2 + b^2$

$$\overset{+}{\curvearrowright} \ \Sigma M_O = I_O\ddot{\theta} \Rightarrow -mg(b\cos\theta + a\sin\theta) + mg(b\cos\theta - a\sin\theta) = 2md^2\ddot{\theta}$$

$$-2mga\theta = 2md^2\ddot{\theta} \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{ga}{d^2}\theta = 0 \ , \ \omega_n = \sqrt{\frac{ga}{d^2}}$$

در حالت حدی $b \to 0$: $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{a}}$ (همان آونگ ساده به طول a)

مثال : حلقه به جرم m_p از ارتفاع h رها می‌شود ، بیشترین دامنه نوسان را بیابید
(بعد از برخورد m_p به m می‌چسبد)



تعادل استاتیکی : $mg = k\Delta$

$$(m+m_p)g - k(x+\Delta) = (m+m_p)\ddot{x}$$

Subject

Date

12

$\Rightarrow (m+m_p)\ddot{x} + kx = m_p g \rightsquigarrow x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

همگن   خصوصی

$x_h(t) = C_1\cos(\omega_n t) + C_2\sin(\omega_n t)$

$x_p(t)$: $x = A \xrightarrow{subs} A = \dfrac{m_p g}{k} = x_p$

$$\Rightarrow x(t):\ x(t) = C_1\cos(\omega_n t) + C_2\sin(\omega_n t) + \frac{m_p g}{k}$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = ? \end{cases}$$

زور دینامیک !!

مومنتوم خطی : $G|_a = G|_b \Rightarrow 0 + m_p(\sqrt{2gh}) = (m+m_p)\dot{x}(0) \rightarrow \dot{x}(0) = \dfrac{m_p\sqrt{2gh}}{m+m_p}$

قبل از برخورد   بعد از برخورد   صرف نظر از c

شرایط اولیه : $C_1 = \dfrac{-m_p g}{k}$, $C_2\omega_n = \alpha$ محتوی فرکانس ضربه شامل همه فرکانس‌ها طی می‌شود چون بی‌نهایت است ولی چون در زمان

X_{max} : راه یافتن $\dot{x}(t) = 0 \longrightarrow t = t_{max} \xrightarrow{subs} x_{max}$ بسیار کوتاه وارد می‌شود مشکل ندارد

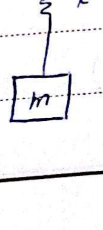
$\longrightarrow \dfrac{m_p g}{k} + \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ روش دوم

روش انرژی : بسیاری از اوقات در ظاهر مسئله تعداد درجه آزادی زیادی دارد ولی این درجات مستقل نیستند و به دلیل قیود هندسی

مثلاً سیستم در واقع یک درجه آزادی است، در این نوع مسائل یک درجه آزاد استفاده از روش انرژی توصیه می‌شود .

$T + U = cte \Rightarrow \dfrac{d}{dt}(T+U) = 0 \longrightarrow$ معادله حاکم

مثال :



$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ / $U = \frac{1}{2}kx^2$

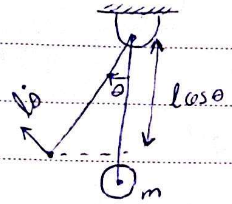
mg را نه سیستم چون با جابجایی st در دینامیک حذف می‌شود.

$\dfrac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \rightarrow m\cancel{\dot{x}}\ddot{x} + kx\cancel{\dot{x}} = 0$

$\rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$

PAPCO

مثال :



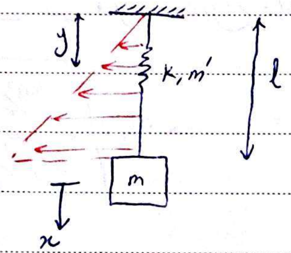
$$T = \frac{1}{2} m (l\dot\theta)^2$$

$$U = mgl(1-\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \longrightarrow ml^2 \dot\theta \ddot\theta + mgl \sin\theta \dot\theta = 0$$

$$\longrightarrow \ddot\theta + \frac{g}{l}\theta = 0$$

مثال : فنر به طول l جرم m' داشته باشد



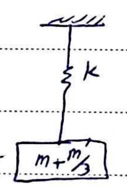
فرض توزیع خطی سرعت در امتداد طول فنر

$$\rho = \frac{m'}{l} \qquad U = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{v}{\dot x} = \frac{y}{l} \Rightarrow T = \frac{1}{2} m\dot x^2 + \frac{1}{2}\int_0^l (\rho\, dy)\left(\frac{\dot x y}{l}\right)^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}\left[m + \frac{m'}{3}\right]\dot x^2$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \Rightarrow \left(m + \frac{m'}{3}\right)\ddot x + kx = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + m'/3}}$$

جرم مؤثر فنر $= \frac{m'}{3}$



جرم مؤثر سیستم

$$m_{eff}\ddot x + k_{eff} x = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}}$$

نکته : در برخی مسائل به ظاهر چند درجه آزادی اند ولی به علت قیود هندسی یک درجه آزادی است که می‌توان معادله‌ی کلی

سیستم را به صورت زیر نوشت :

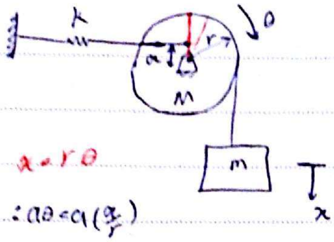
$$m_{eff}\ddot x + k_{eff} x = 0 \quad \text{یا} \quad I_{eff}\ddot\theta + k_{eff}\theta = 0$$

پیچشی

Subject

Date

مثال :



$x = r\theta$

جابجایی فنر : $a\theta = a\left(\frac{x}{r}\right)$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[m + \frac{1}{2} M r^2 \cdot \frac{1}{r^2}\right] \dot{x}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right) \dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2} k (a\theta)^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{ax}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{ka^2}{r^2}\right) x^2$$

نکته : اگر در یک سیستم وزن یک المان حاملی توسط یک فنر تحمل شود ، $mg\Delta h$ آن المان در U ظاهر نمی‌شود

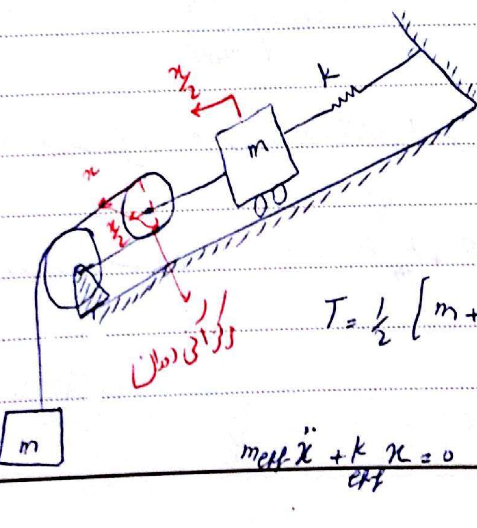
$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \longrightarrow \underbrace{\left(m + \frac{M}{2}\right)}_{m_{eff}} \ddot{x} + \underbrace{\frac{ka^2}{r^2}}_{k_{eff}} x = 0 \Longrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{ka^2/r^2}{m + M/2}}$$

نوشتن بر حسب θ :

$$T = \frac{1}{2}\Big[\overbrace{mr^2 + J_0}^{I_{eff}}\Big]\dot{\theta}^2 \Longrightarrow I_{eff}\ddot{\theta} + k_{eff}\theta = 0$$

$$U = \frac{1}{2}\underbrace{(ka^2)}_{k_{eff}}\theta^2 \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{ka^2}{mr^2 + \frac{Mr^2}{2}}}$$

مثال :



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2$$

$$U = \frac{1}{2} k \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left[m + \frac{m}{4}\right]\dot{x}^2 \quad , \quad U = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{4}\right) x^2$$

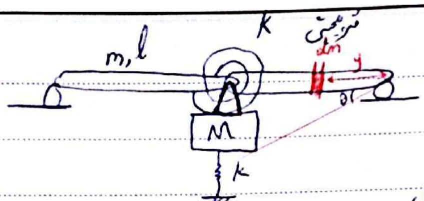
$$m_{eff}\ddot{x} + k_{eff} x = 0 \quad / \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k/4}{m + m/4}}$$

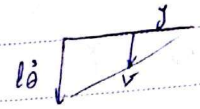
مرتبه او

Subject

Date

مثال :





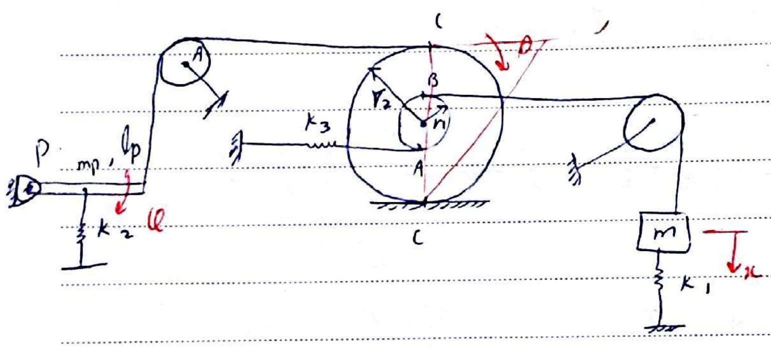
$$\rho = \frac{m}{l} \qquad \frac{v}{l\dot{\theta}} = \frac{y}{l}$$

$$T = \frac{1}{2} M (l\dot{\theta})^2 + 2 \times \frac{1}{2} \int_0^l (\rho\, dy)(y\dot{\theta})^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[Ml^2 + 2 \times \frac{1}{3}(\rho l)\, l^2\right]\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[Ml^2 + \frac{2}{3} ml^2\right]\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_t \theta^2 + \frac{1}{2} k (l\theta)^2 \quad , \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_t + kl^2}{Ml^2 + \frac{2}{3} ml^2}}$$

مثال :



$$x = x_B = (r_1 + r_2)\theta \quad , \quad x_C = 2r_2\theta = l_p \varphi$$

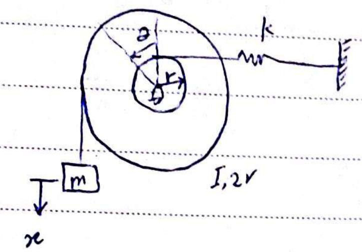
$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{I_p}_{\frac{1}{3} m_p l^2} \dot{\varphi}^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{l_p}{2}\varphi\right)^2 + \frac{1}{2} k_3 \left((r_2 - r_1)\theta\right)^2$$

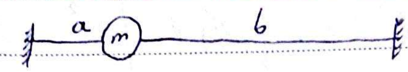
$x, \varphi \rightarrow \theta$ برحسب :

$$T = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{m(r_1+r_2)^2 + I_C + I_p\left(\frac{2r_2}{l_p}\right)^2}_{I_{eff}}\Big]\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{k_1(r_1+r_2)^2 + k_2 r_2^2}_{k_{eff}}\Big]\theta^2$$

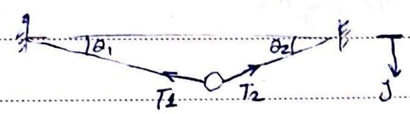


مثال:



$mg \ll$ کشش کابل

$w_n = ?$



$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow T_2 \cos\theta_2 = T_1 \cos\theta_1$ θ_2 , θ_1 کوچک

$T_2 = T_1 = T$

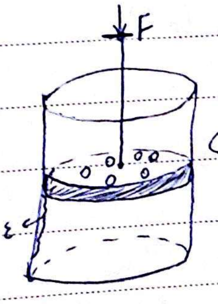
$$\Sigma F_y = m\ddot{y} \Longrightarrow -T(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) = m\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \begin{rcases} \tan\theta_1 = \theta_1 = \frac{y}{a} \\ \tan\theta_2 = \theta_2 = \frac{y}{b} \end{rcases} \Longrightarrow -T\left(\frac{y}{a} + \frac{y}{b}\right) = m\ddot{y} \Longrightarrow m\ddot{y} + \underbrace{\left(\frac{T}{a} + \frac{T}{b}\right)}_{k \text{ معادل}} y = 0$$

دو فنر موازی

$$\Longrightarrow k_{\text{کابل}} = \frac{T}{l}$$

میرایی:

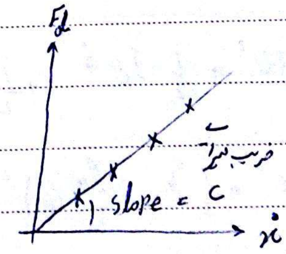


نیروی مقاوم به حرکت $F_d \propto -\dot{x}$

از سمت میرایی روغن

$c = f(\mu, \varepsilon, \dots)$

پارامترهای هندسی ...



$\Rightarrow F_d = -c\dot{x}$

(viscous damping   میرایی ویسکوز)

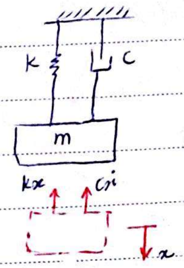
میرایی غیرخطی هم داریم!!

$[C] = \frac{N \cdot s}{m}$

Subject بنام او
Date ۲۴

فصل ۵

(نیروهای فنر و دمپر در یک جهت اند
چون هر دو مقاوم اند)



Dyn Eq

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \Rightarrow -kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow mD^2 + cD + k = 0 \rightarrow D_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

تعریف دمپر بحرانی : میزان میرایی که سبب تکراری شدن ریشه‌های معادله می‌شود

$$C_{cr} : c^2 - 4mk = 0 \rightarrow c = 2\sqrt{mk}$$

تعریف نسبت میرایی : $\xi = \frac{c}{c_{cr}}$

فرم مودال : $\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \overset{\omega_n^2}{\frac{k}{m}}x = 0$

$$\Rightarrow \frac{c}{m} = \frac{c}{c_{cr}} \cdot \frac{c_{cr}}{m} = \xi \cdot \frac{2\sqrt{mk}}{m} = 2\xi\omega_n$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$D^2 + 2\xi\omega_n D + \omega_n^2 = 0 \rightarrow D_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

I) $\xi < 1 \Rightarrow c < c_{cr}$: under damped $\Rightarrow D_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[C_1 \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t\right) + C_2 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t\right)\right]$$

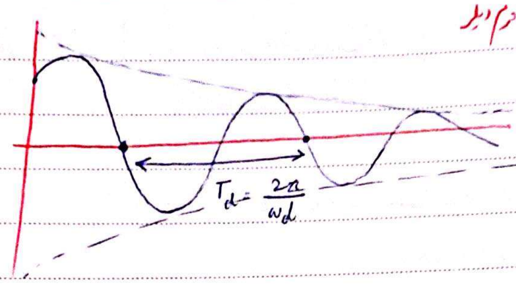
فرکانس نوسانات دمپ شده : $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ / $\omega_d < \omega_n$ $\quad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \rightarrow T_d > T_n$

PAPCO

برای ξ های کوچک : $\omega_d \simeq \omega_n$

Subject
Date

فرم دیگر : $x(t) = X_0 e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t - \varphi)$



$X_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$

بجز در علامت فازنس

مثلاً اینجا اشتباه بوده ام

کاهش لگاریتمی :

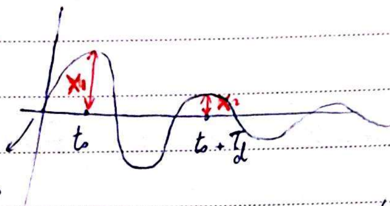
$\ln\left(\frac{x_0}{x_1}\right) = \delta$

$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \delta$

$\vdots$

$\ln\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = \delta$

$\ln\left(\frac{x_0}{x_n}\right) = n\delta$



$$x(t) = X_0 e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

$C_2 = 0 \rightarrow \varphi = 0$

$$\ln\frac{X_1}{X_2} = \ln\left(\frac{X_0 e^{-\xi\omega_n t_0} \sin(\omega_d t_0)}{X_0 e^{-\xi\omega_n (t_0 + T_d)} \sin(\omega_d (t_0 + T_d))}\right)$$

$$= \ln e^{\xi\omega_n T_d} = \xi\omega_n \cdot \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\Rightarrow \delta = \ln\frac{X_1}{X_2} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \xrightarrow{\xi \text{ خیلی کوچک}} \delta = 2\pi\xi$$

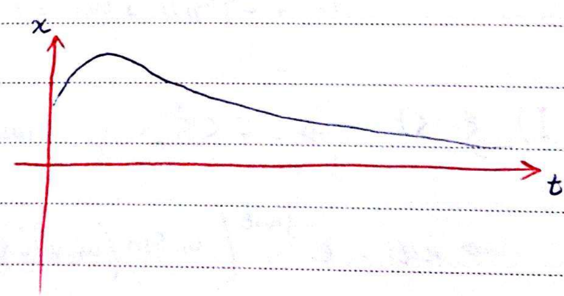
کاهش لگاریتمی فقط تابع ξ :

II) $\xi = 1 \Rightarrow$ Critically damped $\Rightarrow D_{1,2} = -\xi\omega_n = -\omega_n$ ریشه منفی حقیقی تکراری

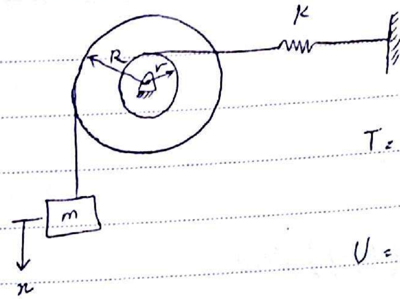
III) $\xi > 1 \Rightarrow$ over damped $\Rightarrow D_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ $\xi > 1$ ریشه منفی حقیقی مجزا

II) $x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t}$

III) $x(t) = C_1 e^{P_1 t} + C_2 e^{P_2 t}$



مثال: حل را از هر دو روش انجام دهید.



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2$$

$$U = \frac{1}{2} k \left(\frac{r x}{R}\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \Rightarrow m\ddot{x}\cancel{\dot{x}} + I\frac{\ddot{x}}{R}\frac{\cancel{\dot{x}}}{R} + k\left(\frac{rx}{R}\right)\left(\frac{r\cancel{\dot{x}}}{R}\right) = 0$$

$$\left(m + \frac{I_0}{R^2}\right)\ddot{x} + \left(k\frac{r^2}{R^2}\right)x = 0$$

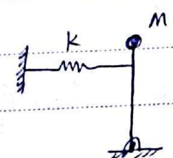
روش نیوتن :

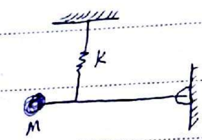
$$-T = mR\ddot{\theta}$$

$$-T = m\ddot{x} \quad , \quad \Sigma M_0 = I_0\ddot{\theta} \Rightarrow TR - K\Delta r = I_0\ddot{\theta}$$

$$x = R\theta \quad , \quad \Delta = r\theta \Rightarrow \quad -mR^2\ddot{\theta} - kr^2\theta = I_0\ddot{\theta} \Rightarrow \checkmark$$

مثال:

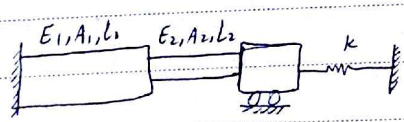




در حالت تعادل فنر از حالت طبیعی اش خارج می شود
پس mg را در نظر نمی گیریم

در حالت تعادل فنر از حالت
طبیعی اش خارج نشده است
پس mg را در نظر می گیریم

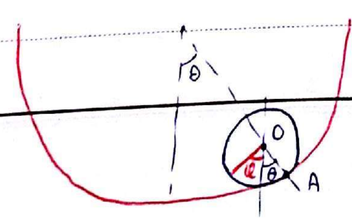
مثال:



$$k_1 = \frac{A_1E_1}{L_1} \qquad k_2 = \frac{A_2E_2}{L_2} \Rightarrow k_{eq} = k + \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

مثال:

φ سرعت زاویه ای دیسک



$$r(\varphi + \theta) = R\theta$$

$$\varphi = \left(\frac{R-r}{r}\right)\theta$$

$$\boxed{\dot{\varphi} = \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\theta}}$$

بنام او

Subject (20)
Date

در حالت پایدار معادله به فرم $m\ddot{x}+kx=0$ است ولی ناپایدار خیر

ناپایدار ←

روش دوم محاسبه   محاسبه‌ی سرعت مرکز از مرکز آنی دوران (مرکز انحنا) :

سرعت O : $(R-r)\dot{\theta} = r\dot{\varphi}$

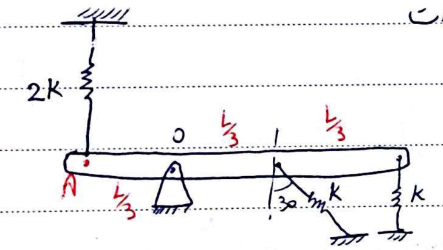
کاربرد : $T=\frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2 \quad / \quad U=-mg(R-r)\cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}mr^2\left(\left(\frac{R}{r}-1\right)\dot{\theta}\right)^2 - mg(R-r)\cos\theta\right]=0 \longrightarrow$$

بعد از مشتق گرفتن $\sin\theta \simeq \theta$

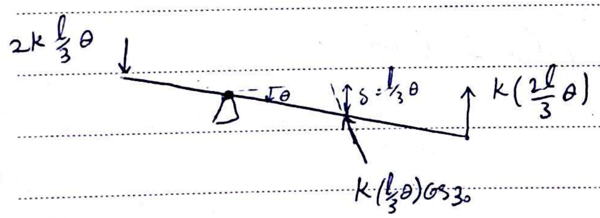
روش نیوتن $\Sigma M_A = I_A\ddot{\varphi} \longrightarrow -mgr\theta = \frac{3}{2}mr^2\left(\frac{R}{r}-1\right)\ddot{\theta}$

مثال ۵ : فنر زاویه دار ← ظاهر شدن $\cos^2$ در معادلات



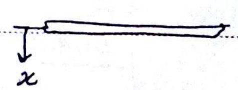
$$I_0\ddot{\theta} + 2k\left(\frac{l}{3}\theta\right)\frac{l}{3} + k\frac{l}{3}\theta\cos^2(30)\frac{l}{3} + \frac{2kl}{3}\theta\times\frac{2l}{3}=0$$

K یعنی معادل در نقطه‌ی A



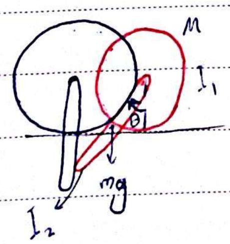
مثلاً اگر فنر معادل در نقطه‌ی A را خواسته بود

این مسئله را حل می‌کنیم



در مکان‌های مختلف m ، k مختلف داریم ولی $\sqrt{\frac{k}{m}}$ ثابت می‌ماند

مثال : $-mg\frac{l}{2}\theta = \left[I_1+Mr^2+I_2+m\left(r^2+\frac{l^2}{4}-\frac{2rl}{2}\cos\theta\right)\right]\ddot{\theta}$



TA پایان

به نام او

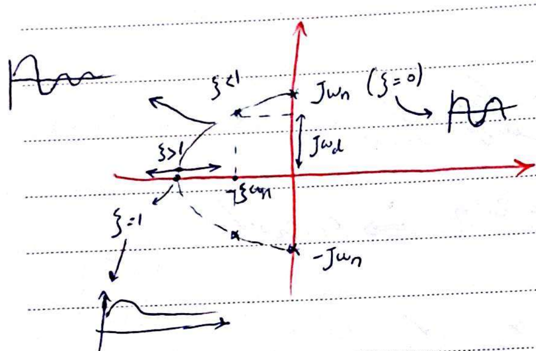
Subject
Date ㉑

مکان قرارگیری ریشه‌ها : $m-k-c$ sys

فرم نرمال : ⟶ $mD^2+CD+k=0 \equiv D^2+2\xi\omega_n D+\omega_n^2=0$

$D_{1,2}=-\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$: $\xi<1 \Rightarrow -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

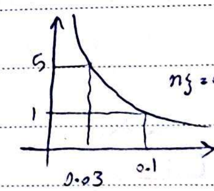
$Re^2+Im^2=\omega_n^2 \rightarrow$ دایره به شعاع ω_n



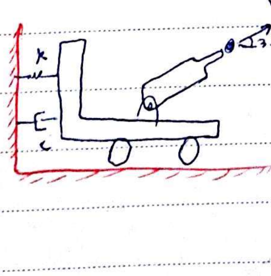
مثال : تعداد سیکل‌های لازم برحسب ξ که دامنه نوسان $m-k-c$ sys به نصف کاهش یابد.

$\delta=\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=\ln\frac{x_0}{x_1}$ ξ کم $\Rightarrow \delta=2\pi\xi$ * $\delta=\frac{1}{n}\ln\frac{x_0}{x_n}$

$2\pi\xi=\frac{1}{n}\ln 2 \longrightarrow n\xi=0.11$



* مثال :



$V=200\times\frac{2}{\sqrt{3}}$, 30°

کل جرم دو توپ $M=500\ kg$

گلوله $m=50\ kg$

$k=1\ \frac{kN}{m}$, $C=2000\ \frac{N.s}{m}$

$M\ddot{x}+C\dot{x}+kx=0$? تعداد سیکل , X_{max}

شرط $\Delta=0 \rightarrow C_{cr}=2\sqrt{mk}=2\sqrt{500\times10^3}$

$\xi=\frac{c}{c_{cr}}=\frac{2000}{1414}=1.41>1$ over damped

به نام دوست

22

Subject

Date

$$D_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad , \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{500}} = 1.4 \ \frac{rad}{s}$$

$$D_{1,2} = -1.41\,(1.41) \pm 1.41 \ \left\langle \begin{array}{l} -3.4 \\ -0.58 \end{array} \right.$$

$$x(t) = C_1 e^{-3.4t} + C_2 e^{-0.58t}$$

$C_1, C_2 = ?$ $\quad x(0) = 0$

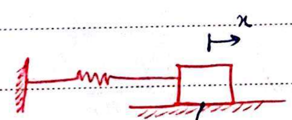
$$\dot{x}(0) = ? \longrightarrow \underset{\text{قبل شلیک}}{Gx} = \underset{\text{بعد از شلیک}}{Gx}$$

$$5_0\,(200) = 500\,(\dot{x}(0)) \longrightarrow \dot{x}(0) = 20 \ \frac{m}{s} \Longrightarrow C_1, C_2 = \checkmark$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 0 \longrightarrow t_{max} = \checkmark \xrightarrow{\text{subs}} x_{max} = \checkmark$$

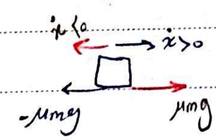
اصطکاک خشک :

Dry friction (Coloumb)



μ ضریب اصطکاک

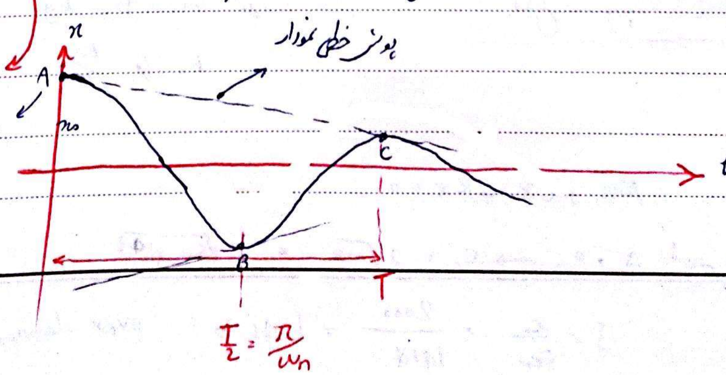
رفت و برگشت



$$\begin{cases} \dot{x} > 0 & : -\mu mg \\ \dot{x} < 0 & : \mu mg \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + kx = \pm \mu mg \ \left\langle \begin{array}{ll} \dot{x} < 0 & : \mu mg \\ \dot{x} > 0 & : -\mu mg \end{array} \right.$$

به دلیل دو ضابطه‌ای بودن گاهی غیرخطی خوانده می‌شود



$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_n}$$

P4PCO

برابر او

(23)

Subject

Date

$A \to B \; : \dot{x} < 0 \qquad m\ddot{x} + kx = \mu mg$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t) + \frac{\mu mg}{k}$$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \longrightarrow C_2 = x_0 - \dfrac{\mu mg}{k} \\ \dot{x}(0) = 0 \longrightarrow C_1 = 0 \qquad x(t)_{A\to B} = \left(x_0 - \dfrac{\mu mg}{k}\right)\cos(\omega_n t) + \dfrac{\mu mg}{k} \end{cases}$$

$B \to C \; : \dot{x} > 0 \qquad m\ddot{x} + kx = -\mu mg$

$$x(t) = C_3 \sin(\omega_n t) + C_4 \cos(\omega_n t) - \frac{\mu mg}{k}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(\overset{\pi/\omega_n}{T/2}) = 0 \longrightarrow C_3 = 0 \\ x(T/2)_{B-C} = x(T/2)_{A-B} \end{cases}$$

$$x_B = \left(x_0 - \frac{\mu mg}{k}\right)\cos\left(\omega_n \frac{\pi}{\omega_n}\right) + \frac{\mu mg}{k} = \frac{2\mu mg}{k} - x_0$$

$$x_B = -C_4 - \frac{\mu mg}{k} = \frac{2\mu mg}{k} - x_0 = x_B \Longrightarrow -C_4 = \frac{3\mu mg}{k} - x_0$$

$$\Longrightarrow x(t) = \left(x_0 - \frac{3\mu mg}{k}\right)\cos(\omega_n t) - \frac{\mu mg}{k}$$

$|x_C| = x_0 - \dfrac{4\mu mg}{k}$ $\qquad$ $/\!/ \; |x_B| = x_0 - \dfrac{2\mu mg}{k}$

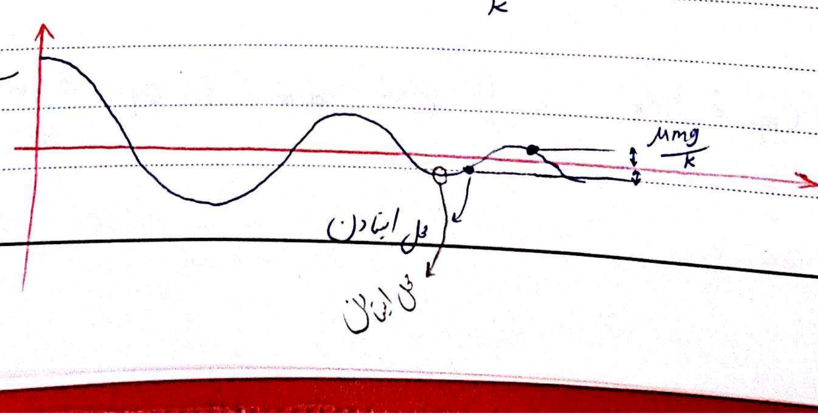
$\downarrow t = T = \dfrac{2\pi}{\omega_n}$

کاهش نمودار خطی است

Stop قله : $\quad kx < \mu mg \longrightarrow x < \dfrac{\mu mg}{k}$

$x < \dfrac{\mu_s mg}{k}$

تخمین قله



PAPCO

Subject
Date

$A \rightarrow B$: work-energy $\Delta T = 0$

$$w = -\mu mg(X_0 + X_1) = \frac{1}{2}k(X_0^2 - X_1^2) \Rightarrow \Delta x = \frac{2\mu mg}{k}$$

1 سیستم با فرکانس طبیعی ω_n نوسان می‌کند

2 کاهش دامنه خطی بود و در یک دوره به اندازه $\frac{4\mu mg}{k}$ کاهش می‌یابد

3 برای $kx < \mu mg$ حرکت متوقف می‌شود

4 میرایی معادل ویسکوز آن ← جلسه بعد

دمپینگ معادل ویسکوز: جهت سهولت در کار کردن با میرایی خشک، معادل میرایی ویسکوز آن را ارائه می‌دهیم (مدل)

اتلاف انرژی:

$$\int_0^T \mu mg\,dx = \int_0^T (\underbrace{c_{eq}\dot{x}}_{F_d})\,dx \quad \leftarrow \quad w_\mu = w_d$$

w_μ ← کار انجام شده توسط اصطکاک خشک

از لحاظ ریاضی صفر است ولی از لحاظ فیزیکی خیر

$$x = X\sin(\omega t) \Rightarrow dx = X\omega\cos(\omega t)\,dt \quad , \quad \dot{x} = X\omega\cos(\omega t) \qquad dx = \dot{x}\,dt$$

$$4\int_0^{\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega}} \mu mg\,dx = 4\mu mg x$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} c_{eq}(X\omega\cos(\omega t))^2\,dt = \pi c_{eq} X^2\omega \Rightarrow c_{eq} = \frac{4\mu mg}{\pi X\omega}$$

دامنه حرکت

مثال: معادل سازی برای $F = a\dot{x}^2$.

$$\underbrace{\int^{2\pi}(c_{eq}\dot{x})\,dx}_{\pi c_{eq}X^2\omega} = \underbrace{\int_0^{2\pi}(a\dot{x}^2)\,dx}_{\text{جزء به جزء}} \Rightarrow c_{eq} = \frac{8a\omega X}{3\pi}$$

بنام دوست

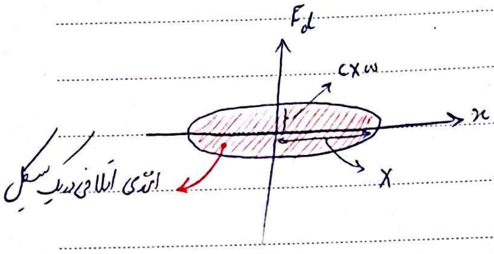
25

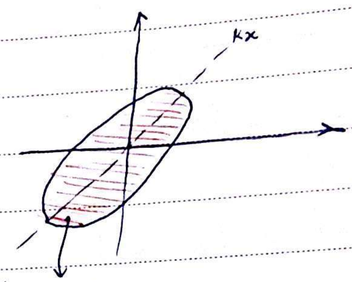
نمودارهای اتلاف انرژی :

$$F_d = -c\dot{x}$$

$$x = X\sin(\omega t) \Rightarrow F_d = -cX\omega\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow |F_d| = cX\omega\sqrt{1-\left(\frac{x}{X}\right)^2} \Rightarrow \left(\frac{|F_d|}{cX\omega}\right)^2 + \left(\frac{x}{X}\right)^2 = 1$$



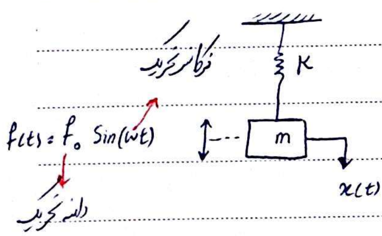


انرژی اتلافی در یک سیکل در حضور فنر

---

chap. 3) Forced Vibration

ارتعاش اجباری سیستم یک درجه آزادی بدون میرایی :



سازه در ارتعاش اجباری با همان فرکانس تحریک نوسان می کند

$$x(t) = X_0 \sin(\omega t)$$

هر تحریک پریودیک $\xrightarrow{\text{بسط فوریه}}$ Σ هارمونیک

* $m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t)$ / $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$$\Rightarrow x(t) = C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t) + X_0 \sin(\omega t) + X_0' \cos(\omega t)$$

* جایگذاری x_p در $\Rightarrow (k - m\omega^2) X_0 \sin\omega t + (k - m\omega^2)\cancel{X_0'}\,0 \cos\omega t = F_0 \sin\omega t$

دامنه ارتعاشات اجباری (ماندگار) $X_0 = \dfrac{F_0}{k - m\omega^2}$