به نام دوست

Subject (25)

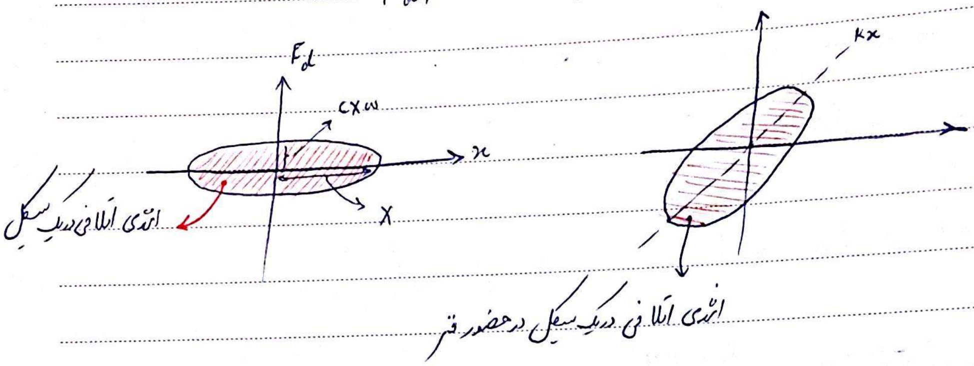
Date

بحث درباره‌ی اتلاف انرژی :

$F_d = -c\dot{x}$

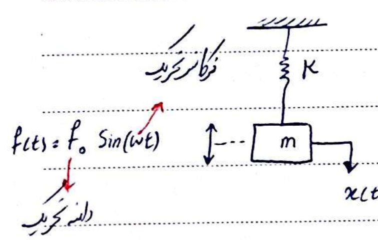
$x = X\sin(\omega t) \Rightarrow F_d = -cX\omega\cos(\omega t)$

$\Rightarrow |F_d| = cX\omega\sqrt{1-\left(\frac{x}{X}\right)^2} \Rightarrow \left(\frac{|F_d|}{cX\omega}\right)^2 + \left(\frac{x}{X}\right)^2 = 1$



chap. 3) Forced Vibration

ارتعاش اجباری سیستم یک درجه آزادی بدون میرایی :



سازه در ارتعاش اجباری با همان فرکانس تحریک نوسان می‌کند

$x(t) = X_0 \sin(\omega t)$

هر تحریک پریودیک $\xrightarrow{\text{بسط فوریه}}$ $\sum$ هارمونیک

* $m\ddot{x} + kx = F_0\sin(\omega t)$ / $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

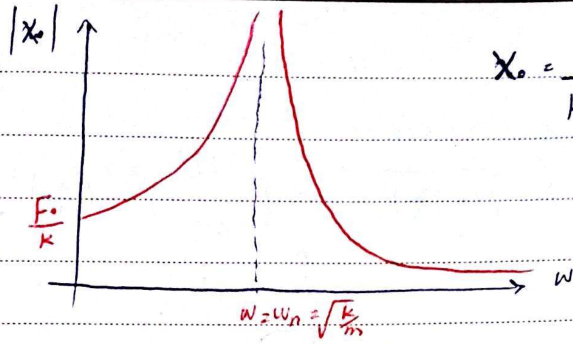
$\Rightarrow x(t) = C_1\sin(\omega_n t) + C_2\cos(\omega_n t) + X_0\sin(\omega t) + X_0'\cos(\omega t)$

* جایگذاری x_p در $\Rightarrow (k - m\omega^2)X_0 \sin\omega t + (k - m\omega^2)\cancel{X_0'}^{\,0}\cos\omega t = F_0 \sin\omega t$

دامنه ارتعاشات اجباری (ماندگار) $X_0 = \dfrac{F_0}{k - m\omega^2}$

پاسخ فرکانسی :

$$X_0 = \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$



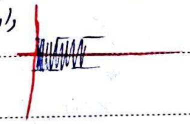
در فرکانس پایین $(\omega \to 0) \Rightarrow \left(X_0 \to \frac{F_0}{k}\right)$

در فرکانس بالا $(\omega \to \infty) \Rightarrow (X_0 \to 0)$

$F_0 \sin(\omega t)$ ، ω کوچک → m-k sys → $X_0 \sin(\omega t)$ ، دامنه حدود $\frac{F_0}{k}$

$F_0 \sin(\omega t)$ ، $\omega \simeq \omega_n$ → m-k sys → $X_0 \sin(\omega t)$ ، دامنه خیلی بزرگ (∞)

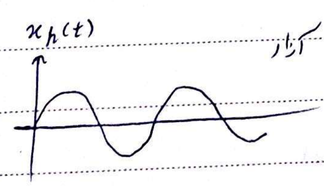
$F_0 \sin(\omega t)$ ، ω بزرگ → m-k sys → $X_0 \sin(\omega t)$ ، دامنه کوچک



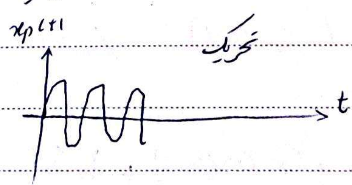
پاسخ کل

$$x(t) = C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t) + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \sin(\omega t)$$

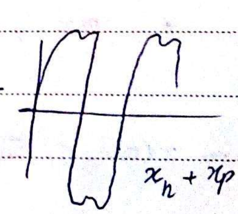
پیدا کردن C_1 ، C_2 از شرایط اولیه ← برای این کار تحریک را هم در نظر بگیرید یعنی در کل $x(t)$ قرار دهید.



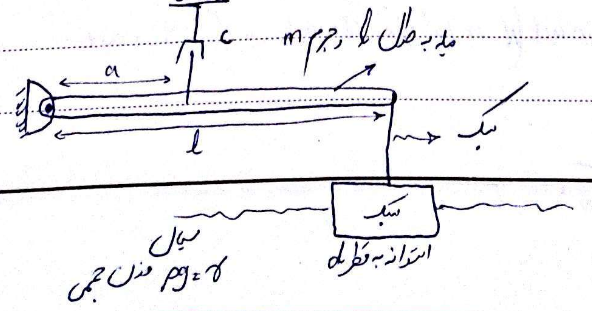
+



=



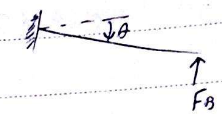
مثال :



$C_{cr} = ?$

Subject بنام او
Date (27)

فنر ≡ آب ← وزن میله را تحمل می‌کند
بر وزن در معادلات نمی‌آید

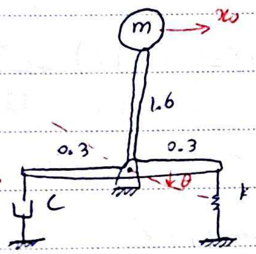


$$\Sigma M_o = I_o\ddot\theta \xrightarrow[Eq]{Dyn} -C(a\dot\theta)\times a - \Big[\underbrace{\Big(\frac{\pi d^2}{4}\cdot l\theta\Big)}_{\text{حجم داخل رفته آب}}\gamma\Big] l = I_o\ddot\theta$$

$$\Rightarrow I_o\ddot\theta + Ca^2\dot\theta + \frac{\gamma\pi l^2 d^2}{4}\theta = 0$$

$$C_{cr} : \Delta = 0 \Rightarrow (Ca^2)^2 - I_o\gamma\pi l^2 d^2 = 0 \longrightarrow C_{cr} = ✓$$

مثال :



$k = 1000\ \frac{N}{m}$ ، $C = 2000\ \frac{N.s}{m}$ ، $m = 10\ kg$

اگر گلوله 10 cm از حالت تعادل خارج کرده و رها کنیم بعد از چه مدتی اولین بار به وضعیت تعادل باز می‌گردد؟

← وزن توسط فنر تحمل نمی‌شود بر وزن در معادلات اثر می‌آید.

$$\Sigma M_o = I_o\ddot\theta \Rightarrow -k(0.3\theta)(0.3) - C(0.3\dot\theta)(0.3) + mg(1.6\theta) = m(1.6)^2\ddot\theta$$

$$\Rightarrow 25.6\ddot\theta + 180\dot\theta + 740\theta = 0 \Rightarrow \ddot\theta + \underbrace{7\dot\theta}_{2\xi\omega_n} + \underbrace{29\theta}_{\omega_n^2} = 0$$

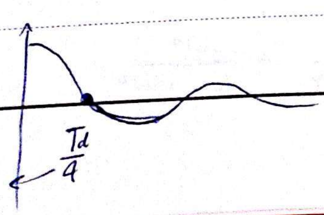
$$\rightarrow \omega_n = 5.4 \quad , \quad \xi = 0.65 < 1$$

$$x(t) = X_0 e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t - \varphi) \qquad (x = l\theta = 1.6\theta)$$

یا $\theta(t) = \theta_0 e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t - \varphi)$

$$\begin{cases} x(0) = 0.1 \longrightarrow -X_0\sin\varphi = 0.1 \\ \dot x(0) = 0 \longrightarrow X_0[\xi\omega_n\sin\varphi + \omega_d\cos\varphi] = 0 \end{cases} \Longrightarrow X_0, \varphi = ✓$$ دو معادله و دو مجهول

جواب مسئله ⇐ $x = 0$ (برای پیدا کردن اولین جا)

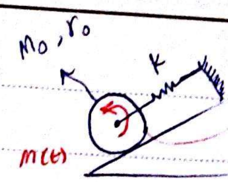


PAPCO

به نام او

Subject
Date

وزنش توسط تر تحمل می‌شود.



مثال : غلتش کامل . گشتاور تحریک

$M(t) = 300 \sin 20t$

$\theta(t) = ?$, $m_0 = 8\,kg$, $r_0 = 1\,m$, $J_0 = 4\,kg\,m^2$, $k = 125\,N/m$

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \dot\theta(0) = 0.2\ \frac{rad}{s} \end{cases}$$

$$\Sigma M_c = J_c \ddot\theta \Rightarrow (-k r_0 \theta) r_0 + M(t) = J_c \ddot\theta$$

$$J_c \ddot\theta + k r_0^2 \theta = 300 \sin(20t)$$

$\omega_{\text{تحریک}} = 20\ \frac{rad}{s}$

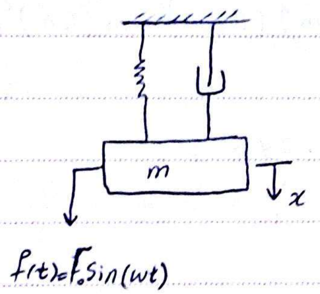
$$12\ddot\theta + 125\theta = 300 \sin 20t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{125}{12}} = 3.2 \Rightarrow \theta(t) = C_1 \sin(3.2t) + C_2 \cos(3.2t) + \frac{300}{125 - 12(20)^2} \sin(20t)$$

$$\theta(0) = 0 \longrightarrow C_2 = 0$$

$$\dot\theta(0) = 0.2 \longrightarrow 3.2 C_1 - 20(0.064) = 0 \longrightarrow C_1 = \checkmark$$

ارتعاش اجباری سیستم یک درجه آزادی با دمپینگ :



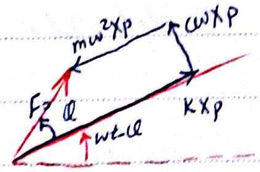
$$\Rightarrow m\ddot x + c\dot x + kx = F_0 \sin(\omega t)$$

$$\underbrace{x(t)}_{\text{کل}} = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x_h(t) = X_0 e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t - \varphi)$$

$$x_p(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) = X_p \sin(\omega t - \varphi_p) \rightarrow$$ جایگذاری یا روش ترسیم بردار

جایگذاری $x_p(t)$: $k X_p \sin(\omega t - \varphi_p) + c\omega X_p \cos(\omega t - \varphi_p) - m\omega^2 X_p \sin(\omega t - \varphi_p) = F_0 \sin(\omega t)$



$$\Rightarrow \left[(k - m\omega^2) X_p\right]^2 + \left[c\omega X_p\right]^2 = F_0^2$$

$$\tan\varphi_p = \frac{c\omega X_p}{(k - m\omega^2) X_p} = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}} , \boxed{\varphi_p = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2}}$$

به نام دوست

Subject 29
Date

در صفحه قبل بوده اند

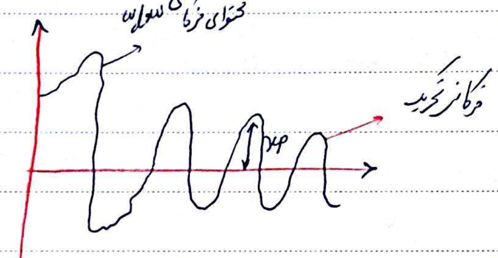
$$\Rightarrow x(t) = X_0 e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t-\varphi_0) + X_p\sin(\omega t-\varphi_p)$$

X_0 , φ_0 از شرایط اولیه $x(0)$ و $\dot{x}(0)$ به دست می آیند. (کل $x(t)$ را در شرایط اولیه جایگذاری می کنیم)

* در زمان های شروع (گذرا) هر دو فرکانس ω_d و ω وجود دارند ولی در زمان های ماندگار ($t\to\infty$) تنها با فرکانس تحریک نوسان می کنند و دامنه پاسخ ماندگار

$$x(t\to\infty) = x_{ss} = X_p$$

Steady state



در تحلیل ها برای ترسیم باید بی بعد کنید

ترسیم: ← بی بعد ساز

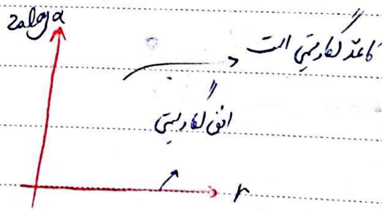
$$\frac{m\omega^2}{k} = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = r^2$$

نسبت فرکانسی

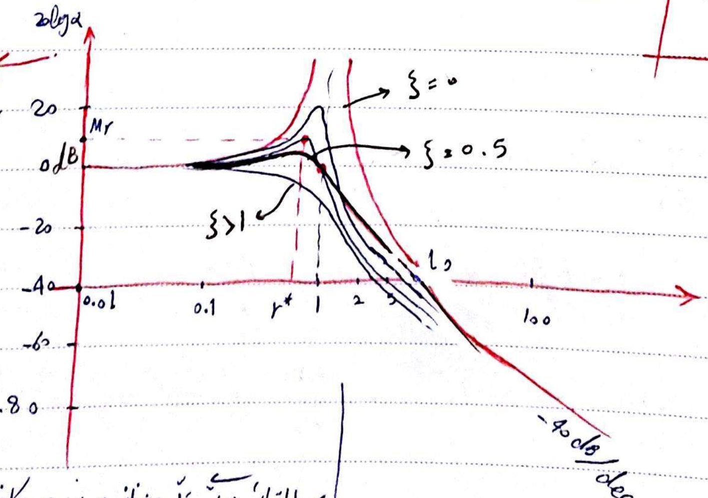
$$\frac{c\omega}{k} = \xi\times 2\times\sqrt{\frac{m}{k}}\,\omega = 2\xi r$$

$$\to \alpha = \frac{kX_p}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

$20\log\alpha$ (واحد dB)



این رفتار برای ξ های کوچک صادق است برای $\xi<0.707$



① $\xi=0$, $r\ll 1$ low freq

② $\xi=0$, $r\simeq 1$ $(\omega\simeq\omega_n)$

③ $\xi=0$, $r\gg 1$ (high freq)

↳ $20\log\alpha \approx 20\log\frac{1}{r^2} = -40\log r$

شیب

با افزایش ξ برای قله رزونانس در نسبت فرکانسی پایین تر رخ می دهد.

نکته: یک سیستم مرتبه دو وقتی میرایی اش را زیاد کنیم مانند سیستم یک اول می شوند

بنام او

Subject (3) √

Date

در سیستم های ارتعاشی :

1 فرکانس طبیعی (ω_n) $\qquad \omega_n = \omega_n(k, m)$

2 فرکانس طبیعی میرا شده (ω_d) $\qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

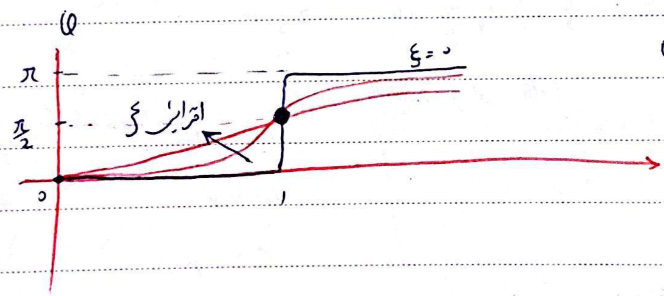
3 فرکانس تحریک (ω)

4 فرکانس قله (پیک) رزونانس (ω_r) $\qquad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$

r^* : $\quad \frac{d\alpha}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_r}{\omega_n} = r^* = \sqrt{1-2\xi^2} \Rightarrow \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$

$\omega_r < \omega_d < \omega_n \xrightarrow{\xi \ll 1} \omega_r \simeq \omega_d \simeq \omega_n$ در حالت کم میرا، رزونانس در ω_n رخ می دهد

قله رزونانس : $\quad M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \xrightarrow{\xi \ll 1} M_r \simeq \frac{1}{2\xi}$: sharpness (تیزی پاسخ)



$\varphi_p = \tan^{-1}\frac{c\omega}{k-m\omega^2} = \tan^{-1}\frac{2\xi r}{1-r^2}$

at low freq : $\alpha \simeq 1 = \frac{kX_p}{F_0} \rightarrow X_p = \frac{F_0}{k}$

at $\omega \simeq \omega_r$: $\alpha \rightarrow$ large : $\frac{kX_p}{F_0} = \alpha = M_r \Rightarrow X_p = \frac{F_0 M_r}{k}$ بزرگ

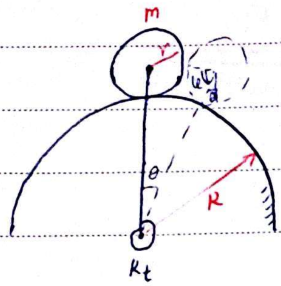
at high freq : $20\log\alpha = -60 \rightarrow \alpha = 10^{-3} \Rightarrow \frac{kX_p}{F_0} =$ کوچک $\Rightarrow X_p =$ کوچک

به نام او

ثنا ای

Subject

Date (31)



$r\varphi = R\theta$, $\omega = \dot{\varphi} + \dot{\theta} = \left(\frac{R}{r}+1\right)\dot{\theta}$

نسبت به یک خط ثابت θ گرفتم

$$T = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} m r^2 \left(\left(\frac{R}{r}+1\right)\dot{\theta}\right)^2$$

$$U = \frac{1}{2} k\theta^2 + mg(R+r)\cos\theta$$

چون در حالت تعادل فنر تغییر شکل نداده

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(T+U) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} m r^2 \left(\frac{R}{r}+1\right)^2 \ddot{\theta}\cancel{\dot{\theta}} + k\theta - mg(R+r)\sin\theta = 0$$

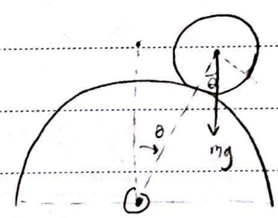
$$\theta \ll \Rightarrow \frac{3}{2} m r^2 \left(\frac{R}{r}+1\right)^2 \ddot{\theta} + \underbrace{\left(k - mg(R+r)\right)}_{A}\theta = 0$$

حل با روش نیوتن برای جلسه بعد

$A > 0 \rightsquigarrow$ پایدار

$A < 0 \rightsquigarrow$ ناپایدار

روش نیوتن

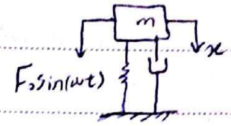


$$\sum \vec{M}_c = I_c(\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}) = I_c\left(\frac{R}{r}+1\right)\ddot{\theta}$$

$$-k\theta + mgr\sin\theta = \frac{3}{2} m r^2 \left(\frac{R}{r}+1\right)\ddot{\theta}$$

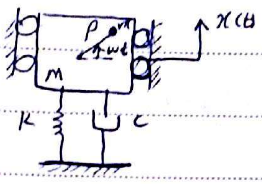
TA ثنا

1) مسئله پایه



$$X_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}$$

2) unbalance mass → ناترازی دوار



M : جرم کل مجموعه

m : جرم ناترازی ⟹ دامنه ارتعاش ماندگار؟ (X_p)

ω : ثابت

$$\Sigma F_x = (M-m)\ddot{x} + m\frac{d^2}{dt^2}\left(x+\rho\sin(\omega t)\right)$$

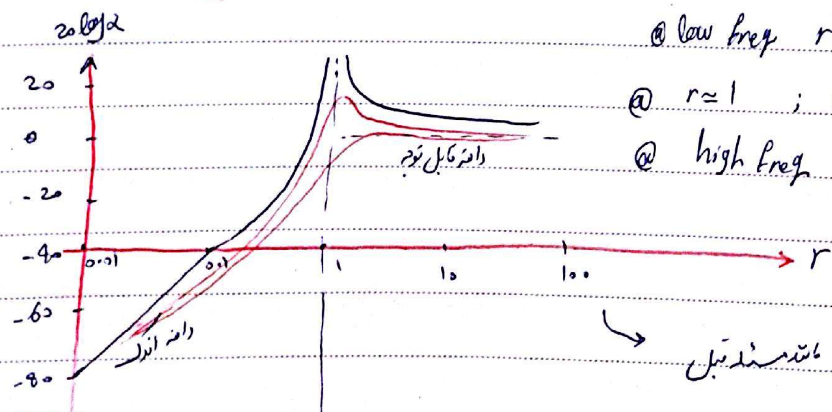
$$\Rightarrow -kx - c\dot{x} = (M-m)\ddot{x} + m\left(\ddot{x} - \rho\omega^2\sin(\omega t)\right)$$

$$\Rightarrow M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\rho\omega^2 \sin(\omega t)$$

در مقایسه با مسئله ① داریم $F_0 = m\rho\omega^2$

$$x_p = \frac{m\rho\omega^2/k}{\sqrt{\left(\frac{k-M\omega^2}{k}\right)^2+\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}} \xrightarrow{\text{بی بعدسازی}} \frac{k}{M}=\omega_n^2 ,\ \frac{\omega}{\omega_n}=r \Rightarrow \frac{X_p}{\rho} = \frac{\frac{m}{M}\,\frac{\omega^2}{k}M}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

$$\Rightarrow (*)\ \underbrace{\frac{X_p}{\rho}\,\frac{M}{m}}_{\alpha} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$



@ low freq $r \ll 1$: $20\log\alpha \simeq 20\log r^2 = 40\log r$

@ $r \simeq 1$; $20\log\alpha = \infty$

@ high freq : $r \gg 1$: $20\log\alpha = 0$

→ مانند فیلتر Q

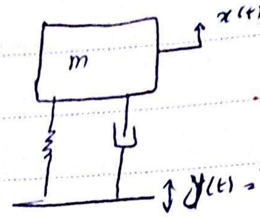
medium and high pass filter

بنام او

Subject 33 ✓

Date

3) Support motion → تحریک پایه



$y(t) = Y_0 \sin(\omega t)$ ← تحریک پایه داریم

پاسخ زمانی ؟؟

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \Rightarrow -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y}) = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$ (حل در دستگاه مطلق)

در دستگاه نسبی: $m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = mY_0\omega^2 \sin\omega t \Rightarrow$ مانند مسئله اول داریم فقط $F_0 = mY_0\omega^2$

Z_p نسبی ماندگار $\xRightarrow{\text{مقایسه با } *}$ $$\frac{Z_p}{Y_0} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (**)$$

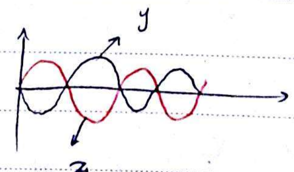
$$\Rightarrow \underbrace{X_p}_{\text{ماندگار}} = Y_0 + Z_p$$

if $r \ll 1 \Rightarrow \frac{Z_p}{Y_0} = r^2 = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \Rightarrow Z_p\omega_n^2 = Y_0\omega^2$

دامنه شتاب نسبی ← شتاب سنج — دامنه شتاب تحریک ← زمین

کاربرد در زلزله‌سنج ← در کتاب خوانده شود

if $r \gg 1$ $\begin{cases} \frac{Z_p}{Y_0} = 1 \\ \varphi = 180 \end{cases}$



از (**)

$y(t) = Y_0 \sin\omega t$, $z(t) = \cancel{z_h(t)} + Z_p \sin(\omega t - \varphi) \rightarrow x(t)$ ✓

P4PCO

به نام دوست

Subject (34) ✓

Date

روش مطلق :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky = Y_0\left(k\sin(\omega t) + c\omega\cos(\omega t)\right)$$

$$= \underbrace{\boxed{Y_0\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}}_{F_0}\ \sin(\omega t - \psi_0) \quad , \quad \psi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k}\right)$$

① در مقایسه با مسئله
$$X_p = \frac{Y_0\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \quad , \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

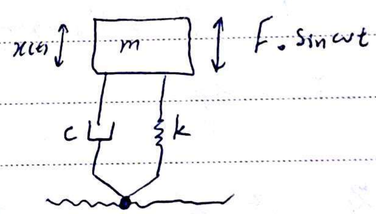
به علت تحریک

$$\Longrightarrow x(t) = \underbrace{x_h(t)}_{0} + X_p\sin(\omega t - \varphi - \psi_0)$$

عقب افتادگی به علت دمپر

بی بعد کردن : (مهم است!!)
$$\frac{X_p}{Y_0} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

4) Transmitted force



F_T منتقل شده به زمین ؟

$$\frac{F_T}{F_0} = T.R$$ ⤷ transmitted ratio

چون دنبال گرفتن فاز

$$|F_T| = |c\dot{x} + kx| = |c\omega X_p\cos(\omega t) + kX_p\sin(\omega t)|$$

از مسئله ①
$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0\sin(\omega t) \\ X_p = \dfrac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \end{cases}$$
(اندازه X_p)

چون با اندازه کار داریم فعلاً فاز را نمی‌نویسیم و نیاز نداریم

$$x = X_p\sin(\omega t) \quad , \quad |F_T| = X_p\sqrt{k^2+(c\omega)^2}$$

$$T.R = \frac{F_T}{F_0} = \frac{X_p\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}{X_p\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

رسم نمودار

$\zeta = 0$

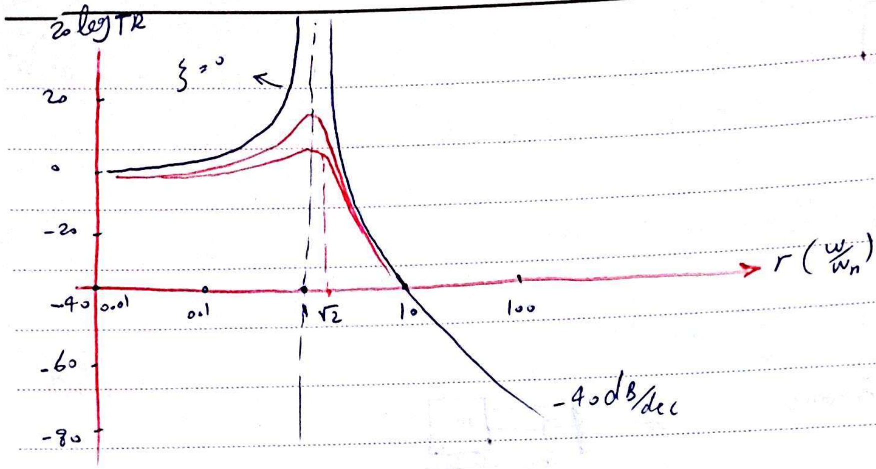
$r \ll 1 \rightsquigarrow 20\log T.R \simeq 0$

$r \simeq 1 \rightsquigarrow$ رزونانس

$r \gg 1 \rightsquigarrow 20\log T.R = 20\log\frac{1}{r^2} = -40\log r$

Subject ۳۵ بنام او

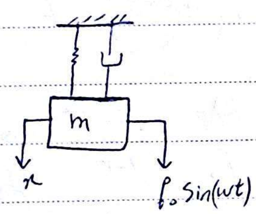
Date



$r \simeq \sqrt{2}$ with $\xi \neq 0$ ⟶ مستقل از ξ

$20 \log T.R \simeq 0$

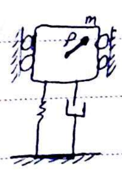
نوع اول :



$$X_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}$$

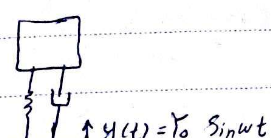
$$\frac{kX_p}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \quad , \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{2\xi r}{1-r^2}$$

نوع دوم :

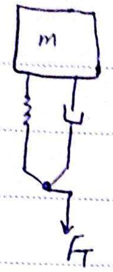


$$F_0 = m\rho\omega^2$$

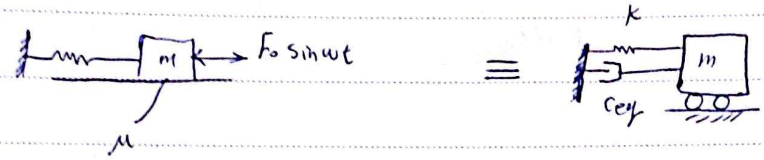
نوع سوم :



نوع چهارم :



نوع پنجم :



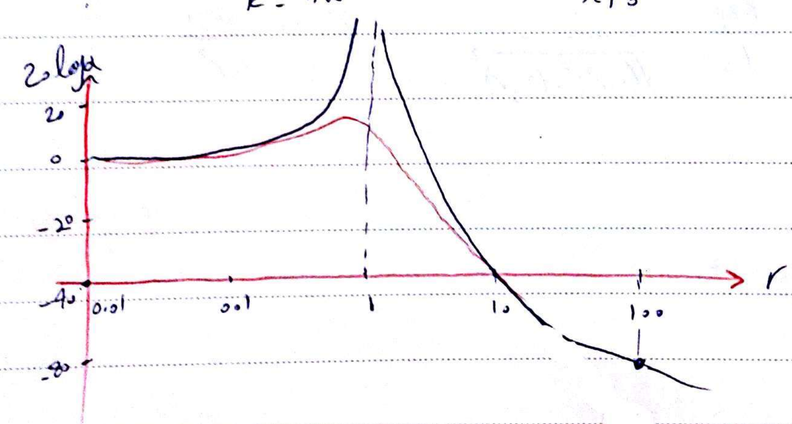
$$c_{eq} = \frac{4\mu m g}{\pi X \omega}$$

ادامه کار مانند مسئله نوع اول : $X_p = \dfrac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c_{eq}\omega)^2}}$

$$X_p^2 = \frac{F_0^2}{(k-m\omega^2)^2 + \left(\frac{4\mu m g}{\pi X_p}\right)^2} \Rightarrow \left[X_p(k-m\omega^2)\right]^2 + \left(\frac{4\mu m g}{\pi}\right)^2 = F_0^2$$

$$\Rightarrow X_p = \frac{\sqrt{F_0^2 - \left(\frac{4\mu m g}{\pi}\right)^2}}{k - m\omega^2} \Longrightarrow \frac{4\mu m g}{\pi F_0} = q \Longrightarrow \frac{kX_p}{F_0} = \frac{\sqrt{1-q^2}}{1-r^2}$$

قبلاً ξ, r داشتیم ← حال q, r داریم



$$r \gg 1 \rightarrow 20\log a = 20\log\frac{1}{r^2} = -40\log r \quad r=10 \rightsquigarrow r=100$$

Subject به نام او
Date 37

مثال 1 : در مسئله نوع دوم

$X_{res} = 0.6\ cm$

$X_{\text{ماندگار}} = 0.08\ cm \Leftarrow @\ r>>1 \quad . \quad \xi = ?$

$$(*)\quad \frac{mX}{m\rho} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \quad \begin{cases} @\ r=1 \longrightarrow \dfrac{m(0.6)}{m\rho} = \dfrac{1}{2\xi} \\ @\ r>>1 \longrightarrow \dfrac{m(0.08)}{m\rho} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{0.6}{0.8} = \frac{1}{2\xi} \Rightarrow \xi \simeq 0.067$$

در امتحان خودتان باید
به این معادلات برسید

مثال 2 : ماشین دوار (100 kg) با سرعت 3000 rpm در حال کار است. اگر نیروی ناميزان 350 N باشد و فنریت ماشین $k = 700\ \frac{kN}{m}$
و $\xi = 0.2$ باشد، مقادیر X_p ماندگار ، T.R نسبت انتقال و F_T نیروی منتقل به پایه ماشین را بیابید.

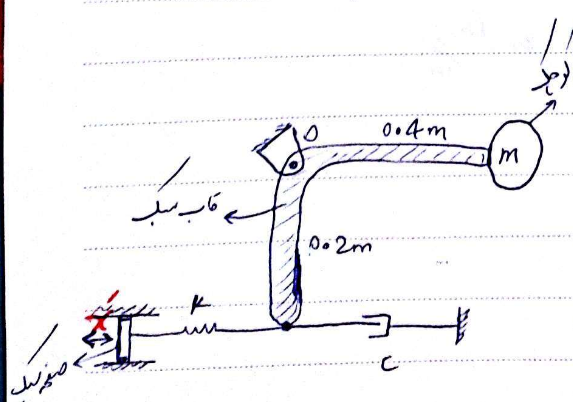
$$\omega = 3000\ rpm \times \frac{2\pi}{60} = 314\ \frac{rad}{s} = 50\ Hz$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{7000} = 83.7\ \frac{rad}{s} \qquad r = \frac{\omega}{\omega_n} \simeq \frac{314}{84} = 3.75$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \frac{100\, X_p}{\underset{350}{m\rho}} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\sqrt{(1-3.75^2)^2+(2\times 0.2\times 3.75)^2}} \longrightarrow X_p = \checkmark$$

نوع دوم $T.R = \frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} = 0.14\ \checkmark \Rightarrow 0.14 = \frac{F_T}{350} \Rightarrow F_T = 49\ N$

مثال 3 :



$X' = 30 \sin t\ (mm)$

$m = 15\ kg$

$k = 2500\ \frac{N}{m}$

$X_{ss\ \text{گلوله}} = 20\ mm$

مطلوبست C !

نوع مسئله مانند Support motion است

به یاد اولست

(38)

Subject

Date

وزن گلوله وارد نمی شود . $\Rightarrow \Sigma M_o = I_o \ddot{\theta} \Rightarrow -c(0.2\dot{\theta})(0.2) - k(0.2\theta - x')(0.2) = I_o\ddot{\theta}$

$I_o = m(0.4)^2 = 2.4\ kgm^2 \Rightarrow$ * $2.4\ddot{\theta} + 0.04c\dot{\theta} + 100\theta = 500\left(\frac{30}{1000}\right)\sin t$

فرکانس تحریک $= 1\ \frac{rad}{s}$

اشتباه نکنید

$\omega_n = \sqrt{\frac{100}{2.4}} = 6.45\ \frac{rad}{s}$ $\qquad r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{1}{6.45} = 0.15$

k مقایسه با مسئله نوع اول

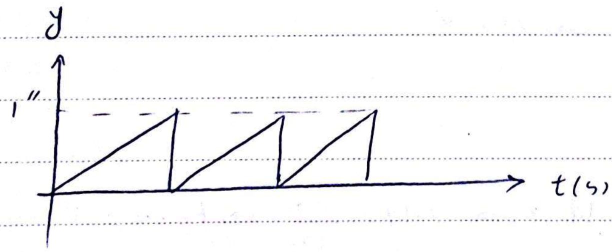
ماندگار $\quad \% \quad \frac{100\theta_p}{\underset{F_o}{15}} = \frac{1}{\sqrt{(1-0.15^2)^2 + (2\zeta(0.15))^2}} \xrightarrow{\text{حل با } \zeta} \zeta = \checkmark$

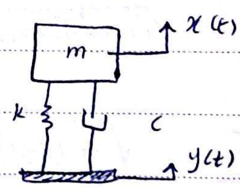
$20mm = X_{ss} = 0.4\theta_{ss} = 0.4\theta_p \longrightarrow \theta_p = 0.05\ rad$

$\zeta = \frac{\overset{0.04c}{c}}{2\sqrt{\underset{2.4}{m}\,\underset{100}{k}}} \Longrightarrow c = \checkmark$

مقادیر را از معادله ی * باشند

مثال 3 :





$k = 40\ \frac{lb}{in}$, $m = 10\ \frac{lb.s^2}{in}$ $\qquad c = 20\ \frac{lb.s}{in}$

$y = \frac{a_0}{2} + \Sigma a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

$a_0 =$?

$a_n =$

$b_n =$

بهار دوست

Subject (39)
Date

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega t)$$

$$\dot{y} = -\sum \left(\frac{\omega}{\pi}\right) \cos(n\omega t)$$

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \Longrightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\left[-\sum \left(\frac{\omega}{n}\right) \cos(n\omega t)\right] + k\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum \frac{1}{n} \sin(n\omega t)\right]$$

$$= \frac{k}{2} - \frac{1}{\pi} \sum \frac{1}{n} \sqrt{k^2 + n^2 c^2 \omega^2}\ \sin(n\omega t - \varphi) \quad , \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{cn\omega}{k}\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum \left(\frac{1}{n^2}\right) \sqrt{\frac{1 + (2\xi r n)^2}{(1 - n^2 r^2)^2 + (2\xi r n)^2}}\ \sin(n\omega t - \psi) \quad , \quad \psi = \tan^{-1}\left(\frac{2n\xi r}{1 - n^2 r^2}\right) + \varphi$$

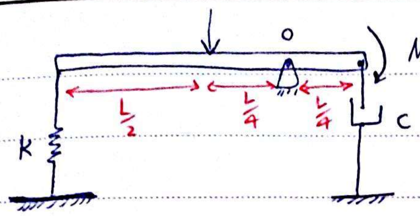
$$\Longrightarrow x(t) = 1 - 0.396 \sin(6.24t - 7.1^\circ) - 0.225 \sin(12.5t - 26.5) \cdots$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \quad , \quad r = \frac{\omega}{\omega_n} = \pi \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \ \text{rad/s} \qquad \xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{2}{2\sqrt{\ }} = 0.5$$

P4PCO

Subject برنامه درست ۱۰ ✓ تمرای

Date



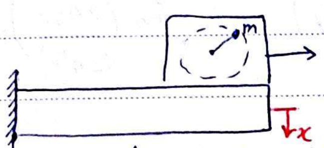
(1) ✓

$$\Sigma M_0 = I_0 \ddot{\theta} \rightarrow \frac{7}{48} mL^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{16} cl^2 \dot{\theta} + \frac{9}{16} kl^2 \theta = \left(M_0 - F_0 \frac{L}{4}\right) \sin(\omega t)$$

$\Longrightarrow$ برای حل معادله $\theta = Ae^{i(\omega t-\varphi)}$ را جایگذاری می‌کنیم $\Rightarrow A = ✓ , \varphi = ✓$

$\searrow$ روش دوم حل معادله جایگذاری $\theta = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$

(2) ✓

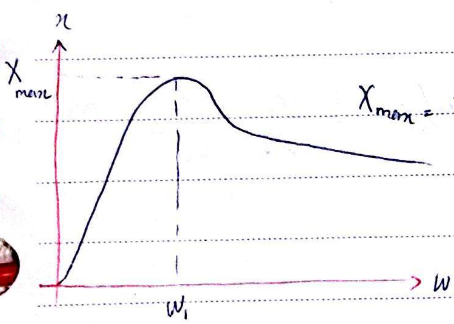


$M = 40\ kg$

$me = 0.1\ kg\,m \quad , \omega = 1000\ rpm$

$l = 1.2 , \ E = 2\times10^{11}\ N/m^2$

$I = 1.3 \times 10^{-6}\ m^4$



$X_{max} = 20.3\ mm$

$$\Lambda = \frac{MX}{me} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad , r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

ξ حول $\Rightarrow \frac{d\Lambda}{dr} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow 1 - r^2 + 2\xi^2 r^2 = 0 \Longrightarrow r^2 = \frac{1}{1-2\xi^2} \rightsquigarrow \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Λ جایگذاری در

$$\Lambda_{max} = \frac{MX_{max}}{me} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \xi = \begin{cases} 0.0617 ✓ \\ 0.999 \end{cases}$$

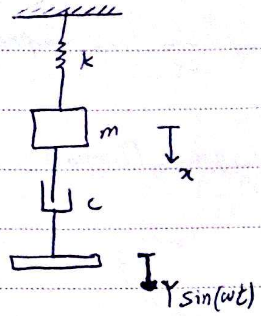
$$k = \frac{3EI}{L^3} = 4.51 \times 10^5\ \frac{N}{m} \rightarrow r = \frac{\omega}{\omega_n} = 0.986$$

بنام او

Subject A1

Date

3



$$W(r,\xi) = \frac{X}{Y} = ?$$

$$W_{max} = ?$$

$$m\ddot{x} + kx + C(\dot{x} - \dot{y}) = 0$$

$$\longrightarrow x = X e^{i(\omega t - \varphi)}$$

جایگذاری

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \left[(k - m\omega^2) + ic\omega\right] X e^{-i\varphi} = cY i\omega \Rightarrow$$ نرم بگیرید

$$\Rightarrow \frac{X}{Y} = \frac{c\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{2\xi r}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\frac{dW}{dr} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow r = 1 \xRightarrow{\text{جایگذاری}} W_{max} = 1$$

پایان جلسه

برخی مطالب مانده 3 ← در امتحان نمی آید

viscous damping :

پاسخ اجباری $\frac{kX}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$

داریم $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \sin\omega t$

$$\begin{cases} f(t) = f_0 e^{j\omega t} \\ x(t) = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

قسمت موهومی این را می گیریم

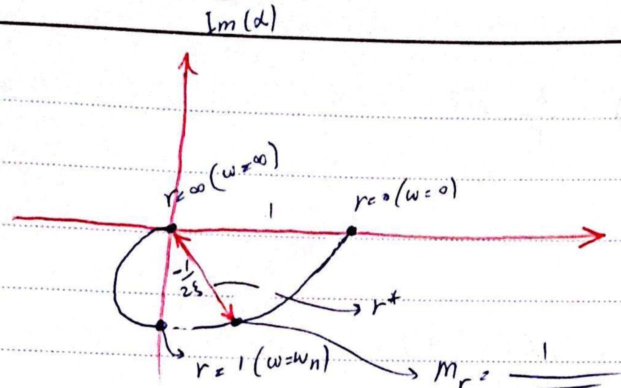
$$\Rightarrow \left[cj\omega + (k - m\omega^2)\right] X_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = f_0 e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow X_0 = \frac{f_0}{k - m\omega^2 + jc\omega} e^{-j\varphi}$$ lag due to damping

amplitude of complex form : $\alpha = \frac{kX_0}{F_0} = \frac{1}{1 - r^2 + 2j\xi r}$

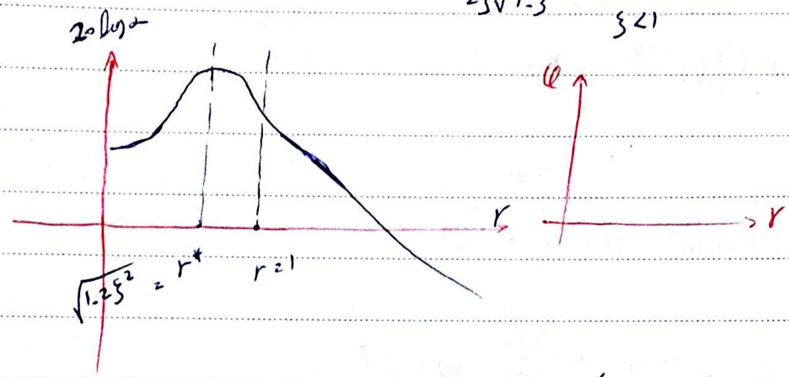
$$Im(\alpha) = \frac{-2\xi r}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \qquad Re(\alpha) = \frac{1 - r^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}$$

$r=1$ resonance $\longrightarrow |\alpha_{max}| = \frac{1}{2\xi} \rightsquigarrow$ sharpness



: Nyquist Diagram

$\longrightarrow M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} > \frac{1}{2\xi}$, $\xi<1$



: Bode Diagram

میرایی سازه‌ای :   میرایی : ویسکوز ، خشک ، سازه‌ای

در کاربرد بسیاری از سازه‌ها مشاهده شد که میزان اتلاف انرژی در سازه متناسب با X^2 است و مستقل از فرکانس تحریک است
(البته به صورت صریح به فرکانس وابسته نیست)

$$W_{struc.damp} = \alpha X^2 \equiv \pi C_{eq} X^2 \omega$$

$$\Longrightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{\alpha}{\pi \omega}}$$

$$\Longrightarrow m\ddot{x} + C_{eq}\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t) \Longrightarrow (k - m\omega^2) X_0 e^{j(\omega t - \varphi)} + j\frac{\alpha}{\pi} X_0 e^{j(\omega t - \varphi)} = F_0 e^{j\omega t}$$

$$X_0 = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + j\frac{\alpha}{\pi}} \Longrightarrow \frac{kX_0}{F_0} = \frac{1}{1 - r^2 + j\gamma} \quad , \quad \frac{\alpha}{\pi k} = \gamma$$

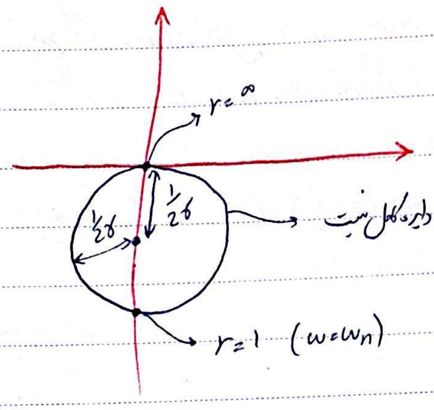
$$\Rightarrow Re = \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + \gamma^2} \qquad Im = \frac{-\gamma}{(1-r^2)^2 + \gamma^2} \Longrightarrow Re^2 + \left(Im + \frac{1}{2\gamma}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\gamma}\right)^2$$

به نام دوست

(43)

Subject

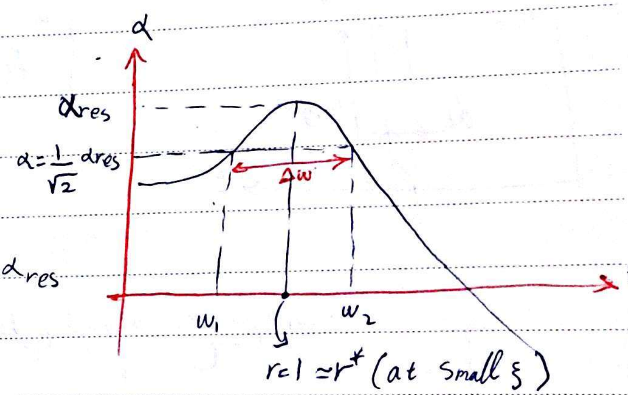
Date



در حالت : Viscous

(*) $\frac{KX}{F_0} = |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$

$r=1 \ , \ \alpha_{res} = \frac{1}{2\xi}$



half power : $x = \frac{1}{\sqrt{2}} X_{res} \quad , \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_{res}$

Solve * for $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_{res} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\xi}$

$\Rightarrow r^2 = 1 - 2\cancel{\xi^2} \pm 2\xi \underbrace{\sqrt{1-\xi^2}}_{1} \Leftarrow \xi \ll 1$

$r^2 = 1 \pm 2\xi \begin{cases} r_1 = \omega_1 \\ r_2 = \omega_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_n^2} = 4\xi = \frac{2(\omega_2 - \omega_1)}{\omega_n} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_n}$

قرائت از روی نمودار

محل پیک

$\frac{\omega_n}{\Delta\omega} = \frac{1}{2\xi} = Q$ یا

P4PCO

Scanned by CamScanner

به نام او

Subject

Date (44)

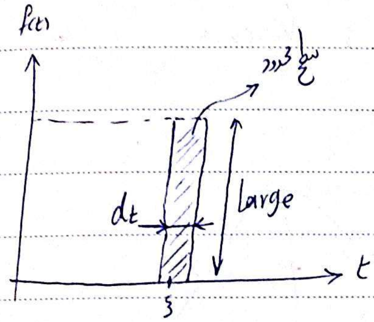
شروع مباحث پایان ترم

chapter 4: Transient Vibration

~ نوع تحریک به صورت اعمال در بازه زمانی محدود و مشخص است، حالت هارمونیک ندارد

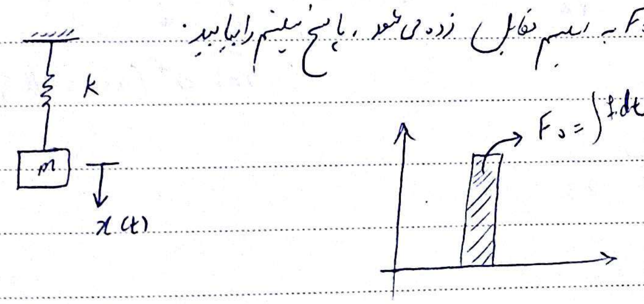
پایه این نوع تحریک های گذرا، تحریک ضربه Impulse است. اعمال نیروی نسبتاً بزرگ در مدت زمان اندک به طوری که حاصل ضرب آن ها عددی محدود است.

ضربه واحد : $\delta(t-\xi) = \begin{cases} 0 & t \neq \xi \\ 1 & t = \xi \end{cases}$



$$\int_0^\infty f(t)\,\delta(t-\xi)\,dt = f(\xi)$$

مثال: در موقعیت تعادل ضربه با دامنه F_0 به سیستم مقابل زده می‌شود، پاسخ سیستم را بیابید.



$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\rightarrow x(t) = C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(0) = 0 \longrightarrow C_2 = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \longrightarrow \end{cases}$$

ضربه - تکانه : $m\dot{x}(0) = F_0 \longrightarrow \dot{x}(0) = \dfrac{F_0}{m} \longrightarrow C_1 = \dfrac{F_0}{m\omega_n}$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n} \sin(\omega_n t) \xrightarrow{F_0 = 1}$$

پاسخ به ضربه واحد : $\boxed{h(t) = \dfrac{1}{m\omega_n} \sin(\omega_n t)}$

پاسخ سیستم m-k به ضربه واحد

$$G_1 + \int F\,dt = G_2$$

Subject: ارتعاشات
Date: 48

مثال دو: همان مثال قبل با میرایی ، $\xi < 1$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \longrightarrow x(t) = X_0 e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t - \varphi_0)$$

$$x(0) = 0 \longrightarrow \varphi_0 = 0$$

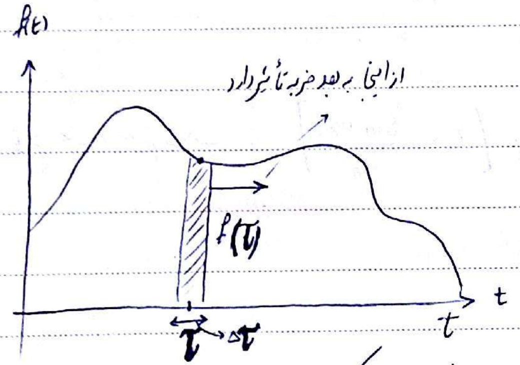
$$\dot{x}(0) = \frac{F_0}{m} \longrightarrow X_0 = \frac{F_0}{m\omega_d}$$

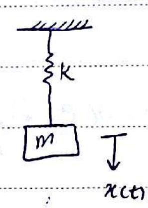
$$\Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t) \xrightarrow{F_0 = 1}$$

پاسخ سیستم m-k-c به تحریک ضربه واحد

$$h(t) = \frac{F_0}{m\omega_n \omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

علت بحث فوق: اگر پاسخ به ضربه را داشته باشیم پاسخ به هر تحریک گذرای دلخواه دیگر را می‌توان یافت



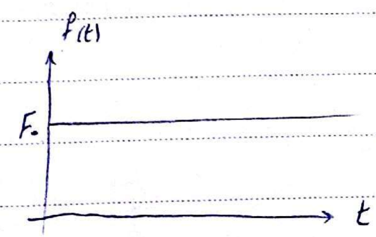


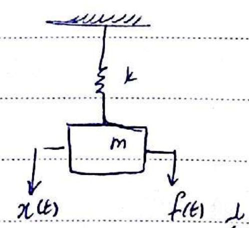
$$\boxed{x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau}$$

پاسخ سیستم به تحریک با دامنه $f(\tau)$

Convolution Integral or Duhammel "

مثال: تحریک پله (step)

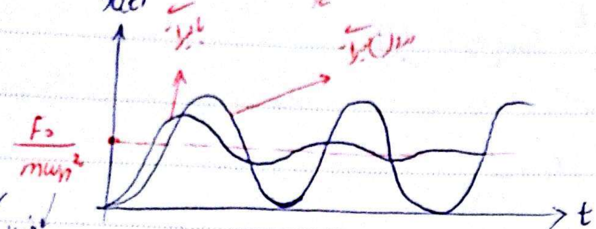




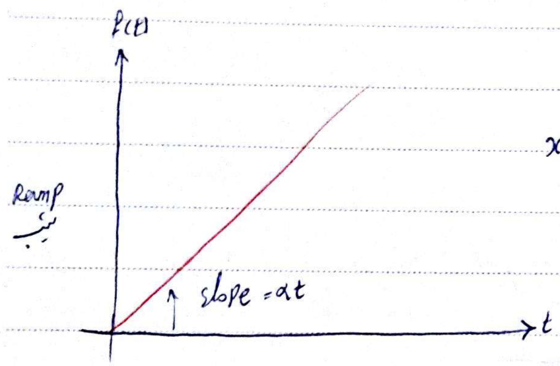
$$x(t) = \int_0^t \frac{F_0}{m\omega_n} \sin(\omega_n(t-\tau))\, d\tau = \frac{-F_0}{m\omega_n^2} \cos \omega_n(t-\tau) \Big|_0^t$$

Subject [illegible]
Date (96)

پاسخ سیستم m-k به تحریک پله $\Longrightarrow$ $$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[1 - \cos\omega_n t\right]}$$ حفظ شود



مثال :



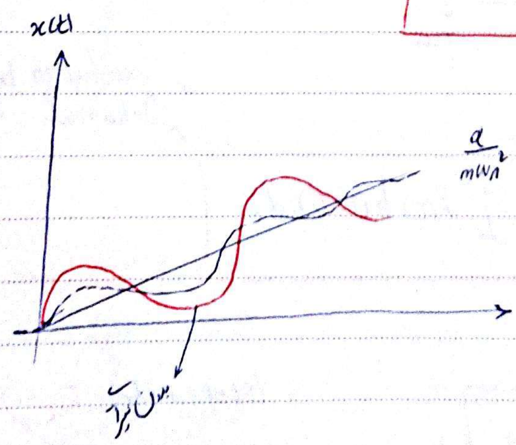
$$x(t) = \int_0^t \alpha\tau \, \frac{1}{m\omega_n} \sin\left(\omega_n(t-\tau)\right) d\tau$$

$$= \frac{\alpha}{m\omega_n}\int_0^t \tau \, \sin\omega_n(t-\tau)\, d\tau$$

انتگرال جزء به جزء

$$= \;\dots \Longrightarrow \boxed{x(t) = \frac{\alpha}{m\omega_n^2}\left[t - \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\right]}$$ پاسخ m-k سیستم به شیب

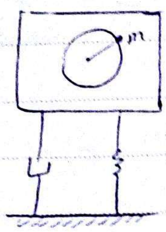
حفظ شود



Subject
Date (41)

(1)

$me = 0.2\ kgm \quad M = 8\ kg \quad X_{max} = 3.1\ mm \quad , \zeta = 0.07 \quad , 300 < \omega < 600\ rpm$



$$X = \frac{\left(\frac{me}{M}\right) r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} < X_{max}$$

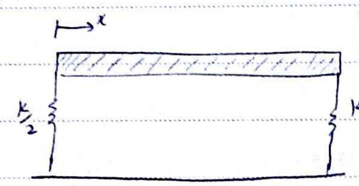
$$\Longrightarrow \left(X_{max}^2 - A^2\right) r^4 + 2 X_{max}^2 \left(2\zeta^2 - 1\right) r^2 + X_{max}^2 > 0$$

$$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow r^2 > r_2^2 \quad \text{یا} \quad r^2 < r_1^2$$

$$\Longrightarrow \frac{M\omega^2}{k} > r_2^2 \qquad \frac{M\omega^2}{k} < r_1^2$$

$$\Longrightarrow k > 5.64 \times 10^5 \quad \text{یا} \quad k < 1.52 \times 10^4$$

(2)



$\vec{\ddot{x}}_g = A \cos(\omega t)$

$$\ddot{y} = \ddot{x}_g = A \cos \omega t$$

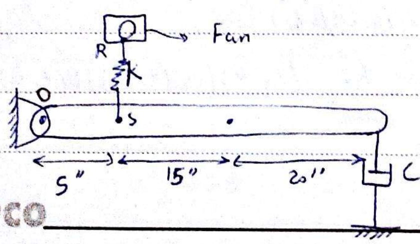
$$\dot{y} = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t) + B_1 \ / \ y = \frac{-A}{\omega^2} \cos \omega t + B_1 t + B_2$$

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0 \longrightarrow y(t) = \frac{-A}{\omega^2} \cos \omega t$$

$$\longrightarrow m\ddot{x} + k(x-y) = 0 \longrightarrow m\ddot{z} + kz = -m\ddot{y} = -mA\cos(\omega t)$$

$$z(t) = \frac{-mA\cos(\omega t)}{k - m\omega^2} \quad , \quad x(t) = z(t) + y(t)$$

$$x(t) = -\left(\frac{m}{k - m\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\right) A \cos(\omega t)$$



$\omega = 750\ rpm \quad , m = 50\ lb$

$k = 200\ \frac{lb}{in} \quad e = 0.1\ in \quad , C = 40$

(3)

استفاده می‌کنیم داریم: $F_0 = me\omega^2 = 89.8205\ lb$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_{fan}}} = 39.31\ rad/s$

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t)}{|k - m\omega^2|} = 0.1334 \cos(78.54t)\ in \longrightarrow x(t) = X(t)$$

در واقع

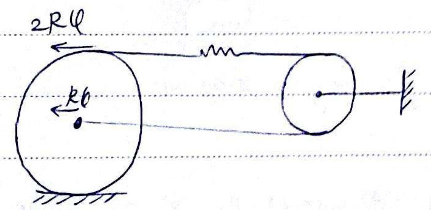
$$\Sigma M_0 = I_0 \ddot{\theta} \quad , \quad I_0 = 141.2612\ lb\,in\,s^2$$

$$\rightarrow I_0 \ddot{\theta} + k(5\theta - x(t)) + c \times 40\,\dot{\theta} = 0$$

$$\rightarrow 141.2612\ddot{\theta} + 200(5\theta - 0.1334\cos\omega t) + 1600\,\dot{\theta} = 0$$

$$\rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

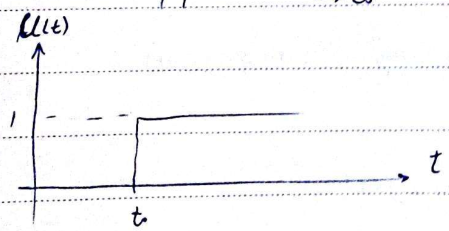
نکته:



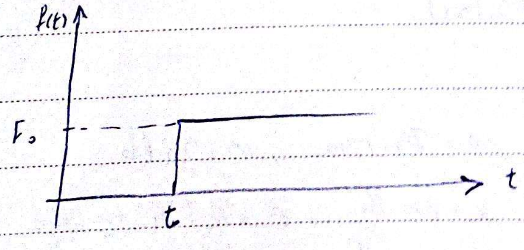
$\Delta_{فنر} = 3R\theta$

$$U(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases}$$

: unitery function



مثال:



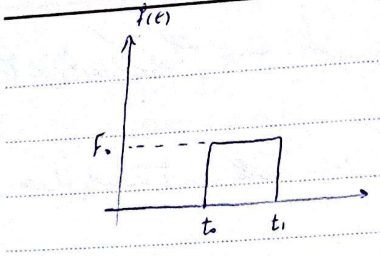
$$f(t) = F_0\, U(t-t_0)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left(1 - \cos(\omega_n(t-t_0))\right) U(t-t_0)$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_n^2} \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 - \cos(\omega_n(t-t_0)) & t \geq t_0 \end{cases}$$

Subject ۱۰/۵/۳ (۴۹)
Date

مثال : پاسخ سیستم m-k به تحریک مقابل



$$f(t) = F_0\left[U(t-t_0) - U(t-t_1)\right]$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\left(1-\cos\omega_n(t-t_0)\right)u(t-t_0) + \left(1-\cos\omega_n(t-t_1)\right)u(t-t_1)\right]$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\begin{cases} 0 & t<t_0 \\ 1-\cos\omega_n(t-t_0) & t_0<t<t_1 \\ \cos\omega_n(t-t_1) - \cos\omega_n(t-t) & t>t_1 \end{cases}$$

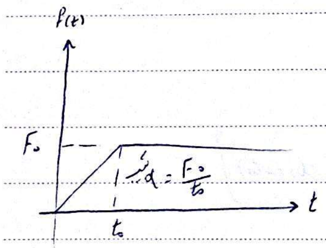
به عنوان نمونه :

for $t_0<t<t_1$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} F_0 \frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau = \checkmark$$

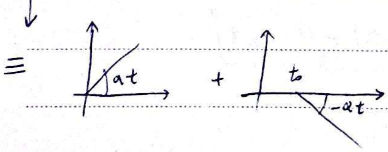
مثال :

$$f(t) = \alpha(t-0)\,U(t-0) - \alpha(t-t_0)\,U(t-t_0)$$

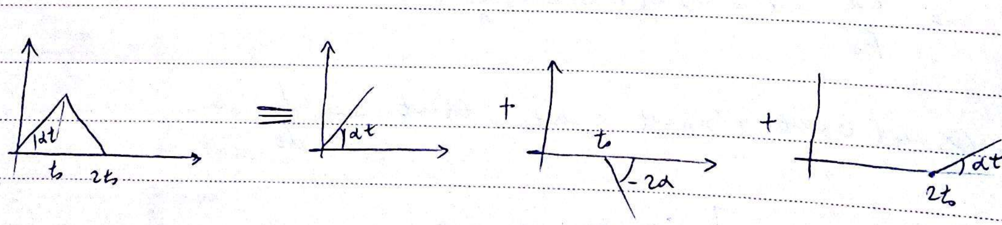


$$x(t) = \frac{\alpha}{m\omega_n^2}\left\{\left[t - \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\right]u(t) - \left[(t-t_0) - \frac{\sin\omega_n(t-t_0)}{\omega_n}\right]u(t-t_0)\right\}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\alpha}{m\omega_n^2}\begin{cases} t - \dfrac{\sin\omega_n t}{\omega_n} & t<t_0 \\ t_0 + \dfrac{\sin\omega_n(t-t_0)}{\omega_n} - \dfrac{\sin\omega_n t}{\omega_n} & t>t_0 \end{cases}$$



مثال :

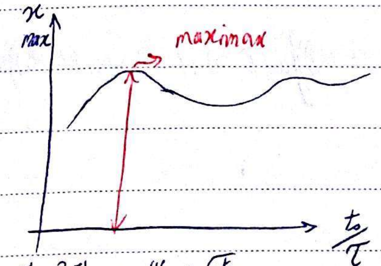


P4PCO

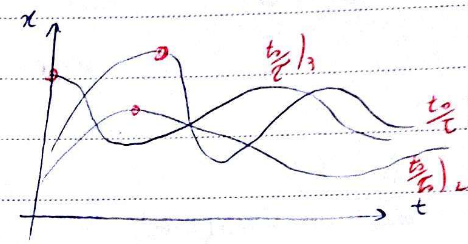
Subject
Date

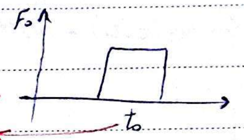
Shock Response Spectrum (SRS): طیف پاسخ شوک ← برای زمان‌های بعد از شوک مهم است

هدف این است که برای دوره‌های گوناگون تحریک (t_0) سعی می‌کنیم ببینیم که X_{max} (قله پاسخ) یا متناظراً $\ddot{X}_{max}$ چه خواهد بود.



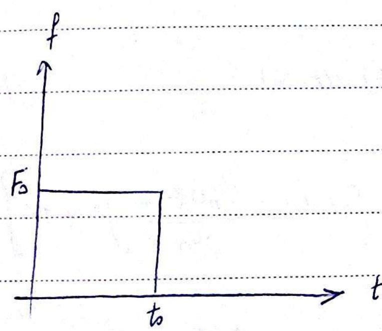
$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

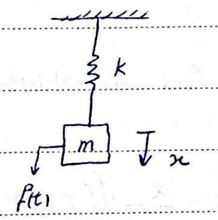




کوچک و بزرگ کردن t_0

شکل:





$$f(t) = F_0\left[u(t) - u(t-t_0)\right]$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[(1-\cos\omega_n t)u(t) - (1-\cos\omega_n(t-t_0))u(t-t_0)\right]$$

چون پاسخ طیف شوک بعد از تحریک مهم است : $t > t_0 \Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n(t-t_0) - \cos\omega_n t\right]$

$$\Rightarrow \frac{kx}{F_0} = \alpha = \cos\omega_n(t-t_0) - \cos\omega_n t$$

$$\alpha = \cos\omega_n t\cos\omega t_0 + \sin\omega t\sin\omega t_0 - \cos\omega t \rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \sin\omega t\left[1 - \cos\omega t_0\right] + \cos\omega t\sin\omega t_0 = 0$$