بنام او

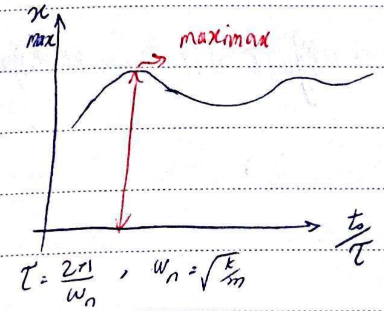
50

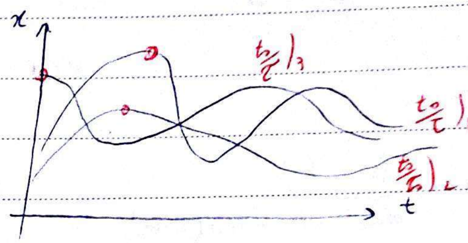
Subject

Date

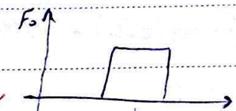
Shock Response Spectrum (SRS): طیف پاسخ شوک ← برای زمان های بعد از شوک مهم است

هدف این است که برای دوره های گوناگون تحریک (t_0) سعی می‌کنیم ببینیم به X_{max} (قله پاسخ) یا نهایتاً $\ddot{X}_{max}$ چه خواهد بود.



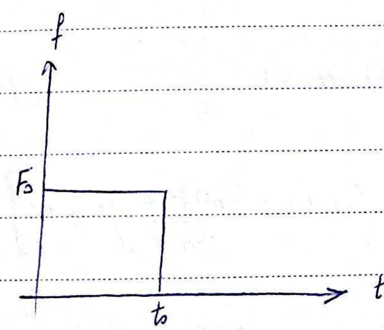


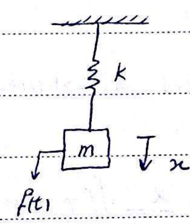
$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$



کوچک و بزرگ کردن t_0

مثال:





$$f(t) = F_0\left[u(t) - u(t-t_0)\right]$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[(1-\cos\omega_n t)u(t) - (1-\cos\omega_n(t-t_0))u(t-t_0)\right]$$

چون پاسخ طیف شوک بعد از تحریک مهم است : $t > t_0 \Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n(t-t_0) - \cos\omega_n t\right]$

$$\Rightarrow \frac{kx}{F_0} = \alpha = \cos\omega_n(t-t_0) - \cos\omega_n t$$

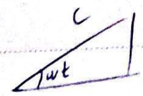
$$\alpha = \cos\omega_n t\cos\omega t_0 + \sin\omega t\sin\omega t_0 - \cos\omega t \rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \sin\omega t\left[1 - \cos\omega t_0\right] + \cos\omega t\sin\omega t_0 = 0$$

P4PCO

به نام او

51



$\sin\omega t_0 = b \qquad \rightarrow \sin\omega t = \frac{b}{c} \quad / \cos\omega t = \frac{a-1}{c}$

$\cos\omega t_0 - 1 = a - 1$

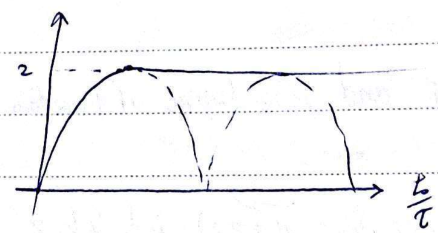
$$a_{max} = \frac{a-1}{c}a + \frac{b}{c}\cdot b - \frac{a-1}{c} = \frac{a-1}{c}(a-1) + \frac{b^2}{c}$$

$$\alpha_{max} = \frac{(a-1)^2 + b^2}{c} = c \rightarrow a_{max} = \frac{k X_{max}}{F_0} = \sqrt{(\cos\omega t_0 - 1)^2 + \sin^2\omega t_0}$$

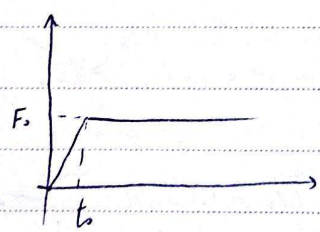
$$= \sqrt{2(1-\cos\omega t_0)} \quad , \left|\frac{k X_{max}}{F_0}\right| = \left|2\sin\frac{\omega t_0}{2}\right| , \omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$= \left|2\sin\left(\pi\frac{t_0}{\tau}\right)\right|$$

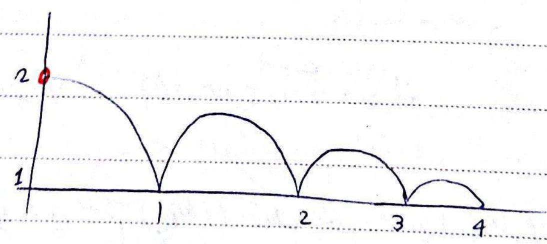
$\longrightarrow X_{max} = \frac{2F_0}{k}$



مثال ۵



$$\frac{k X_{max}}{F_0} = 1 + \frac{1}{\underbrace{\omega_n}_{\frac{2\pi}{\tau}} t_0}\left|2\sin\left(\pi\frac{t_0}{\tau}\right)\right|$$



$\frac{k X_{max}}{F_0} = 2 \quad @ \quad t = 0$

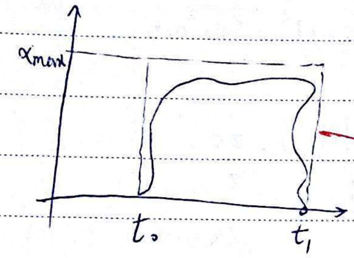
$\alpha \ \alpha_{max} = 1 + 1 = 2$

$\frac{t_0}{\tau_f} \rightarrow 0$

Subject
Date

Shock Isolation : سیستم برای گارانتی دامنه مناسب پاسخ $|a_{max}| < 1$

EX.1 $\longrightarrow$ $\left| 2\sin\left(\pi \frac{t_0}{\tau}\right) \right| < 1 \longrightarrow \frac{t_0}{\tau} < \frac{1}{6}$



ضریب اطمینان بالاتر، البته هزینه بیشتر در طراحی سازه

shock iso : $|a_{max}| < 1$ ✓

chp 5 : 2 Dof and more degree of freedom system

مسائلی که در MDof مطرح می‌شوند درجات آزادی 2 و یا بیشتر دارند (درجه آزادی : تعداد جابجایی که به طور مستقل بیان کننده کامل یک حرکت هستند / قید هندسی بین آنها نداریم)

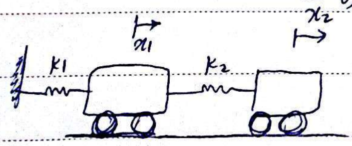
* سیستم‌های n درجه آزادی دارای n فرکانس طبیعی و n شکل مود هستند $\omega_i , \phi_i \quad i = 1, 2, \dots, n$

به لحاظ ریاضی ω_iها مقادیر ویژه و ϕ_iها بردارهای ویژه اند

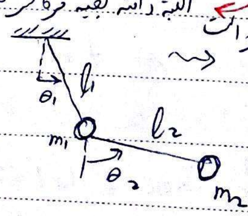
فقط تابع جرم و سختی اند

* اگر فرکانس تحریک به یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم (ω_iها) نزدیک شود، تشدید (رزونانس) داریم. دامنه متناظر با آن فرکانس طبیعی تقویت می‌شود

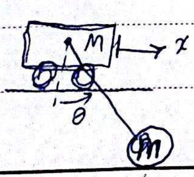
البته دامنه بقیه فرکانس‌های طبیعی هم زیادتر می‌شوند اما نه در حد رزونانس



حل حالت
به روش ماتریسی حل راحت



روش لاگرانژ مناسب تر است



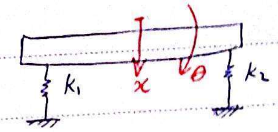
روش لاگرانژ مناسب تر است

به نام دوست

Subject (3)

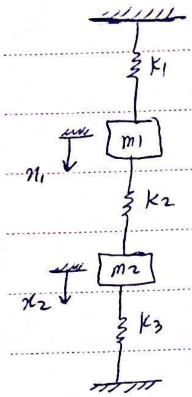
Date

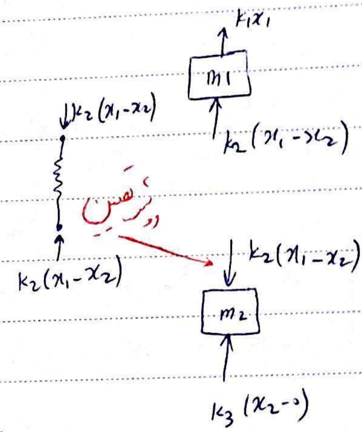
مدل نیم خودرو



Free Vibration of 2DoF Undamped System

مثال : چون فنرها جرم ها را تحمل می کنند معادلات استاتیکی را نمی نویسیم و مستقیماً دینامیک را می نویسیم.





با فرض $x_1 > x_2$

$$\Sigma F_x = m_1\ddot{x}_1$$

$$\Longrightarrow -k_1x_1 - k_2(x_1-x_2) = m_1\ddot{x}_1$$

$$\Sigma F_x = m_2\ddot{x}_2 \Longrightarrow -k_3x_2 + k_2(x_1-x_2) = m_2\ddot{x}_2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2+k_3)x_2 - k_2x_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{[M]}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}}^{[K]}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{آزاد}}$$

$(F=0)$

هدف : ω_{n_i} (فرکانس طبیعی i ام) ، φ_{n_i} (شکل مد طبیعی i ام) ، $x_i(t)$ ؟ $(i=1,2)$

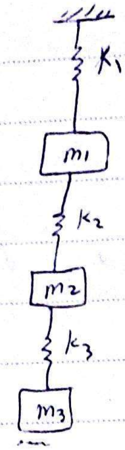
به نام او

(59)

HW → 15 آذر

Subject
Date

مثال :



$$k_i = K \quad , m_i = m , \quad i = 1, 2, 3$$

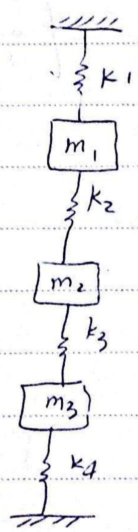
$$\omega_{ni} \;, \varphi_i = ? \qquad x_i(t) = ?$$

روش با دیاگرام آزاد :
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left|[k - m\omega^2]\right| = 0 \quad , \quad \frac{k}{m} = \alpha$$

پیدا کردن فرکانس طبیعی :
$$\begin{vmatrix} 2\alpha-\omega^2 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 2\alpha-\omega^2 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & \alpha-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

مثال :



$$\Rightarrow \left|[k - m\omega^2]\right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2k-m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k-m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k-m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \frac{k}{m} = \alpha$$

$$\begin{vmatrix} 2\alpha-\omega & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 2\alpha-\omega^2 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 2\alpha-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = (2-\sqrt{2})\alpha$$

$$\omega_2^2 = 2\alpha$$

$$\omega_3^2 = (2+\sqrt{2})\alpha$$

از n-1 سطر استفاده کنیم :
$$\begin{vmatrix} 2\alpha-\omega^2 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 2\alpha-\omega^2 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 2\alpha-\omega^2 \end{vmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

بنام او

59

Subject

Date

row 1 : $(2\alpha - \omega^2)X_1 - \alpha X_2 = 0$

row 3 : $-\alpha X_2 + (2\alpha - \omega^2)X_3 = 0$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{\alpha}{2\alpha - \omega^2} \qquad \frac{X_2}{X_3} = \frac{2\alpha - \omega^2}{\alpha} \Longrightarrow \left.\frac{X_1}{X_2}\right|_{@\omega_{n_1}} = \frac{\alpha}{2\alpha - (2-\sqrt{2})\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \left.\frac{X_2}{X_3}\right|_{@\omega_{n_1}} = \sqrt{2}$$

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

φ_2 : $\dfrac{X_1}{X_2} = \dfrac{\alpha}{0}$, $\dfrac{X_2}{X_3} = \dfrac{0}{\alpha}$ $\Big\rangle$ $x_2 = 0 \longrightarrow$ گره

$\Longrightarrow$ row 2 : $-\alpha X_1 - \alpha X_3 = 0 \longrightarrow \dfrac{X_1}{X_3} = 1 \longrightarrow \varphi_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ گره

φ_3 $\dfrac{X_1}{X_2} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{X_2}{X_3} = -\sqrt{2}$ $\longrightarrow \varphi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Phi = P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Subject

Date

$$x_1 = x_{11}\sin(\omega_{n1}t-\varphi_{11}) + x_{12}\sin(\omega_{n2}t-\varphi_{12}) + x_{13}\sin(\omega_{n3}t-\varphi_{13})$$

$$x_2 = \overset{\sqrt{2}X_{11}}{\cancel{x_{21}}}\sin(\omega_{n1}t-\varphi_{21}) + \underset{0}{\cancel{x_{22}}}\sin(\omega_{n2}t-\varphi_{22}) + \underset{-\sqrt{2}X_{13}}{\cancel{x_{23}}}\sin(\omega_{n3}t-\varphi_{23})$$

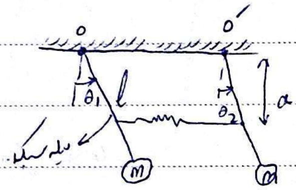
$$x_3 = \overset{X_{11}}{\cancel{x_{31}}}\sin(\omega_{n1}t-\varphi_{31}) + \underset{-X_{12}}{\cancel{x_{32}}}\sin(\omega_{n2}t-\varphi_{32}) + \underset{X_{13}}{\cancel{X_{33}}}\sin(\omega_{n3}t-\varphi_{33})$$

$$\begin{cases}\varphi_{11} = \varphi_{21} = \varphi_{31}\\ \varphi_{12} = \varphi_{22} = \varphi_{32}\\ \varphi_{13} = \varphi_{23} = \varphi_{33}\end{cases} \Rightarrow$$

مجهولات $X_{11} \quad X_{12} \quad X_{13}$

$\varphi_{11} \quad \varphi_{12} \quad \varphi_{13}$

مثال ۶



$$\Sigma M_o = I_o\ddot{\theta} \rightarrow -ka^2\underbrace{\theta_1}_{(\theta_1-\theta_2)} - mgl\theta_1 = ml^2\ddot{\theta}_1$$

$$\rightarrow -ka^2\underbrace{\theta_2}_{(\theta_2-\theta_1)} - mgl\theta_2 = ml^2\ddot{\theta}_2$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ka^2+mgl & -ka^2 \\ -ka^2 & ka^2+mgl \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\omega_n = ? \Rightarrow \left|[K]-[M]\omega^2\right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} ka^2+mgl-ml^2\omega^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & ka^2+mgl-ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha = \frac{ka^2+mgl}{ml^2}$$

$$\beta = \frac{ka^2}{ml^2}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha-\omega^2 & -\beta \\ -\beta & \alpha-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

بنام او

Subject
Date

$$(\alpha-\omega^2)-\beta^2=0 \Rightarrow (\alpha-\omega^2-\beta)(\alpha-\beta^2+\beta)=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \omega_1^2=\alpha-\beta = \frac{g}{l} \\ \omega_2^2=\alpha+\beta = \frac{2ka^2+mgl}{ml^2} \end{cases}$$

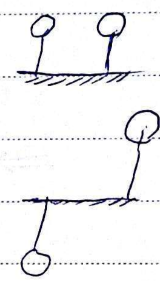
φ_n : از ضرب سطر اول ; $(\alpha-\omega^2)\theta_1-\beta\theta_2=0 \rightarrow \frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{\beta}{\alpha-\omega^2}$

در هر دو فقط از یک ردیف استفاده میکنم

$@\omega_1 : \frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{\beta}{\alpha-(\alpha-\beta)}=1$

برای MDOF از (n-1) ردیف استفاده میکنم

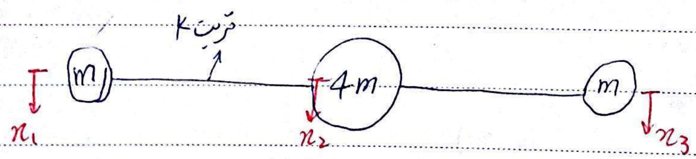
$@\omega_2 : \frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{\beta}{\alpha-(\alpha+\beta)}=-1$



و اگر به مشکل خوردیم از آن ردیف آخر هم استفاده میکنیم

$$\varphi=P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

مثال : مدل هواپیما



$$m\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_3\end{bmatrix}+\frac{3EI}{l^3}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$|K-m\omega^2|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\alpha-\omega^2 & -\alpha & 0\\ -\alpha & 2\alpha-\omega^2 & -\alpha\\ 0 & -\alpha & \alpha-\omega^2\end{vmatrix}=0$$

حول سطر اول بسط میدهم

$$\Rightarrow (\alpha-\omega^2)(\omega^2)(\omega^2-3\alpha^2)=0$$

$$\begin{cases}\omega_1=0 \rightarrow \text{rigid body motion}\\ \omega_2=\sqrt{\alpha} \qquad , \alpha=\frac{3EI}{ml^3}\\ \omega_3=\sqrt{3\alpha}\end{cases}$$

به نام او

Subject
Date

$\varphi_n = ?$ → از سطر اول و سوم استفاده می‌کنیم

row1 : $\frac{X_1}{X_2} = \frac{\alpha}{\alpha - \omega^2}$

row3 : $\frac{X_2}{X_3} = \frac{\alpha - \omega^2}{\alpha}$

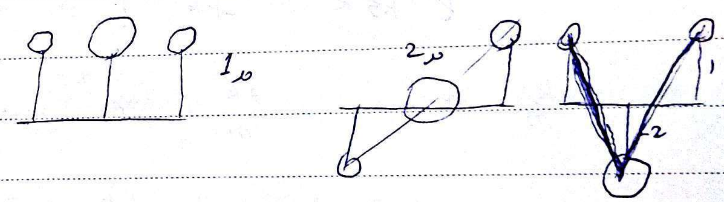
$@\ \omega_{n_1}$: $\frac{X_1}{X_2} = 1 \quad , \quad \frac{X_2}{X_3} = 1 \Rightarrow \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$@\ \omega_{n_2}$: $\frac{X_1}{X_2} = \frac{\alpha}{0} \quad , \quad \frac{X_2}{X_3} = \frac{0}{\alpha} \Rightarrow x_2 = 0 \Longrightarrow$ مجبوریم از سطر ۲ کمک بگیریم

row2 → $\frac{X_1}{X_3} = -1 \Rightarrow \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$@\ \omega_{n_3}$: $\frac{X_1}{X_2} = -\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{X_2}{X_3} = -2 \rightarrow \varphi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$



قطری سازی ماتریس‌های جرم، سختی، میرایی : کاربرد : حل ساده‌تر یک معادله دیفرانسیل MDOF از طریق تبدیل آن به

M معادله دیفرانسیل مرتبه ۱ (SDOF)

$$[M]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\}$$

$M\ddot{X} + c\dot{X} + kX = F \quad , \quad \{X\} = [P]\{q\} \quad , \quad [P] = [\varphi] \rightarrow$ ماتریس شکل مد

$$\Rightarrow Mp\ddot{q} + cp\dot{q} + kpq = F \xrightarrow{\times P^{-1}} [P^{-1}MP]\{\ddot{q}\} + [P^{-1}cP]\{\dot{q}\} + [P^{-1}kP]\{q\} = P^{-1}F$$

خاصیت تعامد مدی : $\rightarrow \underbrace{[M^*]}_{\text{قطری}}\{\ddot{q}\} + [c^*]\{\dot{q}\} + \underbrace{[k]}_{\text{قطری}}\{q\} = P^{-1}F$

$P^{-1} = P^T$

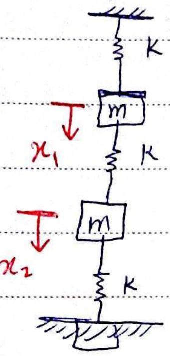
قطری مشروط : اگر

$[c] = \alpha[M] + \beta[k]$ ترکیبی از $[k]$ ، $[M]$ باشد قطری می شود

حل برای $q_i(t) : i=1,\dots,n$ سپس $\{X\} = [P]\{q\}$

روش قطری سازی :

مثال ۱ :



$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad , \quad K = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$ لزوماً M^* همان M نمی شود ولی trace ها ثابت می ماند

$$P^{-1}KP = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 3k \end{bmatrix}$$ ثابت ماندن trace

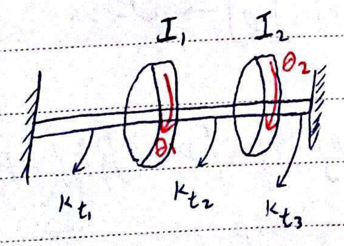
$$\frac{k}{m} = \omega_{n_1}^2 \quad , \quad \frac{3k}{m} = \omega_{n_2}^2$$ روش دوم حل کردن

$$X = Pq \longrightarrow \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m\ddot{q}_1 + kq_1 = 0 & \rightarrow \omega_{n_1}^2 \\ m\ddot{q}_2 + 3kq_2 = 0 & \rightarrow \omega_{n_2}^2 \end{cases}$$

نکته : در مثال ۴ حل شده تلاش کنید با تشکیل P^TMP , P^TKP قطری شدن آنها را بررسی کنید

مثال :



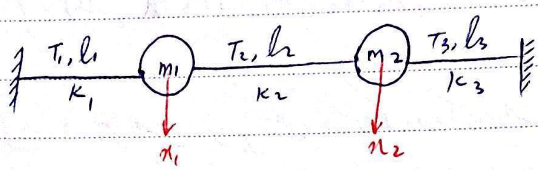
$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{t_1}+k_{t_2} & -k_{t_2} \\ -k_{t_2} & k_{t_2}+k_{t_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنام او

Subject
Date

$\theta = \frac{TL}{GJ} \longrightarrow \frac{T}{\theta} = k_t = \frac{GJ}{L}$ / $F = kx$, $T = k_t\,\theta$

مثال :

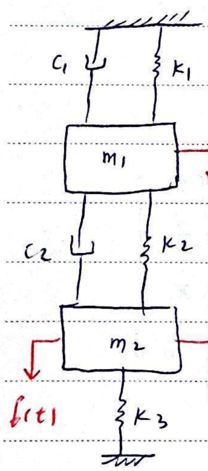


$* \quad k = \frac{T}{l}$ $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

در کلاس گفته شده

روش ماتریسی برای معادلات یک MDOF sys با حرکت کاملاً انتقالی (غیر دورانی)

مثال :



m_{ii} : جرم درجه آزادی i ام

m_{ij} = جرم بین درجه آزادی i و j → عموماً در ترکیب حرکات خطی و دورانی رخ می‌دهد
که بستر حرکت دورانی حرکت خطی دارد

c_{ii} / k_{ii} = فنر متصل به درجه i ام

c_{ij} / k_{ij} = فنر بین درجه آزادی i و j با علامت منفی

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\text{uncouple}}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}}_{\text{couple}}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}}_{\text{couple}}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

مثال : در مثال قبل اگر زیر k_3 تحریک پایه داشتیم :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{bmatrix}$$

چون به درجه آزادی دوم وارد شده

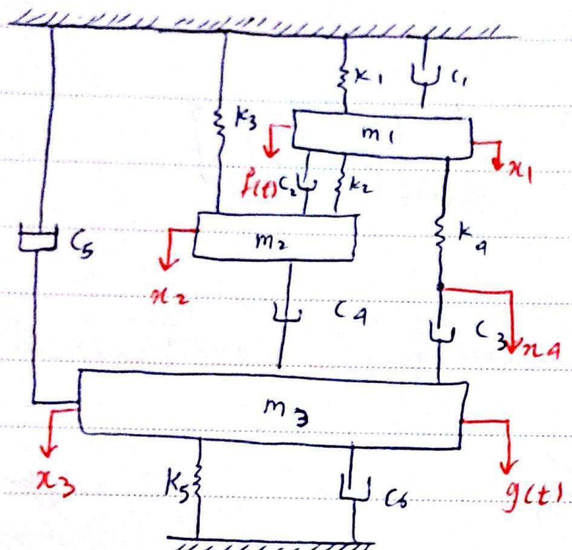
$m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$

$m_2\ddot{x}_2 + (k_2+k_3)x_2 - k_2x_1 = f + k_3u$ / $\cancel{-k_3x_2 + k_3u = 0}$ $\rightarrow f_T$

Subject برنامه
Date

EX 1 $\rightsquigarrow$ on x_1 : $m_1\ddot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - 0) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - 0) + k_2(x_1 - x_2) = 0$

on x_2 : $m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_2 - u) = f$



مثال : * اتصال فنر و دمپر متوالی خودش یک درجه آزادی است
ولی اگر اتصال فنر - فنر موازی داشتیم معادل می‌گیریم
. درجه آزادی اضافه نمی‌شود*

$$
\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_4 & -c_4 & 0 \\ 0 & -c_4 & \sum_{3}^{6} c_i & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}
$$

$$
+
\begin{bmatrix} k_1+k_2+k_4 & -k_2 & 0 & -k_4 \\ -k_2 & k_2+k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_5 & 0 \\ -k_4 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \\ g(t) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

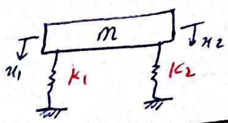
* حل معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر به روش Expand مناسب نیست و بردن به فضای $X=PY$ مناسب‌تر است و بردن به فضای
$X_{11}, X_1 \cdots + X_{12} \cdots$

حالت بهترین روش است.

بنام او

Subject

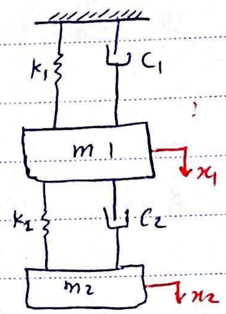
Date



مدل نیم خودرو:
بین دو درجه آزادی یک جرم وجود دارد

Damped free vibration of MDof Sys

مثال:



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بدون میرایی $x_i = X_i \sin \omega t$

با میرایی $x_i = X_i e^{rt}$, r = complex variable

حالا داریم:

$$\begin{bmatrix} m_1 r^2 + (c_1+c_2) r + k_1 + k_2 & -c_2 r - k_2 \\ -c_2 r - k_2 & m_2 r^2 + c_2 r + k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} e^{rt} = 0$$

$$\begin{vmatrix} m_1 r^2 + (c_1+c_2) r + k_1 + k_2 & -c_2 r - k_2 \\ -c_2 r - k_2 & m_2 r^2 + c_2 r + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

$\rightarrow \alpha_0 r^4 + \alpha_1 r^3 + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r + \alpha_4 = 0 \rightsquigarrow$ α_i ها برحسب c_j ، k_j ، m_j ها میباشند

$j = 1, 2$ $\quad i = 1, \dots, 4$

PAPCO

Subject
Date

حالات حدی : ① بدون میرایی $c_1 = c_2 = 0$

$$r_{1,2} = \pm J\beta_1 \qquad \beta_1 = \omega_{n1}$$
$$\Rightarrow$$
$$r_{3,4} = \pm J\beta_2 \qquad \beta_2 = \omega_{n2}$$

② میرایی اندک

$$r_{1,2} = \pm J\beta_1 \rightarrow \beta_1 = \omega_{n1}$$

$$r_{3,4} = \underbrace{\gamma}_{-\xi\omega_{n_2}} \pm J\underbrace{\beta_2}_{\omega_{n2}\sqrt{1-\xi^2}} \rightarrow \xi = \checkmark \ \omega_{n2} = \checkmark$$

③ میرایی نسبتاً قابل ملاحظه

$$r_{1,2} = \gamma_1 \pm J\beta_1 \qquad \gamma_i = -\xi_i \omega_{ni}$$
$$\Rightarrow$$
$$r_{3,4} = \gamma_2 \pm J\beta_2 \qquad \beta_i = \omega_{ni}\sqrt{1-\xi_i^2}$$

④ میرایی نسبتاً زیاد

$$r_{1,2} = P_1, P_2 < 0 \qquad (\text{real}) \quad r_{1,2} = -\xi_1\omega_{n_1} \pm \omega_{n_1}\sqrt{\xi_1^2 - 1}$$

$$r_{3,4} = \underbrace{\gamma}_{-\xi_2\omega_{n2}} + J\underbrace{\beta}_{\omega_{n2}\sqrt{1-\xi_2^2}}$$

⑤ میرایی زیاد

$$r_{1,2} = P_1, P_2 < 0$$

→ ناپایدار

$$r_{3,4} = P_3, P_4 < 0$$

Mode shapes :

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{c_2 r + k_2}{m_1 r^2 + (c_1 + c_2) r + (k_1 + k_2)}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject ادامه
Date

$$\begin{cases} x_1(t) = X_{11} e^{r_1 t} + X_{12} e^{r_2 t} + X_{13} e^{r_3 t} + X_{14} e^{r_4 t} \\ x_2(t) = X_{21} e^{r_1 t} + X_{22} e^{r_2 t} + X_{23} e^{r_3 t} + X_{24} e^{r_4 t} \end{cases}$$

$$\frac{X_{11}}{X_{21}} = \left.\frac{X_1}{X_2}\right)_{@r_1}$$

X_{1i} $i=1,\dots,4$ are found from I.C

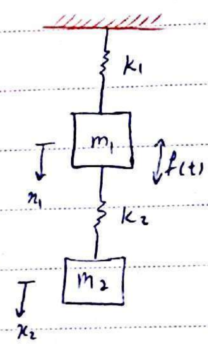
$$\begin{cases} x_1(0) , x_2(0) \\ \dot{x}_1(0) , \dot{x}_2(0) \end{cases}$$

$\vdots$

$$\frac{X_{14}}{X_{24}} = \left.\frac{X_1}{X_2}\right)_{@r_4}$$

Forced Vibration of unDamped MDOF sys.

برخلاف ارتعاشات آزاد سیری آسان تر دارد.



مثال : تحریک هارمونیک $f(t)=F_0 \sin(\omega t)$ وارد شود پاسخ x_1 , x_2 ؟

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2 x_2 = f(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_i = X_i \sin(\omega t)$

$k_1 = k_2 = k$ با فرض

$m_1 = m_2 = m$

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \sin\omega t = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin\omega t$$

به روش کرامر : $X_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} F_0 & -k \\ 0 & k - m\omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix}}$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & F_0 \\ -k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix}}$$