Subject به نام او

Date

$$\begin{cases} x_1(t) = X_{11}e^{r_1 t} + X_{12}e^{r_2 t} + X_{13}e^{r_3 t} + X_{14}e^{r_4 t} \\ x_2(t) = X_{21}e^{r_1 t} + X_{22}e^{r_2 t} + X_{23}e^{r_3 t} + X_{24}e^{r_4 t} \end{cases}$$

$$\frac{X_{11}}{X_{21}} = \left.\frac{X_1}{X_2}\right)_{@r_1}$$

$\vdots$

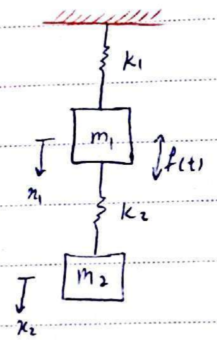
$$\frac{X_{14}}{X_{24}} = \left.\frac{X_1}{X_2}\right)_{@r_4}$$

X_{1i} $i=1,\dots,4$ are found from I.C

$$\begin{cases} x_1(0), & x_2(0) \\ \dot{x}_1(0), & \dot{x}_2(0) \end{cases}$$

Forced Vibration of unDamped MDOF sys.

برخلاف ارتعاشات آزاد سیری آسان تر دارد.



مثال: تحریک هارمونیک $f(t)=F_0\sin(\omega t)$ وارد شود پاسخ x_1, x_2 ؟

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = f(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$x_i = X_i\sin(\omega t)$ $\xrightarrow{\text{با فرض}}$ $k_1=k_2=k$, $m_1=m_2=m$

$$\begin{bmatrix} 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & k-m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}\sin\omega t = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix}\sin\omega t$$

به روش کرامر: $X_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} F_0 & -k \\ 0 & k-m\omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & k-m\omega^2 \end{vmatrix}}$ $\qquad X_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2k-m\omega^2 & F_0 \\ -k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & k-m\omega^2 \end{vmatrix}}$

برنامه درست

$$X_1 = \frac{F_0 (k - m\omega^2)}{(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2} \qquad X_2 = \frac{F_0 k}{(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2}$$

Subject

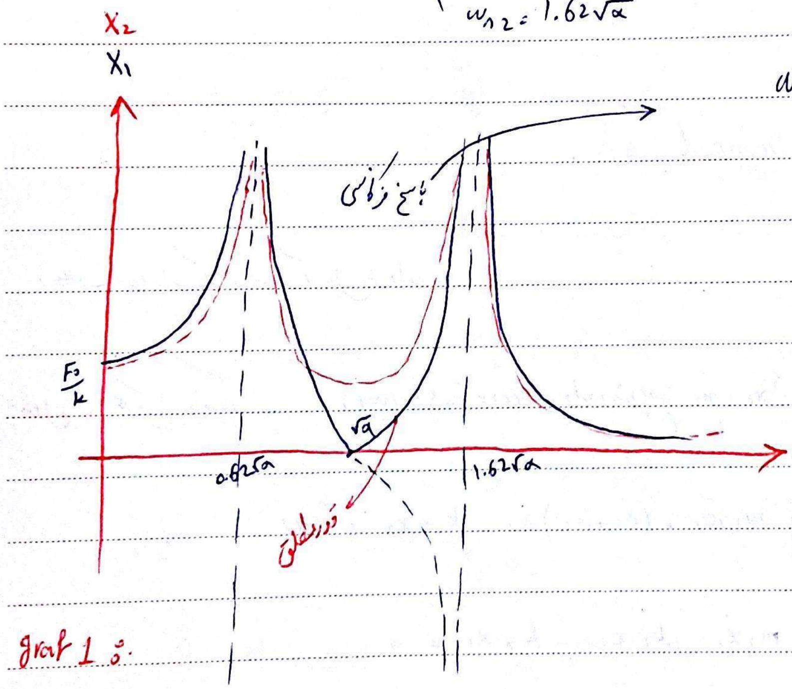
Date

در هر فرکانس ω ، X_1 ، X_2 را از بالا یافته و :

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1 \sin(\omega t) \\ x_2(t) = X_2 \sin(\omega t) \end{cases} \qquad X_1 \text{ و } X_2 = f(\omega)$$

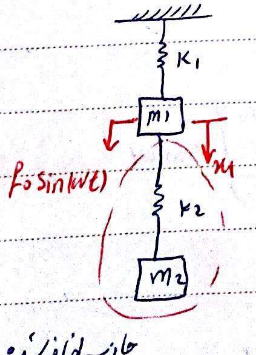
$$\omega_n = ? \longrightarrow \begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \frac{m}{k} = \alpha$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \omega_{n1} = 0.62\sqrt{\alpha} \\ \omega_{n2} = 1.62\sqrt{\alpha} \end{cases}$$



graf 1 :

جاذب ارتعاشی :



m_1: سازه‌ی اصلی که برای ما ارزش داشته و هدف کاهش ارتعاشات آن است. اگر فرکانس تحریک ω نزدیک $\omega_{n_1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ (سازه اصلی) باشد دامنه زیاد داریم $\omega \simeq \omega_{n_1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$

PAPCO

بنام خدا

مثال سه جرمی هست که در جواب مورد سوال کند
است د ذوق فنی هدف / منظور از نمودار شکل چه؟

Subject

Date

طبق مثال قبل ورداف 1 : اگر از اول $k_1 \neq k_2$ ، $m_1 \neq m_2$ مجاز باشند

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2-m_1\omega & -k_2 \\ -k_2 & k_2-m_2\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \frac{F_0\left(k_2-m_2\omega^2\right)}{(k_1+k_2-m_1\omega^2)(k_2-m_2\omega^2)-k^2}$$

@ $\omega = \omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ صفر می باشد

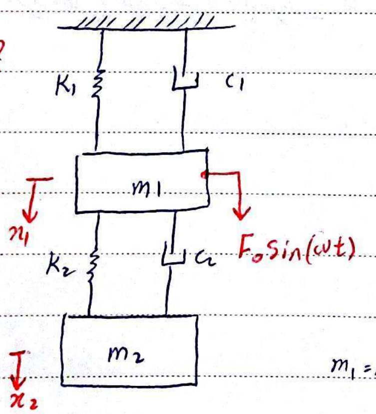
$\xrightarrow{\text{اگر کاری کنیم}}$ $k_2-m_2\omega^2=0$ / $k_2-m_2\left(\frac{k_1}{m_1}\right)=0$

$\rightarrow \boxed{\frac{k_1}{m_1}=\frac{k_2}{m_2}}$

$$X_2 = \frac{F_0 k_2}{(k_1+k_2-m_1\omega^2)(k_2-m_2\omega^2)-k^2} \Longrightarrow \text{resonance}: \omega=\omega_n \rightarrow |X_2| = \frac{F_0}{k_2}$$

Forced vibration of damped MDOF system.

پاسخ اجباری؟ : مثال



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$m_1=m_2=1$ $\quad c_1=c_2=1$ $\quad k_1=k_2=1$ / $F_0=1$ /$\omega=1$

فاز دیگر خودش در جواب ظاهر می شود

$$F_0\cos(\omega t) = Re\left(F_0 e^{J\omega t}\right) = Re\left(e^{Jt}\right)$$

$$x_i = X_i e^{Jt} \longrightarrow \left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + J\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\cancel{e^{Jt}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cancel{e^{Jt}}$$

پاسخ اجباری با همان فرکانس

$$\begin{bmatrix} 1+2J & -1-J \\ -1-J & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

به نام او

Subject
Date

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -1-J \\ 0 & J \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+2J & -1-J \\ -1-J & J \end{vmatrix}} = \frac{F_0}{5}(-1-2J) \rightarrow \varphi_1 = \tan\left(\frac{-2}{-1}\right)$$

ناحیه

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1+2J & F_0 \\ -1-J & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+2J & -1-J \\ -1-J & J \end{vmatrix}} = \frac{F_0}{5}(-3-J) \rightarrow \varphi_2 = \tan\left(\frac{-1}{-3}\right)$$

بعلت دنبیر

$$|x_1| = \frac{F_0}{\sqrt{5}} \rightarrow x_1(t) = \frac{F_0}{\sqrt{5}} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

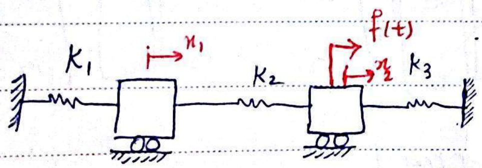
$$|x_2| = \frac{F_0\sqrt{10}}{5} \rightarrow x_2(t) = \frac{F_0\sqrt{10}}{5} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

روش 2 → برای شود

$$x_1(t) = Re\left(x_1 e^{Jt}\right) = Re\left(\frac{F_0}{5}(-1-2J)\, e^{Jt}\right)$$

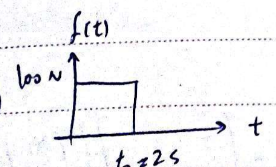
در مسئله فوق اگر از همان ابتدا به صورت پارامتریک ω تحریک را حفظ می‌کردیم پاسخ فرکانسی به عنوان تابعی از ω به دست می‌آمد

مثال 8



$m_1 = m_2 = 10\ kg \quad / \quad k_1 = k_2 = k_3 = 1000\ \frac{N}{m}$

$$f(t) \begin{cases} \text{I)} \quad F_0 \sin \omega t = 100 \sin(\cancel{\omega}\, 5\, t) \\ \text{II)} \end{cases}$$



I.C $\begin{cases} x_1(0) = 10\ cm \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

Subject برنامه درست
Date

$$\left| [k] - [m]\omega^2 \right| = 0 \quad , \quad \frac{k}{m} = \alpha \rightarrow \begin{vmatrix} 2\alpha - \omega^2 & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega_{n_1} = \sqrt{\alpha} = 10 \ rad/s$$

$$\omega_{n_2} = \sqrt{3\alpha} = 10\sqrt{3} \ rad/s$$

برای شکل مد ⟹ حل معادله

$$\left.\frac{X_1}{X_2}\right)_{@\omega_{n_1}} = \frac{\alpha}{2\alpha - \omega^2} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$$

$$\left.\frac{X_1}{X_2}\right)_{@\omega_{n_2}} = \frac{\alpha}{2\alpha - \omega^2} = \frac{\alpha}{-\alpha} = -1$$

$$\varphi = P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

to find x_{ih} →
$$\begin{cases} x_1(t) = x_{11} \sin(\omega_{n_1} t - \varphi_{11}) + x_{12} \sin(\omega_{n_2} t - \varphi_{12}) \\ x_2(t) \end{cases}$$

روش دوم : $x = Pq$ → چون پاسخ اجباری هم داریم این دفعه خیلی راحت تر است

$$\Rightarrow \quad M^* \ddot{q} + K^* q = P^T f$$

$$M^* = P^T M P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$$

اگر از P^{-1} استفاده می‌کردیم باید trace ثابت می‌ماند

$$K^* = P^T K P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix}$$ → جدا کردن مختصات ملی ✓

$$P^T F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ -f(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2m\ddot{q}_1}{2m} + \dfrac{2kq_1}{2m} = \dfrac{f(t)}{2m} \\ \dfrac{2m\ddot{q}_2}{2m} + \dfrac{6kq_2}{2m} = \dfrac{-f(t)}{2m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 + 100q_1 = 5\sin 5t \\ \ddot{q}_2 + 300q_2 = -5\sin 5t \end{cases}$$ → 2 SDoF sys

$$\Rightarrow q_i(t) = q_{ih}(t) + q_{ip}(t) \qquad i = 1, 2$$

$$\rightarrow q_1(t) = C_1 \sin(10t) + C_2 \cos(10t) + A\sin(\omega t)$$ → در حالت با میرایی فصل 3 داشتیم

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \sin(\omega t - \varphi_p)$$

همگن $X_0 e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t - \varphi_0)$

Subject به نام او

Date

$$\begin{cases} q_1(t) = c_1 \sin(10t) + c_2 \cos(10t) + \underbrace{\frac{1}{15}}_{\frac{F_0}{k-m\omega^2}} \sin(5t) \\ q_2(t) = c_3 \sin(10\sqrt{3}\, t) + c_4 \cos(10\sqrt{3}\, t) - \frac{1}{55} \sin(5t) \end{cases}$$

چون میرایی نداریم فاز ندارد

$$\dot{x} = 0 \longrightarrow P\dot{q} = 0 \longrightarrow \dot{q}_i(0) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}_{x_1(0)} = \begin{bmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} q_1(0) + q_2(0) = 0.1 \\ q_1(0) - q_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1(0) = q_2(0) = 0.05 \\ \dot{q}_i(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow c_1, c_2, c_3, c_4 = \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1(t) = q_1(t) + q_2(t) \\ x_2(t) = q_1(t) - q_2(t) \end{cases}$$

II) $\rightsquigarrow$ صفحه را قبلاً آورده‌ام $\longrightarrow$ جواب ذاتی

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 100\, q_1 = 5 \text{ پله با دامنه } \\ \ddot{q}_2 + 300\, q_2 = -5 \text{ پله با دامنه } \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_{1p} = \frac{5}{100}\left(\cos(10t) - \cos(10(t-2))\right) \\ q_{2p} = \frac{-5}{300}\left(\cos(10\sqrt{3}\, t) - \cos(10\sqrt{3}(t-2))\right) \end{cases}$$

طوادی:
$$f(t) = F_0\left[u(t) - u(t-t_0)\right]$$

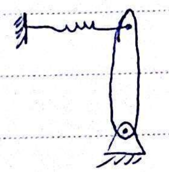
$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left(\left(1 - \cos(\omega_n t)\right) u(t) - \left(1 - \cos(\omega_n(t-t_0))\right) u(t-t_0)\right)$$

$$t > t_0 \rightsquigarrow -\cos(\omega_n t) + \cos(\omega_n(t-t_0))$$

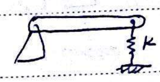
Lagrange Eq : روشی است انرژی مبنا و مؤثر جهت یافتن معادلات حاکم بر مسئله به خصوص زمانی که با یک MDOF sys با حرکات دورانی یا ترکیب خطی دورانی سروکار داریم.

T انرژی جنبشی:
- $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$ خطی
- $\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$ دورانی

U:
- $\frac{1}{2} k x^2$ خطی
- $\frac{1}{2} k_t \theta^2$ دورانی
- $mg\Delta h$



اگر قائم یا نزدیک به قائم باشد $\Longrightarrow$ $mg\Delta h$ ظاهر می‌شود



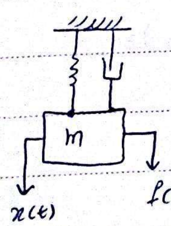
اگر افقی یا نزدیک افقی باشد $\Longrightarrow$ $mg\Delta h$ ظاهر نمی‌شود

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

q_i : ith degree of freedom

Q_i:
- $-c\dot{x}$ / f_{ext} خطی
- $\underbrace{(-c\dot{x})d}_{\text{گشتاور دمپر}}$ / M_{ext} دورانی

مثال :

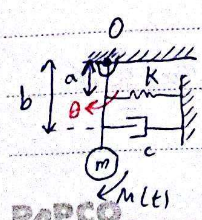


$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ / $U = \frac{1}{2} k x^2$

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\right) - 0 + kx = f(t) - c(\dot{x} - 0)$$

$$\Longrightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

مثال : میله سبک به طول l و گلوله با شعاع کوچک



$T = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2$

$U = \frac{1}{2} k (a\theta)^2$? $+ mgl(1-\cos\theta)$

$I_o = ml^2$

چون آونگ پایدار است / چون پتانسیل دو انرژی است

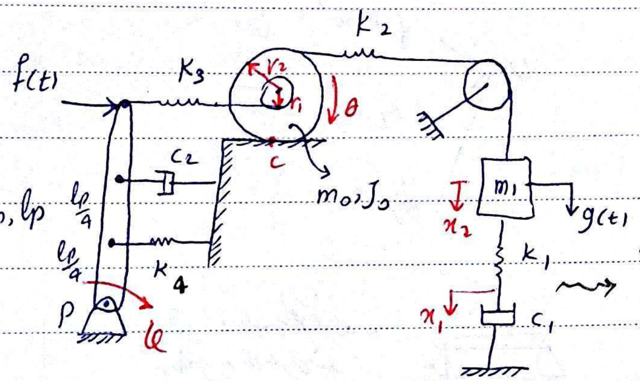
به نام او

Subject
Date

$$\frac{d}{dt}\left(I_o \dot\theta\right) - 0 + k(a\theta)a + mgl\theta = M(t) - c(b\dot\theta)b$$

$$\Rightarrow I_o\ddot\theta + cb^2\dot\theta + (ka^2 + mgl)\theta = M(t)$$

مثال : ۴ درجه آزادی



فنر و دمپر متوالی یک درجه آزاد محسوب می‌شود

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot x_2^2 + \frac{1}{2}J_c\dot\theta^2 + \frac{1}{2}J_p\dot\varphi^2 \quad / J_c = J_o + mr_2^2 \quad / J_p = \frac{m_p l_p^2}{3}$$

$$U = \frac{1}{2}k_1(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - 2r_2\theta)^2 + \frac{1}{2}k_3\left(l_p\varphi - (r_2 - r_1)\theta\right)^2 + \frac{1}{2}k_4\left(\frac{l_p}{4}\varphi - 0\right)^2$$

$$- m_p g\frac{l_p}{2}(1 - \cos\varphi)$$

چون پتانسیل کاهش می‌یابد

چون به زمین وصل است

$$L \text{ on } x_1: \quad 0 - 0 + k_1(x_1 - x_2) = -c(\dot x_1 - 0) \Rightarrow c_1\dot x_1 + k_1(x_1 - x_2) = 0$$

$$L \text{ on } x_2: \quad m_1\ddot x_2 - 0 - k_1(x_1 - x_2) + k_2(x_2 - 2r_2\theta) = g(t)$$

$$L \text{ on } \theta: \quad J_c\ddot\theta - 0 - 2r_2k_2(x_2 - 2r_2\theta) - k_3(r_2 - r_1)\left(l_p\varphi - (r_2 - r_1)\theta\right) = 0$$

$$L \text{ on } \varphi: \quad I_p\ddot\varphi - 0 + k_3l_p\varphi\left(l_p\varphi - (r_2 - r_1)\theta\right)^2 + k_4\frac{l_p}{4}\left(\frac{l_p}{4}\varphi\right) - m_pg\frac{l_p}{2}\varphi$$

$$= l_pf(t) - c_2\left(\frac{l_p}{2}\dot\varphi - 0\right)\frac{l_p}{2}$$

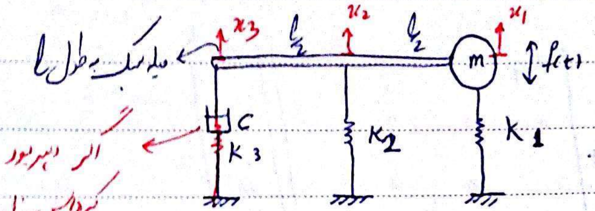
PAPCO

اول همان درجه را می‌نویسیم بعد دیوار

Subject برنامه او
Date

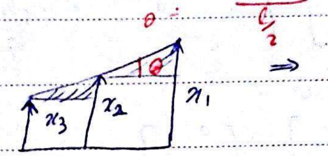
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

مثال ۱: معادلات حاکم؟



اگر دمپر بود یا می بایست کار مجازی بریم
گرداس نداره یا با x, θ بریم

$x_3 = f(x_1, x_2) \Longrightarrow$

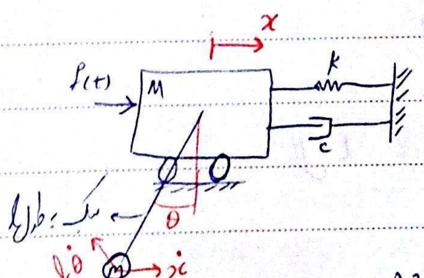


$$\Rightarrow \frac{x_1 - x_2}{\frac{l}{2}} = \frac{x_2 - x_3}{\frac{l}{2}} \Longrightarrow x_3 = 2x_2 - x_1$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 \quad (\text{اینرسی جرم داشت} + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \underbrace{v_G}_{\dot{x}_2}^2)$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} k_3 (2x_2 - x_1)^2 \Longrightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 - 0 + \underbrace{k_1 x_1}_{-k_3(2x_2 - x_1)} = f(t) & L \text{ on } x_1 \Longrightarrow \\ k_2 x_2 + 2k_3 (2x_2 - x_1) = 0 & L \text{ on } x_2 \end{cases}$$

مثال ۲: مدل 2D جرثقیل سقفی



$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + (l\dot{\theta})^2 + 2(\dot{x})(l\dot{\theta}) \cancel{\cos}(\pi - \theta) \quad -\cos\theta$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

$$L \text{ on } x: \quad M\ddot{x} + m\ddot{x} - ml \overbrace{\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\cos\theta)}^{\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta} - 0 + kx = f(t) - c(\dot{x} - 0)$$

$$L \text{ on } \theta: \quad \underbrace{\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta} - ml\dot{x}\cos\theta\right)}_{ml^2\ddot{\theta} - ml\ddot{x}\cos\theta + ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta} - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + mgl\sin\theta = 0$$

جملات غیرخطی ⟵ ⟶ در تقارن غیرخطی ⟵ برای θ بزرگ باید نگه داشته شوند

Subject برنامه درست
Date

$$\left|[K]-[M]\omega^2\right| = 0 \rightarrow \omega_n = \checkmark$$

ماتریس $[M]$ ، $[C]$ ، $[K]$ و بردار تحریک :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_2 l_p^2}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -2K_2 r_2 & 0 \\ 0 & -2K_2 r_2 & & \\ & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \\ 0 \\ f(t)\,l \end{bmatrix}$$

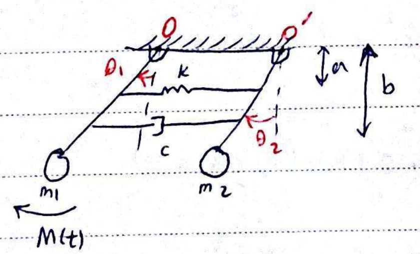
روش دیگر :

$$0 + c_1(\dot{x}_1 - 0) + k_1(x_1 - x_2) = 0$$

$$m_1\ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - 2r_2\theta) = g(t)$$

$\vdots$

مثال : میله سبک به طول l



$$T = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{o'} \dot{\theta}_2^2 \quad / \; I_o = m_1 l^2 \; , \; I_{o'} = m_2 l^2$$

$$U = \frac{1}{2}k\left[a(\theta_1 - \theta_2)\right]^2 + m_1 g l(1-\cos\theta_1) + m_2 g l(1-\cos\theta_2)$$

$$\begin{cases} L \text{ on } \theta_1 & I_o\ddot{\theta}_1 + ka^2(\theta_1 - \theta_2) + m_1 g l\theta_1 = M(t) - c(b\dot{\theta}_1 - b\dot{\theta}_2)b \\ L \text{ on } \theta_2 & I_{o'}\ddot{\theta}_2 - ka^2(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l\theta_2 = -c(b\dot{\theta}_2 - b\dot{\theta}_1)b \end{cases}$$

به نام او

Subject

Date

در مسائل مکانیکی معمولا کوچک است

$$\text{for small } \theta \;\Big\langle\; \begin{cases} \cos\theta \simeq 1 \\ \dot\theta^2 \sin\theta \simeq 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\dot x\,\dot\theta\,\sin\theta}_{\text{کوچک}} \simeq 0$$

اگر همان ابتدا در انرژی جنبشی $\cos\theta = 1$ قرار دهیم در v^2 سریع تر به این معادلات می رسیم

معادلات حرکت

$$\begin{cases} (m+M)\ddot x - ml\ddot\theta \underbrace{}_{+c\dot x} + kx = f(t) \\ ml^2\ddot\theta - ml\ddot x + mgl\theta = 0 \end{cases}$$

uncouple static

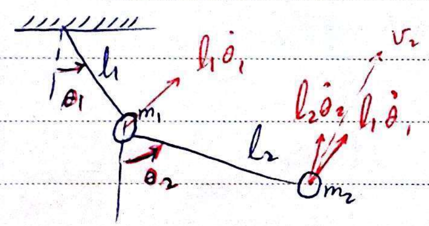
$[K]$

$$\begin{bmatrix} m+M & -ml \\ -ml & ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot x \\ \ddot\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot x \\ \dot\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

couple dyn

$[M]$

در گذر تحلیلی این ترم حذف می شود.



مثال: آونگ دوبل

می توان همین جا این ترم را کنار گذاشت و سریع به معادلات خطی رسید

$$T = \tfrac{1}{2}m_1(l_1\dot\theta_1)^2 + \tfrac{1}{2}m_2\left((l_1\dot\theta_1)^2 + (l_2\dot\theta_2)^2 + 2(l_1\dot\theta_1)(l_2\dot\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)\right)$$

$$U = m_1 g l_1(1-\cos\theta_1) + m_2 g\left((l_1(1-\cos\theta_1)) + (l_2(1-\cos\theta_2))\right)$$

small / حذف می شوند

$$L \text{ on } \theta_1 : \frac{d}{dt}\left(m_1 l_1^2\dot\theta_1 + m_2 l_1^2\dot\theta_1 + m_2 l_1 l_2\dot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right) + m_2 l_1 l_2\,\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_1-\theta_2)$$

$$\ddot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2) - \dot\theta_2\sin(\theta_1-\theta_2)(\dot\theta_1-\dot\theta_2)$$

$$+ (m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1 = 0$$

θ_1

$$L \text{ on } \theta_2 : \frac{d}{dt}\left(m_2 l_2^2\dot\theta_2 + m_2 l_1 l_2\dot\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2)\right) - m_2 l_1 l_2\,\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_1-\theta_2)$$

$$+ m_2 g l_2\sin\theta_2 = 0$$

مانند بالایی

θ_2

به نام او

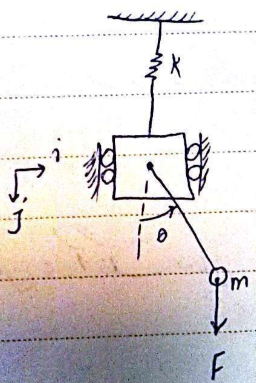
Subject
Date

$$\begin{cases} (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1+m_2) g l_1 \theta_1 = 0 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 g l_2 \theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} (m_1+m_2) l_1^2 & m_1 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1+m_2) g l_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

couple dyn

uncouple static



$$\vec{r} = (l \sin\theta)\vec{i} + (x + l\cos\theta)\vec{j}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad a = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{V} = (l\dot{\theta}\cos\theta)\vec{i} + (\dot{x} - l\dot{\theta}\sin\theta)\vec{j}$$

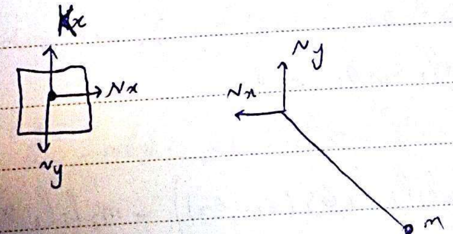
$$F = +F\vec{j}$$

از جنس گشتاور است و نباید نیرو لحاظ است در معادله

$$P = F V \Rightarrow Q = (F\delta x - Fl\sin\theta\,\delta\theta)$$

دمپر $-c\dot{x}\,\delta x$

روش نیوتن :



PAPCO

Scanned by CamScanner

به نام دوست

Subject

Date

$$N_y(-j) + N_x(-i) + mg(j) = ma$$

$$\Sigma M_o = I_o \alpha + \vec{\rho}_{G/O} \times m\vec{a}_o$$

PAPCO