



مدرس‌ان شریف

کارشناسی ارشد

ریاضیات عمومی (۱)

- ✓ ۲۰۰۰ پرسش چهار گزینه‌ای شامل ۱۳۰۰ مسئله حل شده و ۷۰۰ مسئله با پاسخ کلیدی
- ✓ ارائه مطالب به روش‌های کاملاً خلاصه، ساده و فرمول بندی شده
- ✓ ارائه روش‌های سریع و کوتاه جهت تعیین جواب‌ها
- ✓ ارائه ۱۰ آزمون خود سنجی جهت آمادگی هر چه بهتر دانشجویان
- ✓ قابل استفاده دانشجویان دوره‌های کارشناسی به عنوان کتاب مرجع دانشگاهی جهت موفقیت در امتحانات پایان ترم

مؤلفین: مهندس حسین نامی - علیرضا عشقی

خلاصه درس، نکات مهم به همراه سؤالات و پاسخهای
تشریحی کنکورهای سراسری و آزاد ۸۷-۷۵

اولین و قویترین مرکز برگزاری کلاسهای آمادگی آزمون کارشناسی ارشد
 همراه با حضور برترین اساتید و مولفین کتب کنکور کارشناسی ارشد



برگزاری دوره های مکاتبه ای و آزمونهای منظم همراه با صدور کارنامه
 کامپیوتری و ارائه پاسخنامه تشریحی (در تمام نقاط ایران).



برخی از کتب منتشر شده :

مدرسین ارشد کارشناسی ارشد الکترونیک	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد تحلیل مدارهای الکتریکی	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد زبان عمومی	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد معادلات دیفرانسیل	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد ریاضیات مهندسی	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد ریاضیات عمومی (۱)
مدرسین ارشد کارشناسی ارشد سیستم های مخابراتی	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد مدارهای منطقی	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد آمار و احتمالات	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد انجمنه و تحلیل سیستمها	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد سیستمهای کنترل خطی	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد ماشینهای الکتریکی
مدرسین ارشد کارشناسی ارشد مقاومت مصالح	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد مکانیک سیالات	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد زبان تخصصی عمومی	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد تجزیه و تحلیل سیستمهای الکتریکی	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد انجمنه و تحلیل سیستمهای الکتریکی	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد انجمنه و تحلیل سیستمها
مدرسین ارشد کارشناسی ارشد اقتصاد خرد و کلان	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد مدیریت مالی	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد زبان تخصصی عمومی	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد ارتعاشات	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد طراحی اجزای ماشین
مدرسین ارشد کارشناسی ارشد حسابداری مالی	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد حسابداری	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد حسابداری صنعتی	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد زبان تخصصی	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد آمار	مدرسین ارشد کارشناسی ارشد ریاضیات عمومی



تلفنهای روابط عمومی : ۵ - ۶۶۹۴۶۹۶۰



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

خدایا چنان کن سرانجام کار

تو خوشنود باشی و ما رستگار

چه کسم من؟ چه کسم من؟ که بسی وسوسه مندم

که از این سوی کشندم، که از آن سوی کشندم

نفسی آتش سوزان، نفسی سیل گریزان

ز چه اصلم؟ ز چه فصلم؟ ز چه بازار خرندم؟

نفسی رهزن و غولم، نفسی تند و ملولم

نفسی زین دو برونم، که بر آن بام بلندم

(دیوان شمس)

« به نام خدا »

تقدیم به روح پرفتوح شهدا و رهبر کبیر جمهوری اسلامی ایران امام خمینی (ره)

زندگی امروزه جز با همراهی مستمر دانش و اطلاعات روز میسر نیست و اگر زیستن به معنای دانش اندوزی یک هدف والا و مقدس برای بشریت بوده و هست، طی مدارج علمی دانشگاهی نیز یکی از راههای سهل الوصول برای دستیابی به این خاصه فطرت آدمی است. نهادینه شدن علوم در طبقات اختصاصی آکادمیک انگیزه و رغبت جهت نیل به اهداف والا را افزایش می‌دهد. آزمون‌های تستی با تمام انتقادهایی که به همراه خود دارد در حال حاضر بهترین نوع گزینش دانشجویان می‌باشد، لذا مؤسسه علمی - فرهنگی مدرسان شریف در راستای اهداف علمی - آموزشی خود اقدام به ارائه سری کتب آمادگی کنکور کارشناسی ارشد نموده است. کتاب‌های فوق مبتنی بر تجربیات چندین ساله اساتید در دانشگاه‌ها و مراکز آموزشی و بخصوص فعالیت‌های مستمر تدریس، تألیف و تحقیق در مؤسسه مدرسان شریف می‌باشد. با توجه به این که این مجموعه‌ها قبل از چاپ در کلاس‌های آمادگی آزمون کارشناسی ارشد مؤسسه بارها تدریس شده و با ملاحظه نقاط قوت و ضعف دانشجویان گرامی تهیه شده است، لذا امید است بتواند راهگشای ورود دانشجویان به دوره‌های کارشناسی ارشد باشد. کتاب «ریاضی عمومی (۱)» تقدیم به دانشجویان و اساتید محترم می‌گردد.

مدیریت مؤسسه مدرسان شریف

سرشناسه: نامی، حسین.

عنوان و پدیدآور: ریاضی عمومی (۱) / مؤلفین حسین نامی / علیرضا عشقی؛

مشخصات نشر: تهران: مدرسان شریف، ۱۳۸۷.

مشخصات ظاهری: ۴۶۰ ص.

شابک: 3 - 36 - 2838 - 964 - 978

یادداشت: فیپا

یادداشت: چاپ سوم

یادداشت: عنوان روی جلد: مدرسان شریف کارشناسی ارشد ریاضیات عمومی (۱) ...

یادداشت: عنوان عطف: ریاضیات عمومی (۱) کارشناسی ارشد.

عنوان دیگر: مدرسان شریف: کارشناسی ارشد ریاضیات عمومی (۱) ...

عنوان دیگر: ریاضیات عمومی (۱) کارشناسی ارشد.

موضوع: دانشگاهها و مدارس عالی - - ایران - - آزمونها.

موضوع: ریاضیات - - آزمونها و تمرینها (عالی).

موضوع: آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی - - ایران.

شناسه افزوده: عشقی، علیرضا.

شناسه افزوده: مؤسسه علمی - فرهنگی مدرسان شریف.

رده بندی کنگره: ۹۲۲۲ ر ۱۸۳ ن / LB ۲۳۵۲

رده بندی دیویی: ۳۷۸/۱۶۶۴

شماره کتابخانه ملی: ۴۲۵۱۲ - ۸۵ م

نام کتاب: ریاضی عمومی (۱)

مؤلفین: مهندس حسین نامی - علیرضا عشقی

ناشر: انتشارات مدرسان شریف

تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

تاریخ چاپ اول: مهرماه ۱۳۸۵

تاریخ چاپ سوم: مهرماه ۱۳۸۷

حروف چینی: واحد تایپ مؤسسه مدرسان شریف

چاپ و صحافی: مهدی - مینو

قیمت: ۸۹۰۰ تومان

شابک: 3 - 36 - 2838 - 964 - 978

تمام حقوق محفوظ و مخصوص سفارش دهنده مؤسسه مدرسان شریف می‌باشد.

هر گونه کپی، چاپ و نسخه برداری از مطالب این کتاب بیگردد قانونی دارد.

خدایا، مرا آن ده که آن به

افزایش روزافزون فارغ التحصیلان دوره‌های کارشناسی و اشتیاق آنها برای ورود به دوره‌های کارشناسی ارشد و کمبود کتب آمادگی مناسب آزمونهای کارشناسی ارشد هدف اصلی نگارش این کتاب می‌باشد.

با توجه به این که درس «ریاضی عمومی (۱)» معمولاً در سال اول تحصیلی توسط دانشجویان دوره‌های کارشناسی گذرانده می‌شود و پس از گذشت دو سال از آن مطالب فرا گرفته شده تقریباً به فراموشی سپرده شده، لذا کتاب با نگارش ساده و اجتناب از بیان مطالب غیر ضروری (اثبات فرمول‌ها و ...) سعی بر این داشته که دانشجویان جهت موفقیت در آزمون کارشناسی ارشد در کمترین زمان بهترین نتیجه‌گیری را داشته و دیگر نیازی به مراجعه به کتب دیگر نداشته باشند، از ویژگی‌های بارز این کتاب نسبت به دیگر کتب موجود در این زمینه موارد زیر را می‌توان نام برد:

(۱) مطالب به صورت خلاصه و فرمول‌بندی شده و حتی المقدور حل مسائل با روشهای تستی بیان گردیده است.
 (۲) هر فصل کتاب دارای سه بخش کلی است که بخش اول شامل خلاصه درس همراه با مثالهای حل شده می‌باشد که این مثالها عیناً سؤالات دوره‌های گذشته، سؤالات تألیفی و یا سؤالاتی است که در آزمونهای آزمایشی موسسه مدرسان شریف سؤال بوده‌اند. بخش دوم شامل صرفاً سؤالات به همراه پاسخنامه تشریحی مربوط به آزمونهای دوره‌های گذشته در رشته‌های مختلف از سال ۱۳۷۸ تا ۱۳۸۴ است. در بخش سوم هر فصل تستهای تکمیلی مربوط به آن فصل آورده شده است که بعضاً سؤالات مشکلی نسبت به سؤالات دوره‌های قبل در این تستها مشاهده می‌شود. (که به عقیده مؤلفین و دپارتمان ریاضی مؤسسه مدرسان شریف می‌تواند سؤالاتی جالب جهت طرح در آزمونهای آینده باشد.)

(۳) کتاب مجموعاً شامل حدود ۱۳۰۰ تست با پاسخ‌های کاملاً تشریحی و تقریباً ۷۰۰ تست با پاسخ‌های کلیدی است که جمعاً حدود ۲۰۰۰ مسئله غیر تکراری در کتاب گنجانده شده که از این حیث می‌توان کتاب را در بین کتب ریاضی دیگر که برای این منظور تهیه شده‌اند، بی‌نظیر دانست.

(۴) در حل بعضی تست‌ها نوآوری‌های خاص این کتاب (روش‌های حل سریع و کوتاه) مشاهده می‌شود.
 (۵) کلیه سؤالات مربوط به آزمونهای دانشگاه سراسری از سال ۷۸ تا ۸۴ مربوط به اکثر رشته‌ها و همچنین سؤالات منتخب دانشگاه آزاد از سال ۸۰ تا ۸۴ به صورت طبقه‌بندی شده در انتهای فصول مختلف کتب گنجانده شده است.

(۶) سؤالات مربوط به قبل از سال ۷۸ در کتاب به عنوان مثالهای حل شده در هر فصل و یا تحت عنوان تست‌های تکمیلی در کتاب آورده شده است.

(۷) در انتهای کتاب سؤالات آزمون سال ۱۳۸۵ و ۱۳۸۶ و ۱۳۸۷ دانشگاه سراسری (اسفند ۸۴ و اسفند ۸۵ و اسفند ۸۶) به همراه پاسخ‌های کاملاً تشریحی ارائه شده است.

(۸) جهت خودسنجی و آمادگی هر چه بهتر دانشجویان عزیز ۱۰ مرحله آزمون در سه سطح A (سخت)، B (متوسط) و C (آسان) تنظیم شده، که با توجه به مدت زمان پیشنهادی و سطح آزمون دانشجویان عزیز می‌توانند شرایط خود را از لحاظ مقدار آمادگی مورد سنجش قرار دهند.

(۹) مطالب کتاب به گونه‌ای تدوین گردیده که می‌تواند به عنوان مرجع کامل جهت درس ریاضی عمومی (۱) جهت موفقیت در امتحانات پایان ترم دانشگاهها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

با توجه به اینکه هیچ تألیفی خالی از اشکال نیست لذا از همه اساتید و دانشجویان انتظار داریم عنایت فرمایند و اشکالات این کتاب را به آدرسی: فلکه دوم صادقیه روبه‌روی مسجد امام جعفر صادق (ع) - بلوار شهدا - بلاک ۳۵ - آموزشگاه مدرسان شریف ارسال کنند و یا با شماره تلفن ۱۳۸۴۸۶۱ - ۰۹۱۲ تماس حاصل فرمایند. در خاتمه جا دارد از خانم فاطمه هلیلی که تایپ و صفحه‌آرایی این مجموعه را به عهده داشتند، نهایت سپاسگزاری را داشته باشیم.

مهندس حسین نامی - علیرضا عشقی

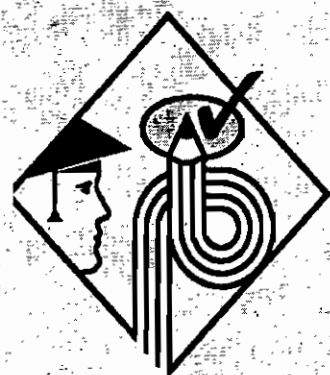
مهرماه ۱۳۸۷



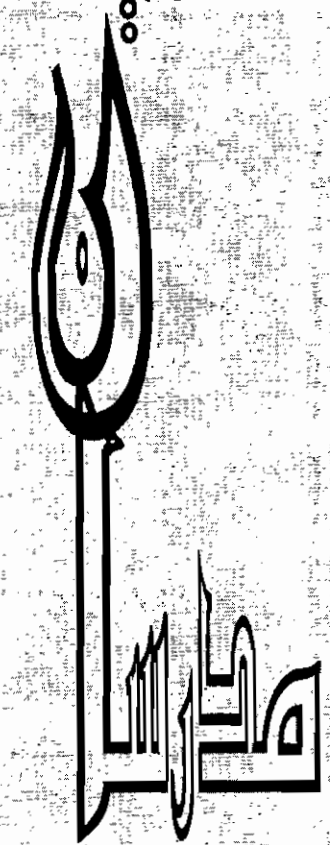
فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	فصل اول : تابع
۲	محاسبه دامنه توابع
۴	اعمال جبری روی توابع
۴	تساوی دو تابع
۴	انواع تابع
۵	خواص قدرمطلق
۶	تابع جزء، صحیح (براکت)
۷	توابع زوج یا فرد
۹	توابع یک به یک
۹	توابع معکوس
۱۱	ترکیب دو تابع
۱۲	توابع وارون مثلثاتی
۱۴	توابع هیپربولیک
۱۷	توابع متناوب
۲۰	برد تابع
۲۳	جدول نمودار توابع مهم
۲۵	انتقال نمودارها
۲۶	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول
۲۹	پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول
۲۲	تست‌های تکمیلی فصل اول
۳۹	فصل دوم : حد و پیوستگی
۳۹	تعریف حد
۳۹	قضایای حد
۴۲	صورت‌های مهم و رفع ابهام آنها
۴۳	صورت $\frac{0}{0}$ و استفاده از قاعده هسپیتال
۴۳	صورت $\frac{\infty}{\infty}$
۴۵	صورت $\infty \times \infty$
۴۶	صورت $\infty - \infty$
۴۷	صورت‌های مهم $\infty^0, 0^\infty$
۴۷	محاسبه حدهایی به صورت $\lim_{x \rightarrow a} U^V = C$ و (U, V) توابعی بر حسب x هستند
۴۹	دو تابع هم‌ارز
۴۹	حد توابع مثلثاتی و استفاده از هم‌ارزی در محاسبه حدود
۵۵	پیوستگی تابع
۵۷	جهش انفعال تابع
۵۸	پیوستگی تابع در یک فاصله
۵۸	تعریف ناپیوستگی رفع شدنی و رفع نشدنی
۵۹	قضیه بولتزانو (مقدار میانی)
۶۰	مجاذب توابع و انواع آن
۶۵	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم
۷۶	پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم
۸۸	تست‌های تکمیلی فصل دوم
۹۵	فصل سوم : مشتق و کاربرد مشتق
۹۵	تعریف مشتق در یک نقطه
۹۶	مشتق چپ و راست
۹۷	رابطه بین مشتق و پیوستگی
۹۸	قواعد مشتق‌گیری
۱۰۰	مشتق‌گیری توابع ضمنی
۱۰۱	مشتق تابع $ g(x) $
۱۰۲	مشتق توابع شامل قدر مطلق
۱۰۳	منحنی‌های پارامتری و مشتق آنها
۱۰۴	قاعده زنجیره‌ای مشتق
۱۰۴	مشتق مرتبه n ام
۱۰۵	فرمول لایب نیتز
۱۰۵	مشتق توابع شامل جزء صحیح
۱۰۶	مشتق تابع معکوس
۱۰۷	عامل صفر کننده در مشتق
۱۰۸	مشتق توابعی به شکل $y = u(x)^{v(x)}$
۱۰۸	مشتق در فیزیک

صفحه	عنوان
۲۶۱	محاسبه گشتاورهای استاتیکی
۲۶۱	محاسبه مختصات مرکز ثقل یک ناحیه مسطح
۲۶۲	مختصات مرکز ثقل یک منحنی مسطح
۲۶۳	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم
۲۶۸	پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم
۲۷۵	تست‌های تکمیلی فصل پنجم
۲۷۹	فصل ششم: دنباله و سری
۲۸۲	همگرایی دنباله (تعریف)
۲۸۲	درجه یک دنباله
۲۸۳	همگرایی سری
۲۸۴	سری تلسکوپی
۲۸۶	سری تلسکوپی به صورت مجموع دو جمله‌ای
۲۸۷	بررسی همگرایی سریها با استفاده از آزمون
۲۸۹	محاسبه فاصله همگرایی و شعاع همگرایی
۲۹۰	سری متناوب و همگرایی مشروط و مطلق
۲۹۱	بسط تیلور و مک‌لورن
۲۹۲	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل ششم
۲۰۴	پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل ششم
۲۳۰	تست‌های تکمیلی فصل ششم
۳۲۵	فصل هفتم: دستگاه مختصات قطبی
۳۲۵	تبدیل دستگاه مختصات قائم به قطبی و بالعکس
۳۲۶	معادله نیم‌خط، خط، دایره و مقاطع مخروطی در مختصات قطبی
۳۲۶	نمودار چند تابع
۳۲۸	شیب یا ضریب خط مماس در منحنی قطبی
۳۲۸	مساحت محصور و طول قوس در مختصات قطبی
۳۲۹	حجم و مساحت حاصل از دوران نمودار قطبی
۳۳۰	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هفتم
۳۳۲	پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هفتم
۳۳۵	تست‌های تکمیلی فصل هفتم
۳۳۷	فصل هشتم: اعداد مختلط
۳۳۷	اعمال حسابی در اعداد مختلط
۳۳۸	شکل قطبی اعداد مختلط
۳۳۹	شکل نمایی عدد مختلط
۳۴۲	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هشتم
۳۴۴	پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هشتم
۳۴۶	تست‌های تکمیلی فصل هشتم
۳۴۸	فصل نهم: ضمیمه
۳۴۸	توان
۳۴۸	رادیکالها
۳۴۹	اتحادهای جبری
۳۵۰	مجموعه‌ها
۳۵۴	معادلات و نامعادلات
۳۵۵	معادله درجه دوم
۳۵۶	مثلثات
۳۶۱	لگاریتم
۳۶۲	تصادف
۳۶۳	نکات مهم معادله خط
۳۶۵	فاکتوریل
۳۶۵	بسط دو جمله‌ای نیوتن
۳۶۷	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل نهم
۳۶۸	پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل نهم
۳۶۹	آزمون‌های خودسنجی (۱ تا ۱۰)
۳۸۹	پاسخنامه آزمون‌های خودسنجی ۱ تا ۱۰
۳۹۰	تست‌های سراسری ۱۳۸۵
۴۰۰	پاسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۵
۴۱۴	تست‌های سراسری ۱۳۸۶
۴۲۲	پاسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۶
۴۳۱	تست‌های سراسری ۱۳۸۷
۴۳۹	پاسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۷
۴۴۷	پاسخنامه تست‌های تکمیلی
۴۴۹	منابع و مراجع

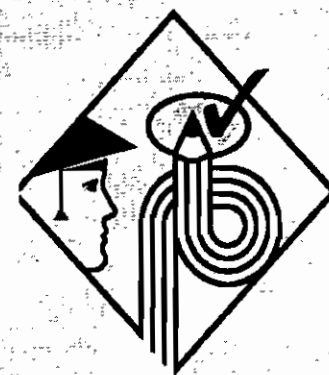


شرف ناشرین

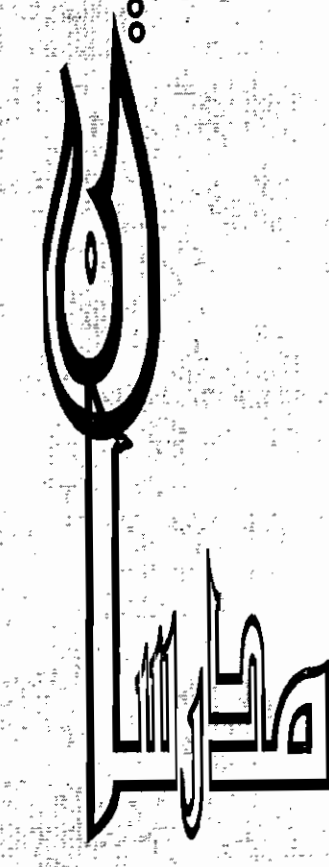


شرف ناشرین

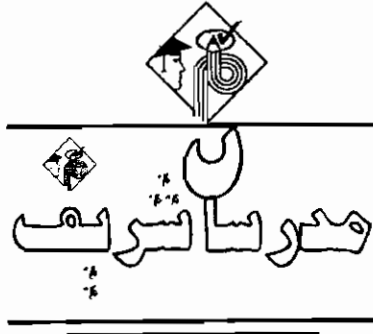
صفحه	عنوان
۱۰۹	کاربرد مشتق
۱۱۰	کمیت‌های وابسته
۱۱۰	معادله خط مماس و قائم بر یک منحنی
۱۱۳	طول مماس و طول قائم
۱۱۳	به دست آوردن زاویه یک منحنی با محور x ها
۱۱۳	به دست آوردن زاویه یک منحنی با محور y ها
۱۱۴	زاویه بین دو منحنی
۱۱۴	یافتن معادله خط مماس یا قائم از نقطه‌ای خارج منحنی
۱۱۵	نقاط اکسترمم تابع (نقاط Max و Min تابع)
۱۱۵	ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع
۱۱۶	تعیین Max و Min نسبی تابع به کمک مشتق‌گیری
۱۱۶	آزمون مشتق دوم برای تعیین اکسترمم تابع
۱۱۷	تعیین نقاط Max و Min مطلق تابع
۱۱۷	تعیین صعودی و نزولی بودن توابع به کمک مشتق
۱۲۱	فضایای زل، مقدار میانگین و کوشی
۱۲۲	کاربرد مشتق در تعیین مفادیر حداکثر و حداقل (کاربردهای صنعتی)
۱۲۵	توابع هموگرافیک
۱۲۶	چند نکته در مورد نمودار توابعی به فرم $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ ($a' \neq 0, a \neq 0$)
۱۲۶	چند نکته در مورد نمودار توابعی به فرم کلی $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ ($a' \neq 0$)
۱۲۸	دیفرانسیل تابع
۱۲۸	کاربرد دیفرانسیل
۱۳۱	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم
۱۴۷	پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم
۱۶۸	تست‌های تکمیلی فصل سوم
۱۷۶	فصل چهارم: انتگرال
۱۷۶	فرمولهای مهم انتگرال
۱۸۰	انتگرالهای \cos, \sin با توان فرد
۱۸۰	انتگرالهای \cos, \sin با توان زوج
۱۸۱	انتگرالهای \cot, \csc, \sec, \tan با توان فرد
۱۸۱	انتگرالهای \cot, \csc, \sec, \tan با توان زوج
۱۸۲	محاسبه انتگرالهای حاصل ضرب دو جمله سینوسی و کسینوسی
۱۸۳	محاسبه انتگرالهایی به صورت $\int \sin^m x \cos^n x dx$ که در آنها m و n اعداد صحیح هستند
۱۸۴	روش انتگرال‌گیری جزء به جزء
۱۸۶	انتگرال‌گیری به کمک تشکیل جدول
۱۸۷	محاسبه انتگرالهایی به فرم کلی $\int R\sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ (چند جمله‌ای گویا بر حسب x می‌باشد)
۱۸۸	محاسبه انتگرالهایی بصورت $\int R(\sin x, \cos x) dx$ (یک تابع گویا می‌باشد)
۱۸۸	روش انتگرال‌گیری به روش تجزیه کسرها
۱۹۰	کاهش مرتبه انتگرال‌گیری
۱۹۱	انتگرال معین
۱۹۲	نکات مهم انتگرالهای معین
۱۹۵	محاسبه انتگرالهای شامل براکت (جزء صحیح)
۱۹۷	محاسبه انتگرالهای شامل قدر مطلق
۱۹۷	تابع گاما و بتا
۱۹۸	مشتق‌گیری از انتگرال
۲۰۰	تعمیم فرمول مشتق انتگرال
۲۰۰	انتگرالهای غیرعادی (نابرسه)
۲۰۱	آزمون مقایسه
۲۰۲	همگرایی مطلق و همگرایی مشروط
۲۰۵	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم
۲۳۱	پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم
۲۴۳	تست‌های تکمیلی فصل چهارم
۲۵۲	فصل پنجم: کاربرد انتگرال
۲۵۲	محاسبه حد مجموع به کمک انتگرال معین
۲۵۴	محاسبه مفادیر متوسط توابع
۲۵۸	محاسبه حجم
۲۵۹	فضایای پاپوس (گلدین)
۲۶۰	محاسبه طول قوس منحنی



شرف ناشرین



شرف ناشرین



فصل اول

«تابع»

تعریف ۱: رابطه $f: A \rightarrow B$ را تابع گوئیم هرگاه مجموعه‌ای که متشکل از زوجهای مرتب می‌باشد، دارای مؤلفه اول یکسان نباشد، به عبارت دیگر هرگاه دو زوج مرتبی در رابطه f ، مختص‌های اول یکسانی داشته باشند، در این صورت مختص‌های دوم آنها نیز باید با هم برابر باشد، به عبارت ساده‌تر به ازای دو x برابر، y های برابر داشته باشیم.

کدام مثال ۱: به ازای کدام مقدار m رابطه $f = \{(3, 2), (1, 2), (m, 1), (3, m^2 + m)\}$ یک تابع می‌باشد؟

- ۱) -2 و ۲) 1 ۳) -2 ۴) 2

پاسخ: گزینه «۳» چون زوج‌های $(3, 2)$ و $(3, m^2 + m)$ در ضابطه این تابع قرار دارند باید مؤلفه‌های دوم آنها نیز با هم برابر باشد (به دلیل تساوی مؤلفه اول آنها) پس داریم:

$$m^2 + m = 2 \rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \rightarrow (m-1)(m+2) = 0 \rightarrow m = 1, m = -2$$

اگر $m = 1$ باشد آنگاه زوج‌های $(1, 1)$ و $(1, 2)$ ایجاد می‌شود که نمی‌توانند در ضابطه یک تابع باشند، پس $m = -2$ قابل قبول است.

* تذکره ۱: رابطه‌هایی که در آنها y داخل قدر مطلق، براکت، دارای توان زوج و یا کمان یک نسبت مثلثاتی باشد، معمولاً تابع نیستند.

کدام مثال ۲: کدامیک از روابط زیر می‌تواند بیانگر ضابطه یک تابع باشد؟

۱) $|y| + (x-1)^2 = 1$ ۲) $\sin y = x$ ۳) $(y-1)^2 + (x-1)^2 = 0$ ۴) $[y] = x$

پاسخ: گزینه «۳» یا توجه به تذکره ۱ ضابطه گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ تابع نمی‌باشد اما در رابطه گزینه «۳» درست است که توان y زوج است ولی تنها زوج مرتب $A(1,1)$ متعلق به رابطه می‌باشد و ضابطه، تابع می‌باشد.

نکته ۱: تشخیص تابع از روی نمودار آن: هرگاه خطی موازی محور y ها رسم شود نباید منحنی تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند.

معاسبه $f(x)$:

در مسائلی که به شکل $f[g(x)] = h(x)$ می‌باشد و ضابطه $f(x)$ خواسته شده ابتدا $g(x) = t$ قرار داده و پس از به دست آوردن x بر حسب t در معادله اصلی به جای تمام x ها، t قرار داده و پس از ساده کردن تغییر متغیر نهایی تبدیل مجدد t به x انجام داده می‌شود.

کدام مثال ۳: اگر $f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = \frac{x-1}{2x}$ باشد، $f(x)$ عبارت است از:

۱) $\frac{2x+4}{2x+1}$ ۲) $\frac{2x+1}{2x+4}$ ۳) $\frac{2x}{2x+1}$ ۴) $\frac{2x-1}{x}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\frac{x-2}{x+1} = t \Rightarrow xt + t = x - 2 \Rightarrow x = \frac{t+2}{1-t} \Rightarrow f(t) = \frac{t+2}{2(t+2)} = \frac{t+2-1+t}{2t+4} = \frac{2t+1}{2t+4} \Rightarrow f(t) = \frac{2t+1}{2t+4} \Rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{2x+4}$$

اولین و قویترین مرکز برگزاری کلاسهای کنکور

و دوره‌های مکاتبه‌ای کارشناسی ارشد

و کاردانی به کارشناسی در سطح ایران

مؤسسه علمی - فرهنگی مدرسین شریف برای آمادگی هر چه بیشتر دانشجویان عزیز جهت آزمونهای کارشناسی ارشد و کاردانی به کارشناسی کلاسهای حضوری زیر را با زمانبندی ذیل هر ساله برگزار می‌کند.

تاریخ شروع ثبت‌نام در هر سال	تاریخ شروع ثبت‌نام در هر سال
کلاسهای آمادگی آزمون کارشناسی ارشد	کلاسهای آمادگی آزمون کارشناسی ارشد
دوره اول: بیستم آذر ماه لغایت بیستم دی‌ماه (دوره عادی ویژه دانشگاه سراسری)	دوره اول: بیستم اردیبهشت ماه لغایت بیستم تیر ماه
دوره دوم: بیست و پنجم دی ماه لغایت بیست و پنجم فروردین ماه (دوره فشرده ویژه دانشگاه سراسری)	دوره دوم: بیستم مرداد ماه لغایت بیستم مهر ماه
دوره سوم: بیستم فروردین ماه لغایت بیستم خرداد ماه (دوره عادی ویژه دانشگاه آزاد)	دوره سوم: سی‌ام مهر ماه لغایت دهم دی ماه
دوره چهارم: بیستم خرداد ماه لغایت بیستم تیرماه (دوره عادی ویژه دانشگاه آزاد)	مراکز تشکیل کلاسها:
دوره پنجم: بیستم تیرماه لغایت بیستم مرداد ماه (دوره فشرده ویژه دانشگاه آزاد)	سیدخندان - انقلاب - آریاشهر
دوره ششم: بیستم مرداد ماه لغایت اول مهر ماه (دوره فشرده ویژه دانشگاه آزاد)	ونک - کرج
	تلفنهای مشاوره و ثبت‌نام:
	۵-۶۶۹۴۶۹۶۰

تذکره: با توجه به استقبال بی‌نظیر دانشجویان گرامی از کلاسهای مذکور کلاسهای فوق در کدهای مجزای زمانی روزهای زوج، روزهای فرد و همچنین کلاسها صرفاً پنج‌شنبه و جمعه ویژه شاغلین و داوطلبین شهرستانی در نقاط مختلف تهران و کرج برگزار می‌گردد.

مثال ۴: اگر $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ضابطه $f(x)$ را بیابید.

پاسخ: $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

بنابراین: $f(t) = t^2 - 2$ یا $f(x) = x^2 - 2$.

مثال ۵: اگر $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ضابطه $f(x)$ را بیابید.

پاسخ: $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x + \frac{2}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2t$

بنابراین: $f(t) = t^2 - 2t$ و در نتیجه $f(x) = x^2 - 2x$.

محاسبه دامنه توابع

دامنه تابع: اگر رابطه f تابع باشد، به مختص های اول آن (اعضای مجموعه A) دامنه f می گویند و آنرا معمولاً با نماد D_f نمایش می دهیم. عبارت دیگر به مجموعه x هائی که برای آنها y وجود داشته باشد، دامنه تابع گوئیم.

۱- توابع کثیرالجزءه یا خطی: دامنه اینگونه توابع اعداد حقیقی (R) است.

۲- توابع کسری ($y = \frac{f(x)}{g(x)}$): دامنه اینگونه توابع به شرط آنکه دامنه صورت کسر اعداد حقیقی باشد، اعداد حقیقی R به جز مقادیری که

مخرج کسر را صفر می کنند، می باشد.

به عبارت دیگر: $D_f = R - \{x | g(x) = 0\}$

مثال ۶: دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 5x + 6}$ را بدست آورید؟

پاسخ: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow D_f = R - \{2, 3\}$

تذکر ۲: به نقاطی که مخرج را صفر می کند، نقاط انفصال تابع نیز گفته می شود.

۳- توابع رادیکالی: در اینگونه توابع اگر فرجه رادیکال زوج باشد، باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد و اگر فرجه رادیکال فرد باشد دامنه تابع، همان دامنه عبارت زیر رادیکال خواهد بود.

مثال ۷: دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ کدام بازه است؟

(۱) $(-\infty, 0]$ (۲) $[1, 2)$ (۳) $[0, 2)$ (۴) $(2, \infty)$

پاسخ: گزینه «۳»

$\begin{cases} 2-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \\ \frac{x}{2-x} \geq 0 \Rightarrow \text{نماین علامت} \Rightarrow 0 \leq x < 2 \end{cases} \Rightarrow D_f = [0, 2)$

مثال ۸: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$ کدام فاصله است؟

(۱) $R - (-1, 1)$ (۲) $R - (0, 1)$ (۳) $R - (-1, 0)$ (۴) $(R - (-1, 1)) \cup \{0\}$

پاسخ: گزینه «۴» عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد، یعنی $x^2 - |x| \geq 0$ ، حال برای حل این نامساوی دو حالت در نظر می گیریم:

$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ x < 0 \Rightarrow x^2 + x \geq 0 \Rightarrow x(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \end{cases}$

توجه کنید که $x = 0$ نیز در دامنه قرار دارد پس گزینه (۴) صحیح است.

۴- دامنه توابع لگاریتمی $y = \log_{k(x)}^{g(x)}$:

در اینگونه توابع عبارتی که از آن لگاریتم گرفته می شود، باید بزرگتر از صفر باشد، ضمناً شرایط مبنای لگاریتم نیز باید مشخص باشد.

$D_f = \{x | g(x) > 0, k(x) > 0, k(x) \neq 1\}$

مثال ۹: حوزه تعریف تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\log \frac{\Delta x - x^2}{4}}$ کدام است؟

(۱) $x \geq 4$ (۲) $x \leq 1$ و $x \geq 4$ (۳) $x \leq -1$ (۴) $1 \leq x \leq 4$

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: خود لگاریتم چون زیر رادیکال می باشد، باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد. پس داریم:

$\begin{cases} \frac{\Delta x - x^2}{4} > 0 \\ \log \frac{\Delta x - x^2}{4} \geq 0 \end{cases} \rightarrow \log \frac{\Delta x - x^2}{4} \geq 0 \Rightarrow \frac{\Delta x - x^2}{4} \geq 1 \Rightarrow x^2 - \Delta x + 4 \leq 0 \rightarrow 1 \leq x \leq 4$ تعیین علامت

تذکر ۳: توجه شود که در اکثر تستهای مربوط به تعیین دامنه توابع می توان از روش سریع عددگذاری در ضابطه تابع استفاده کرد.

روش دوم: اگر $x = 5$ را در نظر بگیریم آنگاه: $f(5) = \sqrt{\log 0}$ می شود و می دانیم که $\log 0$ وجود ندارد و به ازای $x = -1$ نیز $f(-1) = \sqrt{\log(-1)}$ و مانند حالت قبل $\log(-1)$ نیز وجود ندارد.

توجه شود که حالت (۱) گزینه ۱ و حالت (۲) گزینه ۲ را از مجموعه جوابها خارج می کند، این روش با کمی تمرین و دقت روش مناسبی در تعیین دامنه توابع می باشد.

مثال ۱۰: دامنه تابع با ضابطه $y = \log_x(x-2)$ کدام است؟

(۱) $D_y = \{x | x \in R, x > 2\}$ (۲) $D_y = R - \{2\}$ (۳) $D_y = R - \{-2\}$ (۴) $D_y = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

پاسخ: مشخص است که اعداد منفی جزء جواب نیستند، لذا گزینه ۱ صحیح است.

نامساوی های لگاریتمی:

نامساوی $\log_a N \geq 0$ و $\log_a N \leq 0$ را در نظر بگیرید برای بحث در مورد این نامساوی به دو حالت زیر توجه کنید.

(۱) اگر $a > 1$ باشد، آنگاه: (۲) اگر $0 < a < 1$ باشد، آنگاه:

$\begin{cases} N \geq 1 \Leftrightarrow \log_a N \geq 0 \\ 0 < N \leq 1 \Leftrightarrow \log_a N \leq 0 \end{cases}$

مثال ۱۱: دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)}$ کدام است؟

(۱) $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ (۲) $(-3, -2\sqrt{2}]$ (۳) $[-3, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, 3)$ (۴) $(-3, -2\sqrt{2}) \cup [2\sqrt{2}, 3)$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به حالت دوم بیان شده در بالا خواهیم داشت.

$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(9-x^2) \geq 0 \Rightarrow 0 < 9-x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 \geq 8 \Rightarrow x \geq 2\sqrt{2} \text{ یا } x \leq -2\sqrt{2} \\ 9-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow -3 < x < 3 \end{cases} \xrightarrow{(2), (1)} D_f = (-3, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, 3)$

مثال ۱۲: دامنه تابع $f(x) = \log_7(\log_7(\log_7(\log_7 x)))$ کدام است؟

(۱) $D_f = (8, +\infty)$ (۲) $D_f = [5, +\infty)$ (۳) $D_f = (9, +\infty)$ (۴) $D_f = [9, +\infty)$

پاسخ: گزینه «۱» $\log_7(\log_7(\log_7(\log_7 x))) > 0 \Rightarrow \log_7(\log_7 x) > 1 \Rightarrow \log_7 x > 7 \Rightarrow x > 7^7 \Rightarrow x > 8 \Rightarrow D_f = (8, +\infty)$

مثال ۱۳: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log_7(x-2)}$ کدام فاصله است؟

(۱) $[3, 4)$ (۲) $(3, 4]$ (۳) $[2, 4)$ (۴) $(2, 4]$

پاسخ: گزینه «۴»

$\begin{cases} x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ 1 - \log_7(x-2) \geq 0 \Rightarrow \log_7(x-2) \leq 1 \Rightarrow x-2 \leq 7 \Rightarrow x \leq 9 \end{cases}$

نکته ۲: اگر دامنه تابع $y = f(x)$ فاصله $[a, b]$ باشد برای تعیین دامنه تابع $y = f(u)$ باید u را در فاصله a و b در نظر گرفته و حدود تغییرات x را پیدا کنیم. (u تابعی بر حسب x است).

مثال ۱۴: تابع $f(x)$ در فاصله $[0, 1]$ تعریف شده است. حوزه تعریف تابع $f(2x^2)$ کدام است؟

(۱) $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ (۲) $0 \leq x \leq 1$ (۳) $1 \leq x \leq 2$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه «۴»

اعمال جبری روی توابع

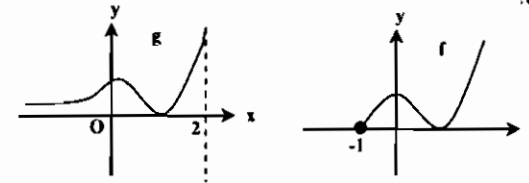
(۱) $(f+g)(x) = f(x) + g(x), D_{f+g} = D_f \cap D_g$
 (۲) $(f-g)(x) = f(x) - g(x), D_{f-g} = D_f \cap D_g$
 (۳) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
 (۴) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$

تساوی دو تابع

دو تابع f و g را مساوی گویند هرگاه علاوه بر اینکه ضابطه آنها با هم برابر است، دامنه آنها نیز با هم برابر باشد.

مثال ۱۵: توابع $f(x) = x + 2$ و $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ با هم مساوی نیستند. زیرا دامنه $f(x)$ برابر R ولی دامنه $g(x)$ برابر $R - \{3\}$ می باشد.

مثال ۱۶: نمودار $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر است. دامنه $f-g$ کدام است؟



- (۱) $(1, +\infty)$
- (۲) $(2, +\infty)$
- (۳) $(-1, 2)$
- (۴) $(-1, 2]$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نمودارها $D_f = [-1, +\infty), D_g = (-\infty, 2)$ لذا داریم:

$D_{f-g} = D_f \cap D_g = (-\infty, 2) \cap [-1, +\infty) = [-1, 2)$

انواع تابع

۱- تابع چند ضابطه‌ای: گاهی مقدار یک تابع در دامنه‌اش با بیش از یک ضابطه بیان می‌شود. مثال:

$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

مثال ۱۷: تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2} & 2 < x \leq 3 \\ 2x - 5 & x > 3 \end{cases}$ مفروض است، مقدار $f(\sqrt{8})$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (۳) $4\sqrt{2}-5$ (۴) $3\sqrt{2}-1$

پاسخ: گزینه «۱» عدد $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ بزرگتر از ۲ و کوچکتر از ۳ می‌باشد لذا باید از ضابطه دوم تابع مقدار $f(\sqrt{8})$ را محاسبه کنیم:

$f(\sqrt{8}) = \frac{1}{\sqrt{8}-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}-2} \times \frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}+2} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$

تذکر ۴: روابط چند ضابطه‌ای در شرایطی می‌توانند تابع باشند، که اولاً تک تک ضابطه‌ها در دامنه تعریفشان تابع باشند، ثانیاً دامنه آنها نقطه مشترکی نداشته باشد و اگر دامنه ضابطه‌ها دارای ناحیه (یا نقطه) مشترک با یکدیگر بود به ازای x های مشترک، y های برابر حاصل شود.

برای مثال ضابطه $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ x^2-1 & x \leq 1 \end{cases}$ تابع می‌باشد.

۲- تابع ثابت: تابعی است که به ازای هر x متعلق به دامنه، تنها یک y ثابت مشخص شود.

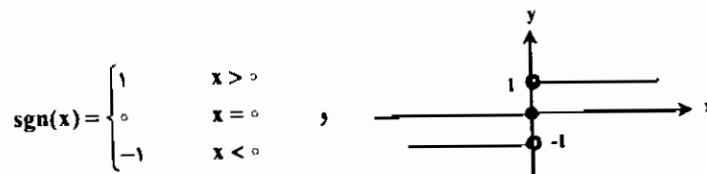
$f(x) = c$
 $f(x) = \sqrt{x-|x|} \xrightarrow{x \in D_f} f(x) = 0$

بعنوان مثالی برای تابع ثابت می‌توان تابع مقابل را بیان نمود:

۳- تابع همانی: تابعی است که هر عضو دامنه را به خود آن عضو از دامنه نسبت دهد ($f(x) = x$) این تابع را با $I(x)$ نمایش می‌دهیم. نمودار تابع همانی همان نیمساز ربع اول و سوم می‌باشد.

تذکر ۵: دامنه و برد تابع همانی با هم برابر می‌باشد.

۴- تابع علامت: این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:



۵- تابع قدرمطلق: این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

به عبارت دیگر اگر عبارت داخل قدرمطلق مثبت بود، قدر مطلق را برمی‌داریم و اگر عبارت داخل قدرمطلق منفی بود، آن عبارت را در یک علامت منفی ضرب و سپس علامت قدرمطلق را برمی‌داریم.

خواص قدرمطلق

(۱) $|x| \geq 0$
 (۲) $|-x| = |x|$
 (۳) $|x| = a \xrightarrow{a > 0} x = \pm a$
 (۴) $x^2 < a^2 \Rightarrow |x| < a \xrightarrow{a > 0} -a < x < a$
 (۵) $|x| \geq a \xrightarrow{a > 0} x \geq a \text{ یا } x \leq -a$
 (۶) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
 (۷) $\sqrt[n]{x^n} = |x|$
 (۸) $|x - y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ (نامساوی مثلثی)
 (۹) $|x - y| \geq ||x| - |y||$
 (۱۰) $-|x| \leq x \leq |x|$

مثال ۱۸: عبارت صحیح کدام است؟

(۱) $|x \pm y| \geq |x| + |y|$ (۲) $|x \pm y| < |x| + |y|$ (۳) $|x \pm y| = |x| + |y|$ (۴) $|x \pm y| > |x| + |y|$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به خاصیت ۸ قدر مطلق

مثال ۱۹: اگر $|x| \leq a$ آنگاه:

(۱) $-a < x < a$ (۲) $x \leq -a$ یا $x \geq a$ (۳) $-a \geq x \geq a$ (۴) $-a \leq x \leq a$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به خاصیت ۴ قدرمطلق.

بررسی نامساوی مثلثی:

(۱) اگر x و y هم‌علامت نباشند آنگاه: $|x - y| = |x| + |y| > |x| - |y|$ خواهد بود.

(۲) اگر x و y هم‌علامت باشند آنگاه تساوی $|x - y| = |x| - |y|$ وقتی برقرار است که $|x| \geq |y|$ باشد و همواره تساوی $|x + y| = |x| + |y|$ برقرار خواهد بود.

(۳) اگر $|x| < |y|$ آنگاه: $|x - y| > |x| - |y|$ خواهد بود.

مثال ۲۰: به ازای کدام مقدار x معادله $|x^2 + 4x + 9| + |2x - 3| = |x^2 + 4x + 9| + (2x - 3)$ همواره برقرار است؟

(۱) $x \geq \frac{3}{2}$ (۲) $x \geq \frac{3}{4}$ (۳) $x \geq \frac{9}{4}$ (۴) $x \geq \frac{4}{9}$

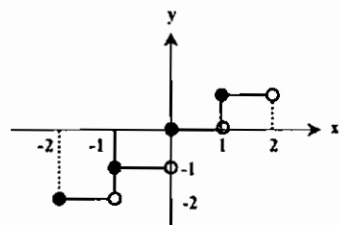
پاسخ: گزینه «۲» یا توجه به مطالب فوق تساوی وقتی برقرار است که $x^2 + 4x + 9$ و $2x - 3$ هم‌علامت باشند. از طرفی چون

$x^2 + 4x + 9$ همواره مثبت است لذا $2x - 3 \geq 0$ و یا $x \geq \frac{3}{2}$ می‌باشد.



رسم توابع $y = [f(x)]$:

برای ترسیم نمودار اینگونه توابع ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس خطوط $y = k$ را ($k \in \mathbb{Z}$) رسم می‌کنیم تا نمودار $y = f(x)$ را قطع کند و روی آن پاره خطهای مساوی ایجاد کند. قسمتی از نمودار که بین نقطه‌های برخورد دو خط $y = k$ و $y = k + 1$ با نمودار $y = f(x)$ قرار دارد بر خط $y = k$ تصویر می‌کنیم، در نهایت ذکر این نکته لازم است که به نقاط ابتدا و انتها را از لحاظ توپر و یا توخالی بودن باید توجه کرد.



مثال ۲۴: نمودار تابع $y = [x]$ را در فاصله $-2 \leq x < 2$ رسم کنید.

$$\begin{aligned} -2 \leq x < -1 &\rightarrow [x] = -2 \rightarrow y = -2 \\ -1 \leq x < 0 &\rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = -1 \\ -0 \leq x < 1 &\rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = 0 \\ 1 \leq x < 2 &\rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = 1 \end{aligned}$$

مثال ۲۵: حاصل $||[7x] - [5x]||$ به ازای $x = -\frac{1}{4}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

پاسخ: گزینه «۴»

$$||[-\frac{7}{4}] - [-\frac{5}{4}]|| = ||[-2] - [-1]|| = |-1| = 1$$

مثال ۲۶: مجموعه جوابهای معادله $[x]^2 + 2[x] - 3 = 0$ کدام است؟

(۱) $-2 \leq x < -1$ (۲) $2 \leq x < 2$ (۳) هیچکدام (۴) $\begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ -2 \leq x < -1 \end{cases}$

پاسخ: گزینه «۴» مجموع ضرائب صفر است، پس یک ریشه معادله (۱) و ریشه دیگر معادله برابر $\frac{c}{a}$ یعنی (-۳) است، پس داریم:

$$\begin{cases} [x] = -3 \rightarrow -2 \leq x < -1 \\ [x] = 1 \rightarrow 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

توابع زوج یا فرد

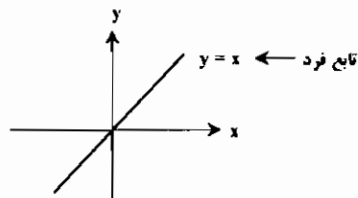
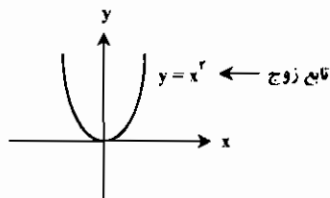
تابع یا ضابطه $y = f(x)$ را در نظر بگیرید اگر به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $-x \in D_f$ آنگاه:

(۱) تابع زوج است هرگاه $f(x) = f(-x)$

(۲) تابع فرد است هرگاه $f(x) = -f(-x)$

تذکر ۷: با توجه به تعریفهای فوق، در توابع فرد $f(-x) + f(x) = 0$ و در توابع زوج $f(-x) - f(x) = 0$ خواهد بود.

نکته ۳: منحنی توابع فرد نسبت به مبدأ مختصات و نمودار توابع زوج نسبت به محور y متقارن است.



نکته ۴: تابع با ضابطه $f(x) = c$ همواره زوج است.

نکته ۵: تابع با ضابطه $f(x) = 0$ تابعی هم زوج و هم فرد است.

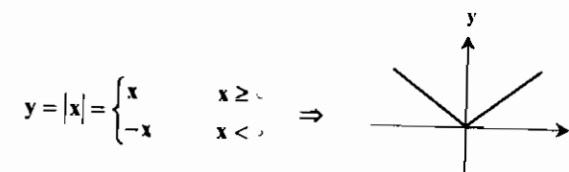
مثال ۲۷: کدام یک از توابع زیر هم فرد و هم زوج می‌باشد؟

(۱) $f(x) = \sqrt{[x] + [-x]}$ (۲) $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ (۳) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ (۴) $f(x) = \sqrt{\sin \pi [x]}$

(۱) گزینه ۱ و ۳ (۲) گزینه ۱ و ۳ و ۴ (۳) گزینه ۱ و ۲ و ۳ (۴) گزینه ۱ و ۴

رسم تابع قدر مطلق:

برای رسم اینگونه توابع ریشه‌های داخل قدرمطلق به ازای مقادیر مختلف (منفی یا مثبت) بدست آورده و عبارت را تعیین علامت می‌کنیم سپس برای ضابطه‌های مختلف بدست آمده در فواصل مختلف نمودار آنرا رسم می‌کنیم.



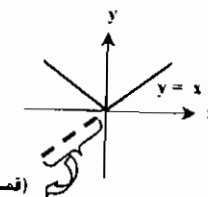
تذکر ۶: بطور کلی برای رسم نمودار توابعی به شکل $y = [f(x)]$ نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس آن قسمت از منحنی که زیر محور طولها واقع است را نسبت به محور طولها قرینه می‌کنیم.

مثال ۲۱: نمودار تابع $y = |x|$ را رسم کنید.

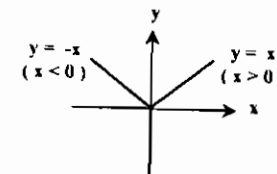
پاسخ:

روش اول: برای $x > 0$ باید نمودار $y = x$ را رسم کنیم. برای $x < 0$ باید نمودار $y = -x$ را رسم کنیم.

روش دوم: ابتدا نمودار $y = x$ را رسم کرده و آن قسمت از منحنی که زیر محور طولها واقع است را نسبت به محور طولها قرینه می‌کنیم.



(قسمتی که قرینه شده است)



مثال ۲۲: مجموعه جواب نامعادله $|x-1| < 8$ کدام است؟
 (۱) $x < 3$ (۲) $3 < x < 7$ (۳) $x < 1$ (۴) $1 < x < 3$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{aligned} 1) \quad x - 1 \geq 0 &\Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow 2x + x - 1 < 8 \Rightarrow 3x < 9 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow 1 \leq x < 3 \quad (1) \\ 2) \quad x - 1 < 0 &\Rightarrow x < 1 \Rightarrow 2x + 1 - x < 8 \Rightarrow x < 7 \Rightarrow x < 1 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \right\} \xrightarrow{(2), (1)} x < 3$$

تابع جزء صحیح (براکت)

هر عدد حقیقی را می‌توان به صورت مجموع یک عدد صحیح (n) و یک عدد حقیقی نامنفی ($0 \leq p < 1$) نمایش داد، جزء صحیح x را بقدم $[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, x = n + p, 0 \leq p < 1$ نمایش می‌دهیم:

برای مثال جزء صحیح $x = 3/7$ برابر ۳ و جزء صحیح $x = -1/6$ برابر -۲ می‌باشد.

خواص تابع جزء صحیح:

(۱) $[x] \leq x < [x] + 1$

(۲) $x - 1 < [x] \leq x$

(۴) $[x - [x]] = 0$

(۳) $0 \leq p = x - [x] < 1$

(۶) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

(۵) $[x + n] = [x] + n, (n \in \mathbb{Z})$

(۸) $[x + [x]] = 2[x]$

(۷) $[x + y] = [x] + [y]$ یا $[x + y] = [x] + [y] + 1$

مثال ۲۳: جواب معادله $\frac{[x + [x]]}{4} + [x] = [x + [x]]$ کدام است؟

(۴) $3 \leq x < 4$

(۳) $2 \leq x < 3$

(۲) $0 \leq x < 1$

(۱) $1 \leq x < 2$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به خاصیت (۸) جزء صحیح داریم:

$$\frac{2[x]}{4} + [x] = 2[x] \Rightarrow \frac{[x]}{2} = [x] \Rightarrow [x] = 2[x] \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

✓ پاسخ: گزینه «۲»

چون عبارت زیر رادیکال می باشد، لذا ضابطه دوم نمی تواند برقرار باشد لذا $f(x) = 0$ و بنابراین $f(x)$ هم زوج و هم فرد است.

$$1) [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases} \Rightarrow$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

تابع علامت $Sgn(x)$ می باشد و این تابع، تابعی فرد است.

$$3) f(x) = \left[\frac{x^2}{x^2+1} \right] \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} < 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x^2}{x^2+1} \right] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$4) f(x) = \sqrt{\sin \pi [x]} \Rightarrow$$

دقت شود که به ازای هر مقدار x ، $[x]$ عددی صحیح مانند k است و می دانیم $\sin k\pi$ همواره برابر صفر می باشد لذا $f(x) = 0$ و در نتیجه هم زوج و هم فرد است.

نکته ۶: شرط لازم برای آنکه یک تابع فرد باشد آن است که $f(0) = 0$ یا تابع در $x=0$ تعریف نشده باشد.

نکته ۷: حاصلضرب دو تابع فرد، تابعی زوج است.

نکته ۸: حاصلضرب یک تابع فرد در یک تابع زوج، تابعی فرد است.

نکته ۹: مجموع و تفاضل دو تابع فرد، فرد است.

نکته ۱۰: در توابع به شکل $y = \log(ax + \sqrt{bx^2 + 1})$ اگر $a^2 = b$ آنگاه تابع فرد است.

نکته ۱۱: تابع علامت $Sgn(x)$ تابعی فرد می باشد.

نکته ۱۲: اگر f و g یکی زوج و دیگری فرد باشد آنگاه $f \circ g$ و $g \circ f$ زوج می باشند.

مثال ۲۸: کدامیک از توابع زیر زوج است؟

$$1) y = x \sin x \quad 2) y = x \cos x \quad 3) y = x^2 \quad 4) y = \log(3x + \sqrt{9x^2 + 1})$$

✓ پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نکته ۱۲، گزینه ۴ تابعی فرد است.

$$1) f(x) = x \rightarrow f(-x) = -x = -f(x) \Rightarrow \text{تابع فرد است}$$

$$2) f(x) = \cos x \rightarrow f(-x) = \cos(x) = f(x) \Rightarrow \text{تابع زوج است}$$

$$3) f(x) = \sin x \rightarrow f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x) \Rightarrow \text{تابع فرد است}$$

با توجه به نکته ۱۱ تابع $y = x \sin x$ حاصلضرب دو تابع فرد است، پس تابعی زوج است و با توجه به نکته ۱۲ تابع $y = x \cos x$ تابعی فرد است.

مثال ۲۹: اگر $f(x) = (A+2)\cos x - \sin x$ فرد و $g(x) = (A+B)x|x| + \cos x$ تابع زوج باشد مقدار $2A+B$ کدام است؟

$$1) 2 \quad 2) -2 \quad 3) 3 \quad 4) -3$$

✓ پاسخ: گزینه «۲» چون تابع $f(x)$ تابعی فرد است اگر ضریب $\cos x$ صفر شود، $f(x) = -\sin x$ تابعی فرد خواهد بود پس لزوماً

$A+2=0$ و در نتیجه $A=-2$ و به همین ترتیب چون تابع $g(x)$ زوج است پس باید $A+B=0$ (چون $\cos x$ زوج است) لذا $B=+2$ خواهیم داشت: $2A+B = -4+2 = -2$

مثال ۳۰: اگر تابع با ضابطه $f(x) = ax \sin x + (b-2)x$ زوج و تابع با ضابطه $g(x) = (a+1)\cos x + bx^2$ فرد باشد آنگاه دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

$$1) (1, -2) \quad 2) (-1, 2) \quad 3) (2, -1) \quad 4) (-2, 1)$$

✓ پاسخ: گزینه «۲» تابع $f(x)$ تابعی زوج است پس باید تابع فرد $(b-2)x$ در ضابطه آن قرار نداشته باشد لذا $b-2 = b=2$ یا

می باشد و تابع $g(x)$ تابعی فرد است و باید در ضابطه آن تابع زوج $(a+1)\cos x$ قرار نداشته باشد لذا $a+1=0$ یا $a=-1$ خواهد بود.

توابع یک به یک

تابع f را یک به یک گوئیم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in D_f$ ، وقتی $f(x_1) = f(x_2)$ آنگاه بتوانیم نتیجه بگیریم که $x_1 = x_2$.

مثال ۳۱: آیا تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ یک به یک می باشد؟

✓ پاسخ: تابع یک به یک است

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1-2} = \sqrt{x_2-2} \Rightarrow x_1-2 = x_2-2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

نکته ۱۳: هرگاه هر خط $y=c$ موازی محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آنگاه آن تابع یک به یک است.

مثال ۳۲: کدامیک از توابع زیر بر بازه $(-1, 1)$ یک به یک است؟

$$1) f(x) = [x + \frac{1}{2}] \quad 2) f(x) = e^x \quad 3) f(x) = \sin \pi x \quad 4) f(x) = |2x-1|$$

✓ پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} e^x$$

چون به ازای هر $x \in (-1, 1)$ ، $f'(x) < 0$ بنابراین f اکیداً نزولی است و در نتیجه یک به یک است.

حال نشان می دهیم چرا سایر گزینه ها یک به یک نیستند.

$$f(x) = |x + \frac{1}{2}| = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ 1-x & x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \Rightarrow f \text{ یک به یک نیست.}$$

$$f(x) = \sin \pi x \Rightarrow f(\frac{\pi}{16}) = f(\frac{2\pi}{16}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f \text{ یک به یک نیست.}$$

$$f(x) = |2x-1| \Rightarrow f(\frac{1}{4}) = f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2} \Rightarrow f \text{ یک به یک نیست.}$$

توابع صعودی و نزولی:

تابع $f: A \rightarrow B$ را در نظر بگیرید:

- ۱) تابع f را بر A صعودی گوئیم هرگاه: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- ۲) تابع f را بر A اکیداً صعودی گوئیم هرگاه: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- ۳) تابع f را بر A نزولی گوئیم هرگاه: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- ۴) تابع f را بر A اکیداً نزولی گوئیم هرگاه: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

* تذکر ۸: توابع نزولی و صعودی را یکنوا و نواحی اکیداً صعودی و اکیداً نزولی را اکیداً یکنوا نیز می گویند.

نکته ۱۴: اگر تابعی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، آنگاه یک به یک نیز می باشد ولی عکس این موضوع برقرار نیست.

اگر تابعی صعودی باشد می توان آنرا از طرفین یک نامساوی حذف کرد یا بر طرفین یک نامساوی اعمال کرد بدون آنکه جهت نامساوی عوض شود، ولی اگر تابعی اکیداً نزولی باشد جهت نامساوی در هر دو صورت عوض می شود.

* تذکر ۹: تعیین صعودی و نزولی بودن با استفاده از مشتق ساده تر انجام می شود که در فصل مربوطه توضیح داده خواهد شد.

توابع معکوس

تعریف ۲: وارون یا معکوس تابع f رابطه ای است که از جایجا کردن مؤلفه های اول و دوم، همه زوجهای مرتب f بدست آید:

توضیح: شرط لازم و کافی برای آنکه تابع f وارون پذیر باشد، اینست که f یک به یک باشد.

$$\begin{cases} f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\} \\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \end{cases}$$

نکته ۱۵: هر تابع بیبسته و اکیداً یکنوا بر $[a, b]$ وارون پذیر است.

نحوه بدست آوردن تابع معکوس: برای بدست آوردن ضابطه معکوس یک تابع، ابتدا x را برحسب y بدست آورده و سپس نقش x و y را عوض می کنیم.

مثال ۳۳: اگر $f(x) = x\sqrt{x+1}$ ضابطه تابع f^{-1} کدام است؟

(۱) $\sqrt{(x-1)^2}, x \geq 1$ (۲) $\sqrt{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R}$ (۳) $\sqrt{x^2-1}, x > 1$ (۴) $\sqrt{x^2-1}, x \in \mathbb{R}$

پاسخ: گزینه «۱»
 $y = x\sqrt{x+1} \Rightarrow y-1 = x\sqrt{x} \Rightarrow x^2 = (y-1)^2 \Rightarrow x = \sqrt{(y-1)^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{(x-1)^2}$

چون دامنه f بازه $[0, +\infty)$ می باشد، پس می توان نتیجه گرفت برد f بازه $[1, +\infty)$ می باشد. بنابراین دامنه تابع f^{-1} که همان برد f است بازه $[1, +\infty)$ می باشد.

نکته ۱۶: اگر نقطه $A(a,b)$ روی منحنی f باشد، نقطه $A'(b, a)$ روی منحنی f^{-1} خواهد بود. یعنی نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه یکدیگر می باشند.

مثال ۳۴: تابع وارون تابع با ضابطه $y = x^2 - 6x^2 + 12x$ کدام است؟

(۱) $y = 2 + \sqrt{x+8}$ (۲) $y = -2 - \sqrt{x+8}$ (۳) $y = 2 + \sqrt{x-8}$ (۴) $y = -2 - \sqrt{x-8}$

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول:
 $y = x^2 - 6x^2 + 12x = (x-2)^2 + 8 \Rightarrow (x-2)^2 = y-8 \Rightarrow x-2 = \sqrt{y-8}$

$\Rightarrow x = 2 + \sqrt{y-8}$ نقش x و y عوض می شود $\Rightarrow y = f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-8}$

روش دوم: باتوجه به نکته ۲۱ داریم: $A(2,8) \in f$ پس نقطه $A'(8,2) \in f^{-1}$ خواهد بود و تنها گزینه ای که اگر $x=8$ قرار دهیم مقدار $y=2$ حاصل شود گزینه ۳ می باشد.

نکته ۱۷: در توابع هموگرافیک بفرم $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ باشد آنگاه ضابطه تابع معکوس تابع با خود آن برابر خواهد بود. یعنی $f \circ f(x) = x$

مثال ۳۵: تابعی که معکوس خودش است، کدام است؟

(۱) $y = \text{Arcsin } x$ (۲) $y = \ln x$ (۳) $y = \frac{1-x^2}{1+x}$ (۴) $y = \frac{1-x}{1+x}$

پاسخ: گزینه «۴» باتوجه به نکته ۲۲ داریم: $\begin{cases} a=-1 \\ d=1 \end{cases} \rightarrow a+d=0$ پس ضابطه معکوس آن برابر ضابطه خود تابع است.

نکته ۱۸: معکوس تابع فرد، تابعی فرد است.

نکته ۱۹: تابع زوج معکوس پذیر و یک به یک نیست.

نکته ۲۰: اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، f^{-1} نیز اکیداً صعودی است. (این حکم برای اکیداً نزولی هم برقرار است.)

مثال ۳۶: اگر $f(x) = \text{Arcsin} \frac{1}{x+1}$ باشد، $f^{-1}(x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1+\sin x}{x}$ (۲) $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ (۳) $\frac{\sin x}{1-\sin x}$ (۴) $\frac{1-\sin x}{\sin x}$

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: باتوجه به نکته ۲۱ فرض می کنیم، نقطه ای به طول $x=0$ روی منحنی f باشد، خواهیم داشت:

$y = \text{Arcsin} \frac{1}{1+0} = \text{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A(0, \frac{\pi}{2}) \in f \Rightarrow A'(\frac{\pi}{2}, 0) \in f^{-1}$

تنها گزینه ای که اگر $x = \frac{\pi}{2}$ را قرار دهیم آنگاه $y=0$ خواهد شد، گزینه ۴ است.

روش دوم: $y = \text{Arcsin} \frac{1}{1+x} \Rightarrow \sin y = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \sin y + x \sin y = 1 \Rightarrow x = \frac{1-\sin y}{\sin y}$ نقش x و y عوض می شود $\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{1-\sin x}{\sin x}$

مثال ۳۷: ضابطه معکوس تابع با ضابطه $f(x) = \text{Ln} \frac{x^2}{x^2+1}$ برای $x > 0$ برابر کدام است؟

(۱) $\sqrt{\frac{e^x}{1-e^x}}$ (۲) $\sqrt{\frac{1-e^x}{e^x}}$ (۳) $\sqrt{\frac{e^x}{1+e^x}}$ (۴) $\sqrt{\frac{1+e^x}{e^x}}$

پاسخ: گزینه «۱»

$y = \text{Ln} \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = e^y \Rightarrow x^2 - x^2 e^y = e^y \Rightarrow x^2 = \frac{e^y}{1-e^y} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{e^y}{1-e^y}}$ $x > 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{e^x}{1-e^x}}$

مثال ۳۸: اگر $f(x) = x^2 + 3x + 4$ باشد، نمودار تابع f^{-1} از کدام نقطه می گذرد؟

(۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, -1)$ (۳) $(-1, -)$ (۴) $(-1, 0)$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه $f(-1) = 0$ ، نقطه $(-1, 0)$ متعلق به نمودار تابع f است و لذا نقطه $(0, -1)$ متعلق به نمودار f^{-1} می باشد.

ترکیب دو تابع

هرگاه f و g هر یک توابع حقیقی به ترتیب با دامنه های D_f و D_g باشند، تابع جدیدی با دامنه $D_{f \circ g}$ با ضابطه $(f \circ g)(x)$ تعریف می شود. عبارت دیگر تابع $(f \circ g)(x)$ یعنی در تابع $f(x)$ ، به جای x ، $g(x)$ قرار دهیم.

مثال ۳۹: اگر $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ و $g(x) = \cos^2 x$ ، تابع $f^{-1}(g(x))$ برای $0 < x < \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

(۱) Lntgx (۲) Lncotgx (۳) 2Lncotgx (۴) 2Lntgx

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا f^{-1} را به دست می آوریم:

$y = \frac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow ye^x + y = e^x \Rightarrow ye^x - e^x = -y \Rightarrow e^x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x = \text{Ln} \frac{y}{1-y}$

بنابراین $f^{-1}(x) = \text{Ln} \frac{x}{1-x}$ حال به جای x در f^{-1} ، تابع $g(x)$ را جایگزین می کنیم:

$f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(\cos^2 x) = \text{Ln} \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = \text{Ln} \cot^2 x = 2 \text{Lncotgx}$

مثال ۴۰: اگر $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ و $g(x) = \text{tgx}$ ، ضابطه $(f \circ g)(x)$ کدام است؟

(۱) $\cos^2 x$ (۲) $\sec^2 x$ (۳) $\sin^2 x$ (۴) $\csc^2 x$

پاسخ: گزینه «۱»
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\text{tgx}) = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x} = \cos^2 x$

تذکر ۱۰: دامنه تابع $(f \circ g)(x)$ زیر مجموعه ای از دامنه تابع $g(x)$ است و به شکل زیر محاسبه می شود:

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

البته می توان ابتدا ضابطه تابع $(f \circ g)(x)$ را تشکیل داد و بدون ساده کردن آن دامنه آن را تعیین کرد.

مثال ۴۱: تابع $f(x) = \frac{1}{x-5}$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$ مفروض هستند، $D_{f \circ g}$ کدام است؟

(۱) $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ (۲) $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{1, 5\}$ (۳) $D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{5}{4}\}$ (۴) $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{-1, -\frac{5}{4}\}$

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول:
 $f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\frac{x}{x+1} - 5}$

توجه شود که $x \neq -1$ باید باشد تا ضابطه $(f \circ g)(x)$ تعریف شود.
 $f \circ g(x) = \frac{x+1}{x-5x-5} = \frac{x+1}{-4x-5} \rightarrow D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{-1, -\frac{5}{4}\}$



۳. $\sin(\text{Arcsin } x) = x$, $\cos(\text{Arccos } x) = x$
 $\text{tg}(\text{Arctg } x) = x$, $\text{cotg}(\text{Arc cotg } x) = x$

۴. $\text{Arcsin}(\sin x) = x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\text{Arctg}(\text{tg } x) = x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
 $\text{Arccos}(\cos x) = x$, $0 \leq x \leq \pi$, $\text{Arc cotg}(\text{cotg } x) = x$, $0 < x < \pi$

۵. $\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \frac{\pi}{2}$, $\text{Arctg } x + \text{Arc cotg } x = \frac{\pi}{2}$

۶. $\text{Arctg } x + \text{Arctg } y = \begin{cases} \text{Arctg} \frac{x+y}{1-xy} & xy < 1 \\ \text{Arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \pi & xy > 1, x > 0 \\ \text{Arctg} \frac{x+y}{1-xy} - \pi & xy > 1, x < 0 \end{cases}$

مثال ۴۴: حاصل $\text{Arctg} \frac{1}{3} + \text{Arctg} \frac{1}{4}$ کدام است؟

$\text{Arctg} \frac{1}{6}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۱)

پاسخ: گزینه «۲» قرار می‌دهیم $\alpha = \text{Arctg} \frac{1}{3}$ و $\beta = \text{Arctg} \frac{1}{4}$ در این صورت

$\begin{cases} \text{tg } \alpha = \frac{1}{3} \\ \text{tg } \beta = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \text{tg } \beta} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{11}{12}} = \frac{7}{11} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$

مثال ۴۵: مقدار $2 \text{Arctg} \frac{1}{3}$ برابر کدام است؟

$\text{Arctg} \frac{2}{3}$ (۴) $\text{Arctg} \frac{2}{5}$ (۳) $\text{Arctg} \frac{2}{3}$ (۲) $\text{Arctg} \frac{4}{3}$ (۱)

$\text{tg}(2\alpha) = \frac{2 \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - (\frac{1}{3})^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{4} \Rightarrow 2\alpha = \text{Arctg} \frac{3}{4}$ پاسخ: گزینه «۱» قرار می‌دهیم $\alpha = \text{Arctg} \frac{1}{3}$ در این صورت.

مثال ۴۶: حوزه تعریف $f(x) = \sqrt{\text{Arcsin}(\log_2 x)}$ کدام است؟

$\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ (۴) $x \geq 2$ (۳) $x \leq 1$ (۲) $1 \leq x \leq 2$ (۱)

پاسخ: گزینه «۱» $\text{Arcsin}(\log_2 x) \geq 0 \Rightarrow \log_2 x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

از طرفی عبارت مقابل Arcsin باید بین -۱ و +۱ باشد، بنابراین:

از اشتراک گرفتن جوابهای به دست آمده نتیجه می‌شود گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۴۷: $\text{Arc cotg } x$ برابر است با:

$\frac{\pi}{2} + \text{Arctg } x$ (۴) $\frac{\pi}{2} - \text{Arctg } x$ (۳) $\frac{\pi}{2} + \text{Arctg} \frac{1}{x}$ (۲) $\text{Arctg} \frac{1}{x}$ (۱)

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به خاصیت (۵)، گزینه ۳ صحیح است.

توجه: رابطه $\text{Arc cotg } x = \text{Arctg} \frac{1}{x}$ تنها وقتی برقرار است که $x > 0$ باشد

روش دوم: $D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in (\mathbb{R} - \{-1\}) \mid \frac{x}{x+1} \neq 5 \right\}$

$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid x \neq -1, x \neq -\frac{5}{4} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ -1, -\frac{5}{4} \right\}$

مثال ۴۲: اگر $f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq -1 \\ 3 & x > -1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x+1 & x > -1 \\ -2 & x \leq -1 \end{cases}$ باشد مقدار $g \circ f(-1)$ کدام است؟

-2 (۱) 2 (۲) -4 (۳) 3 (۴)

پاسخ: گزینه «۱» $f(-1) = 2(-1) = -2 \Rightarrow g \circ f(-1) = g[f(-1)] = g(-2) = -2$

نکته ۲۱: شرط لازم و کافی برای اینکه $f(x) = f^{-1}(x)$ باشد آن است که $(f \circ f)(x) = x$ باشد. (x متعلق به دامنه f است)

نکته ۲۲: اگر f و g معکوس پذیر باشند، آنگاه رابطه مقابل برقرار است: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

توابع وارون مثلثاتی

می‌دانیم توابع مثلثاتی یک به یک نیستند، بنابراین وارون پذیر نمی‌باشند. ولی با محدود کردن دامنه آنها می‌توان آنها را به توابعی یک به یک و معکوس پذیر تبدیل کرد

(۱) برای اینکه تابع $f(x) = \sin x$ وارون پذیر شود دامنه آنرا به $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ محدود می‌کنیم. در این فاصله $\sin x$ تابعی اکیداً صعودی است و تمام مقادیر بین -۱ و +۱ را اتخاذ می‌کند. وارون آنرا با نماد $\text{Arcsin } x$ یا $\sin^{-1} x$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$\alpha = \text{Arcsin } x \Leftrightarrow \sin \alpha = x, -1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

یعنی $\text{Arcsin } x$ برابر زاویه‌ای است که سینوس آن زاویه x باشد و آن زاویه حتماً بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ قرار داشته باشد.

(۲) برای وارون پذیری $f(x) = \cos x$ دامنه آنرا به $[0, \pi]$ محدود می‌کنیم. وارون آنرا با نماد $\text{Arccos } x$ یا $\cos^{-1} x$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$\beta = \text{Arccos } x \Leftrightarrow \cos \beta = x, -1 \leq x \leq 1, 0 \leq \beta \leq \pi$

(۳) برای وارون پذیر $f(x) = \text{tg } x$ دامنه را به $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ محدود می‌کنیم. وارون آنرا با نماد $\text{Arctg } x$ یا $\text{tg}^{-1} x$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$\delta = \text{Arctg } x \Leftrightarrow \text{tg } \delta = x, x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2}$

(۴) برای وارون پذیری $f(x) = \text{cotg } x$ دامنه را به $(0, \pi)$ محدود می‌کنیم. وارون آنرا با نماد $\text{Arc cotg } x$ یا $\text{cotg}^{-1} x$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$0 = \text{Arc cotg } x \Leftrightarrow \text{cotg } \theta = x, x \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \pi$

مثال ۴۳: حاصل $A = \sin\left[\text{Arccos}\left(\frac{-1}{2}\right) + \text{Arcsin}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱) 1 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -1 (۴)

$\begin{cases} \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Arccos}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \\ \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Arcsin}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow A = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ پاسخ: گزینه «۱»

روابط و خواص مهم توابع وارون مثلثاتی

۱. توابع Arcsin و Arctg توابع صعودی و توابع Arccos و Arc cotg توابع نزولی هستند.

۲. توابع Arcsin و Arctg توابع فرد هستند و توابع Arccos و Arc cotg توابع زوج هستند. یعنی داریم:

$\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin } x$ و $\text{Arctg}(-x) = -\text{Arctg } x$
 $\text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos } x$ و $\text{Arc cotg}(-x) = \pi - \text{Arc cotg } x$

اتحادهای مهم در توابع هیپربولیک

- ۱) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
 ۲) $\operatorname{tgh}^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$
 ۳) $\operatorname{coth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$
 ۴) $\sinh x + \cosh x = e^x$
 ۵) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$
 ۶) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$
 ۷) $\operatorname{tgh}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y}{1 \pm \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}$
 ۸) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x = \frac{2 \operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh}^2 x}$
 ۹) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 = 1 + 2 \sinh^2 x = \frac{1 + \operatorname{tgh}^2 x}{1 - \operatorname{tgh}^2 x}$

مثال ۵۰: مقدار $\operatorname{tgh}(\operatorname{Ln} 3)$ کدام است؟

$\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۱)
 $\operatorname{tgh}(\operatorname{Ln} 3) = \frac{e^{\operatorname{Ln} 3} - e^{-\operatorname{Ln} 3}}{e^{\operatorname{Ln} 3} + e^{-\operatorname{Ln} 3}} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{4}{5}$ پاسخ: گزینه «۲»

مثال ۵۱: برد تابع $y = \operatorname{tgh} \sqrt{x}$ کدام است؟

- R^+ (۴) $[0, 1)$ (۳) $(-1, 1)$ (۲) R (۱)
 پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه $\sqrt{x} \geq 0$ و همچنین با توجه به نمودار تابع tgh نتیجه می‌شود $R_f = [0, 1)$.

مثال ۵۲: تابع $y = \operatorname{coth} x$ با کدامیک از گزینه‌های زیر برابر است؟

$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ (۳) $\frac{1 - e^x}{1 + e^x}$ (۲) $\frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ (۱) هیچکدام (۴)
 پاسخ: گزینه «۴»
 $y = \operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$

معکوس توابع هیپربولیک:

با توجه به شکل توابع هیپربولیک، توابع \sinh ، tgh ، \cosh و csch توابع یک به یک وارون پذیر می‌باشند ولی توابع sech و coth یک به یک نیستند و بنابراین وارون پذیر نیز نمی‌باشند. برای پیدا کردن وارون آنها دامنه این توابع را به $x \geq 0$ محدود می‌کنیم.

مثال ۵۳: وارون تابع $y = \sinh x$ را به دست آورید.

پاسخ:
 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow y = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$

چون $e^x > 0$ و $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$ پس فقط جواب $y + \sqrt{y^2 + 1}$ قابل قبول است. لذا:

$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x = \operatorname{Ln}(y + \sqrt{y^2 + 1}) \Rightarrow y = \operatorname{Ln}(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \sinh^{-1} x$

به طور کلی وارون توابع هیپربولیک به شرح زیر است:

- ۱) $\sinh^{-1} x = \operatorname{Ln}(x + \sqrt{x^2 + 1}) : x \in R, R_f = R$
 ۲) $\cosh^{-1} x = \operatorname{Ln}(x + \sqrt{x^2 - 1}) : x \geq 1, R_f = R$
 ۳) $\operatorname{tgh}^{-1} x = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \operatorname{coth}^{-1} \frac{1}{x} : |x| < 1, R_f = R$
 ۴) $\operatorname{coth}^{-1} x = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \operatorname{tgh}^{-1} \frac{1}{x} : |x| > 1, R_f = R - \{0\}$
 ۵) $\operatorname{sech}^{-1} x = \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right) = \cosh^{-1} \frac{1}{x} : 0 < x \leq 1, R_f = R - \{0\}$
 ۶) $\operatorname{csch}^{-1} x = \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x|}\right) = \sinh^{-1} \frac{1}{x} : x \neq 0, R_f = R - \{0\}$

مثال ۴۸: حوزه تعریف $f(x) = \operatorname{Arccos} \frac{3}{4 + 2 \sin x}$ کدام است؟

$2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۴) $0 < x < +\infty$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$ (۲) $2k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۱)

پاسخ: گزینه «۲» عبارت مقابل $\operatorname{Arc} \cos$ باید بین -۱ و ۱ باشد، و چون $\frac{3}{4 + 2 \sin x}$ همواره مثبت است پس کافی است:

$\frac{3}{4 + 2 \sin x} \leq 1 \Rightarrow \sin x \geq \frac{-1}{2} \Rightarrow 2k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$

مثال ۴۹: اگر $\pi \leq x \leq 2\pi$ باشد، حاصل $\operatorname{Arc} \cos(\cos x)$ کدام است؟

$x - \pi$ (۴) $2\pi - x$ (۳) $\pi + x$ (۲) $\pi - x$ (۱)

پاسخ: گزینه «۴» طبق خاصیت (۴) می‌دانیم \cos و \cos^{-1} وقتی با هم از بین می‌روند که زاویه مقابل به \cos در بازه $[0, \pi]$ باشد. بنابراین با توجه به فرض داده شده در مسأله سعی می‌کنیم کمان x را طوری تغییر دهیم که در فاصله $[0, \pi]$ قرار گیرد.

$\operatorname{Arccos}(\cos x) = \operatorname{Arccos}(\cos(\pi + (x - \pi))) = \operatorname{Arccos}(-\cos(x - \pi))$

خاصیت (۲) $\rightarrow \pi - \operatorname{Arccos}(\cos(x - \pi)) = \pi - (x - \pi) = 2\pi - x$

توجه کنید که در تساوی ماقبل آخر چون $x - \pi$ زاویه‌ای بین 0 و π می‌باشد مجاز هستیم \cos و $\operatorname{Arc} \cos$ را با هم ساده کنیم

توابع هیپربولیک

توابع سینوس هیپربولیک، کسینوس هیپربولیک، تانژانت هیپربولیک، کتانژانت هیپربولیک، سکانت هیپربولیک و کسکانت هیپربولیک با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

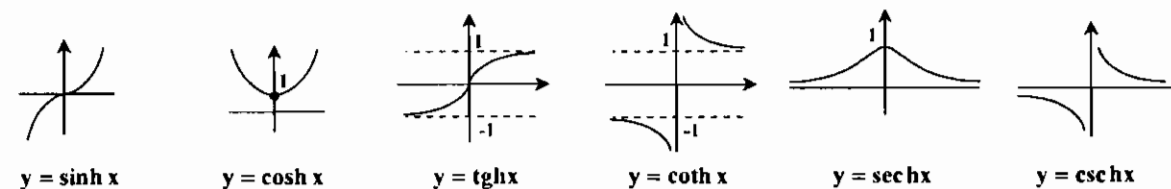
$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

دامنه و برد توابع هیپربولیک به صورت زیر است:

$y = \sinh x$	$D_f = R$	$R_f = R$
$y = \cosh x$	$D_f = R$	$R_f = [1, +\infty)$
$y = \operatorname{tgh} x$	$D_f = R$	$R_f = (-1, +1)$
$y = \operatorname{coth} x$	$D_f = R - \{0\}$	$R_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
$y = \operatorname{sech} x$	$D_f = R$	$R_f = (0, 1]$
$y = \operatorname{csch} x$	$D_f = R - \{0\}$	$R_f = R - \{0\}$

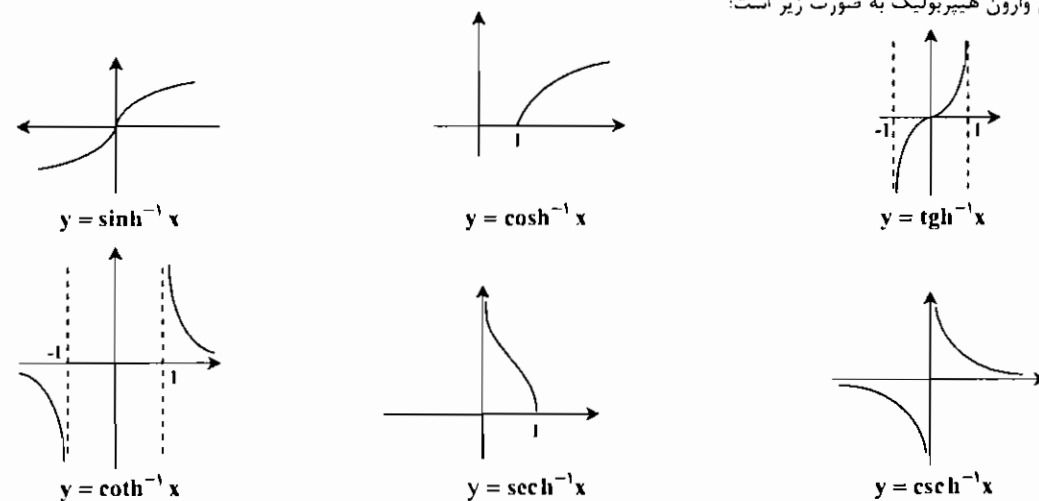
شکل توابع هیپربولیک به صورت زیر است:



نکته ۲۳: توابع $\sinh x$ ، $\operatorname{tgh} x$ ، $\cosh x$ و $\operatorname{csch} x$ توابع فرد و توابع $\cosh x$ و $\operatorname{sech} x$ توابع زوج می‌باشند.

نکته ۲۴: توابع هیپربولیک در اعداد حقیقی متناوب نیستند ولی دارای دوره تناوب مختلط می‌باشند. دوره تناوب $\sinh x$ ، $\cosh x$ ، $\operatorname{sech} x$ و $\operatorname{csch} x$ برابر $2\pi i$ و دوره تناوب $\operatorname{tgh} x$ و $\operatorname{coth} x$ برابر πi می‌باشد.

شکل توابع وارون هیپربولیک به صورت زیر است:



مثال ۵۴: اگر $f(x) = \cosh x$ ، مقدار $f^{-1}(\frac{5}{4})$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) $\ln 2$ (۴) $\frac{\ln 2}{2}$
- پاسخ: گزینه «۲»

$$f^{-1}(x) = \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$f^{-1}(\frac{5}{4}) = \ln(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - 1}) = \ln(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}) = \ln 2$$

بنابراین:

مثال ۵۵: دامنه تابع $f(x) = \operatorname{sech}^{-1}(tgx)$ را به دست آورید.

- پاسخ: با توجه به دامنه تابع sech^{-1} لازم است:
- $|\operatorname{tgh} x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow k\pi < x \leq k\pi + \frac{\pi}{4}$

نکته ۲۵: توابع \sinh^{-1} ، tgh^{-1} ، coth^{-1} و csch^{-1} توابع فرد می‌باشند و توابع \cosh^{-1} و sech^{-1} نه فرد و نه زوج هستند.

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی و توابع هیپربولیک

$\sinh ix = i \sin x$ $\sinh x = -i \sin ix$ $\cosh ix = \cos x$ $\cosh x = \cos ix$

* تذکر ۱۱: کلیه اتحادهای مثلثاتی با تبدیل \sin به $i \sinh$ و \cos به \cosh ، به اتحادهای مشابه برای توابع هیپربولیک (هذلولی) تبدیل می‌شوند.

$\sinh^{-1} x = -i \sin^{-1}(ix)$ $\sinh^{-1}(ix) = i \sin^{-1} x$

$\cosh^{-1} x = \pm \cos^{-1} x$ $\cosh^{-1}(ix) = \pm i \cos^{-1}(ix)$

مثال ۵۶: e^a با کدامیک از عبارات زیر برابر است؟

- (۱) $\sinh x \cosh x$ (۲) $\cosh x + \sinh x$ (۳) $\sinh^2 x + \cosh^2 x$ (۴) $\frac{1}{\sinh x}$
- پاسخ: گزینه «۲»
- $\sinh x + \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x$

مثال ۵۷: مقدار $\cosh(\ln 2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{4}$
- پاسخ: گزینه «۴»
- $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow \cosh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{e^{\ln 2} + e^{\ln 2^{-1}}}{2}$

$$\frac{e^{\ln 2} + e^{\ln 2^{-1}}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

اما با توجه به خاصیت $e^{\ln a} = a$ خواهیم داشت:

توابع متناوب

تابع f را با دامنه D_f در نظر بگیرید، هرگاه عددی مانند $T > 0$ وجود داشته باشد به شکلی که دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} (1) \forall x \in D_f, x \pm T \in D_f \\ (2) \forall x \in D_f, f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

در این صورت تابع f را متناوب گوئیم و T را دوره تناوب تابع می‌نامیم، لازم به ذکر است که وقتی صحبت از دوره تناوب می‌شود، منظور کوچکترین مقدار مثبت T می‌باشد.

نکته ۲۶: اگر f متناوب باشد، دامنه f محدود نیست.

دوره تناوب توابع مثلثاتی: دوره تناوب نسبت‌های مثلثاتی به فرم کلی در جدول زیر مشخص شده است:

تابع مثلثاتی	دوره تناوب	تابع مثلثاتی	دوره تناوب
$y = \cos^{rk-1} ax$	$\frac{2\pi}{ a }$	$y = \sin^{rk} ax$	$\frac{\pi}{ a }$
$y = \sin^{rk-1} ax$	$\frac{2\pi}{ a }$	$y = \cos^{rk} ax$	$\frac{\pi}{ a }$
$y = \operatorname{tg}^{rk-1} ax$	$\frac{\pi}{ a }$	$y = \operatorname{tg}^{rk} ax$	$\frac{\pi}{ a }$
$y = \operatorname{cotg}^{rk-1} ax$	$\frac{\pi}{ a }$	$y = \operatorname{cotg}^{rk} ax$	$\frac{\pi}{ a }$

باتوجه به جدول فوق ملاحظه می‌شود که دوره تناوب توابع $\operatorname{tg} ax$ و $\operatorname{cotg} ax$ با هر توانی برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ می‌باشد برای مثال دوره تناوب تابع

$y = \operatorname{tg} 2x$ برابر $T = \frac{\pi}{2}$ و دوره تناوب تابع $y = \operatorname{cotg}^2 vx$ برابر $T = \frac{\pi}{v}$ می‌باشد اما دوره تناوب توابع مثلثاتی $\sin ax$ و $\cos ax$ اگر توان زوج

باشد برابر $T = \frac{\pi}{|a|}$ می‌باشد و اگر توان فرد باشد برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ خواهد بود. برای مثال دوره تناوب تابع $y = \sin^4 2x$ برابر $T = \frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

نکته ۲۷: توابعی که در آن کمان توابع مثلثاتی به شکل $(ax+b)$ نباشد، متناوب نیستند. (اعداد ثابت a, b)

مثال ۵۸: هیچ یک از توابع زیر متناوب نیستند.

$y = \sin \frac{1}{x}$, $y = \cos^2 \sqrt{x}$, $y = \sin |x|$, $y = \cos [x]$

نکته ۲۸: اگر نسبت‌های مثلثاتی با کمان خود (یا توان و یا ضربی از کمان خود) به صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم قرار گرفته باشند آن تابع متناوب نیست.

مثال ۵۹: توابع روبرو متناوب نیستند.

$f(x) = x \sin x$, $f(x) = x^2 + \cos 2x$

مثال ۶۰: دوره تناوب تابع $f(x) = x \cos x$ کدام است؟

- (۱) π (۲) دوره تناوب ندارد (۳) $\frac{2\pi}{2}$ (۴) 2π

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته فوق تابع متناوب نیست.

نکته ۲۹: تابع $f(x) = a$ (تابع ثابت) متناوب است. ولی دارای کوچکترین دوره تناوب نیست.

نکته ۳۰: برای تعیین دوره تناوب توابع مثلثاتی که ضابطه آنها بصورت حاصل جمع یا تفاضل چند تابع متناوب می‌باشد، ابتدا لازم است، دوره تناوب هر یک از توابع را پیدا کنیم، سپس دوره تناوب تابع اصلی برابر با کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) بین دوره تناوبهای هر یک از توابع خواهد بود. ضمناً برای پیدا کردن کوچکترین مضرب مشترک چند کسر باید، ابتدا مخرج آنها را یکی کرد. سپس ک.م.م صورت آنها را محاسبه کنیم.

مثال ۶۱: دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = 2 \cot g^2 \frac{\pi}{7} x - 4 \sin \frac{\pi}{3} x$ کدام است؟

- ۱) ۶
- ۲) ۲
- ۳) ۳
- ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱»

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{\pi}{\frac{\pi}{7}} = 7 \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{نکته ۲۲}} T = (T_2, T_1 \text{ م.م.ک.}) = 42$$

نکته ۳۱: اگر تابع مثلثاتی به صورت حاصل ضرب چند نسبت مثلثاتی باشد، برای تعیین دوره تناوب ابتدا باید آنها را به حاصل جمع تبدیل کرد و سپس باتوجه به مطالب عنوان شده دوره تناوب تابع را تعیین کنیم.

مثال ۶۲: دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \cos^2 x \sin 5x$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2\pi}{3}$
- ۲) $\frac{\pi}{6}$
- ۳) π
- ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: ابتدا تابع را به حاصل جمع تبدیل و سپس دوره تناوب را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 4x) \rightarrow \left. \begin{aligned} T_1 &= \pi \\ T_2 &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{م.م.ک.}} T = \pi$$

نکته ۳۲: اگر در ضابطه تابعی دارای توان، زیر رادیکال، داخل جزء صحیح، قدر مطلق و یا در مخرج کسر باشد آن تابع متناوب نیست.

مثال ۶۳: کدام تابع متناوب است؟

- ۱) $\log(x+1)$
- ۲) $y = \lfloor x \rfloor + 1$
- ۳) $y = \sin \frac{x}{x}$
- ۴) $y = 2 \sin x \cos x$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به نکته فوق تابع $y = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$ متناوب بوده و دارای دوره تناوب $T = \pi$ می‌باشد.

نکته ۳۳: توابع $\sin|ax|$ و $\cot|ax|$ و $\text{tg}|ax|$ متناوب نیستند، فقط تابع $\cos|ax|$ متناوب می‌باشد و دوره تناوب آن برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد.

نکته ۳۴: اگر دوره تناوب تابع $y = f(x)$ برابر T باشد، دوره تناوب تابع $y = f(ax + b)$ برابر $\frac{T}{|a|}$ خواهد بود.

مثال ۶۴: فرض می‌کنیم $f(x) = \sin x$ باشد، دوره تناوب تابع $f(3x + \frac{\pi}{6})$ کدام است؟

- ۱) 2π
- ۲) $\frac{2\pi}{3}$
- ۳) $\frac{\pi}{6}$
- ۴) $\frac{\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» باتوجه به نکته فوق و ذکر این مطلب که دوره تناوب تابع $\sin x$ برابر 2π است، دوره تناوب تابع $f(3x + \frac{\pi}{6})$ برابر $\frac{2\pi}{3}$ خواهد بود.

نکته ۳۵: اگر تابع $f(x)$ متناوب باشد، و دوره تناوب آن T باشد، آنگاه توابع $\sin f(x)$ و $\cos f(x)$ و $\text{tg} f(x)$ همگی متناوب و با همان دوره تناوب T خواهند بود.

نکته ۳۶: دوره تناوب توابع $f(x) = nx - \lfloor nx \rfloor$ و $g(x) = \lfloor nx \rfloor + [-nx]$ برابر $\frac{1}{|n|}$ می‌باشد و دوره تناوب تابع

$$\lfloor nx \rfloor - [-nx] \text{ برابر } \frac{1}{|n|} \text{ است.}$$

مثال ۶۵: دوره تناوب تابع $f(x) = 5x - \lfloor 6x \rfloor + \lfloor x \rfloor$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{5}$
- ۲) ۲
- ۳) ۱
- ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه «۳» باید صورت مسئله را شبیه $\lfloor nx \rfloor - \lfloor nx \rfloor$ بسازیم:

$$f(x) = 6x - x - \lfloor 6x \rfloor + \lfloor x \rfloor = \underbrace{6x - \lfloor 6x \rfloor}_{T_1 = \frac{1}{6}} - \underbrace{(x - \lfloor x \rfloor)}_{T_2 = 1} \xrightarrow{\text{م.م.ک. } T_1, T_2} T = 1$$

نکته ۳۷: اگر تابع g متناوب باشد، تابع fog نیز متناوب می‌باشد و دوره تناوب آن نیز برابر با دوره تناوب g و یا کوچکتر از آن است.

برای مثال تابع $h(x) = \lfloor \cos x \rfloor$ متناوب می‌باشد زیرا می‌توان آن را به شکل $f(x) = \lfloor x \rfloor$ و $g(x) = \cos x$ تغییر کرد که $h(x) = \text{fog}(x) = f[g(x)] = \lfloor \cos x \rfloor$ و چون تابع g متناوب با دوره تناوب 2π می‌باشد دوره تناوب $h(x)$ نیز 2π می‌باشد.

نکته ۳۸: توابع به شکل $f(x) = A \sin ax + B \cos bx$ تنها در صورتیکه $\frac{a}{b}$ عددی گویا باشد متناوب خواهند بود.

مثال ۶۶: کدام یک از توابع زیر متناوب نمی‌باشد؟

- ۱) $f(x) = \log \sin x$
- ۲) $h(x) = \sin 2x + \cos \pi x$
- ۳) $h(x) = \sqrt{\sin x}$
- ۴) $h(x) = \cos \lfloor x \rfloor$

پاسخ: گزینه «۲» گزینه‌های ۱ و ۳ با توجه به نکته فوق متناوب می‌باشند زیرا برای گزینه «۱» می‌توان $h(x) = \text{fog}(x)$ را به شکل $f(x) = \log x$ و $g(x) = \sin x$ که تابع g متناوب است در نظر گرفت و برای گزینه «۳» $h(x) = \text{fog}(x)$ را به شکل $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin x$ که تابع g متناوب است در نظر گرفت تابع $\cos|ax|$ نیز قبلاً اشاره شد که متناوب است لذا تنها تابع گزینه «۲» متناوب نمی‌باشد. ($\frac{2}{\pi} \notin \mathbb{Q}$)

نکته ۳۹: دوره تناوب تابع $f(x) = (-1)^{\lfloor nx \rfloor}$ برابر $\frac{2}{|n|}$ می‌باشد.

نکته ۴۰: دوره تناوب تابع $f(x) = \text{tg} x \cot g x$ برابر $T = \frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

نکته ۴۱: در تعیین دوره تناوب توابع مثلثاتی ذکر این نکته لازم است که تابع تا حد امکان ساده شود، سپس دوره تناوب محاسبه گردد.

مثال ۶۷: دوره تناوب تابع $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ کدام است؟

- ۱) π
- ۲) 2π
- ۳) $\frac{\pi}{4}$
- ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» اگر قبل از ساده کردن دوره تناوب را حساب کنیم داریم:

$$\text{حال ضابطه تابع را ساده می‌کنیم: و سپس دوره تناوب را محاسبه می‌کنیم. } f(x) = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \rightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

می‌شود که $T = \frac{\pi}{2}$ دوره تناوب تابع می‌باشد.

مثال ۶۸: دوره تناوب تابع $f(x) = \cot g ax - \text{tg} ax$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا ضابطه f را ساده می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{\cos ax}{\sin ax} - \frac{\sin ax}{\cos ax} = \frac{\cos^2 ax - \sin^2 ax}{\sin ax \cos ax} = \frac{\cos 2ax}{\frac{1}{2} \sin 2ax} = 2 \cot g 2ax$$

بنابراین دوره تناوب f برابر $T = \frac{\pi}{2a}$ خواهد بود.

برد تابع

تعریف ۳: مفهوم برد یک تابع عبارت است از مقادیر حداکثر و حداقل تغییرات که y می‌تواند داشته باشد، برای تعیین برد توابع روش‌های مختلفی وجود دارد که به شرح زیر است:

۱- به دست آوردن x بر حسب y : این روش را نمی‌توان در تمام توابع به عنوان بهترین روش محسوب کرد و در بسیاری موارد نیز امکان‌پذیر نیست.

مثال ۶۹: تمام برد تابع با ضابطه $y = \frac{2}{x^2+1}$ کدام است؟

- (۱) $0 < y \leq 2$
- (۲) $0 < y \leq \frac{2}{3}$
- (۳) $0 < y \leq \frac{2}{5}$
- (۴) $0 < y \leq \frac{2}{7}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا با توجه به ضابطه تابع داریم:

$$\begin{cases} y > 0 \\ y = \frac{2}{x^2+1} \Rightarrow yx^2 + y = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2-y}{y} \xrightarrow{x^2 \geq 0} \frac{2-y}{y} \geq 0 \Rightarrow y \leq 2 \end{cases} \xrightarrow{(1), (2)} 0 < y \leq 2$$

۲- استفاده کردن از مربع کامل:

در این روش که معمولاً در توابع با توان زوج به کار می‌رود با توجه به اینکه برد تابع $y = ax^2 + bx + c$ اگر $a > 0$ برابر $[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$ و اگر

$a < 0$ برابر $(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$ می‌باشد می‌توان تست‌های به این شکل را جواب داد.

مثال ۷۰: برد تابع $g(x) = x^2 + 4x + 5$ کدام است؟

- (۱) R
- (۲) $(0, \infty)$
- (۳) $[1, \infty)$
- (۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۳» در این مثال $\begin{cases} \Delta = -4 \\ a = 1 \end{cases}$ و با توجه به فرمول برد تابع $[-\frac{\Delta}{4a}, \infty)$ یا $[1, \infty)$ می‌باشد.

۳- استفاده از فرمولها و روابط موجود:

- ۱) $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (x > 0)$
- ۲) $x + \frac{1}{x} \leq -2 \quad (x < 0)$
- ۳) $y = |x-a| + |x-b| \Rightarrow R_f = [|b-a|, +\infty)$
- ۴) $y = |x-a| - |x-b| \Rightarrow R_f = [-|b-a|, |b-a|]$

$$\begin{aligned} \text{د) } \begin{cases} y = \frac{|x|}{|x|+1} \Rightarrow R_f = [0, 1) \\ y = \frac{x^2}{x^2+1} \end{cases} \\ \text{ه) } y = \sin^{2n} x + \cos^{2n} x \rightarrow \frac{1}{n^{n-1}} \leq y \leq 1 \\ \text{و) } y = a \sin x + b \cos x \rightarrow -\sqrt{a^2+b^2} \leq y \leq \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

مثال ۷۱: تمام برد تابع $y = |x-2| + |x-3|$ کدام است؟

- (۱) $[1, +\infty)$
- (۲) $[1, 2]$
- (۳) $[-1, 1]$
- (۴) $(2, 3)$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به فرمول ۳ داریم:

مثال ۷۲: برد تابع $f(x) = \frac{|x|}{|x|+1}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 1)$
- (۲) $(-\infty, 1]$
- (۳) $[0, 1]$
- (۴) $[0, 1)$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به فرمول (د) داریم.

مثال ۷۳: برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 1]$
- (۲) $(-1, 1)$
- (۳) $R - (-1, 1)$
- (۴) $R - [-1, 1]$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به فرمول ۶ گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۷۴: برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ کدام فاصله است؟

- (۱) $[-1, 1]$
- (۲) $[0, 2]$
- (۳) $[0, 2)$
- (۴) $R - (0, 1)$

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(x) = \frac{x^2+1+2x}{x^2+1} = 1 + \frac{2x}{x^2+1}$$

از طرفی با توجه به نکته فوق $0 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1$ بنابراین $1 \leq f(x) \leq 2$

مثال ۷۵: حداکثر مقدار تابع $y = 2 \sin x + \cos x$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$
- (۲) $-\sqrt{5}$
- (۳) ۳
- (۴) -۳

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به فرمول ۷ ($a=2, b=1$) داریم:

$$-\sqrt{5} \leq y \leq \sqrt{5} \Rightarrow \text{Max}(y) = \sqrt{5}$$

مثال ۷۶: برد تابع $f(x) = 2x - 2[x] + 1$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$
- (۲) $[1, 2)$
- (۳) $(0, 2)$
- (۴) $(0, 2]$

پاسخ: گزینه «۲»

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 0 \leq 2x - 2[x] < 2 \Rightarrow 1 \leq 2x - 2[x] + 1 < 3 \Rightarrow R_f = [1, 3)$$

طرز تعیین برد توابع جزء صحیح ($y = [f(x)]$):

با توجه به اینکه حاصل جزء صحیح اعداد صحیح خواهد بود پس برای تعیین برد توابع به شکل $y = [f(x)]$ ابتدا برد تابع $f(x)$ را تعیین کرده و سپس در این بازه که برای $f(x)$ بدست آمده اعداد صحیح را جدا می‌کنیم.

مثال ۷۷: برد تابع $y = \sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

- (۱) $\{0, 1\}$
- (۲) $\{0\}$
- (۳) $[-1, 1]$
- (۴) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 = 1-y^2 \xrightarrow{x^2 \geq 0} 1-y^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1 \\ \text{در این حالت اعداد صحیح این فاصله باید جدا شود که اعداد ۱ و ۰ هستند.} \end{cases} \Rightarrow \boxed{0 \leq y \leq 1}$$

مثال ۷۸: برد تابع $y = |\text{tg}x + \text{cot}gx|$ کدام است؟

- (۱) $Z - \{0\}$
- (۲) $Z - \{-1, 0, 1\}$
- (۳) $Z - \{-1, 1\}$
- (۴) $Z - \{-1, 0\}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که

$$\text{tg}x + \text{cot}gx = \text{tg}x + \frac{1}{\text{tg}x}$$

بنابراین با توجه به فرمول (۳)، عبارت درون جزء صحیح در تابع فوق بین ۲- و ۲ قرار ندارد، و در نتیجه برد تابع شامل اعداد صحیح -۱ و ۰ و ۱ نخواهد بود.

مثال ۷۹: برد تابع $y = \text{Ln} \sin x$ را به دست آورید.

پاسخ: چون $\sin x$ مقابل Ln قرار دارد، پس: $-\infty < y \leq 0 \Rightarrow R_f = (-\infty, 0]$

مثال ۸۰: برد تابع $y = e^{x-|x|}$ کدام است؟

- (۱) R^+
- (۲) R^-
- (۳) $(-1, 1)$
- (۴) $(1, +\infty)$

پاسخ: گزینه «۳» چون تابع داده شده یک تابع نمایی است، پس برد تابع زیر مجموعه اعداد مثبت می‌باشد و از طرفی $x - |x| \leq 0$

بنابراین $y = e^{x-|x|} \leq e^0 = 1$

مثال ۸۱: برد تابع $y = \text{Arctg}(x^2 + 6x + 10)$ برابر است با:

- (۱) $[1, +\infty)$ (۲) $[0, +\infty)$ (۳) $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ (۴) $[0, \frac{\pi}{2})$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم به طور کلی $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctg} u < \frac{\pi}{2}$ می‌باشد، از طرفی:

$$y = \text{Arctg}((x+3)^2 + 1) \Rightarrow \min(y) = \text{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

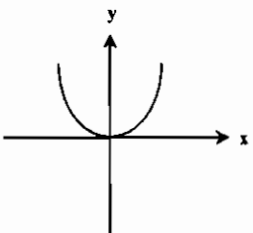
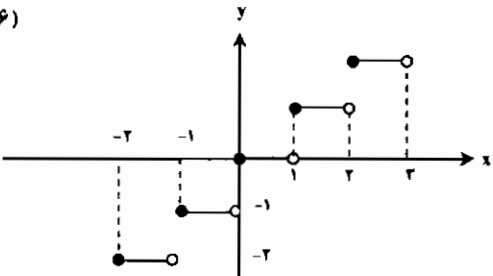
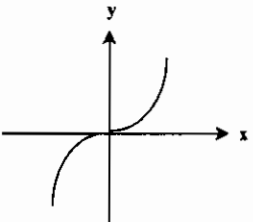
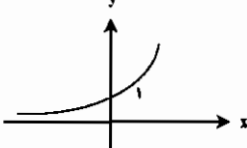
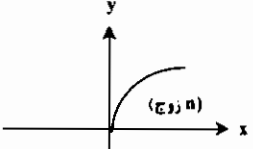
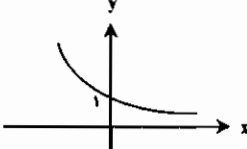
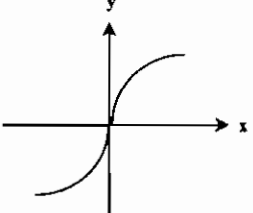
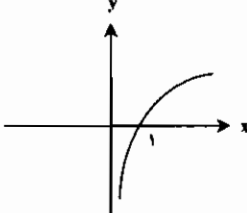
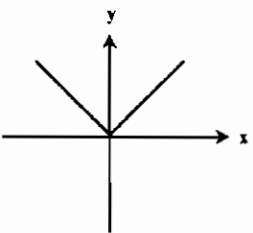
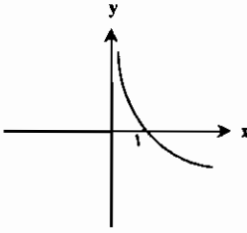
$$\text{بنابراین } \frac{\pi}{4} \leq y < \frac{\pi}{2}$$

مثال ۸۲: برد تابع $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ را به دست آورید.

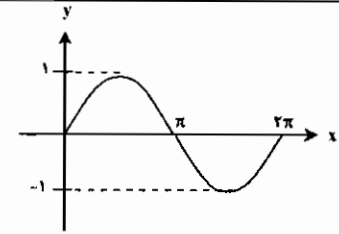
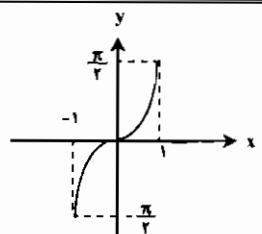
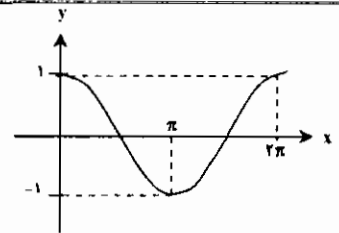
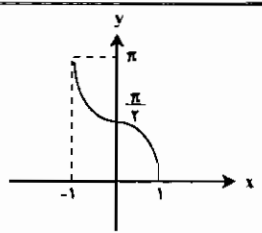
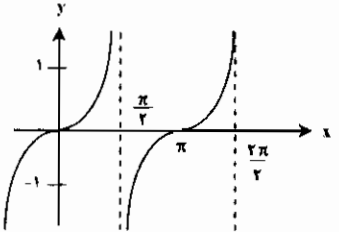
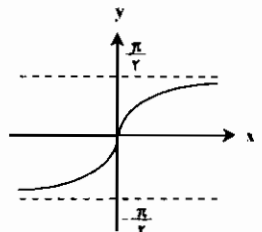
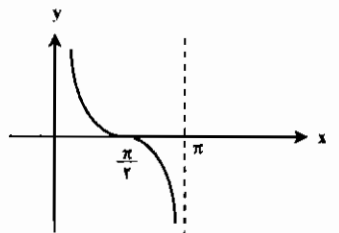
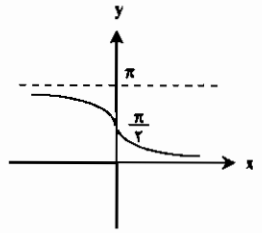
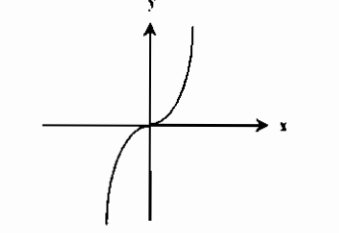
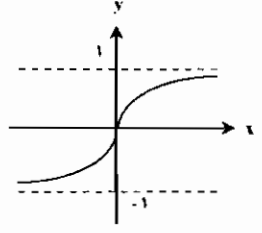
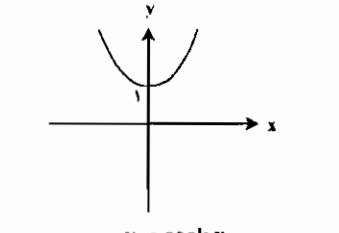
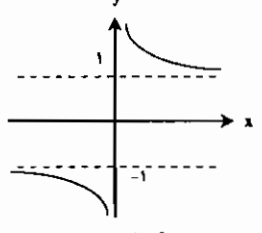
پاسخ: با توجه به فرمول (۸) در صفحه ۲۶ داریم:

$$\frac{1}{r^{2-1}} \leq y \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{r} \leq y \leq 1 \Rightarrow R_f = [\frac{1}{r}, 1]$$

جدول نمودار توابع مهم

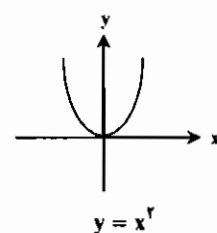
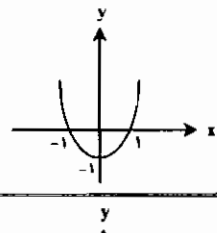
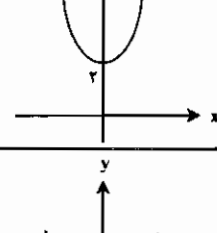
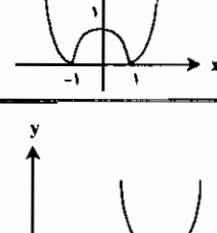
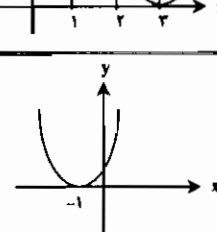
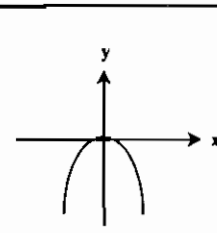

۱)		۶)	
$y = x^n$ (n زوج باشد)		$y = [x]$	
۲)		۷)	
$y = x^n$ (n فرد و $n \neq 1$)		$y = a^x$ ($a > 1$)	
۳)		۸)	
$y = \sqrt[n]{x}$ (n زوج باشد)		$y = a^x$ ($0 < a < 1$)	
۴)		۹)	
$y = \sqrt[n]{x}$ (n فرد و $n \neq 1$)		$y = \log_a^x$ ($a > 1$)	
۵)		۱۰)	
$y = x $		$y = \log_a^x$ ($0 < a < 1$)	

جدول نمودار توابع مهم:

۱۱)		۱۷)	
	$y = \sin x$		$y = \text{Arcsin } x$
۱۲)		۱۸)	
	$y = \cos x$		$y = \text{Arccos } x$
۱۳)		۱۹)	
	$y = \text{tg } x$		$y = \text{Arc tg } x$
۱۴)		۲۰)	
	$y = \text{cot } gx$		$y = \text{Arc cot } gx$
۱۵)		۲۱)	
	$y = \sinh x$		$y = \text{tg } hx$
۱۶)		۲۲)	
	$y = \cosh x$		$y = \text{cot } gx$

انتقال نمودارها

برای درک بهتر مطلب این قسمت را با یک مثال شرح می‌دهیم:

	مثال: با توجه به منحنی $y = x^2$ منحنی توابع $y = x^2 + 2, y = x^2 - 1$ و $y = -x^2, y = (x+1)^2, y = (x-3)^2, y = x^2 - 1 $ را رسم کنید.
	۱) $y = x^2 - 1$: برای رسم نمودار این تابع کافیت منحنی تابع $y = x^2$ را در راستای محور y ها به اندازه ۱ واحد به پائین منتقل کنیم.
	۲) $y = x^2 + 2$: برای رسم نمودار این تابع کافیت منحنی تابع $y = x^2$ را به اندازه ۲ واحد در راستای محور y ها به بالا منتقل کنیم.
	۳) $y = x^2 - 1 $: برای رسم نمودار این تابع کافیت آن قسمت از نمودار منحنی $y = x^2 - 1$ که زیر محور x ها واقع است را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.
	۴) $y = (x-3)^2$: برای رسم نمودار این تابع کافیت نمودار منحنی $y = x^2$ را به اندازه ۳ واحد به سمت راست انتقال دهیم.
	۵) $y = (x+1)^2$: برای رسم نمودار این تابع کافیت نمودار تابع $y = x^2$ را به اندازه ۱ واحد به سمت چپ منتقل کنیم.
	۶) $y = -x^2$: برای رسم نمودار این تابع کافیت نمودار منحنی $y = x^2$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

۱- اگر $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $\cos hx \cdot \sin hx = \operatorname{tg} \theta$ برابر کدام است؟

(مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) $\cos \theta$ (۲) $\csc \theta$ (۳) $\sec \theta$ (۴) $\sin \theta$

۲- $\cosh^{-1} x$ برابر کدام است؟

(مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) $\operatorname{Ln}(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$ (۲) $\operatorname{Ln}(1 \pm \sqrt{x^2 - 1})$ (۳) $\operatorname{Ln}(x \pm \sqrt{1 - x^2})$ (۴) $\operatorname{Ln}(1 \pm \sqrt{1 - x^2})$

۳- دامنه وارون تابع با ضابطه $y = \operatorname{sech} x$ کدام بازه است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۸)

- (۱) $(0, 1]$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(0, \infty)$ (۴) $(-1, 1]$

۴- حاصل $\operatorname{Arcsin}(1) - \operatorname{Arcsin}(-1)$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۷۸)

- (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{3\pi}{2}$

۵- در صورتیکه $f(x) = \operatorname{Ln} x$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ و $h(x) = e^x$ باشد، ضابطه $f(g(h(x)))$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

- (۱) e^x (۲) $9x$ (۳) $10x$ (۴) e^{9x}

۶- اگر $f(x) = 4$ و $f(x+2) = 2f(x)$ مبدأ مختصات نقطه‌ای از $f(x)$ باشد، آنگاه مقدار $f(8)$ چیست؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{150}{81}$ (۲) $\frac{160}{81}$ (۳) $\frac{170}{81}$ (۴) $\frac{180}{81}$

۷- برد (Range) تابع $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ کدام است؟

(مهندسی معدن، استخراج معدن - سراسری ۸۰)

- (۱) \mathbb{R} (۲) $(-1, 1)$ (۳) \mathbb{R}^+ (۴) $(0, \frac{1}{2})$

۸- اگر $f(x) = \operatorname{Ln} \frac{2x+1}{x}$ باشد $f^{-1}(\operatorname{Ln} 3)$ کدام است؟

(مهندسی معدن، استخراج معدن - سراسری ۸۰)

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) $e^2 - 1$ (۴) $\operatorname{Ln} \frac{3}{2}$

۹- چنانچه $F(x)$ یک تابع زوج و $G(x)$ یک تابع فرد باشد، آنگاه:

(برق - آزاد ۸۰)

- (۱) $F(G(x))$ زوج است و $G(F(x))$ فرد است. (۲) $F(G(x))$ فرد است و $G(F(x))$ زوج است. (۳) $F(G(x))$ فرد است و $G(F(x))$ فرد است. (۴) $F(G(x))$ زوج است و $G(F(x))$ زوج است.

۱۰- توابع $f = \{(2, 2), (3, 4), (4, 5)\}$ و $g = \{(2, 4), (5, 6), (2, 3)\}$ مفروضند کدام است؟

- (۱) $\{(2, 3), (4, 6)\}$ (۲) $\{(2, 5), (3, 8)\}$ (۳) $\{(3, 5), (2, 4)\}$ (۴) $\{(5, 6), (8, 10), (6, 8)\}$

۱۱- دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$ کدام است؟

- (۱) \mathbb{N} (۲) ϕ (۳) \mathbb{Z} (۴) \mathbb{Z}^-

۱۲- اگر $2f(2-x) + 2f(x-2) = x$ باشد $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $f(x) = x - \frac{2}{5}$ (۲) $f(x) = 5x + 2$ (۳) $f(x) = 5x - 2$ (۴) $f(x) = x + \frac{2}{5}$

۱۳- دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{\operatorname{Ln} x}{\sqrt{|x| - x}}$ کدام است؟

- (۱) ϕ (۲) \mathbb{R} (۳) \mathbb{R}^+ (۴) \mathbb{R}^-

۱۴- اگر تابع $f(x) = ax \sin x + (b-1)x$ زوج و تابع $g(x) = (a+2) \cos x + bx$ فرد باشد زوج مرتب (a, b) کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

- (۱) $(2, -1)$ (۲) $(-2, 1)$ (۳) $(1, -2)$ (۴) $(-1, 2)$

۱۵- دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-|x|}}$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

- (۱) \mathbb{R}^+ (۲) \mathbb{R}^- (۳) ϕ (۴) \mathbb{R}

۱۶- اگر داشته باشیم $f(\operatorname{Arccos}(x-1)) = \frac{x-1}{x}$ مقدار $f(x)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

- (۱) $\frac{\cos x}{1 - \cos x}$ (۲) $\frac{1 + \cos x}{\cos x}$ (۳) $\frac{1 - \cos x}{\cos x}$ (۴) $\frac{\cos x}{1 + \cos x}$

۱۷- توابع $f = \{(2, 2), (3, 4), (4, 5)\}$ و $g = \{(2, 4), (5, 6), (2, 3)\}$ مفروضند gof کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

- (۱) $\operatorname{gof} = \{(2, 3), (4, 6)\}$ (۲) $\operatorname{gof} = \{(2, 5), (3, 8)\}$ (۳) $\operatorname{gof} = \{(2, 5), (2, 4)\}$ (۴) $\operatorname{gof} = \{(5, 6), (8, 10), (6, 8)\}$

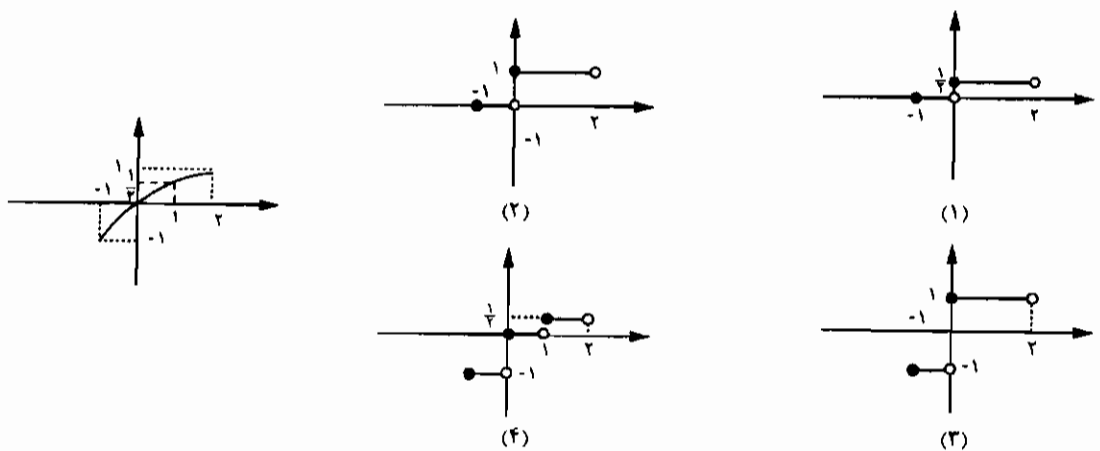
۱۸- اگر $f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -2 \\ x+1 & -2 < x < 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$ حاصل $f(f(-1)) + f(-1)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۱۹- اگر نمودار تابع f بر $[-1, 2]$ به صورت شکل مقابل باشد، نمودار تابع با ضابطه $y = f(|x|)$ بر $[-1, 2]$ کدام است؟ [نماد جزء صحیح است.]

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)



۲۰- اگر $f(x) = a^{-x}$ و $g(x) = b^x$ ، $a > 1$ و $0 < b < 1$ ، آنگاه f و g چگونه‌اند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)

- (۱) هر دو صعودی (۲) f صعودی و g نزولی (۳) هر دو نزولی (۴) f نزولی و g صعودی

۲۱- مجموعه پاسخ‌های نامعادله $|3x - 4| \leq 2$ کدام است؟

- (۱) $2 \leq x \leq 3$ (۲) $\frac{2}{3} \leq x \leq 2$ (۳) $2 \leq x \leq 6$ (۴) $\frac{2}{3} \leq x \leq 2$

۲۲- مجموعه پاسخ‌های نامعادله $|3x| > |6 - 2x|$ کدام است؟

- (۱) $1 < x < \infty$ (۲) $-1 < x < 1$ (۳) $-1 < x < \infty$ (۴) $-\infty < x < 1$

۲۳- فرض کنید تعداد اعضای مجموعه‌های A و B به ترتیب ۲ و ۳ باشد تعداد توابع از B به A چند تا است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۲)

- (۱) 6 (۲) 8 (۳) 9 (۴) 4

۲۴- نمایش هندسی معادله $4x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$ کدام است؟

- (۱) بیضی (۲) هذلولی (۳) یک نقطه (۴) دو خط راست
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۲)

۲۵- اگر $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{x}{2} & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ را روی $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ در نظر بگیریم، کدام عبارت صحیح است؟ (آمار - سراسری ۸۲)

- (۱) f دارای مینیمم است ولی ماکسیمم ندارد. (۲) f دارای مینیمم صفر و ماکسیمم $\frac{\pi}{4}$ است.
(۳) f دارای مینیمم صفر و ماکسیمم ۱ است. (۴) f نه مینیمم دارد و نه ماکسیمم.

۲۶- مجموعه x هایی که در نامساوی $1 < \frac{2|x|-1}{|x|+1} < 2$ صدق می‌کند، کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

- (۱) $x > \frac{1}{2}$ (۲) $-2 < x < 2$ (۳) $x < -\frac{1}{2}$ یا $x > \frac{1}{2}$ (۴) $x < -2$ یا $x > 2$

۲۷- اگر f و g توابع با ضوابط $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = x^2$ باشند، معادله $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ چند ریشه متمایز دارد؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۶

۲۸- تابع $f(x) = e^x$ یک تابع: (برق - آزاد ۸۲)

- (۱) فرد است. (۲) نه فرد و نه زوج است. (۳) زوج است. (۴) هم فرد و هم زوج است.

۲۹- در صورتی که $f(x) = 2|x| + 2|-x|$ باشد، مجموعه $f \circ f \circ f(x)$ چیست؟ (نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $\{2\}$ (۲) $\{0\}$ (۳) $\{0, 4\}$ (۴) $\{0, -2\}$
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۲)

۳۰- به ازای کدام مقادیر حقیقی x نامساوی $|x| \leq \frac{x}{2}$ برقرار است؟ ($|x|$ یعنی جزء صحیح x).

- (۱) $\{x : x > 1\}$ (۲) $\{x : x < 1\}$ (۳) $\{x : -1 < x < 1\}$ (۴) $\{x : -2 < x < 0\}$
(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

۳۱- برد تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x-1}}$ کدام بازه است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

- (۱) $[-1, 1]$ (۲) $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ (۳) $[\frac{1}{2}, 1]$ (۴) $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

۳۲- برد تابع با ضابطه $y = \frac{1}{e^x + 1}$ کدام مجموعه است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) $\{x : 0 < x < \frac{1}{2}\}$ (۲) $\{x : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$ (۳) $\{x : 0 \leq x \leq 1\}$ (۴) $\{x : 0 < x < 1\}$

۳۳- فرض کنید که $f(x) = \frac{(a^x + a^{-x})}{2}$ ، $a > 0$ ، در این صورت $f(x+y) + f(x-y)$ بر حسب $f(x)$ و $f(y)$ کدام است؟

- (۱) $4f(x).f(y)$ (۲) $2f(x).f(y)$ (۳) $\frac{1}{2}f(x).f(y)$ (۴) $f(x).f(y)$
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۴)

۳۴- تابع $f(x) = 2$ ، $g(x) = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ ، $h(x) = x^2 - 2x + 3$ مفروض‌اند. تابع $(f+g) \circ h$ کدام است؟

- (۱) $\{(0, 2)\}$ (۲) $\{(1, 5)\}$ (۳) $\{(0, 2), (1, 5)\}$ (۴) $\{(0, 2), (1, 4), (2, 5)\}$
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۴)

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

۱- گزینه «۳» $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta \Rightarrow \cosh x = \sec \theta$

۲- گزینه «۱»

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow 2ye^x = e^{2x} + 1 \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow x = \operatorname{Ln}(y \pm \sqrt{y^2 - 1}) \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را با هم عوض می‌کنیم}} y = \operatorname{Ln}(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

۳- گزینه «۱» به متن کتاب مراجعه شود.

۴- گزینه «۱» $\operatorname{Arcsin} 1 - \operatorname{Arcsin}(-1) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$

۵- گزینه «۱» $g[h(x)] = \sqrt[2]{(e^x)^2} = \sqrt[2]{e^{2x}} = e^x \Rightarrow f[g(h(x))] = \operatorname{Ln}[e^x] = \operatorname{Lne}^x = x$

۶- گزینه «۲» چون مبدأ مختصات نقطه‌ای از $f(x)$ است لذا $f(0) = 0$ خواهد بود.

$$2f(x+2) - f(x) = 4 \xrightarrow{x=0} 2f(2) - f(0) = 4 \Rightarrow f(2) = \frac{4}{2}$$

$$x=2 \Rightarrow 2f(4) - f(2) = 4 \Rightarrow 2f(4) = 4 + \frac{4}{2} \Rightarrow f(4) = \frac{16}{4}$$

$$x=4 \Rightarrow 2f(6) - f(4) = 4 \Rightarrow 2f(6) = 4 + \frac{16}{4} \Rightarrow f(6) = \frac{52}{4}$$

$$x=6 \Rightarrow 2f(8) - f(6) = 4 \Rightarrow 2f(8) = 4 + \frac{52}{4} \Rightarrow f(8) = \frac{160}{8}$$

۷- گزینه «۲» تابع f ، تابع $\operatorname{tgh} x$ می‌باشد، و برد آن بازه $(-1, 1)$ است.

۸- گزینه «۱» برای محاسبه $f^{-1}(\operatorname{Ln} 2)$ ، می‌توانیم به جای $f(x)$ ، $\operatorname{Ln} 2$ قرار دهیم. $\operatorname{Ln} 2 = \operatorname{Ln} \frac{2x+1}{x} \Rightarrow \frac{2x+1}{x} = 2 \Rightarrow x=1$

۹- گزینه «۴»

$F(G(-x)) = F(-G(x)) = F(G(x)) \Rightarrow$ زوج است FOG

$G(F(-x)) = G(F(x)) \Rightarrow$ زوج است GOF

۱۰- گزینه «۲» x های مشترک در f و g را در نظر می‌گیریم، و y های متناظر را با هم جمع می‌کنیم: $f+g = \{(2, 5), (3, 8)\}$

۱۱- گزینه «۳» $-\sin^2 \pi x \geq 0 \Rightarrow \sin^2 \pi x \leq 0 \Rightarrow \sin \pi x = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

۱۲- گزینه «۴» به جای x در رابطه داده شده عدد ۲ را قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود $f(0) = \frac{2}{5}$ ، در بین گزینه‌ها، فقط در گزینه ۴، $f(0)$ برابر $\frac{2}{5}$ می‌باشد.

۱۳- گزینه «۱» عبارت مقابل Ln باید بزرگتر از صفر باشد، یعنی $x > 0$ ، همچنین لازم است: $|x| - x > 0 \Rightarrow |x| > x \Rightarrow x < 0$ اشتراک جوابهای به دست آمده \emptyset می‌باشد.

۱۴- گزینه «۲» برای اینکه تابع f زوج باشد، لازم است ضریب عامل فرد یعنی $b-1$ برابر صفر باشد، پس $b=1$ و برای فرد بودن تابع g لازم است ضریب عامل زوج یعنی $a+2$ برابر صفر باشد پس $a=-2$.

۱۵- گزینه «۳» رابطه اخیر به ازای هیچ مقدار x برقرار نیست، زیرا همواره $x \leq |x|$.

۱۶- گزینه «۴» $t = \arccos(x-1) \Rightarrow \cos t = x-1 \Rightarrow x = 1 + \cos t$

با جایگزینی در تابع داده شده، به دست می‌آید:
 $f(t) = \frac{1 + \cos t - 1}{1 + \cos t} = \frac{\cos t}{1 + \cos t}$

۱۷- گزینه «۱» $g \circ f = g(f(x)) = \{(2, 3), (4, 6)\}$

۱۸- گزینه «۲» $f(-1)$ از ضابطه دوم تابع به دست می‌آید.

۱۹- گزینه «۴»

$$\begin{cases} f(-1) = -1 + 1 = 0 \\ f \circ f(-1) = f[f(-1)] = f(0) = 0 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow f \circ f(-1) + [f(-1)]^2 = 1 + 0 = 1$$

روش دوم: ملاحظه می‌شود که $f(0) = 0$ و تنها گزینه‌ای که این شرط در آن صدق می‌کند، گزینه ۴ است.
 $-1 \leq x < 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -1 \xrightarrow{f(-1)=-1} f(\lfloor x \rfloor) = -1$
 $0 \leq x < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0 \xrightarrow{f(0)=0} f(\lfloor x \rfloor) = 0$
 $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1 \xrightarrow{f(1)=\frac{1}{2}} f(\lfloor x \rfloor) = \frac{1}{2}$

۲۰- گزینه «۳»

$f(x) = a^{-x} \Rightarrow f'(x) = -a^{-x} \ln a < 0$ همواره نزولی است: توجه شود چون $a > 1$ لذا $\ln a > 0$ است.

$g(x) = b^x \Rightarrow g'(x) = b^x \ln b < 0$ همواره نزولی است: توجه شود چون $0 < b < 1$ لذا $\ln b < 0$ می‌باشد.

۲۱- گزینه «۲» $|3x - 4| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 3x - 4 \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 3x \leq 6 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 2$

۲۲- گزینه «۱» واضح است که $x=0$ در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) نمی‌توانند صحیح باشند.

۲۳- گزینه «۲» تعداد توابع از B به A برابر $n(B)^{n(A)}$ یعنی $3^2 = 9$ می‌باشد.

۲۴- گزینه «۴» $4x^2 = y^2 - 2y + 1 \Rightarrow (2x)^2 = (y-1)^2 \Rightarrow y-1 = \pm 2x$

۲۵- گزینه «۱» واضح است که هر دو ضابطه در فاصله $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ مقادیر مثبت دارند و چون $f(0) = 0$ ، پس نقطه 0 ، نقطه می‌نیمم تابع f است.

دنباله $a_n \in Q$ را در نظر بگیرید به طوری که $a_n \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ، در این صورت $f(a_n) \rightarrow 1$ پس f در این بازه هر مقدار دلخواهی نزدیک به یک را اتخاذ می‌کند، ولی مقدار تابع f هرگز برابر یک نخواهد بود، پس f ماکسیمم ندارد.

۲۶- گزینه «۴» سمت راست نامساوی فوق همواره برقرار می‌باشد، پس کافی است:

$$\frac{2|x|-1}{|x|+1} > 1 \Rightarrow 2|x|-1 > |x|+1 \Rightarrow |x| > 2 \Rightarrow x > 2 \text{ یا } x < -2$$

۲۷- گزینه «۲»

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 2x^2 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2 + 2x) = (x^2 + 2x)^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 \Rightarrow x^4 + 4x^3 + 4x^2 = x^4 + 2x^2 \\ \Rightarrow 4x^3 + 2x^2 &= 0 \Rightarrow 2x^2(2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

۲۸- گزینه «۲» $f(-x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow f$ نه فرد و نه زوج است

۲۹- گزینه «۲»

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor -x \rfloor = 2(\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor) = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -2 & x \notin Z \end{cases} \\ f \circ f(x) &= f[f(x)] = \begin{cases} f(0) = 0 & \text{اگر } f(x) = 0 \text{ باشد} \\ f(-2) = 0 & \text{اگر } f(x) = -2 \text{ باشد} \end{cases} \Rightarrow f \circ f \circ f(x) = f[f \circ f(x)] = f(0) = 0 \end{aligned}$$

توضیح: توجه شود وقتی $f(x) = 0$ یا $f(x) = -2$ باشد آنگاه $x \in Z$ می‌باشد و $f(0) = f(-2) = 0$ می‌باشد.

۳۰- گزینه «۲» واضح است که $x=0$ در نامساوی صدق می‌کند، پس گزینه‌ها (۱) و (۴) غلط هستند، همچنین عدد -1 در نامساوی صدق می‌کند، پس گزینه (۳) نیز غلط می‌باشد. بنابراین فقط گزینه (۲) می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

۳۱- گزینه «۱»

۳۲- گزینه «۴» $ye^x + y = 1 \Rightarrow ye^x = 1 - y \Rightarrow e^x = \frac{1-y}{y} > 0 \Rightarrow 0 < y < 1$

۳۳- گزینه «۲»

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= \frac{a^{x+y} + a^{-x-y}}{2} + \frac{a^{x-y} + a^{y-x}}{2} = \frac{a^x(a^y + a^{-y}) + a^{-x}(a^{-y} + a^y)}{2} \\ &= \frac{(a^x + a^{-x})(a^y + a^{-y})}{2} = 2f(x)f(y) \end{aligned}$$

روش دوم: به ازای $x=y=0$ مقدار عبارت خواسته شده برابر ۲ می‌باشد. تنها گزینه‌ای که به ازای $x=y=0$ برابر ۲ می‌باشد، گزینه ۲ است.

۳۴- گزینه «۲» $h(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$

بنابراین کمترین مقدار تابع h به ازای $x=1$ حاصل می‌شود که برابر ۱ خواهد بود و فقط همین مقدار در دامنه تابع $f+g$ صدق می‌کند زیرا:

$$\begin{aligned} D_{f+g} &= D_f \cap D_g = \{0, 1, 2\} \\ \Rightarrow (f+g) \circ h &= (f+g) \circ h(1) = (f+g)(2) = f(2) + g(2) = 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

تست‌های تکمیلی فصل اول

کدام است؟ هرگاه $\pi < x < 2\pi$ باشد، حاصل $\frac{2}{\sqrt{1-\cos 2x}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2} \operatorname{cosec} x$
- (۲) $-\sqrt{2} \operatorname{cosec} x$
- (۳) $-\operatorname{cosec} x$
- (۴) $\operatorname{cosec} x$

کدام است؟ با فرض $\operatorname{tg} x = 3$ مقدار عددی $A = \frac{2 \sin x - 2 \cos x}{5 \sin x + 4 \cos x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{13}$
- (۲) $\frac{1}{16}$
- (۳) $\frac{3}{17}$
- (۴) $\frac{7}{19}$

کدام است؟ اگر $\operatorname{Log} a$ و $\operatorname{Log} b$ ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند حاصل عبارت $\frac{\operatorname{Log} a \times \operatorname{Log} b}{\operatorname{log}(ab)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$
- (۲) $\frac{5}{3}$
- (۳) $-\frac{2}{5}$
- (۴) $\frac{4}{5}$

کدام است؟ اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل $A = |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}|$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) $\sqrt{3}$
- (۳) 2
- (۴) 3

کدام است؟ اگر $\frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{4}$ باشد حاصل $\frac{x^2}{x^2 + x + 1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{8}$
- (۲) $\frac{1}{16}$
- (۳) $\frac{1}{8}$
- (۴) 8

کدام است؟ اگر $x^2 + x + 1 = 0$ باشد حاصل $A = x^{202} + \frac{1}{x^{202}}$ کدام است؟

- (۱) 1
- (۲) -1
- (۳) 2
- (۴) -2

کدام است؟ حاصل عبارت $A = \sqrt{(-x)^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(-2)^2}$ وقتی $x > 0$ کدام است؟

- (۱) $-2x - 2$
- (۲) -2
- (۳) $2x + 2$
- (۴) 2

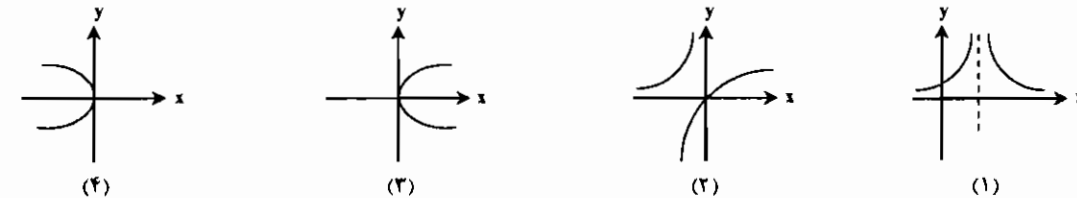
کدام است؟ فرض کنیم سه عدد مثبت $\frac{1}{c}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a}$ به ترتیب سه جمله متوالی یک تصاعد هندسی باشند در مورد $\operatorname{log} c, \operatorname{log} b, \operatorname{log} a$ چه حکمی می‌توان کرد؟

- (۱) سه جمله متوالی تصاعد حسابی هستند.
- (۲) سه جمله متوالی تصاعد هندسی هستند.
- (۳) $\operatorname{log} a$ واسطه هندسی بین $\operatorname{log} b$ و $\operatorname{log} c$ است.
- (۴) $\operatorname{log} a$ واسطه حسابی بین $\operatorname{log} b$ و $\operatorname{log} c$ است.

کدام است؟ مقدار عبارت $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')]$ برابر است با:

- (۱) B
- (۲) $A \cup B$
- (۳) $A \cap B$
- (۴) A

کدام نمودار نمایش یک تابع است؟



کدام است؟ تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & x \leq 2 \\ \frac{1}{(x-2)} & 2 < x \leq 3 \\ 2x - 5 & x > 3 \end{cases}$ مقدار $f(\sqrt{\log_7 49})$ تقریباً کدام است؟

- (۱) $0/9$
- (۲) $1/3$
- (۳) $2/1$
- (۴) $6/4$

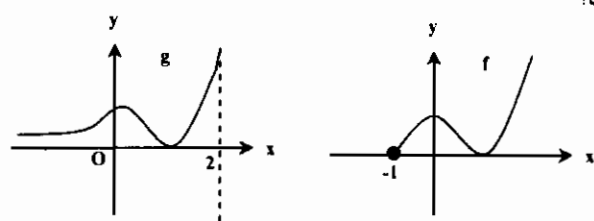
کدام است؟ دامنه تعریف $e^{\operatorname{Ln}(\sqrt{x-1}(x^2+2))}$ کدام است؟

- (۱) $(1, +\infty)$
- (۲) $[2, +\infty)$
- (۳) $(1, +\infty) - \{2\}$
- (۴) $(1, +\infty) - \{2\}$

کدام است؟ برد تابع $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x-1}}$ کدام است؟

- (۱) $(1, +\infty)$
- (۲) $[1, 2]$
- (۳) $[0, 1]$
- (۴) $(0, +\infty)$

کدام است؟ نمودار $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر است. دامنه $f-g$ کدام است؟



- (۱) $(1, +\infty)$
- (۲) $[2, +\infty)$
- (۳) $[-1, 2]$
- (۴) $[-1, 2]$

کدام است؟ اگر $f(x^2) + f(x^2) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ آنگاه $\operatorname{fog}(0)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $-\frac{1}{3}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $-\frac{2}{3}$

کدام است؟ دوره تناوب تابع $y = \sin^2 ax + \sin \frac{1}{x}$ کدام است؟

- (۱) تابع دوره تناوب ندارد.
- (۲) $\frac{\pi}{a}$
- (۳) $\frac{2\pi}{a}$
- (۴) $\frac{1}{2\pi}$

کدام است؟ در نامساوی $|x^2 - 2x| > |x^2| - |2x|$ محدوده x کدام است؟

- (۱) $0 < x < 2$
- (۲) $x < 0, x > 2$
- (۳) $x = 0, x \geq 2$
- (۴) $(-\infty, 0) \cup (0, 2)$

کدام است؟ حاصل $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right]$ برابر کدام است؟ (نماد $\lfloor \cdot \rfloor$ به مفهوم جزء صحیح است)

- (۱) 1
- (۲) 2
- (۳) 3
- (۴) 4

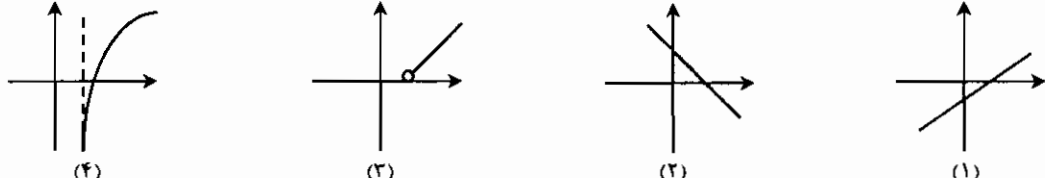
کدام است؟ توابع f و g بر R با ضابطه $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$ و $g(x) = \lfloor x \rfloor$ از نظر زوج و فرد بودن در کدام گزینه صدق می‌کنند؟

- (۱) فقط f فرد است.
- (۲) فقط f زوج است.
- (۳) f زوج و g فرد است.
- (۴) f فرد و g زوج است.

کدام است؟ معادلات $(a) |\sin x| = \sin x + 2$ و $(b) |\tan x| = \tan x + 2$ مفروض هستند. عبارات صحیح کدام است؟

- (۱) a ریشه ندارد و b ریشه دارد.
- (۲) a و b هر دو دارای ریشه هستند.
- (۳) a و b ریشه ندارند.
- (۴) a ریشه دارد و b ریشه ندارد.

کدام است؟ نمودار تابع $y = e^{\operatorname{Ln}(x-2)}$ به کدام صورت است؟



کدام است؟ اگر $\lfloor x \rfloor = n$ و $k \in Z$ طوری باشد که $k \leq x$ ، آنگاه:

- (۱) $n = k$
- (۲) $k \leq n$
- (۳) $n > k$
- (۴) $k - 1 \leq n \leq k$

کدام است؟ اگر $\phi(x) = 5x$ و $f(x) = x^2 + 6$ باشد معادله $f(x) = |\phi(x)|$ دارای چند ریشه است؟

- (۱) 3
- (۲) 4
- (۳) 1
- (۴) 2

کدام است؟ مجموعه جواب معادله $|x^2 - 4| - |x^2 + 2| = |x^2 - 4| - |x^2 + 2|$ کدام است؟

- (۱) $|x| \geq \sqrt{2}$
- (۲) $|x| \leq \sqrt{2}$
- (۳) $|x| \geq \sqrt{2}$
- (۴) $|x| \leq \sqrt{2}$

کدام است؟ برد تابع $y = \frac{1}{2 - \cos 3x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3} \leq y \leq 1$
- (۲) $\frac{1}{3} < y < 1$
- (۳) $\frac{2}{3} < y < 1$
- (۴) $\frac{2}{3} \leq y \leq 1$

۲۶- در مورد تابع $f(x) = \frac{(1+x^2)^2}{x^2}$ کدام گزاره صحیح است؟

- (۱) تابعی زوج است (۲) تابعی فرد است (۳) تابعی نه فرد و نه زوج است (۴) تابعی متناوب می باشد.

۲۷- حوزه تعریف تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\cos(\sin x)} + \arcsin \frac{x^2+1}{2x}$ کدام است؟

- (۱) $x \geq 1$ یا $x \leq -1$ (۲) $x = \pm 1$ (۳) $x > 0$ (۴) $-1 \leq x \leq 1$

۲۸- مجموع ریشه های معادله $\arctg \sqrt{x(x+1)} + \arcsin \sqrt{x^2+x+1} = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) هیچکدام

۲۹- معکوس تابع با ضابطه $y = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$ کدام است؟

- (۱) $x = \sinh(y \ln a)$ (۲) $x = y^{\sinh(L \ln a)}$ (۳) $x = \cosh(y \ln a)$ (۴) $x = y \sinh(L \ln a)$

۳۰- معکوس تابع $y = 2^{\left(\frac{x}{x-1}\right)}$ کدام است؟

- (۱) $x = \frac{\log y}{\log \frac{y}{2}}$ (۲) $x = \frac{\log y - 1}{\log y}$ (۳) $x = \frac{\log \frac{y}{2}}{\log y}$ (۴) $x = \frac{\log y}{\log y + 1}$

۳۱- در مورد معادلات (۱) $|x| = x - 5$ و (۲) $|x| = x + 5$ کدام گزاره صحیح است؟

- (۱) معادله (۱) دارای یک ریشه و معادله (۲) ریشه ندارد (۲) معادله (۱) فاقد ریشه و معادله (۲) دارای یک ریشه می باشد (۳) هیچکدام از معادلات ریشه ندارد (۴) هر دو معادله دارای یک ریشه می باشند.

۳۲- مجموعه جواب نامعادله $x^2 - 7x + 12 > x^2 - 7x + 12$ کدام است؟

- (۱) $3 \leq x \leq 4$ (۲) $-\frac{12}{5} \leq x \leq \frac{12}{5}$ (۳) $3 < x < 4$ (۴) $-\frac{12}{5} < x < \frac{12}{5}$

۳۳- کدامیک از توابع زیر زوج نیست؟

- (۱) $f(x) = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ (۲) $f(x) = 4 - 2x^2 + \sin^2 x$ (۳) $f(x) = x \sin^2 x - x^2$ (۴) $f(x) = x^2 - |x|$

۳۴- کوچکترین دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \sin \Delta x \sin x$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) $\frac{2\pi}{3}$

۳۵- دوره تناوب تابع $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \cot gx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) متناوب نیست (۴) متناوب است و دوره تناوب هر مقداری می تواند باشد.

۳۶- دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi [x]}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

- (۱) \mathbb{R} (۲) \mathbb{Z} (۳) \emptyset (۴) \mathbb{N}

۳۷- برد تابع $f(x) = \sqrt{|x|}$ برابر کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

- (۱) $\{1, 2, 4, 8, \dots\}$ (۲) $\{2, 4, 8, \dots\}$ (۳) $\{2, 4\}$ (۴) \mathbb{R}^+

۳۸- دامنه تعریف تابع $f(x) = \log [x]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

- (۱) $(1, \infty)$ (۲) $(0, \infty)$ (۳) $[0, \infty)$ (۴) $[1, \infty)$

۳۹- اگر $f(x) = 6f(x-2) + f(x-1)$ باشد، آنگاه $f(4)$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۴۰- دوره تناوب تابع $f(x) = (-1)^{\left[\frac{x}{\pi}\right]} \cos x$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

۴۱- کدام تابع یک به یک است؟

- (۱) $y = x + [x]$ (۲) $y = x - [x]$ (۳) $y = x - |x|$ (۴) $y = x + |x|$

۴۲- اگر $f(x) = \arctan(\tan x)$ و $g(x) = \sin 2\pi x$ آنگاه کدام یک از گزاره های زیر صحیح است؟

- (۱) دوره تناوب f ، 6π و دوره تناوب g ، 1 می باشد. (۲) دوره تناوب f ، 3π و دوره تناوب g ، 2π می باشد. (۳) دوره تناوب f ، π و دوره تناوب g ، 1 می باشد. (۴) دوره تناوب f ، 2π و دوره تناوب g ، 1 می باشد.

۴۳- برد تابع $y = x - \sqrt{4-x^2}$ کدام فاصله است؟

- (۱) $[-2, 2]$ (۲) $[-\sqrt{2}, 2]$ (۳) $[-2\sqrt{2}, 2]$ (۴) $[-2\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

۴۴- برد تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-[x]}}$ کدام مجموعه است؟

- (۱) $(-\infty, 1)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $[0, \infty)$ (۴) $(1, +\infty)$

۴۵- تابع f صعودی و از مبدأ می گذرد، دامنه تابع با ضابطه $g(x) = \sqrt{x f(x)}$ کدام مجموعه است؟

- (۱) $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ (۲) $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ (۳) \mathbb{R} (۴) دامنه f

۴۶- اگر ضابطه f بر $f(x) = x^2 - x + 1$ باشد آنگاه نمودار f^{-1} الزاماً از کدام نقطه می گذرد؟

- (۱) $(-1, 0)$ (۲) $(0, -1)$ (۳) $(1, 0)$ (۴) $(0, 1)$

۴۷- اگر $198 = (1-\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n$ ، جزء صحیح $(1+\sqrt{2})^n$ کدام است؟

- (۱) ۱۹۵ (۲) ۱۹۶ (۳) ۱۹۷ (۴) ۱۹۸

۴۸- حاصل $A = [1] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{15}]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۴ (۳) ۲۲ (۴) ۳۶

۴۹- اگر $f = \{(2, 5), (3, 4), (4, 5)\}$ و $g = \{(2, 3), (3, 4), (5, 6)\}$ باشد، fog کدام است؟

- (۱) $\{(2, 4), (3, 5)\}$ (۲) $\{(2, 3), (3, 4)\}$ (۳) $\{(2, 5), (3, 4)\}$ (۴) $\{(4, 5), (5, 6)\}$

۵۰- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = |x+2| + a|x-2|$ زوج است؟

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲

۵۱- اگر دوره تناوب $f(x) = \sin x + \cos x + 1$ برابر T باشد و دوره تناوب تابع $f(x) = \sin \frac{\pi}{6} x + \cos \frac{\pi}{6} x$ برابر T_1 باشد آنگاه:

- (۱) $T_1 = T + \frac{\pi}{6}$ ، $T_2 = T$ (۲) $T_1 = T$ ، $T_2 = \frac{T}{2}$ (۳) $T_1 = T$ ، $T_2 = T + \frac{\pi}{6}$ (۴) $T_1 = T_2 = T$

۵۲- اگر $f(x+y, x-y) = 2(xy+y^2)$ آنگاه $f(2, 1)$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۳- کدامیک از جمله های زیر صحیح نیست؟

- (۱) اگر تابع f نزولی اکید و تابع g بر \mathbb{R}_+ صعودی اکید باشد، gof نزولی اکید است. (۲) اگر توابع f و g یکی زوج و دیگری فرد باشد آنگاه fog زوج هستند. (۳) اگر توابع f و g متناوب باشند، آنگاه $f+g$ ، $f \times g$ و fog متناوب هستند. (۴) اگر تابع f فرد باشد آنگاه f^{-1} نیز فرد خواهد بود.

۵۴- کوچکترین دوره تناوب تابع $f(x) = |\sin x| + |\cos x - 1|$ کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) 2π

۵۵- اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x+y) = f(x)f(y)$ تعریف شده باشد و متحد صفر نباشد دامنه $y = \text{Ln} f(x)$ کدام است؟

- (۱) ϕ (۲) \mathbb{R}^+ (۳) \mathbb{R}^- (۴) \mathbb{R}

۵۶- کدامیک از توابع زیر بر بازه $(0,1)$ کراندار است؟

- (۱) $f(x) = e^x$ (۲) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ (۳) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ (۴) هیچکدام

۵۷- تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ، بازه $(0,1)$ را به کدام بازه می نگارد؟

- (۱) $(0,1)$ (۲) $(0, \frac{1}{2})$ (۳) $(0, \frac{1}{4})$ (۴) $(0,1)$

۵۸- وارون تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$ برابر تابع g با کدام ضابطه است؟

- (۱) $g(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ \sqrt{x} & x > 1 \end{cases}$ (۲) $g(x) = \begin{cases} -x & x \leq 1 \\ -\sqrt{x} & x > 1 \end{cases}$ (۳) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases}$ (۴) $g(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x} & x \leq 1 \\ \frac{-1}{x^2} & x > 1 \end{cases}$

۵۹- اگر $|x| \leq \frac{x}{y}$ ، مجموعه جواب این نامساوی کدام است؟

- (۱) $[0, +\infty)$ (۲) $[0,1]$ (۳) $(-1,1]$ (۴) $(-\infty,1)$

۶۰- برد تابع $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ در کدام فاصله است؟

- (۱) $[1, +\infty)$ (۲) $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (۳) $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ (۴) $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$

۶۱- ضابطه معکوس $f(x) = 1 + \sqrt{1+x}$ کدام است؟

- (۱) $x^2 - 2x, x \geq 1$ (۲) $x^2 - 2x, x < 1$ (۳) $x^2 + 2x, x \leq -1$ (۴) $x^2 + 2x$

۶۲- حاصل $\frac{x \log_a^2}{y \log_a^2}$ کدام است؟

- (۱) $\log \frac{x}{y}$ (۲) \log_y^x (۳) \log_x^y (۴) ۱

۶۳- مقدار $\text{tgh}(\text{Ln} 2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۶۴- فرض کنید $f(x) = \text{Log} \frac{1-x}{1+x}$ ، کدام یک از روابط زیر برقرار است؟

- (۱) $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1)f(x_2)$ (۲) $f(x_1) + f(x_2) = f(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2})$

- (۳) $f(x_1) + f(x_2) = f(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2})$ (۴) $f(x_1) + f(x_2) = f(\frac{x_1x_2}{x_1+x_2})$

۶۵- فرض کنید $f(x) = \frac{a^x+a^{-x}}{2}$ ، کدام اتحاد زیر برقرار است؟

- (۱) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ (۲) $f(x) + f(y) = 2f(x)f(y)$

- (۳) $f(x+y) + f(x-y) = f(2x)$ (۴) هیچکدام

۶۶- معکوس تابع $y = 5^{\log x}$ کدام است؟

- (۱) $x = y^{\log 5}$ (۲) $x = y^{\log 5}$ (۳) $x = \log y^5$ (۴) هیچکدام

۶۷- جواب نامعادله $(x-2)\sqrt{x^2+1} > x^2+2$ کدام است؟

- (۱) $[0,2]$ (۲) $[0,1]$ (۳) $(-1,1)$ (۴) ϕ

۶۸- دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$ کدام است؟

- (۱) $0 \leq x \leq n^2\pi^2$ (۲) $(2n\pi)^2 \leq x \leq (2n+1)^2\pi^2$ (۳) $0 \leq x \leq (2n+1)^2\pi^2$ (۴) $x \geq 0$

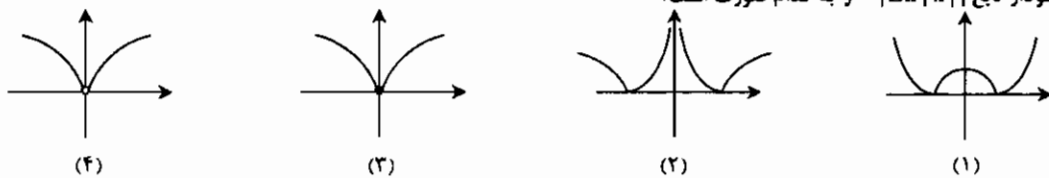
۶۹- دوره تناوب تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{گویا } x \\ 0 & \text{گنگی } x \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) متناوب است ولی دوره تناوب مشخصی ندارد. (۳) متناوب نیست. (۴) ۰

۷۰- تعداد ریشه‌های معادله $\sqrt{x-1} = x^2+2x+1$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

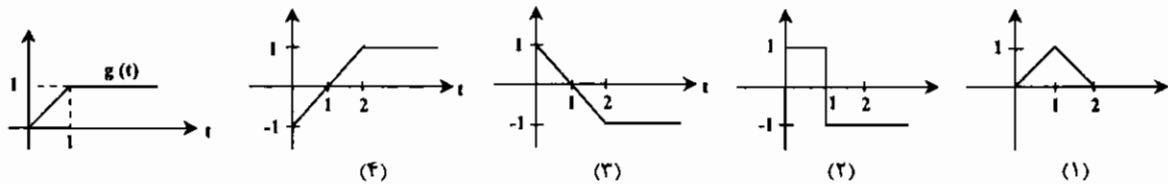
۷۱- نمودار تابع $y = |\text{Ln}|x||$ به کدام صورت است؟



۷۲- اگر $f(x) = \text{Sh}x$ ، مقدار $f^{-1}(\frac{2}{3})$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\text{Ln} 2$ (۳) $\text{Ln} \sqrt{2}$ (۴) $\text{Ln} \frac{1}{2}$

۷۳- اگر نمودار تابع $g(t)$ به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $h(t) = g(t) - u(t-1)g(t-1)$ کدام است؟ (تابع پله‌ای واحد می باشد.)



۷۴- مینیمم مطلق تابع $f(x) = \cosh x$ ، $x \in \mathbb{R}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۰ (۳) ۲ (۴) وجود ندارد.

۷۵- کدامیک از توابع زیر نزولی و یک به یک است؟

- (۱) $y = -x^2$ (۲) $y = -e^{\sin x}$ (۳) $y = \text{Ln}|x|$ (۴) $y = e^{-x}$

۷۶- اگر $f(x) = 14 + 7x + 4x^2 - 2x^3$ ، آنگاه $f(1+\sqrt{3})$ چقدر است؟

- (۱) $5 + \sqrt{3}$ (۲) $16 + \sqrt{3}$ (۳) $5 - \sqrt{3}$ (۴) $16 - \sqrt{3}$

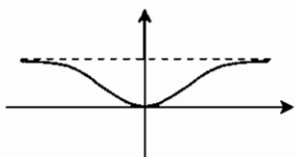
۷۷- اگر $\log_2 a = 2$ ، حاصل $a^{\log_2^2+1}$ کدام است؟

- (۱) $2x^2$ (۲) $(2x)^2$ (۳) $(x+2)^2$ (۴) $\frac{x^2}{2}$

۷۸- ضابطه نمودار مقابل کدام است؟

- (۱) $y = \frac{|x|}{|x|+1}$ (۲) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

- (۳) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ (۴) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$



۷۹- برد تابع $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}$ کدام است؟

- (۱) $[-2, 1]$ (۲) $(-2, 1)$ (۳) $[-1, 2]$ (۴) $[-1, 2)$

۸۰- اگر $x^2 + x + 1 = 0$ حاصل $x^5 - x^2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۰

۸۱- نمودار کدامیک از منحنی‌های زیر می‌تواند، نمایش یک تابع باشد؟

- (۱) لمینکات (۲) بیضی (۳) دایره (۴) سهمی

۸۲- برد تابع $y = x^{100} - 100x + 99$ کدام فاصله است؟

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(1, +\infty)$ (۳) R (۴) $(99, +\infty)$

۸۳- برد تابع $y = \cos(\log(\log x))$ ، کدام فاصله است؟

- (۱) $[-1, 1]$ (۲) R^+ (۳) $[-2, 2]$ (۴) $[0, 1]$

۸۴- برد تابع $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ |x| & x \geq 0 \end{cases}$ کدام فاصله زیر است؟

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $(-\infty, 0]$

۸۵- توابع $f(x) = 2$ ، $g(x) = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ و $h(x) = x^2 - 2x + 3$ مفروضند. تابع $(f+g) \circ h$ کدام است؟

- (۱) $\{(0, 2)\}$ (۲) $\{(1, 5)\}$ (۳) $\{(2, 3)\}$ (۴) $\{(3, 1)\}$

۸۶- به ازای چه مقادیر m تابع $y = \log(2x + \sqrt{m^2 x^2 + 1})$ فرد است؟

- (۱) ۰ (۲) ۳ (۳) ± 3 (۴) $\pm \sqrt{3}$

۸۷- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$ حاصل $f(-f(-x))$ کدام است؟

- (۱) $x^2 - x + 1$ (۲) $x^4 - x^2 + 1$ (۳) ۱ (۴) $x^4 + x^2 + 1$

۸۸- معادله $x^5 - 18x + 2 = 0$ در فاصله $[-1, 1]$ چند ریشه دارد؟

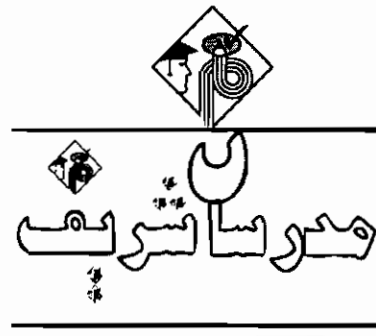
- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۸۹- کدامیک از نامساویهای زیر برقرار است؟

- (۱) $99^{100} < 100^{99}$ (۲) $99^{99} < 100^{100}$ (۳) $202^{202} < 203^{203}$ (۴) $200^{100} < 100^{200}$

۹۰- دوره تناوب تابع $y = \frac{\sin ax + \cos ax}{\sin ax - \cos ax}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{a}$ (۲) πa (۳) $\frac{\pi}{2a}$ (۴) $2\pi a$



فصل دوم

« حد و پیوستگی »

تعریف حد

تابع با ضابطه $y = f(x)$ و نقطه‌ای بطول a را در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم $f(x)$ در همسایگی a تعریف شده باشد اگر وقتی $x \rightarrow a$ مقادیر $f(x)$ به هر میزان دلخواه به L نزدیک شود، L را حد تابع $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می‌کند می‌گوئیم و به شکل $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ نمایش می‌دهیم.

مسئله نزدیک شدن $f(x)$ به L را می‌توان چنین در نظر گرفت که به ازای هر $\epsilon > 0$ که اختیار کنیم داشته باشیم $|f(x) - L| < \epsilon$ و میل کردن x به سمت a را می‌توان چنین تعبیر کرد که به ازای یک $\delta > 0$ داشته باشیم $0 < |x - a| < \delta$ و بطور کلی باید استلزام منطقی زیر برقرار باشد: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

برای درک بهتر، مطلب را با یک مثال عددی شرح می‌دهیم:

مثال ۱: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ می‌دانیم دامنه تعریف $R - \{1\}$ است پس تابع در ۱ تعریف نشده است ولی اگر x رفته رفته به عدد ۱ نزدیک شود (با مقادیر کمتر از ۱ و یا بیشتر از ۱) مقدار تابع مرتباً به عدد ۲ نزدیک خواهد شد. در این حالت می‌گوییم، حد تابع $f(x)$ وقتی x به سمت عدد ۱ میل می‌کند برابر ۲ است، نکته قابل توجه این است که حد تابع در یک نقطه ربطی به مقدار تابع در آن نقطه ندارد.

نکته ۱: برای درک بهتر مفاهیم حد باید دو نقطه فرضی $+\infty$ و $-\infty$ را به مجموعه R اضافه کنیم. این نقاط خواص زیر را دارند:

(۱) $+\infty$ و $-\infty$ قرینه یکدیگر نیستند.

(۲) به ازای هر $a \in R$ داریم:

$$\begin{cases} a + (+\infty) = +\infty, & a - (+\infty) = -\infty, & \frac{a}{-\infty} = 0 \\ a + (-\infty) = -\infty, & a - (-\infty) = +\infty, & \frac{a}{+\infty} = 0 \\ +\infty + \infty = +\infty, & (+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty, & (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty \end{cases}$$

(۳) اگر $a > 0$ باشد: $a(+\infty) = +\infty$, $a(-\infty) = -\infty$; اگر $a < 0$ باشد: $a(+\infty) = -\infty$, $a(-\infty) = +\infty$

حد راست تابع:

فرض کنیم تابع f در بازه (a, b) تعریف شود. گوئیم $f(x)$ در نقطه a دارای حد راست L است و به شکل $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ نمایش می‌دهیم؛ هرگاه x از سمت مقادیر بیشتر از a به a نزدیک شود، مقادیر $f(x)$ به L نزدیک گردد.

حد چپ تابع:

فرض کنیم تابع f در بازه (a, b) تعریف شده باشد. گوئیم $f(x)$ در نقطه b دارای حد چپ L است و به شکل $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$ نمایش می‌دهیم؛ هرگاه x از سمت مقادیر کمتر از b به b نزدیک شود، مقادیر $f(x)$ به L نزدیک گردد.

«حضرت علی (ع)»

بین تفاوت ره از کجاست تا به کجا
سماع و عطف کجا نغمه ربایی کجا

حافظ

هر فریب خورده را سرزنش نتوان کرد.

صلاح کار کجاست و من خراب کجاست
چه نسبت است به رندی صلاح و تقوی را

نکته ۲: شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وجود داشته باشد آنست که $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (البته باید حدهای اخیر وجود داشته باشند)

مثال ۲: مقدار حد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ وقتی $x \rightarrow 2$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) حد ندارد

تابع در نقطه $x=2$ حد ندارد. \Rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

پاسخ: گزینه «۴»

فضای حد

۱) اگر تابع $f(x)$ در نقطه a حد داشته باشد، حد آن منحصر به فرد است.

۲) اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در a حد داشته باشند و $f(x) \leq g(x)$ باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ خواهد بود.

۳) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ۴) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

۵) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ (با شرط $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$) ۶) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, (L \geq 0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

فضای حدود نامتناهی:

۱) اگر دو تابع f و g مفروض باشند و g در همسایگی a کراندار باشد و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$ می باشد.

مثال ۳: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (\text{tg}x) \cdot \sin \frac{1}{x}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴ (۴) حد ندارد

پاسخ: گزینه «۱» چون $\lim_{x \rightarrow 0} \text{tg}x = 0$ می باشد و تابع \sin نیز تابعی کراندار است، در نتیجه با توجه به قضیه فوق $\lim_{x \rightarrow 0} (\text{tg}x) \sin \frac{1}{x} = 0$

۲) هر گاه تابع g در یک همسایگی a کراندار باشد و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ می باشد.

مثال ۴: حاصل $A = \lim_{x \rightarrow \infty} (100 + \frac{\sin x}{x})$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱۰۰ ۴ (۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳» زیرا با توجه به قضیه فوق و محدود بودن تابع $\sin x$ و توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ پس $A = 100 + 0 = 100$

نکته ۳: توابع $\sin \frac{1}{x}$ و $\cos \frac{1}{x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ حد ندارد.

نکته ۴: توابع $\cos x, \sin x$ وقتی $x \rightarrow \infty$ حد ندارند.

نکته ۵: $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0$ (است. $n \in \mathbb{N}$)

نکته ۶: وقتی ما عدد را بر $\pm \epsilon$ (عدد بسیار کوچک مثبت) تقسیم می کنیم، آنگاه مقدار کسر برابر $\pm \infty$ خواهد شد، ولی زمانی که در مخرج کسر به صفر مطلق می رسیم، حاصل کسر بی معنا است.

مثال ۵: حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید.

۱) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow$

تعریف نشده $\frac{3}{0}$ [عددی بزرگتر از ۰ و خیلی نزدیک به صفر] $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{\text{عددی بزرگتر از ۰ و خیلی نزدیک به صفر}} = \frac{3}{0} = +\infty$

تابع حد ندارد \Rightarrow

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{\text{عددی کوچکتر از ۰ و خیلی نزدیک به صفر}} = \frac{3}{-0} = -\infty$

تذکره ۱: ملاحظه می شود که در حدودی که دارای جزء صحیح هستند ابتدا حاصل جزء صحیح را به ازای عددی که x به سمت آن میل می کند محاسبه و سپس حد را محاسبه می کنیم.

۲) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|^2 - 1}{|x| - 1} \Rightarrow$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x|^2 - 1}{|x| - 1} = \frac{0 - 1}{0 - 1} = +1$

چون مخرج صفر مطلق است حاصل کسر بی معنی است \Rightarrow

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x|^2 - 1}{|x| - 1} = \frac{0 - 1}{0 - 1} = +1$

۳) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow$

حد موجود نیست \Rightarrow

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{-0} = -\infty$

مثال ۶: حاصل $A = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $-\infty$ ۲ (۲) -1 ۳ (۳) ۱ ۴ (۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۴» $A = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{عددی کوچکتر از ۰ و خیلی نزدیک به صفر}}{0 - \epsilon} = \frac{-1}{-\epsilon} = +\infty$

مثال ۷: مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x|^2 - 9}{|x| - 3}$ برابر است با:

- ۱ (۱) وجود ندارد ۲ (۲) ۰ ۳ (۳) ۶ ۴ (۴) ∞

پاسخ: گزینه «۱» چون تابع در همسایگی (2^+) نامعین است (مخرج برابر صفر مطلق است) پس حد ندارد.

مثال ۸: مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} [3x] + [-3x]$ برابر است با:

- ۱ (۱) ۰ ۲ (۲) -1 ۳ (۳) وجود ندارد ۴ (۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۲»

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} [3x] + [-3x] = [1^+] + [-1^-] = 1 - 2 = -1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f(x) = -1$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} [3x] + [-3x] = [1^-] + [-1^+] = 0 - 1 = -1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} f(x) = -1$

مثال ۹: کدام گزینه درست نیست؟

۱ (۱) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$ ۲ (۲) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|}{x} = 1$ ۳ (۳) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{|x|} = 1$ ۴ (۴) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2} = 1$

پاسخ: گزینه «۲» حد چپ و راست با هم برابر نیستند.

مثال ۱۰: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x}$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) 0 (۴) 1

پاسخ: گزینه «۱» توجه شود که (0^-) زاویه‌ای در ربع چهارم است، یعنی: $0 < \sin(0^-) < -1$ می‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = \frac{|\sin(0^-)|}{-\varepsilon} = \frac{-1}{-\varepsilon} = +\infty$$

مثال ۱۱: به ازاء چه مقداری از a تابع $f(x) = a[x] + [x+1]$ در نقطه $x=1$ دارای حد است؟

- (۱) -1 (۲) -2 (۳) 0 (۴) $+2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a[1^-] + [1+1-\varepsilon] = 1$$

$$\Rightarrow a+2=1 \Rightarrow a=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a[1^+] + [1+1+\varepsilon] = a+2$$

پاسخ: گزینه «۱»

مثال ۱۲: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin 3x}$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) -2 (۳) -1 (۴) تعریف نشده

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin 3x} = \frac{1}{-1+\varepsilon} = -2$$

پاسخ: گزینه «۲»

مثال ۱۳: مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x|}{[x]} \text{Sgn}(x+1)$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 1 (۳) ∞ (۴) -1

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{|x|}{[x]} \text{Sgn}(x+1) = \frac{|-1|}{-1} \times \text{Sgn}(0^+) = -1 \times 1 = -1$$

پاسخ: گزینه «۴»

توضیح: مقدار $\text{Sgn}(x+1)$ وقتی $x \rightarrow (-1)^+$ برابر $\text{Sgn}(0^+)$ می‌شود که با توجه به تعریف تابع علامت می‌دانیم که به ازای $x > 0$ مقدار تابع برابر عدد ثابت ۱ می‌باشد.

قضیه فشار:

فرض کنیم سه تابع h, g, f روی یک فاصله باز (به جزء احتمالاً در نقطه a داخل فاصله) تعریف شده و در نامساوی $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ صدق کنند و $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ باشد آنگاه می‌توان نتیجه گرفت: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

مثال ۱۴: اگر $|f(x) + \sqrt{x}| < \frac{1}{x-1}$ آنگاه، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) 7 (۳) 0 (۴) -7

پاسخ: گزینه «۴»

$$|f(x) + \sqrt{x}| < \frac{1}{x-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) + \sqrt{x}| \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) + \sqrt{x}| \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\sqrt{x}$$

صورت‌های مبهم و رفع ابهام آنها

صورت‌های $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, \infty \times \infty, \infty^0, 0^0, \infty^{\infty}$ و 0^{∞} را صورت‌های مبهم می‌نامیم.

* تذکر ۲: حالت‌های 0^{∞} و ∞^{∞} و $\infty \times \infty$ مبهم نیستند: $0^{\infty} = 0, \infty^{\infty} = +\infty, +\infty \times +\infty = +\infty, (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$

صورت $\frac{0}{0}$ و استفاده از قاعده هوبیتال

در حالت‌های $\frac{0}{0}$ معمولاً از قاعده هوبیتال استفاده می‌شود. (البته معمولاً به غیر از توابع مثلثاتی که معمولاً از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم) بدین شکل

که اگر به حالت $\frac{0}{0}$ رسیدیم، مشتق صورت را گرفته و مشتق مخرج را نیز محاسبه نموده و سپس مجدداً حد را نوشته و اگر عامل مبهم‌کننده از بین

رفته بود حد را بدست می‌آوریم. در غیر اینصورت مجدداً این عمل را تکرار می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots$$

مثال ۱۵: حد عبارت $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\ln(2-x)}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{3}$ (۲) $-\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{2}{4}$ (۴) $\frac{5}{3}$

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2-x}} = \frac{2 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2-1}} = \frac{2 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{5}{3}$$

پاسخ: گزینه «۱» حالت $\frac{0}{0}$ است از روش HOPital استفاده می‌کنیم:

مثال ۱۶: مطلوبست محاسبه $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{27 - x^2}$

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{27 - x^2} \stackrel{HOP}{=} A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2x}}}{-2x} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{4}}}{-4} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{-4} = \frac{\frac{1}{2}}{-4} = -\frac{1}{8}$$

پاسخ: $-\frac{1}{8}$

مثال ۱۷: مطلوبست محاسبه: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^2 + 3x - 4}{x^2 - 3x + 2}$

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^2 + 3x - 4}{x^2 - 3x + 2} \stackrel{HOP}{=} A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 4x + 3}{2x - 3} \stackrel{HoP}{=} \frac{4 - 4 + 3}{2 - 3} = \frac{3}{-1} = -3$$

پاسخ: -3

در این مثال در هر دو حالت به $\frac{0}{0}$ برخورد کردیم پس دوباره از هوبیتال استفاده نمودیم.

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x^2 - 12x + 6}{6x} = \frac{6}{6} = 1$$

صورت $\frac{\infty}{\infty}$

برای بررسی این حالت ابتدا ذکر نکات زیر ضروری به نظر می‌رسد:

نکته ۱: اگر $a_0 \neq 0$ باشد آنگاه خواهیم داشت: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$

به عبارت دیگر وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ حد یک چند جمله‌ای برابر (هم ارز) با حد جمله با بزرگترین درجه است.

نکته ۲: اگر صورت و مخرج یک کسر چند جمله‌ای باشد خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n}{bx^m} = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } n > m \text{ یا } -\infty \\ \frac{a}{b} & \text{اگر } n = m \\ 0 & \text{اگر } n < m \end{cases}$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

۱) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$

۲) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^m - x^{m-1} - 1}{2x^{m+1} + x^m + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^m}{2x^{m+1}} = 0$

۳) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x^2 + x - 1}{-x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^0) = -\infty$

نکته ۹: در بعضی مواقع در حالت‌های $\frac{\infty}{\infty}$ ما قادر به تشخیص اینکه درجه صورت و یا مخرج بزرگتر است نیستیم، در این حالتها نیز می‌توانیم از قانون هوییتال استفاده کنیم.
به مثالهای زیر توجه کنید:

۱) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ۲) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$

نکته ۱۰: با توجه به مثال فوق می‌توان نتیجه گرفت رشد e^x نسبت به x^n سریعتر است و بالعکس رشد $\ln x$ نسبت به $\sqrt[n]{x}$ کمتر است به نکات زیر توجه کنید:

۱) اگر $a > 1$ آنگاه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ ۲) اگر $a > 1$ آنگاه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

۳) اگر $0 < a < 1$ آنگاه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ ۴) اگر $0 < a < 1$ آنگاه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

۵) اگر $0 < a < 1$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$ ۶) اگر $a > 1$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$

۷) اگر $0 < a < 1$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ ۸) اگر $a > 1$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$

مثال ۱۸: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$ کدام است؟
۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) 0 ۴) -1

پاسخ: گزینه «۳»
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{طبق خاصیت (۶)}} A = (-\infty)(+\infty) = (-\infty)$

نکته ۱۱: در حالتی که $x \rightarrow 0^+$ جمله با کوچکترین مرتبه حاکم است (البته زمانی که عدد ثابت در عبارت موجود نباشد) به مثالهای زیر توجه کنید:

۱) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$ ۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \sqrt{x} + x^2}{x^2 + 2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$

۳) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^t \cdot e^{\frac{1}{x}}, t = \frac{1}{x}, x \rightarrow 0^+ \Rightarrow t \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \cdot e^t = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{1} = +\infty$

مثال ۱۹: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2}}}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۲» همانطور که در بالا اشاره شد، در جملاتی که شامل عدد ثابت نیستند وقتی $x \rightarrow 0$ جمله از مرتبه کوچکتر حاکم است

لذا داریم: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x}{x}} = 1$

نکته ۱۲: (اگر n فرد باشد قدر مطلق لازم نیست).
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \cong \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{b}{an} \times \sqrt[n]{a} \right)$

به مثالهای زیر توجه کنید:

۱) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x - \left(2x + \frac{1}{4} \right) \right] = -\frac{1}{4}$

۲) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{16x^2 + 4x^2 - 25}}{\sqrt{x^2 + x^2 + 25}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|2x|}{x + \frac{1}{2}} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x} = -2 \end{cases}$

مثال ۲۰: حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۳) 1 ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴»
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2} - x \right) = x + \frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}$

مثال ۲۱: حاصل حد $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \gamma}}{x+1}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $-\sqrt{\Delta}$ ۳) صفر ۴) $\sqrt{\Delta}$

پاسخ: گزینه «۲»
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \gamma}}{x+1} \sim \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\Delta} |x|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{\Delta} x}{x+1} = -\sqrt{\Delta}$

نکته ۱۳: در بعضی از تستها از مجموعهای زیر استفاده می‌کنیم:

۱) $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$	۲) $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
۳) $1+2+\dots+(2n-1) = n^2$	۴) $1^2+2^2+\dots+n^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

مثال ۲۲: حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{2n^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۴»
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{4n^2} = \frac{1}{4}$

صورت $0 \times \infty$

برای رفع ابهام این حالت باید عامل بی‌نهایت یا صفر کننده را به مخرج آورده و سپس مسئله به فرم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل خواهد شد که با روشهای گفته شده قابل حل است، عبارات دیگر اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ بصورت مبهم $0 \times \infty$ خواهد

شد که برای رفع ابهام حد را بصورت $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ یا $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)}$ می‌نویسیم.

مثال ۲۳: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ کدام است؟

۱) e ۲) صفر ۳) ∞ ۴) حد ندارد

پاسخ: گزینه «۲»
 $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \times \infty \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\text{HOP}} A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$

مثال ۲۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \lfloor x \rfloor \cot x$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) صفر ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۲»
 $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \lfloor x \rfloor \cot x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[0^- \right] \cot x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) \cot x = 0 \times \infty$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\text{tg} x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{x} = -1$

مثال ۲۵: مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} x^r \left[\cosh \frac{a}{x} - 1 \right]$ کدام است؟

۱) $\frac{a}{2}$ ۲) $\frac{a^r}{2}$ ۳) 0 ۴) 1

☑ پاسخ: گزینه «۲» حالت $\infty \times \infty$ می باشد لذا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^r [\cosh \frac{a}{x} - 1] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh \frac{a}{x} - 1}{\frac{1}{x^r}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-\frac{a}{x}) \sinh \frac{a}{x}}{-\frac{r}{x^{r+1}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-\frac{a}{x})(\frac{a}{x})}{-\frac{r}{x^{r+1}}} = \frac{a^2}{r}$$

☞ مثال ۲۶: مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+a) - \ln x]$ کدام است؟

- (۱) a (۲) -1 (۳) $-a$ (۴) 1

☑ پاسخ: گزینه «۱»
 $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+a) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+a}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+a}{x} \right)^x$

$$= \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x} \right)^x \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x}} = e^a \Rightarrow A = \ln e^a = a$$

صورت $\infty - \infty$

اگر $x \rightarrow a$ چنانچه دو عبارت به صورت کسر باشند، مخرج مشترک گرفته و حاصل را ساده کرده و معمولاً عبارات ساده شده به ازای $x = a$ به شکل $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل خواهد شد و اگر دو عبارت یا یکی از آنها اصم باشد، از روش هم ارزی که گفته شد استفاده خواهیم کرد و یا با ضرب عبارت در مزدوج خودش عامل مبهم کننده حذف می شود.

☞ مثال ۲۷: اگر $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0$ باشد آنگاه $2a + 2b$ برابر است با:

- (۱) -1 (۲) -2 (۳) 4 (۴) -5

☑ پاسخ: گزینه «۲»
 $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x - ax - b \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - b \right) - (a+1)x \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow 2a + 2b = 2(-1) + 2\left(\frac{1}{2}\right) = -2$$

☞ مثال ۲۸: حاصل $A = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^2-8} \right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) 4 (۴) -5

☑ پاسخ: گزینه «۲»
 $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 2x + 4) - 12}{x^2 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{0}{0} \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x^2 + 2x + 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

☞ مثال ۲۹: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -1 (۴) 1

☑ پاسخ: گزینه «۲»
 $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) - x}{x(e^x - 1)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2e^0 + 0} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$

☞ مثال ۳۰: حاصل حد تابع $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ وقتی که $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) صفر (۳) $+\infty$ (۴) -1

☑ پاسخ: گزینه «۲»
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \times \left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$

صورت های مبهم $\infty^0, 0^0$

برای حل مسائلی به شکل $C = \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ وقتی به حالت های 0^0 یا ∞^0 رسیدیم باید آنرا بصورت $L = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)$ مقدار حد را به دست آوریم و با محاسبه $C = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)}$ بنویسیم.

☞ مثال ۳۱: مقدار $C = \lim_{x \rightarrow 0} x^x$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) $+\infty$ (۳) 1 (۴) حد موجود نیست.

☑ پاسخ: گزینه «۳»
 $C = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x} \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \Rightarrow C = e^0 = 1$

توضیح: حل این حد، مقدار L بعنوان مثال در قسمت رفع ابهام $\infty \times \infty$ آورده شده است.

☞ مثال ۳۲: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 1 (۳) e (۴) $+\infty$

☑ پاسخ: گزینه «۳»

$$C = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} = 0^0 \Rightarrow C = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} (\ln \sin x)} \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow C = e^1 = e$$

☞ مثال ۳۳: مقدار $C = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot gx)^{\sin x}$ کدام است؟

- (۱) ∞ (۲) 1 (۳) e^{-1} (۴) e^{-1}

☑ پاسخ: گزینه «۳»
 $C = \lim_{x \rightarrow 0} (\cot gx)^{\sin x} = (\infty)^0 \Rightarrow C = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln \cot gx} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cot gx}{\frac{1}{\sin x}}}$

برای محاسبه حد اخیر از قاعده هوییتال استفاده می کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 + \cot^2 x)}{\cot gx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x) \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right)}{\cos x \cot gx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow C = e^0 = 1$$

محاسبه حدهایی بصورت $\lim_{x \rightarrow a} U^V = C$ (U و V توابعی بر حسب x هستند)

توجه شود که حالت های زیر هیچکدام از صورت های ابهام 0^0 و ∞^0 نمی باشد.

(۱) اگر $\lim_{x \rightarrow a} U = A$; $\lim_{x \rightarrow a} V = B$ باشد آنگاه: $C = A^B$

(۲) اگر $\lim_{x \rightarrow a} U = A \neq 1$; $\lim_{x \rightarrow a} V = \pm \infty$ در این صورت مسئله مستقیم حل می شود

(۳) اگر $\lim_{x \rightarrow a} U = 1$; $\lim_{x \rightarrow a} V = \infty$ آنگاه $C = e^{\lim_{x \rightarrow a} (U-1)V}$

مثال ۱:
 $C = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{1+x} \Rightarrow \begin{cases} A = \lim_{x \rightarrow 0} U = 2 \\ B = \lim_{x \rightarrow 0} V = 1 \end{cases} \Rightarrow C = A^B = 2^1 = 2$

مثال ۲:

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2} \Rightarrow \begin{cases} A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2} \\ B = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty \end{cases} \Rightarrow C = \left(\frac{1}{2} \right)^\infty = 0$$

مثال ۳:

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x \Rightarrow \begin{cases} A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \\ B = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \end{cases} \Rightarrow C = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} - 1 \right) x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x+1}} = e^{-2}$$

مثال ۴:

$$C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \end{cases} \Rightarrow C = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

مثال ۵:

$$C = \lim_{x \rightarrow 0^+} [1+x]^{\frac{1}{x}} = [1^+]^{+\infty} = 1^{+\infty} = 1$$

مثال ۶:

$$C = \lim_{x \rightarrow 0^-} [1+x]^{\frac{1}{x}} = [1^-]^{+\infty} = 0^{+\infty} = 0$$

تذکره ۳: در دو مثال اخیر چون ۱ و صفر مطلق است پس حاصل همان اعداد ۱ و ۰ خواهد شد.

مثال ۳۴: مقدار $C = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{5}{2 + \sqrt{9+x}} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$ کدام است؟

- (۱) e^{-20}
- (۲) ۰
- (۳) ۱
- (۴) $e^{-\frac{1}{20}}$

پاسخ: گزینه «۴» حالت $(1^+)^{\infty}$ می‌باشد. داریم:

$$C = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{5}{2 + \sqrt{9+x}} - 1 \right) \frac{1}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 - \sqrt{9+x}}{2 + \sqrt{9+x}} \right) \frac{1}{\sin x}}, L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - \sqrt{9+x}}{\sin x (2 + \sqrt{9+x})}$$

$$\xrightarrow{HOP} L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{9+x}}}{\cos x (2 + \sqrt{9+x})} = \frac{-\frac{1}{2 \times 2}}{1 \times 5} = -\frac{1}{20} \Rightarrow C = e^{-\frac{1}{20}}$$

مثال ۳۵: مقدار $C = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos mx)^{\frac{n}{x}}$ کدام است؟

- (۱) e^{mn}
- (۲) e^n
- (۳) $e^{-m \frac{n}{2}}$
- (۴) $e^{m \frac{n}{2}}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$C = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (\cos mx - 1) \frac{n}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-m^2 x^2}{2} \right) \left(\frac{n}{x} \right)} = e^{-\frac{m^2 n}{2}}$$

نکته ۱۴: دو حد زیر در تستها زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرند:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$$

مثال ۳۶: حاصل $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^5}}{\sqrt[n]{6n+3}}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۰
- (۳) $+\infty$
- (۴) $\frac{1}{6}$

$$\begin{cases} A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^5} \Rightarrow A = 1 \\ B = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \times 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow C = \frac{A}{B} = \frac{1}{1}$$

پاسخ: گزینه «۱»

دو تابع هم ارز

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در نقطه $x = a$ هم ارز گوییم اگر رابطه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ برقرار باشد.

مثال ۳۷: a و n را طوری پیدا کنید تا دو تابع ax^n و $\sqrt{1+x} - \sqrt{x}$ زمانی که $x \rightarrow +\infty$ هم ارز هم باشند. پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}{ax^n} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{ax^n (\sqrt{1+x} + \sqrt{x})} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n) (\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n \left[\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right) \right] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} ax^{n+\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \begin{cases} na = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ n + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1+x} - \sqrt{x} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

حد توابع مثلثاتی و استفاده از هم‌ارزی در محاسبه حدود

در توابع مثلثاتی عموماً وقتی $x \rightarrow 0$ از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم. برای این منظور با بسط‌های مکلاورن توابع معروف آشنا می‌شویم:

- ۱) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots (x \in \mathbb{R})$
- ۲) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots (-\infty < x < \infty)$
- ۳) $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots (|x| < \frac{\pi}{2})$
- ۴) $\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots (-1 \leq x \leq 1)$
- ۵) $\operatorname{ArcSin} x = x + \frac{x^3}{2 \times 2} + \frac{3x^5}{2 \times 4 \times 5} + \frac{1 \times 3 \times 5 x^7}{2 \times 4 \times 6 \times 7} + \dots (-1 \leq x \leq 1)$
- ۶) $\operatorname{Ln}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots (-1 < x \leq 1)$
- ۷) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots (x \in \mathbb{R})$
- ۸) $(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots (-1 < x < 1)$
- ۹) $\sin hx = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots (x \in \mathbb{R})$
- ۱۰) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots (x \in \mathbb{R})$
- ۱۱) $\sinh^{-1} x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \frac{x^5}{5} - \dots (|x| < 1)$
- ۱۲) $\operatorname{tgh}^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots (|x| < 1)$

نکته ۱۵: در استفاده از هم‌ارزیهای فوق با توجه به نیاز مسئله می‌توان جمله اول یا دو جمله اول یا سه جمله اول را به عنوان هم‌ارز تابع اصلی در نظر گرفت نیاز مسئله با تذکر زیر توضیح داده می‌شود:

تذکره ۴: هر گاه بلافاصله بعد از استفاده از هم‌ارزی جمع جبری برابر صفر شود و یا وقتی به جای عبارتی هم‌ارز آن را قرار دادیم و کل جملات که به جای عبارت هم‌ارز قرار داده‌ایم حذف شد، آنگاه استفاده از آن هم‌ارزی صحیح نمی‌باشد و باید از جمله‌های دیگر بسط استفاده کنیم.

مثال ۳۸: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{1}{120}$
- (۳) $\frac{1}{6}$
- (۴) حد موجود نیست.

پاسخ: گزینه «۲» توجه شود که اگر در این مثال به جای $\sin x$ جمله اول بسط x را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{1}{6x^2} = \infty$$

با توجه به اینکه عبارت x که به جای $\sin x$ قرار داده‌ایم حذف می‌شود، لذا استفاده از هم‌ارزی صحیح نیست. اگر از جمله‌های اول و دوم استفاده

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{0}{0}$$

کنیم، داریم:

مانند حالت قبل چون هر دو جمله بسط حذف می شود لذا استفاده از هم‌ارزی صحیح نیست. با قرار دادن جمله‌های اول تا سوم بسط داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^5}{120}}{x^5} = \frac{1}{120}$$

توجه شود که در این حالت جمله $\frac{x^5}{120}$ حذف نشد. لذا استفاده از هم‌ارزی صحیح می‌باشد.

نکته ۱۶: وقتی از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم باید هم‌ارز تمام جملات را قرار دهیم، مثلاً اگر در مسأله‌ی عبارتهای \cos و \sin داریم وقتی به جای \sin هم‌ارز آن را قرار می‌دهیم، باید به جای \cos نیز هم‌ارز آن را قرار دهیم و همچنین ذکر این نکته لازم است که تمام جملات باید تا صفرهای هم‌مرتبیه نوشته شوند.

مثال ۳۹: مقدار $A = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \cot gx)$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) -۱
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» روش اول (غیر صحیح)

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$$

توجه شود که در قسمت (۱) استفاده از هم‌ارزی $\sin x \sim x$ صحیح نیست زیرا وقتی از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم باید هم‌ارز تمام جمله‌ها را قرار

دهیم یعنی در این مثال به جای $\cos x$ جمله اول بسط یعنی ۱ را قرار دهیم که با این وضعیت به حالت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \times 1}{x^2}$ خواهیم رسید که جمع

جبری (در صورت کسر) صفر است، نکته جالب این که ممکن است در بعضی موارد مانند همین تست با استفاده از هم‌ارزی (غلط) نیز جواب صحیح بدست می‌آید!

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} \xrightarrow{\text{از جمله‌های اول و دوم استفاده می‌کنیم}} A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - x(1 - \frac{x^2}{2})}{x(x - \frac{x^3}{6})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2}}{x^2 - \frac{x^4}{6}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{x^2(1 - \frac{x^2}{6})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{3}}{1 - \frac{x^2}{6}} = 0$$

اما مثال زیر می‌تواند نتایج جبران‌ناپذیر دقت نکردن به نکته فوق را روشن سازد!

مثال ۴۰: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \cot g^2 x)$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۰
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۳»

روش غیر صحیح:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 - \cos^2 x)}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = 1$$

توجه شود که در قسمت (۱) وقتی به جای $\sin x$ ، x را قرار می‌دهیم باید به جای $\cos x$ (هم‌مرتبیه جمله اول) یعنی عدد ۱ را قرار دهیم که جمع جبری صفر می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x \cos x)(\sin x + x \cos x)}{x^2 \sin^2 x}$$

روش صحیح:

$$\sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x \cos x)(x + x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \frac{x^3}{6} - x(1 - \frac{x^2}{2})](2x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6})(2x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{3}x^3)(2x)}{x^4} = \frac{2}{3}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \cot g^2 x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\text{tg}^2 x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}^2 x - x^2}{x^2 \text{tg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\text{tg} x - x)(\text{tg} x + x)}{x^2 \text{tg}^2 x} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3/3) \times 2x}{x^2 \times x^2} = \frac{2}{3}$$

توضیح: توجه شود که در قسمت (۲) ما در پرانتز دوم صورت و همچنین در مخرج از جمله‌های اول استفاده کردیم اما در مورد پرانتز اول صورت چون به محض استفاده از جمله‌های اول به مشکل (جمع جبری برابر صفر) برخورد می‌کنیم جمله‌های دوم بسط را وارد کردیم. توجه شود در عبارات کسری باید در صورت به اندازه درجه مخرج جملات را وارد کنیم، چون مخرج کسر فوق x^3 است لذا در صورت کسر با ضرب x های پرانتزهای اول و دوم ملاحظه می‌گردد که جمله x^4 نیز در صورت کسر پدید می‌آید.

مثال ۴۱: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{\cot gx}{x})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{\cot gx}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \text{tg} x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg} x - x}{x^2 \text{tg} x} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} - x}{x^2(x + \frac{x^3}{3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{x^2(1 + \frac{x^2}{3})} = \frac{1}{3}$$

مثال ۴۲: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x \sin x}$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) ∞
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x \sin x} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 - x + \frac{x^3}{6}}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\frac{1}{2} + \frac{x}{6})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{2} + \frac{x}{6}) = \frac{1}{2}$$

پاسخ: گزینه «۳»

تمرین: مثال فوق را با استفاده از قاعده هوییتال حل کرده و جوابها را مقایسه کنید.

توضیح: توجه شود که در بعضی تست‌ها استفاده از قاعده هوییتال راحت‌تر از حل به روش هم‌ارزی می‌باشد و در بعضی از تست‌ها مانند مثال زیر استفاده از قاعده هوییتال خیلی جالب نیست!

مثال ۴۳: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg} x^2 - \ln(1+x^2) - \frac{x^4}{2}}{x^6}$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» مخرج کسر x^6 است لذا در صورت کسر باید $\ln(1+x^2)$ و $\text{tg} x^2$ را تا جمله‌های شامل x^6 بسط دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg} x^2 - \ln(1+x^2) - \frac{x^4}{2}}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \frac{x^6}{3} - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^6} = 0$$

توضیح: در توابعی به صورت فوق چون مقدار بسط را تا جمله‌ای با درجه مخرج بسط داده‌ایم، لذا حتی با وجود اینکه بعد از استفاده از هم‌ارزی جمع جبری صفر شد، لذا حاصل حد همان صفر در نظر گرفته می‌شود. ملاحظه می‌گردد که محاسبه حد فوق حتی با استفاده از هوییتال کار سختی است (باور نمی‌کنید، امتحان کنید!) به هر حال نصیحت برادرانه این که در استفاده از بسط‌ها اگر شک دارید چند تا جمله اضافه‌تر هم وارد کرده بعد محاسبه کنید، تا خیالتان راحت باشد!

معمولاً در استفاده از هم‌ارزیه‌ها از جمله اول و یا دو جمله اول بسط‌های فوق استفاده می‌شود در این قسمت با توجه به در نظر گرفتن جمله اول یا دو جمله اول هم‌ارزیهایی آورده می‌شود که به خاطر سپردن آنها در حل تست‌ها کمک زیادی می‌کند:

$\sin x \sim \text{tg} x \sim \text{Arc} \text{tg} x \sim \text{Arc} \sin x \sim x$		
$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!}$	$\text{tg} x \sim x + \frac{x^3}{3}$	$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$
$\ln(1+x) \sim x$	$e^x - 1 \sim x$	$\sqrt[3]{1+u} - 1 = \frac{u}{3}$ ($u \rightarrow 0$)

تذکره ۵: در بسطهای مکلورن توابع فوق توجه داریم که کمان توابع مثلثاتی به سمت صفر میل می‌کند، برای مثال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin(x - \frac{\pi}{4}) \sim \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x - \frac{\pi}{4})$$

مثال ۴۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{\sin(x^2 + x - 2)}{\tan(x^2 + 5x + 6)}$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{5}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x^2 + x - 2)}{\tan(x^2 + 5x + 6)} = \frac{\sin(0)}{\tan(0)} = \frac{0}{0}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} \xrightarrow{\text{Hop}} A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 1}{2x + 5} = \frac{2(-2) + 1}{2(-2) + 5} = \frac{-3}{1} = -3$$

توضیح: در مورد هم‌ارزیهای استفاده شده:

$$\begin{cases} u = x^2 + x - 2 \xrightarrow{x \rightarrow -2} u \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \sin u \sim u & (\text{در مورد صورت کسر}) \\ u = x^2 + 5x + 6 \xrightarrow{x \rightarrow -2} u \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \tan u \sim u & (\text{در مورد مخرج کسر}) \end{cases}$$

تذکره ۶: اگر x به mx تبدیل شود، در تساویهای فوق به جای x در طرفین mx را قرار می‌دهیم، برای مثال برای $\cos x$ داریم:

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \cos mx \sim 1 - \frac{m^2 x^2}{2}$$

به مثالهای زیر توجه کنید:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{1 - \cos x} = \frac{\ln 1}{1 - \cos(0)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

(استفاده از هم‌ارزی)

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos(x - \frac{\pi}{4})}{\tan^2(x - \frac{\pi}{4})} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2}}{(x - \frac{\pi}{4})^2} = \frac{1}{2}$$

(استفاده از هم‌ارزی)

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(استفاده از هم‌ارزی)

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - 1 + \frac{9x^2}{2}}{x^2} = 4$$

(استفاده از هم‌ارزی)

$$5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{\cot^2 x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-(1 + \cot^2 x)}{-2(1 + \cot^2 x)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

(استفاده از قاعده هوییتال)

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} (\tan \frac{\pi}{2} x)(1 - x) = \infty \times 0 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\cot \frac{\pi}{2} x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\frac{1 - x}{2}} = 2$$

(استفاده از قاعده هوییتال)

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - 1 + \frac{m^2 x^2}{2}}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{m^2 x^2}{2} + \frac{m^2 x^2}{2} - 1 + \frac{m^2 x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^2}{x^2} = m^2$$

(استفاده از هم‌ارزی)

$$A) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan^2 x \cdot \tan(\frac{\pi}{4} - x) = \infty \times 0 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - x)}{\cot^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - 2x)}{\tan(\frac{\pi}{4} - 2x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4} - 2x}{\frac{\pi}{4} - 2x} = 1$$

(استفاده از هم‌ارزی)

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{(\text{ArcCos} x)^2} = \frac{0}{0}, \text{ArcCos} x = \alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = x \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\alpha^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 = 1$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cot x)}{\cot x} \sim \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{\cot x} = 1$$

(استفاده از هم‌ارزی)

$$\text{مثال ۴۵: حاصل } A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - \tan x}{\sin^2 x} \text{ برابر است با:}$$

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) -۶

پاسخ: گزینه «۳» به حالت $\frac{0}{0}$ برخورد می‌کنیم لذا داریم:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 9x^2 - 2x - \frac{1}{3}x^2 - x - \frac{1}{3}x^2}{x^2} \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^2}{x^2} = +6$$

روش اول (هم‌ارزی):

$$\text{روش دوم: } \alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$$

$$3x - 2x - x = 0 \Rightarrow \tan 3x + \tan(-2x) + \tan(-x) = \tan 3x \cdot \tan(-2x) \cdot \tan(-x) \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x)(-2x)(-x)}{x^2} = +6$$

$$\text{مثال ۴۶: حاصل } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{\sin^2 x \cdot \sec x} \left[\frac{1}{x} \right] \text{ کدام است؟}$$

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) ∞

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{\sin^2 x \cdot \sec x} \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos x}} \times \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \left[\frac{1}{x} \right]$$

پاسخ: گزینه «۱»

می‌دانیم وقتی داخل جزء صحیح به سمت بی‌نهایت میل کند می‌توانیم علامت جزء صحیح را برداریم (هم‌ارز داخل جزء صحیح قرار دهیم).

در این تست وقتی $x \rightarrow 0$ آنگاه $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ در نتیجه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \right] \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \times \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin x}{x}\right) \times \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} = 1 \times 1 = 1$$

$$\text{مثال ۴۷: حاصل } A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\text{Arcsin} x)}{\sin^2 x} \text{ برابر است با:}$$

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۱

$$A = \frac{1 - \cos(\text{Arcsin}(0))}{\sin^2(0)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} \text{Arcsin} x \sim x \\ \sin^2 x \sim x^2 \end{array} \right. \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\text{مثال ۴۸: حاصل } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1}}{\sin \pi x} \text{ برابر است با:}$$

- (۱) وجود ندارد (۲) صفر (۳) $\frac{1}{\pi}$ (۴) ∞

پاسخ: گزینه «۲» به حالت $\frac{0}{0}$ برخورد می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} x-1=t \\ x \rightarrow 1, t \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^r \sin \frac{1}{t}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{- \sin \pi t} t \sin \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} t \sin \frac{1}{t} = -\frac{1}{\pi} \times 0 \times (-1) = 0$$



توجه: هم‌ارزیهای زیر وقتی $u \rightarrow 0$ برقرار است:

$$\sqrt[n]{1+u} \sim 1 + \frac{u}{n} \quad \text{و} \quad 1 - \cos^m u \sim \frac{m u^2}{2}$$

مثال ۴۹: اگر $a(x)$ بی‌نهایت کوچک باشد، هم‌ارز عبارت $[1+a(x)]^n - 1$ کدام است؟

- (۱) $a(x)$ (۲) $\frac{a(x)}{n}$ (۳) $na(x) - 1$ (۴) $na(x)$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به نکته فوق وقتی $u \rightarrow 0$ آنگاه $(1+u)^n \sim 1 + \frac{1}{n} \times n \times u$ می‌توان چنین نوشت: $(1+u)^n \sim 1 + n \times u$ در

این تست گفته شده که $a(x)$ بی‌نهایت کوچک می‌باشد ($a(x) \rightarrow 0$) لذا داریم: $[1+a(x)]^n \sim 1 + na(x) \rightarrow [1+a(x)]^n - 1 \sim na(x)$

نکته ۱۷: (رشد توابع) وقتی $x \rightarrow +\infty$ توابع به ترتیب زیر رشد می‌کنند.

مثال ۵۰: مقدار حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$ کدام است؟

- (۱) e (۲) 0 (۳) -1 (۴) 1

پاسخ: گزینه «۴»
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} \xrightarrow{\text{رشد}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^x}{x} = \frac{x}{x} = 1$

مثال ۵۱: حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)e^{\sin 2x}}$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) ∞ (۳) 1 (۴) حد وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۴»
 حد وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)e^{\sin 2x}} \xrightarrow{\text{رشد}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x e^{\sin 2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\sin 2x}} = \frac{1}{e^{\sin \infty}} = 0$

توضیح: (توجه کنید که $\sin 2x$ تابعی کراندار است و بنابراین رشد کمتری نسبت به $2x$ دارد.)

مثال ۵۲: حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^{2x} + 3^{2x} + 4^{2x+1}}$ کدام است؟

- (۱) 9 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 2

پاسخ: گزینه «۱»
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^{2x} + 3^{2x} + 4^{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^{2x} + 9^x + 4^{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{9^x} = 9$

تذکر ۷: در مقایسه عبارات نامایی باید اختلاف توانها عددی ثابت باشد، تا بتوان عبارت بزرگتر را مشخص نمود.

مثال ۵۳: حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$ وقتی n برابر است با:

- (۱) 5 (۲) 9 (۳) 3 (۴) 13

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته ۱۷ داریم:
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = 3$

مثال ۵۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 1 (۳) 0 (۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۴» طبق نکته ۱۷ (رشد توابع)

مثال ۵۵: اگر $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2+x) - x^{2n} \sin x}{1+x^{2n}}$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ کدام است؟

- (۱) ∞ (۲) $\log 2$ (۳) $-\sin 1$ (۴) $-\infty$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا $f(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & x > 1 \\ \frac{\log 2 - \sin 1}{2} & x = 1 \\ \log(2+x) & x < 1 \end{cases}$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-\sin x) = -\sin 1$

مثال ۵۶: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \tan x)x}$ کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 0 (۳) ± 2 (۴) $-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \tan x)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times x^2}{(1-x)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{1-x} \right) = 0$$

پاسخ: گزینه «۲» به حالت $\frac{0}{0}$ برخورد می‌کنیم:

مثال ۵۷: حد تابع $y = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sin \frac{x}{6}}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) -1 (۳) $+1$ (۴) هیچکدام

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{x}{6}) - (1-\frac{x}{6})}{\frac{x}{6}} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = -1$$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به رابطه $\sqrt[3]{1+u} \approx 1 + \frac{u}{3}$ داریم:

پیوستگی تابع

تابع $f(x)$ را در نقطه $x = a$ پیوسته گوئیم اگر فقط اگر شرطهای زیر برقرار باشد:

۱- $f(x)$ در نقطه a تعریف شده باشد یعنی $f(a)$ موجود و عدد حقیقی باشد.

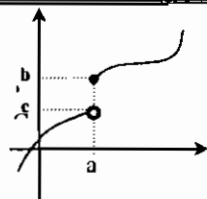
۲- تابع $f(x)$ در نقطه a حد داشته باشد و منتهی باشد. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

۳- حد تابع با مقدار تابع در نقطه a برابر باشد.

نتیجه: سه شرط فوق را می‌توان بصورت: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ بیان نمود.

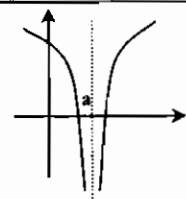
اگر تابع f در نقطه‌ای پیوسته نباشد در آن نقطه منفصل یا ناپیوسته است.

نکته ۱۸: از لحاظ نمودار تابع باید هیچگونه پرش، سوراخ و بریدگی نداشته باشد.



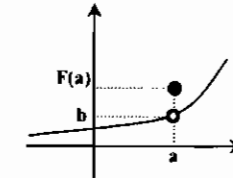
$$b = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq c = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

حد چپ و راست با هم برابر نیستند تابع حد ندارد و در نتیجه پیوستگی ندارد.

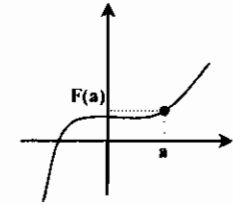


$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

مقدار $f(a)$ حقیقی نمی‌باشد تابع پیوسته نیست.



$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$
 $b \neq f(a)$
 حد چپ و راست با هم برابرند و تابع حد دارد، ولی پیوسته نیست



$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
 (تابع پیوسته است)

مثال ۵۸: پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.

تابع دارای انفصال است. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \neq f(0) = 0 \Rightarrow$

مثال ۵۹: a را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} \operatorname{tg} x & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته باشد.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\operatorname{tg} x) = 0 \Rightarrow f(0) = a \Rightarrow a = 0$

مثال ۶۰: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (x+2)[-x], & x < 2 \\ x+k, & x \geq 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته باشد آنگاه مقدار k کدام است؟

۱۰ (۱) ۱۰ (۲) ۶ (۳) -۸ (۴)

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2)[-x] = 4 \times [-2] = 4 \times -2 = -8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+k) = 2+k \end{cases} \Rightarrow 2+k = -8 \Rightarrow k = -10$$

مثال ۶۱: مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x) = \frac{x}{ax^2 + 3x + 1}$ همواره پیوسته باشد؟

پاسخ: برای اینکه تابع f همواره پیوسته باشد، لازم است مخرج کسر همواره مخالف صفر باشد یعنی مخرج کسر ریشه نداشته باشد، یعنی:

$$\Delta < 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4a < 0 \Rightarrow a > \frac{9}{4}$$

مثال ۶۲: مقدار $f(0)$ را طوری تعریف کنید که تابع $f(x) = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x^2}$ همواره پیوسته باشد.

پاسخ: برای پیوستگی تابع f در $x = 0$ لازم است.

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x^2} \stackrel{\text{همارزی}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \times \text{کراندار} = 0$$

مثال ۶۳: اگر g یک تابع پیوسته بر $[-1, 1]$ باشد، در مورد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 g(x)}{\sin x}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) موجود نیست. ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳»
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 g(x)}{\sin x} \stackrel{\text{همارزی}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x g(x) = 0 \times \text{کراندار} = 0$

تذکره: اگر تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه در این بازه کراندار است.

جهش انفصال تابع

فرض کنید حدود راست و چپ تابع $f(x)$ در نقطه a موجود و نابرابر باشند در این صورت مقدار عددی $J = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ را جهش انفصال تابع $f(x)$ در نقطه a می‌نامند.

مثال ۶۴: مقدار جهش تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) تابع جهش ندارد ۴) -۲

پاسخ: گزینه «۴»

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-x}{x} = \frac{0}{+0} = 0 & (\text{حد راست}) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x} = 2 & (\text{حد چپ}) \end{cases}$$

نکته ۱۹: توابع رادیکالی، معکوس‌های مثلثاتی، تابع $\ln x$ در کلیه نقاط دامنه خود پیوسته هستند. (به جزء احتمالاً در نقاط مرزی دامنه تابع)

مثال ۶۵: تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & |x| \leq 2 \\ \frac{1}{x-1}, & |x| > 2 \end{cases}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته فوق تابع در دامنه خود $[-2, 2]$ پیوسته می‌باشد اما در نقاط مرزی باید پیوستگی بررسی شود:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left(\frac{x}{x-1}\right) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \sqrt{4-x^2} = 0 \end{cases}$$

در نقطه $x = -2$ حدود چپ و راست با هم برابر نیستند بنابراین تابع در این نقطه پیوسته نیست.

نکته ۲۰: هرگاه توابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه x_0 پیوسته باشند، آنگاه توابع:

$$(g(x_0) \neq 0) \frac{f(x)}{g(x)}, f(x) \cdot g(x), f(x) \pm g(x), |g(x)|, |f(x)|, \sqrt[n]{g(x)}, \sqrt[n]{f(x)}$$

نیز در نقطه x_0 پیوسته هستند.

نکته ۲۱: اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای ناپیوسته باشند آنگاه توابع $f, g, \frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) در آن نقطه پیوسته باشند.

نکته ۲۲: اگر تابع f در x_0 پیوسته و تابع g در x_0 ناپیوسته باشد آنگاه توابع $(f \pm g)$ در x_0 قطعاً ناپیوسته هستند اما تابع $f \times g$ ممکن است در x_0 پیوسته باشد.

نکته ۲۳: اگر f در a و g در $f(a)$ پیوسته باشند آنگاه gof در a پیوسته است.

نکته ۲۴: اگر تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و اکیداً صعودی باشد آنگاه برد f برابر $[f(a), f(b)]$ خواهد بود و f^{-1} در بازه $[f(a), f(b)]$ پیوسته و اکیداً صعودی است.

نکته ۲۵: اگر تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و اکیداً نزولی باشد، آنگاه برد f برابر $[f(b), f(a)]$ خواهد بود و f^{-1} بر بازه $[f(b), f(a)]$ پیوسته و اکیداً نزولی است.

نکته ۲۶: توابع $e^{ax}, \cosh ax, \sinh ax, \cos ax, \sin ax$ در کلیه نقاط پیوسته هستند.

پیوستگی تابع در یک فاصله

۱) تابع f را بر روی فاصله باز (a, b) پیوسته گوئیم هرگاه در هر نقطه از این بازه تابع پیوسته باشد.

۲) اگر تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، علاوه بر پیوستگی در فاصله (a, b) باید در نقطه a پیوستگی از راست و در نقطه b پیوستگی از چپ داشته باشد.

نکته ۲۷: توابع کسری به ازای ریشه‌های مخرج و توابع رادیکالی با فرجه زوج به ازای ریشه‌هایی که زیر رادیکال منفی می‌شود (اگر جزء بازه باشد) دارای انفصال هستند.

مثال ۶۶: نقاط پیوستگی تابع $f(x) = \frac{2 - \sqrt{x-8}}{\sqrt{x+1}-1}$ چه نقاطی هستند؟

پاسخ: نقاط پیوستگی تابع، نقاط متعلق به مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8, x \neq 0\}$ می‌باشد.

تعریف ناپیوستگی رفع شدنی و رفع نشدنی

هر گاه حد چپ و راست تابع در نقطه‌ای متناهی و با هم برابر باشند اما مقدار تابع در آن نقطه برابر نباشند آنگاه می‌گوئیم تابع دارای ناپیوستگی رفع شدنی می‌باشد، اگر تابع در نقطه‌ای حد نداشته باشد، آنگاه تابع ناپیوستگی رفع نشدنی دارد.

مثال ۶۷: کدامیک از توابع زیر در نقطه $x_0 = 0$ دارای ناپیوستگی رفع شدنی می‌باشد؟

$$f(y) = \frac{|x|}{x} \quad (1) \quad f(y) = \frac{e^x - 1}{x} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x}{x^2} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۲»

۱) رفع نشدنی $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

۲) رفع شدنی $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

۳) رفع نشدنی $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

۴) رفع نشدنی $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

پیوستگی تابع $[x]$:

تابع $[x]$ در فاصله بین (a, b) به شرط $b - a < 1$ پیوسته خواهد بود و در فاصله $[a, b]$ پیوسته نخواهد بود. (ب و a اعدادی صحیح هستند)

مثال ۶۸: تابع $f(x) = [mx]$ در بازه (a, b) پیوسته می‌باشد. حد اکثر مقدار $b - a$ را بدست آورید. ($m > 0$)

پاسخ:
$$\begin{cases} mb - ma < 1 \\ \Rightarrow m(b - a) < 1 \Rightarrow b - a < \frac{1}{m} \end{cases}$$

مثال ۶۹: تابع $y = \frac{x}{[x]}$ در نقطه ای به طول $x = 2$:

۱) پیوستگی راست دارد. ۲) پیوستگی چپ دارد. ۳) پیوسته است. ۴) ناپیوسته است.

پاسخ: گزینه «۱» مقدار تابع با حد راست تابع برابر است. لذا تابع پیوستگی راست دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{[x]} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{[x]} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{و} \quad f(2) = 1$$

بدست آوردن نقاط انفصال توابعی به فرم $y = [f(x)]$:

در اینگونه توابع باید طول نقاطی را که به ازای آنها عبارت داخل براکت (همان $f(x)$) عدد صحیح می‌شود را بدست آورد که معمولاً تابع در این نقاط ناپیوسته است.

مثال ۷۰: تابع f با ضابطه $f(x) = (x-1)[x]$ بر بازه $[-2, 0]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

- ۱) ۳ (۱) ۲) ۲ (۲) ۳) ۱ (۳) ۴) هیچ (۴)

پاسخ: گزینه «۳»

۱) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0$ ۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$ ۳) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1, f(2) = 2$

ملاحظه می‌شود که تابع در $x = 2$ ناپیوستگی دارد.

مثال ۷۱: تابع $y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil$ در نقاطی به طولهای $x = 2k + 1$ که در آن $k \in \mathbb{N}$ چه وضعی دارد؟

- ۱) پیوسته است (۱) معین و ناپیوسته است (۲) فقط پیوستگی چپ دارد (۳) فقط پیوستگی چپ دارد (۴) فقط پیوستگی راست دارد

پاسخ: گزینه «۱» در نقاطی به طول $x = 2k + 1$ داخل براکتها عددی غیر صحیح می‌شود لذا تابع در این نقاط پیوسته است.

نکته ۲۸: در توابعی به فرم $y = [ax + b]$ اگر $a > 0$ آنگاه تابع در نقاطی که عبارت داخل براکت عدد صحیح گردد فقط پیوستگی راست دارد و اگر $a < 0$ آنگاه تابع در نقاطی که داخل براکت عدد صحیح گردد فقط پیوستگی چپ دارد.

مثال ۷۲: تابع $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ بر بازه $[2, 10]$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

- ۱) ۳ (۱) ۲) ۴ (۲) ۳) ۵ (۳) ۴) ۸ (۴)

پاسخ: گزینه «۲» چون $\frac{1}{2} > 0$ لذا تابع در نقاط ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۱۰ که به ازای آنها $\frac{x}{2}$ عددی صحیح می‌شود فقط پیوستگی راست

دارد (تابع ناپیوسته می‌باشد) اما چون در نقطه $x = 2$ که نقطه ابتدایی بازه می‌باشد، تابع پیوستگی راست دارد. طبق مطالب گفته شده فوق، این نقطه جزء نقاط پیوستگی محسوب می‌شود.

تذکره ۹: در توابعی که بصورت مجموع یا تفاضل یا حاصلضرب باشند باید پس از بدست آوردن نقاط انفصال هر کدام از توابع، مجموع نقاط انفصال دو تابع به عنوان نقاط انفصال کل تابع در نظر بگیریم اما در بعضی موارد (که معمولاً بصورت تفاضل و یا حاصلضرب دو تابع ناپیوسته می‌باشند) باید احتیاط کنیم چون ممکن است نقاطی در این حالت جزء نقاط پیوستگی محسوب گردند.

مثال ۷۳: تابع $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil$ در بازه $(-4, 4)$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

- ۱) ۲ (۱) ۲) ۳ (۲) ۳) ۴ (۳) ۴) ۶ (۴)

پاسخ: گزینه «۳» تابع $y_1 = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ در نقاط $-2, 0, 2$ ناپیوسته و تابع $y_2 = \left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil$ در نقاط $-3, 0, 3$ ناپیوسته است، اما در نقطه

$x = 2$ تابع $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil$ پیوسته می‌باشد لذا مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع $\{-3, -2, 0, 2, 3\}$ می‌باشد.

مثال ۷۴: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{گنگ } x \\ 2x & \text{گویا } x \end{cases}$ در کدام نقطه پیوسته است؟

- ۱) ۲ و ۰ (۱) ۲) ۱ (۲) ۳) ۳ (۳) ۴) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه «۱» توابعی به صورت $f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{گنگ } x \\ g(x) & \text{گویا } x \end{cases}$ به ازای ریشه‌های معادله $h(x) = g(x)$ پیوسته می‌باشند:

$$x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

قضیه بولتزانو (مقدار میانی)

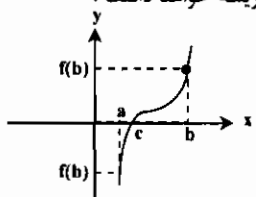
هر گاه تابع f در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a) \cdot f(b) < 0$ باشد، آنگاه تابع f در این فاصله حد اقل یک ریشه خواهد داشت.

قضیه بولتزانو را می‌توان اینطور تعبیر کرد که وقتی یکی از مقادیر $f(a)$

یا $f(b)$ منفی و دیگری مثبت باشد، آنگاه نمودار f حداقل یکبار

محور x ها را قطع خواهد کرد، یعنی یک نقطه مانند c بین a و b وجود

دارد بطوریکه $f(c) = 0$ می‌باشد.



مثال ۷۵: معادله $x \cdot 2^x = 1$ در بازه $|\frac{1}{4}, 1|$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ریشه ندارد (۲) حداقل یک ریشه دارد (۳) حداقل دو ریشه دارد (۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به قضیه مقدار میانی داریم:

$$f(x) = x \cdot 2^x - 1 \Rightarrow \begin{cases} f(\frac{1}{4}) = -2/81 \Rightarrow f(\frac{1}{4})f(1) < 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

مثال ۷۶: تابع $y = x - \cos x$ در کدام بازه ریشه دارد؟

- (۱) $[0, \frac{\pi}{6}]$ (۲) $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ (۳) $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ (۴) $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}]$

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(0) = -1, f(\frac{\pi}{6}) \approx -0.2 < 0, f(\frac{\pi}{4}) \approx 0.08 > 0 \Rightarrow x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow f(x) = 0$$

مثال ۷۷: به ازای چه مقادیری از m یکی از ریشه‌های معادله $f(x) = x^2 - (m+1)x + (2m-2) = 0$ بین دو عدد ۱ و -۱ قرار دارد؟

پاسخ:

$$\begin{cases} f(1) = m - 2 \\ f(-1) = 2m - 1 \end{cases} \Rightarrow (m-2)(2m-1) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < m < 2$$

مجانبات توابع و انواع آن

تعریف شاخه بی نهایت منحنی:

گوئیم منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ دارای شاخه بی نهایت است. هرگاه نقطه یا نقاطی روی منحنی باشد که حد اقل یکی از مختص‌های آن طول یا عرض یا هر دو قسمت به سمت بی نهایت میل کند.

تعریف خط مجانب:

هرگاه منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ دارای شاخه بی نهایت باشد. خط D را مجانب آن شاخه گوئیم. در صورتی که وقتی نقطه متغیر M روی آن شاخه بی نهایت دور شود فاصله آن از خط D به سمت صفر میل کند. $(MH \rightarrow 0)$

انواع مجانب: یک تابع می‌تواند دارای سه مجانب قائم، افقی و مایل باشد:

مجانبات قائم:

هرگاه وقتی $x \rightarrow a$ آنگاه $\lim f(x) \rightarrow \infty$ شود آنگاه گوئیم خط $x = a$ مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ است.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \Leftrightarrow x = a$ مجانب قائم تابع است

مجانبات افقی: هرگاه مقدار $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$ برابر عددی مانند b شود آنگاه گوئیم مجانب افقی تابع $f(x)$ خط $y = b$ می‌باشد.

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = b \Leftrightarrow y = b$ مجانب قائم تابع است

نکته ۲۹: تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (تابع هموگرافیک) دارای مجانب قائم و افقی است. (با شرط $c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

مجانبات قائم است $\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{ax+b}{cx+d} = \infty \Rightarrow x = -\frac{d}{c}$ مجانبات افقی $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \Rightarrow y = \frac{a}{c}$

مثال ۷۸: مقادیر a, b, c در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+6}$ کدام است؟ خطوط $x = 2$ و $y = 3$ مجانب‌های آن بوده و از نقطه $P(1, 2)$ می‌گذرند.

- (۱) $a = -9, b = 18, c = -2$ (۲) $a = -3, b = 9, c = -6$ (۳) $a = 18, b = -9, c = 2$ (۴) $a = 9, b = -18, c = 6$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases} cx + 6 = 0 \xrightarrow{x=2} 2c + 6 = 0 \Rightarrow c = -3 \\ y = 3 \xrightarrow{\text{مجانبات افقی}} y = \frac{a}{c} \Rightarrow 3 = \frac{a}{-3} \Rightarrow a = 2x - 2 = -9 \\ P(1, 2) \in f \Rightarrow 2 = \frac{-9(1) + b}{-2(1) + 6} \Rightarrow b = 18 \end{cases}$$

مثال ۷۹: معادله مجانب تابع $f(x) = \operatorname{tg} x$ را بدست آورید؟

پاسخ:

$y = f(x) = \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} \Rightarrow \operatorname{Cos} x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (معادله مجانب قائم)

مثال ۸۰: خط $x = 1$ مجانب قائم نمودار $y = \frac{(m+1)x-2}{x+m-2}$ بوده، معادله مجانب افقی آن به چه صورت است؟

- (۱) $y = 2$ (۲) $y = 4$ (۳) $y = 2$ (۴) $y = 1$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases} x + m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - m \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow 2 - m = 1 \Rightarrow m = 2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(m+1)x-2}{x+m-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-2}{x-1} = 2 \end{cases}$$

تذکره ۱۰: برای بدست آوردن مجانب قائم در توابع کسری کافیست طول نقاطی را که مخرج به ازای آنها صفر می‌شود را بدست آوریم، البته در مواردی که ریشه مشترک بین صورت و مخرج وجود داشته باشد باید حد تابع محاسبه گردد و اگر حد پس از رفع ابهام برابر ∞ شد، آنگاه مقدار به دست آمده مجانب قائم تابع می‌باشد و اگر برابر ∞ نشد، تابع به ازای آن مقدار مجانب قائم ندارد.

مثال ۸۱: مجانبهای قائم و افقی توابع زیر را بدست آورید.

۱) $y = \frac{x^2}{e^x} \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow \infty \Rightarrow \lim \frac{x^2}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ افقی} \\ e^x = 0 \Rightarrow x \rightarrow -\infty \text{ مجانب قائم وجود ندارد} \end{cases}$

۲) $y = \frac{\operatorname{Sin} x}{x} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Sin} x}{x} = 1 \neq \infty \text{ تابع مجانب قائم ندارد} \\ \lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = \frac{(\text{عدد})}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ مجانب افقی} \end{cases}$

اما $y = 0$ بعنوان مجانب افقی قابل قبول نیست زیرا نقاط زیادی (مانند $x = k\pi$) وجود دارند که $y = \frac{\operatorname{Sin} x}{x} = 0$ خواهد شد و منحنی بر مجانب منطبق خواهد شد. در صورتیکه تابع f نباید بی‌شمار دفعه مجانب خود را قطع کند. توجه شود که در بعضی از کتابهای مرجع $y = 0$ بعنوان مجانب افقی در نظر گرفته می‌شود به هر حال بحث بر روی این تابع زیاد است!

۳) $y = \frac{\operatorname{Sin} x}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} \text{مانند حالت قبل مجانب افقی نداریم.} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Sin} x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \Rightarrow x = 0 \text{ مجانب قائم} \end{cases}$

توضیح: توجه شود چون $x = 0$ ریشه صورت کسر هم می‌باشد، لذا حد تابع را محاسبه کردیم.

مجانبات مایل:

هرگاه حد تابع با ضابطه $y = f(x)$ وقتی x به سمت $+\infty$ و یا $-\infty$ میل کند برابر ∞ باشد، امکان آنکه مجانب مایل داشته باشد وجود دارد.

در شکل خط $y = b$ مجانب افقی خط $x = a$ مجانب قائم و خط $y_1 = mx + n$ مجانب مایل نمودار تابع می‌باشد.

قضیه: شرط لازم و کافی برای اینکه خط $y_1 = mx + n$ یک مجانب مایل منحنی تابع $y = f(x)$ باشد این است که:

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} |y - y_1| = 0$

روش تعیین مجانب مایل:

در تابعهای کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اولاً اگر درجه صورت از درجه مخرج کمتر باشد خط $y_1 = 0$ مجانب افقی تابع است، و اگر درجه صورت و مخرج مساوی باشد خط $y = b$ مجانب افقی تابع است. اگر درجه صورت یک واحد بیشتر از درجه مخرج باشد منحنی دارای خط مجانب مایل است.

که از تقسیم صورت بر مخرج بدست می‌آید (خارج قسمت این تقسیم مجانب مایل است) و اگر درجه صورت از درجه مخرج بیش از یک واحد باشد تابع دارای منحنی مجانب است و برای تعیین آن صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم.

مثال ۸۲: معادله مجانبهای منحنی $y = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$ را پیدا کنید.

پاسخ:

مجانب قائم: $x = -2, x = 1$

مجانب مایل: $y = x - 1$

مثال ۸۳: معادله مجانبهای منحنی $y = \frac{2x^2 + x^2 + 1}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) $y = 2x + 3, x = 0$
- (۲) $y = 2x + 1, x = 0$
- (۳) $y = 2, y = 2x, x = 0$
- (۴) $y = 2, y = 2x + 2, x = 0$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا مجانب مایل تابع را با تقسیم کردن صورت بر مخرج بدست می آوریم:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + x^2 + 1 & x^2 \\ \hline -2x^2 & 2x + 1 \\ \hline x^2 + 1 & \\ \hline -x^2 & \\ \hline R = 1 & \end{array} \Rightarrow y = 2x + 1 + \frac{1}{x} \rightarrow y = 2x + 1$$

مجانب مایل: $y = 2x + 1$

مجانب قائم: $x^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty \rightarrow x = 0$

تذکره ۱۱: در توابع کسری در صورت وجود مجانب مایل آنگاه مجانب افقی نخواهیم داشت و بالعکس اما در توابع رادیکالی احتمالی وجود هر دو مجانب وجود دارد.

روش دیگر: برای تعیین جایگزین مجانب مایل: اگر خط $y_1 = mx + n$ مجانب مایل منحنی تابع $y = f(x)$ فرض شود، در این صورت برای تعیین ضرایب m و n روابط زیر را داریم:

$$\begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} \\ n = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - mx) \end{cases}$$

تذکره ۱۲: اگر $m = 0$ و n عددی حقیقی باشد، مجانب افقی است. اگر m و n بی نهایت شود تابع مجانب مایل ندارد.

مثال ۸۴: خط مجانب تابع $y = 2x\sqrt{\frac{x-1}{9x-1}}$ با خط $y = (m+1)x + b$ موازی است. مقدار m کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$
- (۲) -1
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) 1

پاسخ: گزینه «۱» اگر معادله خط مجانب را به فرم $y = ax + b$ در نظر بگیریم، ضریب زاویه خط از رابطه زیر بدست می آید:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x\sqrt{\frac{x-1}{9x-1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2\sqrt{\frac{x-1}{9x-1}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

چون دو خط موازیند لذا $m+1 = a$ یا $m+1 = \frac{2}{3}$ که $m = -\frac{1}{3}$ را نتیجه می دهد.

نکته ۳۰: در توابعی به صورت کلی $y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0}$ معادله مجانب مایل به صورت زیر است:

$$y = \frac{a_n}{b_{n-1}} x - \frac{1}{b_{n-1}} \left| \begin{array}{cc} a_n & a_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} \end{array} \right|$$

$$y = \frac{2}{1} (x) - \frac{1}{1} \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = 2x - 1(0 \times 2 - 1 \times 1) = 2x + 1$$

مثلاً در مثال (۸۲) معادله مجانب مایل برابر است با:

مثال ۸۵: مجانبهای نمودار تابع $y = \sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + 2x}$ را بدست آورید.

پاسخ:

مجانب مایل: $x \rightarrow +\infty, y = x + 1 + x + 1 \Rightarrow y = 2x + 2$

مجانب افقی: $x \rightarrow -\infty, y = -(x+1) + (x+1) \Rightarrow y = 0$

مثال ۸۶: مجانبهای نمودار تابع $y = \frac{2+|x|}{4+2x}$ را بدست آورید.

پاسخ:

توجه شود که در این حالت $y = \frac{1}{2}$ تابع ثابت داریم (مجانب ندارد) اگر $x > 0 \Rightarrow y = \frac{x+2}{2x+4} = \frac{1}{2}$

مجانب افقی: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+2}{2x+4} = -\frac{1}{2}$

مجانب قائم منحنی: $4+2x=0 \Rightarrow x=-2$

مثال ۸۷: مجانب افقی تابع $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$ کدام است؟

پاسخ:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x+2} - \sqrt{x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sqrt{x+2}) - x}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

لذا $y = \frac{1}{2}$ مجانب افقی تابع می باشد.

مثال ۸۸: اگر معادله مجانب مایل نمودار تابع با ضابطه $y = ax + 1 - \sqrt{(x+b)^2 + 1}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر $y = 2x + 2$ باشد، $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

پاسخ: گزینه «۳» $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + 1 - |x + b|) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + 1 + x + b)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(a+1)x + b + 1] \xrightarrow{y=2x+2} \begin{cases} a+1=2 \\ b+1=2 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=2 \Rightarrow a+b=3$$

مثال ۸۹: اگر معادله مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه $y = \sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر $y = 0$ باشد، $a + b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{3}{2}$
- (۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x - \frac{1}{2}| - ax - b) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{2} - x - ax - b)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(-1-a)x + \frac{1}{2} - b] \xrightarrow{y=0} \begin{cases} -a-1=0 \\ \frac{1}{2}-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-1, b=\frac{1}{2} \Rightarrow a+b=-\frac{1}{2}$$

مثال ۹۰: معادله مجانبهای $y = x + 2 \operatorname{Arctg} x$ عبارتند از:

- (۱) $y = \pi$ راست و $y = -\pi$ چپ
- (۲) $y = x$ راست و $y = x$ چپ
- (۳) $y = x + \pi$ راست و $y = x - \pi$ چپ
- (۴) ندارد.

پاسخ: گزینه «۳» واضح است که منحنی مجانب قائم و افقی ندارد. فرض می کنیم خط $y = mx + n$ مجانب مایل منحنی باشد، در این صورت:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2 \operatorname{Arctg} x}{x} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + 2 \operatorname{Arctg} x - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 \operatorname{Arctg} x = \begin{cases} \pi & x \rightarrow +\infty \\ -\pi & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

مثال ۹۱: اگر معادله مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{x^2+1}{x+1} - ax - b$ وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر $y = 0$ باشد آنگاه $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) -۱
- (۳) ۲
- (۴) ۰

پاسخ: گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1-ax^2-bx-ax-b}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 + (-b-a)x + 1-b}{x+1}$$

چون تابع دارای مجانب افقی $y=0$ می باشد لذا باید ضرایب x^2 و x در صورت کسر فوق برابر صفر گردد تا درجه صورت از مخرج کمتر باشد و حاصل حد فوق برابر صفر گردد:

$$\begin{cases} 1-a=0 \\ -b-a=0 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=-1 \Rightarrow a+b=0$$

تذکره ۱۳: در بدست آوردن مجانبهای یک تابع لازم است به دامنه تابع توجه شود.

مثال ۹۲: منحنی به معادله $y = \frac{\sqrt{-x^2+2x}}{x^2-1}$ چند خط مجانب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه «۱» مجانبهای قائم منحنی:

$x = -1$ مقدار زیر رادیکال صورت را منفی می کند لذا $x = -1$ نمی تواند مجانب قائم باشد از طرفی x نمی تواند به سمت بی نهایت میل کند لذا تابع مجانب مایل و افقی ندارد.

مجانب توابع پارامتری:

اگر معادلات منحنی به صورت $x = f(t)$ و $y = g(t)$ بیان شده باشد، آنگاه برای به دست آوردن مجانب تابع باید به ازای $x \rightarrow \infty$ مقادیر t را به دست آورده و در معادله $y = g(t)$ قرار دهیم، مقادیر به دست آمده برای y مجانبهای افقی تابع را به ما معرفی می کند و وقتی $y \rightarrow \infty$ مقادیر t را به دست آورده و در معادله $x = f(t)$ قرار می دهیم، مقادیر به دست آمده برای x مجانبهای قائم تابع را به ما معرفی می کند.

مثال ۹۳: مجانبهای تابع پارامتری $x = \frac{t^2+1}{t-2}$ و $y = \frac{t}{t+1}$ را به دست آورید.

پاسخ: $x \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} t \rightarrow \infty \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t+1} = 1 \end{cases}$, $y \rightarrow \infty \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x = \frac{(-1)^2+1}{-1-2} = 0$

لذا تابع دارای دو مجانب افقی $y_1 = \frac{2}{3}$ و $y_2 = 1$ و یک مجانب قائم $x = 0$ است.

نکته ۳۱: توابع متناوب فاقد مجانب مایل و افقی هستند و مجانب قائم یا ندارند و یا بی شمار مجانب قائم دارند.

مثال ۹۴: مجانبهای تابع $y = \frac{|x|}{x^2-x}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x}{|x|}}{x^2-x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ مجانب افقی}$$

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

تنها $x = 0$ مجانب قائم تابع می باشد، زیرا در همسایگی $x = 1$ صورت کسر برابر صفر است و در نتیجه $x = 1$ مجانب قائم نخواهد بود.

مثال ۹۵: تابع پارامتری $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{1}{1-t^2} \end{cases}$ چند مجانب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ بی شمار

پاسخ: گزینه «۲» تابع پارامتری داده شده، در واقع تابع $y = \frac{1}{1-x}$ می باشد که یک تابع هموگرافیک است که یک مجانب قائم و یک مجانب افقی دارد.

مثال ۹۶: وارون تابع $y = \frac{1}{x^2-x}$ چند مجانب قائم و چند مجانب افقی دارد؟

- ۱ (۱) قائم، ۱ افقی ۲ (۲) قائم، ۳ افقی ۳ (۳) افق، ۱ قائم ۴ نمی توان مشخص کرد.

پاسخ: گزینه «۲» چون خود تابع $f, 2$ مجانب قائم و 1 مجانب افقی دارد، پس وارون آن 3 مجانب افقی و یک قائم دارد.

تست های طبقه بندی شده فصل دوم

۱- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$ برابر است با:

- ۰ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴)

(عمران - سراسری ۷۸)

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

- $\frac{1}{2}$ (۱) ۱ (۲) $\frac{e}{2}$ (۳) e (۴)

(مکانیک - سراسری ۷۸)

۳- حد عبارت $\frac{\cos x^2 - 1}{x^2}$ وقتی x به سمت صفر میل کند برابر است با:

- $-\frac{1}{2}$ (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۱ (۴)

(مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۷۸)

۴- حد تابع $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - |x-1| - 1}{|x-1|}$ چه مقدار است؟

- $-\frac{2}{99}$ (۱) -3 (۲) $+\frac{2}{99}$ (۳) $+\infty$ (۴)

(مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۷۸)

۵- مطلوبست تعیین حد تابع داده شده: $y = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right)$

- $y = \frac{\pi}{2}$ (۱) $y = \infty$ (۲) $y = 1$ (۳) $y = 0$ (۴)

(مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۷۸)

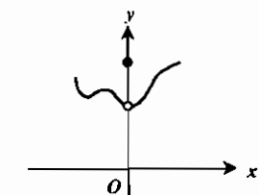
۶- در مورد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ کدام گزینه صحیح است؟

- ۱) حد موجود و برابر صفر است. ۲) حد موجود و برابر یک است. ۳) حد موجود و برابر $\frac{1}{2}$ است. ۴) حد موجود نیست.

(مهندسی هسته ای - سراسری ۷۸)

۷- نمودار تابع f در نزدیکی صفر به صورت شکل مقابل است. کدام گزینه در مورد حد این تابع در صفر صحیح است؟

(مهندسی هسته ای - سراسری ۷۸)



۱) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ موجود نیستند.

۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq f(0)$

۳) حد تابع در صفر موجود نیست.

۴) حد تابع در صفر موجود است.

۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

- $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{e}$ (۲) $e^{\frac{1}{2}}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴)

(مهندسی هسته ای - سراسری ۷۸)

۹- کدام گزینه در مورد $\lim_{x \rightarrow 0} x \left| \frac{1}{x} \right|$ صحیح است؟

- ۱) وجود ندارد ۲) حد برابر صفر است ۳) حد برابر یک است ۴) ∞

(آمار - سراسری ۷۸)

۱۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos x}$ کدام است؟

- $\frac{4}{9}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{2}{2}$ (۴)

(آمار - سراسری ۷۸)

۱۱- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{Q} \\ x-2 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ مفروض است. این تابع در است. (آمار - سراسری ۷۸)

- (۱) ۲- پیوسته (۲) ۲ پیوسته (۳) $-\frac{1}{2}$ پیوسته (۴) همه نقاط ناپیوسته

۱۲- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)!}$ کدام است؟ (آمار - سراسری ۷۸)

- (۱) ۱ (۲) $\frac{2}{e}$ (۳) $\frac{4}{e}$ (۴) $+\infty$

۱۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۷۸)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{x}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۷۸)

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ∞

۱۵- به ازای کدام مقدار a تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۷۸)

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۱۶- کدام گزینه در مورد $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\frac{\pi}{n})$ صحیح است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۷۸)

- (۱) حد موجود و برابر یک است. (۲) حد موجود و برابر صفر است. (۳) حد موجود و برابر -۱ است. (۴) حد موجود نیست.

۱۷- مقدار حد $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$ کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۷۹)

- (۱) e (۲) ۰ (۳) -۱ (۴) ۱

۱۸- حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2^x}{\frac{1}{3+2^x}}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۱ (۴) فاقد حد

۱۹- در دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = \begin{cases} e^{-n} & n \text{ زوج} \\ \frac{\sin n}{n} & n \text{ فرد} \end{cases}$ حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

- (۱) ۱ (۲) ۰ (۳) -۱ (۴) وجود ندارد.

۲۰- اگر $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2+x) - x^{2n} \sin x}{1+x^{2n}}$ ، $f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ کدام است؟ (آمار - سراسری ۷۹)

- (۱) ∞ (۲) $\log 2$ (۳) $-\sin 1$ (۴) $-\infty$

۲۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2}$ کدام است؟ (آمار - سراسری ۷۹)

- (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ∞ (۴) موجود نیست.

۲۲- اگر $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ پیوسته باشد، کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟ (آمار - سراسری ۷۹)

- (۱) $f(x) - x = 0$ حداقل یک ریشه در $[a, b]$ دارد. (۲) $f(x) - x = 0$ ریشه‌ای در $[a, b]$ ندارد. (۳) $f(x) = 0$ حداقل یک ریشه در $[a, b]$ دارد. (۴) $f(x) = 0$ ریشه‌ای در $[a, b]$ ندارد.

۲۳- مقدار حد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - e}{x}$ ، کدام است؟ (عمران - سراسری ۸۰)

- (۱) $-\frac{e}{2}$ (۲) $\frac{1}{e^2}$ (۳) $-\frac{1}{e}$ (۴) $\frac{1}{e^2}$

۲۴- حد زیر را به دست آورید: $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1 - \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2x^2}}$ (عمران - آزاد ۸۰)

- (۱) $e^{-1/2}$ (۲) $e^{2/2}$ (۳) $e^{2/2}$ (۴) $e^{1/2}$

۲۵- مقدار حد را به دست آورید: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x + \cos x)^{1/\operatorname{Ln}(1+x^2)}$ (عمران - آزاد ۸۰)

- (۱) ۰ (۲) $+\infty$ (۳) e (۴) $-\infty$

۲۶- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \operatorname{Ln} x$ برابر است با ... (علوم کامپیوتر - سراسری ۸۰)

- (۱) ۰ (۲) $+\infty$ (۳) -۱ (۴) $-\infty$

۲۷- a چقدر باشد تا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x + 3^{x+1}}{2^{2x-1} + 3^{x+2}}$ عددی غیر صفر باشد؟ (MBA - سراسری ۸۰)

- (۱) $a > 4$ (۲) $a = 2$ (۳) $a = 4$ (۴) $2 < a < 4$

۲۸- اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax+2a}{x^2-2x-1-\sqrt{5x+16}} = 2$ باشد، آنگاه مقدار a کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

- (۱) -۵ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) $-\frac{2}{5}$

۲۹- تعداد نقاط گسستگی تابع $f(x) = |\frac{x}{3}| - x^2 + 2x$ در فاصله $[0, 5]$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

- (۱) ۲ (۲) ۰ (۳) ۴ (۴) ۱

۳۰- اگر $a_n = \operatorname{Arccot} \frac{1}{n}$ ، مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۰)

- (۱) صفر (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

۳۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{1/x}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۰)

- (۱) \sqrt{e} (۲) $\frac{2}{e}$ (۳) $\frac{1}{e}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

۳۲- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 5x & x \text{ گویا} \\ x^2 - 6 & x \text{ گنگ} \end{cases}$ در چند نقطه پیوسته است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۰)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) تعداد نامتناهی

۳۳- اگر تابع f در معادله تابعی $f(x+y) = f(x) + f(y)$ صدق کند آنگاه تابع f : (آمار - سراسری ۸۰)

- (۱) زوج است. (۲) فرد است. (۳) نه فرد و نه زوج است. (۴) متناوب است.

۳۴- اگر $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ ، مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ کدام است؟ (آمار - سراسری ۸۰)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) e (۴) $\frac{1}{e}$

۳۵- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1}$ کدام است؟ (ریاضی - سراسری ۸۰)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

۲۶- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{a}{x^2} + b) = 0$ باشد آنگاه مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $-\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{2}{3}$

(ریاضی - سراسری ۸۰)

۲۷- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \cos x & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$ مفروض است. کدامیک از گزینه‌ها صحیح است؟

- (۱) به ازای هر مقدار α ، f در صفر ناپیوسته است.
- (۲) به ازای $\alpha = 0$ ، f بر R پیوسته است.
- (۳) به ازای $\alpha = 1$ ، f بر R پیوسته است.
- (۴) به ازای $\alpha = -1$ ، f بر R پیوسته است.

(ریاضی - سراسری ۸۰)

۲۸- مقدار $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) e
- (۴) ∞

(ریاضی - سراسری ۸۰)

۲۹- حد دنباله $\{(2^n + 2^n)^{\frac{1}{n}}\}_{n=1}^{\infty}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ برابر است با:

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) ۲
- (۴) ۳

(ریاضی - سراسری ۸۰)

۴۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

- (۱) e^{-10}
- (۲) e^{10}
- (۳) e^{-5}
- (۴) e^5

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۰)

۴۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\sin 2x)}$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) حد وجود ندارد
- (۴) ۲

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۰)

۴۲- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-2 & x > 1 \end{cases}$ از نظر پیوستگی کدام است؟

- (۱) در هر نقطه به جز در $x=1$ پیوسته است.
- (۲) پیوسته است.
- (۳) در هر نقطه به جز در $x=0$ پیوسته است.
- (۴) در هر نقطه به جز $x=0$ و $x=1$ پیوسته است.

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۰)

۴۳- مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x + e^x}$ کدام است؟

- (۱) -۱
- (۲) ۰
- (۳) ۱
- (۴) $+\infty$

(مهندسی معدن، اکتشاف معدن - سراسری ۸۰)

۴۴- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{xe^{2x} - x^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۳
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) $\frac{3}{2}$

(مهندسی معدن، استخراج معدن - سراسری ۸۰)

۴۵- حد عبارت $\frac{1}{x} - \cot gx$ وقتی x به سمت صفر میل می‌کند کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) -۱

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

۴۶- به ازاء کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} [x] + a & x \leq 0 \\ x \cos x & x > 0 \end{cases}$ در R پیوسته می‌باشد.

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) -۱
- (۴) هیچ مقدار

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

۴۷- تعداد نقاط گسستگی تابع $f(x) = [3x] + x^2 - 1$ در فاصله $[-1, 1]$ چقدر است؟

- (۱) ۶
- (۲) ۷
- (۳) ۲
- (۴) ۳

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

۴۸- با فرض $f(x) = |1 - x^2|$ که در آن $|x|$ جزء صحیح x است $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ f)(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) ۰
- (۳) ۱
- (۴) ۲

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

۴۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{2x-1}{2x+1})^{2x+1}$ کدام است؟

- (۱) e^{-2}
- (۲) e^{-2}
- (۳) e^2
- (۴) e^2

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

۵۰- مجموعه نقاط پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $R - \{0\}$
- (۲) $R - \{1\}$
- (۳) $R - \{-1\}$
- (۴) $R - \{-1, 1\}$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

۵۱- تعداد نقاط گسستگی تابع $f(x) = [\frac{x}{2}] - x^2 + 2x$ در فاصله $[0, 5]$ کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۰
- (۳) ۴
- (۴) ۱

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

۵۲- حد روبرو را به دست آورید: $\lim_{x \rightarrow 0} \tan 2x \csc 4x$

- (۱) ۲
- (۲) ۱
- (۳) ۰
- (۴) $\frac{1}{2}$

(عمران - آزاد ۸۱)

۵۳- به ازای هر عدد حقیقی و ثابت a حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+a}{x-a})^x$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ∞
- (۳) e^a
- (۴) e^{2a}

(مکانیک - سراسری ۸۱)

۵۴- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\sin x}$ برابر است با:

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) ∞
- (۴) حد وجود ندارد.

(MBA - سراسری ۸۱)

۵۵- حد دنباله $a_n = (\cos \frac{1}{n})^{n^2}$ برابر است با:

- (۱) ۱
- (۲) $\frac{1}{\sqrt{e}}$
- (۳) \sqrt{e}
- (۴) ∞

(MBA - سراسری ۸۱)

۵۶- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{2x+1}{2x-1})^x$ برابر است با ...

- (۱) e^2
- (۲) $e^{\frac{2}{2}}$
- (۳) $e^{\frac{2}{2}}$
- (۴) e^2

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۱)

۵۷- حد چپ تابع $f(x) = \begin{cases} [x] + |x| & x < -1 \\ [x] - |x| & x \geq -1 \end{cases}$ در نقطه $x = -1$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۲
- (۲) -۱
- (۳) ۰
- (۴) ۱

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)

۵۸- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+\frac{1}{2}})$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۱
- (۴) ۲

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)

۵۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{Arcsec } x)$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) ∞

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)

۶۰- اگر f تابعی بر R با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \delta x & x \text{ گویا} \\ x^2 + 6 & x \text{ گنگ} \end{cases}$ باشد، این تابع از نظر پیوستگی در نقاط $x = 2$ ، $x = 1$ چگونه است؟

- (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری - ۸۱)
 (۱) در هر دو نقطه پیوسته است.
 (۲) در هر دو نقطه ناپیوسته است.
 (۳) در $x = 1$ پیوسته و در $x = 2$ ناپیوسته است.
 (۴) در $x = 1$ ناپیوسته و در $x = 2$ پیوسته است.

۶۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟ (آمار - سراسری - ۸۱)

- (۱) e^{-1} (۲) e^{-1} (۳) $\frac{1}{e^2}$ (۴) e

۶۲- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^{x-1} & x \neq 1 \\ A & x = 1 \end{cases}$ مفروض است. A چه مقداری باشد تا تابع f پیوسته گردد؟ (آمار - سراسری - ۸۱)

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) e

۶۳- اگر $f(x) = \frac{(\sin x)^\delta \ln x}{(1+x^\delta)x^2}$ و $x > 0$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ کدام است؟ (ریاضی - سراسری - ۸۱)

- (۱) ۰ (۲) $-\infty$ (۳) $+\infty$ (۴) حد وجود ندارد.

۶۴- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sin x}$ برابر است با: (ریاضی - سراسری - ۸۱)

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) e (۴) $+\infty$

۶۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1 + \ln x}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری - ۸۱)

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) e (۴) ∞

۶۶- تابع f با ضابطه $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{nx+1}$ در کدام نقطه ناپیوسته است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری - ۸۱)

- (۱) $-\frac{1}{n}$ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{n}$ (۴) ۱

۶۷- در تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & x < 4 \\ \delta x+k & x \geq 4 \end{cases}$ چنانچه حد $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ وجود داشته باشد، آنگاه مقدار k برابر است با:

- (مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد - ۸۱)
 (۱) -۶ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۵

۶۸- حد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ برابر است با: (مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد - ۸۱)

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ∞ (۴) $\frac{1}{2}$

۶۹- مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ چقدر است؟ (عمران - آزاد - ۸۲)

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{e}$ (۳) ۱ (۴) e

۷۰- اگر f و g توابعی پیوسته بر $[a, b]$ باشند، با کدام شرط زیر نمودار f و g الزاماً یکدیگر را در نقطه‌ای بین a و b قطع می‌کنند؟ (MBA - ۸۲)

- (۱) $f(a) < g(a)$ و $f(b) > g(b)$
 (۲) $f(a) > g(a)$ و $f(b) > g(b)$
 (۳) $f(a) < g(b)$ و $f(b) < g(a)$
 (۴) $f(a) = g(a)$ و $f(b) < g(a)$

۷۱- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1 + \ln x}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر - سراسری - ۸۲)

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) e (۴) ∞

۷۲- $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln \cosh x)$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر - سراسری - ۸۲)

- (۱) $\cosh 1$ (۲) $\ln 2$ (۳) e (۴) $-\infty$

۷۳- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \frac{1}{x})^{x^2}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر - سراسری - ۸۲)

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (۲) \sqrt{e} (۳) $2e$ (۴) e^2

۷۴- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x\sqrt{x}}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری - ۸۲)

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ∞ (۴) $\frac{4}{3}$

۷۵- اگر $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ عبارت $f \circ f \circ f \dots$ تکرار 100 بار کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری - ۸۲)

- (۱) x (۲) $\frac{1}{x}$ (۳) $\frac{1-x}{1+x}$ (۴) $(\frac{1-x}{1+x})^{100}$

۷۶- مقدار حد $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\delta e^{-\delta/x}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری - ۸۲)

- (۱) ۰ (۲) $\frac{\delta!}{(\delta/1)^\delta}$ (۳) $-\infty$ (۴) $+\infty$

۷۷- توابع $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$ در کدام مورد صدق می‌کند؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری - ۸۲)
 (۱) مجموعه مقادیر g شامل دامنه g است.
 (۲) دامنه‌های f و g برابرند.
 (۳) دامنه f زیر مجموعه مقادیر g است.
 (۴) مجموعه مقادیر f شامل دامنه f است.

۷۸- اگر $f(x) = \frac{1+10^x}{2-10^x}$ باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ چه مقدار خواهد شد؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری - ۸۲)

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{2}$

۷۹- فرض کنید $f(x) = \frac{1}{x+1}$ و $g(x) = x^2 - 5$ باشند، ناحیه‌ای که $f(g(x))$ در آن پیوسته باشد، کدام عبارت است؟ (آمار - سراسری - ۸۲)

- (۱) $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ (۲) $(-\infty, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty)$
 (۳) $(-\infty, -1) \cup (-1, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty)$ (۴) $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

۸۰- تابع $f(x) = x(-1)^{\frac{1}{x}}$ برای $x \neq 0$ و $f(0) = 0$ روی R تعریف شده است. کدام گزاره درست است؟ (آمار - سراسری - ۸۲)

- (۱) f در صفر فقط پیوسته راست دارد.
 (۲) f در صفر فقط پیوسته چپ است.
 (۳) f در صفر پیوسته است.
 (۴) در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.

۸۱- کدام تابع در $x = 0$ پیوسته است؟ (آمار - سراسری - ۸۲)

- (۱) $\frac{\sin x}{x}$ (۲) $\begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

۸۲- مقدار حد $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi/2 - x)^2}$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $-\infty$
- (۴) $+\infty$

۸۳- فرض کنید $x_1 = 1$ و $a_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$ برای $n \geq 2$ کدام گزاره درست است؟

- (۱) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (۲) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
- (۳) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
- (۴) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$

۸۴- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) e
- (۴) $1 + e$

۸۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$
- (۲) ۱
- (۳) e^{-2}
- (۴) e^{-4}

۸۶- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^-} (|x| + |x^2| + \dots + |x^{100}|)$ کدام است؟

- (۱) -50
- (۲) صفر
- (۳) ۵۰
- (۴) ۱۰۰

۸۷- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^{n-1}}}{n}$ عبارتست از: (e عدتهر است.)

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) e
- (۴) ∞

۸۸- به ازای چه مقدار a تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x||x| + a & x < -2 \\ |x| + |x| & x \geq -2 \end{cases}$ در $x = -2$ پیوسته است؟

- (۱) ۰
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۶

۸۹- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1})$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۱
- (۴) ∞

۹۰- مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Arc} \tan x$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) ∞

۹۱- تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{|3x - 5|}$ در فاصله $0 \leq x \leq 1$ چند ناپیوستگی دارد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۳
- (۳) هیچ
- (۴) بی نهایت

۹۲- حد عبارت $\frac{x-1}{1+x^{-1}}$ وقتی $x \rightarrow 1$ برابر است با:

- (۱) ۰
- (۲) $-\infty$
- (۳) $+\infty$
- (۴) ۲

۹۳- مقدار حد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - e}{x}$ کدام است؟

- (۱) e
- (۲) $\frac{e}{2}$
- (۳) $\frac{1}{e}$
- (۴) $-\frac{e}{2}$

۹۴- e را به قسمی بیابید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x+c}{x-c})^x = 9$

- (۱) $c = \ln 3$
- (۲) $c = \ln 4$
- (۳) $c = \ln 9$
- (۴) $c = 3$

۹۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

- (۱) e
- (۲) $\frac{1}{e}$
- (۳) \sqrt{e}
- (۴) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

(مکانیک - سراسری ۸۳)

۹۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) e
- (۳) \sqrt{e}
- (۴) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

(MBA - سراسری ۸۳)

۹۷- تابع F با ضابطه $F(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & x < 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$ مفروض است. $\lim_{n \rightarrow \infty} |F(1 - \frac{1}{n}) - F(2 + \frac{1}{n})|$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر - سراسری ۸۳)

- (۱) -۱
- (۲) $-\frac{2}{3}$
- (۳) $-\frac{1}{3}$
- (۴) ۰

۹۸- اگر $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\sin x}{x} & x < 0 \\ -1 + \frac{\tan x}{x} & x > 0 \end{cases}$ و $f(0) = a$ به ازای کدام مقدار a تابع f در $x = 0$ پیوسته است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) ۱
- (۲) -۱
- (۳) هیچ مقدار a
- (۴) هر مقدار a

۹۹- به ازای کدام مقدار C تابع $f(x) = \begin{cases} \tan x - \sec x & x = \frac{\pi}{2} \\ C & x \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ پیوسته است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) هر چه باشد C

۱۰۰- در مثلث متساوی‌الضلاع به ضلع ۴ واحد، دایره‌ای محاط شده است. مثلث متساوی‌الضلاع دیگری را داخل دایره محاط کرده و مجدداً دایره دیگری را در داخل مثلث حاصل محاط می‌کنیم و این عمل را تا بی نهایت بار ادامه می‌دهیم. حد مجموع مساحت این دایره‌ها کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) 2π
- (۲) $\frac{2\pi}{3}$
- (۳) $\frac{9\pi}{4}$
- (۴) $\frac{16\pi}{9}$

۱۰۱- حد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x) + \sin x}{1 - \cos x}$ برابر است با:

- (۱) -۱
- (۲) ۰
- (۳) ۱
- (۴) ∞

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۳)

۱۰۲- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \ln n$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$
- (۲) ۰
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) $+\infty$

(آمار - سراسری ۸۳)

۱۰۳- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{گویا} \\ -2x + 3 & \text{مکزی} \end{cases}$ در کدام نقاط پیوسته است؟

- (۱) $x = 1, x = 0$
- (۲) $x = -3, x = 0$
- (۳) در اعداد گویا
- (۴) $x = -3, x = 1$

(ریاضی - سراسری ۸۳)

۱۰۴- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$
- (۲) $-\frac{1}{6}$
- (۳) $\frac{1}{6}$
- (۴) $\frac{1}{3}$

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۳)

۱۰۵- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۳)

- (۱) e^2
- (۲) $e^{\frac{1}{2}}$
- (۳) $e^{\frac{1}{e}}$
- (۴) e^2

۱۰۶- اگر $g(x) = \frac{1}{1 - \cos x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x)^{g(x)}$ کدام است؟

(مهندسی معدن - سراسری ۸۳)

- (۱) ۱
- (۲) e
- (۳) \sqrt{e}
- (۴) $\frac{1}{e}$

۱۰۷- حد عبارت $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$ وقتی $x \rightarrow \infty$ کدام است؟

(عمران - آزاد ۸۴)

- (۱) e^{-2}
- (۲) ۰
- (۳) e^{-1}
- (۴) e

۱۰۸- مقدار حد زیر کدام است؟

(مکانیک - سراسری ۸۴)

- $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{2x})^{\frac{1}{x}}$
- (۱) ۱
 - (۲) $8e$
 - (۳) $e^{\frac{1}{2}}$
 - (۴) ∞

۱۰۹- اگر $t \cdot x^t = 1$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \frac{1}{x} x^2)^t$ برابر کدام است؟

(MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) $\sqrt[3]{e}$
- (۲) $\sqrt[3]{e}$
- (۳) $\sqrt[3]{e}$
- (۴) $\sqrt[3]{e}$

۱۱۰- دامنه تابع $f(x) = \text{th}^{-1}(t g \pi x)$ به صورت اجتماع کدام بازه‌ها است؟ ($K \in \mathbb{Z}$)

(MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) $(K + \frac{1}{4}, K + \frac{3}{4})$
- (۲) $(K - \frac{1}{4}, K + \frac{1}{4})$
- (۳) $[(K + \frac{1}{4}, K + \frac{3}{4})]$
- (۴) $[K - \frac{1}{4}, K + \frac{1}{4}]$

۱۱۱- اگر $f(x) = x^{x-1}$ تابع f را در $x=1$ چه مقداری تعریف کنیم تا در این نقطه پیوسته باشد؟

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) $f(1) = -1$
- (۲) $f(1) = 0$
- (۳) $f(1) = 1$
- (۴) $f(1) = e$

۱۱۲- اگر $|x| < 1$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{m}{n} x^n$ کدام است؟

(آمار - سراسری ۸۴)

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) x
- (۴) ∞

۱۱۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x$ کدام است؟

(آمار - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{1}{e^2}$
- (۲) $e^{\frac{2}{3}}$
- (۳) e^2
- (۴) ∞

۱۱۴- حد چپ و حد راست تابع $f(x) = \frac{|x-|x||}{x}$ در نقطه صفر کدامند؟

(آمار - سراسری ۸۴)

- (۱) ۱ و ۰
- (۲) ۰ و -۱
- (۳) ۱ و -∞
- (۴) ۱ و +∞

۱۱۵- فرض کنیم $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی یک به یک باشد. پس برای هر $x, y \in [a, b]$ که $x < y$ داریم $f(x) \neq f(y)$ و لذا $f(x) < f(y)$ یا $f(x) > f(y)$ از این استدلال می‌توان نتیجه‌ای گرفت؟

(ریاضی - سراسری ۸۴)

- (۱) اگر فرض پیوستگی f هم اضافه شود آنگاه f یکنواست.
- (۲) f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.
- (۳) f قطعه به قطعه اکیداً یکنواست.
- (۴) اصولاً این استدلال هیچ نتیجه‌ای در مورد یکنوا بودن f نمی‌دهد.

۱۱۶- اگر A عدد ثابتی باشد، $\lim_{t \rightarrow 1^+} (1 - (t-1)A)^{\frac{1}{t-1}}$ کدام است؟

(ریاضی - سراسری ۸۴)

- (۱) e^{2A}
- (۲) e^{-2A}
- (۳) e^A
- (۴) e^{-A}

۱۱۷- اگر $f(x) = \left(\frac{x}{y}\right)^{x-2}$ تابع f را در $x=2$ چه مقداری تعریف کنیم تا در این نقطه پیوسته باشد؟ (ریاضی - سراسری ۸۴)

- (۱) e^2
- (۲) e
- (۳) \sqrt{e}
- (۴) e^{-1}

۱۱۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) ۲
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) صفر

۱۱۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ∞

۱۲۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2e^{-x} - 4x}{x - \sin x}$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) -۴
- (۲) -۲
- (۳) ۲
- (۴) ۴

۱۲۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{3x}}$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) $e^{\frac{1}{3}}$
- (۲) $e^{\frac{1}{2}}$
- (۳) $e^{\frac{2}{3}}$
- (۴) $e^{\frac{2}{3}}$

۱۲۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-2)^{20}(3x+2)^{20}}{(2x+1)^{40}}$ وقتی $x \rightarrow \infty$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۴)

- (۱) $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$
- (۲) $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$
- (۳) $\left(\frac{3}{2}\right)^{20}$
- (۴) $\left(\frac{3}{2}\right)^{20}$

۱۲۳- حد تابع $f(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ وقتی $x \rightarrow 1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۴)

- (۱) $-\frac{1}{2}$
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) -۱

۱۲۴- مقدار c را چنان تعیین کنید که $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4$ بشود.

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۴)

- (۱) ۴
- (۲) ۲
- (۳) $\ln 4$
- (۴) $\ln 2$

۱۲۵- معادلات مجانبهای منحنی $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ کدام‌اند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۴)

- (۱) $y = 2, x = \pm 1$
- (۲) $y = 2x, y = 0, x = \pm 1$
- (۳) $y = 2x, y = 1, x = 1$
- (۴) $y = x, y = 1, x = \pm 1$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم

۱- گزینه «۲»
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \times 2x}{x^2 \times x^2} = \frac{1}{2}$$

۲- گزینه «۴» از هم‌ارزی $\cosh x \sim \frac{e^x}{2}$ استفاده می‌کنیم:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cosh x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{2^{\frac{1}{x}}} = \frac{e}{2}$$

۳- گزینه «۱» می‌دانیم وقتی $x \rightarrow 0$ آنگاه $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ لذا داریم:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2 - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

۴- گزینه «۲»
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - |x-1| - 1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^2 - 1) - (1-x)}{(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)[-(1+x) - 1]}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-(1+x) - 1] = -3$$

۵- گزینه «۴»
$$y = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot gx \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan gx} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan gx - x}{x \tan gx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{3}}{x \left(x + \frac{x^3}{3} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3 \left(1 + \frac{x^2}{3} \right)} = 0$$

۶- گزینه «۱»
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \times \text{کراندار} = 0$$

۷- گزینه «۴»
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}(\cos \sqrt{x} - 1)} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \times \frac{-(\sqrt{x})^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

۹- گزینه «۳»
$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x \times \frac{1}{x} = 1$$

توجه: هرگاه $u \rightarrow \infty$ داریم: $[u] \sim u$.

۱۰- گزینه «۱»
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 3x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \operatorname{tg} 2x}{-3 \operatorname{tg} 3x} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x}{-9x} = \frac{4}{9}$$

۱۱- گزینه «۱» تابع f در نقاطی که $2x = x - 2$ باشد، پیوسته است یعنی $x = -2$.

۱۲- گزینه «۳»
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times \sqrt[n]{(n+1) \times n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(n!)^{n+1}}{e^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{(n!)^{\frac{n+1}{n}}}{e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{e^n}{e} = \frac{e}{e} = 1$$

۱۳- گزینه «۳»
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x \left(x + \frac{4}{x} \right)} - x \right) = 2$$

۱۴- گزینه «۲» از تغییر متغیر $t = \frac{1}{x}$ استفاده می‌کنیم، در این صورت وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، آنگاه $t \rightarrow +\infty$ بنابراین:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

۱۵- گزینه «۲»
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} = 0 \times \text{کراندار} = 0, f(0) = a$$

برای پیوستگی f در 0 لازم است $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، بنابراین $a = 0$.

۱۶- گزینه «۱»
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{n} = \cos 0 = 1$$

روش اول:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{HOP}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1$$

روش دوم: وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، $1+e^x \sim e^x$ ، بنابراین $\ln(1+e^x) \sim \ln e^x \sim x$. پس:

۱۸- گزینه «۴»
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+2^x}{2+2^x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+2^{-\infty}}{2+2^{-\infty}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+2^x}{2+2^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} \times \ln 2 \times 2^x}{-\frac{1}{x^2} \times \ln 2 \times 2^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln 2}{\ln 2} \right) \times \left(\frac{2}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = 0$$

حد چپ و راست با هم برابر نیستند، لذا تابع فاقد حد است.

۱۹- گزینه «۲»
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-n}}{\sin n} = 0$$

۲۰- گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که اگر $x > 1$ ، آنگاه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log(y+x)}{1+x^{2n}} - \frac{x^{2n} \sin x}{1+x^{2n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log(y+x)}{x^{2n}} - \frac{x^{2n} \sin x}{x^{2n}} \right) = 0 - \sin x$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-\sin x) = -\sin 1$$

گزینه ۲۱»

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۱» طبق فرض داریم:

$$f(a) \in [a, b] \Rightarrow a \leq f(a) \leq b \Rightarrow f(a) - a \geq 0$$

$$f(b) \in [a, b] \Rightarrow a \leq f(b) \leq b \Rightarrow f(b) - b \leq 0$$

حال تابع $g(x) = f(x) - x$ را در نظر بگیرید، چون $g(a)g(b) \leq 0$ ، بنابراین طبق قضیه مقدارمیان تابع g حداقل یک ریشه در $[a, b]$ دارد.

گزینه ۱»

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{همارزی}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}(-x + \frac{x^2}{2})} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1 + \frac{x}{2}} - e^{-1}}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} e^{-1}}{1} = -\frac{e}{2}$$

گزینه ۹»

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x - \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x^3}} \stackrel{\text{همارزی}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^3}{3}\right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^3}(-\frac{x^3}{3})} = e^{-\frac{1}{3}}$$

گزینه ۲»

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{\ln(1+x^2)} \times (\sin x + \cos x - 1)}$$

می‌دانیم وقتی $x \rightarrow 0$ ، $\sin x \sim x$ ، $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ و $\ln(1+x^2) \sim x^2$ بنابراین:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{x - \frac{x^2}{2}}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1-x}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

گزینه ۱»

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 0$$

گزینه ۳»

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x + 3^{x+1}}{4^x + 3^{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x + 3^{x+1}}{4^x \times \frac{1}{4} + 3^{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x + 3^{x+1}}{4^x \times \frac{1}{4} + 3^{x+2}}$$

اگر $a < 4$ حد برابر صفر است، اگر $a > 4$ حد برابر ∞ و اگر $a = 4$ حد برابر ۲ می‌شود.

گزینه ۱»

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax + 3a}{1 + \sqrt{\Delta x + 16}} \times \frac{1 + \sqrt{\Delta x + 16}}{1 + \sqrt{\Delta x + 16}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{a(x+3)(1 + \sqrt{\Delta x + 16})}{1 - (\Delta x + 16)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{a(x+3)(1 + \sqrt{\Delta x + 16})}{-\Delta(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{a(1 + \sqrt{1})}{-\Delta} \Rightarrow -\frac{2}{\Delta} a = 2 \Rightarrow a = -\Delta$$

گزینه ۴» تابع f ، فقط در $x = 3$ ناپیوسته است و در نقاط مرزی نیز پیوسته است.

گزینه ۳»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Arc} \cot g \frac{1}{n} = \operatorname{Arc} \cot g 0 = \frac{\pi}{2}$$

گزینه ۴»

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}(-x)} = e^{-1}$$

گزینه ۳»

$$x^2 - 6 = \Delta x \Rightarrow x^2 - \Delta x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1, 6$$

گزینه ۲» ابتدا به جای x, y مقدار ۰ قرار می‌دهیم، بنابراین:

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

حال در رابطه داده شده به جای x, y قرار می‌دهیم، در نتیجه:

$$f(x-x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow \text{تابع } f \text{ فرد است}$$

گزینه ۲» واضح است که تمام جملات مجموع مابین $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ و $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ قرار دارند، بنابراین:

$$n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

حال توجه کنید که $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$ ، بنابراین طبق قضیه ساندویچ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

گزینه ۲»

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x-1} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{HOP}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1)}{1} = 1$$

گزینه ۴»

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x^2} + \frac{a}{x^2} + b \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + ax + bx^2}{x^2}$$

به جای $\sin 2x$ بسط مکلاورن آن را قرار می‌دهیم، در این صورت:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - \frac{(2x)^3}{6} + \frac{(2x)^5}{120} - \dots) + ax + bx^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+2)x + (b - \frac{4}{3})x^2 + \frac{(2x)^5}{120} + \dots}{x^2}$$

برای اینکه حاصل حد فوق برابر صفر شود، لازم است $a+2=0$ و $b - \frac{4}{3} = 0$ ، بنابراین $a = -2$ و $b = \frac{4}{3}$ و در نتیجه $a+b = \frac{2}{3}$.

گزینه ۱»

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} \cos x = -1$$

چون حد چپ و راست f در صفر با هم برابر نیستند، پس f نمی‌تواند در صفر پیوسته باشد.

گزینه ۳» وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ ، بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{n}{e}} = e$$

گزینه ۴»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n} = 3$$



۵۳- گزینه «۴» $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \left(\frac{x+a}{x-a} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a}$

۵۴- گزینه «۱» $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r \cos \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$ کراندار \times صفر

۵۵- گزینه «۲» صورت مبهم 1^∞ می باشد، بنابراین: $a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n^r (\cos \frac{1}{n} - 1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n^r \left(-\frac{1}{2n^2}\right)} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

۵۶- گزینه «۳» $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{rx+1}{rx-1}\right)^x = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \left(\frac{rx+1}{rx-1} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x}{rx-1}} = e^{\frac{2}{r}}$

۵۷- گزینه «۲» $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (|x| + |x|) = [-1 - \epsilon] + |-1| = -2 + 1 = -1$

۵۸- گزینه «۲» با ضرب مزدوج پرانتز اول داریم:

۵۹- گزینه «۳» $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \left(\sqrt{n+\frac{1}{r}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right] \times \sqrt{n+\frac{1}{r}}$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$

۵۹- گزینه «۳» $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arcsec } x = \text{Arcsec}(\infty)$

اندازه زاویه ای که sec آن ∞ است، جواب است. می دانیم $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ و با قرار دادن $x = \frac{\pi}{2}$ ملاحظه می گردد که $\sec x = \infty$ می شود.

۶۰- گزینه «۴» توابعی به صورت $f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{گویا } x \\ g(x) & \text{گنگ } x \end{cases}$ فقط به ازای مقادیری که از معادله $h(x) = g(x)$ به دست می آیند پیوسته هستند:

$x^r + 6 = \Delta x \Rightarrow x^r - \Delta x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 2$
 پس تابع در نقطه $x = 1$ ناپیوسته و در نقطه $x = 2$ پیوسته است.

۶۱- گزینه «۱» $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^r}} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^r} (\cos x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^r} \left(-\frac{x^2}{2}\right)} = e^{-\frac{1}{2}}$

۶۲- گزینه «۴» $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-1} (x-1)} = e$

برای پیوستگی f در 1 لازم است $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، بنابراین $A = e$.

۶۳- گزینه «۱» $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)^\Delta \ln x}{(1+x^\Delta)x^r} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\Delta \ln x}{(1+x^\Delta)x^r} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^r}} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{r}{x^{r+1}}} = 0$



۴۰- گزینه «۱» صورت مبهم 1^∞ می باشد. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x(-2x)} = e^{-1}$

۴۱- گزینه «۳» وقتی $x \rightarrow \pi^-$ ، $2x \rightarrow 2\pi^-$ و بنابراین $\sin 2x \rightarrow 0^-$ و در نتیجه عبارت مقابل \ln منفی می شود. پس حد وجود ندارد.

۴۲- گزینه «۲»
 f در 0 پیوسته است $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ ، $f(0) = 1$
 f در 1 پیوسته است $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ ، $f(1) = 0$

۴۳- گزینه «۲» $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{xe^x + e^x} \stackrel{\text{طبق قانون رشد}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

توجه: وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، e^x از x بیشتر است.

۴۴- گزینه «۲» $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arcsin } 2x}{xe^{2x} - x^2} \stackrel{\text{همارزی}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(e^{2x} - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^{2x} - x} = 2$

۴۵- گزینه «۳» $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{tg } x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x - x}{x^2 \text{tg } x} \stackrel{\text{همارزی}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \frac{1}{2}$

۴۶- گزینه «۴» می دانیم تابع $[x]$ در تمام نقاط $x \in \mathbb{Z}$ ناپیوسته است. پس تابع f به ازای تمام مقادیر a ناپیوسته است.

۴۷- گزینه «۱» تابع داده شده در نقاط $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$ ناپیوسته می باشد.

۴۸- گزینه «۳» ابتدا $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ را محاسبه می کنیم:
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [1 - x^r] = [1 - 1^-] = 0$

بنابراین: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = f(0) = 1$

۴۹- گزینه «۲» $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x+1} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(2x+1) \left(\frac{2x-1}{2x+1} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(2x+1) \frac{-2}{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2} = e^{-2}$

۵۰- گزینه «۱» $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

چون حد چپ و راست در $x = 0$ با هم برابر نیست، پس تابع f در $x = 0$ پیوسته نیست.

۵۱- گزینه «۴» تابع f ، فقط در $x = 3$ ناپیوسته است و در نقاط مرزی نیز پیوسته است.

۵۲- گزینه «۴» $\lim_{x \rightarrow 0} \text{tg } x \csc \phi x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } 2x}{\sin \phi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\phi x} = \frac{1}{\phi}$

۶۴- گزینه «۲» وقتی $x \rightarrow 0$ ، $\sin x \sim x$ بنابراین: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$

۶۵- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1 + \ln x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(1 + \ln x)}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$

۶۶- گزینه «۲» $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{nx+1} = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f$ در $x=0$ ناپیوسته

۶۷- گزینه «۱»

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \times 2 + 2 = 14$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5 \times 2 + k = 10 + k$
 $\Rightarrow 10 + k = 14 \Rightarrow k = 4$

۶۸- گزینه «۱» نکته (۱۷) در متن درس (قانون رشد توابع)

۶۹- گزینه «۲» $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e}{n} = \frac{1}{e}$

۷۰- گزینه «۱» تابع $h(x) = f(x) - g(x)$ را در نظر بگیرید، طبق شرایط گزینه (۱)، $h(b) > 0, h(a) < 0$ ، پس طبق قضیه مقدار میانی حداقل یک نقطه مانند c بین a و b وجود دارد به طوری که $h(c) = 0$ یعنی $f(c) = g(c)$.

۷۱- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1 + \ln x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(1 + \ln x)}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$

۷۲- گزینه «۲» وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sim \frac{e^x}{2}$ بنابراین:

$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln \cosh x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln \frac{e^x}{2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - x + \ln 2) = \ln 2$

۷۳- گزینه «۱» $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \frac{1}{x})^{x^2} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2(\cos \frac{1}{x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \frac{-(1/x)^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

۷۴- گزینه «۱» $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1+0}{+\infty} = 0$

۷۵- گزینه «۱»

توجه: در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ آنگاه: $f^{2n}(x) = x$ ، $f^{2n+1}(x) = f(x)$

چون تابع داده شده در شرط اخیر صدق می‌کند پس $f^{100}(x) = x$

۷۶- گزینه «۱» $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\Delta e^{-\Delta/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\Delta}{e^{\Delta/x}} = 0$

رشد e^x بیشتر از x^n است.

۷۷- گزینه «۲» واضح است که $|x| \neq 0$ یعنی $x \neq 0$. از طرفی برای اینکه $|x| + 1 \neq 0$ باشد باید عبارت $|x| + 1$ مقادیری بین صفر تا یک را اختیار نکند و چون عبارت $|x| + 1$ همواره بزرگتر از یک می‌باشد، پس $D_f = R - \{0\}$ ، واضح است که $D_f = R - \{0\}$ پس $D_f = D_g$.

۷۸- گزینه «۱» $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+10^x}{2-10^x} \xrightarrow{\text{رشد}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{10^x}{-10^x} = -1$

۷۹- گزینه «۴» $f(g(x)) = f(x^2 - 5) = \frac{1}{x^2 - 5 + 1} = \frac{1}{x^2 - 4}$

۸۰- گزینه «۳» $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \times \text{کراندار} = 0$

۸۱- گزینه «۳» $f(0) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ (صفر \times کراندار)

۸۲- گزینه «۲» از تغییر متغیر $t = \frac{\pi}{2} - x$ استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(\frac{\pi}{2} - t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$

۸۳- گزینه «۴» $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n^n}{n!})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n^n}{(\frac{n}{e})^n})^{\frac{1}{n}} = e$

۸۴- گزینه «۱» $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 1^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n(1+\frac{1}{n}-1)}{1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = e^0 = 1$

۸۵- گزینه «۴» $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\frac{1}{x}(1-2x-1)}{1-2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-2}{1-2x}} = e^{-2}$

۸۶- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که: $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x^{2k-1}] = [0^-] = -1$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x^{2k}] = [0^+] = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] + [x^2] + \dots + [x^{100}]) = -1 + 0 - 1 + \dots - 1 + 0 = -50$ بنابراین:

۸۷- گزینه «۳» قرار می‌دهیم $a_n = \sqrt[n]{e^{n-1}}$ ، در این صورت: $S_n = \frac{1 + \sqrt{e} + \sqrt[3]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^{n-1}}}{n} = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

پس حد فوق همان میانگین حسابی a_n ها می‌باشد و چون $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{n-1}} = e$

۸۸- گزینه «۴»

$$\left. \begin{aligned} f(-2^-) &= -2|[-2^-] + a = a - 6 \\ f(-2^+) &= -2| + [-2^+] = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6$$

۸۹- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}) \times \frac{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1}{2}$$

۹۰- گزینه «۳»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Arc tg } x = \text{Arc tg } \infty = \frac{\pi}{2}$$

۹۱- گزینه «۲» تابع f در نقاط ۱، ۲/۳، ۱/۳ ناپیوسته می باشد.

۹۲- گزینه «۱»

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{1+2x-1} = \frac{0^+}{1+2^0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{1+2x-1} = \frac{0^-}{1+2^0} = 0$$

۹۳- گزینه «۴» به حل تست ۲۳ رجوع کنید.

۹۴- گزینه «۱»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \left(\frac{x+c}{x-c} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \left(\frac{2c}{x-c}\right)} = e^{2c}$$

بنابراین:

$$e^{2c} = 9 \Rightarrow 2c = \ln 9 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \ln 9 \Rightarrow c = \ln 3$$

۹۵- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}(\cos \sqrt{x} - 1)} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \left(-\frac{x}{2}\right)} = e^{-\frac{1}{2}}$$

۹۶- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\text{tg } x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\text{tg } x (\sin x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\frac{\sin x - 1}{\cot g x}} \stackrel{\text{HOP}}{\sim} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\cos x}{1 + \cot g^2 x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\sin x}{-2(1 + \cot g^2 x)}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

۹۷- گزینه «۱»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F(1 - \frac{1}{n}) - F(2 + \frac{1}{n})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{n} - 1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{2n}\right) = -1$$

۹۸- گزینه «۳»

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{\text{tg } x}{x}\right) = 0 \end{aligned} \right.$$

ملاحظه می گردد که حد چپ و راست با هم برابر نیستند، پس تابع حد ندارد و بنابراین پیوسته نیز نمی باشد.

۹۹- گزینه «۱»

$$\text{tg } x - \sec x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x - 1}{\cos x}$$

تابع فوق در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ در تمام نقاط بجز $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است و لذا برای اینکه در $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد، باید حد چپ و راست تابع در این نقطه با مقدار تابع برابر باشد:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{\sin x - 1}{\cos x} \stackrel{\text{HOP}}{\sim} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{\cos x}{-\sin x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{\sin x - 1}{\cos x} \stackrel{\text{HOP}}{\sim} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{\cos x}{-\sin x} = 0$$

پس اگر $c = 0$ باشد آنگاه حد چپ و راست با مقدار تابع برابر خواهند بود.

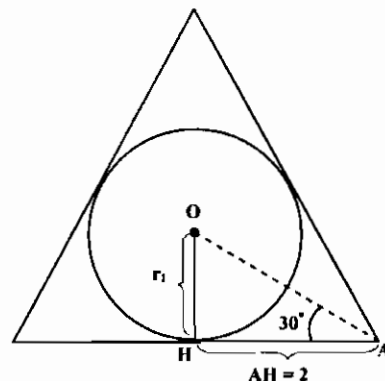
۱۰۰- گزینه «۴» با توجه به شکل مقابل $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ و $\text{OH} = r \text{tg } 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$ طول ضلع مثلث

دومی که درون دایره محاط می کنیم نصف مثلث اول می باشد و به همین ترتیب. بنابراین شعاع دایره ها نیز در هر مرحله نصف مرحله قبل خواهد بود، پس مساحت هر دایره در هر مرحله $\frac{1}{4}$ مرحله قبل می شود، در نتیجه سری هندسی داریم که قدر

نسبت آن برابر $\frac{1}{4}$ و جمله اول آن $S_1 = \pi \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4\pi}{3}$ است. بنابراین مجموع

$$S = \frac{S_1}{1 - q} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{16\pi}{9}$$

سری برابر است با:



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x) + \sin x}{1 - \cos x} \stackrel{\text{HOP}}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + \cos x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{1 - \sin x} = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{-n} \ln n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{r^n} = 0 \quad (\text{رشد صورت کمتر از مخرج می باشد})$$

۱۰۳- گزینه «۴» برای پیوستگی چنین توابعی لازم است دو ضابطه با هم برابر باشند: $x^2 = -2x + 2 \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, -2$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x - x}{x^2 \text{tg } x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{3}}{x^2 \cdot x} = \frac{1}{3} \quad (\text{از هم ارزی } \text{tg } u - u \sim \frac{u^3}{3} \text{ استفاده می کنیم } (u \rightarrow 0))$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{tg } x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} (\text{tg } x - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\text{tg } x - x}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}}$$

۱۰۵- گزینه «۱» صورت مبهم 1^∞ می باشد.

۱۰۶- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x)^{-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(e^x - x)^{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = e$$

۱۲۰- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{re^x - re^{-x} - 4x}{x - \sin x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{re^x + re^{-x} - 4}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{re^x - re^{-x}}{\sin x} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{re^x + re^{-x}}{\cos x} = 4$$

۱۲۱- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + rx)^{\frac{1}{rx}} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{rx} \ln(1+rx)} = e^{\frac{rx}{rx}} = e^1$$

۱۲۲- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(rx - r)^{r_0} (rx + r)^{r_0}}{(rx + 1)^{2r_0}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(rx)^{r_0} (rx)^{r_0}}{(rx)^{2r_0}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(rx)^{2r_0}}{(rx)^{2r_0}} = \left(\frac{r}{r}\right)^{2r_0}$$

۱۲۳- گزینه «۳»

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln x}{(x-1)\ln x} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{1}{x}(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

۱۲۴- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \left(\frac{x+c}{x-c} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{ycx}{x-c}} = e^{yc}$$

بنابراین $e^{yc} = 4$ و یا $yc = \ln 4$ بنابراین $c = \ln 2$.

۱۲۵- گزینه «۲»

مجانبهای قائم $x^r - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ ، $\frac{x^r}{\sqrt{x^r - 1}} \sim \frac{x^r}{|x|} = \pm x$ ، بنابراین $y = x + x = 2x$ و $y = x - x = 0$ نیز مجانبهای تابع می‌باشند.

۱۰۷- گزینه «۱»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \left(\frac{x-1}{x+1} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x} = e^{-2}$$

۱۰۸- گزینه «۳»

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{rx})^{\frac{1}{x}} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(x + e^{rx})} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{re^{rx} + 1}{1} = e^r$$

۱۰۹- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x + \frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{2} \frac{x^2}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{e}$$

۱۱۰- گزینه «۲» عبارت مقابل th^{-1} بایستی بین -1 و 1 باشد. بنابراین:

$$-1 < \text{tg} \pi x < 1 \Rightarrow k\pi - \frac{\pi}{4} < \pi x < k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow k - \frac{1}{4} < x < k + \frac{1}{4}$$

۱۱۱- گزینه «۴»

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^{x-1} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 1} e^{(x-1) \ln x} = e$$

۱۱۲- گزینه «۱» به ازای $n > m$ ، همواره $\binom{m}{n} = 0$ بنابراین حد خواسته شده برابر صفر است.

۱۱۳- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{rx+1}{rx-1}\right)^x = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \left(\frac{rx+1}{rx-1} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x}{rx-1}} = e^{\frac{2}{r}}$$

۱۱۴- گزینه «۳»

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x - [x]|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x - [0^+]|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x - [x]|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x - [0^-]|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x+1|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

۱۱۵- گزینه «۱»

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} (1 - (t-1)A)^{\frac{1}{t-1}} = 1^\infty = \lim_{t \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{t-1} \ln(1 - (t-1)A)} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{-A}{1} = e^{-A}$$

۱۱۶- گزینه «۴»

$$f(r) = \lim_{x \rightarrow r} f(x) = \lim_{x \rightarrow r} \left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{1}{x-r}} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow r} e^{\frac{1}{x-r} \ln \left(\frac{x}{r}\right)} = \lim_{x \rightarrow r} e^{\frac{1}{x-r} \left(\frac{x-r}{r}\right)} = \sqrt[2]{e}$$

۱۱۷- گزینه «۳»

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+r}-r} = \frac{0}{0} \stackrel{HOP}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{2x}{\sqrt{x^2+r}}} = r$$

۱۱۸- گزینه «۱»

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^r - 1)}{x^r - 1} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^r - 1}{x^r - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^r + 1) = 2$$

۱۱۹- گزینه «۳»

تست‌های تکمیلی فصل دوم

۱- حاصل حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x| + |2x| + \dots + |nx|}{n^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{x}{2}$
- (۲) ۱
- (۳) ۰
- (۴) $\frac{x^2}{2}$

۲- در کدامیک از فاصله‌های زیر تابع $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \ln(x-1)$ پیوسته است؟

- (۱) $(-2, 2]$
- (۲) $[0, 2]$
- (۳) $(1, 2]$
- (۴) $[1, 2]$

۳- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{1-x^2} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ پیوسته است؟

- (۱) -۳
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) $-\frac{2}{3}$
- (۴) $-\frac{2}{2}$

۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3} \right)^{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) $+\infty$
- (۳) $-\infty$
- (۴) ۰

۵- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{n} \cos n^2 - \frac{2n}{6n+1}$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $-\frac{1}{2}$

۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ∞

۷- حد عبارت $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x$ کدام است؟

- (۱) ∞
- (۲) ۱
- (۳) -۱
- (۴) ۰

۸- هم‌ارز عبارت $\sqrt{1+x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

- (۱) $1 - \frac{1}{2}x$
- (۲) $1 - \frac{1}{3}x$
- (۳) $1 + \frac{1}{3}x$
- (۴) $1 + \frac{1}{2}x$

۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ کدام است؟

- (۱) ∞
- (۲) صفر
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) π

۱۰- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{k \sin ax} = \frac{1}{4}$ آنگاه مقدار ak کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) ۲
- (۴) ۱

۱۱- مقدار $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^2 - 4}{x + 2} \operatorname{sgn}(x + 2)$ کدام است؟

- (۱) ۴
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۱

۱۲- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2}}}$ برابر است با:

- (۱) صفر
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۱
- (۴) $+\infty$

۱۳- به ازای چه مقادیری از a تابع $f(x) = \frac{1}{ax^2 + 3x + 1}$ روی R پیوسته است؟

- (۱) $a < \frac{9}{4}$
- (۲) $a \leq \frac{9}{4}$
- (۳) $\frac{9}{4} < a$
- (۴) $\frac{9}{4} \leq a$

۱۴- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cot gx}{x} \right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) $-\frac{1}{3}$

۱۵- حاصل $A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + x + 4}{x + 2} \right)^{\frac{\sin x}{2x}}$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) $\sqrt{2}$

۱۶- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{6n+3} + \sqrt[n]{n^4})$ کدام است؟

- (۱) ۶
- (۲) ۲
- (۳) ∞
- (۴) ۳

۱۷- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n^2]{n^2 - n^2} + n)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $-\infty$
- (۳) ۰
- (۴) $-\frac{1}{3}$

۱۸- مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$ کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) -۲
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۱۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{3^x - 1}$ کدام است؟

- (۱) $\ln 3$
- (۲) ۰
- (۳) $\frac{1}{\ln 3}$
- (۴) ∞

۲۰- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{a}$
- (۲) $-a$
- (۳) ۰
- (۴) ۱

۲۱- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot gx}$ کدام است؟

- (۱) e^2
- (۲) ۰
- (۳) e
- (۴) $\frac{1}{e}$

۲۲- مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}$ کدام است؟

- (۱) -۲۴
- (۲) ۲۴
- (۳) ۰
- (۴) ۱

۲۳- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) ۲
- (۳) $\sqrt{2}$
- (۴) $\frac{1}{2}$

۲۴- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{\sin 4x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
- (۲) ۲
- (۳) $\frac{1}{8}$
- (۴) ۰

۲۵- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos 2x)}{\ln^2(\sin 2x + 1)}$ کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۰
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{2}{9}$

۲۶- نقاط انفصال تابع با ضابطه $f(x) = \arccos \frac{1}{\sin x}$ کدام است؟

- (۱) $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ (۲) $x \neq 2n\pi$ (۳) $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ (۴) $x = 2n\pi$

۲۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) 0 (۳) 1 (۴) -1

۲۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln \cot x)^{\tan x}$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) ∞ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

۲۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} (a^x - 1)x$ کدام است؟ ($a > 0$)

- (۱) $\ln a$ (۲) 0 (۳) $-\infty$ (۴) e^{-a}

۳۰- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) $-\frac{1}{12}$ (۴) $-\frac{1}{24}$

۳۱- معادله $f(x) = 2x - \arccos \frac{1}{x}$ معادله $y = 2x + \frac{\pi}{2}$ معادله $y = x + \frac{\pi}{2}$ معادله $y = 2x - \frac{\pi}{2}$ معادله $y = x - \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

- (۱) $y = 2x + \frac{\pi}{2}$ (۲) $y = x + \frac{\pi}{2}$ (۳) $y = 2x - \frac{\pi}{2}$ (۴) $y = x - \frac{\pi}{2}$

۳۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \log_a \left| \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} \right|$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 6 (۳) $\log_a 6$ (۴) $\log_a^2 6$

۳۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) 1 (۳) ∞ (۴) 0

۳۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) 1 (۳) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (۴) 0

۳۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}}{1+\sin x}$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 0 (۳) ∞ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$ کدام است؟

- (۱) $e^{\cot a}$ (۲) 1 (۳) e^a (۴) 0

۳۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-2x}{\sqrt{1+8x^2}} + 2^{-x^2} \right)$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) 0 (۴) حد ندارد.

۳۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\tan 2x}$ کدام است؟

- (۱) $e^{\frac{1}{2}}$ (۲) 1 (۳) $e^{-\frac{1}{2}}$ (۴) e

۳۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\tan x}$ کدام است؟

- (۱) e (۲) 1 (۳) e^{-1} (۴) $\frac{1}{e^2}$

۴۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \ln(1+a \sin x)$ کدام است؟

- (۱) a (۲) 1 (۳) 0 (۴) ∞

۴۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{x} \ln(1+3x)}{(\arctan \sqrt{x})^2 (e^{5\sqrt{x}} - 1)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) 0 (۳) 1 (۴) $\frac{5}{3}$

۴۲- منحنی تابع $y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}$ دارای ... است.

- (۱) دو مجانب افقی (۲) دو مجانب افقی و یک مایل (۳) یک مجانب افقی و یک مایل (۴) دو مجانب افقی و یک قائم

۴۳- حد چپ تابع $f(x) = \frac{(3-[x])\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ در نقطه $x=3$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) -1 (۳) 1 (۴) $-\infty$

۴۴- در مورد تابع $f(x) = 3 + \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$ وقتی $x \rightarrow 3$ کدام گزاره صحیح است؟

- (۱) حد چپ تابع برابر ۴ می باشد. (۲) تابع دارای حد چپ و راست مساوی می باشد. (۳) حد راست تابع برابر ۳ می باشد. (۴) تابع پیوسته نیست.

۴۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{\ln \cos(2x^2 - x)}$ کدام است؟

- (۱) 6 (۲) 0 (۳) -6 (۴) 1

۴۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} |\ln(1+\sin^2 x) \cot(\ln^2(1+x))|$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) -1 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

۴۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cot x}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

۴۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)e^{\sin x}}$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) ∞ (۳) حد وجود ندارد. (۴) 1

۴۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 1 (۳) e (۴) $\frac{1}{e}$

۵۰. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - x}{\ln x}$ کدام است؟

- (۱) $\ln a - 1$ (۲) $\ln a + 1$

۵۱. معادله‌های مایل تابع $y = \sqrt{1+x^2} + 2x$ کدام است؟
 (۱) $y = x, y = 2x$ (۲) فقط $y = 2x$

۵۲. معادله‌های مایل تابع $y = \frac{2x}{3} \ln(e - \frac{1}{3x})$ کدام است؟
 (۱) $y = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3e}$ (۲) $y = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3e}$

۵۳. معادله‌های مایل تابع $y = x \arctg x$ کدام است؟
 (۱) فقط $y = \frac{\pi}{3}x - 1$ (۲) فقط $y = -\frac{\pi}{3}x - 1$

۵۴. در مورد تابع $y = \ln(4 - x^2)$ کدام گزاره صحیح است؟
 (۱) تابع معادله ندارد (۲) تابع دارای دو معادله است

۵۵. معادله‌های مایل تابع $y = x + \frac{\sin x}{x}$ کدام است؟
 (۱) $y = -x$ (۲) $y = -x + 1$

۵۶. حاصل حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ کدام است؟
 (۱) ۰ (۲) ۱

۵۷. معادله $x^2 - 1 = 0$ در فاصله $[0, 1]$ چند ریشه دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲

۵۸. مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} - 1}{2 \arctg x^2 - \pi}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$

۵۹. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1 + \sin^2 x) \cot \ln^2(1+x)]$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ∞

۶۰. مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} |x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})|$ کدام است؟
 (۱) ۰ (۲) ۲

۶۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^2}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲

۶۲. تابع $y = xe^x$ چند معادله دارد؟
 (۱) ۰ (۲) ۱

۶۳. تابع $y = \sqrt{x^2+1} \sin \frac{1}{x}$ چند معادله دارد؟
 (۱) ۰ (۲) ۱

- (۳) a (۴) $a+1$

(۳) فقط $y = x$ (۴) $y = 2x, y = -x$

(۳) $y = \frac{2x}{3}$ (۴) $y = 2x - e$

(۲) هر دو گزینه ۱ و ۲ (۴) معادله مایل ندارد

(۲) تابع دارای سه معادله است (۴) تابع دارای یک معادله است

(۳) $y = x$ (۴) $y = x + 1$

(۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) حد وجود ندارد.

(۲) بیشمار (۴) ۰

(۳) ۰ (۴) ∞

(۲) ∞ (۴) ۲

(۳) -۲ (۴) $\frac{1}{2}$

(۲) ۰ (۴) $\frac{1}{3}$

(۳) ۲ (۴) ۳

(۳) ۲ (۴) ۳

۶۴. مقدار حد $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x^2| - x^2}{|x| - x}$ برابر است با:

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۱۰

۶۵. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cosh x^2 + \sinh x^2)^{\frac{1}{x^2}}$ کدام است؟
 (۱) e (۲) e^2 (۳) $2e$ (۴) $\frac{e}{2}$

۶۶. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right|$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۰

۶۷. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{-x}{\sin x} \right|$ کدام است؟
 (۱) ۰ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) حد وجود ندارد.

۶۸. حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x| + |x^2| + \dots + |x^n|}{x^n}$ با فرض $x > 1$ ، کدام است؟
 (۱) $\frac{x}{x+1}$ (۲) $\frac{x}{x-1}$ (۳) $\frac{x(x+1)}{2}$ (۴) $\frac{x(x-1)}{2}$

۶۹. اگر x عددی گنگ باشد، حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos n! \pi x)^m \}$ ؟
 (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) حد وجود ندارد.

۷۰. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$ کدام است؟
 (۱) $\frac{m-n}{mn}$ (۲) $\frac{mn}{m-n}$ (۳) $\frac{m-n}{2}$ (۴) $\frac{n-m}{2}$

۷۱. اگر $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و یک به یک و $f(0) < f(1)$ ، آنگاه به ازای $0 < x < 1$:
 (۱) $f(x) > f(1)$ (۲) $f(x) < f(1)$ (۳) $f(x) < f(0)$ (۴) $f(x) > f(0)$

۷۲. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x + \frac{1}{x}|}{x}$ کدام است؟
 (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) موجود نیست. (۴) ۲

۷۳. اگر $f(x) = \ln x$ ، حاصل $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\sqrt{m+n}) - f(\sqrt{m}) - f(\sqrt{n}) + f(1)}{mn}$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) ۱

۷۴. تابع $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x = \frac{m}{n} \end{cases}$ در $(0, 1)$ مفروض است، این تابع در کجا پیوسته است؟
 (۱) تنها در اعداد اصم (۲) تنها در اعداد گویا (۳) تنها در صفر (۴) \emptyset

۷۵. اگر $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ پیوسته باشد، کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟
 (۱) $f(x) - x = 0$ حداقل یک ریشه در $[a, b]$ دارد. (۲) $f(x) - x = 0$ حداکثر یک ریشه در $[a, b]$ دارد.
 (۳) $f(x) - x = 0$ در $[a, b]$ ریشه ندارد. (۴) $f(x) - x = 0$ بیشمار ریشه در $[a, b]$ دارد.

۷۶. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+x)}{x}$ برابر است با:
 (۱) $\log_3 e$ (۲) $\log_3 c$ (۳) ۱ (۴) ۰

۷۷- حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!}$ برابر است با:

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ∞ (۴) حد وجود ندارد.

۷۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{e}$ (۲) $\frac{1}{e}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (۴) e

۷۹- اگر تابع f زوج و g فرد، تابع $(f(x))^{g(x)}$ در $x=0$ پیوسته باشد. آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^{g(x)}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) e

۸۰- حد عبارت $(e^x - x)^{\frac{1}{x}}$ وقتی $x \rightarrow 0$ برابر کدام است؟

- (۱) e^2 (۲) ۲ (۳) \sqrt{e} (۴) $\frac{1}{2}$

۸۱- تعداد نقاط گسستگی تابع $f(x) = \frac{x}{1 - e^{ix}}$ و $f(0) = -1$ در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۲- اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، کدامیک از روابط زیر وجود لاکر یک ریشه را برای f تضمین می‌کند؟

- (۱) $f(a), f(b) < 0$ (۲) $f(a) > 0, f(b) < 0$ (۳) $f(a), f(b) > 0$ (۴) هیچکدام

۸۳- اگر $f(x) = x^2 + 2^{-x}$ و $g(x) = x^2 - 2^{-x}$ ، نمودار تابع $(\frac{f}{g})(x)$ چند مجانب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۳

۸۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$:

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) \sqrt{e} (۴) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

۸۵- قسمت اصلی بی‌نهایت کوچک $y = \cos x - \sqrt{\cos x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ برابر است با:

- (۱) $-\frac{x^2}{3}$ (۲) $\frac{x^2}{3}$ (۳) $-\frac{x^2}{2}$ (۴) $\frac{x^2}{2}$

۸۶- تابع $f(x) = (x-1)|x|$ در فاصله $[0, 2]$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^x}$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) e (۴) ∞

۸۸- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right)$ کدام است؟

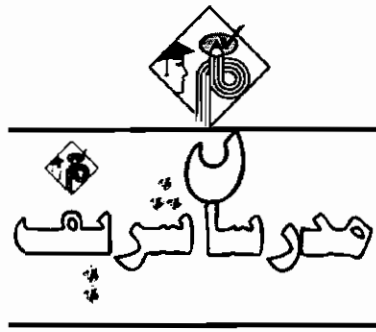
- (۱) ۱ (۲) e (۳) ۰ (۴) ∞

۸۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) e (۳) $\frac{1}{e}$ (۴) e^2

۹۰- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $y = |\sin^2 x|$ در فاصله $(-2, 2)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



فصل سوم

« مشتق و کاربرد مشتق »

تعریف مشتق در یک نقطه

فرض می‌کنیم تابع $y = f(x)$ روی فاصله (a, b) معین و در نقطه $x_0 \in (a, b)$ پیوسته باشد، تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر است اگر حد زیر وجود داشته باشد، این حد را که با $f'(x_0)$ نمایش می‌دهیم، مشتق تابع $f(x)$ در نقطه x_0 است.

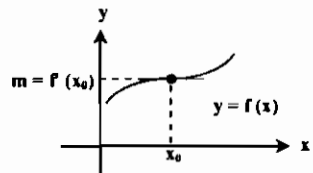
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

عبارت بالا را بصورت زیر نیز نشان می‌دهند:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2)$$

تعبیر هندسی مشتق:

اگر $M(x_0, f(x_0))$ یک نقطه روی منحنی $y = f(x)$ باشد، در این صورت $m = f'(x_0)$ ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه x_0 می‌باشد و معادله خط مماس بصورت $y - y_0 = m(x - x_0)$ است.



تذکره: در محاسبه بعضی حدود می‌توان با استفاده از تعریف مشتق حد را محاسبه کرد و معمولاً در اینگونه مسائل و یا در مواقعی که محاسبه مشتق از روی فرمولها ممکن نباشد از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

مثال ۱: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{6}) - \cos(\frac{\pi}{6})}{x}$ برابر است با:

- (۱) $-\frac{1}{x^2+1}$ (۲) $\frac{1}{x^2+1}$ (۳) $+\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به تعریف مشتق حد فوق، مشتق تابع $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$ در نقطه $x_0 = 0$ می‌باشد لذا داریم:

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow f'(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow f'(0) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

مثال ۲: مقدار $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctg}(x+h) - \operatorname{Arctg}x}{h}$ برابر است با:

- (۱) $-\frac{1}{x^2+1}$ (۲) $\frac{1}{x^2+1}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به تعریف مشتق حد فوق، مشتق تابع $f(x) = \operatorname{Arctg}x$ در نقطه $x_0 = x$ می‌باشد، لذا داریم:

$$A = f'(x) = (\operatorname{Arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

محبت نردبان رفعت است. محبت را فراموش نکنید و آن را ناچیز شمارید.

«حضرت علی (ع)»
«افلاطون»

که مثال ۳: اگر $f(x) = x \operatorname{tg} x$ باشد مقدار حد $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}}$ کدام است؟

- (۱) $1 - \frac{\pi}{4}$ (۲) $1 + \frac{\pi}{4}$ (۳) $1 + \frac{\pi}{2}$ (۴) $1 + \frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» عبارت حد فوق در واقع تعریف مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ است:

$$f(x) = x \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{tg} x + (1 + \operatorname{tg}^2 x)x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4}) \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\pi}{2}$$

تذکر ۲: اگر $a, b \in \mathbb{R}$ باشند و تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد، داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ah) - f(x_0 + bh)}{b} = (a - b)f'(x_0)$$

تذکر ۳: وجود حد فوق، مشتق پذیری f را در x_0 نتیجه نمی دهد.

که مثال ۴: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ باشد، آنگاه مقدار $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) 2

پاسخ: گزینه «۲» در این تست $a = 3$ و $b = -1$ می باشد:

$$a - b = 3 - (-1) = 4 \Rightarrow A = 4f'(2), f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow A = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

توضیح: البته با استفاده از قاعده هویتال نیز حدود فوق قابل محاسبه هستند.

مشتق چپ و راست

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

الف) تابع f در $x = x_0$ مشتق راست دارد هرگاه حد مقابل وجود داشته باشد:

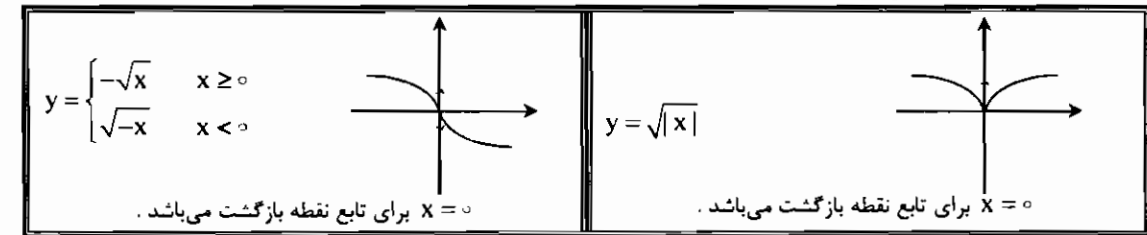
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ب) تابع f در $x = x_0$ مشتق چپ دارد هرگاه حد مقابل وجود داشته باشد:

اگر تابعی در یک نقطه مانند x_0 دارای مشتق راست و چپ بوده و این دو مشتق با هم مساوی باشند، گوئیم تابع در نقطه x_0 دارای مشتق است (عکس قضیه فوق نیز صادق است.)

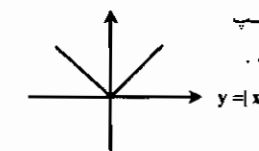
$$f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$$

نقطه بازگشت: هرگاه تابع f در نقطه x_0 پیوسته و مشتقات چپ و راست در x_0 نامتناهی ($-\infty$ یا $+\infty$) و با علامت مخالف باشند، نقطه‌ای بطول x_0 را یک نقطه بازگشت تابع می گوئیم، در این نقطه دو نیم مماس چپ و راست برهم منطبق و موازی محور Y ها می باشند.



تذکر ۴: اگر هر دو مشتق چپ و راست برابر $+\infty$ یا $-\infty$ (یا هر دو مشتق هم علامت باشند) گردد آنگاه نقطه x_0 متعلق به دامنه نقطه عطف تابع خواهد بود.

نقطه زاویه دار: تفاوت بین نقطه زاویه دار و نقطه بازگشت در این است که در این نقطه حداقل یکی از مشتقات چپ و راست متناهی است، در هر صورت در این نقاط وجود مشتق چپ و راست متناهی، با هم برابر نمی باشند.



برای مثال نقطه $x = 0$ نقطه زاویه دار تابع $y = |x|$ می باشد.

رابطه بین مشتق و پیوستگی

اگر تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = x_0$ دارای مشتق متناهی باشد، آنگاه $f(x)$ در x_0 پیوسته است. البته پیوستگی در یک نقطه شرط لازم برای مشتق پذیری در آن نقطه است ولی شرط کافی نمی باشد، بعبارت دیگر عکس قضیه فوق صادق نمی باشد، یعنی اگر تابعی در نقطه x_0 پیوسته باشد، دلیل بر مشتق پذیری تابع در نقطه x_0 نخواهد بود. برای مثال تابع $y = |x|$ در $x = 0$ پیوسته است ولی در این نقطه مشتق پذیر نیست.

که مثال ۵: در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x+a, & x \leq 1 \\ b\sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است، مقدار $\frac{2b-a}{2}$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۰

پاسخ: گزینه «۲» چون تابع در نقطه $x=1$ مشتق پذیر است لذا پیوسته نیز خواهد بود در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow 1+a = b \quad (1)$$

و چون تابع در این نقطه مشتق پذیر است لذا مشتق چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابرند لذا خواهیم داشت:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ \frac{b}{2\sqrt{x}}, & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{2} = 1 \Rightarrow b = 2 \xrightarrow{(1)} a = 2 \Rightarrow \frac{2b-a}{2} = 2$$

که مثال ۶: تابع $f(x) = \begin{cases} \ln(1+e^{\frac{1}{x}}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته و مشتق پذیر است.

(۲) نه پیوسته و نه مشتق پذیر است.

(۳) پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.

(۴) پیوسته نیست ولی مشتق پذیر است.

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا پیوستگی f را در $x=0$ بررسی می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+e^{\frac{1}{x}}) = \ln(1+e^{-\infty}) = \ln 1 = 0, f(0) = 0$$

بنابراین f در $x=0$ پیوسته است. حال مشتق پذیری f را در $x=0$ به کمک تعریف مشتق بررسی می کنیم:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}{x} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$$

پس f در $x=0$ مشتق پذیر نیز می باشد.

رابطه بین مشتق چپ یا راست و پیوستگی تابع مشتق:

اگر حد $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ وجود داشته باشد، آنگاه $f'(x_0^+)$ وجود دارد و $f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ است در این صورت می گوئیم تابع مشتق راست

متناهی یا نامتناهی در x_0 دارد در نتیجه دارای پیوستگی راست نیز می باشد (تابع مشتق) و اگر حد $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ وجود داشته باشد

آنگاه $f'(x_0^-)$ وجود دارد و گوئیم تابع، دارای مشتق چپ متناهی یا نامتناهی است و تابع مشتق دارای پیوستگی چپ است.

که مثال ۷: پیوستگی و مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ را بررسی کنید.

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه $x=0$ بررسی می کنیم، توجه شود حد چپ و حد راست هر دو از ضابطه اول تابع محاسبه می شوند:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0 \times \sin(\frac{1}{0^+}) = 0 \times \sin \infty = 0$$

عددی بین ۱ و -۱

حد چپ تابع نیز دقیقاً با مقدار فوق و همچنین با مقدار تابع یعنی $f(0)$ برابر می باشد، پس تابع در نقطه $x=0$ پیوسته است، حال مشتق پذیری

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

تابع را در نقطه $x=0$ بررسی می کنیم:

ملاحظه می گردد که مقدار حد فوق عدد مشخصی نیست، پس تابع در نقطه $x=0$ مشتق پذیر نیست.

مثال ۸: در مورد تابع $f(x) = \begin{cases} x^r \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ کدام جمله صحیح نیست؟

- (۱) تابع در نقطه $x_0 = 0$ پیوستگی دارد.
- (۲) مقدار تابع مشتق در $x_0 = 0$ مشخص است.
- (۳) نقطه $x_0 = 0$ نقطه بازگشت نیست.
- (۴) تابع مشتق در صفر پیوسته می‌باشد.

پاسخ: گزینه «۴»

حد چپ تابع فوق نیز با حد راست و با مقدار تابع برابر صفر می‌باشد، پس تابع در نقطه $x = 0$ پیوستگی دارد. (گزینه ۱ صحیح است).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \sin \frac{1}{x} = 0 \times \underbrace{\sin(\infty)}_{-1 < \text{عدد} < 1} = 0$$

مقدار مشتق تابع فوق در نقطه $x_0 = 0$ برابر صفر است لذا $x_0 = 0$ نقطه بازگشت تابع نیز نمی‌تواند باشد. (گزینه‌های ۲ و ۳ صحیح هستند).

$$f'(x) = \begin{cases} rx \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

لذا گزینه ۴ پاسخ مورد نظر است به راحتی ملاحظه می‌گردد مطابق مسئله قبل مقادیر حدود چپ و راست تابع مشتق مشخص نیست و لذا تابع مشتق در نقطه $x_0 = 0$ پیوسته نیست.

نکته ۱: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^n \sin^m \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در نظر بگیرید به ازای هر عدد طبیعی m و n شرایط زیر را خواهیم داشت:

- ۱- تابع به ازای تمام مقادیر m و n در تمام نقاط پیوسته است.
- ۲- به ازای تمام مقادیر m در صورتی که $n \geq 2$ تابع در کلیه نقاط مشتق داشته و مشتق آن در نقطه $x = 0$ برابر صفر است.
- ۳- به ازای تمام مقادیر m در صورتی که $n < 2$ باشد تابع در کلیه نقاط به جز نقطه $x = 0$ مشتق پذیر می‌باشد و تابع مشتق آن در صفر ناپیوسته است.
- ۴- به ازای تمام مقادیر m در صورتی که $n \geq 3$ باشد تابع در کلیه نقاط مشتق پذیر بوده و همچنین تابع مشتق نیز پیوسته می‌باشد.

مثال ۹: در تابع $f(x) = \begin{cases} x^r \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در همه جا مشتق پذیر است.

- (۱) در همه جا مشتق پذیر است.
- (۲) در صفر پیوسته نیست.
- (۳) در همه جا پیوسته است ولی در صفر مشتق پذیر نیست.
- (۴) در صفر مشتق پذیر و $f'(0) = 1$ است.

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به بند ۲ نکته فوق ($n = 2$) تابع در کلیه نقاط مشتق پذیر می‌باشد.

قواعد مشتق گیری

به مثالهای زیر توجه کنید:

- ۱) $y = x \Rightarrow y' = 1$
- ۲) $y = x^r \Rightarrow y' = rx^{r-1}$
- ۳) $y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$
- $y = c \Rightarrow y' = 0 \quad (c \in R)$

C عدد ثابت است و مشتق عدد ثابت همواره برابر صفر است.

خلاصه قواعد مشتق گیری: (در توابع زیر u, v توابعی مشتق پذیر بر حسب x است)

مشتق مثال مربوطه	مثال مربوطه	مشتق تابع در حالت کلی	تابع در حالت کلی
$y' = 4(\Delta x^2 + 3x + 1)^2 (10x + 3)$	$y = (\Delta x^2 + 3x + 1)^2$	$y' = nu^{n-1} \cdot u'$	$y = u^n$
$y' = \frac{5}{6} x^{-\frac{1}{6}} = \frac{5}{6 \cdot \sqrt[6]{x}}$	$y = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$	$y' = \frac{mu'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$y = \sqrt[n]{u^m}$

$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$	$y = \sin x^r$	$y' = rx \cos x^r$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \cos rx$	$y' = -r \sin rx$
$y = \operatorname{tg} u$	$y' = u'(1 + \operatorname{tg}^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$y = \operatorname{tg} x^r$	$y' = (rx)(1 + \operatorname{tg}^2 x^r)$
$y = \operatorname{cot} gu$	$y' = -u'(1 + \operatorname{cot}^2 gu) = -\frac{u'}{\sin^2 u}$	$y = \operatorname{cot} grx$	$y' = -r(1 + \operatorname{cot}^2 grx)$
$y = e^u$	$y' = u' \cdot e^u$	$y = -re^{x^r-1}$	$y' = -r(rx)e^{x^r-1} = -rx e^{x^r-1}$
$y = a^u$	$y' = u' \cdot a^u \cdot \operatorname{Lna}$ ($a > 0$)	$y = r^{\operatorname{tg} x}$	$y' = (1 + \operatorname{tg}^2 x)(r^{\operatorname{tg} x}) \operatorname{Ln} r$
$y = \operatorname{Log}_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \operatorname{Log}_a e$ ($u > 0$)	$y = \operatorname{Log}_r x$	$y' = \frac{1}{x} \operatorname{Log}_r e$
$y = \operatorname{Lnu}$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = \operatorname{Lncos} x$	$y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$
$y = \operatorname{ArcSin} u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad u < 1$	$y = \operatorname{ArcSin} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{ArcCos} u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \operatorname{Arccos} x^r$	$y' = \frac{-rx}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{Arctg} u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$	$y = \operatorname{Arctg}(x^r - 1)$	$y' = \frac{rx}{1+(x^r-1)^2}$
$y = \operatorname{Arc cot} gu$	$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$	$y = \operatorname{Arc cot} g\sqrt{x}$	$y' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{2\sqrt{x}(1+x)}$
$y = \sinh u$	$y' = u' \cosh u$	$y = \sinh \Delta x$	$y' = \Delta \cosh \Delta x$
$y = \cosh u$	$y' = u' \sinh u$	$y = \cosh \frac{x^r}{r}$	$y' = x^{r-1} \cdot \sinh \frac{x^r}{r}$
$y = \operatorname{tgh} u$	$y' = u'(1 - \operatorname{tgh}^2 u)$	$y = \operatorname{tgh} rx$	$y' = r(1 - \operatorname{tgh}^2 rx)$
$y = \operatorname{cot} gh u$	$y' = u'(1 - \operatorname{cot}^2 gh^2 u)$	$y = \operatorname{cot} gh x^r$	$y' = rx(1 - \operatorname{cot}^2 gh^2 x^r)$
$y' = \operatorname{Arcsinh} u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	$y = \operatorname{arcsinh} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$y = \operatorname{Arccosh} x$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$y = \operatorname{arc cosh} x^r$	$y' = \frac{rx}{\sqrt{x^2-1}}$
$y = \operatorname{Arctgh} u$ ($ u > 1$)	$y' = \frac{u'}{1-u^2}$	$y = \operatorname{Arctgh} rx$	$y' = \frac{r}{1-9x^2}$
$y = \operatorname{Arccot} gh u$ ($ u < 1$)	$y' = \frac{u'}{1-u^2}$	$y = \operatorname{Arccot} gh x^r$	$y' = \frac{rx^r}{1-x^2}$
$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + v' \cdot u$	$y = x \cos x$	$y' = \cos x - x \sin x$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$	$y = \frac{e^x}{x^r}$	$y' = \frac{e^x \cdot x^r - rx^r \cdot e^x}{x^{2r}}$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = \operatorname{tg} x - (x-1)$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x - 1 = \operatorname{tg}^2 x$

توضیح: مثالهای بالا با استفاده از قواعد، مستقیماً بدست آمد در نتیجه اکثر روابط بالا باید به خاطر سپرده شود، در بعضی موارد می‌توان با استفاده از تلفیق روابط و نکات دیگر مشتق را محاسبه نمود، به مثالهای زیر توجه کنید:

- ۱) $y = \sin^r x \Rightarrow y' = (r \sin^r x)(\cos x)$
 ۲) $y = (\ln x)^r \Rightarrow y' = (r \ln x) \left(\frac{1}{x}\right)$
 ۳) $y = \ln(\sin x) \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$
 ۴) $y = \sin(e^x) \Rightarrow y' = e^x \cdot \cos e^x$
 ۵) $y = \operatorname{tg}^r x \Rightarrow y' = (r \operatorname{tg}^r x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)$
 ۶) $y = \operatorname{Arctg}(\sin x) \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$
 ۷) $y = \sqrt{\cos x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2} \sin x \cdot \sqrt{\cos x}$
 ۸) $y = \sin^r(\operatorname{Arctg} x) \Rightarrow y' = r \sin^r(\operatorname{Arctg} x) \frac{\cos(\operatorname{Arctg} x)}{1 + x^2}$
 ۹) $y = \sqrt{\sin(e^x)} \Rightarrow y' = \frac{r \cdot e^{rx} \cdot \cos(e^{rx})}{r \sqrt{\sin(e^{rx})}}$
 ۱۰) $y = \ln^r \operatorname{tg}^r x \Rightarrow y' = \Delta \ln^r(\operatorname{tg}^r x) \times \frac{r(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^r x} = \frac{r \Delta \ln^r(\operatorname{tg}^r x) [1 + \operatorname{tg}^2 x]}{\operatorname{tg}^r x}$
 ۱۱) $y = \arccos \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{1-x})}$
 ۱۲) $y = \sinh\left(\frac{x}{r}\right) + \cosh\left(\frac{x}{r}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{r}(\cosh \frac{x}{r} + \sinh \frac{x}{r})$
 ۱۳) $y = e^x(\cos x + \sin x) \Rightarrow y' = e^x(\cos x + \sin x) + (\cos x - \sin x)e^x = 2 \cos x e^x$
 ۱۴) $y = \sin^r \operatorname{fg} x \Rightarrow y' = r \sin^{r-1} \operatorname{fg} x \cos \operatorname{fg} x$
 ۱۵) $y = (r - 2 \sin x)^r \Rightarrow y' = \Delta(r - 2 \sin x)^r (-2 \cos x) = -2r \cos x (r - 2 \sin x)^{r-1}$

مثال ۱۰: مشتق $y = \sin^r\left(\frac{1}{r} \operatorname{Arccos} x^r\right)$ در $x = \frac{1}{r}$ کدام است؟

- ۱) -۲ ۲) $\frac{1}{r}$ ۳) $\frac{1}{r}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» اگر بخواهیم مستقیماً از تابع مشتق بگیریم، بسیار طولانی و وقت گیر خواهد بود. لذا ابتدا تابع را ساده می‌کنیم. بدین منظور از رابطه $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$y = \sin^2\left(\frac{1}{r} \operatorname{Arccos} x^r\right) = \frac{1 - \cos(\operatorname{Arccos} x^r)}{2} = \frac{1 - x^r}{2} \Rightarrow y' = -x \Rightarrow y'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-1}{r}$$

مشتق گیری توابع ضمنی

اگر y تابعی از x باشد و داشته باشیم $f(x, y) = 0$ آنگاه:

$$y'_x = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}$$

مشتق f نسبت به x با فرض y بعنوان عدد ثابت
 مشتق f نسبت به y با فرض x بعنوان عدد ثابت

به مثالهای زیر توجه کنید:

- ۱) $y - x^2 y + xy = 1 \Rightarrow y' = \frac{-(-2xy) + y}{1 - x^2 + x} = \frac{y - 2xy}{1 - x^2 + x}$
 ۲) $y + \sin(xy) + \cos(xy) = 0$

$$\begin{cases} f'_x = y \cos xy - y \sin xy \\ f'_y = 1 + x \cos xy - x \sin xy \end{cases} \Rightarrow y'_x = -\frac{y \cos xy - y \sin xy}{1 + x \cos xy - x \sin xy}$$

مثال ۱۱: با فرض اینکه y تابع x است مشتق تابع $\operatorname{Arctan} y - y + x = 0$ کدام است؟

- ۱) $y' = 1 + y^2$ ۲) $y' = 1 + y^{-2}$ ۳) $y' = 1 - y^{+2}$ ۴) $y' = 1 - y^{-2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$y' = -\frac{1}{\frac{1}{1+y^2} - 1} = \frac{-1}{\frac{-y^2}{1+y^2}} = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1 \Rightarrow y' = 1 + y^{-2}$$

مثال ۱۲: اگر $e^x - e^y - y + x = 0$ باشد، y''_{xx} را بدست آورید.

پاسخ: به جای استفاده از فرمول، مستقیماً از تابع داده شده نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$e^{x+y} + e^x - \left(\frac{e^x + 1}{e^y + 1}\right) \times e^y (e^x + 1) = \frac{e^{x+y} + e^x - (e^x + 1) \times e^y (e^x + 1)}{(e^y + 1)^2}$$

$$= \frac{(e^y + 1)(e^{x+y} + e^x) - e^y (e^x + 1)^2}{(e^y + 1)^2} = \frac{e^{x+2y} - e^{y+2x} + e^x - e^y}{(e^y + 1)^2}$$

مثال ۱۳: اگر $x^y = y^x$ ، آنگاه $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

- ۱) $\frac{y \ln x - x}{x \ln y - y}$ ۲) $\frac{y \ln y - y}{y \ln x - x}$ ۳) $\frac{(x \ln y - y)y}{(y \ln x - x)x}$ ۴) $\frac{(y \ln x - x)y}{(x \ln y - y)x}$

پاسخ: گزینه «۳» برای ساده شدن عمل مشتق گیری بهتر است ابتدا از طرفین رابطه \ln بگیریم.

$$y \ln x = x \ln y \Rightarrow y \ln x - x \ln y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\ln x - \frac{x}{y}} = \frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}$$

مشتق تابع $f[g(x)]$

$$(f[g(x)])' = g'(x) f'(g(x))$$

نکته ۲: در واقع رابطه بالا همان مشتق تابع $f \circ g(x)$ نیز می‌باشد.

تذکره ۵: دقت شود که مشتق بالا با $f'(g(x))$ اشتباه نشود.

مثال ۱۴: اگر $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و g در نقطه $x=2$ مشتق پذیر باشد، $(g \circ f)'(0)$ کدام است؟

- ۱) $f'(2)$ ۲) ۲ ۳) $g'(2)$ ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که:

$$(g \circ f)'(0) = f'(0)g'(f(0)) = f'(0)g'(2)$$

از طرفی $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ و بنابراین $f'(0) = 0$. در نتیجه $(g \circ f)'(0) = 0$.

مثال ۱۵: اگر $f \circ g(x) = x, f'(x) = \frac{1}{x}$ باشد، $g'(x)$ را حساب کنید؟

پاسخ:

$$[f(g(x))] = 1 \Rightarrow g'(x) \cdot f'(g(x)) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'[g(x)] = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow g'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = 1 \Rightarrow g'(x) = g(x)$$

مثال ۱۶: اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+2) - f(2)}{h} = -\frac{2}{3}$ باشد مقدار مشتق $f(\sqrt{1-3x})$ به ازای $x = -1$ کدام است؟

- ۱) -۲ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به تعریف مشتق حد فوق مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x=2$ می‌باشد و یا $f'(2) = -\frac{2}{3}$ لذا داریم:

$$f'(2) = -\frac{2}{3} \rightarrow A = [f(\sqrt{1-3x})]' = \frac{-2}{2\sqrt{1-3x}} f'(\sqrt{1-3x}) \xrightarrow{x=-1} A = \frac{-2}{2\sqrt{4}} f'(2) = \frac{-2}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

مثال ۱۷: اگر f بر R دو مرتبه مشتق پذیر باشد و $g(x) = f(xf(x))$ ، آنگاه $g''(0)$ کدام است؟

$(1) f''(0)(f(0))^2 + 2(f'(0))^2 f'(0)$
 $(2) 2(f''(0))f(0) + (f'(0))^2$
 $(3) f''(0)(f'(0))^2 + 2f'(0)$
 $(4) f''(0)(f(0))^2 + 2(f'(0))^2$

پاسخ: گزینه «۴»

$g(x) = f(xf(x)) \Rightarrow g'(x) = (f(x) + xf'(x))f'(xf(x))$
 $\Rightarrow g''(x) = (f'(x) + f''(x) + xf''(x))f'(xf(x)) + (f(x) + xf'(x)) \times (f'(x) + xf''(x))f''(xf(x))$
 $g''(0) = 2(f'(0))^2 + (f(0))^2 f''(0)$

با جایگزینی $x=0$ در رابطه اخیر نتیجه می‌شود:

مشتق توابع شامل قدر مطلق

$y = |u| \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot u}{|u|}$ (شرط $u \neq 0$)

مثال ۱۸: مشتق تابع $y = |x^2 - 2x|$ در نقطه‌ای به طول $x_0 = 1$ کدام است؟

$(1) 1$
 $(2) 2$
 $(3) -1$
 $(4) -2$

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول:

$y' = \frac{(2x^2 - 2)(x^2 - 2x)}{|x^2 - 2x|} = \frac{(2-2)(1-2)}{|1-2|} = \frac{0 \cdot (-1)}{|-1|} = -1$

روش دوم:

$y = |x^2 - 2x| \xrightarrow{x=1, y < 0} y = 2x - x^2 \Rightarrow y' = 2 - 2x = -1$

در این روش ابتدا با توجه به $x_0 = 1$ مقدار داخل قدر مطلق را تعیین علامت و از داخل قدر مطلق بیرون می‌آوریم و سپس عمل مشتق گیری را انجام دادیم. ملاحظه می‌شود که در مشتق گیری از توابع قدر مطلق مانند انتگرال گیری بهتر است که ابتدا علامت عبارت داخل قدر مطلق را معین کرده و سپس نماد قدر مطلق را حذف کنیم.

مثال ۱۹: مشتق تابع $y = |1-x| + |x+2|$ بر بازه $(-2, 1)$ کدام است؟

$(1) \text{ صفر}$
 $(2) 2$
 $(3) -2$
 $(4) \text{ مشتق ندارد}$

پاسخ: گزینه «۱»

$x \in (-2, 1) \Rightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow y = 1-x+x+2=3 \Rightarrow y' = 0$

مثال ۲۰: تابع $y = \left| \sin x + \frac{1}{2} \right| - |\sin x - 1|$ در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{2}$:

$(1) \text{ فقط مشتق چپ دارد}$
 $(2) \text{ فقط مشتق راست دارد}$
 $(3) \text{ مشتق پذیر نیست}$
 $(4) \text{ مشتق دارد}$

پاسخ: گزینه «۴»

$f(x) = \left(\sin x + \frac{1}{2} \right) - (1 - \sin x) = \sin x - \frac{1}{2} + \sin x = 2\sin x - \frac{1}{2} \Rightarrow y' = 2\cos x \Rightarrow y' \Big|_{\frac{\pi}{2}} = 2 \times \cos \frac{\pi}{2} = 0$

توابع به فرم $|f(x)|$ به ازای ریشه‌های ساده $f(x) = 0$ ، مشتق پذیر نیستند و به ازای ریشه‌های تکراری مشتق پذیر می‌باشند.

مثال ۲۱: مشتق پذیری توابع $y = |x^2|$ ، $y = |x^2|$ ، $y = |x|$ ، بررسی کنید.

پاسخ: با توجه به نکته فوق $x=0$ ریشه ساده تابع $y = |x|$ می‌باشد لذا تابع در این نقطه مشتق پذیر نمی‌باشد، اما $x=0$ ریشه مرتبه دوم تابع $y = |x^2|$ و ریشه مکرر مرتبه سوم تابع $y = |x^3|$ می‌باشد، لذا هر دو تابع در نقطه $x=0$ مشتق پذیر می‌باشد.

مثال ۲۲: تابع $y = |x^5 + 3x + k|$ در نقطه $x = -1$ مشتق پذیر نیست، مقدار k کدام است؟

$(1) 1$
 $(2) 2$
 $(3) 3$
 $(4) 4$

پاسخ: گزینه «۴»

می‌دانیم توابعی به شکل $y = |f(x)|$ در ریشه‌های ساده معادله $f(x) = 0$ مشتق پذیر نیستند لذا خواهیم داشت:

$x^5 + 3x + k = 0 \xrightarrow{x=-1} -1 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = 4$

مثال ۲۳: تابع $f(x) = |x(x+2)(x-3)|$ در کدام یک از نقاط زیر مشتق ناپذیر است؟

$(1) x = -2$
 $(2) x = 3$
 $(3) x = 0$
 $(4) \text{ در هر سه نقطه}$

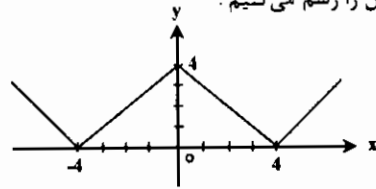
پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته فوق چون $x=0$ ریشه ساده داخل قدر مطلق است، تابع در این نقطه مشتق ندارد.

نکته ۳: در مواردی که چند قدر مطلق داخل هم داشته باشیم باید کلیه قدر مطلق‌ها را از داخل به خارج بررسی کنیم و با توجه به نکته فوق نقاطی که در آن نقاط مشتق پذیر نیست را تعیین کنیم.

مثال ۲۴: تابع $y = ||x| - 2|$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

$(1) 1$
 $(2) 2$
 $(3) 3$
 $(4) 4$

پاسخ: گزینه «۳» $|x|=0 \Rightarrow x=0$ ، $|x|=4 \Rightarrow x=\pm 4$ برای درک بهتر مطلب شکل را رسم می‌کنیم:



توضیح: با توجه به اینکه در نقاط $x = \pm 4$ ، $x = 0$ تابع دارای شکست می‌باشد این نقاط، نقاط زاویه دار هستند و می‌دانیم تابع در این نقاط مشتق پذیر نیست.

مثال ۲۵: تابع f با ضابطه $f(x) = x^2|x|$ در $x=0$

$(1) \text{ مشتق اول دارد ولی مشتق دوم ندارد}$
 $(2) \text{ مشتق اول و دوم ندارد}$
 $(3) \text{ مشتق دوم دارد ولی مشتق اول ندارد}$
 $(4) \text{ مشتق اول و دوم دارد}$

پاسخ: گزینه «۴»

$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases}$ ، $f''(x) = \begin{cases} 6x & x \geq 0 \\ -6x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(0) = 0, f''(0) = 0$

منحنی‌های پارامتری و مشتق آنها

هرگاه مختصات y, x یک نقطه غیر مشخصی از یک منحنی بر حسب پارامتر دیگری مانند t به وسیله معادلات $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ داده شوند، گوئیم

منحنی به صورت پارامتری است. برای مثال $\begin{cases} x = R \sin t \\ y = R \cos t \end{cases}$ معادله پارامتری دایره $x^2 + y^2 = R^2$ است.

مشتق منحنی‌های پارامتری:

$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

مثال ۲۶: مشتق منحنی به معادلات پارامتری $\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = 1 + \frac{1}{2} \sin t \end{cases}$ برابر است با:

$(1) -\cot t$
 $(2) -\frac{1}{2} \cot t$
 $(3) \cot t$
 $(4) \frac{1}{2} \cot t$

پاسخ: گزینه «۴»

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{2} \cos t}{\sin t} = \frac{1}{2} \cot t$

مثال ۲۷: مشتق دوم منحنی پارامتری $\begin{cases} x = t^2 + 3t + 1 \\ y = t^2 - 3t + 1 \end{cases}$ نسبت به x کدام است؟

$(1) \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$
 $(2) 4t$
 $(3) \frac{4}{2(t^2 + 1)^2}$
 $(4) \frac{4t}{2(t^2 + 1)^2}$

پاسخ: گزینه «۴»

$y''_{xx} = \frac{y''_t}{x'_t} = \frac{2t - 3}{2t + 3} \Rightarrow y''_{xx} = \frac{(y''_t)_t}{x'_t} = \frac{2t - 3}{2(t^2 + 1)^2} = \frac{4t}{2(t^2 + 1)^2}$

قاعده زنجیرهای مشتق

اگر $y = f(u)$ و $u = g(x)$ باشند آنگاه مشتق تابع y نسبت به x به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

مثال ۲۸: اگر $y = \sqrt{u^2 + u}$ و $u = x^2 - 3x$ آنگاه y' در نقطه $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{21\sqrt{6}}{4}$ (۲) ۰ (۳) $\frac{15\sqrt{6}}{4}$ (۴) ۲۱

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه به ازای $x = 2$ مقدار u برابر $u = 8 - 6 = 2$ می‌شود خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{2u+1}{2\sqrt{u^2+u}} \times (2x-3) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2 \times 2 + 1}{2\sqrt{2^2+2}} \times 9 = \frac{5 \times 9}{2\sqrt{6}} = \frac{5 \times 9 \times \sqrt{6}}{2 \times 6} = \frac{15\sqrt{6}}{4}$$

مشتق مرتبه n ام

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{1-x} \Rightarrow y = (1-x)^{-1} \\ y^{(1)}(x) &= (-1)(-1)(1-x)^{-2} = (1-x)^{-2} \\ y^{(2)}(x) &= (-2)(-1)(1-x)^{-3} = 2(1-x)^{-3} \\ y^{(3)}(x) &= 2(-3)(-1)(1-x)^{-4} = 2 \times 3(1-x)^{-4} \\ y^{(4)}(x) &= 2 \times 3(-4)(-1)(1-x)^{-5} = 2 \times 3 \times 4(1-x)^{-5} \\ &\vdots \\ y^{(n)}(x) &= 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n(1-x)^{-(n+1)} = n!(1-x)^{-(n+1)} \end{aligned}$$

مثال ۲۹: مشتق صدم تابع $y = \frac{x^2}{x-1}$ را پیدا کنید؟

$$\begin{aligned} y &= (x+1) + \frac{1}{x-1} \Rightarrow y^{(1)} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \\ y^{(2)} &= \frac{2}{(x-1)^3} \\ y^{(3)} &= \frac{-2(3)}{(x-1)^4} \Rightarrow y^{(100)} = \frac{(-1)^{100} \cdot 100!}{(x-1)^{101}} \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}} \end{aligned}$$

نکته ۴: مشتق مرتبه n ام تابع $y = \frac{1}{ax+b}$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

نکته ۵: مشتق مرتبه n ام توابع $y = \sin ax$, $y = \cos ax$ به شکل زیر است:

$$y = \cos ax \Rightarrow y^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$$

$$y = \sin ax \Rightarrow y^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$$

مثال ۳۰: مشتق مرتبه هشتم تابع $f(x) = \sin 2x$ کدام است؟

- (۱) $256 \cos 2x$ (۲) $256 \sin 2x$ (۳) $128 \cos 2x$ (۴) $128 \sin 2x$

پاسخ: گزینه «۲»
 $y = \sin 2x \Rightarrow y' = 2^1 \sin\left(\frac{8\pi}{2} + 2x\right) = 256 \sin(4\pi + 2x) = 256 \sin 2x$

مثال ۳۱: مشتق دهم تابع با ضابطه $f(x) = x \sin x$ کدام است؟

- (۱) $x \sin x + 10 \cos x$ (۲) $10 \cos x - x \sin x$ (۳) $10x - x \sin x$ (۴) $\sin x + x \cos x$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به مشتقات ارائه شده می‌توان نتیجه گرفت که مشتق مرتبه دهم برابر با $y = 10 \cos x - x \sin x$ می‌باشد.

$$y = x \sin x = \begin{cases} y^{(1)} = \sin x + x \cos x \\ y^{(2)} = 2 \cos x - x \sin x \\ y^{(3)} = -2 \sin x - x \cos x \\ y^{(4)} = -4 \cos x + x \sin x \end{cases}$$

نکته ۶: مشتق مرتبه n ام تابع با ضابطه $f(x) = (ax+b)^n$ به صورت $n! a^n$ می‌باشد.

نکته ۷: مشتق مرتبه n ام تابع $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ به شکل روبرو است: (ثابت کنید)
 $y^{(n)} = 4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)$

فرمول لایب نیتز

اگر u و v توابعی مشتق‌پذیر از مرتبه n ام بر حسب x می‌باشند، آنگاه مشتق مرتبه n ام uv از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \binom{n}{0} u^{(n)} v^{(0)} + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v^{(1)} + \dots + \binom{n}{n} u^{(0)} v^{(n)}$$

که به طور خلاصه آن را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

مثال ۳۲: مشتق مرتبه دهم $y = (x^2 + x + 1)e^x$ در $x = 0$ کدام است؟

- (۱) ۷۲۰ (۲) ۷۳۱ (۳) ۷۱۹ (۴) ۷۲۹

پاسخ: گزینه «۲» قرار می‌دهیم $u = x^2 + x + 1$ و $v = e^x$ در این صورت:

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} u^{(k)} v^{(10-k)} = \binom{10}{0} (x^2+x+1)e^x + \binom{10}{1} (2x+1)e^x + \binom{10}{2} (2)e^x + \binom{10}{3} (1)e^x \\ \Rightarrow y^{(10)}(0) &= 1 + 10 + 0 + 720 = 731 \end{aligned}$$

مشتق توابع شامل جزء صحیح

نمودار این گونه توابع که به توابع پله‌ای نیز موسوم هستند، از قطعه‌های موازی محور x ها تشکیل شده است، یعنی شیب آنها صفر و در نتیجه مشتق آنها صفر است (البته در نقاطی که تابع پیوسته است) و در نقاطی که تابع پیوسته نیست، مشتق وجود نخواهد داشت.

نکته ۸: پس از عبارات بالا می‌توان نتیجه گرفت که معمولاً در نقاط صحیح اگر مشتق‌پذیری سؤال شود، تابع مشتق ندارد، اما در فواصل هر دو عدد صحیح متوالی می‌توان مشتق‌پذیری را بررسی کرد.

مثال ۳۳: مشتق‌پذیری تابع $f(x) = [x]$ را بررسی کنید.

پاسخ: تابع در هر یک از فواصل $(n, n+1)$ یا به عبارتی دیگر کلیه نقاط مربوط به مجموعه $R - Z$ مشتق‌پذیر است و مقدار مشتق آن در این فواصل برابر صفر خواهد بود.

مثال ۳۴: تابع $f(x) = x - [x]$ در کدام یک از فواصل زیر مشتق‌پذیر است؟

- (۱) $[0, \frac{1}{2}]$ (۲) $[\frac{1}{2}, 1]$ (۳) $[1, 2]$ (۴) $[0, 1]$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به مطالب گفته شده به ازای $x \in [0, 1]$ تابع مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر ۱ می‌باشد.

مثال ۳۵: مشتق پذیری تابع $f(x) = x^2 \lfloor x^2 \rfloor$ در $x_0 = 2$ چگونه است؟

- (۱) فقط مشتق چپ دارد. (۲) مشتق راست و چپ ندارد. (۳) مشتق موجود نیست. (۴) مشتق دارد.

پاسخ: گزینه «۳»

$$f'(x) = 2x^2 \lfloor x^2 \rfloor + 0 \times x^2 = 2x^2 \lfloor x^2 \rfloor \Rightarrow f'(2^-) = 2 \times 4 \times 2 = 16 \Rightarrow f(2^-) \neq f(2^+)$$

$$f'(2^+) = 2 \times 4 \times 4 = 32$$

مثال ۳۶: تابع $f(x) = x^2 + x \lfloor x \rfloor$ در نقطه $x_0 = 0$:

- (۱) مشتق پذیر نیست. (۲) مشتق پذیر است. (۳) پیوستگی دارد. (۴) نامعین است.

پاسخ: گزینه «۱»

$$f'(x) = 2x + \lfloor x \rfloor \Rightarrow f'(0^+) = 0, f'(0^-) = -1 \Rightarrow$$

نکته ۹: توابعی به فرم $f(x) = (x - \alpha)^n \lfloor x \rfloor$ با شرط $n \geq 2$ در $x = \alpha$ مشتق پذیر می‌باشند و در سایر نقاط مشتق ناپذیر است.

مثال ۳۷: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^n \lfloor x \rfloor; & x \neq 0 \\ \infty; & x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ مشتق پذیر باشد آنگاه:

- (۱) $n \geq 1$ (۲) $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ (۳) n هر چه باشد (۴) $n \in \mathbb{R}, n \neq 0$

پاسخ: گزینه «۲» به ازای $n = 1$ تابع مشتق ناپذیر خواهد بود پس فقط گزینه ۲ می‌تواند صحیح باشد.

مشتق تابع معکوس

در بعضی مسائل ضابطه تابع داده می‌شود و مقدار مشتق تابع معکوس در نقطه‌ای مورد سوال قرار می‌گیرد، اما به دست آوردن ضابطه تابع معکوس ممکن است کار دشواری باشد، لذا با استفاده از توضیحات زیر می‌توانیم به راحتی مشتق تابع معکوس را محاسبه کنیم:

اگر تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ مشتق پذیر باشد و $f(a) = b$ باشد، آنگاه مشتق تابع $f^{-1}(x)$ در نقطه $x = b$ (طول روی تابع معکوس و عرض روی تابع اصلی) از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

مثال ۳۸: شیب خط مماس بر تابع معکوس $f(x) = x^2 + x - 2$ در نقطه‌ای به طول صفر روی تابع معکوس کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» در این تست $b = 0$ می‌باشد لذا باید با توجه به رابطه $f(a) = b$ مقدار a را به دست آوریم:

$$f(a) = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = x^2 + x - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(a) = 2a + 1 \xrightarrow{a=1} f'(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$m = (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}$$

مثال ۳۹: اگر $f(x) = x^2 + x^2$ باشد، مقدار مشتق تابع معکوس در نقطه‌ای به عرض (۲) واقع بر آن چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) ۱۲ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) ۱۶

پاسخ: گزینه «۱» توجه شود چون نقطه‌ای به عرض (۲) روی تابع معکوس است، لذا $x = 2$ طول روی تابع اصلی است، لذا داریم:

$$f(x) = x^2 + x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

$$(f^{-1})'(12) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2(2)^2 + 2 \times 2} = \frac{1}{16}$$

در واقع در این تست $a = 2$ و $b = 12$ می‌باشد، پس داریم:

مثال ۴۰: اگر $y = \frac{e^{2x} + x}{x+1}$ آنگاه مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» توجه شود همواره $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ می‌باشد، پس با توجه به اینکه محاسبه x بر حسب y و سپس مشتق گرفتن از x نسبت به متغیر y سخت است لذا بهتر است $\frac{dy}{dx}$ را به دست آوریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2e^{2x} + 1)(x+1) - 1 \times (e^{2x} + x)}{(x+1)^2} \xrightarrow{x=0} \frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$$

مشتق مرتبه دوم تابع معکوس: فرض کنید g وارون تابع f باشد، در این صورت:

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \quad g''(f(x)) = \frac{-f''(x)}{(f'(x))^2}$$

مثال ۴۱: اگر $y = e^x + x$ آنگاه x''_{yy} کدام است؟

- (۱) $\frac{-1}{e^x + x}$ (۲) $\frac{-e^x}{e^x + x}$ (۳) $\frac{-e^x}{(e^x + 1)^2}$ (۴) $\frac{-1}{(e^x + 1)^2}$

پاسخ: گزینه «۳» منظور از x''_{yy} همان مشتق مرتبه دوم تابع وارون می‌باشد، بنابراین:

$$y = e^x + x \Rightarrow y' = e^x + 1, \quad y'' = e^x \Rightarrow x''_{yy} = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

نکته ۱۰: اگر دو تابع $y = f(x)$ و $u = g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند آنگاه:

$$y'_{u(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{روش اول: } \left. \begin{matrix} y = \sin^2 x \\ u = \cos^2 x \end{matrix} \right\} \Rightarrow y'_{u(x)} = \frac{y'_x}{u'_x} = \frac{2 \sin x \cos x}{-2 \sin x \cos x} = -1$$

مثال ۴۲: مشتق $y = \sin^2 x$ نسبت به $\cos^2 x$ چه مقدار است؟

روش اول:

روش دوم: اگر $\cos^2 x$ را بعنوان متغیر فرض کنیم:

مثال ۴۳: مشتق تابع $y = 2x^3 - 4x^2 + x^2$ را نسبت به x^2 بیابید.

$$y'_{x^2} = \frac{18x^2 - 8x + 2x}{2x^2} = 9x^2 - 4x + 1$$

عامل صفر کننده در مشتق

در بعضی توابع که به صورت حاصلضرب چند عامل درهم می‌باشند، اگر مشتق در نقطه‌ای که یکی از عاملها به ازای آن صفر می‌شود را بخواهند آنگاه کافیست فقط از عامل صفر شونده مشتق بگیریم و در بقیه جملات ضرب کنیم و در نهایت طول نقطه را در عبارت حاصل قرار دهیم.

مثال ۴۴: اگر $f(x) = \frac{x}{2}(2x-2)(3x-2)(x-2)$ باشد، $f'(2)$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۰ (۳) $f(2)$ (۴) -۸

پاسخ: گزینه «۱» عامل صفر شونده $(x-2)$ می‌باشد لذا داریم:

$$f'(x) = \frac{x}{2}(2x-2)(2x-2) \times 1 + \dots \Rightarrow f'(2) = \frac{2}{2}(4-2)(6-2) \times 1 = 8$$

مثال ۴۵: مشتق تابع $y = \frac{(x^2-1)\cos x}{\sqrt{x+1}}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ برابر چه مقداری است؟

$$y = \frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}} \cos x \Rightarrow y' = \frac{(x^2-1)'}{\sqrt{x+1}} \cos x - \sin x \frac{(x^2-1)}{(\sqrt{x+1})^2} \Rightarrow y'(\frac{\pi}{2}) = 0 - \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{(\frac{\pi}{2})^2-1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}} \right) = \frac{1-(\frac{\pi}{2})^2}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}}$$

نیازی به محاسبه نیست

که مثال ۴۶: مشتق تابع $y = \frac{(x^2 + x + 1) \sin x}{x^2 - x - 1}$ در نقطه $x_0 = 0$ برابر است با:

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} \sin x \Rightarrow y' = \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} \right)' \sin x + \cos x \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} \right) \Rightarrow y'(x_0) = \cos(0) \times \frac{1}{-1} = -1$$

نیازی به محاسبه نیست

مشتق توابعی به شکل $y = u(x)^{v(x)}$

برای بدست آوردن مشتق اینگونه توابع به شکل زیر عمل می‌کنیم (u, v توابعی بر حسب x هستند)

$$y = u^v \Rightarrow \ln y = \ln u^v \Rightarrow \ln y = v \ln u \Rightarrow \frac{y'}{y} = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \Rightarrow y' = y \left[v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right]$$

$$\Rightarrow y' = u^v \cdot \left[v' \ln u + \frac{u' \cdot v}{u} \right]$$

که مثال ۴۷: با فرض $y = x^x$ مقدار مشتق این تابع در $x = e$ برابر است با:

- (۱) e (۲) e^{-1} (۳) $2e^e$ (۴) e^e

پاسخ: گزینه «۳» در این مثال $\begin{cases} v = x \\ v' = 1 \end{cases}, \begin{cases} u = x \\ u' = 1 \end{cases}$ می‌باشند پس داریم:

$$y' = x^x (\ln x + 1) \Rightarrow y'(e) = e^e (\ln e + 1) = 2e^e$$

که مثال ۴۸: اگر $y = (\tan x)^{\cos x}$ آنگاه $\frac{1}{y}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۰ (۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» با در نظر گرفتن $V = \cos x, U = \tan x$ خواهیم داشت $V' = -\sin x, U' = 1 + \tan^2 x$ پس خواهیم داشت:

$$y' = (\tan x)^{\cos x} \left[-\sin x \ln(\tan x) + \frac{(1 + \tan^2 x)(\cos x)}{\tan x} \right]$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \times \left[-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right))(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right))}{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right] = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{y'} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مشتق در فیزیک

در این حالت x و y را می‌توان مسافت تعریف نموده و X' و Y' را سرعت در راستای x و y می‌نامیم. به مثال زیر توجه کنید:

که مثال ۴۹: متحرکی بر روی نمودار $xy = x - x^2$ حرکت می‌کند در کدام نقطه سرعت متحرک در راستای قائم سه برابر سرعت متحرک در راستای افقی می‌باشد؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(0, \frac{1}{3})$ (۳) $(1, 0)$ (۴) $(\frac{1}{3}, 0)$

پاسخ: گزینه «۲» اگر $X(t)$ را جابجایی در راستای قائم در نظر بگیریم آنگاه $X'(t)$ را می‌توان سرعت در راستای قائم در نظر گرفت و به همین ترتیب اگر $Y(t)$ را جابجایی در راستای افقی در نظر بگیریم آنگاه $Y'(t)$ را می‌توان سرعت در راستای افقی در نظر گرفت:

$$xy = x^2 - x \Rightarrow y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x \quad (1) \Rightarrow y'(t) = \frac{2}{3}x'(t)x - \frac{1}{3}x'(t)$$

$$\Rightarrow y'(t) = \frac{1}{3}x'(t) \Rightarrow \frac{2}{3}x'(t)x - \frac{1}{3}x'(t) = \frac{1}{3}x'(t) \Rightarrow 2x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{(1)} y = 0$$

پس در نقطه $A(1, 0)$ سرعت متحرک در راستای قائم سه برابر سرعت متحرک در راستای افقی می‌باشد.

هزینه نهایی (امور اقتصادی):

که مثال ۵۰: اگر برای تولید کتاب، تابع هزینه به شکل $C(x) = 3\sqrt{x} + 2x$ باشد، اولاً هزینه ۱۰۰۰ کتاب چقدر می‌شود، ثانیاً هزینه نهایی هزار و یکمین کتاب چقدر می‌شود؟

پاسخ:

اولاً:

$$C(1000) = 3 \times 1000 + 2 \times 1000 = 2000$$

ثانیاً:

$$C'(x) = 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow C'(1000) = 2 + \frac{1}{\sqrt{(1000)^2}} = 2.01$$

نکاتی در مورد مشتق:

(۱) مشتق تابع زوج و مشتق پذیر، تابعی فرد و مشتق یک تابع فرد و مشتق پذیر تابعی زوج است.

که مثال ۵۱: اگر $f(x) = x \sin x$ و $g(x) = \log(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$ آنگاه کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

- (۱) $f'(x)$ تابعی فرد و $g'(x)$ تابعی زوج است
 (۲) $f'(x)$ تابعی فرد و $g'(x)$ نیز تابعی فرد است
 (۳) $f'(x)$ تابعی زوج و $g'(x)$ تابعی فرد است.
 (۴) $f'(x)$ تابعی زوج و $g'(x)$ نیز تابعی زوج است.

پاسخ: گزینه «۱» $f(x)$ تابعی زوج و $g(x)$ تابعی فرد است بنابراین مشتق $f(x)$ تابعی فرد و مشتق $g(x)$ تابعی زوج است.

(۲) در مشتق گیری ضمنی اگر x تابع y متغیر باشد داریم: $x'_y = -\frac{f'_y}{f'_x}$

(۳) اگر توابع f و g در نقطه x_0 مشتق پذیر نباشند، ممکن است توابع $f+g, f-g, f \cdot g$ در x_0 مشتق پذیر باشند. برای مثال توابع

$$f(x) = |x| \text{ و } g(x) = |x| \text{ هیچ کدام در نقطه } x_0 = 0 \text{ مشتق پذیر نیستند ولی } f \cdot g = x^2 \text{ در } x_0 = 0 \text{ مشتق دارد.}$$

در حالت کلی می‌توان گفت اگر یکی از توابع مشتق پذیر و دیگر مشتق ناپذیر باشد، $(f \pm g)$ قطعاً مشتق پذیر نخواهد بود.

(۴) اگر f و g هر دو مشتق پذیر باشند، $f+g, f-g, f \cdot g$ نیز مشتق پذیرند.

(۵) مشتق یک تابع متناوب با دوره تناوب T ، متناوب با همان دوره تناوب T می‌باشد.

کاربرد مشتق

آهنگ لحظه‌ای تغییر

با توجه به تعریف مشتق، زمانی که h مقدار کوچکی است: $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. وقتی $h = 1$ انتخاب شود آنگاه:

$\Delta f = f(a+1) - f(a)$ نیز تقریبی از $f'(a)$ خواهد بود، یا به عبارت دیگر $f'(a)$ آهنگ تغییرات f نسبت به متغیر x در نقطه $x = a$ خواهد بود.

آهنگ متوسط تغییر

برای تابع $y = f(x)$ وقتی x از x_1 به x_2 تغییر می‌کند، آهنگ متوسط تغییر به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

اگر $\Delta x = x_2 - x_1$ آنگاه داریم:

که مثال ۵۲: در تابع $f(x) = 2x^2 - t$ آهنگ آنی تغییر در لحظه $t = 2$ ، چقدر از آهنگ متوسط تغییر f از لحظه $t = 1$ تا $t = 2$ کمتر است؟

پاسخ: برابر یکدیگر خواهند بود

آهنگ آنی تغییر: $f'(t) = 4t - 1 \rightarrow f'(2) = 4 \times 2 - 1 = 7$

آهنگ متوسط تغییر: $\Delta f = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{(2 \times 9 - 2) - (2 \times 1 - 1)}{2 - 1} = 7$

که مثال ۵۳: سرعت متوسط متحرکی را که تحت رابطه $S = (t^2 - 5t + 2)$ حرکت می‌کند از $t_1 = 5$ ثانیه تا $t_2 = 15$ ثانیه حساب کنید.

$S_1 = S(5) = 25 - 5(5) + 2 = 2$ $S_2 = S(15) = 225 - 75 + 2 = 152$

$\Rightarrow \Delta v = \frac{S(15) - S(5)}{15 - 5} = \frac{150}{10} = 15$ پاسخ: گزینه «۱»

مثال ۵۴: وقتی شعاع یک حباب گروی با سرعت $\frac{0.8 \text{ m}}{\text{s}}$ افزایش یابد در لحظه‌ای که شعاع حباب ۱m است، آهنگ آنی تغییر حجم چقدر است؟

پاسخ: $V = \frac{4}{3} \pi r^3 \rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \times 0.8 = 2.7\pi \text{ (m}^3\text{)}$

کمیت‌های وابسته

گاهی دو یا چند متغیر وابسته به یک متغیر دیگر (مانند t، زمان) می‌باشند. با تغییر مقدار t، مقدار متغیرها وابسته نیز تغییر می‌کند و در نتیجه مقدار عبارتی که به این متغیرها وابسته باشد، عوض می‌شود. در این موارد برای به دست آوردن آهنگ تغییر کمیت، از رابطه مربوط به آن نسبت به متغیر t مشتق می‌گیریم.

مثال ۵۵: حجم یک هرم به نسبت ۳۰ سانتی‌متر مکعب در ثانیه و سطح قاعده آن به نسبت ۵ سانتی‌متر مربع در ثانیه اضافه می‌شود. موقعی که سطح قاعده هرم، ۱۰۰ سانتی‌متر مربع و ارتفاع آن ۸ سانتی‌متر است، ارتفاع آن با چه سرعتی نسبت به زمان اضافه می‌شود؟

پاسخ: گزینه «۳» $\frac{1 \text{ cm}}{4 \text{ s}}$ (۱) $\frac{1 \text{ cm}}{3 \text{ s}}$ (۲) $\frac{1 \text{ cm}}{2 \text{ s}}$ (۳) $\frac{2 \text{ cm}}{3 \text{ s}}$ (۴)

پاسخ: گزینه «۳» حجم هرم را با v، مساحت قاعده را با S و ارتفاع را با h نشان می‌دهیم، در این صورت:

$v = \frac{1}{3}hs \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{3}(\frac{dh}{dt}s + h\frac{ds}{dt})$

$30 = \frac{1}{3}(\frac{dh}{dt} \times 100 + 8 \times 5) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{4}$

با جایگزینی مقادیر داده شده خواهیم داشت:

مثال ۵۶: نقطه‌ای بر خم $y^2 = x^2$ چنان حرکت می‌کند که فاصله‌اش از مبدأ مختصات در صفحه با آهنگ ثابت ۲ واحد در ثانیه زیاد می‌شود. در لحظه‌ای که نقطه متحرک دارای طول ۲ می‌باشد، مقدار $\frac{dx}{dt}$ برابر است با:

پاسخ: گزینه «۳» $\sqrt{2}$ (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه «۳» $r^2 = x^2 + y^2 \xrightarrow{y^2=x^2} r^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2r \frac{dr}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2x \frac{dx}{dt}$

به ازای $x=2$ ، مقدار $r=2\sqrt{2}$ با جایگزینی در رابطه فوق به دست می‌آید:

نکته ۱۱: در برخی کمیت‌های وابسته، آهنگ تغییر متناسب با مقدار کمیت می‌باشد، یعنی $\frac{dx}{dt} = kx$ ، در این صورت به سادگی می‌توان نتیجه گرفت $x(t) = c_0 e^{kt}$ که در این رابطه c_0 مقدار اولیه کمیت می‌باشد. رشد جمعیت، از بین رفتن (ناپودی یا زوال یا واپاشی) ماده رادیواکتیو، افزایش یا کاهش تعداد باکتری‌ها و ... از جمله مواردی هستند که در رابطه فوق صدق می‌کنند.

مثال ۵۷: یک جسم رادیواکتیو را در نظر بگیرید که به صورت نمایی وزن کم می‌کند. اگر در ساعت ۴، مقدار آن ۱۰۰ گرم باشد و در ساعت ۶ مقدار ۲۰ گرم از آن باقی مانده باشد، در ساعت ۱۲ وزن آن چقدر است؟

پاسخ: $x(t) = c_0 e^{kt} \Rightarrow x(4) = c_0 e^{4k}$ ، $x(6) = c_0 e^{6k} \Rightarrow \frac{x(6)}{x(4)} = e^{2k} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

$x(12) = c_0 e^{12k} = c_0 e^{4k} \times (e^{2k})^2 = 100 \times (\frac{1}{5})^2 = 0.16$

معادله خط مماس و قائم بر یک منحنی

در تابع $y = f(x)$ اگر بخواهیم در نقطه‌ای مانند x_0 واقع بر منحنی مماسی بر نمودار تابع رسم کنیم، شیب این خط با مقدار مشتق به ازای $x = x_0$ برابر است به عبارت دیگر: $m_{\text{مماس}} = f'(x_0)$ ، واضح است که ضریب زاویه خط قائم بر منحنی از رابطه $m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{m_{\text{مماس}}}$ بدست خواهد آمد.

مثال ۵۸: ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $x^2 + y^2 - xy - 7 = 0$ در نقطه $A(1,2)$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۲» $-\frac{15}{11}$ (۱) $-\frac{1}{11}$ (۲) $-\frac{1}{13}$ (۳) $-\frac{5}{13}$ (۴)

پاسخ: گزینه «۲» $y' = -\frac{2x^2 - y}{2y^2 - x} \Rightarrow m = y'(1,2) = -\frac{2-2}{2 \times 4 - 1} = -\frac{1}{11}$

یادآوری: معادله خطی که از نقطه $A(x_0, y_0)$ بگذرد و دارای شیبی برابر m باشد به فرم زیر است:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

مثال ۵۹: معادله خط مماس بر منحنی $y = \sqrt{x + \ln x}$ در نقطه $x=1$ برابر است با:

پاسخ: گزینه «۳» $y = 2x + e$ (۱) $y = \frac{x}{e}$ (۲) $y = x$ (۳) $y = \frac{1}{x}$ (۴)

پاسخ: گزینه «۳»

$y = \sqrt{\ln x + x} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x} + 1}{2\sqrt{\ln x + x}} \Rightarrow m = y'(1) = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = x - 1 \Rightarrow y = x$
 $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$

مثال ۶۰: مکان هندسی مرکز تمام دایره مماس بر منحنی $y = x^2 + 1$ در نقطه $(1,2)$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۴» $y - 2x = 0$ (۱) $2y - x = 2$ (۲) $y + x = 2$ (۳) $x + 2y = 5$ (۴)

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم در نقطه تماس دو منحنی شیب دو منحنی یکسان است. بنابراین خط مماس و خط قائم بر دو منحنی نیز در آن نقطه یکی است و چون خط قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد، پس کافی است معادله خط قائم بر منحنی را در نقطه $(1,2)$ به دست آوریم.

$y = x^2 + 1 \Rightarrow y' = 2x \Rightarrow y'(1) = 2 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$

پس معادله خط قائم به صورت روبرو است: $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y + x = 5$

مثال ۶۱: معادله مماس بر منحنی $x^2 y^2 + x - y - 1 = 0$ در نقطه $(1,1)$ و $A(1)$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۲» $4x + y - 18 = 0$ (۱) $xy - x - 2 = 0$ (۲) $y + 2x - 4 = 0$ (۳) $y - 2x + 4 = 0$ (۴)

پاسخ: گزینه «۲» $y'_x = -\frac{2xy^2 + 1}{2yx^2 - 1} \Rightarrow m = y'(1,1) = -\frac{2+1}{2-1} = -3$

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = -3(x - 1) \Rightarrow y + 2x - 4 = 0$

توضیح: توجه شود در بعضی تست‌هایی که معادله خط مماس و یا قائم در یک منحنی داده شده است، می‌توانیم سریعاً مختصات نقطه را در معادله خطوط داده شده در چهار گزینه قرار دهیم و از طریق رد گزینه‌ها تست را پاسخ دهیم برای مثال در تست فوق گزینه‌های ۳ و ۴ از بین جواب‌ها حذف می‌شود و اگر طراح خیلی ریزبینانه تست را طرح نکند، بعضاً سه گزینه را می‌توان رد نمود.

مثال ۶۲: معادله خط قائم بر منحنی $y = \sqrt{x}$ در نقطه به طول $x=4$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۱» $4x + y - 18 = 0$ (۱) $4x + y + 4 = 0$ (۲) $x - 4y + 4 = 0$ (۳) $x + 4y + 4 = 0$ (۴)

پاسخ: گزینه «۱» $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \Rightarrow m_{\text{قائم}} = -4$ ، $x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = \sqrt{4} = 2$

$\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -4(x - 4) \Rightarrow y + 4x - 18 = 0$

مثال ۶۳: معادلات مماس بر منحنی $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ در نقطه‌های تلاقی با محور طولها کدام است؟

$y = 2 - x, y = 2x - 2, y = 2x - 1$ (۲) $y = 2 + x, y = 2x - 2, y = 2x + 1$ (۱)

$y = 2x - 6, y = 2x - 2, y = 2 - x$ (۴) $y = 2x - 2, y = 2x, y = x + 1$ (۳)

پاسخ: گزینه «۴» باید نقاط تلاقی منحنی با محور طولها را بدست آوریم برای این منظور منحنی را با خط $y=0$ قطع می‌دهیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} y = (x-1)(x-2)(x-3) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow A(1,0) \\ x_2 = 2 \rightarrow B(2,0) \\ x_3 = 3 \rightarrow C(3,0) \end{cases}$$

برای بدست آوردن شیب توجه داریم که مشتق گیری با عامل صفر داریم و با استفاده از این قاعده داریم:

$$\begin{cases} m_1 = y'(1) = (1-2)(1-3) = 2 \rightarrow y-0 = 2(x-1) \rightarrow y = 2x-2 \\ m_2 = y'(2) = (2-1)(2-3) = -1 \rightarrow y-0 = -1(x-2) \rightarrow y = -x+2 \\ m_3 = y'(3) = (3-1)(3-2) = 2 \rightarrow y-0 = 2(x-3) \rightarrow y = 2x-6 \end{cases}$$

توضیح: البته پس از به دست آوردن مختصات نقطه A با دقت در گزینه‌ها مشخص می‌شود که مختصات نقطه A فقط در یکی از معادلات گزینه ۴ صدق می‌کند و دیگر نیازی به ادامه حل تست نبود.

مثال ۶۴: ضریب زاویه خط مماس به منحنی پارامتری $\begin{cases} x = t^2 + 3t - 8 \\ y = 2t^2 - 2t - 5 \end{cases}$ در نقطه $A(2, -1)$ کدام است؟

(۱) $\frac{A}{Y}$
 (۲) $\frac{6}{Y}$
 (۳) ۶
 (۴) ۸

پاسخ: گزینه «۲» مقدار y'_x برابر است با: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4t-2}{2t+3}$ در نقطه $A(2, -1)$ را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} t^2 + 3t - 8 = 2 \\ 2t^2 - 2t - 5 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \end{cases} \text{ (ریشه مشترک دو معادله)} \rightarrow m = y'_x(2) = \frac{4(2)-2}{2(2)+3} = \frac{6}{7}$$

تذکره: در بعضی مسائل ممکن است شیب داده شده و نقطه تماس مماس سؤال شود.

مثال ۶۵: اگر مماس بر منحنی $y = x^2$ با وتر و اصل دو نقطه $A(-1, -1)$ و $B(2, 8)$ موازی باشد، آنگاه طول نقاط تماس مماس با منحنی کدام است؟

(۱) $x = \pm 1$
 (۲) فقط $x = -1$
 (۳) فقط $x = 1$
 (۴) $x = 2$

پاسخ: گزینه «۱» شیب خط واصل AB برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8 - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{9}{3} = 3$$

چون مماس بر منحنی با این خط موازی است لذا شیب آن برابر شیب خط AB یعنی $m = 3$ می‌باشد:

$$y = x^2 \rightarrow m = y'(x_0) = 2x_0 \Rightarrow 3 = 2x_0 \Rightarrow x_0 = \pm 1.5$$

تحت مماس و تحت قائم:

به مقدار $\left| \frac{y_0}{m} \right|$ که $m = y'(x_0)$ می‌باشد تحت مماس در نقطه $A(x_0, y_0)$ گفته می‌شود و مقدار $|y_0 \cdot m|$ تحت قائم در نقطه $A(x_0, y_0)$ نامیده می‌شود. (شکل A)

مثال ۶۶: تحت مماس بر منحنی $y = x^3 - 3x^2 - 16$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{9}$
 (۲) ۳۶
 (۳) $9\sqrt{5}$
 (۴) ۹

پاسخ: گزینه «۴»

$$y = x^3 - 3x^2 - 16 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow m = y'(1) = -2, y_0 = y(1) = -18$$

$$\text{تحت مماس} = \left| \frac{y_0}{m} \right| = \left| \frac{-18}{-2} \right| = 9$$

مثال ۶۷: تحت قائم منحنی $y = 2x^2 - x + 5$ در نقطه A کدام است؟

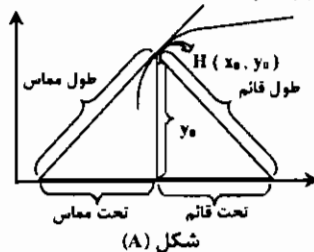
(۱) ۲
 (۲) ۱۸
 (۳) $2\sqrt{10}$
 (۴) $6\sqrt{10}$

پاسخ: گزینه «۲» $y_0 = 6, x_0 = 1$ تحت قائم برابر است با: $|my_0|$

$$y = 2x^2 - x + 5 \Rightarrow y' = 4x - 1 \Rightarrow m = y'(1) = 3 \Rightarrow |my_0| = |3 \times 6| = 18$$

طول مماس و طول قائم

۱- اگر بر نمودار تابعی در نقطه $A(x_0, y_0)$ مماسی رسم کنیم آنگاه طول آن مماس برابر است با:



$$L = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{y_0}{m}\right)^2}$$

۲- اگر بر نمودار تابعی در نقطه $A(x_0, y_0)$ قائمی رسم کنیم آنگاه طول قائم برابر است با:

$$L = \sqrt{y_0^2 + (y_0 \cdot m)^2}$$

تذکره: در محاسبه طول قائم و مماس مطابق شکل طول مماس و قائم از نقطه تماس با منحنی تا نقطه تماس با محور x ها در نظر گرفته شده است.

مثال ۶۸: طول مماس بر منحنی $y = x^2 - 2x + 2$ در نقطه $A(2, 4)$ کدام است؟

(۱) $\frac{9}{4}\sqrt{82}$
 (۲) $\frac{4}{9}\sqrt{82}$
 (۳) $\frac{1}{36}\sqrt{82}$
 (۴) $26\sqrt{82}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} L = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{y_0}{m}\right)^2}, y = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow y' = 2x - 2 \Rightarrow m = y'(2) = 2 \\ x_0 = 2, y_0 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{4^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{16}{4}} = \sqrt{\frac{16(4+1)}{4}} = \frac{4}{2}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

نکته ۱۲: اگر ضریب زاویه خط مماس در نقطه $A(x_0, y_0)$ صفر باشد، معادله خط مماس به شکل $y = y_0$ خواهد بود.

نکته ۱۳: اگر ضریب زاویه خط مماس در نقطه $A(x_0, y_0)$ ∞ شود، معادله خط مماس بر منحنی در این نقطه $x = x_0$ خواهد بود.

بدست آوردن زاویه یک منحنی با محورهای مختصات

برای به دست آوردن زاویه منحنی با محور x ها در این حالت باید منحنی را با خط $y=0$ قطع داده و طول نقطه تلاقی با محور x ها را یافته و سپس شیب خط را بدست آورده، و با توجه به اینکه $m = \tan \alpha$ ، زاویه (α) بدست خواهد آمد.

برای به دست آوردن زاویه منحنی با محور y ها باید زاویه مماس بر منحنی را با محور y ها بدست آوریم. با توجه به اینکه هر نقطه روی محور y ها دارای طول صفر خواهد بود. کافیتست ضریب زاویه خط مماس بر منحنی را در $x=0$ بدست آورده و چون بدست آوردن زاویه با محور y ها موردنظر می‌باشد لذا این زاویه را از 90° کم کنیم.

مثال ۶۹: نمودار تابع $y = \frac{x-1}{1+x^2}$ محور y ها را تحت چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

(۱) $\frac{\pi}{6}$
 (۲) $-\frac{\pi}{4}$
 (۳) $\frac{\pi}{4}$
 (۴) $\text{Arctg}\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$y' = \frac{(x^2+1) - 2x(x-1)}{(1+x^2)^2} \Rightarrow m = y'(0) = 1 \rightarrow m = \tan \alpha \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

نکته ۱۴: اگر یک خط بر یک منحنی مماس باشد، معادله تلاقی آنها ریشه مضاعف دارد.

مثال ۷۰: به ازای کدام مقدار k منحنی به معادله $y = \frac{2x+k}{x^2+2}$ بر خط به معادله $y = x-2$ مماس است؟

(۱) $-10, -6$
 (۲) $-10, 6$
 (۳) $10, -6$
 (۴) $10, 6$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases} y = \frac{2x+k}{x^2+2} \\ y = x-2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x+k}{x^2+2} = x-2 \Rightarrow x^2 - 2x^2 - k - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x^2 - k - 6 = 0 \quad (1)$$

با توجه به نکته ۳، معادله (۱) باید دارای ریشه مضاعف باشد و برای این منظور باید ریشه‌های مشتق معادله فوق در خود معادله صدق کنند.

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \xrightarrow{\text{در معادله}} k = -6 \\ x=2 & \xrightarrow{\text{در معادله}} k = -10 \end{cases}$$

نکته ۱۵: اگر دو منحنی بر هم مماس باشند، مقدار مشتق آنها در نقطه تماس و همچنین مقادیر منحنی‌ها در آن نقطه با هم برابر خواهند بود.

کلمه مثال ۷۱: اگر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^2 - 2x^2$ و $g(x) = ax^2 + b$ در نقطه‌ای به طول (-2) بر هم مماس باشند، کدام است؟

- ۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۴

پاسخ: گزینه «۴»
 $f'(x) = 2x - 4x \Rightarrow f'(-2) = 2 \Rightarrow f'(-2) = g'(-2) \Rightarrow -4a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$
 $g'(x) = 2ax \Rightarrow g'(-2) = -4a$

نکته ۱۶: اگر یک منحنی بر محور طولها مماس باشد در محل تلاقی آن با محور طولها، y و y' هر دو صفر خواهند شد.

زاویه بین دو منحنی

برای یافتن زاویه بین دو منحنی باید دو منحنی را با هم تلاقی داد و طول نقطه تلاقی را بدست آورده، سپس از دو منحنی مشتق گرفته و m و m' را بدست آوریم (m و m' شیب مربوط به هر یک از دو منحنی در نقطه تلاقی آنها هستند) در پایان از رابطه: $\text{tg}\alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$ مقدار α را بدست می‌آوریم.

کلمه مثال ۷۲: دو منحنی $y = x^2$ و $y = x^2$ تحت چه زاویه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

- ۱) $\text{Arctg} \frac{5}{3}$ ۲) $\text{Arctg} \frac{2}{3}$ ۳) $\text{Arctg} \frac{1}{3}$ ۴) $\text{Arctg} \frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» طول نقطه محل تلاقی دو منحنی $x=1$ می‌باشد:

$$y = x^2 \rightarrow y' = 2x \rightarrow m = y'(1) = 2 \rightarrow \text{tg}\alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \left| \frac{2 - 3}{1 + 2 \times 3} \right| = \frac{1}{7} \rightarrow \alpha = \text{Arctg} \frac{1}{7}$$

$$y = x^2 \rightarrow y' = 2x^2 \rightarrow m' = y'(1) = 3$$

توجه شود که در نقطه $(0,0)$ نیز دو منحنی یکدیگر را قطع می‌کنند اما در این نقطه بر هم مماسند و زاویه‌ای با یکدیگر نمی‌سازند.

کلمه مثال ۷۳: زاویه بین سهمی $y = 4 - \frac{x^2}{3}$ و خط $y = 4 - x$ کدام است؟

$$\begin{cases} \alpha_1 = \text{Arctg} \frac{2}{3} & (2) \\ \alpha_2 = \text{Arctg} \frac{1}{3} & (1) \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 45^\circ \\ \alpha_2 = 30^\circ \end{cases}$$

۱) فقط $\alpha = 45^\circ$ ۲) فقط $\alpha = 30^\circ$ ۳) فقط $\alpha = 45^\circ$ ۴) فقط $\alpha = 30^\circ$

پاسخ: گزینه «۱» شیب خط برابر $m = -1$ می‌باشد لذا شیب خط مماس بر سهمی را با توجه به این که نقطه تلاقی دو منحنی $A(0,4), B(2,2)$ می‌باشد، بدست می‌آوریم:

$$y = 4 - \frac{x^2}{3} \rightarrow y' = -\frac{2x}{3} \rightarrow \begin{cases} m'_1 = 0 \\ m'_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{tg}\alpha_1 = \left| \frac{-1 - 0}{1 + 0 \times (-1)} \right| = 1 \rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{tg}\alpha_2 = \left| \frac{-1 - (-2)}{1 + (-1)(-2)} \right| = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha_2 = \text{Arctg} \frac{1}{3}$$

کلمه مثال ۷۴: زاویه بین خطوط مماس بر منحنی $y = |tgx|$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

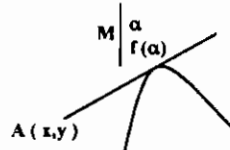
- ۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا تابع را به شکل دو ضابطه ای می‌نویسیم:

$$y = \begin{cases} \text{tg}x & x > 0 \\ -\text{tg}x & x < 0 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 1 + \text{tg}^2x & x > 0 \\ -(1 + \text{tg}^2x) & x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m' = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \infty \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

یافتن معادله خط مماس یا قائم از نقطه‌ای خارج منحنی

نقطه‌ای بطول α روی منحنی فرض می‌کنیم. پس عرض این نقطه $f(\alpha)$ خواهد بود.



با توجه به حالات قبل شیب در نقطه $x = \alpha$ برابر $m = f'(\alpha)$ خواهد بود و معادله خط به شکل $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$ در خواهد آمد، و چون نقطه $A(x, y)$ در این معادله صدق می‌کند، معادله‌ای بر حسب α خواهیم داشت تا معادله نهایی بدست آید.

کلمه مثال ۷۵: تعداد قائم‌هائی که از نقطه $A(2,0)$ بر منحنی تابع $y^2 = 4x$ می‌توان رسم کرد، کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۳» نقطه به عرض α را روی منحنی فرض می‌کنیم لذا طول نقطه $\frac{\alpha^2}{4}$ می‌باشد.

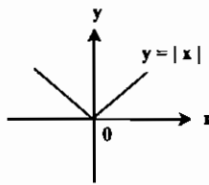
$$y^2 = 4x \rightarrow 2yy' = 4 \rightarrow y' = \frac{2}{y} \Rightarrow m = y'(\alpha) = \frac{2}{\alpha} \rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow m_{\text{قائم}} = -\frac{\alpha}{2}$$

$$y - \alpha = \frac{-\alpha}{2} \left(x - \frac{\alpha^2}{4} \right) \Rightarrow 0 - \alpha = \frac{-\alpha}{2} \left(2 - \frac{\alpha^2}{4} \right) \rightarrow \alpha = 0, \alpha = -2, \alpha = 2 \rightarrow m = 0, m_1 = 1, m_2 = -1$$

لذا سه خط قائم با ضریب زاویه‌های ۱، -۱ و ۰ می‌توان بر منحنی رسم کرد.

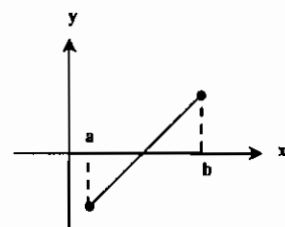
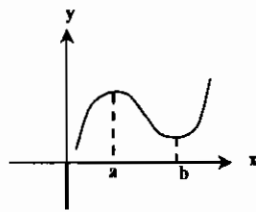
نقاط اکسترمم تابع (نقاط Max و Min تابع)

برای اینکه تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = c$ دارای اکسترمم نسبی باشد باید مشتق در نقطه c برابر صفر و یا وجود نداشته باشد (بی‌نهایت گردد) و علاوه بر این شرط مشتق حول نقطه c تغییر علامت دهد. بعبارت دیگر ممکن است مشتق تابعی در نقطه‌ای برابر صفر شود ولی مشتق حول این نقطه تغییر علامت ندهد در این صورت آن نقطه نمی‌تواند جزء اکسترمم‌های تابع محسوب گردد.



تذکره ۸: تابع ممکن است در نقطه‌ای دارای اکسترمم باشد، ولی در آن نقطه تابع مشتق پذیر نباشد. (مانند تابع $y = |x|$)

تذکره ۹: ابتدا و انتهای هر بازه اغلب نمی‌تواند Min, Max نسبی باشند.

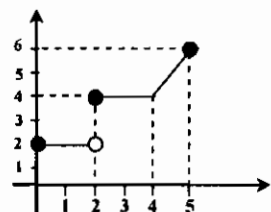


نقطه b ماکزیمم مطلق و نقطه a مینیمم مطلق است و تابع max و min نسبی ندارد. نقطه b ماکزیمم نسبی و نقطه a ماکزیمم نسبی است.

ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع

در بازه $[a, b]$ بیشترین و کمترین مقدار عرض تابع بترتیب Max مطلق و Min مطلق تابع در فاصله مذکور خواهد بود.

* Max مطلق ۶ می‌باشد. * Min مطلق ۲ می‌باشد.



تذکره ۱۰: معمولاً در مسائل زمانی Max و Min مطلق مطرح می‌شود که بازه مشخص شده باشد.

تعیین Min و Max نسبی تابع به کمک مشتق گیری

برای بدست آوردن نقاط Min, Max نسبی در توابع مشتق پذیر از تابع مشتق گرفته و حاصل را برابر صفر قرار میدهم، ریشه‌های این معادله در صورتی که عبارت حول این نقطه تغییر علامت دهد، نقاط اکسترمم تابع هستند، اگر علامت مشتق از مثبت به منفی تبدیل شود نقطه Max و اگر علامت مشتق از منفی به مثبت تبدیل شود نقطه Min است.

مثال ۷۶: به ازای کدام مقدار a تابع $y = x \ln ax$ در نقطه $x=1$ مینیمم است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) e (۴) $\frac{1}{e}$

پاسخ: گزینه «۴»
 $y = x \ln ax \rightarrow y' = \ln ax + \frac{a \cdot x}{ax} \Rightarrow y' = \ln ax + 1 \rightarrow y'(1) = \ln a + 1$

$\ln a + 1 = 0 \Rightarrow \ln a = -1 \Rightarrow a = e^{-1} = \frac{1}{e}$

مثال ۷۷: در تابع $f(x) = (x-1)^2$ نقطه بطول $x=1$ کدام یک از نقاط زیر است؟

- (۱) مینیمم نسبی (۲) ماکزیمم نسبی (۳) عطف (۴) عادی

پاسخ: گزینه «۱»
 $f(x) = (x-1)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x-1) \xrightarrow{x=1} f'(1) = 0$

x	0	1	2
f'(x)	-	0	+
f(x)	1	0	1

min

توضیح: با دادن نقاط کمکی 0 و 2 و تعیین علامت مشتق نتیجه می‌شود که علامت مشتق قبل از نقطه $x=1$ منفی و بعد از آن مثبت است لذا نقطه $x=1$ طول نقطه مینیمم تابع می‌باشد.

مثال ۷۸: مختصات نقطه مینیمم تابع $y = x^2 - 3x + 2$ کدام است؟

- (۱) (-1, 4) (۲) (1, 0) (۳) (0, 2) (۴) (2, 2)

پاسخ: گزینه «۲»
 $y = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow y' = 2x - 3 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

x	-2	-1	0	1	2
y'	+	0	-	0	+
y	0	2	2	0	2

max min

با توجه به جدول تعیین علامت ملاحظه می‌شود که نقطه (1, 0) نقطه مینیمم تابع می‌باشد علامت مشتق از منفی به مثبت حول نقطه $x=1$ تبدیل شده است توجه شود نقطه (-1, 4) نقطه ماکزیمم تابع می‌باشد.

آزمون مشتق دوم برای تعیین نقاط اکسترمم تابع

این راه حل بسیار ساده تر از تعیین علامت مشتق برای تعیین نقاط اکسترمم می‌باشد.

قضیه: فرض کنیم برای تابع $y = f(x)$ نقطه‌ای مانند C وجود داشته باشد که $f''(c), f'(c) = 0$ موجود باشد.

الف- اگر $f''(c) < 0$ آنگاه تابع f در نقطه c ماکزیمم نسبی دارد.

ب- اگر $f''(c) > 0$ آنگاه تابع f در نقطه c مینیمم نسبی دارد.

ج- اگر $f''(c) = 0$ باشد، از این آزمون نتیجه‌ای نخواهیم گرفت.

مثال ۷۹: تابع $f(x) = 3\sqrt{x^3} - x^2$ مفروض است، عبارت صحیح در مورد این تابع کدام است؟

- (۱) تابع ماکزیمم و مینیمم ندارد. (۲) یک مینیمم و یک ماکزیمم دارد. (۳) تابع دو ماکزیمم و یک مینیمم دارد. (۴) تابع دو ماکزیمم و دو مینیمم دارد.

پاسخ: گزینه «۳»
 $f(x) = 3\sqrt{x^3} - x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{\sqrt{x}} - 2x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{x}} - 2x = 0 \Rightarrow x\sqrt{x} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

$f''(x) = -\frac{9}{2\sqrt{x^3}} - 2 \Rightarrow \begin{cases} f''(1) < 0 \\ f''(-1) < 0 \end{cases}$

با توجه به آزمون مشتق دوم نقاط $\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$ هر دو طول نقاط ماکزیمم هستند، اما با توجه به اینکه در $x=0$ تابع مشتق ندارد و بررسی اینکه حول این نقطه علامت مشتق از مثبت به منفی تغییر پیدا می‌کند لذا نقطه $x=0$ طول نقطه مینیمم است.

مثال ۸۰: فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر روی R باشد و برای هر $x \in R$ داشته باشیم $f(x) \leq 0$. اگر $f(c) = 0$ ، آنگاه:

- (۱) $f'(c)$ وجود دارد. (۲) $f'(c) = 0$ (۳) $f'(c) > 0$ (۴) $f'(c) < 0$

پاسخ: گزینه «۲» چون همواره $f(x) \leq 0$ پس c نقطه ماکسیمم تابع می‌باشد و چون طبق فرض f مشتق‌پذیر است پس $f'(c) = 0$.

مثال ۸۱: نقطه $x = -3$ برای تابع $f(x) = 2x^2 + 6x^2 - 18x + 5$ چه نوع نقطه‌ای است؟

- (۱) ماکسیمم نسبی (۲) مینیمم نسبی (۳) نقطه عادی (۴) مینیمم مطلق

پاسخ: گزینه «۱»
 $f'(x) = 6x^2 + 12x - 18 \Rightarrow f''(x) = 12x + 12$

$\Rightarrow f'(-3) = 6(-3)^2 + 12(-3) - 18 = 0, f''(-3) = 12(-3) + 12 = -24 < 0$

چون $f''(-3) < 0$ است پس $x = -3$ ماکزیمم نسبی می‌باشد.

نکته ۱۷: فرض کنید تابع f در شرایط روبرو صدق کند: $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0$

در این صورت اگر n زوج و $f^{(n)}(a) > 0$ نقطه a، نقطه مینیمم خواهد بود و اگر n زوج و $f^{(n)}(a) < 0$ نقطه a، نقطه ماکسیمم خواهد بود. اگر n فرد باشد، a نقطه عطف است.

تعریف نقاط بحرانی: نقاطی از دامنه تابع که مشتق در آن نقاط برابر صفر شود و یا در آن نقاط تابع مشتق پذیر نباشد را نقاط بحرانی تابع می‌نامند. برای تشخیص از روی نمودار، نقاطی که مماس بر تابع خطی موازی محور xها می‌شود و یا تابع در آن نقاط دارای شکست در نمودار می‌باشد، نقاط بحرانی می‌باشد.

تعیین نقاط Min, Max مطلق تابع

برای تعیین Min, Max مطلق تابع $y = f(x)$ در فاصله $[a, b]$ به ترتیب زیر عمل خواهیم کرد.

۱- نقاط بحرانی تابع را بدست آورده و مقدار تابع را در این نقاط بدست می‌آوریم.

۲- مقدار تابع در نقاط a, b را نیز بدست می‌آوریم.

۳- بین این نقاط بزرگترین عدد Max مطلق، و کوچکترین عدد Min مطلق تابع خواهد بود.

مثال ۸۲: نقاط Min و Max نسبی و مطلق تابع $y = x^2 - 3x$ را در بازه $[0, 2]$ بدست آورید.

پاسخ:
 $y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y''(1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min نسبی} \\ x=-1 \Rightarrow \text{غ.ق.ق (خارج بازه)} \end{cases}$

$f(1) = -2$
 $f(0) = 0$
 $f(2) = 2$

نقطه (2, 2) Max مطلق تابع است، نقطه (1, -2) Min مطلق و همچنین Min نسبی تابع می‌باشد.

مثال ۸۳: مینیمم عبارت $2x^2 \ln x - x^2$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) -1 (۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۳»
 $A(x) = x^2(2 \ln x - 1) \Rightarrow A'(x) = 2x(2 \ln x - 1) + (\frac{2}{x})(x^2) = 4x \ln x - 2x + 2x = 4x \ln x$

$\Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \ln x = 0 \rightarrow x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow A=0 \\ x=1 \rightarrow A=2 \ln 1 - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{Min}(A) = -1}$

تعیین صعودی و نزولی بودن توابع به کمک مشتق

فرض کنیم f تابعی باشد که در فاصله بسته $[a, b]$ پیوسته باشد و در فاصله (a, b) مشتق پذیر باشد، در این صورت:

۱- اگر به ازاء هر x در بازه (a, b)، $f'(x) > 0$ آنگاه f بر $[a, b]$ اکیداً صعودی است. (اگر $f'(x) \geq 0$ باشد تابع صعودی می‌باشد).

۲- اگر به ازاء هر x در بازه (a, b)، $f'(x) < 0$ آنگاه f بر $[a, b]$ اکیداً نزولی است. (اگر $f'(x) \leq 0$ باشد تابع نزولی می‌باشد).

۳- اگر $f'(x) = 0$ باشد f در تمام نقاط $[a, b]$ ثابت است.

کدامیک از توابع زیر بر روی اعداد حقیقی صعودی است؟

(۱) $f(x) = \sin x - x$ (۲) $f(x) = x + 2 \cos x$ (۳) $f(x) = x + 2 \sin x$ (۴) $f(x) = x - \sin x$

پاسخ: گزینه «۴» برای آن که تابع $f(x)$ صعودی باشد باید $f'(x) \geq 0$ باشد که تنها گزینه «۴» این حالت را دارا می‌باشد.

$f'(x) = 1 - \cos x \Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq 2$

نکته ۱۸: اگر تابع f صعودی باشد، $\frac{1}{f}$ تابعی است نزولی.

کدامیک از توابع زیر همواره صعودی نیست؟

(۱) $y = x^2 |x|$ (۲) $y = x |x|$ (۳) $y = \ln x$ (۴) $y = x + \sin x$

پاسخ: گزینه «۱»

$y = x^2 |x| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases}$

چون y' در فاصله $(-\infty, 0)$ مقداری منفی است پس در این فاصله تابع نزولی است.

$y = x |x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ y' همواره مثبت است

$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$ با توجه به دامنه \ln ، چون $x > 0$ همواره مثبت است

$y = x + \sin x \Rightarrow y' = 1 + \cos x \geq 0$ y صعودی است

کدامیک از توابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ بر کدام بازه صعودی است؟

(۱) $(-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ (۲) $(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ (۳) $(0, \pi)$ (۴) $(-\pi, 0)$

$f'(x) = \frac{\cos x(2 + \cos x) + \sin x \cdot \sin x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$ پاسخ: گزینه «۲»

$f'(x) > 0 \Rightarrow 2 \cos x + 1 > 0 \Rightarrow \cos x > -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$



توجه: برای حل نامعادله $\cos x > -\frac{1}{2}$ از دایره مثلثاتی استفاده کنید، ابتدا نقاطی را بیابید که در آنها $\cos x = -\frac{1}{2}$ یعنی $x = \pm \frac{2\pi}{3}$ و جواب نامعادله ما بین دو ریشه یا خارج دو ریشه خواهد بود.

کدامیک از توابع $f: [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و روی (a, b) اکسترمم نسبی نداشته باشد، آنگاه کدام عبارت زیر همواره صحیح است؟

(۱) f تابعی نزولی است. (۲) f تابعی صعودی است. (۳) f تابعی یک به یک است. (۴) نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت.

پاسخ: گزینه «۳» اگر f یک به یک نباشد، غیر یکنواست یعنی صعود و نزولی می‌کند و در این صورت نقطه اکسترمم خواهد داشت که خلاف فرض است، پس f یک به یک خواهد بود.



توجه: از طرفی در مسئله فوق f لزوماً صعودی یا نزولی نخواهد بود، به طور مثال توابع $f(x) = x$ و $f(x) = -x$ را در نظر بگیرید اولی صعودی و دومی نزولی است و در شرایط مسأله صدق می‌کنند.

کدامیک از توابع $f(x) = \sin x - bx + c$ همواره نزولی است؟

(۱) $b \geq 1$ (۲) $b \leq 1$ (۳) $b > 4$ (۴) $b \leq 0$

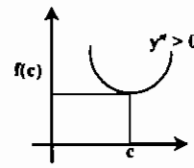
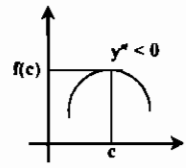
$f(x) = \sin x - bx + c \Rightarrow f'(x) = \cos x - b \leq 0 \Rightarrow \cos x \leq b$ پاسخ: گزینه «۱»

برای برقراری نلساوی فوق باید $b \geq 1$ باشد.

قضیه تقعر: فرض کنیم تابع f در همسایگی نقطه c مشتق اول و دوم داشته باشد، داریم:

۱- اگر $f''(c) > 0$ آنگاه تقعر (گودی) نمودار f در $(c, f(c))$ به طرف بالا است. (نمودار توابعی به این فرم را مقعر نیز می‌گویند)

۲- اگر $f''(c) < 0$ آنگاه تقعر (گودی) نمودار f در $(c, f(c))$ به طرف پائین است. (نمودار توابعی به این فرم را محدب نیز می‌گویند)



نقطه عطف: نقطه $(c, f(c))$ را نقطه عطف نمودار تابع f گوئیم هر گاه دو شرط زیر برقرار باشد:

(۱) مشتق اول در نقطه c وجود داشته باشد (متناهی یا نامتناهی) یا به عبارت دیگر در نقطه عطف مماس بر منحنی وجود داشته باشد. (تابع پیوسته باشد)

(۲) مشتق دوم حول نقطه c تغییر علامت دهد. (واجب نیست $f''(c) = 0$ شود)

* تذکر ۱۱: برای بدست آوردن طول نقطه عطف غالباً $f''(x) = 0$ قرار داده می‌شود، و ریشه این معادله معمولاً طول نقطه عطف است، البته در بعضی موارد این امر درست نیست و شرط تغییر علامت $f''(x)$ نیز باید بررسی شود.

* تذکر ۱۲: در نقطه عطف جهت تقعر نمودار منحنی عوض می‌شود.

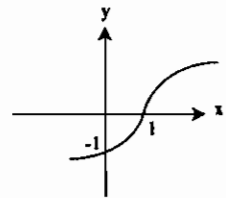
کدامیک از توابع $f(x) = x^2 + 2ax^2 + a$ در نقطه $x = 1$ عوض شود، مقدار a کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» جهت تقعر منحنی در نقطه عطف منحنی عوض می‌شود و با توجه به اینکه طول نقطه عطف $x = 1$ می‌باشد لذا داریم:

$y = x^2 + 2ax^2 + a \Rightarrow y' = 2x + 4ax \Rightarrow y'' = 2 + 4a \xrightarrow{x=1} y''(1) = 6 + 4a = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

کدامیک از توابع $y = \sqrt{x-1}$ جهت تقعر و مختصات نقطه عطف تابع y را تعیین کنید.



تابع اکیداً صعودی است $y' = \frac{1}{\sqrt{x-1}} > 0$

$y'' = -\frac{1}{2(x-1)^{3/2}} < 0 \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 1^+ \rightarrow y'' < 0 \\ x \rightarrow 1^- \rightarrow y'' > 0 \end{cases}$

تابع در $x = 1$ دارای مشتق دوم ∞ است اما چون تابع $f''(x)$ در این نقطه تغییر علامت دارد و مشتق اول نیز وجود دارد (نامتناهی) $x = 1$ طول نقطه عطف خواهد بود. جهت تقعر قبل از نقطه $x = 1$ رو به بالا و بعد از نقطه $x = 1$ جهت تقعر به طرف پائین می‌باشد.

کدامیک از توابع $y = \sqrt{x-1}$ به طول $x = 1$ چه نوع نقطه‌ای است؟

(۱) عطف (۲) عادی (۳) اکسترمم مطلق (۴) بازگشت

پاسخ: گزینه «۴»

$y' = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \rightarrow y'' = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}^3} < 0$

توجه شود که y همواره منفی می‌باشد و حول نقطه $x = 1$ هیچگونه تغییر علامت نداریم لذا $x = 1$ طول نقطه بازگشت تابع است، البته با توجه به مشتق اول نیز با این استدلال که در نقطه $x = 1$ مقادیر مشتق (اول) چپ و راست تابع $+\infty$ و $-\infty$ می‌باشند، می‌توان به این نتیجه رسید. با توجه به دو مثال فوق به نتایج زیر خواهیم رسید:

نکته ۱۹: هرگاه مشتق تابع نامتناهی و علامت آن در نقطه‌ای همواره مثبت و یا همواره منفی باشد آنگاه آن نقطه معمولاً طول نقطه عطف است. در غیر این صورت (علامت مشتق اول حول نقطه مختلف‌العلامه باشد) آن نقطه معمولاً طول نقطه بازگشت می‌باشد.

نکته ۲۰: در توابع رادیکالی با فرجه فرد به فرم $f(x) = \sqrt[k]{x-\alpha}$ اگر $n < 2k + 1$ باشد آنگاه:

(۱) اگر n زوج باشد $x = \alpha$ طول نقطه بازگشت تابع می‌باشد و تابع دارای اکسترمم نسبی نیز می‌باشد و شکل این توابع به فرم $y = \sqrt[k]{x}$ است.

(۲) اگر n فرد باشد $x = \alpha$ طول نقطه عطف تابع می‌باشد و شکل آن به فرم $y = \sqrt[k]{x}$ است.

نکته ۲۱: در توابع رادیکالی با فرجه زوج به فرم $f(x) = \sqrt[k]{(x-\alpha)^n}$ داریم:

- (۱) اگر $n < 2k$ و زوج n باشد آنگاه $x = \alpha$ طول نقطه بازگشت تابع می‌باشد تابع در این نقطه اکسترمم نسبی دارد.
- (۲) اگر $n > 2k$ و زوج n باشد آنگاه $x = \alpha$ می‌تواند طول اکسترمم یا عطف تابع باشد (باید بررسی شود)
- (۳) اگر n فرد باشد، آنگاه تابع فقط به ازای $x \geq \alpha$ تعریف شده است و نمودار آن شبیه تابع $y = \sqrt{x}$ می‌باشد.

نکته ۹۲: در تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول c روابط زیر برقرار است. برای تابع $f(x)$ نقطه c چگونه نقطه‌ای است؟

$$f'(c^-) = 2, \quad f'(c^+) = -1, \quad f(c) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 2$$

پاسخ: چون در نقطه بطول c مشتق‌های چپ و راست یکسان نیستند پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست و $x = c$ یک نقطه بحرانی تابع $f(x)$ می‌باشد و چون مشتق قبل از c مثبت و بعد از آن منفی می‌شود پس $x = c$ طول نقطه Max است.

نکته ۹۳: در تابع $y = \sqrt{x^2 - x^2}$ نقاط ۰ و ۱ به ترتیب چه نوع نقاطی هستند؟

- (۱) مینیمم، ماکسیمم
- (۲) ماکسیمم، عطف
- (۳) مینیمم، عطف
- (۴) بازگشت، ماکسیمم

پاسخ: گزینه «۲» در همسایگی نقطه $x = 0$ تابع داده شده را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$y = \sqrt{x^2 - x^2} \sim \sqrt{-x^2} = -\sqrt{x^2} \xrightarrow{\text{نکته (۲۰)}} \text{نقطه بازگشت و ماکسیمم}$$

و در همسایگی $x = 1$ تابع را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$y = \sqrt{x^2 - x^2} = \sqrt{x^2(x-1)} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{x-1} \sim \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{نکته (۲۰)}} \text{نقطه عطف}$$

نکته ۹۴: طول نقاط ماکزیمم و عطف تابع $f(x) = xe^{-x}$ بترتیب کدام است؟

- (۱) و ۲
- (۲) و ۱
- (۳) و ۱
- (۴) و ۱

پاسخ: گزینه «۱» طول نقطه ماکزیمم $y' = e^{-x} - xe^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Rightarrow x = 1$

طول نقطه عطف $y'' = -2e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$

نکته ۲۲: در نقطه عطف مماس بر منحنی از خود منحنی عبور می‌کند.

نکته ۹۵: اگر مماس بر منحنی تابع $y = ax^2 + 6x^2 + 1$ در نقطه $x = 1$ از منحنی عبور کند، a چقدر است؟

- (۱) -۲
- (۲) -۱
- (۳) ۱
- (۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» مماس بر منحنی در توابع درجه سوم در نقطه عطف از منحنی عبور می‌کند پس داریم:

$$y' = 2ax + 12x \Rightarrow y'' = 6ax + 12 \Rightarrow 6ax + 12 = 0 \xrightarrow{x=1} 6a + 12 = 0 \Rightarrow a = -2$$

نکته ۹۶: شرط صحیح بین ضرایب a, b, c در منحنی $y = ax^2 + bx^2 + cx^2 + dx + e$ به منظور داشتن نقطه عطف کدام است؟

- (۱) $3b^2 - 8ac > 0$
- (۲) $3b^2 - 8ac < 0$
- (۳) $a + b + c = 0$
- (۴) $a + b = 4c$

پاسخ: گزینه «۱» $y' = 2ax^2 + 2bx^2 + 2cx + d \Rightarrow y'' = 4ax^2 + 4bx + 2c$

$$y'' = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 12ax^2 + 6bx + 2c = 0 \Rightarrow 6ax^2 + 3bx + c = 0$$

$$(3b)^2 - 4(6a)c > 0 \Rightarrow 3b^2 - 8ac > 0$$

برای این که معادله دارای جواب باشد باید $\Delta > 0$ باشد:

نکته ۲۳: در توابع درجه سوم به شکل $y = ax^2 + bx^2 + cx + d$ نکات زیر را داریم:

(۱) $x = -\frac{b}{3a}$ طول نقطه عطف است.

(۲) اگر $a > 0$ آنگاه طول نقطه Max بزرگتر از طول نقطه Min است و اگر $a < 0$ طول نقطه Min بزرگتر از طول Max است.

(۳) نقطه عطف تابع، مرکز تقارن آن است.

اگر معادله مشتق $f'(x) = 0$ دارای دو ریشه متمایز باشد آنگاه تابع یک Max و یک Min دارد و مختصات نقطه عطف به صورت

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2} \\ y_1 = \frac{y_{\min} + y_{\max}}{2} \end{cases}$$

خواهد بود عبارت دیگر مجموع عرض (یا طول) نقاط ماکزیمم و مینیمم دو برابر عرض (یا طول) نقطه عطف می‌باشد.

نکته ۹۷: به ازای کدام مقدار m مجموع طولهای ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y = mx^2 - 2x^2 - x$ برابر یک می‌باشد؟

- (۱) $m = -2$
- (۲) $m = -1$
- (۳) $m = 1$
- (۴) $m = 2$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به نکته فوق داریم:

$$x_1 = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} = \frac{1}{2}, \quad y = mx^2 - 2x^2 - x \Rightarrow x_1 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2m} = \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 2$$

نکته ۲۴: تابع $y = (x-a)|x-a|$ در $x = a$ دارای نقطه عطف است.

قضایای رُل، مقدار میانگین و لاگرانژ

قضیه رُل: اگر تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق پذیر باشد و $f(a) = f(b)$ آنگاه حداقل یک نقطه مانند c بین a و b وجود دارد بطوریکه $f'(c) = 0$ باشد بنابراین اگر f مشتق پذیر باشد، f' بین هر دو ریشه متوالی f حداقل یک ریشه دارد.

نکته ۹۸: عدد c مورد نظر در قضیه رُل برای تابع $f(x) = x^2 - 7x + 18$ روی $[2, 4]$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{2}$
- (۲) $\frac{7}{2}$
- (۳) $\frac{7}{4}$
- (۴) $-\frac{7}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» $f(x) = x^2 - 7x + 18 \Rightarrow f'(x) = 2x - 7 \Rightarrow f'(c) = 2c - 7 = 0 \Rightarrow c = \frac{7}{2}$

نکته ۹۹: کدامیک از توابع زیر با توجه به بازه‌های داده شده در شرایط قضیه رُل صدق می‌کند؟

(۱) در بازه $[-1, 1]$: $f(x) = 1 - \sqrt{x^2}$

(۲) در بازه $[1, 2]$: $f(x) = x^2 - 3x^2 - 1$

(۳) در بازه $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$: $f(x) = \ln \sin x$

(۴) در بازه $[-1, 1]$: $f(x) = 1 - |x|$

پاسخ: گزینه «۳»

$f(x) = 1 - \sqrt{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2}} \Rightarrow$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست.

مقدار f در دو سر بازه با هم برابر نیست. $f(x) = x^2 - 3x^2 - 1 \Rightarrow f(1) = -2, f(2) = -5$

در $x = 0$ مشتق پذیر نیست. $f(x) = 1 - |x|$

اما تابع $f(x) = \ln \sin x$ در بازه $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ پیوسته و مشتق پذیر است و همچنین $f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{5\pi}{6})$

نتیجه اول قضیه رُل: اگر $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته و در فاصله (a, b) مشتق پذیر باشد و $f'(x)$ دارای n ریشه در این فاصله باشد آنگاه $f(x)$ حداکثر دارای $n+1$ ریشه در این فاصله است.

نکته ۱۰۰: معادله $x^6 + x^4 + x^2 - 1 = 0$ حداکثر دارای چند ریشه حقیقی است؟

- (۱) ۶ ریشه
- (۲) ۴ ریشه
- (۳) ۲ ریشه
- (۴) ریشه حقیقی ندارد.

پاسخ: گزینه «۲» تابع $f(x)$ کلیه مشتقات را دارا می‌باشد و داریم:

$$f'(x) = x(6x^5 + 4x^3 + 2) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (\text{تنها ریشه معادله})$$

همواره مثبت

با توجه به نتیجه قضیه رُل چون مشتق دارای یک ریشه است لذا تابع اصلی حداکثر دارای دو ریشه می‌تواند باشد.

نکته ۱۰۱: اگر تابع مشتق پذیر f در بازه $[a, b]$ دارای ۲۰ ریشه باشد، کدام جمله در مورد $f'(x)$ روی $[a, b]$ صحیح تر است؟

- (۱) حداقل ۲۱ ریشه دارد.
- (۲) حداقل ۱۹ ریشه دارد.
- (۳) حداکثر ۱۹ ریشه دارد.
- (۴) حداکثر ۲۱ ریشه دارد.

پاسخ: گزینه «۲» چون f ۲۰ ریشه دارد، پس طبق قضیه رُل f' بین هر دو ریشه متوالی f حداقل یک ریشه خواهد داشت، یعنی f حداقل ۱۹ ریشه دارد.

نتیجه دوم قضیه رُل: بسادگی به کمک قضیه رُل می‌توان نشان داد که:

اگر f دارای n ریشه باشد (f از هر مرتبه مشتق پذیر)، آنگاه f' حداقل $(n-1)$ ریشه، f'' حداقل $(n-2)$ ریشه و بالاخره $f^{(n-1)}$ حداقل یک ریشه دارد.

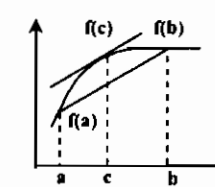
که مثال ۱۰۲: اگر منحنی $f(x)$ نیمساز ربع اول و سوم را در سه نقطه قطع کند و f در R دو بار مشتق پذیر باشد، آنگاه معادله $f''(x) = 0$:

- (۱) حداقل دو ریشه دارد. (۲) حداقل یک ریشه دارد. (۳) حداکثر یک ریشه دارد. (۴) حداکثر دو ریشه دارد.

پاسخ: گزینه «۲» قرار می‌دهیم $g(x) = f(x) - x$ ، طبق فرض مسأله $g(x) = 0$ سه ریشه دارد و تابع g در R دو بار مشتق پذیر است، پس طبق نتیجه دوم قضیه رل $g''(x) = f''(x) = 0$ حداقل یک ریشه دارد.

قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ): هرگاه تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته و روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد، آنگاه حداقل یک نقطه مانند

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (a < c < b) \text{ وجود دارد بطوریکه:}$$



$m = f'(c)$: شیب میانگین می‌باشد و عبارتست از شیب خط مماس در نقطه‌ای به طول c که به موازات پاره خط واصل نقاط $(a, f(a)), (b, f(b))$ خواهد بود.

قضیه کشی:

فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته و در فاصله (a, b) مشتق پذیر باشند و همچنین $g(a) \neq g(b)$ و $g'(x) \neq 0$ در

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

این صورت حداقل یک c بین a و b وجود دارد به طوریکه:

که مثال ۱۰۳: در قضیه لاگرانژ عدد c برای تابع $f(x) = 3x^2 - 5$ روی بازه $[-2, 0]$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) در قضیه لاگرانژ صدق نمی‌کند.

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases} f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{-5 - 7}{2} = -6 & (1) \\ f(x) = 3x^2 - 5 \Rightarrow f'(x) = 6x \Rightarrow f'(c) = 6c & (2) \end{cases} \Rightarrow 6c = -6 \Rightarrow c = -1$$

* کاربرد مشتق در تعیین مقادیر حداکثر و حداقل (کاربردهای صنعتی)

اینگونه مسائل معمولاً شامل دو متغیر می‌باشند، که معمولاً یک معادله بر حسب دو متغیر که برابر یک مقدار معلوم (یا پس از رسم شکل مسأله می‌توان معادله را نوشت) که از این معادله ما باید یکی از متغیرها را بر حسب متغیر دیگر بدست آوریم و در معادله دیگری که \min و \max آن خواسته مسأله می‌باشد قرار دهیم و از آن مشتق گرفته و سپس مقادیر \min و \max آن را تعیین کنیم، به مثالهای زیر توجه کنید.

که مثال ۱۰۴: ابعاد مستطیلی را پیدا کنید تا محیط آن حداقل و مساحت آن برابر ۳۶ باشد؟

$$\begin{cases} S = x \cdot y = 36 \rightarrow \text{معادله برابر مقدار ثابت} \rightarrow y = \frac{36}{x} \\ P = 2(x + y) \rightarrow \text{معادله خواسته مسأله} \rightarrow P(x) = 2(x + \frac{36}{x}) \rightarrow P'(x) = 2(\frac{x^2 - 36}{x^2}) = 0 \rightarrow x = \pm 6 \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases} \end{cases}$$

که مثال ۱۰۵: اگر $x + y = 4$ باشد، حداکثر مقدار $A(x) = x^2 - 2y^2$ چقدر است؟

$$\begin{aligned} x + y = 4 \rightarrow y = 4 - x \rightarrow A(x) &= -x^2 + 16x - 32 \\ \rightarrow A'(x) = -2x + 16 = 0 &\rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow A = 32 \end{aligned}$$

که مثال ۱۰۶: کوتاهترین فاصله نقطه $A(5, 0)$ را از منحنی $y^2 = 4x$ را پیدا کنید.

$$\begin{aligned} B = \begin{cases} x \\ \sqrt{4x} \end{cases} \Rightarrow \text{روی منحنی قرار دارد} \Rightarrow d &= \sqrt{(5-x)^2 + (0-\sqrt{4x})^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 25} \\ \Rightarrow D(x) = x^2 - 6x + 25 \Rightarrow D'(x) = 2x - 6 = 0 &\Rightarrow x = 3 \rightarrow d = 4 \end{aligned}$$

کافیست کمترین مقدار عبارت زیر را بدست آوریم:

فرمولهای لازم برای حل مسائل خاص این قسمت:

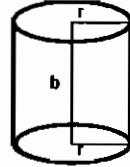
۱- حجم منشور به مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر است با: $V = S \cdot h$

۲- حجم یک مخروط به شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

۳- حجم کره‌ای به شعاع r برابر است با: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

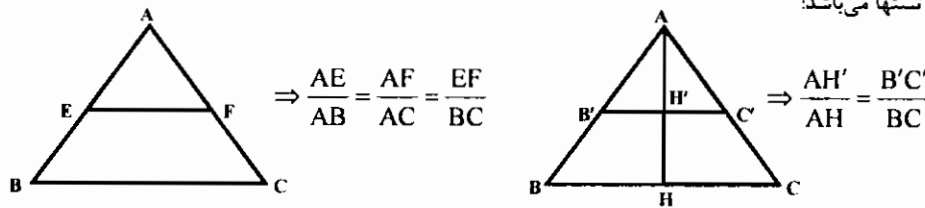
۴- مساحت کره‌ای به شعاع r برابر است با: $S = 4\pi r^2$

۵- مساحت و حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده r و ارتفاع h :
(S : مساحت کل استوانه)



$$\begin{cases} S = 2\pi r^2 + 2\pi r h & (\text{مساحت دو قاعده}) \\ S = 2\pi r h + 2\pi r^2 & (\text{مساحت جانبی استوانه}) \\ V = \pi r^2 h & (\text{فرمول حجم استوانه}) \end{cases}$$

۶- روابط زیر نیز قابل استفاده در تستها می‌باشد:



که مثال ۱۰۷: در کره‌ای به شعاع ثابت R مخروطی با مینیمم حجم محیط کنید.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi y^2 (R+x)}{3}$$

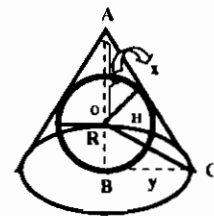
اگر ارتفاع مخروط را $x + R$ و شعاع قاعده آنرا y فرض کنیم حجم مخروط برابر است با:

حال باید از دو متغیر x, y یکی را حذف کنیم از تشابه دو مثلث AOH, ABC داریم:

$$\frac{R}{y} = \frac{\sqrt{x^2 - R^2}}{x + R}$$

$$V(x) = \frac{1}{3} \pi y^2 (x + R) = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot \frac{(x + R)^2}{x - R} \Rightarrow$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x = 2R, \quad h = 4R, \quad y = R\sqrt{2}$$



نکته ۲۵: اگر بر کره‌ای به شعاع ثابت R مخروطی به ارتفاع h با مینیمم حجم محیط کنیم، آنگاه شعاع قاعده مخروط $r = R\sqrt{2}$ و ارتفاع مخروط $h = 4R$ خواهد بود.

که مثال ۱۰۸: اگر در کره‌ای با شعاع ۳ مخروطی به ارتفاع h با مینیمم حجم محیط کنیم آنگاه ارتفاع مخروط کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۱۲ (۴) $\frac{9\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته فوق $h = 4 \times 3 = 12$ خواهد بود.

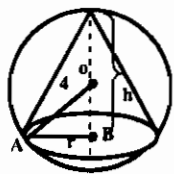
که مثال ۱۰۹: بیشترین حجم مخروطهای قائمی که درون یک کره به شعاع ۳ قرار می‌گیرند، کدام است؟

- (۱) $\frac{32\pi}{3}$ (۲) $\frac{16\pi}{3}$ (۳) $\frac{21\pi}{2}$ (۴) $\frac{27\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا باید یک معادله دو متغیره که برابر یک مقدار ثابت است

فراهم سازیم با توجه به شکل در مثلث قائم‌الزاویه OAB داریم: O مرکز کره می‌باشد در نتیجه $OA = 3$ شعاع کره و وتر مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد لذا داریم:

$$(h-3)^2 + r^2 = 9 \text{ اما با توجه به فرمول حجم مخروط } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ داریم:}$$



$$V = \frac{1}{3}\pi hr^2 = \frac{\pi}{3}h[9 - (h-r)^2] \Rightarrow V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3}[9 - (h-r)^2] + \frac{\pi}{3}h[-2(h-r)] = 0$$

$$-2h^2 + 12h = 0 \Rightarrow \begin{cases} h=0 & \text{غ ق} \\ h=2 & \text{یا} \end{cases} \rightarrow V(2) = \frac{22\pi}{3}$$

روش دوم: اگر در کره‌ای به شعاع R مخروطی با حجم ماکزیمم محاط کنیم و شعاع قاعده r، ارتفاع h و حجم مخروط V باشد آنگاه حجم ماکزیمم از رابطه: $V_{\max} = \frac{22\pi R^3}{81}$ بدست می‌آید در این تست R = 3 است یعنی:

نکته ۲۶: اگر در کره‌ای به شعاع ثابت R مخروطی با حجم Max محاط کنیم و شعاع قاعده r، ارتفاع آن h و حجم آن V باشد روابط زیر را داریم:

$$h = \frac{4R}{3}, r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}, V = \pi R^3 \times \frac{22}{81}$$

مثال ۱۱۰: در داخل کره‌ای به شعاع ۳ مخروطی با حجم ماکزیمم محاط می‌کنیم، ارتفاع مخروط کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۵

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته فوق خواهیم داشت: $h = \frac{4 \times 3}{3} = 4$

مثال ۱۱۱: کره‌ای به شعاع R و مخروطی به ارتفاع h در کره محاط شده است، اگر حجم مخروط محاط شده ماکزیمم باشد، نسبت $\frac{h}{R}$ کدام است؟

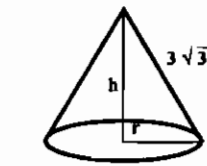
- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته فوق $h = \frac{4}{3}R$ در نتیجه $\frac{h}{R} = \frac{4}{3}$ خواهد بود.

مثال ۱۱۲: بیشترین حجم از بین مخروطهائی که طول مولد آنها $2\sqrt{3}$ است کدام است؟

- (۱) 12π (۲) 15π (۳) 18π (۴) 27π

پاسخ: گزینه «۳» $r^2 + h^2 = 27 \rightarrow V = \frac{\pi r^2 h}{3}$



$$r^2 = 27 - h^2$$

$$\rightarrow V = \frac{\pi h}{3}(27 - h^2) \rightarrow V = 9\pi h - \frac{\pi h^3}{3}$$

$$V' = 9\pi - \pi h^2 \xrightarrow{V'=0} h=3 \rightarrow V=18\pi$$

مثال ۱۱۳: مجموعه تمام مستطیل هائی که محیط آنها ۱۶ است را در نظر می‌گیریم مینیمم مجموعه طول اقطار این مستطیل‌ها کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) ۶

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x \Rightarrow d^2 = x^2 + (8-x)^2 = 2x^2 - 16x + 64 \\ d = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow (d^2)' = 4x - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow d = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

مثال ۱۱۴: از یک صفحه فلزی به مساحت 150π یک قوطی استوانه‌ای به حجم ماکزیمم می‌سازیم، مقدار این حجم چقدر خواهد بود.

- (۱) 250π (۲) 280π (۳) 300π (۴) 320π

پاسخ: گزینه «۱»

(۱) $2\pi rh + 2\pi r^2 = 150\pi$

(۲) $\text{حجم قوطی استوانه‌ای} = \pi r^2 h$

(۱) $\rightarrow rh + r^2 = 75 \Rightarrow rh = 75 - r^2$

(۲) $\rightarrow V(r) = \pi r(75 - r^2) \Rightarrow V'(r) = \pi(75 - 3r^2) = 0 \Rightarrow 75 - 3r^2 = 0$

$\Rightarrow 3r^2 = 75 \Rightarrow r^2 = 25 \rightarrow r=5 \Rightarrow h = \frac{75 - r^2}{r} = \frac{75 - 25}{5} = 10 \Rightarrow V = 250\pi$

مثال ۱۱۵: کوتاهترین فاصله منحنی $y = x^2$ از خط $y - 2x + 2 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

پاسخ: گزینه «۴» نقطه $A(\alpha, \alpha^2)$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم:

$$d = \frac{|\alpha^2 - 2\alpha + 2|}{\sqrt{4+1}} \Rightarrow d'(\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

از قضایای زیر نیز می‌توان در تعیین مفادیر حداقل و حداکثر نیز بهره برد:

۱- اگر $x + y + z = k$ آنگاه حداکثر مقدار عبارت $A = x^\alpha y^\beta z^\gamma$ در شرایطی رخ می‌دهد که باشیم:

۲- اگر $xyz = 1$ آنگاه حداکثر مقدار عبارت $A = x^\alpha + y^\beta + z^\gamma$ در شرایطی رخ می‌دهد که:

مثال ۱۱۶: بیشترین مقدار $y = 5 \sin^4 x \cos x$ کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) $16\sqrt{5}$ (۳) $5\sqrt{5}$ (۴) $\frac{16\sqrt{5}}{25}$

پاسخ: گزینه «۴» باید بیشترین مقدار $A = (\sin^4 x)(\cos x)$ را تعیین کنیم:

$$\sin^4 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{2} = \frac{\cos^2 x}{(\frac{1}{2})} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \frac{4}{5} \\ \cos^2 x = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \text{Max}(y) = 5(\frac{4}{5})^2(\frac{1}{5})^{\frac{1}{2}} = \frac{16}{5\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{25}$$

نکته ۲۷: اگر $ax + by = c$ باشد، حداکثر xy زمانی اتفاق می‌افتد که $ax = by = \frac{c}{2}$ باشد (a و b و c اعداد ثابت هستند).

مثال ۱۱۷: اگر $3x + 4y = 24$ آنگاه ماکزیمم xy کدام است؟

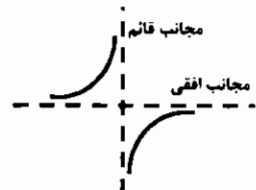
- (۱) ۲۴ (۲) ۲۵ (۳) ۷ (۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به نکته فوق ماکزیمم xy زمانی است که $3x = 4y = \frac{24}{2}$ باشد و یا $x=4$ و $y=3$ باشد، لذا داریم:

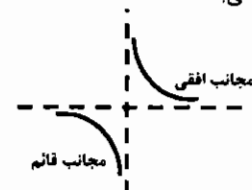
$\text{Max}(xy) = 3 \times 4 = 12$

توابع هموگرافیک

توابعی به شکل $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ را توابع هموگرافیک نامیم، این تابع دارای دو محور تقارن متعامد می‌باشد که از محل برخورد مجانبهای تابع می‌گذرند. شیب خطوط محور تقارن -۱،۱ می‌باشد و دارای مرکز تقارن که همان محل تلاقی مجانبها نیز هست، می‌باشد. مشتق اینگونه توابع به شکل $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ می‌باشد.



(ad - bc > 0)



(ad - bc < 0)

نکته ۲۸: اگر $ad - bc > 0$ باشد، تابع اکیداً صعودی و اگر $ad - bc < 0$ باشد تابع اکیداً نزولی است. (در فواصل پیوستگی)

نکته ۲۹: محل برخورد مجانبهای تابع $x = -\frac{d}{c}$ (مجانب قائم) و $y = \frac{a}{c}$ (مجانب افقی) همان مرکز تقارن $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ می‌باشد.

مثال ۱۱۸: محور تقارن و مرکز تقارن منحنی $y = \frac{ax+1}{2x+4}$ را بیابید.

$$\left. \begin{aligned} \text{مجانِب قائم: } x &= -\frac{d}{c} = -\frac{4}{2} = -2 \\ \text{مجانِب افقی: } y &= \frac{a}{c} = \frac{1}{2} = 0.5 \end{aligned} \right\} \text{مرکز تقارن} \rightarrow W(-2, 0.5)$$

پاسخ:

چند نکته در مورد نمودار توابعی به فرم کلی $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ ($a' \neq 0, a \neq 0$)

(۱) معادله مشتق اینگونه توابع یا دارای دو جواب است و یا اصلاً جواب ندارد.

(۲) محل برخورد مجانبهای مایل و قائم تابع مرکز تقارن منحنی است.

(۳) نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع در صورت وجود در هوییتال تابع یعنی خط $y = \frac{2ax+b}{a'}$ صدق می‌کنند و این خط از مرکز تقارن منحنی و نقاط min و max نسبی تابع عبور می‌کند.

(۴) اگر معادله تابع را طرفین و وسطین کنیم و بر حسب X مرتب کنیم، معادله درجه دومی خواهیم داشت که اگر دلتای این معادله را برابر صفر قرار دهیم، معادله‌ای بدست خواهد آمد که ریشه‌هایش عرضهای نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع فوق خواهند بود.

مثال ۱۱۹: اگر خط $y = 2x - 3$ از نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y = \frac{ax^2 + bx - 1}{x - 1}$ عبور کند، $a - b$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکات فوق هوییتال تابع فوق از نقاط max و min تابع عبور می‌کند لذا داریم:

$$y = \frac{2ax+b}{1} = 2x-3 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases} \rightarrow a-b=4$$

چند نکته در مورد نمودار توابعی به فرم کلی $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ ($a' \neq 0$)

(۱) این نوع توابع دارای مجانب مایل نیستند و فقط می‌توانند دارای مجانبهای قائم و افقی باشند.

(۲) نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع (در صورت وجود) در هوییتال تابع یعنی $y = \frac{2ax+b}{2a'x+b'}$ صدق می‌کنند.

(۳) حاصلضرب عرضهای نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع برابر با نسبت دلتای صورت به دلتای مخرج می‌باشد: $y_{max} \cdot y_{min} = \frac{b^2 - 4ac}{(b')^2 - 4a'c'}$

(۴) اگر معادله تابع را طرفین و وسطین کرده و بر حسب X مرتب کنیم، معادله درجه دومی بدست خواهد آمد که اگر دلتای معادله مذکور را مساوی صفر قرار دهیم، معادله‌ای حاصل می‌شود که ریشه‌هایش عرضهای نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع فوق خواهند بود.

مثال ۱۲۰: در تابع به معادله $y = \frac{x^2 - 2kx + 6}{x^2 - 2x}$ ، k را چنان تعیین کنید که:

الف) مجموع عرضهای ماکزیمم و مینیمم تابع برابر ۶ باشد.

ب) حاصلضرب عرضهای ماکزیمم و مینیمم تابع برابر ۳ باشد.

پاسخ:

$$y = \frac{x^2 - 2kx + 6}{x^2 - 2x} \rightarrow yx^2 - 2kxy = x^2 - 2kx + 6 \rightarrow (y-1)x^2 - 2(y-k)x - 6 = 0 \rightarrow \Delta' = (y-k)^2 + 6(y-1) = 0$$

$$y^2 + k^2 - 2yk + 6y - 6 = 0 \rightarrow y^2 - (2k-6)y + k^2 - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} 2k-6=6 \rightarrow k=6 \\ k^2-6=3 \rightarrow k=\pm 3 \end{cases}$$

حالت الف) $k=6$
حالت ب) $k=\pm 3$



توجه: در بعضی مسائل نمودار تابع f' یا f'' داده می‌شود و در مورد تابع $f(x)$ سوال می‌شود و یا بالعکس با توجه به نمودار f راجع به نمودار f' و f'' سوال می‌شود در این قسمت مطالبی را در این زمینه بیان می‌کنیم.

حالت اول: اگر نمودار تابع $f(x)$ داده شود و نمودار تابع $f'(x)$ سوال شود:

الف) اگر در نمودار تابع f نقاط زاویه‌دار و یا نقاط ناپیوستگی و یا نقاطی که در آن نقاط، تابع مماس قائم دارد، وجود داشته باشد آنگاه این نقاط در تابع مشتق بصورت نقاط ناپیوسته مشخص خواهند شد.



ب) اگر تابع f در فاصله‌ای صعودی باشد مشتق در آن فاصله مثبت است (نمودار آن بالای محور X ها قرار می‌گیرد) و اگر تابع f در فاصله‌ای نزولی باشد، مشتق در آن فاصله منفی است (نمودار آن زیر محور X ها قرار می‌گیرد)

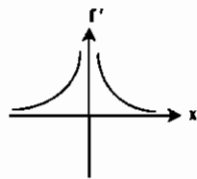


حالت دوم: اگر نمودار f' داده شود و نمودار تابع $f(x)$ سوال شود.

الف) در بازه‌هایی که نمودار f' صعودی است، جهت تقعر در نمودار f به سمت بالا است و در بازه‌هایی که نمودار f' نزولی است، جهت تقعر در نمودار f به سمت پایین است و نقاط اکسترمم نسبی تابع f نقاط عطف تابع f می‌باشند.

ب) در فواصلی که $f' > 0$ (بالای محور X ها است) است، تابع f صعودی است و در فواصلی که $f' < 0$ (پائین محور X ها است) تابع f نزولی است و در نقاطی که نمودار f' محور X ها را قطع می‌کند و از محور عبور می‌کند (طبیعتاً f' تغییر علامت خواهد داد) تابع f اکسترمم نسبی خواهد داشت.

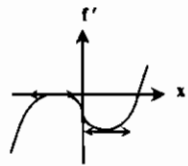
مثال ۱۲۱: نمودار مشتق تابعی بصورت زیر می‌باشد، کدام گزینه در مورد تابع در $x = 0$ صحیح است؟



- (۱) مینیمم دارد.
(۲) ماکزیمم دارد.
(۳) نقطه عطف دارد.
(۴) $x = 0$ نقطه عادی می‌باشد.

پاسخ: گزینه «۲» چون نمودار محور X ها را قطع نکرده لذا تابع نمی‌تواند max و min داشته باشد. با توجه به اینکه $f'(0^+) = f'(0^-) = +\infty$ لذا مشتق در نقطه $x = 0$ تغییر علامت ندارد، لذا گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۱۲۲: اگر نمودار f' به شکل زیر باشد در مورد تابع f کدام گزینه صحیح است؟



- (۱) دو نقطه عطف و یک ماکزیمم دارد.
(۲) یک عطف یک ماکزیمم و یک مینیمم دارد.
(۳) یک عطف و فاقد ماکزیمم و مینیمم است.
(۴) دو نقطه عطف و یک مینیمم دارد.

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به بند الف حالت دوم نقاط اکسترمم نسبی f' نقاط عطف تابع f می‌باشند لذا تابع دارای دو نقطه عطف است اما تابع دارای یک اکسترمم نسبی می‌باشد (محور X ها را نمودار قطع کرده) و با توجه به اینکه علامت مشتق از منفی به مثبت تغییر یافته لذا نقطه مذکور مینیمم است.

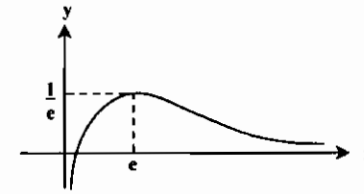
مثال ۱۲۳: نمودارهای $y = c$ و $y = f(x) = \frac{\ln x}{x}$ را در یک صفحه در نظر می‌گیریم. کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست هستند؟

- (۱) اگر $c \leq 0$ آنگاه یک نقطه تقاطع دارند. (۲) اگر $0 < c < \frac{1}{e}$ آنگاه دو نقطه تقاطع دارند.
(۳) اگر $c > \frac{1}{e}$ آنگاه هیچ نقطه تقاطعی ندارند. (۴) اگر $0 < c < \frac{1}{e}$ آنگاه یک نقطه تقاطع دارند.

پاسخ: گزینه «۴» جدول تغییرات تابع f به صورت زیر است:

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 0$

بنابراین نمودار تابع f به شکل مقابل است و با توجه به شکل گزینه (۴)، گزینه مورد نظر است.



دیفرانسیل تابع

اگر $y = f(x)$ در نقطه x مشتق پذیر باشد، آنگاه $f'(x) \cdot \Delta x$ را دیفرانسیل تابع f نامیده و آن را با df یا dy نمایش می‌دهیم. برای Δx های کوچک داریم: $\Delta y \sim dy$ و $y_2 - y_1 = f'(x) \cdot dx$

مثال ۱۲۴: در اندازه گیری شعاع یک کره به اندازه 1 cm خطا رخ داده است. اگر شعاع کره 20 cm باشد در محاسبه حجم این کره خطا چند سانتی متر مکعب است؟ ($\pi = 3$)

- (۱) $0/96$ (۲) 16 (۳) 48 (۴) $2/4$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به فرمول حجم کره $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ و دیفرانسیل گیری از طرفین رابطه داریم:

$$dv = \frac{4}{3} \pi r^2 dr \xrightarrow{\text{خطای محاسبه شعاع: } dr} dv = 4 \times 3 \times (20)^2 \times \frac{1}{100} = 48 \text{ cm}^3$$

کاربرد دیفرانسیل

بدست آوردن مقدار تقریبی بعضی عبارات از جمله کاربردهای دیفرانسیل می‌باشد برای این منظور ابتدا باید تابعی مناسب تعریف نمود، تعیین x و همچنین dx مناسب برای حل مسئله کاملاً ضروری می‌باشد.

مثال ۱۲۵: مقدار تقریبی $\sqrt[3]{26}$ را بدست آورید.

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 27, \quad dx = -1$$

$$dy = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{-1}{27} \approx -0/037$$

$$dy = y_2 - y_1 \Rightarrow y_2 = 3 - 0/037 = 2/963$$

توضیح: $\epsilon = |\Delta y - dy|$ مقدار خطا در محاسبات را برای ما روشن خواهد ساخت:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\Delta y = f(26) - f(27) = \sqrt[3]{26} - \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{26} - 3$$

مثال ۱۲۶: مقدار تقریبی $\sqrt[3]{146}$ را بصورت تقریبی بیابید و سپس با پیدا کردن مقدار Δy مقدار خطا را در محاسبات مشخص کنید.

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x_0 = 144, \quad dx = 2$$

$$dy = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{12} \Rightarrow y_2 - y_1 = dy \Rightarrow y_2 = y_1 + dy$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{146} = 12 + \frac{1}{12} = 12/0833$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt[3]{146} - \sqrt[3]{144} = 12/0833 - 12 = 0/0833$$

$$\Rightarrow \epsilon = |\Delta y - dy| = |0/0833 - 0/0833| = 0/0003$$

مثال ۱۲۷: مقدار تقریبی $\sqrt[5]{36}$ به کمک دیفرانسیل کدام است؟

- (۱) $2/15$ (۲) $2/25$ (۳) $2/05$ (۴) $2/5$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[5]{x}, \quad x = 32, \quad dx = 4 \\ dy = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} dx = \frac{4}{5\sqrt[5]{(32)^4}} = \frac{4}{5\sqrt[5]{(2^5)^4}} = \frac{1}{20} \Rightarrow y_2 = y_1 + dy = 2 + \frac{1}{20} = 2/05 \end{cases}$$

مثال ۱۲۸: مقدار تقریبی $\text{Arccotg } 0/99$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{200}$ (۲) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{200}$ (۳) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{100}$ (۴) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{100}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\begin{cases} f(x) = \text{Arccotg } x, \quad x = 1, \quad dx = -0/01 \\ dy = -\frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{(-0/01)}{1+1} = \frac{1}{200} \Rightarrow y_2 = y_1 + dy = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{200} \end{cases}$$

مثال ۱۲۹: مقدار تقریبی $\cos(31^\circ)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{260}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{180}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{260}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{180}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$f(x) = \cos x, \quad x = 30^\circ, \quad dx = 1^\circ$$

$$dy = -\sin x dx, \quad \begin{cases} x = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \\ dx = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \end{cases}$$

$$\Rightarrow dy = -\sin \frac{\pi}{6} \times \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{360} \Rightarrow y_2 = y_1 + dy \Rightarrow y_2 = \cos \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{360} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{360}$$

نکته ۳۰: از رابطه $\sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{n \cdot a^{n-1}}$ در حل بعضی مسائل میتوان استفاده نمود.

مثال ۱۳۰: مقدار تقریبی $\sqrt[4]{146}$ را مجدداً با استفاده از نکته فوق بدست آورید.

$$a = 12, \quad n = 4, \quad b = 2 \Rightarrow \sqrt[4]{146} = 12 + \frac{2}{4 \times 12^3} = 12 + \frac{1}{12} = 12/0833 \quad \text{پاسخ:}$$

مثال ۱۳۱: مقدار تقریبی $\sqrt[3]{80}$ کدام است؟

- (۱) $2/795$ (۲) $2/972$ (۳) $2/912$ (۴) $2/892$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} a = 3 \\ n = 4 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[4]{80} \approx 3 + \frac{(-1)}{4 \times 3^3} \approx 2/972 \dots$$

نکته ۳۱: در توابع درجه دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ حاصل $(\Delta x)^2$ $|\Delta y - dy|$ می‌باشد.

مثال ۱۳۲: در تابع درجه دوم $y = x^2 + 3x - 1$ اگر x به اندازه $0/1$ افزایش یابد، حاصل $\Delta y - dy$ کدام است؟

- (۱) $0/0001$ (۲) $0/001$ (۳) $0/1$ (۴) $0/01$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\Delta y - dy = (\Delta x)^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0/01$$

مثال ۱۳۳: نسبت تغییرات تابع $f(x) = \text{Arctg}x$ به تغییرات تابع $g(x) = \ln x$ در نقطه $x = 1$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\text{نسبت تغییرات} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{x}{1+x^2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

مثال ۱۳۴: کدامیک از مقادیر زیر تقریب مناسب‌تری برای $\sqrt[3]{9}$ می‌باشند؟

- (۱) $2/05$ (۲) $2/06$ (۳) $2/08$ (۴) $2/1$

پاسخ: گزینه «۳»

$f(x) = \sqrt[3]{x}, x_0 = 8, dx = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$\sqrt[3]{9} \approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} \times 1 = 2 + \frac{1}{12} \approx 2/08$

مثال ۱۳۵: نسبت تغییرات تابع $y_1 = \sqrt{1+x^2}$ به تغییرات تابع $y_2 = \sqrt{x^2+4}$ در $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\text{نسبت تغییرات} = \frac{y_1'}{y_2'} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\frac{2x}{2\sqrt{(x^2+4)^2}}} = \frac{12}{6} = 2$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم

۱- اگر $f(a) = 0$ و $f'(a) = 4$ ، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{\Delta h}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

(مکانیک - سراسری ۷۸)

۲- کدامیک از مقادیر زیر تقریب مناسب‌تری برای $\sqrt{5}$ هستند؟

- (۱) $1/75$ (۲) ۲ (۳) $2/25$ (۴) $2/5$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۸)

۳- به فرض اینکه تابع تقاضا برای یک واحد صنعتی به صورت $p = 8/25e^{-0.02q}$ باشد که در آن q و p به ترتیب میزان و قیمت فروش می‌باشد. حساب کنید در چه سطحی از فروش درآمد کل این واحد صنعتی حداکثر می‌گردد؟

- (۱) $q = 37$ (۲) $q = 39$ (۳) $q = 50$ (۴) $q = 55$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۸)

۴- با کدامیک از شروط زیر حاصل ضرب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به ازاء جميع مقادیر x صعودی است؟

- (۱) $f(x) > 0, f'(x) > 0, g(x) > 0, g'(x) > 0$
 (۲) $f(x) > 0, f'(x) > 0, g(x) > 0, g''(x) > 0$
 (۳) $f(x) > 0, f'(x) > 0, g(x) > 0, g'(x) > 0$
 (۴) $f(x) > 0, f''(x) > 0, g(x) > 0, g''(x) > 0$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۸)

۵- در نقطه بحرانی، تابع $f(x) = 2x \cdot e^{2x}$ کدام وضع را دارد؟

- (۱) بازگشت (۲) عطف (۳) مینیمم (۴) ماکزیمم

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۸)

۶- ضریب $h''(x)$ در مشتق دوم عبارت $f\{g(h(x))\}$ کدام است؟

- (۱) $f'\{g'(h(x))\}g\{h(x)\}$ (۲) $f'\{g(h(x))\}g'\{h(x)\}$ (۳) $f\{g'(h(x))\}g'\{h(x)\}$ (۴) $f\{g'(h(x))\}g\{h'(x)\}$

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۸)

۷- ضریب زاویه خط مماس بر نمودار منحنی پارامتری به معادله $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$ در $t = 2$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۸)

- (۱) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ (۳) $-\frac{\sqrt{5}}{10}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

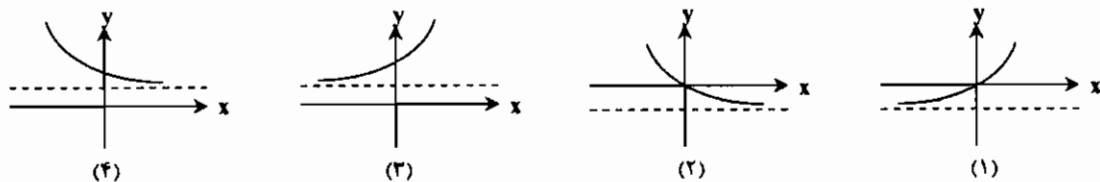
۸- مقدار مشتق عبارت $\text{Arctg}x^2$ در $x = 2$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{4}{11}$ (۲) $\frac{4}{13}$ (۳) $\frac{4}{15}$ (۴) $\frac{4}{17}$

۹- نمودار تابع $y = e^x - 1$ به کدام صورت است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۸)



۱۰- به ازای کدام مقادیر n ، مبدأ مختصات یک نقطه بحرانی برای تابع با ضابطه $y = x^{2n-2}$ است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۷۸)

- (۱) $n > \frac{2}{3}$ (۲) $n < 1$ (۳) $n < \frac{2}{3}$ (۴) $n > 2$

۱۱- اگر $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در $(1, 1)$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۷۸)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۲- ماکسیمم تابع با ضابطه $y = |x^2 - 1|$ بر بازه $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۷۸)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳- معادله خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2xe^{x^2} + 1$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۷۸)

(۱) $y = 2x - 1$ (۲) $y = 4x - 1$ (۳) $y = 2x + 1$ (۴) $y = 4x + 1$

۱۴- توابع f و g با ضوابط $f(x) = \frac{1}{x+1}$ و $g(x) = e^x$ بر R چگونه‌اند؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۷۸)

(۱) f نزولی و g صعودی است. (۲) f صعودی و g صعودی است.
(۳) f و g هر دو نزولی هستند. (۴) فقط g صعودی است.

۱۵- اگر $\ln 2 = \frac{1}{7}$ و $\ln 5 = \frac{1}{6}$ مقدار $\ln \frac{10}{7}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۷۸)

(۱) $-\frac{4}{6}$ (۲) $-\frac{4}{7}$ (۳) $-\frac{3}{7}$ (۴) $-\frac{3}{6}$

۱۶- جمعیت موربانه‌ها در یک لانه از آنها به نسبت تعداد آنها زیاد می‌شود. اگر در ۱۲ روز تعداد آنها دو برابر شود. ضریب رشد کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۷۸)

(۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{\ln 2}{12}$ (۴) $\frac{\ln 2}{6}$

۱۷- اگر ۲۰ درصد یک جسم رادیواکتیو در سال ناپدید شود، نیمه عمر این جسم رادیواکتیو چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

(۱) $\frac{1}{286}$ سال (۲) $\frac{2}{22}$ سال (۳) $\frac{3}{1067}$ سال (۴) $\frac{6}{931}$ سال

۱۸- اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \sqrt{x}$ مقدار مشتق $f(\frac{1}{x})$ به ازای $x = 1$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

(۱) -1 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

۱۹- از معادله $y^2 + y = x$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

(۱) $-\frac{3}{22}$ (۲) $-\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{3}{22}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۲۰- هر چه باشد $a > 0$ بیشترین مقدار تابع $f(x) = ax - (1+a^2)x^2$ چقدر است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{3}{16}$

۲۱- در تابع با ضابطه $f(x) = \text{Arctg} x$: $0 \leq x \leq 1$ برابر قضیه مقدار میانگین عبارت $\frac{\text{Arctg} x}{x}$ در کدام فاصله است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

(۱) $(0, 1)$ (۲) $(0, \frac{1}{2})$ (۳) $(\frac{1}{2}, 1)$ (۴) $(1, \frac{3}{4})$

۲۲- تابع f در فاصله $[0, 2]$ دو بار مشتق پذیر است، و $f(0) = f(2) = 0$ و برای هر $x \in [0, 2]$ $f'(x) \neq 0$ در بازه $(0, 2)$ کدام بیان درست است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

(۱) f ریشه ندارد. (۲) f' دو ریشه متمایز دارد. (۳) f حداقل یک ریشه دارد. (۴) f' ریشه ندارد.

۲۳- معادله $2x^5 + 5x^2 + 1 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟ (آمار - سراسری ۷۹)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۵

۲۴- برای تابع f با ضابطه $f(x) = \cos^2 x + 2x + 5$ کدامیک از عبارات زیر در مورد معادله $f(x) = 0$ صحیح است؟ (آمار - سراسری ۷۹)

(۱) دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد. (۲) حداقل یک ریشه حقیقی دارد.
(۳) می‌تواند سه ریشه حقیقی داشته باشد. (۴) اصلاً ریشه حقیقی ندارد.

۲۵- اگر $f(a) = 0$ و $f'(a) = 8$ مقدار $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{2h}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۰)

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۲۶- حجم یک مکعب به نسبت ۷ سانتی‌متر مکعب در دقیقه اضافه می‌شود. سطح کل مکعب وقتی طول ضلع آن ۱۲ سانتی‌متر است به چه نسبتی زیاد می‌شود؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۰)

(۱) $\frac{8}{3}$ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۲۷- تابع f در نقطه $x = 1$ دارای مشتق مرتبه اول و دوم و سوم برابر صفر است و مشتق چهارم تابع f در $x = 1$ منفی است. نقطه $x = 1$ روی منحنی متناظر با چه نوع نقطه‌ای است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۰)

(۱) ماکسیمم (۲) عطف (۳) مینیمم (۴) بازگشت

۲۸- ارتفاع استوانه‌ای با حجم ماکسیمم که درون یک کره به شعاع واحد قرار می‌گیرد، کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۰)

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۲۹- اندازه حجم مخروط با حجم ماکزیمم محاط در کره با شعاع R را به دست آورید: (عمران - آزاد ۸۰)

(۱) $\frac{24\pi R^3}{27}$ (۲) $\frac{32\pi R^3}{81}$ (۳) $\frac{24\pi R^3}{27}$ (۴) $\frac{32\pi R^3}{81}$

۳۰- اگر داشته باشیم $x^T - y^T = 1$ آنگاه: (عمران - آزاد ۸۰)

(۱) $y^m \cdot y^T - 1 = 0$ (۲) $y' \cdot y + x = 0$ (۳) $y' \cdot y + x^T = 0$ (۴) $y^m \cdot y^T + 1 = 0$

۳۱- مقدار C در قضیه مقدار میانگین در تابع $f(x) = x^T - 2x^T + 1$ در بازه $[-1, 2]$ چیست؟ (عمران - آزاد ۸۰)

(۱) $\frac{2 + \sqrt{7}}{3}$ (۲) $\frac{3 + \sqrt{5}}{4}$ (۳) $\frac{4 + \sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{5 + \sqrt{2}}{4}$

۳۲- مشتق تابع روبرو را به دست آورید: $y = (\sin 2x)^{\ln x^T}$ (عمران - آزاد ۸۰)

(۱) $\frac{2(\sin 2x)^{\ln x^T} [\ln \sin 2x + x \cot 2x \cdot \ln x^T]}{x}$ (۲) $\frac{2}{x} \ln \sin 2x + 2 \cot 2x \cdot \ln x^T$
(۳) $(\sin 2x)^{\ln x^T} [\cos 2x + \frac{2}{x}]$ (۴) $\frac{2}{x} (\cos 2x) \cdot (\sin 2x)^{\ln x^T}$

۳۳- اگر طول یک مستطیل $15m$ و در حال افزایش با نرخ $\frac{3m}{s}$ بوده و عرض آن $6m$ و در حال کاهش با نرخ $\frac{2m}{s}$ باشد، در این صورت نرخ تغییر مساحت این مستطیل $(\frac{m^2}{s})$ و در حال است. (مکانیک - سراسری ۸۰)

(۱) کاهش، 12 (۲) کاهش، 48 (۳) افزایش، 12 (۴) افزایش، 48

۳۴- اگر $f(1) = 10$ و به ازای $1 \leq x \leq 4$ داشته باشیم $f'(x) \geq 2$ در این صورت مقدار ممکن برای $f(4)$ برابر است با ... (علوم کامپیوتر - سراسری ۸۰)

(۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۳۵- تابع $f(x) = (x-1)|x-1| + |x-2|$ در نقاط $x = 1, 2$ مشتق پذیر نمی‌باشد. (علوم کامپیوتر - سراسری ۸۰)

(۱) فقط در نقاط $x = 1, 2$ مشتق پذیر نمی‌باشد. (۲) فقط در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر نمی‌باشد.
(۳) در تمام نقاط مشتق پذیر است. (۴) فقط در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر است.

۳۶- کدام نامساوی درست است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

(۱) $f(x) - f(a) \geq x - a$ (۲) $|f(x) - f(a)| \geq |x - a|$ (۳) $f(x) - f(a) \leq x - a$ (۴) $|f(x) - f(a)| \leq |x - a|$

۳۷- قانون حرکت جسمی بر روی خط راست $S = t^T - 4t^T - 3t$ است. شتاب این متحرک در لحظه‌ای که سرعت به صفر برسد کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۳۸- شیب خط مماس بر $x^2y + xy^2 = 10$ در نقطه (۱, ۲) کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

- (۱) -۶
- (۲) -۱۳
- (۳) $-\frac{14}{13}$
- (۴) در این نقطه خط مماس ندارد.

۳۹- فرض کنید $f(x) = \ln x$ و $fog(x) = x \ln x$ در این صورت $g'(2)$ برابر است با:

(آمار - سراسری ۸۰)

- (۱) $4 \ln 2$
- (۲) $2 + \ln 2$
- (۳) $2 \ln 2$
- (۴) $4(1 + \ln 2)$

۴۰- اگر $f'(2)$ وجود داشته باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x-2}$ برابر است با:

(آمار - سراسری ۸۰)

- (۱) $f(2) - f'(2)$
- (۲) $f'(2) - 2f(2)$
- (۳) $f(2) - 2f'(2)$
- (۴) $f'(2) - f(2)$

۴۱- اگر داشته باشیم $\frac{dy}{dx} = \ln(x^2 + y^2) + 2 \tan^{-1} \frac{x}{y}$ آنگاه $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

(آمار - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{x+y}{x-y}$
- (۲) $\frac{2y}{x}$
- (۳) $\frac{x+y}{x-1}$
- (۴) $x+y$

۴۲- اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد معادله $x^2 + nx + 1 = 0$ دارای ...

(آمار - سراسری ۸۰)

- (۱) دقیقاً یک ریشه است.
- (۲) حداکثر یک ریشه است.
- (۳) یک ریشه مکرر است.
- (۴) n ریشه است.

۴۳- مشتق $y = \arcsin(\ln x)$ در نقطه $x = \sqrt{e}$ برابر است با:

(ریاضی - سراسری ۸۰)

- (۱) صفر
- (۲) \sqrt{e}
- (۳) $\sqrt{2e}$
- (۴) $\frac{2}{\sqrt{2e}}$

۴۴- در مورد تابع با ضابطه $f(x) = e^x + x - \cos x$ چه می‌توان گفت؟

(ریاضی - سراسری ۸۰)

- (۱) یک ماکسیمم و دو می‌نیمم دارد.
- (۲) نزولی است.
- (۳) دو می‌نیمم و یک ماکسیمم دارد.
- (۴) صعودی اکید است.

(ریاضی - سراسری ۸۰)

۴۵- اگر f تابعی با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^x & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 1 + e^{-\frac{1}{x^2}} & x < 0 \end{cases}$ باشد، f چند نقطه بحرانی و چند اکسترمم دارد؟

- (۱) یک نقطه بحرانی و یک اکسترمم
- (۲) دو نقطه بحرانی و یک اکسترمم
- (۳) نقطه بحرانی و اکسترمم ندارد.
- (۴) دو نقطه بحرانی و دو اکسترمم

۴۶- دوزنقه‌ای با بیشترین مساحت ممکن در نیم‌دایره‌ای به قطر $2r$ محاط است. به طوری که قاعده دوزنقه بر قطر نیم‌دایره منطبق است. ارتفاع دوزنقه چقدر است؟

(ریاضی - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}r$
- (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}r$
- (۳) $\frac{r}{2}$
- (۴) $\frac{r}{4}$

۴۷- اگر $f(x) = \sinh^{-1}(\operatorname{tg} x)$ مقدار $f'(0)$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۰)

- (۱) -۲
- (۲) -۱
- (۳) ۱
- (۴) ۲

۴۸- طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع x و y برابر $\sqrt{5}$ است بیشترین مقدار $x+y$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۰)

- (۱) ۲
- (۲) $2\sqrt{2}$
- (۳) $\frac{16}{5}$
- (۴) $\sqrt{10}$

۴۹- مختصات نقطه مینیمم نسبی تابع با ضابطه $y = \frac{4 \ln^2 x}{x}$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۰)

- (۱) $(1, 0)$
- (۲) $(e, \frac{4}{e})$
- (۳) $(\frac{1}{e}, -\frac{4}{e})$
- (۴) $(-\frac{1}{e}, -4e)$

۵۰- گاز به درون یک بالن کره‌ای شکل به نسبت ۵ متر مکعب در دقیقه دمیده می‌شود. وقتی شعاع کره ۳ متر است. شعاع آن با چه نسبتی در دقیقه زیاد می‌شود؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{5}{26\pi}$
- (۲) $\frac{5}{30\pi}$
- (۳) $\frac{5}{36}$
- (۴) $\frac{5}{30}$

۵۱- یک نقطه در امتداد منحنی تابع با ضابطه $y = \sqrt{x}$ به نوعی حرکت می‌کند که مؤلفه x آن در هر دقیقه ۳ واحد افزایش می‌یابد. وقتی $x = 1$ مؤلفه y آن به چه نسبتی در دقیقه تغییر می‌کند؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{1}{3}$ واحد
- (۲) $\frac{2}{3}$ واحد
- (۳) $\frac{3}{2}$ واحد
- (۴) ۳ واحد

۵۲- معادله $2^x = 3x$ در کدام بازه جواب دارد؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۰)

- (۱) $(-\infty, 0)$
- (۲) $(-1, 0)$
- (۳) $(1, 2)$
- (۴) $(0, 1)$

۵۳- اگر داشته باشیم $y = (x^2 + 1)^{e^x}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در $x = 1$ کدام است؟

(مهندسی معدن، استخراج معدن - سراسری ۸۰)

- (۱) $2(2)^{2e-1}$
- (۲) $2^e(2)^{e-1}$
- (۳) $2^e \cdot e(\ln 2 + 1)$
- (۴) $(2e)^e (\ln 2 - 1)$

۵۴- اگر $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$ باشد، $\frac{d^2y}{dx^2}$ در $t = 1$ کدام است؟

(مهندسی معدن، استخراج معدن - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{2}{4}$
- (۲) $-\frac{5}{4}$
- (۳) $\frac{3}{2}$
- (۴) $\frac{5}{4}$

۵۵- کدام مورد درباره تابع f به معادله $y = \cosh x$ نادرست است؟

(مهندسی معدن، استخراج معدن - سراسری ۸۰)

- (۱) زوج
- (۲) محدب
- (۳) دارای نقطه عطف
- (۴) دارای می‌نیمم

۵۶- اگر سود به طور پیوسته بر سرمایه اضافه شود ارزش فعلی ۱ میلیون ریال با نرخ سود ۲۰٪ در طی ۵ سال برابر کدام است؟

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

- (۱) $2(10)^6$
- (۲) $e(10)^6$
- (۳) $\frac{1}{2}(10)^6$
- (۴) $\frac{1}{e}(10)^6$

۵۷- اگر $\ln \frac{x+y}{x-y} = 2$ باشد حاصل $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$ کدام است؟

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

- (۱) $\frac{y}{x}$
- (۲) $\frac{-x}{y}$
- (۳) $\frac{x}{y}$
- (۴) $\frac{-y}{x}$

۵۸- مشتق تابع $y = \operatorname{Arctg} \sqrt{x}$ در $x = 1$ کدام است؟

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

- (۱) $\frac{1}{4}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۲
- (۴) ۴

۵۹- با فرض $2 = x^2 + 2xy + 4y^2$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در $x = 1$ کدام است؟

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

- (۱) ۳
- (۲) $\frac{1}{3}$
- (۳) صفر
- (۴) ۱

۶۰- اگر $f(x) = xe^{2x}$ باشد، مشتق مرتبه n این تابع به ازاء $x = 0$ کدام است؟

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

- (۱) $n \cdot 2^n$
- (۲) $n \times 2^{n-1}$
- (۳) 2^n
- (۴) ۱

۶۱- اگر نرخ رشد جمعیت پیوسته باشد با نرخ ۲٪ تعداد ۱۰۰ نفر در جامعه پس از ۵۰ سال به چه تعدادی خواهد رسید؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

- (۱) $100e^2$
- (۲) $100e$
- (۳) $200e$
- (۴) $200e^2$

۶۲- در معادله $xy + 1 = x^2 + y^2$ مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

- (۱) -۱
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) $-\frac{1}{3}$

۶۳- مشتق تابع $f(x) = |x| \cos x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)
 (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ندارد

۶۴- مشتق n ام تابع $y = \sin x$ برابر است با:

- (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)
 (۱) $\cos(x + n\frac{\pi}{2})$ (۲) $\sin(x + n\frac{\pi}{2})$ (۳) $-\sin(x + n\frac{\pi}{2})$ (۴) $-\cos(x + n\frac{\pi}{2})$

۶۵- اگر $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$ آنگاه $f'(0)$ برابر است با:

- (MBA - سراسری ۸۱)
 (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) وجود ندارد

۶۶- فرض کنید f در x_0 مشتق پذیر باشد آنگاه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h}$ برابر است با:

- (MBA - سراسری ۸۱)
 (۱) $f'(x_0)$ (۲) $2f'(x_0)$ (۳) $\frac{1}{2}f'(x_0)$ (۴) حد وجود ندارد

۶۷- اگر $f(x) = x^2 - 3x + 1$ در کدام نقطه در $[0, 2]$ مماس بر نمودار تابع موازی پاره خط واصل بین نقاط $(2, f(2)), (0, f(0))$ است؟

- (MBA - سراسری ۸۱)
 (۱) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۶۸- فرض کنید $f(0) = 2$ و $f'(0) = 0$ مشتق $f(f(f(f(x))))$ در $x = 0$ برابر است با:

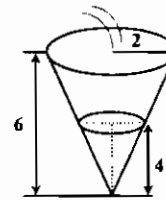
- (MBA - سراسری ۸۱)
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۶۹- فرض کنید $f(x) = 4x^2 - 1$ آنگاه $f'(9)$ برابر است با:

- (MBA - سراسری ۸۱)
 (۱) $-\frac{8}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

۷۰- در یک مخزن آب که به شکل مخروط است و رأس مخروط به طرف پایین قرار دارد، آب با سرعت $5/0$ متر مکعب در دقیقه وارد می‌شود. اگر ارتفاع مخزن ۶ متر و شعاع قاعده آن ۲ متر باشد، ارتفاع آب وقتی به ۴ متری برسد، با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟

- (MBA - سراسری ۸۱)
 (۱) $\frac{9}{8\pi}$ (۲) $\frac{9}{32\pi}$ (۳) $\frac{9}{16\pi}$ (۴) $\frac{3}{32\pi}$



۷۱- نردبانی که طول آن ۱۳ متر است کنار دیوار قرار دارد. لحظه‌ای که سر نردبان از زمین ۱۲ متر فاصله دارد و پای نردبان از دیوار ۵ متر فاصله دارد، سر نردبان با سرعت ۳ متر در ثانیه سقوط می‌کند، پای نردبان با چه سرعتی از دیوار دور می‌شود؟

- (MBA - سراسری ۸۱)
 (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $-\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{5}{2}$

۷۲- نقطه $(0, 0)$ برای تابع $f(x) = e^{x^2} - 1$ چه نقطه‌ای است؟

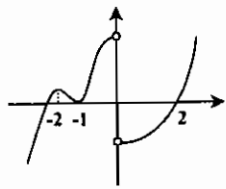
- (MBA - سراسری ۸۱)
 (۱) ماکزیمم نسبی (۲) می‌نیمم نسبی (۳) عطف (۴) زاویه‌دار

۷۳- زاویه بین نیم مماس چپ و نیم مماس راست برای تابع $f(x) = \begin{cases} \lg x & x \geq 0 \\ \frac{x}{\sqrt{3}} \cos x & x < 0 \end{cases}$ در مبدا برابر است با:

- (MBA - سراسری ۸۱)
 (۱) $\frac{11\pi}{12}$ (۲) $\frac{\pi}{12}$ (۳) $\frac{7\pi}{12}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۷۴- نمودار مشتق تابع f مطابق شکل است. اگر f پیوسته باشد و از مبدا بگذرد، کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

(MBA - سراسری ۸۱)



(۱) تابع f دارای ۲ مینیمم نسبی است ولی ماکزیمم نسبی ندارد.

(۲) تابع f در فاصله $(0, +\infty)$ حداکثر یک ریشه دارد.

(۳) مبدا نقطه می‌نیمم نسبی است.

(۴) تابع f بر بازه $(-2, -1)$ صعودی اکید است.

۷۵- کدام گزینه زیر در مورد تعداد قائم‌هائی که بر نمودار $x = y^2$ از نقطه $(\alpha, 0)$ می‌توان رسم کرد، درست است؟ (MBA - سراسری ۸۱)

(۱) اگر $\alpha < \frac{1}{4}$ قائمی نمی‌توان رسم کرد. (۲) اگر $\alpha \geq \frac{1}{4}$ حداقل سه قائم می‌توان رسم کرد.

(۳) برای $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ حداقل دو قائم می‌توان رسم کرد. (۴) برای $\alpha > \frac{1}{4}$ دقیقاً سه قائم می‌توان رسم کرد.

۷۶- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ -\cos x & x < 0 \end{cases}$ در این صورت:

(MBA - سراسری ۸۱)

(۱) f در $x = 0$ مشتق پذیر است و $f'(0) = 1$

(۲) f در $x = 0$ ناپیوسته است.

(۳) f در $x = 0$ دارای مماسی به معادله $y + x = 0$ است.

(۴) f در $x = 0$ مشتق ناپیوسته دارد.

۷۷- مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)^2}$ در $x = 3$ برابر است با:

(MBA - سراسری ۸۱)

- (۱) -۱۷ (۲) $-\frac{11}{36}$ (۳) $\frac{17}{36}$ (۴) $-\frac{17}{36}$

۷۸- معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \int_x^{\sqrt{1+t^2}} dt$ در نقطه‌ای به طول صفر برابر است با:

(MBA - سراسری ۸۱)

- (۱) $y = x + 1$ (۲) $y + x = 1$ (۳) $y = x$ (۴) $y + x = 0$

۷۹- $\frac{dy}{dx}$ را برای $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$ به دست آورید.

(ریاضی - آزاد ۸۱)

- (۱) $-2\sin(\ln x)$ (۲) $2\cos(\ln x)$ (۳) $\frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x}$ (۴) $-2x\sin(\ln x)$

۸۰- ماکزیمم تابع f با ضابطه $f(x) = (\frac{1}{x})^x$ برابر است با ...

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۱)

- (۱) e^e (۲) $(\frac{1}{e})^e$ (۳) $(e)^e$ (۴) $(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$

۸۱- اگر $f(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$ مقدار $f'(1)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)

- (۱) ۰ (۲) ۶۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۲۴۰

۸۲- مقدار مشتق عبارت $\sinh^{-1} 2x$ در $x = 1$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)

- (۱) $2e^{-2} - e^{-2}$ (۲) $2e^2 - e^{-2}$ (۳) $e^2 - e^{-2}$ (۴) $e^2 - e^{-2}$

۸۳- مشتق هر تابع زوج تابع و مشتق هر تابع فرد تابع است.

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)

- (۱) زوج - فرد (۲)زوج - زوج (۳)فرد - زوج (۴)فرد - فرد

۸۴- آهنگ افزایش جمعیت یک شهر متناسب با جمعیت آن است. اگر جمعیت یک شهر در سال ۱۳۴۰ برابر ۴۰۰۰۰۰ و در سال ۱۳۷۰ برابر ۶۰۰۰۰۰ بوده باشد، جمعیت این شهر در سال ۱۴۰۰ چند نفر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)

- (۱) ۸۰۰۰۰ (۲) ۸۵۰۰۰ (۳) ۹۰۰۰۰ (۴) ۹۵۰۰۰

۸۵ خط مماس از مبدأ بر نمودار تابع $y = \ln \sqrt{x}$ در نقطه (x_0, y_0) بر منحنی مماس است، y_0 کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)

- (۱) $\frac{1}{4}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۲
- (۴) ۴

۸۶ مجموع دو عدد صحیح و مثبت برابر ۹ است. حاصل ضرب این دو عدد وقتی حاصل ضرب یکی در مربع دیگری ماکسیمم باشد، کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)

- (۱) ۸
- (۲) ۱۴
- (۳) ۱۸
- (۴) ۲۰

۸۷ ماکسیمم تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($x > 0$) کدام است؟

(آمار - سراسری ۸۱)

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{e}}$
- (۲) $\frac{1}{e}$
- (۳) \sqrt{e}
- (۴) e

۸۸ در مورد ریشه‌های حقیقی $x^2 + 2x + c = 0$ که در آن c مقدار ثابت است کدام گزینه صحیح است؟

(آمار - سراسری ۸۱)

- (۱) ریشه حقیقی ندارد.
- (۲) فقط سه ریشه حقیقی دارد.
- (۳) فقط یک ریشه حقیقی دارد.
- (۴) فقط پنج ریشه حقیقی دارد.

۸۹ اگر $f(x) = |\sin x|$ ، $f'(x)$ کدام است؟

(ریاضی - سراسری ۸۱)

- (۱) ۰
- (۲) -۱
- (۳) ۱
- (۴) موجود نیست.

۹۰ اگر $y = \frac{e^{2x} + x}{x+2}$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

(مهندسی معدن، اکتشاف و استخراج معدن - سراسری ۸۱)

- (۱) ۱
- (۲) $\frac{4}{5}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) $\frac{5}{4}$

۹۱ مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ در $x = -8$ کدام است؟

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۱)

- (۱) $-\frac{1}{2}$
- (۲) $-\frac{1}{48}$
- (۳) $\frac{1}{8}$
- (۴) $-\frac{1}{64}$

۹۲ مشتق تابع $g(x) = \sqrt{\frac{2x-5}{2x+1}}$ کدام است؟

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۱)

- (۱) $\frac{17}{2(2x+1)^2(2x-5)^2}$
- (۲) $\frac{-17}{2(2x+1)^2(2x-5)^2}$
- (۳) $\frac{17}{2(2x+1)(2x-5)^2}$
- (۴) $\frac{-17}{2(2x+1)(2x-5)^2}$

۹۳ مقدار $\frac{dy}{dx}$ از رابطه $\sqrt{xy} + 2x = \sqrt{y}$ کدام است؟

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۱)

- (۱) $\frac{y - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - x}$
- (۲) $\frac{y + 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + x}$
- (۳) $\frac{y - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + x}$
- (۴) $\frac{y + 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - x}$

۹۴ مقدار $\frac{dy}{dx}$ از رابطه $\ln(xy) + x + y = 2$ کدام است؟

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۱)

- (۱) $\frac{xy+y}{xy+x}$
- (۲) $\frac{-xy+y}{xy+x}$
- (۳) $\frac{xy-y}{xy+x}$
- (۴) $\frac{xy+y}{xy-x}$

۹۵ حد $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$ برابر است با:

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۱)

- (۱) ۹
- (۲) -۱۲
- (۳) ۳
- (۴) -۶

۹۶ تابع $f(x) = x^2 - 2x^2$ در نقطه $x = 1$ و نقطه $x = 8$ به ترتیب دارای:

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۱)

- (۱) یک ماکزیمم و یک نقطه عطف است.
- (۲) یک ماکزیمم و یک نقطه عطف است.
- (۳) یک نقطه عطف و یک ماکزیمم است.
- (۴) یک ماکزیمم و یک ماکزیمم است.

۹۷ کره‌ای به شعاع b مفروض است. استوانه‌ای به شعاع قاعده R و ارتفاع h قرار است در داخل این کره محاط کنیم. مقادیر R و h ای که بزرگترین حجم را برای استوانه حاصل خواهند ساخت کدامند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۱)

- (۱) $R = b\sqrt{\frac{2}{3}}$ ، $h = \frac{2b}{\sqrt{3}}$
- (۲) $R = b\sqrt{\frac{3}{2}}$ ، $h = \frac{2b}{\sqrt{2}}$
- (۳) $R = b\sqrt{\frac{2}{3}}$ ، $h = \frac{2b}{\sqrt{2}}$
- (۴) $R = b\sqrt{\frac{3}{2}}$ ، $h = \frac{2b}{\sqrt{3}}$

۹۸ فرض کنید که قطر یک مکعب با سرعت ۳ اینچ در دقیقه در حال افزایش باشد سرعت افزایش طول هر ضلع این مکعب در دقیقه برابر است با:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۱)

- (۱) $\sqrt{2}$ اینچ در دقیقه
- (۲) $\sqrt{3}$ اینچ در دقیقه
- (۳) ۲ اینچ در دقیقه
- (۴) ۳ اینچ در دقیقه

۹۹ یک جسم رادیواکتیو را در نظر بگیرید که به صورت نمایی وزن کم می‌کند. به عنوان مثال جسم ۲۰۰ گرمی پس از یک ساعت به ۵۰ گرم می‌رسد. بعد از سه ساعت چه مقدار از این جسم باقی خواهد ماند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۱)

- (۱) ۲۵ گرم
- (۲) ۵۰ گرم
- (۳) $3/125$ گرم
- (۴) $50/9$ گرم

۱۰۰ پولی را در نظر بگیرید که در هر ۸ سال ۵ برابر بشود. فرض کنید که صاحب پول به این پول واگذاری تا ۲۴ سال دست نزنند. اگر در پایان ۲۴ سال ۱۰۰۰۰ واحد پول به صاحب پول بدهند، اصل پول شخص چقدر بوده است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۱)

- (۱) ۸۰ واحد پول
- (۲) ۶۶۶۱۶۷ واحد پول
- (۳) ۲۰۰۰۰ واحد پول
- (۴) ۴۰۰۰ واحد پول

۱۰۱ تابع $f(x) = x^2 + 4x^2$ چند نقطه بحرانی دارد؟

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۲)

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) هیچ

۱۰۲ ضریب زاویه خط مماس بر یک منحنی در نقطه (x, y) عبارتست از $2x^2y^2$ و منحنی از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد. عرض نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر منحنی چقدر است؟

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۲)

- (۱) -۸
- (۲) $-\frac{1}{8}$
- (۳) $\frac{1}{8}$
- (۴) ۸

۱۰۳ زاویه بین منحنی‌های $y = \cos x$ ، $y = x^2 + 1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۲)

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{\pi}{4}$
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) $\frac{\pi}{6}$

۱۰۴ اگر $f(x) = (\delta + x^2)e^{\sin x}$ مقدار $(f^{-1})'(\delta)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۲)

- (۱) ۰
- (۲) ۳
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{1}{\delta}$

۱۰۵ معادله $2x^2 - 3x^2 - 12x - 6 = 0$ در کدام فاصله فاقد ریشه است؟

(آمار - سراسری ۸۲)

- (۱) $(1, +\infty)$
- (۲) $(2, +\infty)$
- (۳) $(3, +\infty)$
- (۴) $(4, +\infty)$

۱۰۶ ماکسیمم تابع $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}$ ، $x \in \mathbb{R}$ ، کدام است؟

(آمار - سراسری ۸۲)

- (۱) $\frac{5}{8}$
- (۲) $\frac{5}{4}$
- (۳) $\frac{4}{3}$
- (۴) ۲

۱۰۷ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ 1-x^2 & x < 0 \end{cases}$ باشد، $(f^{-1})(-1)$ کدام است؟

(آمار - سراسری ۸۲)

- (۱) $-\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۱۰۸- اگر برای $x \geq 0$ داشته باشیم $x^2 + 1 \leq f(x) \leq 2x$ مقدار $f'(1)$ برابر است با: (آمار - سراسری ۸۲)

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۰۹- تابع $f(x) = xe^{-x}$ و $x \geq 0$ را در نظر بگیرید، کدامیک از گزینه‌های زیر بهترین کران را برای f می‌دهد؟ (MBA - سراسری ۸۲)

- (۱) $0 \leq f(x) \leq e^{-1}$ (۲) $1 \leq f(x) \leq e$ (۳) $0 \leq f(x) \leq e$ (۴) $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{e}$

۱۱۰- فرض کنید f و g توابع مشتق‌پذیر بر R باشند، کدامیک از گزاره‌های زیر اشتباه است؟ (MBA - سراسری ۸۲)

- (۱) ممکن است هم‌جا $f' > g'$ ، $f < g$ (۲) ممکن است هم‌جا $f' > 0$ ، $f'' < 0$ ، $f' < 0$ ، $f > 0$ (۳) ممکن است هم‌جا $f' > 0$ ، $f'' < 0$ ، $f' > 0$ ، $f > 0$ (۴) اگر $f' = g'$ و $f(x_0) = g(x_0)$ به ازای یک x_0 ، آنگاه $f = g$.

۱۱۱- فرض کنید f تابعی منفی و f'' بر $(0, 1)$ موجود باشد. اگر $f(x)$ حداقل به ازای دو مقدار x در $(0, 1)$ برابر صفر شود، آنگاه معادله $f''(x) = 0$ در $(0, 1)$ چند ریشه دارد؟ (MBA - سراسری ۸۲)

- (۱) حداکثر یک ریشه (۲) حداقل دو ریشه (۳) دقیقاً دو ریشه (۴) ریشه ندارد.

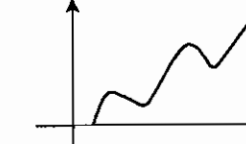
۱۱۲- اگر F در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(a) - a^2 f(x)}{x - a}$ برابر است با: (ریاضی - سراسری ۸۲)

- (۱) $2af'(a) - a^2 f(a)$ (۲) $a^2 f(a) - 2af'(a)$ (۳) $2af'(a) - a^2 f(a)$ (۴) $af'(a) - a^2 f(a)$

۱۱۳- اگر به ازاء تابع f ، f'' موجود باشد آنگاه f' زوج است به شرط آنکه: (ریاضی - سراسری ۸۲)

- (۱) f زوج باشد. (۲) f فرد باشد. (۳) f و f' زوج باشند. (۴) f و f' فرد باشند.

۱۱۴- برای منحنی $y = f(x)$ با نمودار زیر $f'(x) = 0$ چند جواب دارد؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)



- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۱۵- اگر $0 < a < 1$ و $f(x) = xa^x$ ، به ازای چه مقادیری از x ، f نزولی است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

- (۱) $x > -\frac{1}{\ln a}$ (۲) $x < -\frac{1}{\ln a}$ (۳) $x > -\ln a$ (۴) $x < -\ln a$

۱۱۶- اگر $f(x) = (\sin \frac{\pi}{4} x)^m (\cos \pi x)^n$ و $m, n > 1$ مقدار $f'(1)$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $\pi(\frac{\pi}{4} - m)$ (۴) $\pi(n + m)$

۱۱۷- مشتق عبارت $\sinh^2 x + \cosh^2 x$ در $x = \frac{1}{4}$ چقدر است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

- (۱) $e + \frac{1}{e}$ (۲) $e^2 + 1$ (۳) $\sqrt{e} + \frac{1}{\sqrt{e}}$ (۴) $\frac{e^2 + e^{-2}}{2}$

۱۱۸- آهنگ افزایش شعاع یک دایره ۲ سانتی‌متر بر ثانیه است، آهنگ افزایش مساحت آن چه موقع π سانتی‌متر بر ثانیه است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

- (۱) هنگامی که شعاع آن $\frac{5}{25}$ سانتی‌متر است. (۲) هنگامی که شعاع آن $\frac{5}{5}$ سانتی‌متر است. (۳) هنگامی که شعاع آن ۱ سانتی‌متر است. (۴) هنگامی که شعاع آن π سانتی‌متر است.

۱۱۹- معادله خط مماس بر منحنی $x \sin y + y \sin x = \pi$ در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{4}$ واقع بر منحنی کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

- (۱) $x + y = 0$ (۲) $y = x$ (۳) $x + y = \pi$ (۴) $x + y = \frac{\pi}{4}$

۱۲۰- مجموع دو عدد یک است و مجموع مکعبات این دو عدد می‌نیم است، حاصل ضرب این دو عدد چقدر است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

- (۱) $\frac{4}{25}$ (۲) $\frac{3}{16}$ (۳) $\frac{2}{9}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۲۱- تابع $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 3}$ مفروض است. کدامیک از ادعاهای زیر برای این تابع کاملاً مصداق دارد؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۲)

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۲)

- (۱) این تابع دارای یک مجانب $y = 2$ ، یک نقطه می‌نیم و دو نقطه عطف دارد. (۲) این تابع دارای یک مجانب افقی و سه نقطه می‌نیم است. (۳) این تابع دارای دو نقطه می‌نیم است. (۴) این تابع دارای دو نقطه عطف و یک می‌نیم است ولیکن مجانب افقی ندارد.

۱۲۲- تابع $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$ مفروض است. کدامیک از گزاره‌های ذیل در مورد این تابع صادق است؟ (عمران - آزاد ۸۳)

- (۱) در نقطه $x = 0$ ناپیوسته است. یک نقطه می‌نیم و یک نقطه عطف دارد. (۲) یک نقطه می‌نیم و یک نقطه ماکزیمم دارد. (۳) در نقطه $x = 0$ مشتق ندارد و یک نقطه ماکزیمم دارد. (۴) در نقطه $x = 0$ یک مجانب عمودی دارد و فقط یک نقطه عطف دارد و نقاط می‌نیم و ماکزیمم ندارد.

۱۲۳- در مورد معادله $x^2 - x \sin x - \cos x = 0$ می‌توان گفت: (عمران - آزاد ۸۳)

- (۱) فقط یک جواب دارد. (۲) بیش از دو جواب دارد. (۳) فقط دو جواب دارد. (۴) اصلاً جواب ندارد.

۱۲۴- حجم استوانه محاط در مخروط قائم حداکثر چند برابر حجم آن مخروط است؟ (مکانیک - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{5}{9}$ (۴) $\frac{16}{27}$

۱۲۵- معادله خط مماس بر منحنی $y = e^{x^2 - 1}$ در $x = 1$ برابر است با: (مکانیک - آزاد ۸۳)

- (۱) $y = 2x - 1$ (۲) $y = 2x + 1$ (۳) $y = 2e^x - 2$ (۴) $y = 2e(x - 1) + 1$

۱۲۶- اگر $f'(tg x) = \frac{1}{4} tg 2x$ باشد، مشتق $f(\sin x)$ برابر است با: (مکانیک - آزاد ۸۳)

- (۱) $\cos x$ (۲) $\sin x$ (۳) $tg x$ (۴) $\frac{x}{1 - x^2}$

۱۲۷- اگر $\begin{cases} x = (t+2)e^t \\ y = t^2 e^t \end{cases}$ باشد، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $t = 3$ برابر است با: (مکانیک - آزاد ۸۳)

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) ۳

۱۲۸- اگر $\begin{cases} x = \sec t \\ y = \tan t \end{cases}$ باشد، مقدار $\frac{d^2 y}{dx^2}$ در $t = \frac{\pi}{4}$ برابر است با: (مکانیک - آزاد ۸۳)

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۱

۱۲۹- فرض کنید $u = (x^2 + 9)^{\frac{1}{2}}$ و $v = 3x^2 - 2x$ ، ضابطه $\frac{du}{dv}$ به عنوان تابعی از x کدام است؟ (آمار - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{x}{2(3x-1)\sqrt{x^2+9}}$ ، $x \neq \frac{1}{3}$ (۲) $\frac{3x-1}{2\sqrt{x^2+9}}$ (۳) $\frac{1}{4(3x-1)\sqrt{x^2+9}}$ ، $x \neq \frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2x(3x-1)}{\sqrt{x^2+9}}$

۱۳۰- اگر $x \neq 0$ ، مشتق تابع با ضابطه $f(x) = 3x^5 + 6x^4 - 12x^3 + 7$ نسبت به x^2 کدام است؟ (آمار - سراسری ۸۳)

- (۱) $5x^2 + 8x - 12$ (۲) $5x^4 + 8x^3 - 12x^2$ (۳) $15x^4 + 24x^3 - 36x^2$ (۴) وجود ندارد.

۱۳۱- معادله خط مماس بر منحنی با معادله $y = x^x$ در نقطه‌ای به طول ۲ از آن محور x ها را در نقطه‌ای قطع می‌کند که طولش برابر است با:

(آمار - سراسری ۸۳)

- (۱) $2 \ln 2$
- (۲) $1 + \ln 2$
- (۳) $\frac{1}{1 + \ln 2}$
- (۴) $\frac{1 + 2 \ln 2}{1 + \ln 2}$

۱۳۲- در یک دوزنقه، قائم‌الزاویه به اندازه ساق غیر قائم ۷ واحد و اندازه قاعده‌ها ۲ و ۴ واحد است. نقطه M بر روی ساق قائم متحرک است. کمترین مجموع فاصله‌های M از دو رأس غیر قائم چقدر است؟

(MBA - سراسری ۸۳)

- (۱) ۸
- (۲) ۹
- (۳) $6\sqrt{2}$
- (۴) $9\sqrt{2}$

۱۳۳- سرعت متحرکی در هر لحظه برابر $V = \frac{dx}{dt} = \sqrt{x}$ است. شتاب آن کدام است؟

(MBA - سراسری ۸۳)

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۱
- (۴) ۲

۱۳۴- از معادله $y^2 + y = x$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

(MBA - سراسری ۸۳)

- (۱) $-\frac{2}{16}$
- (۲) $-\frac{5}{32}$
- (۳) $-\frac{2}{32}$
- (۴) $-\frac{1}{16}$

۱۳۵- فاصله نقطه می‌نیم نسبتی منحنی تابع $y = x^2 e^{-x}$ از خط مجانب آن چقدر است؟

(MBA - سراسری ۸۳)

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۱
- (۴) ۲

۱۳۶- نسبت درگذشتگان یک جمعیت ۹ در هزار و نسبت متولدین ۲۱ در هزار این جمعیت است. اگر این نسبت دائماً برقرار باشد، با گذشت چند سال این جمعیت دو برابر می‌شود ($\ln 2 = 0.69$)

(MBA - سراسری ۸۳)

- (۱) ۴۶
- (۲) ۵۲
- (۳) ۵۲/۵
- (۴) ۵۷/۵

۱۳۷- اگر $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} [\cosh(\ln \frac{1}{x})]$ مقدار A کدام است؟

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۳)

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۲
- (۴) $+\infty$

۱۳۸- اگر $f(x) = 2^{\sin x} + x^{2^x}$ ، آنگاه حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h) + h}{2h}$ برابر است با:

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $1 + \ln 2$
- (۳) $\frac{1}{2} + \ln 2$
- (۴) $\frac{3}{2} + \ln 2$

۱۳۹- اگر $f(x) = (2 + x^2)e^x$ مقدار $(f^{-1})'(2)$ برابر است با:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $22e^2$
- (۴) $\frac{1}{22e^2}$

۱۴۰- اگر $f(x) = x^{\sin \pi x}$ مقدار $f'(1)$ برابر است با:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) π
- (۲) $-\pi$
- (۳) ۰
- (۴) -2π

۱۴۱- اگر $f(1) = 1$ و $f'(1) = 3$ باشد و $g(x) = \frac{f(x^2)}{1+x^2}$ آنگاه $g'(1)$ برابر است با:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{1}{3}$
- (۳) $\frac{3}{4}$
- (۴) $\frac{9}{4}$

۱۴۲- زاویه بین دو منحنی $y = e^x$ و $y = 1 - x^2$ در نقطه $x = 0$ برابر است با:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{\pi}{6}$
- (۳) $\frac{\pi}{4}$
- (۴) $\frac{\pi}{3}$

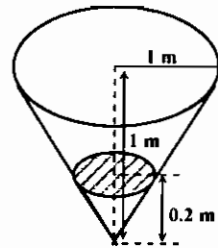
۱۴۳- بیشترین مساحت از بین مستطیل‌ها محاط در بیضی به معادله $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) ۶
- (۲) ۱۲
- (۳) ۱۸
- (۴) ۲۴

۱۴۴- در یک مخزن مخروطی شکل با ارتفاع یک متر و شعاع قاعده یک متر مایعی را به سرعت ۲ لیتر در دقیقه وارد می‌کنیم. در لحظه‌ای که مایه در ارتفاع ۲۰ سانتی قرار دارد، سرعت افزایش ارتفاع مایع چند متر در دقیقه است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)



(۱) $\frac{1}{20\pi}$

(۲) $\frac{1}{15\pi}$

(۳) $\frac{1}{10\pi}$

(۴) $\frac{2}{15\pi}$

۱۴۵- چنانچه $x = \frac{t^2 - 1}{\sqrt{t+1}}$ و $y = e^{t+1}$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{dx}{dy}$ به ازای $t = 3$ برابر کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) ۴
- (۲) ۵
- (۳) ۸
- (۴) ۱۰

۱۴۶- در داخل کره‌ای به شعاع $\sqrt{6}$ استوانه‌ای با حجم ماکزیم محاط می‌کنیم. شعاع قاعده استوانه کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) $\sqrt{3}$

۱۴۷- تابع f به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۳)

کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد تابع f درست است؟

- (۱) تابع f در همه نقاط مشتق‌پذیر است.
- (۲) تابع f در همه نقاط به جز مبدأ مشتق‌پذیر است.
- (۳) تابع f در همه نقاط مشتق‌پذیر است و در یک همسایگی مبدأ نزولی است.
- (۴) تابع f در همه نقاط مشتق‌پذیر است و در یک همسایگی مبدأ صعودی است.

۱۴۸- در صورتی که $f'(4) = 3$ ، $f(4) = 4$ ، $g(4) = 4$ ، $g(x) \neq 4$ به ازای $x \neq 4$ و $g'(4)$ موجود باشد، آنگاه:

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۳)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f[g(x)] - f(4)}{\sqrt{g(x)} - 2}$$

- (۱) ۶
- (۲) ۱۲
- (۳) ۲۴
- (۴) $12g'(4)$

۱۴۹- اگر تابع f در صفر مشتق‌پذیر بوده و $g(x) = f(x \cos x + 2^x \sin x)$ مقدار $g'(0)$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۳)

- (۱) ۱
- (۲) $\frac{1}{2} f'(0)$
- (۳) $f'(0)$
- (۴) $2f'(0)$

۱۵۰- بزرگترین مقدار حجم استوانه‌هایی که مجموع محیط قاعده و ارتفاع آنها برابر ۱۲ سانتی‌متر است، چند سانتی‌متر مکعب است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{36}{\pi}$
- (۲) $\frac{48}{\pi}$
- (۳) $\frac{56}{\pi}$
- (۴) $\frac{64}{\pi}$

ک ۱۵۱- اگر تابع $f(x) = (|\sin x|)^2$ ، $f'(x)$ برابر است با:

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{\pi}{e^2}$
- (۴) $-\frac{\pi}{e^2}$

(مهندسی معدن - سراسری ۸۳)

ک ۱۵۲- تابع f در رابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - \ln x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ صدق می‌کند. کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۳)

- (۱) تابع f تنها دو نقطه مینیمم نسبی دارد.
- (۲) تابع f دارای نقطه عطف است.
- (۳) معادله $f(x) = \frac{\pi}{x}$ دو ریشه حقیقی دارد.
- (۴) معادله $f(x) = x$ سه ریشه حقیقی دارد.

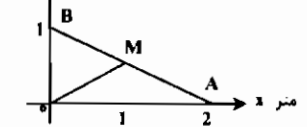
ک ۱۵۳- تابع f در رابطه $f(x) = \sqrt{x} + e^{2x}$ صدق می‌کند. اگر $x=1$ طول نقطه عطف منحنی باشد مقدار $f(1)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۳)

- (۱) ۰
- (۲) $1 + \frac{1}{4a^2}$
- (۳) $1 + \frac{1}{4a}$
- (۴) $1 + \frac{1}{2a^2}$

ک ۱۵۴- در شکل زیر ذره M با سرعت $2\sqrt{5}$ متر بر ثانیه پاره خط AB را طی می‌کند. سرعت مؤلفه افقی آن وقتی به وسط مسیر می‌رسد چند متر بر ثانیه است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۳)



- (۱) ± 2
- (۲) ± 5
- (۳) ± 4
- (۴) ± 10

ک ۱۵۵- اگر آهنگ تغییر کمیت x در رابطه $\frac{dx}{dt} = -2x + 1$ صدق کند و داشته باشیم $x^2 + y^2 = 5y$ آهنگ تغییر y وقتی $x=2$ است.

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۳)

- (۱) $(4, 0)$
- (۲) $(-4, -1)$
- (۳) $(4, 2)$
- (۴) $(-4, 4)$

ک ۱۵۶- توابع f و g مشتق پذیرند به طوریکه $\begin{cases} f(2) = 3 \\ f'(2) = -1 \end{cases}$ و $\begin{cases} g(2) = -5 \\ g'(2) = 2 \end{cases}$ مقدار عددی $(\frac{g}{f})'$ برابر است با:

(مکانیک - آزاد ۸۴)

- (۱) $-\frac{3}{5}$
- (۲) $\frac{1}{9}$
- (۳) صفر
- (۴) $-\frac{6}{5}$

ک ۱۵۷- اگر $y = (\cos 2x)^2$ باشد، حاصل $(y'' + 9y) \cos^2 2x$ کدام است؟

(MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) $2y$
- (۲) $2y'$
- (۳) yy'
- (۴) $y + y'$

ک ۱۵۸- تفرع منحنی تابع $y = \ln(ax - x^2)$ روی بازه (a, b) همواره رو به پایین است. بزرگترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) ۰
- (۲) ۴
- (۳) ۸
- (۴) ∞

ک ۱۵۹- می‌نیم تابع با ضابطه $y = e^{2x} + e^{-2x}$ کدام است؟

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) ۲

ک ۱۶۰- در کدام نقطه نمودار تابع $f(x) = (x^2)^2$ دارای می‌نیم نسبی است؟

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) $x = -e$
- (۲) $x = -\frac{1}{e}$
- (۳) $x = \frac{1}{e}$
- (۴) $x = e$

ک ۱۶۱- معادله خط قائم بر منحنی تابع با ضابطه $y = x^{2x} + e^{2 \ln x}$ در نقطه‌ای به طول یک کدام است؟

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) $x + 4y = 9$
- (۲) $4x + y = 4$
- (۳) $4x - y = 2$
- (۴) $x - 4y = 9$

ک ۱۶۲- اگر $x^2 y - e^{2x} = \sin y$ آنگاه مقدار $\frac{dy}{dx}$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{2e^{2x} - 2xy}{x^2 - \sin y}$

(۲) $\frac{2e^{2x} - 2xy}{x^2 + \cos y}$

(۳) $\frac{2e^{2x} - 2xy}{x^2 - \cos y}$

(۴) $\frac{2e^{2x} - 2xy}{x - \cos y}$

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۴)

ک ۱۶۳- اگر $h(x) = e^{xf(2x)}$ مقدار $h'(1)$ با توجه به جدول زیر کدام است؟

(۱) $2e^4$

(۲) $8e^{18}$

(۳) $12e^4$

(۴) $16e^4$

(آمار - سراسری ۸۴)

x	f(x)	f'(x)
۱	۱۰	۱
۲	۸	۴

ک ۱۶۴- به ازای کدام مجموعه از مقادیر k معادله $x^2 - 3x + k = 0$ دو جواب متمایز و متعلق به بازه $[0, 1]$ دارد؟

(۱) ϕ

(۲) R

(۳) $[0, 1]$

(۴) $[-1, 0]$

(آمار - سراسری ۸۴)

ک ۱۶۵- اگر $f(x) = x^2 + x^5$ و g تابع وارون f باشد، مقدار مشتق g در نقطه 2 کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{15}$

(۲) $-\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{8}$

(۴) $\frac{1}{15}$

(آمار - سراسری ۸۴)

ک ۱۶۶- طول نزدیک‌ترین نقطه روی نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{3x}$ (برای $x \geq 0$) از نقطه $(5, 0)$ کدام است؟

(۱) $\frac{13}{2}$

(۲) $\frac{7}{2}$

(۳) $\frac{5}{2}$

(۴) ۱

(آمار - سراسری ۸۴)

ک ۱۶۷- اگر $f(1) = 2$ و $f'(1) = 3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{\sqrt{f(x)+1} - 2}{\sqrt{x}-1})$ کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۳

(۳) ۲

(۴) ۱

(ریاضی - سراسری ۸۴)

ک ۱۶۸- فرض کنیم $f: [a, b] \rightarrow R$ تابعی مشتق پذیر باشد و $g = f'$ در این صورت:

(۱) g بر $[a, b]$ پیوسته است.

(۲) g بر $[a, b]$ در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند.

(۳) g بر $[a, b]$ مشتق پذیر است.

(۴) g بر $[a, b]$ همواره نامنفی یا همواره نامثبت است.

(ریاضی - سراسری ۸۴)

ک ۱۶۹- تابع با ضابطه $y = \sqrt{x} - \ln x$ چگونه است؟ ($x > 0$)

(۱) فقط یک می‌نیم دارد.

(۲) فقط یک ماکسیم دارد.

(۳) یک ماکسیم و یک می‌نیم دارد.

(۴) ماکسیم و می‌نیم نسبی ندارد.

(ریاضی - سراسری ۸۴)

ک ۱۷۰- اگر $f(x) = \frac{1}{(x+1)^{100}(x+2)^{100}(x+3)^{100}(x+4)^{100}}$ مقدار $f'(0)$ کدام است؟

(۱) $-\frac{125}{2(24)^{100}}$

(۲) $-\frac{125}{6(24)^{100}}$

(۳) $-\frac{125}{3(24)^{100}}$

(۴) $-\frac{125}{6(24)^{100}}$

(ریاضی - سراسری ۸۴)

ک ۱۷۱- اگر مقدار مشتق تابع f در نقطه $x=3$ برابر ۲ باشد مقدار مشتق تابع g با ضابطه $g(x) = f(3x^2)$ در $x=1$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) ۶
- (۲) ۹
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۸

ک ۱۷۲- می‌نیم تابع با ضابطه $y = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) -۲
- (۲) -۱
- (۳) صفر
- (۴) ۱

ک ۱۷۳- اگر $x = e^t \sin t$ و $y = e^t \cos t$ ، $y'(x)$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{y+x}{y-x}$
- (۲) $\frac{y-x}{y+x}$
- (۳) $\frac{y}{x+y}$
- (۴) $\frac{x}{y-x}$

ک ۱۷۴- ماکسیم تابع با ضابطه $y = \frac{\ln x}{x}$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{1}{e}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۲
- (۴) e

۱۷۵- مجموع دو عدد مثبت برابر ۱۰۰ است. اگر حاصل ضرب مربع یکی از این دو عدد در دو برابر مکعب عدد دیگر ماکسیمم باشد، تفاضل این دو عدد کدام است؟
(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

۱۷۶- در کدام نقطه نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 e^{-x} + 1$ دارای ماکسیمم نسبی است؟
(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) $x = 0$ (۲) $x = 2 - \sqrt{2}$ (۳) $x = 2$ (۴) $x = 2 + \sqrt{2}$

۱۷۷- تابع با ضابطه $y = (x-3)^2 (2x-3)^2$ در کدام نقطه دارای عطف است؟
(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) $x = 1$ (۲) $x = \frac{3}{2}$ (۳) $x = \frac{5}{2}$ (۴) $x = 3$

۱۷۸- تابع f بر بازه $[-1, 4]$ پیوسته و بر بازه $(-1, 4)$ مشتق پذیر است. $f(-1) = 2$ و $f(4) = -4$. مقدار $f'(x)$ که در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می کند کدام است؟
(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) $-\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $-\frac{6}{5}$ (۴) $\frac{6}{5}$

۱۷۹- مقدار مشتق تابع $f(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+20)$ در نقطه $x = -10$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۴)

- (۱) $10!$ (۲) $10!10!$ (۳) $100!$ (۴) $20! - 10!$

۱۸۰- تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ در بازه $[-2, 2]$ مشتق پذیر نیست و می نیمم مطلق دارد. (۱) مشتق پذیر است و می نیمم مطلق دارد. (۲) مشتق پذیر است و می نیمم مطلق ندارد. (۳) مشتق پذیر است و می نیمم مطلق دارد. (۴) مشتق پذیر نیست و می نیمم مطلق ندارد.

۱۸۱- تابع $f(x) = x^2 + px^2 + q$ مفروض است، کدام گزینه نادرست است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۴)

- (۱) تابع f در فاصله $(-1, 0)$ صعودی است. (۲) تابع f در نقطه $x = 1$ می نیمم نسبی دارد. (۳) تابع f در نقطه $x = 0$ ماکزیمم نسبی دارد. (۴) تابع f در فاصله $x > 0$ صعودی است.

۱۸۲- در تابع $y = x^2 + px^2 + q$ مقادیر p و q را طوری بیابید که نقطه می نیمم تابع به طول ۲ روی محور x' باشد.
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۴)

- (۱) $q = 4, p = -2$ (۲) $q = -4, p = 2$ (۳) $q = -4, p = -2$ (۴) $q = 4, p = 2$

۱۸۳- تابع $y = \frac{x^2 + 2}{ax + b}$ مفروض است، $a \neq 0$ این تابع: (۱) همواره دارای یک ماکزیمم و یک می نیمم است. (۲) Min و Max ندارد. (۳) فقط یک Max دارد. (۴) فقط یک Min دارد.

۱۸۴- نقطه‌ای بر منحنی $y = x^2 + 1$ پیدا کنید که به نقطه P نزدیکترین نقطه باشد.
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۴)

- (۱) $(2, 5)$ (۲) $(1, 2)$ (۳) $(1, 3)$ (۴) $(2, 1)$

۱۸۵- مشتق تابع $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}$ برابر است با:
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۴)

- (۱) $y' = \frac{1}{2y + 2}$ (۲) $y' = \frac{1}{y + 1}$ (۳) $y' = \frac{1}{2y - 1}$ (۴) $y' = \frac{1}{y - 1}$

باسفنامه نست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم

۱- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{\Delta h} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f'(a+2h)}{\Delta} = \frac{2f'(a)}{\Delta} = \frac{\lambda}{\Delta}$

۲- گزینه «۳» می‌دانیم $\sqrt[n]{a^n + b} = a + \frac{b}{n \cdot a^{n-1}}$ در این تست $n = a = 2$ ، $b = 1$ می‌باشد: $\sqrt{\Delta} = \sqrt{2^2 + 1} = 2 + \frac{1}{2 \times 2} = \frac{9}{4} = 2.25$

۳- گزینه «۳» اگر مقدار درآمد واحد صنعتی را با A نشان دهیم، در این صورت:

$A = p \cdot q = \lambda / 25 q e^{-0.025q}$

$\frac{dA}{dq} = \lambda / 25 e^{-0.025q} - \lambda / 25 \times 0.025 q e^{-0.025q} = 0 \Rightarrow q = 20$

۴- گزینه «۳» برای اینکه $f(x) \cdot g(x)$ صعودی باشد باید $[f(x) \cdot g(x)]' > 0$ باشد، لذا داریم: $f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) > 0$ هرگاه $f(x), g(x), f'(x)$ و $g'(x)$ همگی مثبت باشند، رابطه فوق برقرار خواهد بود.

۵- گزینه «۳»

$f(x) = 2x \cdot e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} + 4x e^{2x} = 2e^{2x}(1 + 2x)$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$f''(x) = 4e^{2x}(1 + 2x) + 4x \cdot 2e^{2x} = 4e^{2x}(2 + 4x) \Rightarrow f''(-\frac{1}{2}) = 4e^{-1}(2 - 1) = \frac{4}{e} > 0$

بنابر آزمون مشتق دوم نقطه $x = -\frac{1}{2}$ نقطه می نیمم تابع است.

۶- گزینه «۲» $F(x) = f(g(h(x))) \Rightarrow F'(x) = h'(x)g'(h(x))f'(g(h(x)))$
 $\Rightarrow F''(x) = h''(x) \times g'(h(x)) \times f'(g(h(x))) + [g'(h(x))f'(g(h(x)))]' \times h'(x)$

۷- گزینه «۲» $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{t=2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

۸- گزینه «۴» $f(x) = \text{Arctg } x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{1+x^4} \Rightarrow f'(2) = \frac{4}{17}$

۹- گزینه «۱» اولاً نمودار داده شده باید از مبدأ مختصات عبور کند (زیرا به ازای $x = 0$ مقدار y برابر صفر خواهد بود) ثانیاً $y' = e^x > 0$ ، پس تابع اکیداً صعودی خواهد بود.

۱۰- گزینه «۱» برای اینکه مبدأ بتواند نقطه بحرانی باشد لازم است مبدأ جزء دامنه تابع باشد، پس بایستی $2 - 2n > 0$ و یا $n > \frac{2}{3}$ باشد.

۱۱- گزینه «۲» $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{-2x}{-2y} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,1)} = -1$

۱۲- گزینه «۳»

$$y' = \frac{(x^2-1) \times 2x}{|x^2-1|} \Rightarrow \text{مجموعه نقاط بحرانی} = \{-1, 1, 0\}$$

برای بدست آوردن ماکسیمم تابع در بازه داده شده نقاط بحرانی و نقاط مرزی بازه را درون ضابطه تابع قرار می دهیم تا ماکسیمم تابع بدست آید:

$$y(-1) = y(1) = 0, y(0) = 1, y(-2) = 3, y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

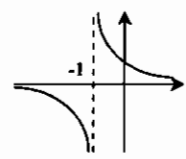
۱۳- گزینه «۳»

$$y = 2xe^{x^2} + 1 \Rightarrow y(0) = 1, y' = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} \Rightarrow y'(0) = 2$$

$$y-1 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x+1$$

۱۴- گزینه «۴»

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0, g'(x) = e^x > 0$$



به نظر می رسد که f نزولی باشد ولی چون f در x = -1 ناپیوستگی دارد، لذا فقط در فواصل پیوستگی نزولی است و بر کل R نزولی نیست (به شکل توجه کنید).

۱۵- گزینه «۱»

$$\ln \frac{1}{100} = -2 \ln 10 = -2(\ln 2 + \ln 5) = -2(0.7 + 1.6) = -4.6$$

۱۶- گزینه «۳» اگر جمعیت حاضر را C فرض کنیم و ضریب رشد را alpha فرض کنیم، در اینصورت تعداد جمعیت سه صورت

x(t) = ce^{at} خواهد بود. چون پس از گذشت ۱۲ روز جمعیت دو برابر شده، پس:

$$2c = ce^{12\alpha} \Rightarrow e^{12\alpha} = 2 \Rightarrow 12\alpha = \ln 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\ln 2}{12}$$

۱۷- گزینه «۳» اگر مقدار اولیه ماده رادیواکتیو را a فرض کنیم در این صورت مقدار ماده رادیواکتیو در زمان t برابر x(t) = ae^{kt} خواهد بود.

$$0.8a = ae^{k} \Rightarrow e^k = 0.8 \Rightarrow k = \ln(0.8)$$

چون در یک سال ۲۰ درصد ماده رادیواکتیو از بین می رود، پس:

$$T = \frac{-\ln 2}{k} = \frac{-\ln 2}{\ln 0.8} \approx 3.1067$$

بنابراین نیمه عمر برابر است با:

تذکره: نیمه عمر مدت زمانی است که طول می کشد تا مقدار ماده رادیواکتیو نصف شود و از فرمول T = -ln2/k به دست می آید.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) + f'(x-h)}{2} = 2f'(x)$$

۱۸- گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

پس داریم:

$$2f'(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$y = f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x}} \Rightarrow y'(1) = -\frac{1}{2}$$

۱۹- گزینه «۱» در نقطه x = 2، مقدار y = 1 خواهد بود.

$$y^2 + y = x \Rightarrow (2y^2 + 1)y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2y^2 + 1} \Rightarrow y'\Big|_{(2,1)} = \frac{1}{4}$$

$$y' = \frac{1}{2y^2 + 1} \Rightarrow y'' = \frac{-2yy'}{(2y^2 + 1)^2} = \frac{-2 \times 1 \times \frac{1}{4}}{(2+1)^2} = \frac{-2}{9}$$

۲۰- گزینه «۳»

$$f'(x) = a - 2(1+a^2)x = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2(1+a^2)} \Rightarrow f\left(\frac{a}{2(1+a^2)}\right) = \frac{a^2}{2(1+a^2)}$$

حال لازم است بیشترین مقدار عبارت $\frac{a^2}{2(1+a^2)}$ را به دست آوریم (a > 0). بدین منظور ابتدا مشتق آنرا مساوی صفر قرار می دهیم.

$$\left(\frac{a^2}{2(1+a^2)}\right)' = \frac{2a(1-a^2)}{2(1+a^2)^2} = 0 \Rightarrow a = 0, 1, -1$$

که فقط a = 1 قابل قبول است و به ازای a = 1 مقدار عبارت برابر $\frac{1}{8}$ خواهد بود.

۲۱- گزینه «۳» قضیه مقدار میانگین را برای تابع f(x) = Arctgx در فاصله [0, x] به کار می بریم:

$$\frac{\text{Arctgx} - \text{Arctg} 0}{x - 0} = \frac{1}{1+c^2} \quad 0 < c < x \leq 1$$

حال توجه کنید که از 0 < c < 1 نتیجه می شود $\frac{1}{2} < \frac{1}{c^2+1} < 1$.

۲۲- گزینه «۱» با استفاده از برهان خلف نشان می دهیم که f در بازه (0, 2) ریشه ندارد. فرض کنید f یک ریشه مانند a بین 0 و 2 داشته باشد. در این صورت طبق قضیه زل، چون f(0) = f(a) = 0، پس نقطه ای مانند a1 بین 0 و a وجود دارد به طوریکه f'(a1) = 0. و به همین ترتیب نقطه ای مانند a2 بین a و 2 وجود دارد به طوریکه f'(a2) = 0. حال چون f'(a1) = f'(a2) = 0، پس طبق قضیه رل نقطه ای مانند a3 بین a1 و a2 وجود دارد به طوریکه f''(a3) = 0. که این خلاف فرض مسأله می باشد.

۲۳- گزینه «۱» قرار می دهیم f(x) = 2x^5 + 5x^4 + 1. در این صورت: f'(x) = 10x^4 + 20x^3, f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 یا x = -2. از جدول زیر نتیجه می شود تابع f در فاصله [-2, +\infty) ریشه ندارد و در فاصله (-\infty, -2) حداکثر یک ریشه دارد و چون f(-2) > 0 و f(-\infty) < 0 پس f دقیقاً یک ریشه در فاصله (-\infty, -2) دارد.

x	-2	0
f'(x)	+ 0 - 0 +	
f(x)	↗ 17 ↘ 1 ↗	

۲۴- گزینه «۱»

$$f'(x) = -2 \sin x \cos x + 2 = -\sin 2x + 2 > 0$$

بنابراین تابع f، یک تابع اکیداً صعودی می باشد. پس f حداکثر یک ریشه می تواند داشته باشد. از طرفی:

$$f(-\pi) = \cos^2(-\pi) + 2(-\pi) + 5 = 6 - 2\pi < 0, f(0) = 6$$

پس طبق قضیه مقدار میانی f حداقل یک ریشه بین -\pi و 0 دارد. از بحث فوق نتیجه می شود f دقیقاً یک ریشه دارد.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{2h} \stackrel{\text{Hop}}{\Rightarrow} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h)}{2} = \frac{f'(a)}{2} = 4$$

۲۶- گزینه «۲»

$$v = a^r \Rightarrow dv = r a^{r-1} da \Rightarrow da = \frac{dv}{r a^{r-1}}$$

$$S = \pi a^r \Rightarrow ds = \pi r a^{r-1} da = \pi r a^r \times \frac{dv}{r a^{r-1}} = \frac{\pi \times v}{12} = \frac{v}{3}$$

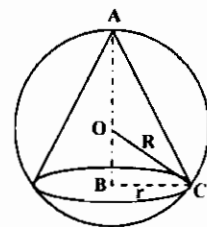
۲۷- گزینه «۱»

$$\left(\frac{h}{r}\right)^2 + r^2 = 1 \Rightarrow r^2 = 1 - \frac{h^2}{r^2}$$

۲۸- گزینه «۴» ارتفاع استوانه مورد نظر را h و شعاع قاعده آنرا r فرض کنید. در اینصورت:

$$v = \pi r^2 h \Rightarrow v = \pi \left(h - \frac{r^2}{r}\right) \Rightarrow v' = \pi \left(1 - \frac{2rh}{r}\right) = 0 \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{v}}{3}$$

۳۹- گزینه «۲» حجم مخروط برابر $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ می باشد که در آن ارتفاع مخروط و r شعاع قاعده مخروطی می باشد. از طرفی



$$OB^2 + BC^2 = R^2 \Rightarrow (h - R)^2 + r^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - (h - R)^2$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (r^2 - h^2) h = \frac{\pi}{3} (r^2 h - h^3) \Rightarrow V' = \frac{\pi}{3} (r^2 - 3h^2)$$

$$V' = 0 \Rightarrow h = 0, h = \frac{r}{3}$$

به ازای $h = 0$ حجم برابر صفر می شود. پس $h = \frac{r}{3}$ حجم را ماکسیمم می کند، که به ازای آن حجم برابر است با:

$$V = \frac{\pi}{3} \left(\frac{8R^2}{9} - \frac{16R^3}{27} \right) = \frac{32\pi R^3}{81}$$

۳۰- گزینه «۴» $x^r - y^r = 1 \Rightarrow y' = -\frac{rx}{-ry} \Rightarrow y' = \frac{x}{y} \Rightarrow y'' = \frac{y - y'x}{y^2}$

$$y'' = \frac{y - \frac{x}{y} \times x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y'' y^3 + 1 = 0$$

۳۱- گزینه «۱» $f'(x) = 2x^2 - 4x = \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \Rightarrow 2x^2 - 4x = \frac{1 - (-2)}{x + 1} \Rightarrow 2x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{2}$

۳۲- گزینه «۱» $y' = (\sin 2x)^{\ln x^2} \left[\frac{2}{x} \ln \sin 2x + \ln x^2 \times \cot 2x \right] = \frac{2(\sin 2x)^{\ln x^2}}{x} [\ln \sin 2x + x \cot 2x \cdot \ln x^2]$

۳۳- گزینه «۱» طول، عرض و مساحت مستطیل مربوطه تابعی از زمان t می باشند.

$$S = xy \Rightarrow \frac{ds}{dt} = y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = 6 \times 3 + 15 \times (-2) = -12$$

۳۴- گزینه «۴» طبق قضیه مقدار میانگین برای تابع f در فاصله $[1, 4]$ داریم: $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(c) \quad 1 < c < 4$

چون $f'(c) \geq 2$ ، بنابراین: $\frac{f(4) - 10}{3} \geq 2 \Rightarrow f(4) \geq 16$

۳۵- گزینه «۲»

۳۶- گزینه «۴» با توجه به قضیه مقدار میانگین برای تابع f در فاصله $[a, x]$ داریم:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) \Rightarrow -1 \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 1$$

$$\Rightarrow -(x - a) \leq f(x) - f(a) \leq (x - a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq |x - a|$$

۳۷- گزینه «۴» $S(t) = t^2 - 4t^2 - 2t \Rightarrow V(t) = S'(t) = 2t - 8t - 2 \Rightarrow V(t) = 0 \Rightarrow t = 2$

$$a = V'(t) = 6t - 8 \Rightarrow a = 6 \times 2 - 8 = 10$$

۳۸- گزینه «۳» $y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x^2 y + y^2}{x^2 + 2xy^2} \Rightarrow m = y'_x(1, 2) = -\frac{6 + 4}{1 + 8} = -\frac{10}{9}$

۳۹- گزینه «۴»

$$\left. \begin{aligned} f(g(x)) &= x \ln x \\ f(g(x)) &= \ln g(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ln g(x) = x \ln x \Rightarrow g(x) = e^{x \ln x}$$

$$g'(x) = (\ln x + 1)e^{x \ln x} = (\ln x + 1)x^x \Rightarrow g'(2) = 2(\ln 2 + 1)$$

بنابراین:

۴۰- گزینه «۳» $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 2f(x)}{x - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2f'(x)}{1} = f(2) - 2f'(2)$

۴۱- گزینه «۱»

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2x}{x^2 + y^2} + 2x \cdot \frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{\frac{2x}{x^2 + y^2} + \frac{2xy}{x^2 + y^2}}{\frac{-x}{y^2} + \frac{2x}{x^2 + y^2}} = \frac{x + y}{x - y}$$

۴۲- گزینه «۱» می دانیم هر چند جمله ای از درجه فرد، حداقل یک ریشه دارد، و چون مشتق چند جمله ای داده شده بزرگتر از صفر است، پس چند جمله ای حداکثر یک ریشه دارد.

۴۳- گزینه «۴» $y = \arcsin(\ln x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\ln x)^2}} \Rightarrow y'(\sqrt{e}) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{1}{e})^2}} = \frac{e}{\sqrt{e^2 - 1}}$

۴۴- گزینه «۴» $f(x) = e^x + x - \cos x \Rightarrow f'(x) = e^x + 1 + \sin x > 0$
بنابراین f صعودی اکید است.

۴۵- گزینه «۲» اگر $x < 0$ ، آنگاه: $f(x) = 1 + e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = 2x^{-2} e^{-x^2} < 0$
بنابراین f در فاصله $(-\infty, 0)$ اکیدا نزولی است و نقطه بحرانی و اکسترمم ندارد.

اگر $x > 0$ ، آنگاه: $f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = x^x (\ln x + 1)$ ، $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

بنابراین $\frac{1}{e}$ یک نقطه بحرانی می باشد و چون در دو طرف این نقطه مشتق تغییر علامت می دهد بنابراین نقطه اکسترمم نیز می باشد.

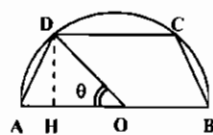
چون ضابطه f در دو طرف نقطه $x = 0$ عوض می شود، برای بررسی مشتق پذیر در $x = 0$ ، از تعریف مشتق استفاده می کنیم.

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + e^{-x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x^2}}{x} = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x (\ln x + 1)}{1} = -\infty$$

چون مشتق چپ و راست f در صفر با هم برابر نیست، بنابراین f در صفر مشتق پذیر نمی باشد و بنابراین صفر یک نقطه بحرانی برای تابع f می باشد. ولی نقطه بحرانی صفر، نقطه اکسترمم نیست، زیرا مشتق f در دو طرف صفر منفی می باشد.

۴۶- گزینه «۲» با توجه به شکل مقابل:



$$DH = r \sin \theta, OH = r \cos \theta \Rightarrow S = \frac{r \sin \theta}{\theta} (\theta r + r \cos \theta) = r^2 \sin \theta (1 + \cos \theta)$$

برای محاسبه ماکسیم مساحت، لازم است ماکسیم عبارت فوق را در فاصله $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ به دست می‌آوریم.

$$S' = r^2 (\cos \theta (1 + \cos \theta) - \sin^2 \theta) = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos \theta = -1, \frac{1}{2}$$

و بنابراین $\theta = \frac{\pi}{3}$ تنها ریشه معادله فوق در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ می‌باشد.

$$S(0) = 0, S(\frac{\pi}{3}) = r^2, S(\frac{\pi}{2}) = \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} r^2$$

$$h = r \sin \frac{\pi}{3} = r \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{بنابراین } S \text{ در } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ ماکسیم خواهد شد، که در این صورت ارتفاع دوزنقه برابر است با:}$$

$$f'(x) = \frac{1 + \text{tg}^2 x}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 x}} \Rightarrow f'(0) = 1 \quad \text{گزینه «۳»}$$

$$x^2 + y^2 = \Delta \Rightarrow y = \sqrt{\Delta - x^2} \Rightarrow x + y = x + \sqrt{\Delta - x^2} = f(x) \quad \text{گزینه «۴»}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{\Delta - x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta - x^2} = x \Rightarrow x^2 = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\text{Max}(x + y) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \sqrt{\Delta} \quad \text{گزینه «۱»}$$

$$y' = \frac{\lambda \text{Ln} x - 4 \text{Ln}^2 x}{x^2} = 0 \Rightarrow \text{Ln} x (\lambda - 4 \text{Ln} x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Ln} x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y(1) = 0 & \text{Min} \\ \text{Ln} x = 2 \Rightarrow x = e^2 \Rightarrow y(e^2) = \frac{16}{e^2} & \text{Max} \end{cases}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow dv = 4 \pi r^2 dr \Rightarrow \Delta = 4 \pi \times r^2 dr \Rightarrow dr = \frac{\Delta}{26 \pi} \quad \text{گزینه «۱»}$$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{2\sqrt{1}} = \frac{2}{2} \quad \text{گزینه «۳» به ازای } x = 1 \text{ مقدار } y \text{ برابر } 1 \text{ خواهد بود.}$$

۵۲- گزینه «۴» قرار می‌دهیم $f(x) = 2^x - 3x$. بنابر قضیه بولتزانو معادله $f(x) = 0$ در بازه‌ای که $f(a)f(b) < 0$ حداقل یک جواب دارد، و چون $f(0)f(1) < 0$ بنابراین f در بازه $(0, 1)$ حداقل یک جواب دارد.

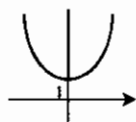
۵۳- گزینه «۳» می‌دانیم هرگاه $y = u^v$ ، آنگاه:

$$\frac{dy}{dx} = u^v [v' \text{Ln} u + v \times \frac{u'}{u}] = (x^2 + 1)^{e^x} [e^x \text{Ln}(x^2 + 1) + e^x \times \frac{2x}{x^2 + 1}]$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = 2^e [e \text{Ln} 2 + e]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2t} = \frac{-1}{2t^2} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2}{t^3} = \frac{2}{2^3} = \frac{2}{8} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} = \frac{2}{4} \quad \text{گزینه «۱»}$$

۵۵- گزینه «۳» به نمودار $y = \cosh x$ توجه کنید:



$$x(t) = 10^6 e^{0.2t} \Rightarrow x(5) = 10^6 e^{0.2 \times 5} = 10^6 e \quad \text{گزینه «۲» مقدار سرمایه را در سال ۱۱م با } x(1) \text{ نمایش می‌دهیم.}$$

$$\text{Ln} \frac{x+y}{x-y} = r \Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = e^r \quad \text{گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 \times (x-y) - 1 \times (x+y)}{(x-y)^2} = \frac{+2y}{2x} = \frac{y}{x}$$

و چون $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x}{y}$ بنابراین $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy}$

$$y = \text{Arctg} \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{1 + x} \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{2} \quad \text{گزینه «۱»}$$

۵۹- گزینه «۲» از $x = 1$ نتیجه می‌شود $y = -1$. با مشتق‌گیری ضمنی از عبارت داده شده خواهیم داشت:

$$2x + 2y + 2xy' + \lambda yy' = 0 \xrightarrow{y=-1} y' = 0$$

$$2 + 2y' + 2y + 2xy'' + \lambda yy'' = 0 \xrightarrow{y=-1, y'=0} y'' = \frac{1}{2}$$

از رابطه اخیر دوباره نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = x e^{2x}, f'(x) = e^{2x} + 2x e^{2x}, f''(x) = 2e^{2x} + 2e^{2x} + 4x e^{2x}$$

$$f'''(x) = 4e^{2x} + 4e^{2x} + 8x e^{2x} \Rightarrow f'''(0) = 12$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $n = 3$ مقدار ۱۲ را تولید می‌کند، گزینه ۲ می‌باشد.

$$x(t) = 100 e^{0.2t} \Rightarrow x(50) = 100 e^{0.2 \times 50} = 100 e \quad \text{گزینه «۳»}$$

$$x^2 + y^2 - xy = 1 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{2xy - x}{2x^2 - y} \quad \text{گزینه «۱» به ازای } x = 1 \text{ مقدار } y \text{ برابر } 1 \text{ یا } 0 \text{ خواهد بود.}$$

مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $(1, 0)$ برابر $\frac{1}{2}$ ، در نقطه $(1, 1)$ برابر -1 ، و در نقطه $(1, -1)$ برابر $\frac{-1}{2}$ می‌باشد. که با توجه به گزینه‌ها مقدار -1 مدنظر طراح محترم بوده است!

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{2}) = -1 \quad \text{گزینه «۳» در همسایگی } x = \frac{\pi}{2} \text{ مقدار } [x] \text{ برابر یک می‌باشد. بنابراین:}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{1 + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x(1 + |x|)} \quad \text{گزینه «۲»}$$

۶۵- گزینه «۴» تابع قدر مطلق در ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق مشتق‌پذیر نیست، بنابراین تابع f در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

روش دوم: از تعریف مشتق داریم:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{1 + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x(1 + |x|)}$$

حد چپ در صفر برابر -1 و حد راست برابر 1 است و لذا در $x = 0$ تابع مشتق‌پذیر نیست.

۶۶- گزینه «۲» $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} \stackrel{HOP}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) + f'(x_0 - h)}{1} = 2f'(x_0)$

۶۷- گزینه «۱» شیب پاره خط بین دو نقطه داده شده برابر ۱ $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{3 - 1}{2} = 1$ می باشد، بنابراین در نقطه مورد نظر نیز شیب منحنی

(مشتق منحنی) باید برابر ۱ باشد: $f'(x) = 2x^2 - 2 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$

جواب $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ در فاصله $[0, 2]$ قرار ندارد و بنابراین قابل قبول نیست.

۶۸- گزینه «۴» با استفاده از قاعده زنجیره ای داریم:

$y = f(f(f(f(x)))) \Rightarrow y' = f'(x)f'(f(x))f'(f(f(x)))f'(f(f(f(x))))$
 $\Rightarrow y'(0) = f'(0)f'(f(0))f'(f(f(0)))f'(f(f(f(0)))) = f'(0)f'(0)f'(0)f'(0) = 2^4 = 16$

۶۹- گزینه «۲» از طرفین رابطه مشتق می گیریم: $f(1 - x^2) = 4x^2 \Rightarrow -2x^2 f'(1 - x^2) = 8x$

به ازای $x = -2$ داریم: $-12f'(9) = -16 \Rightarrow f'(9) = \frac{4}{3}$

۷۰- گزینه «۲» می دانیم حجم یک مخروط با ارتفاع h و شعاع قاعده r برابر $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ می باشد. از طرفی در این مخروط نسبت ارتفاع به شعاع

برابر ۶ به ۲ است. یعنی $\frac{h}{r} = \frac{6}{2}$. بنابراین $r = \frac{h}{3}$ پس فرمول حجم مخروط به صورت زیر در می آید:

$V = \frac{\pi}{3} \times (\frac{h}{3})^2 h = \frac{\pi}{27} h^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{9} h^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\pi}{9} \times \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{9}{2\pi}$

۷۱- هیچکدام از گزینه ها صحیح نمی باشد. $x^2 + y^2 = 13^2 \Rightarrow 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 2(\delta) \frac{dx}{dt} + 2(12)(-2) = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{24}{\delta}$

۷۲- گزینه «۳» $f(x) = e^{x^2} - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x^2 e^{x^2} \Rightarrow f'(0) = 0$

با توجه به اینکه مشتق تابع حول نقطه $x = 0$ تغییر علامت نمی دهد، نقطه $x = 0$ نقطه عطف منحنی می باشد.

۷۳- گزینه «۱»

$f'(x) = \begin{cases} 1 + \tan^2 x & x > 0 \\ \frac{\cos x}{\sqrt{3}} - \frac{x \sin x}{\sqrt{3}} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(0^+) = 1, f'(0^-) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

چون به ازای $x < 0$ مقدار تابع f منفی می باشد، پس زاویه نیم مماس چپ با جهت مثبت محور x ها برابر $\pi + \frac{\pi}{6}$ می باشد، بنابراین:

زاویه بین دو نیم مماس $= \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}$

۷۴- گزینه «۲» اگر f بیش از یک ریشه در فاصله $(0, +\infty)$ داشته باشد، آنگاه با توجه به اینکه $f(0) = 0$ پس f در $[0, +\infty)$ حداقل سه ریشه دارد و بنابراین f' حداقل دو ریشه در $(0, +\infty)$ خواهد داشت که با توجه به شکل درست نیست، پس f حداکثر یک ریشه در $(0, +\infty)$ دارد.

۷۵- گزینه «۴» $y^2 = x \Rightarrow y^2 - x = 0 \Rightarrow y' = -\frac{1}{2y} = \frac{1}{2y}$ \Rightarrow ضریب زاویه قائم $= -2y$

فرض کنید نقطه تقاطع خط قائم بر منحنی با منحنی (x_0, y_0) باشد (توجه کنید که $x_0 = y_0^2$)، در این صورت معادله خط قائم به صورت زیر در می آید:

$y - y_0 = -2y_0(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = -2y_0(x - y_0^2)$

$0 = y_0 = -2y_0(\alpha - y_0^2) \Rightarrow y_0 = 0$ یا $y_0 = \pm \sqrt{\alpha - \frac{1}{2}}$ با توجه به اینکه معادله خط قائم باید از $(\alpha, 0)$ عبور کند، داریم:

پس به ازای $\alpha > \frac{1}{2}$ دقیقاً سه قائم می توان رسم کرد.

۷۶- گزینه «۳» $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1$

بنابراین شیب خط مماس بر f در $x = 0$ برابر -1 می باشد، و چون $f(0) = 0$ پس معادله خط مماس به صورت $y + x = 0$ در می آید.

۷۷- گزینه «۴»

$\ln f(x) = -\ln x - \ln(x-1) - 2\ln(x-2) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-2}$

$\Rightarrow \frac{f'(2)}{f(2)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 2 \Rightarrow f'(2) = \frac{-17}{6} f(2) = \frac{-17}{36}$

۷۸- گزینه «۴» $f'(x) = -\sqrt{1+x^2} \Rightarrow f'(0) = -1, f(0) = 0$

$y - 0 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x \Rightarrow y + x = 0$ بنابراین معادله خط مماس به صورت روبرو در می آید:

۷۹- گزینه «۲» $\frac{dy}{dx} = 1 \times [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + [\frac{1}{x} \cos(\ln x) - \frac{1}{x} \sin(\ln x)] \times x = 2 \cos(\ln x)$

۸۰- گزینه «۳» $y = (\frac{1}{x})^x = x^{-x} \Rightarrow y' = x^{-x}(-\ln x - 1)$

$y' = 0 \Rightarrow -\ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ نقطه بحرانی

با توجه به اینکه به ازای $x < \frac{1}{e}, x > \frac{1}{e}$ و به ازای $x > \frac{1}{e}, x < \frac{1}{e}$ پس نقطه $x = \frac{1}{e}$ نقطه ماکسیمم تابع می باشد، بنابراین: $y(\frac{1}{e}) = e^{\frac{1}{e}}$

۸۱- گزینه «۱» $f'(x) = 6 \times (4x - 4)(2x^2 - 4x + 1)^{59} \Rightarrow f'(1) = 0$

۸۲- گزینه «۴»

$f(x) = \sinh^2 2x \Rightarrow f'(x) = 2 \times 2 \sinh 2x \cosh 2x = 2 \sinh 4x = 2 \times (\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2}) = e^{4x} - e^{-4x} \Rightarrow f'(1) = e^4 - e^{-4}$

۸۳- گزینه «۳»

مشتق، تابع فرد است $f'(x) = -f'(-x)$ از طرفین مشتق می گیریم: $f(x) = f(-x)$ تابع زوج

مشتق، تابع زوج است $f'(x) = f'(-x)$ از طرفین مشتق می گیریم: $f(x) = -f(-x)$ تابع فرد

۸۴- گزینه «۳» اگر $x(t)$ را جمعیت شهر در سال t فرض کنیم، در این صورت $x(t) = x_0 e^{kt}$ و بنابراین:

$\frac{x(1370)}{x(1340)} = \frac{x_0 e^{1370k}}{x_0 e^{1340k}} = e^{30k} \Rightarrow e^{30k} = \frac{60000}{40000} = \frac{3}{2}$

$\frac{x(1400)}{x(1370)} = \frac{x_0 e^{1400k}}{x_0 e^{1370k}} = e^{30k} \Rightarrow x(1400) = \frac{3}{2} \times 60000 = 90000$

۸۵- گزینه ۲»

y = Ln√x = 1/2 Lnx ⇒ y' = 1/2x ⇒ m = y'(x_0) = 1/2x_0

این خط با شیب 1/2x_0 از مبدأ مختصات عبور می‌کند، بنابراین معادله آن به صورت روبرو خواهد بود: y - 0 = 1/2x_0(x - 0) ⇒ y = x/2x_0

خط از نقطه (x_0, y_0) نیز عبور می‌کند پس داریم: y_0 = x_0/2x_0 = 1/2

۸۶- گزینه ۳»

روش اول: می‌دانیم برای اینکه x.y^2 ماکزیمم شود باید x = y/2 باشد. روش دوم:

x + y = 9 ⇒ x = 9 - y ⇒ A(y) = (9 - y).y^2 = 9y^2 - y^3 ⇒ A'(y) = 18y - 3y^2 ⇒ 3y(6 - y) = 0 ⇒ y = 6 ⇒ x = 9 - 6 = 3 ⇒ x.x.y = 6x3 = 18

۸۷- گزینه ۲»

f(x) = Lnx/x ⇒ f'(x) = (1 - Lnx)/x^2 = 0 ⇒ 1 - Lnx = 0 ⇒ x = e

نقطه ماکسیمم f(e) = Lne/e = 1/e خواهد بود.

۸۸- گزینه ۳» فرض کنید f(x) = x^y + 2x + c. پس f'(x) = yx^{y-1} + 2 > 0 چون f تابعی اکیداً صعودی است و حداکثر یک ریشه دارد. از طرفی f یک چند جمله‌ای از درجه فرد می‌باشد، پس حداقل یک ریشه دارد. از بحث فوق نتیجه می‌شود f دقیقاً یک ریشه دارد.

۸۹- گزینه ۱» در همسایگی نقطه π/2 تابع sin x مثبت است، بنابراین: f(x) = sin x ⇒ f'(x) = cos x ⇒ f'(π/2) = 0

90- گزینه ۲» dy/dx = (ye^{2x} + 1)(x + 2) - 1x(e^{2x} + x) ⇒ dy/dx |_{x=0} = 5/4 ⇒ dx/dy |_{x=0} = 4/5

91- گزینه ۲» f(x) = 1/√x = x^{-1/2} ⇒ f'(x) = -1/2 x^{-3/2} ⇒ f'(8) = -1/2 * 1/√(8)^3 = -1/48

92- گزینه ۳» g(x) = √(2x-5) ⇒ Lng(x) = Ln√(2x-5) ⇒ Lng(x) = 1/2 Ln(2x-5) - 1/2 Ln(2x+1)

از طرفین رابطه اخیر مشتق می‌گیریم:

g'(x) = 1/(2x-5) - 1/(2(2x+1)) ⇒ g'(x) = √(2x-5) * 17 / (2(2x-5)(2x+1)) = 17 / (2(2x-5)^2(2x+1)^2)

93- گزینه ۴» √xy + 2x - √y = 0 ⇒ y' = - (y/2√xy + 2) / (x/√xy - 1/2√y) = - (y + 4√xy) / (x - √x) = (y + 4√xy) / (√x - x)

94- گزینه ۲» Ln(xy) + x + y = 2 ⇒ Lnx + Lny + x + y = 2 ⇒ y' = - (x/y + 1) / (1/y + 1) = - (xy + y) / (xy + x)

95- گزینه ۴» Lim_{x→-2} (4x^2 - 9) / (2x + 3) = 0/0 HOP ⇒ Lim_{x→-2} (8x) / 2 = -6

96- گزینه ۲»

f'(x) = 2/3 x^{-1/3} - 2/3 x^{-2/3} = 2/3 (x^{-1/3} - x^{-2/3})

f'(1) = 0 نقطه بحرانی f می‌باشد.

f''(x) = 2/3 (-1/3 x^{-4/3} + 2/3 x^{-5/3}) = -2/9 (x^{-4/3} - 2x^{-5/3}) ⇒ f''(8) = 0

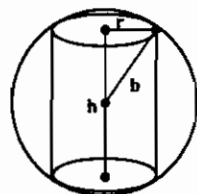
چون f''(8) = 0 و f''(1) = 0 تغییر علامت می‌دهد، پس x = 8 نقطه عطف است و چون f'(1) = 0 و

f''(1) = -2/9 (1 - 2) = 2/9 > 0 پس x = 1 نقطه می‌نیم می‌باشد.

97- گزینه ۴» با توجه به شکل رابطه R^2 + h^2/4 = b^2 برقرار است، بنابراین:

V = πR^2h = π(b^2 - h^2/4)h = π(b^2h - h^3/4)

V' = π(b^2 - 3h^2/4) = 0 ⇒ h = 2b/√3, R = b√2/3



98- گزینه ۲» اگر طول ضلع مکعب را x و طول قطر آن را y فرض کنیم، آنگاه y = √2x بنابراین:

dy = √2 dx ⇒ 2 = √2 dx ⇒ dx = √2

99- گزینه ۳» اگر وزن جسم در حال حاضر ۲۰۰ باشد، وزن جسم پس از t ساعت ω(t) = ۲۰۰(1/4)^t خواهد بود. بنابراین:

ω(3) = ۲۰۰(1/4)^3 = 200/64 = 3.125

۱۰۰- گزینه ۱» طبق فرض هر ۸ سال مقدار پول ۵ برابر می‌شود، بنابراین پس از ۲۴ سال مقدار پول ۵^3 = ۱۲۵ برابر می‌شود. بنابراین:

اصل پول شخص = 10000 / 125 = 80

۱۰۱- گزینه ۲»

f(x) = x^2 + 4x^3 ⇒ f'(x) = 2x + 12x^2

f'(x) = 0 ⇒ √x + 1/√x^2 = 0 ⇒ x+1 = 0 ⇒ x = -1 نقطه بحرانی

با توجه به ضابطه f'، تابع f در x = 0 مشتق‌پذیر نیست. بنابراین نقاط -۱ و ۰ نقاط بحرانی هستند.

۱۰۲- گزینه «۳»

$$\frac{dy}{dx} = rx^r y^r \Rightarrow \frac{dy}{y^r} = rx^r dx \Rightarrow \frac{-1}{y} = x^r + c \Rightarrow y = \frac{-1}{x^r + c}$$

چون منحنی طبق فرض از نقطه (۱ و ۲) عبور می‌کند، پس $c = -9$.
 $c = -9 \Rightarrow y = \frac{-1}{x^r - 9} \Rightarrow y(1) = \frac{1}{8}$

۱۰۳- گزینه «۱» ابتدا نقطه تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم:

$$\cos x = x^r + 1 \Rightarrow x = 0$$

$$\begin{cases} y_1 = x^r + 1 \Rightarrow m = y'_1(0) = r(0) = r \times 0 = 0 \Rightarrow m = m' \\ y_2 = \cos x \Rightarrow m' = y'_2(0) = -\sin 0 = 0 \end{cases}$$

با توجه به رابطه $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$ ملاحظه می‌گردد که $\alpha = 0$ خواهد بود.

۱۰۴- گزینه «۴» می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد، آنگاه $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ خواهد بود.

$$\Delta = (\Delta + x^r) e^{\sin x} \Rightarrow x = 0 \quad (f^{-1})'(\Delta) = \frac{1}{f'(0)}, \quad f'(x) = [rx^r + (\Delta + x^r) \cos x] e^{\sin x} \Rightarrow f'(0) = \Delta \Rightarrow (f^{-1})'(\Delta) = \frac{1}{\Delta}$$

۱۰۵- گزینه «۴» فرض کنید $f(x) = 2x^r - 3x^r - 12x - 6$ چون $f(x) > 0$ و مشتق $f'(x) = 6x^r - 6x - 12$ یعنی $f'(x) = 6x^r - 6x - 12$ در فاصله $(4, +\infty)$ همواره مثبت است، پس f در $(4, +\infty)$ ریشه ندارد.

۱۰۶- گزینه «۳» نقاط $x = 0$ و $x = 2$ نقاط مشتق‌ناپذیر تابع می‌باشند، بنابراین جزء نقاط بحرانی محسوب می‌شوند:

$$f(0) = f(2) = \frac{4}{3} \quad \text{مقدار ماکسیمم تابع:}$$

۱۰۷- گزینه «۱» از رابطه $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ استفاده می‌کنیم. ابتدا به جای $f(x)$ مقدار -1 را قرار می‌دهیم تا x مربوط به آن به دست آید.

توجه کنید که $1 - x^r$ وقتی $x < 0$ باشد همواره مثبت است، پس فقط $-x^r$ را برابر -1 قرار می‌دهیم، از آنجا $x = 1$ به دست می‌آید، در نتیجه:

$$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(1)}, \quad f'(x) = -2x \Rightarrow f'(1) = -2 \Rightarrow (f^{-1})'(-1) = -\frac{1}{2}$$

۱۰۸- گزینه «۳»

روش اول: ابتدا مقدار تابع f را در $x = 1$ به دست می‌آوریم.

$$2x \leq f(x) \leq x^r + 1 \Rightarrow 2 \leq f(1) \leq 2 \Rightarrow f(1) = 2$$

حال برای محاسبه $f'(1)$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$2x \leq f(x) \leq x^r + 1 \Rightarrow \frac{2x - 2}{x - 1} \leq \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq \frac{x^r + 1 - 2}{x - 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{x - 1} \leq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^r - 1}{x - 1} \Rightarrow 2 \leq f'(1) \leq 2$$

و بنابراین $f'(1) = 2$.

روش دوم: به عنوان یک راه حل کوتاه و غیر دقیق می‌توان از طرفین رابطه داده شده مشتق گرفت و به جای x مقدار 1 را قرار داد:

$$2x \leq f(x) \leq x^r + 1 \Rightarrow 2 \leq f'(x) \leq 2x \Rightarrow 2 \leq f'(1) \leq 2 \Rightarrow f'(1) = 2$$

۱۰۹- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که $f(0) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{e}$ با توجه به موارد

فوق $\frac{1}{e}$ مقدار ماکسیمم f و 0 مقدار مینیمم f خواهد بود.

۱۱۰- گزینه «۲»

۱۱۱- گزینه «۲» ریشه‌های f در بازه $(0, 1)$ را x_1 و x_2 فرض کنید. چون f نامنفی است و $f(x_1) = f(x_2) = 0$ پس نقاط x_1 و x_2 نقاط مینیمم هستند و چون f مشتق‌پذیر است پس $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. از طرفی طبق قضیه رُل یک نقطه مانند x_3 بین x_1 و x_2 وجود دارد به طوری که $f'(x_3) = 0$. با استفاده مجدد از قضیه رُل برای f' نتیجه می‌شود که f'' حداقل دو ریشه در $(0, 1)$ دارد.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^r f(a) - a^r f(x)}{x - a} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{rx f(a) - a^r f'(x)}{1} = raf(a) - a^r f'(a) \quad \text{۱۱۲- گزینه «۴»}$$

۱۱۳- گزینه «۱»

۱۱۴- گزینه «۲» نقاطی که در آن شیب منحنی f برابر صفر باشد، همان نقاطی است که $f'(x) = 0$ می‌باشد.

$$f'(x) = a^x + xa^x \ln a = a^x (x \ln a + 1) \quad \text{۱۱۵- گزینه «۱»}$$

$$f'(x) \leq 0 \Rightarrow a^x (x \ln a + 1) \leq 0 \Rightarrow x \ln a + 1 \leq 0 \Rightarrow x \ln a \leq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{\ln a}$$

$$f'(x) = \frac{n\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} (\sin \frac{\pi x}{2})^{n-1} (\cos \pi x)^m - m\pi \sin \pi x (\cos \pi x)^{m-1} (\sin \frac{\pi x}{2})^n \Rightarrow f'(1) = 0 = 0 = 0 \quad \text{۱۱۶- گزینه «۱»}$$

$$\text{مشتق} = 2 \operatorname{Sinh} x \operatorname{Cosh} x + 2 \operatorname{Sinh} x \operatorname{Cosh} x = 4 \operatorname{Sinh} x \operatorname{Cosh} x = 2 \operatorname{Sinh} 2x \quad \text{۱۱۷- گزینه «۱»}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ مشتق در } = 2 \operatorname{Sinh} 1 = e + e^{-1} = e + \frac{1}{e}$$

$$V = \pi r^2 \Rightarrow dv = 2\pi r dr \Rightarrow \pi = 2\pi r \times 2 \Rightarrow r = 0/25 \quad \text{۱۱۸- گزینه «۱»}$$

۱۱۹- گزینه «۳» نقطه $P(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ روی منحنی قرار دارد، کافی است شیب منحنی را در نقطه P بدست آوریم:

$$y' = -\frac{\operatorname{Siny} + y \operatorname{Cos} x}{x \operatorname{Cos} y + \operatorname{Sinx}} \Big|_{(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} = -1 \Rightarrow y - \frac{\pi}{2} = -1(x - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow y + x = \pi$$

۱۲۰- گزینه «۴»

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

$$x^r + y^r = x^r + (1 - x)^r = 1 - rx + rx^r = f(x) \quad \text{مجموع مکعبات:}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 6x - r = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} \quad \text{مجموع فوق وقتی مینیمم می‌شود که مشتق برابر صفر شود:}$$

۱۲۱- گزینه «۱»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^r}{x^r + 2} = 2 \Rightarrow \boxed{y = 2} \quad \text{مجاذب افقی}$$

$$f'(x) = \frac{4x(x^r + 2) - 2x(2x^r)}{(x^r + 2)^2} = \frac{4x^2}{(x^r + 2)^2} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \quad \text{نقطه بحرانی}$$

$$f''(x) = \frac{4(2x^r + 2) - 4x(2x^r)}{(x^r + 2)^3} = \frac{4(2 - 2x^r)}{(x^r + 2)^3}, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

چون در دو طرف نقاط $x = \pm 1$ ، f'' تغییر علامت می‌دهد، پس این نقاط، نقطه عطف هستند. ضمناً در نقطه بحرانی $x = 0$ ، $f'' > 0$ بنابراین نقطه $x = 0$ نقطه می‌نیم منحنی می‌باشد.

۱۲۲- گزینه «۱» تابع f در $x=0$ ناپیوسته است و $x=0$ مجانب قائم تابع محسوب می‌شود.

$f'(x) = 2x + \frac{2}{x^2} = \frac{2x^2 + 2}{x^2} = 0 \Rightarrow x = -1$ نقطه بحرانی

$f''(x) = 2 - \frac{4}{x^3}, f''(x) = 0 \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$

در دو طرف نقطه $x = \sqrt[3]{2}$ ، f'' تغییر علامت می‌دهد، پس نقطه عطف منحنی می‌باشد. ضمناً در نقطه بحرانی $x = -1$ ، $f'' > 0$ ، بنابراین $x = -1$ نقطه می‌نیم منحنی می‌باشد.

۱۲۳- گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که $f(0) < 0$ و $f(-\pi) > 0$ پس طبق قضیه مقدار میانی f حداقل یک ریشه در بازه $(-\pi, 0)$ دارد. همچنین $f(0) < 0$ و $f(\pi) > 0$ پس f حداقل یک ریشه در بازه $(0, \pi)$ دارد. از طرفی:

$f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x \Rightarrow f'(x) = 2x - x \cos x$
 $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - x \cos x = 0 \Rightarrow x = 0$

چون f' یک ریشه دارد، پس خود تابع f حداکثر دو ریشه دارد. از بحث فوق نتیجه می‌شود معادله داده شده دقیقاً دو ریشه دارد.

۱۲۴- گزینه «۲»

حجم مخروط $= V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ و حجم استوانه $= U_r = \pi r^2 h$

با توجه به شکل: $\frac{H}{R} = \frac{H-h}{r} \Rightarrow r = \frac{R(H-h)}{H}$

با جایگزینی رابطه فوق در U_r به دست می‌آید:

$U_r = \frac{\pi R^2}{H^2} (H-h)^2 h, \frac{dU_r}{dh} = \frac{\pi R^2}{H^2} (-2(H-h)h + (H-h)^2) = 0 \Rightarrow h = \frac{H}{3}$

$\Rightarrow U_r = \frac{\pi R^2}{H^2} (H - \frac{H}{3})^2 \frac{H}{3} = \frac{4\pi}{27} R^2 H \Rightarrow \frac{U_r}{U_1} = \frac{4}{9}$

۱۲۵- گزینه «۱»

$y = e^{x^2-1} \Rightarrow y(1) = e^0 = 1, y' = 2xe^{x^2-1} \Rightarrow y'(1) = 2$

معادله خط مماس: $y-1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x-1$

۱۲۶- گزینه «۳»

$f'(tgx) = \frac{1}{2} tgx = \frac{1}{2} x \frac{2tgx}{1-tg^2x} = \frac{tgx}{1-tg^2x} \xrightarrow{u=tgx} f'(u) = \frac{u}{1-u^2}$

$y = f(\sin x) \Rightarrow y' = \cos x f'(\sin x) = \cos x \times \frac{\sin x}{1-\sin^2 x} = tgx$

۱۲۷- گزینه «۳»

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{te^t + t^2e^t}{e^t + (t+2)e^t} = \frac{t^2 + 2t}{t+3} \Big|_{t=2} = \frac{10}{5} = 2/5$

۱۲۸- گزینه «۴»

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\sin t}} = \frac{1}{\cos^2 t} \sin t$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{-\cos t}{\sin^2 t}}{\frac{1}{\sin t}} = -\cot g^2 t \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1$

۱۲۹- گزینه «۱»

$u = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

$v = 2x^2 - 2x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 4x - 2$

$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \times \frac{1}{4x-2} = \frac{x}{2(2x-1)\sqrt{x^2+9}}$

از روابط فوق نتیجه می‌شود:

$\frac{df}{dx^2} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dx^2} = (15x^2 + 24x^2 - 24x^2) \times \frac{1}{2x^2} = 5x^2 + 12x - 12$

۱۳۰- گزینه «۱»

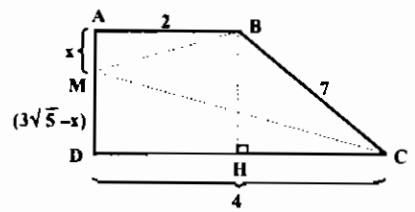
$y = x^x \Rightarrow y' = x^x (\ln x + 1) \Rightarrow y'(2) = 2(\ln 2 + 1)$

۱۳۱- گزینه «۴»

پس معادله خط مماس بر منحنی در نقطه بر منحنی در نقطه $(2, 4)$ روی منحنی به صورت روبرو است: برای به دست آوردن محل تلاقی با محور x ها، به جای y در معادله فوق صفر قرار می‌دهیم:

$-4 = 2(\ln 2 + 1)(x - 2) \Rightarrow x - 2 = \frac{-1}{\ln 2 + 1} = \frac{2 \ln 2 + 1}{\ln 2 + 1}$

۱۳۲- گزینه «۲»



$BH^2 + CH^2 = BC^2 \Rightarrow BH^2 + 2^2 = 7^2 \Rightarrow BH = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \Rightarrow AD = 2\sqrt{5}$

طول MA را برابر x و بنابراین طول MD را $(3\sqrt{5} - x)$ فرض می‌کنیم. در این صورت داریم:

$MB + MC = \sqrt{AM^2 + AB^2} + \sqrt{DM^2 + DC^2} = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(3\sqrt{5} - x)^2 + 16} = f(x)$

می‌خواهیم عبارت فوق را می‌نیم کنیم:

$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} - \frac{2(3\sqrt{5}-x)}{2\sqrt{(3\sqrt{5}-x)^2+16}} = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+4} = \frac{(3\sqrt{5}-x)^2}{(3\sqrt{5}-x)^2+16}$

$\Rightarrow 16x^2 = 2(3\sqrt{5}-x)^2 \Rightarrow 4x^2 = 45 + x^2 - 6\sqrt{5}x \Rightarrow x = \sqrt{5} \Rightarrow f(\sqrt{5}) = \sqrt{9} + \sqrt{36} = 9$

۱۳۳- گزینه «۲»

$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{x} \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{2}$

۱۳۴- گزینه «۳» به ازای $x=2$ از $y^2 + y = x$ نتیجه می‌شود $y=1$.

$y^2 + y = x \Rightarrow (2y^2 + 1)y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{4}, 6yy'' + (2y^2 + 1)y'' = 0 \Rightarrow 6(1)(\frac{1}{4})^2 + 4y'' = 0 \Rightarrow y'' = \frac{-6}{64} = \frac{-3}{32}$

۱۳۵- گزینه «۱» منحنی داده شده فقط یک مجانب افقی دارد. مجانب افقی $y = 0$

$y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$ یا 2

$\begin{cases} y(0) = 0 & \text{می‌نیم نسبی} \\ y(2) = 4e^{-2} & \text{ماکسیمم نسبی} \end{cases}$

نقطه می‌نیم یا همان $(0, 0)$ روی خط $y = 0$ قرار دارد، پس فاصله برابر ۰ می‌باشد.

۱۳۶- گزینه «۴» نسبت افزایش جمعیت ۱۲ = ۹ - ۲۱ در هزار می باشد پس اگر جمعیت کنونی را X_0 فرض کنیم، تعداد جمعیت در سال t ام برابر $X(t) = X_0 e^{12t/1000}$ می باشد. برای اینکه جمعیت دو برابر شود لازم است $X(t) = 2X_0$ شود، بنابراین:

$$2X_0 = X_0 e^{12t/1000} \Rightarrow e^{12t/1000} = 2 \Rightarrow \frac{12}{1000}t = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{1000}{12} \times \frac{69}{100} = 57/5$$

۱۳۷- گزینه «۲»

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} (\cosh(\ln \frac{1}{x})) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} (\cosh(-\ln x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} (\frac{e^{-\ln x} + e^{\ln x}}{2})$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} (\frac{1}{2}(\frac{1}{x} + x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(-\frac{1}{x^2} + 1) = \frac{1}{2}$$

۱۳۸- گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که: $f'(0) = \ln 2 + 1$ $f(x) = x^{\sin x} + x^2 x \Rightarrow f'(x) = \cos x x^{\sin x} \ln 2 + x^2 \ln 2 + 2x^2 \Rightarrow f'(0) = \ln 2 + 1$ برای محاسبه حد داده شده از قاعده هوییتال استفاده می کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h) + h}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h) + f'(-h) + 1}{2} = f'(0) + \frac{1}{2} = \ln 2 + \frac{3}{2}$$

۱۳۹- گزینه «۲» $f(x) = (2 + x^2)e^x \Rightarrow f'(x) = 2x^2 e^x + (2 + x^2)e^x = (x^2 + 2x^2 + 2)e^x$

$$f(a) = b \Rightarrow (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

در این تست $b = 2$ می باشد، لذا باید مقدار a را به دست آوریم:

$$f(a) = b \Rightarrow (2 + a^2)e^a = 2 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2 \times e^0} = \frac{1}{2}$$

۱۴۰- گزینه «۳» اگر $y = u(x)^{v(x)}$ آنگاه مشتق تابع y برابر است با: $y' = u^v [v \cdot \frac{u'}{u} + \frac{u \cdot v'}{u}]$

که البته این فرمول با گرفتن \ln از طرفین به دست می آید: توجه شود در این تست $u = x$ و $v = \sin \pi x$ و به ازای $x = 1$ ، $u = 1$ و $v = \sin \pi = 0$ خواهد بود، و لذا دیگر نیاز به محاسبه و نوشتن فرمول نیست چون $u = 1$ جمله اول داخل کروشه و $v = 0$ جمله دوم داخل کروشه را صفر می کند پس $y'(1) = 0$ خواهد بود.

$$g'(x) = \frac{2x \cdot f'(x^2)(1+x^2) - 2x^2 \cdot f(x^2)}{(1+x^2)^2} \Rightarrow g'(1) = \frac{2 \times 1 \times f'(1)(1+1) - 2 \times 1 \times f(1)}{(1+1)^2} = \frac{9}{4}$$

۱۴۱- گزینه «۴»

۱۴۲- گزینه «۳»

$$\begin{cases} m_1 = y'_1(0) = (e^x)'(0) = e^0 = 1 \\ m_2 = y'_2(0) = (1-x^2)'(0) = -2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{tg} \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{1 - 0}{1 + 1 \times 0} \right| = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

۱۴۳- گزینه «۲» اگر طول مستطیل محاط شده را $2x$ و عرض آن را $2y$ بنامیم، مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = (2x)(2y) = 4xy \Rightarrow S^2 = 16x^2 y^2$$

$$y^2 = 9(1 - \frac{x^2}{4}) \Rightarrow S^2 = 16x^2 \cdot 9(1 - \frac{x^2}{4}) = 36x^2(4 - x^2)$$

از طرفی با توجه به رابطه $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ داریم:

توجه شود $x^2 + (4 - x^2) = 4$ لذا مقدار $x^2 \cdot (4 - x^2)$ وقتی ماکزیمم است که $x^2 = 4 - x^2$ باشد، پس داریم:

$$x^2 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow S^2 = 36 \times 2(4 - 2) = 144 \Rightarrow S = 12$$

۱۴۴- گزینه «۱» واضح است که $h = r$ می باشد و با توجه به رابطه حجم مخروط که به صورت

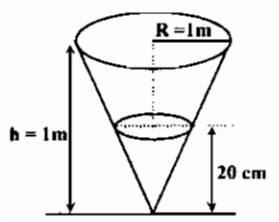
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

در صورت سؤال عنوان شده که سرعت تغییر حجم در دقیقه برابر ۲ لیتر در دقیقه و به عبارت دیگر $0/002$

$$0/002 = \pi \times (0/2)^2 \times \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{20\pi} \text{ (متر در دقیقه)}$$

مترمکعب در دقیقه می باشد:

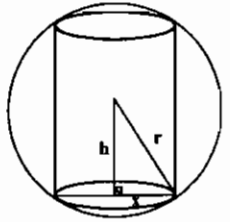
۱۴۵- گزینه «۴»



$$\frac{dx}{dt} = \frac{r t (\sqrt{t+1}) - \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \times (t^2 - 1)}{(\sqrt{t+1})^2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} \Big|_{t=2} = \frac{2 \times 2 \times \sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}}{3} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{5}{1/4} = 10$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t+1) - (t-2)}{(t+1)^2} \times e^{\frac{1-t}{t+2}} = \frac{3}{(t+1)^2} \times e^{\frac{1-t}{t+2}} \Rightarrow \frac{dy}{dt} \Big|_{t=2} = \frac{1}{4}$$

۱۴۶- گزینه «۲» اگر ارتفاع استوانه را $2h$ فرض کنیم، در مثل قائم الزاویه مشخص شده داریم:

$$x^2 + h^2 = r^2 \Rightarrow x^2 = r^2 - h^2$$
$$V = \pi x^2 2h = 2\pi(r^2 - h^2)(h) = 2\pi(r^2 h - h^3)$$
$$V'(h) = 2\pi(r^2 - 3h^2) = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{r^2}{3} \Rightarrow h = \frac{r}{\sqrt{3}}$$



$$x = \sqrt{r^2 - (\frac{r}{\sqrt{3}})^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}r^2} = r \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2$$

۱۴۷- گزینه «۴» ابتدا مشتق پذیر بودن تابع f را در مبدأ بررسی می کنیم:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x \sin \frac{1}{x}) = 1$$

همچنین توجه کنید که در همسایگی مبدأ تابع f را می توان به صورت $f(x) \sim x$ فرض نمود (هم‌ارزی). بنابراین f در همسایگی مبدأ صعودی است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(g(x)) - f(2)}{\sqrt{g(x)} - 2} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g'(x) f'(g(x))}{\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}} = \lim_{x \rightarrow 2} 2\sqrt{g(x)} f'(g(x)) = 12$$

۱۴۸- گزینه «۲»

$$g'(x) = (\cos x - x \sin x + 2^x \ln 2 \sin x + 2^x \cos x) f'(x \cos x + 2^x \sin x) \Rightarrow g'(0) = 2 f'(0)$$

۱۴۹- گزینه «۴»

$$V = \pi r^2 h, 2\pi r + h = 12 \Rightarrow h = 12 - 2\pi r$$

۱۵۰- گزینه «۴»

$$V = \pi r^2 (12 - 2\pi r) = 12\pi r^2 - 2\pi^2 r^3 \Rightarrow V' = 24\pi r - 6\pi^2 r^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{4}{\pi}, h = 4$$

$$V = \pi (\frac{4}{\pi})^2 \times 4 = \frac{64}{\pi}$$

۱۵۱- گزینه «۱» توجه کنید که در همسایگی $\frac{\pi}{4}$ تابع $\sin x$ مثبت می باشد، بنابراین:

$$f(x) = (\sin x)^x \Rightarrow f'(x) = (\sin x)^x [\ln \sin x + x \times \frac{\cos x}{\sin x}] \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = 0$$

۱۵۲- گزینه «۴»

نقطه بحرانی: $f(x) = x^2 - 2\ln x \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{2}{x}, f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

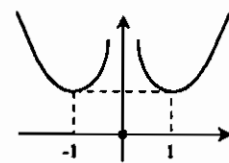
تابع f نقطه عطف ندارد. $f''(x) = 2 + \frac{2}{x^2} > 0$

نقطه بحرانی ± 1 هر دو مینیمم نسبی هستند زیرا $f''(\pm 1) > 0$. همچنین نقطه $x = 0$ نیز نقطه مینیمم تابع می باشد. (با توجه به شکل)

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2\ln x) = +\infty$

برای رسم نمودار f ابتدا جدول تغییرات تابع f را در نظر می گیریم.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0
$f(x)$	$+\infty$	1	0	1	$+\infty$



بنابراین نمودار f به شکل مقابل است و با توجه به

شکل معادله $f(x) = \frac{\pi}{3}$ چهار ریشه دارد و

معادله $f(x) = x$ سه ریشه دارد.

۱۵۳- گزینه «۲» برای اینکه $x = 1$ طول نقطه عطف باشد، لازم است $f''(1) = 0$ بنابراین:

$f'(x) = \frac{1}{x} x^{-\frac{1}{2}} + ae^{ax} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} + a^2 e^{ax}$

$f''(1) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{2} + a^2 e^a = 0 \Rightarrow e^a = \frac{1}{2a^2}, f(1) = 1 + e^a = 1 + \frac{1}{2a^2}$

۱۵۴- گزینه «۳» سرعت مؤلفه افقی را با V_x و سرعت مؤلفه قائم را با V_y نشان می دهیم. در این صورت:

$\begin{cases} V_x^2 + V_y^2 = (2\sqrt{5})^2 \\ V_x = 2V_y \end{cases} \Rightarrow V_x^2 + \frac{V_x^2}{4} = 20 \Rightarrow V_x = \pm 4$

۱۵۵- هیچکدام از گزینه ها صحیح نیست.

$x^2 + y^2 - 5y = 0 \Rightarrow 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} - 5 \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 2x(-2x+1) + 2y \frac{dy}{dt} - 5 \frac{dy}{dt} = 0$

با جایگذاری نقاط $(2, 4)$ و $(2, 1)$ در رابطه فوق مقادیر -3 و $+3$ برای $\frac{dy}{dt}$ به دست می آید.

$(\frac{g}{f})' = \frac{g'f - f'g}{f^2} \Big|_{x=2} = \frac{2 \times 2 - (-1)(-5)}{2^2} = \frac{1}{9}$

۱۵۶- گزینه «۲»

۱۵۷- گزینه «۱»

$y = (\cos 2x)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = -2 \sin 2x (\cos 2x)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y'' = -9(\cos 2x)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{\sqrt{\cos 2x}}$

$\Rightarrow (y'' + 9y) \cos^2 2x = (-9(\cos 2x)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{\sqrt{\cos 2x}} + 9(\cos 2x)^{\frac{2}{3}}) \cos^2 2x = 2(\cos 2x)^{\frac{2}{3}} = 2y$

۱۵۸- گزینه «۳»

$y' = \frac{\lambda - 2x}{\lambda x - x^2} \Rightarrow y'' = \frac{-2(x^2 - \lambda x + 2\lambda)}{(\lambda x - x^2)^2} = \frac{-2((x - \frac{\lambda}{2})^2 + 16)}{(\lambda x - x^2)^2}$

ملاحظه می شود که y'' همواره منفی است، بنابراین تقعر منحنی همواره رو به پایین است و با توجه به اینکه دامنه تابع بازه $(0, \lambda)$ می باشد. بنابراین در فاصله $(0, \lambda)$ تقعر منحنی رو به پایین است. در نتیجه:

۱۵۹- گزینه «۴» $y = e^{2x} + e^{-2x} \Rightarrow y' = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y(0) = 2$

۱۶۰- گزینه «۳» $f(x) = x^{2x} = f'(x) = x^{2x}(2\ln x + 2) = 2x^{2x}(\ln x + 1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

۱۶۱- گزینه «۱» $y = x^{2x} + e^{2\ln x} = x^{2x} + x^2 \Rightarrow y' = x^{2x}(2\ln x + 2) + 2x$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 + 1 = 2, y' = 1(0 + 2) + 2 = 4 \Rightarrow$ شیب خط قائم $= \frac{-1}{4}$

بنابراین معادله خط قائم به صورت زیر خواهد بود:

$y - 2 = \frac{-1}{4}(x - 1) \Rightarrow 4y + x = 9$

۱۶۲- گزینه «۳» $x^2 y - e^{2x} - \sin y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy - 2e^{2x}}{x^2 - \cos y} = \frac{2e^{2x} - 2xy}{x^2 - \cos y}$

۱۶۳- گزینه «۴»

$h(x) = e^{xf(2x)} \Rightarrow h'(x) = (f(2x) + 2xf'(2x))e^{xf(2x)}$
 $\Rightarrow h'(1) = (f(2) + 2f'(2))e^{f(2)} = (\lambda + 2 \times 4)e^{\lambda} = 16e^{\lambda}$

۱۶۴- گزینه «۱» فرض کنید $f(x) = x^2 - 2x + k$ ، در این صورت $f'(x) = 2x^2 - 2$ چون f' در بازه $(0, 1)$ ریشه ندارد، پس تابع f در بازه $(0, 1)$ حداکثر یک ریشه می تواند داشته باشد.

توجه: فقط به ازای $k = 0$ معادله دو جواب متمایز در بازه $[0, 1]$ دارد که همان دو سر بازه می باشند.

۱۶۵- گزینه «۳» از رابطه $(f^{-1})'(y) = g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ استفاده می کنیم. برای به دست آوردن مقدار $g'(2)$ ، ابتدا به جای $f(x)$ مقدار 2 را

قرار می دهیم. از آنجا $x = 1$ به دست می آید. بنابراین:

$g'(2) = \frac{1}{f'(1)}, f'(x) = 2x^2 + 5x^2 \Rightarrow f'(1) = 7 \Rightarrow g'(2) = \frac{1}{7}$

۱۶۶- هیچکدام از گزینه ها صحیح نیست. فاصله نقطه دلخواه $P(x, \sqrt{2x})$ روی نمودار f از نقطه $(5, 0)$ از فرمول زیر به دست می آید:

$d = \sqrt{(x - 5)^2 + (\sqrt{2x})^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 2x} = \sqrt{x^2 - 8x + 25}$

$d' = \frac{2x - 8}{2\sqrt{x^2 - 8x + 25}} = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow d = \sqrt{16 - 32 + 25} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} + 1 - 2}{\sqrt{x} - 1} = 0 \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)} + 1}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{f'(1)}{2\sqrt{f(1)} + 1} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

۱۶۷- گزینه «۴»

۱۶۸- گزینه «۲» می‌دانیم مشتق تابع دارای خاصیت مقدار میانی است.

۱۶۹- گزینه «۱» نقطه بحرانی $x=4$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}, y' = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{2x} = 0 \Rightarrow x=4$

x	0	4	+∞
y'		-	+
		min	

۱۷۰- گزینه «۲» $\ln f(x) = -100(\ln(x+1) + \ln(x+2)) + \ln(x+3) + \ln(x+4)$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = -100\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}\right) \Rightarrow f'(0) = -100f(0)\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = -100 \times \frac{1}{24^{100}} \times \frac{25}{12}$

۱۷۱- گزینه «۴» $g(x) = f(2x^2) \Rightarrow g'(x) = 4x^2 f'(2x^2) \Rightarrow g'(1) = 4f'(2) = 18$

۱۷۲- گزینه «۲» $y = \frac{2x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow y' = \frac{4x(x^2+1) - 2x(2x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{6x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=-1$

۱۷۳- گزینه «۲» $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \cos t - e^x \sin t}{e^x \sin t + e^x \cos t} = \frac{y-x}{y+x}$

۱۷۴- گزینه «۱» $y' = \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e \Rightarrow y = \frac{1}{e}$

۱۷۵- گزینه «۳» $x+y=100 \Rightarrow x^2 \times 2y^2 = 2y^2(100-y)^2 = f(y)$

$f'(y) = 4y^2(100-y)^2 - 4y^2(100-y) = 0 \Rightarrow 2y^2(100-y)(2(100-y) - 2y) = 0 \Rightarrow y=0$ یا $y=100$ یا $y=60$
نقاط $y=0$ و $y=100$ نقاط می‌نیم. و نقطه $y=60$ نقطه ماکسیم می‌باشد.

۱۷۶- گزینه «۳» $y' = 2xc^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x-x^2) = 0 \Rightarrow x=0, 2$

$y(0)=1$ می‌نیم نسبی
 $y(2)=4e^{-2}+1$ ماکسیم نسبی

۱۷۷- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. در هم‌ایگی نقطه $x=3$ تابع داده شده را می‌توان بصورت $\sqrt[3]{3(x-3)^2}$ در نظر گرفت و

بنابراین $x=3$ طول نقطه عطف قائم تابع است. به روش مشابه $x = \frac{3}{2}$ نیز طول نقطه عطف قائم است.

۱۷۸- گزینه «۳» $f'(x) = \frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)} = \frac{-4-2}{5} = \frac{-6}{5}$

۱۷۹- گزینه «۲» فقط از عامل صفر کننده یعنی $(x+10)$ مشتق می‌گیریم:

$f'(x) = (x+10)' \times x(x+1) \dots (x+9)(x+11) \dots (x+20)$
 $f'(-10) = 1 \times (-10)(-9) \times \dots \times (-1) \times 1 \times 2 \times \dots \times 10 = 10!10!$

۱۸۰- گزینه «۱» تابع f در نقاط $x = \pm 1$ مشتق پذیر نیست.

۱۸۱- هر سه گزینه (۲)، (۳) و (۴) صحیح هستند.
 $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}(x+1) = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+1)$

بنابراین وقتی $x \geq -1$ ، $f'(x) \geq 0$ و تابع f صعودی است و وقتی $x \leq -1$ ، $f'(x) \leq 0$ و تابع f نزولی خواهد بود. تابع f در $x=0$ مشتق پذیر نیست. بنابراین $x=0$ نقطه بحرانی می‌باشد. ولی $f'(x)$ حول نقطه $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد. بنابراین $x=0$ نقطه ماکسیم یا می‌نیم نسبی نمی‌باشد. نقطه عادی روی منحنی می‌باشد زیرا f در $x=1$ مشتق پذیر است و مشتق آن مخالف صفر می‌باشد.

۱۸۲- گزینه «۱» نقطه $(2,0)$ روی منحنی قرار دارد و مشتق تابع در این نقطه برابر صفر است. بنابراین:

$f(r) = 0 \Rightarrow \lambda + 4p + q = 0$
 $f'(r) = 0 \Rightarrow 6 + 2p = 0 \Rightarrow p = -3, q = 4$

۱۸۳- گزینه «۱» $y' = \frac{2x(ax+b) - a(x^2+r)}{(ax+b)^2} = \frac{ax^2 + 2bx - 2a}{(ax+b)^2} = 0 \Rightarrow ax^2 + 2bx - 2a = 0$

معادله اخیر همواره دو ریشه دارد (زیرا $\Delta > 0$). و چون y' در دو طرف ریشه‌ها تغییر علامت می‌دهد، پس یکی می‌نیم و دیگری ماکسیم می‌باشد.

۱۸۴- گزینه «۲» فاصله یک نقطه دلخواه مانند $P'(x,y)$ از نقطه $P(2,1)$ برابر $d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$ می‌باشد و چون نقطه P' روی منحنی $y = x^2 + 1$ قرار دارد. بنابراین:

$d = \sqrt{(x-2)^2 + ((x^2+1)-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + x^4}$
 $d' = \frac{4x^3 + 2(x-2)}{2\sqrt{(x-2)^2 + x^4}} = 0 \Rightarrow x=1, y=2$

۱۸۵- گزینه «۳» $y^2 = x+y \Rightarrow y^2 - y - x = 0 \Rightarrow y' = \frac{-1}{2y-1} = \frac{1}{2y-1}$

۱۸۵- گزینه «۳» $y^2 = x+y \Rightarrow y^2 - y - x = 0 \Rightarrow y' = \frac{-1}{2y-1} = \frac{1}{2y-1}$

تست‌های تکمیلی فصل سوم

۱- اگر $f(x) = \frac{e^x + \sin x}{xe^x}$ آنگاه $f'(\pi)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi + e^\pi}{\pi^2 e^\pi}$
- (۲) $\frac{-\pi - e^\pi}{\pi^2 e^\pi}$
- (۳) $\frac{\pi - e^\pi}{\pi^2 e^\pi}$
- (۴) $\frac{-\pi + e^\pi}{\pi^2 e^\pi}$

۲- اگر به ازاء هر x داشته باشیم $|f(x)| \leq x^2$ کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) تابع f در صفر پیوسته نیست.
- (۲) $f'(0) = 0$ در صفر مشتق پذیر بوده و $f'(0) = 0$ است.
- (۳) ممکن است f در صفر مشتق پذیر باشد یا نباشد.
- (۴) اگر f در صفر مشتق پذیر باشد، آنگاه $f'(0) = 0$ است.

۳- اگر $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و g در نقطه $x=2$ مشتق پذیر باشد $(g \circ f)'(0)$ کدام است؟

- (۱) $f'(2)$
- (۲) 2
- (۳) $g'(2)$
- (۴) صفر

۴- اگر $y = (\tan x)^{\cos x}$ آنگاه $\frac{1}{y'}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۳) 0
- (۴) 2

۵- اگر $y = xe^{-x}$ باشد، رابطه صحیح کدام است؟

- (۱) $y' = (1-x^2)y$
- (۲) $y' = (1-x^2)\frac{y}{x}$
- (۳) $y' = (1-x^2)\frac{x}{y}$
- (۴) $y' = (1-\frac{x}{y})\frac{y}{x}$

۶- اگر $y = \text{Arc tan}(\text{Arc cos}(\sin x^2))$ باشد، حاصل $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{y}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) 2
- (۴) صفر

۷- اگر $f'(x) = 3x^2$ باشد، آنگاه مشتق $f(1+\sqrt{x})$ برابر کدام است؟

- (۱) $3 - \frac{3(1+x^2)}{2\sqrt{x}}$
- (۲) $3(1+\sqrt{x})^2$
- (۳) $(1+\sqrt{x})^2$
- (۴) $3 + \frac{3(1+x)}{2\sqrt{x}}$

۸- مشتق تابع $y = x^2 e^{-x}$ کدام است؟

- (۱) $y' = x(\frac{2+x}{y})$
- (۲) $y' = e^{-x}(2x^2 - x)$
- (۳) $y' = x(\frac{2-x}{y})$
- (۴) $y' = y(\frac{2-x}{x})$

۹- اگر $f(x) = 6x + \sin(f(x))$ و $f(0) = 0$ باشد، آنگاه $f'(0)$ کدام است؟

- (۱) -6
- (۲) -3
- (۳) 3
- (۴) 6

۱۰- اگر $y = \frac{z+1}{z-1}$ و $z = x^2 - 2x$ و $x = \sqrt{t+3}$ مقدار $\frac{dy}{dt}$ به ازای $t=1$ کدام است؟

- (۱) 1
- (۲) -1
- (۳) 2
- (۴) -2

۱۱- مشتق مرتبه n ام $y = a^x$ برابر کدام است؟

- (۱) $(a^x)^n \text{Lna}$
- (۲) $(\text{Lna})^n a^x$
- (۳) $(a^x)^n (\text{Lna})^n$
- (۴) $a^x \text{Lna}$

۱۲- با فرض $f'(\frac{1}{x-2}) = \frac{x}{2x-1}$ مقدار $f'(-2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
- (۲) $\frac{3}{8}$
- (۳) $\frac{5}{6}$
- (۴) $\frac{5}{12}$

۱۳- اگر $f(x) = x^2 + x$ باشد، آنگاه $(f^{-1})'(0)$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) 1
- (۴) 4

۱۴- مشتق $f(x) = \text{Ln}(\text{Cos} 2x + \text{Sin} 2x)$ کدام است؟

- (۱) $2 \text{tg}(2x - \frac{\pi}{4})$
- (۲) $2 \text{tg}(2x + \frac{\pi}{4})$
- (۳) $2 \text{Cotg}(2x - \frac{\pi}{4})$
- (۴) $2 \text{Cotg}(2x + \frac{\pi}{4})$

۱۵- اگر $y^2 = x + \text{Ln} \frac{y}{x}$ آنگاه y'_x در نقطه $A(1,1)$ کدام است؟

- (۱) 1
- (۲) صفر
- (۳) -1
- (۴) 2

۱۶- مشتق تابع $y = \text{arcsin} \frac{2x}{1+x^2}$ وقتی $|x| < 1$ کدام است؟

- (۱) $y = -\frac{2}{1+x^2}$
- (۲) $y = -\frac{1}{x^2+1}$
- (۳) $y = \frac{2}{x^2+1}$
- (۴) $y = \frac{1}{x^2+1}$

۱۷- در تابع پارامتری $\begin{cases} x = 2 \text{Ln} \cot t \\ y = \text{tg} t + \cot t \end{cases}$ y'_x کدام است؟

- (۱) $\cot g 2t$
- (۲) $\text{tg} 2t$
- (۳) $\cot g t$
- (۴) $\text{tg} t$

۱۸- در تابع پارامتری $\begin{cases} x = a \cos^2 t \\ y = b \sin^2 t \end{cases}$ y''_{xx} کدام است؟

- (۱) $-\frac{b}{a} \text{tg} t$
- (۲) $-\frac{b}{a \cos^2 t}$
- (۳) $y = \frac{b}{ra^r \cos^r t \sin t}$
- (۴) $y = \frac{b}{ra \cos^r t}$

۱۹- اگر $\text{arctg} y - y + x = 0$ باشد آنگاه y''_{xx} کدام است؟

- (۱) $-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$
- (۲) $\frac{1+y^2}{y^2}$
- (۳) $\frac{2(1+y^2)}{y^2}$
- (۴) $-\frac{2(1+y^2)}{y^2}$

۲۰- اگر $f(x) = |x|$ ، $\phi(x) = |x^2|$ آنگاه در نقطه $x=0$ کدام گزاره برای توابع ذکر شده صحیح است؟

- (۱) تابع f در نقطه $x=0$ مشتق دارد.
- (۲) هر دو تابع در نقطه $x=0$ مشتق دارند.
- (۳) تابع ϕ در نقطه $x=0$ مشتق دارد.
- (۴) هیچکدام از دو تابع در نقطه $x=0$ مشتق ندارند.

۲۱- اگر تابع f در نقطه $x=x_0$ مشتق پذیر و تابع g در نقطه $x=x_0$ مشتق ناپذیر باشد آنگاه گزاره صحیح است؟

- (۱) $f \cdot g$ در نقطه $x=x_0$ مشتق ناپذیر می باشد.
- (۲) $f + g$ در نقطه $x=x_0$ مشتق ناپذیر است.
- (۳) $\frac{f}{g}$ همیشه مشتق پذیر است.
- (۴) $f - g$ همیشه مشتق پذیر است.

۲۲- اگر $f(x) = x(x+1)(x+2) \dots (x+6)$ باشد، مقدار $f'(-5)$ کدام است؟

- (۱) -720
- (۲) -120
- (۳) 120
- (۴) 720

۲۳- تابع $f(x) = |x^5(x^2-1)|$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

- (۱) 1
- (۲) 2
- (۳) 3
- (۴) 5

۲۴- اگر $f(x) = |\sin x - 1|$ ، $g(x) = |1 - \sin x|$ آنگاه کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

- (۱) f و g در تمام نقاط مشتق پذیر هستند.
- (۲) f و g در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارند.
- (۳) f در $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق پذیر نمی باشد.
- (۴) g در $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق پذیر باشد.

۲۵- اگر f تابعی زوج و g تابعی فرد باشد آنگاه مشتق تابع $f \circ g$ چگونه تابعی است؟

- (۱) زوج
- (۲) فرد
- (۳) هم زوج و هم فرد
- (۴) نه فرد و نه زوج

۲۶- کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

- (۱) اگر تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته باشد، آنگاه $|f(x)|$ در a مشتق پذیر است.
- (۲) اگر تابع $f(x)$ در نقطه a مشتق پذیر باشد، آنگاه $|f(x)|$ در a مشتق پذیر است.
- (۳) اگر در تابع $f(x)$ ، $f(a) = 0$ باشد، در این صورت تابع $|f(x)|$ در a مشتق پذیر است.
- (۴) مشتق هر تابع زوج تابعی فرد و مشتق هر تابع فرد تابعی زوج است.

۲۷- فرض کنید f تابعی فرد باشد بطوری که $f'(1) = 2$ ، در این صورت $f'(-1)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۲۸- اگر طول و عرض مستطیلی بر حسب زمان بصورت $x = t^2 + t + 5$ ، $y = t^2 + 4$ باشند در لحظه‌ای که عرض مستطیل ۸ واحد است، سرعت تغییر مساحت آن چقدر است؟

- (۱) ۸۴ (۲) ۷۷ (۳) ۷۴ (۴) ۸۷

۲۹- مشتق مرتبه n ام e^{kx} کدام است؟

- (۱) $k^n e^{kx}$ (۲) ke^{knx} (۳) $k!e^{kx}$ (۴) $k!e^{knx}$

۳۰- اگر $f(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x}$ باشد، آنگاه حاصل $A = f(\frac{\pi}{4}) - 2f'(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) $A = -3$ (۲) $A = 0$ (۳) $A = 2$ (۴) $A = \frac{\pi}{4}$

۳۱- مشتق عبارت $f(x) = \sqrt{1 + \sinh^2 4x}$ کدام است؟

- (۱) $4 \sinh 4x$ (۲) $\frac{1}{4} \sinh 4x$ (۳) $\tanh 4x$ (۴) $\frac{1}{4} \cosh 4x$

۳۲- اگر $x^2 - xy + y^2 = 1$ آنگاه مقدار y''_{xx} در نقطه $(0, 1)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) صفر (۴) $-\frac{1}{16}$

۳۳- اگر $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$ مقدار $\frac{d^2 y}{dx^2}$ کدام است؟

- (۱) $-\cos 2t$ (۲) صفر (۳) $\sin t$ (۴) -۲

۳۴- گزاره صحیح درباره‌ی تابع $f(x) = x^2 \ln x$ در فاصله $[1, e]$ کدام است؟

- (۱) تابع در نقطه $x = \frac{1+e}{2}$ حداقل است. (۲) نقطه بحرانی تابع در $x = \frac{1+e}{2}$ می‌باشد.

- (۳) تابع در نقطه $x = \frac{e}{2}$ حداکثر است. (۴) در فاصله $[1, e]$ تابع نقطه بحرانی ندارد.

۳۵- نقطه‌ای بر روی منحنی $12y = x^2$ تغییر می‌کند، در کدام نقطه تغییرات طول برابر تغییرات عرض می‌باشد؟

- (۱) $x = \pm 2$ (۲) $-2 < x < 2$ (۳) $x > 2$ یا $x < -2$ (۴) $x > \sqrt{12}$

۳۶- کمترین مقدار تابع $f(x) = 2x^2 - 3x^3 - 12x + 1$ در فاصله $[-2, 2/5]$ چقدر است؟

- (۱) -۳ (۲) $-16/5$ (۳) ۸ (۴) -۱۹

۳۷- تابع $f(x) = 3\sqrt{x^2} - x^2$ مفروض است، عبارت صحیح در مورد این تابع کدام است؟

- (۱) تابع ماکزیمم و مینیمم ندارد. (۲) یک مینیمم و یک ماکزیمم دارد. (۳) تابع دو ماکزیمم و یک مینیمم دارد. (۴) تابع دو ماکزیمم و دو مینیمم دارد.

۳۸- در کدام نقطه مماس بر نمودار تابع $y = x \arctan x$ از منحنی عبور می‌کند؟

- (۱) $x = -1$ (۲) $x = 0$ (۳) $x = 1$ (۴) هیچ نقطه‌ای

۳۹- اگر تابع $f(x) = x^2 - bx^2 + ax + 1$ بر بازه $[-1, 2]$ در نقطه $e = 1$ در شرایط قضیه رول صدق کند، a کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۰- در چه نقطه‌ای مماس بر منحنی $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x + \frac{4}{3}$ با جهت مثبت محور x زاویه 45° می‌سازد؟

- (۱) $M(2, 2)$ (۲) $M(-2, -\frac{14}{3})$ (۳) $M(2, -\frac{14}{3})$ (۴) $M(2, -2)$

۴۱- اندازه تقریبی $\sqrt{1042}$ کدام است؟

- (۱) $10/28$ (۲) $10/14$ (۳) $10/21$ (۴) $10/42$

۴۲- تابع $f(x) = \cos x - x$ مفروض است، گزاره صحیح کدام است؟

- (۱) تابع همواره صعودی است. (۲) تابع همواره نزولی است. (۳) تابع در فاصله $0 < x < 1$ نزولی است. (۴) تابع در فاصله $0 < x < 1$ صعودی است.

۴۳- شرط صحیح بین ضرایب a و b ، c و d در منحنی $y = ax^2 + bx^2 + cx^2 + dx + e$ به منظور داشتن نقطه عطف کدام است؟

- (۱) $3b^2 - 8ac > 0$ (۲) $3b^2 - 8ac < 0$ (۳) $a + b + c = 0$ (۴) $a + b = 4c$

۴۴- عرض از مبدأ معادله خط مماس بر منحنی $y = \tan(x + y)$ در نقطه $A(\frac{\pi}{4}, 1)$ کدام است؟

- (۱) $y = \frac{\pi}{2} + 1$ (۲) $y = \frac{\pi}{2} - 1$ (۳) $y = -\frac{\pi}{2} + 2$ (۴) $y = -\frac{\pi}{2} - 2$

۴۵- اگر $f(a) = 0$ ، $f'(a) = 0$ و $f''(a) > 0$ باشد، نقطه $x = a$ روی منحنی $y = f(x)$ دارای است.

- (۱) ماکزیمم روی محور عرضها (۲) ماکزیمم روی محور طولها (۳) مینیمم روی محور طولها (۴) مینیمم روی محور عرضها

۴۶- اگر شعاع داخلی یک کره فلزی ۴ و شعاع خارجی آن $\frac{1}{16}$ سانتی‌متر باشد، حجم تقریبی جدار کره چقدر است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) 3π (۴) 4π

۴۷- عبارت صحیح در مورد تابع $f(x) = x^T \ln x$ کدام است؟

- (۱) تابع در فاصله $[1, e]$ یک مینیمم و دو ماکزیمم دارد. (۲) مقدار ماکزیمم تابع در فاصله $[1, e]$ برابر e^e است. (۳) مقدار مینیمم تابع در فاصله $[1, e]$ برابر e^e است. (۴) تابع در فاصله $[1, e]$ حداقل دو نقطه بحرانی دارد.

۴۸- برای تابع $y = 3x^5 - 5x^7$ ، وضعیت نقطه‌ای به طول $x = 1$ چگونه است؟

- (۱) ماکزیمم (۲) مینیمم (۳) عطف (۴) عادی

۴۹- در تابع $y = e^x + e^{-x}$ اگر $x \in [0, 1]$ باشد، مقدار C در قضیه رول کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۵۰- کوتاهترین فاصله مبدأ مختصات از منحنی به معادله $y^2 = -2x + 4$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۲

۵۱- به ازای چه مقدار x تابع $y = \cos^2 x - \cos x$ در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ کمترین مقدار خود را خواهد داشت؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$

۵۲- اگر $f(-1) = 0$ ، $f'(-1) > 0$ ، $f''(-1) < 0$ آنگاه نقطه $(-1, 0)$ چه نوع نقطه‌ای برای تابع f است؟

- (۱) عادی (۲) مینیمم (۳) ماکزیمم (۴) عطف

۵۳- اگر تابع $y = \frac{x+a}{1+ax}$ همواره نزولی باشد، حدود تغییرات a کدام است؟

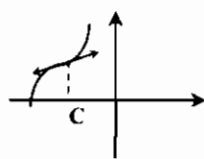
- (۱) $a > -1$ (۲) $a > 1$ (۳) $-1 < a < 1$ (۴) $a < -1$ یا $a > 1$

۵۴- نمودار تابع $y = \sin kx$ محور x ها را در فاصله $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ پنج بار قطع کرده، مقدار k کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۵- قسمتی از نمودار تابع f به صورت شکل زیر است، کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $f''(c) > 0$ ، $f'(c) < 0$ (۲) $f''(c) = 0$ ، $f'(c) > 0$ (۳) $f''(c) = 0$ ، $f'(c) < 0$ (۴) $f''(c) > 0$ ، $f'(c) > 0$



۵۶- اگر $y = \frac{ax+b}{x^2+x+1}$ در نقطه $A(1,2)$ مینیمم نسبی داشته باشد آنگاه a کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۶

۵۷- فرض کنیم f تابعی باشد که $f'(1) = 0, f''(1) = 0$ در این صورت نقطه‌ای به طول $x = 1$ چه نوع نقطه‌ای است؟

- (۱) مینیمم نسبی (۲) ماکزیمم نسبی (۳) عطف (۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۵۸- رابطه بین شعاع قاعده و ارتفاع یک استوانه بصورت $r+h=15$ است شعاع قاعده چقدر انتخاب شود تا سطح جانبی استوانه ماکزیمم گردد.

- (۱) $7/5$ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۵۹- اگر S سطح جانبی استوانه و s سطح قاعده آن باشد و $S+s=12$ باشد، آنگاه شعاع قاعده استوانه چقدر باشد تا حجم آن ماکزیمم شود؟

- (۱) $\frac{2}{\pi}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ (۳) $\frac{2}{\pi}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$

۶۰- تابع $f(x) = \sin x - x$ چند نقطه عطف دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۶۱- طول نقطه عطف تابع $y = (1 - \ln x)^2$ کدام است؟

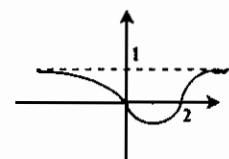
- (۱) $\frac{1}{e}$ (۲) e^2 (۳) ۳ (۴) e^2

۶۲- معادله $e^x - 2e^{-x} = 2$ حداکثر چند ریشه می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۰

۶۳- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{ax^2+bx+c}{x^2+mx+2}$ است مقدار b کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) -۲



۶۴- اگر $x=1$ متناظر به نقطه عطف تابع با ضابطه $y = \frac{(x+a)^2}{x^2}$ باشد مقدار a چقدر است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۶۵- مینیمم مطلق تابع $f(x) = \arccos x^2$ در بازه $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۶۶- تابع $y = \frac{2x}{\ln x}$ در کدام یک از فواصل زیر نزولی است؟

- (۱) $(1, e)$ (۲) $(e, +\infty)$ (۳) $(-\infty, +\infty)$ (۴) $(1, +\infty)$

۶۷- تابع $y = \cos(\frac{\pi}{x})$ در کدام یک از فواصل زیر صعودی است؟

- (۱) $(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1})$ (۲) $(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k})$ (۳) $(2k+1, 2k+2)$ (۴) $(2k, 2k+1)$

۶۸- مقدار تقریبی $\log_{10} 21$ به کمک دیفرانسیل کدام است؟

- (۱) $1/09$ (۲) $1/0009$ (۳) $1/009$ (۴) $1/029$

۶۹- معادله خط مماس بر منحنی $y = \frac{1}{x^2+1}$ را در نقطه تلاقی با سهمی $y = \frac{1}{x+1}$ کدام است؟

- (۱) $x+2y+2=0$ (۲) $x+2y-2=0$ (۳) $y=2$ (۴) $y=2$

۷۰- ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $y = x^2 \ln x$ در نقطه عطف آن کدام است؟

- (۱) $-2e^{-2}$ (۲) e^{-2} (۳) $2e^{-2}$ (۴) $-2e^{-2}$

۷۱- مقدار m برای آنکه حاصلضرب مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \frac{mx^2+x+3}{x^2+x+1}$ برابر $\frac{22}{3}$ باشد، کدام است؟

- (۱) $m=-1$ (۲) $m=1$ (۳) $m=2$ (۴) $m=-2$

۷۲- برای تابع $y = x^2 + \cos x$ نقطه‌ای بطول $x_0 = c$ مینیمم است

- (۱) مینیمم است (۲) ماکزیمم است (۳) عطف است (۴) عادی است

۷۳- تابع $y = \sin x + x + x^2$ چند نقطه عطف دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۴- نمودار کدام تابع دارای نقطه عطف است؟

- (۱) $y = x^2 |x|$ (۲) $y = x|x|$ (۳) $y = \sqrt{x}$ (۴) $y = \sqrt[3]{(x-2)^2}$

۷۵- مینیمم مطلق تابع $y = \sqrt{4-x} - \sqrt{x} - 2x$ کدام است؟

- (۱) -۱۰ (۲) ۱۰ (۳) -۸ (۴) ۸

۷۶- فرض کنید $y = \frac{-1}{2x^2 e^{x^2}}$ در اینصورت y' در کدامیک از روابط زیر صدق می‌کند؟

- (۱) $xy' + 2y = e^{-x^2}$ (۲) $x'y' - 2y = e^{-x^2}$ (۳) $y' - 2y = e^{-x^2}$ (۴) هیچکدام

۷۷- کدامیک از نامساوی‌های زیر همواره برقرار است؟ ($x > 0$)

- (۱) $\ln(1+x) < x$ (۲) $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ (۳) گزینه ۱ و ۲ (۴) هیچکدام

۷۸- کدام رابطه زیر صحیح نیست؟

- (۱) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^2}{3}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ (۲) $\operatorname{tg} x < x + x^2, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

- (۳) $\operatorname{Arctg} x > x - \frac{x^2}{3}, 0 < x < 1$ (۴) $\operatorname{Arctg} x < x - \frac{x^2}{6}, 0 \leq x < 1$

۷۹- تابع $y = 2x^2 - \ln x$ در کدامیک از فواصل زیر نزولی است؟

- (۱) $(0, 2]$ (۲) $(2, +\infty)$ (۳) $(0, \frac{1}{2})$ (۴) $(\frac{1}{2}, +\infty)$

۸۰- به ازای چه مقادیر b تابع $y = \sin x - bx + c$ همواره نزولی است؟

- (۱) $b \geq 0$ (۲) $b \leq 0$ (۳) $b \geq 1$ (۴) $b \leq 1$

۸۱- نقطه $x=0$ در تابع $y = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ چه نوع نقطه‌ای است؟

- (۱) ماکسیمم (۲) مینیمم (۳) عطف (۴) بازگشت

۸۲- بیشترین مقدار عبارت $\sin x \sin 2x$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

۸۳- کمترین مقدار تابع $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln x$ در فاصله $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \ln 3$ (۳) $\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4} \ln 3$ (۴) $\frac{1}{4} \ln 3$

۸۴- در کره‌ای به شعاع R می‌خواهیم استوانه‌ای با بیشترین مساحت جانبی معاط کنیم. ارتفاع استوانه چقدر است؟

- (۱) R (۲) $\frac{R}{2}$ (۳) 2R (۴) $R\sqrt{2}$

۸۵- در کدامیک از نقاط زیر $y = \frac{x}{1+x^2}$ ، خط مماس بر منحنی از منحنی عبور می‌کند؟

- (۱) نقاط $x = \pm 1$ (۲) نقاط $x \pm \sqrt{2}$ (۳) نقاط $x = \pm \sqrt{3}$ (۴) $x = 0$

۸۶- به ازای چه مقدار a منحنی $y = x^4 + ax^2 + \frac{1}{3}x^3 + 1$ مقعر است؟

- (۱) $|a| \geq 1$ (۲) $|a| \leq 2$ (۳) $|a| \leq 2$ (۴) $|a| \leq 1$

۸۷- تابع $y = \frac{2x}{\ln x}$ در کدامیک از فواصل زیر نزولی است؟

- (۱) $(1, e)$ (۲) $(0, +\infty)$ (۳) $(0, e)$ (۴) $(1, +\infty)$

۸۸- مینیمم عبارت $f(x) = x - 2 \ln x$ در فاصله $[1, e]$ چقدر است؟

- (۱) 1 (۲) $e - 2$ (۳) $2 - \ln 4$ (۴) هیچکدام

۸۹- کدامیک از گزاره‌های زیر در مورد معادله $x^{2n} + px + q = 0$ صحیح است؟

- (۱) معادله حداکثر ۲ ریشه دارد. (۲) معادله حداکثر ۲ ریشه دارد. (۳) معادله فقط ۲ ریشه حقیقی می‌تواند داشته باشد. (۴) معادله حداکثر n ریشه حقیقی دارد.

۹۰- تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ در فاصله $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ چگونه است؟

- (۱) صعودی (۲) نزولی (۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی (۴) نزولی و سپس صعودی

۹۱- آب با سرعت ثابت ۲ متر مکعب در ثانیه وارد مخزن مخروطی شکلی می‌شود. رأس مخروط به طرف پایین و قطر قاعده برابر ارتفاع آن است. وقتی عمق آب به ۶ متر برسد. سطح آب با چه سرعتی بالا می‌رود؟

- (۱) $\frac{1}{3\pi}$ (۲) $\frac{1}{4\pi}$ (۳) $\frac{1}{6\pi}$ (۴) $\frac{2}{9\pi}$

۹۲- معادله $x^4 + x^2 + x^2 - 1 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) ۱ ریشه (۲) ۲ ریشه (۳) ۴ ریشه (۴) ۶ ریشه

۹۳- چنانچه $\frac{dy}{dt} = 3 + \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ باشد، هنگامیکه $x = 1$ مقدار $\frac{dx}{dt}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $-\frac{2}{4}$ (۴) $\frac{2}{4}$

۹۴- اگر $f(x) = \begin{cases} -1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ آنگاه:

- (۱) $f'(0) \neq 0 \neq f''(0)$ (۲) $f'(0) = 0 \neq f''(0)$ (۳) $f'(0) = 0 = f''(0)$ (۴) $f'(0) \neq 0 = f''(0)$

۹۵- نقطه‌ای روی دایره $x^2 + y^2 = 13$ متحرک است. در نزدیکی نقطه $P(2, -3)$ تصویر سرعت بر محور y ها $\frac{dy}{dt} = 0/4$ در این نقطه چقدر است؟

- (۱) $0/25$ (۲) $0/3$ (۳) $0/5$ (۴) $0/6$

۹۶- مشتق تابع $f(x) = x|x|$ در صفر:

- (۱) برابر یک است. (۲) وجود ندارد. (۳) برابر صفر است. (۴) برابر -۱ است.

۹۷- کدامیک از توابع زیر در بازه $(0, 1)$ ماکسیمم مطلق دارند؟

- (۱) 2^{-x} (۲) $\sin \frac{1}{x}$ (۳) $\frac{\sin x}{x}$ (۴) $\ln(x+1)$

۹۸- ماکسیمم ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه‌ای که طول وتر آن ۱ سانتی‌متر باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۹۹- نقاط $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ برای تابع $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \sin x$ چه نوع نقاطی هستند؟

- (۱) مینیمم نسبی (۲) ماکسیمم نسبی (۳) عطف (۴) ساده

۱۰۰- اگر $f(x) = \frac{(x+1)^2(x+2)^2}{(x+4)^2(x+8)^2}$ ، $f'(0)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{10}{3}$ (۳) $\frac{15}{3}$ (۴) $\frac{20}{3}$

۱۰۱- تعداد ریشه‌های معادله $\pi \cos \pi x - 4(1-2x) = 0$ در بازه $(0, \frac{1}{4})$ برابر کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) بیشمار

۱۰۲- در تابع $f(x) = \arctg x$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، طبق قضیه مقدار میانگین $\frac{\arctg x}{x}$ در کدام فاصله قرار دارد؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(0, \frac{1}{2})$ (۳) $(\frac{1}{2}, 1)$ (۴) $(0, 2)$

۱۰۳- دو تابع $f(x) = \log(\sqrt{x^2+9} - x)$ و $g(x) = \log(x + \sqrt{x^2+9})$ مفروضند. کدامیک از روابط زیر همواره برقرار است؟

- (۱) $f'(x) = \frac{1}{g'(x)}$ (۲) $f'(x) = g'(x)$ (۳) $f'(x) = -g'(x)$ (۴) $f'(x)g'(x) = 0$

۱۰۴- نرخ تغییر $\sqrt{x^2+8}$ نسبت به $\frac{x}{x+1}$ در نقطه $x = 1$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{2}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) ۶

۱۰۵- مشتق n ام تابع $f(x) = \frac{1}{x-x^2}$ در $x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

- (۱) $2^n n! [1 + (-1)^n]$ (۲) $2^{n+1} n! [1 + (-1)^n]$ (۳) $2^n (n+1)! [1 + (-1)^n]$ (۴) $2^{n+1} (n+1)! [1 + (-1)^n]$

۱۰۶- در تابع $y = \sqrt{x} \ln x$ طول نقطه بحرانی و نوع آن کدام است؟

- (۱) e^{-1} مینیمم (۲) e^{-2} مینیمم (۳) e^{-1} ماکسیمم (۴) e^{-2} ماکسیمم

۱۰۷- مشتق $y = \arctg(\ln x)$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۰۸- مشتق تابع $y = x^{\ln x}$ در $x = e$ کدام است؟

- (۱) e (۲) $2e$ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۰۹- اگر $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}$ باشد، $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{2y+1}$ (۲) $\frac{-1}{2y+1}$ (۳) $\frac{1}{2y-1}$ (۴) $\frac{-1}{2y-1}$

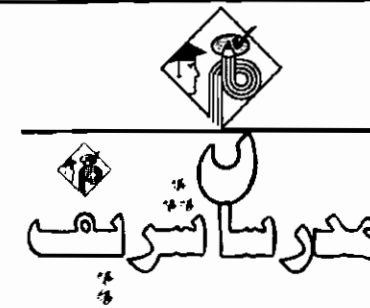
۱۱۰- تابع $y = ||x| - 1|$ چند نقطه بحرانی دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

خودپسندی همان ابلیس است.

به حافظهات اعتماد نکن؛ همه چیز را یادداشت کن.

حضرت علی (ع)



فصل چهارم
« انتگرال »

تابع پیوسته f را در نظر می‌گیریم، اگر تابع اولیه آن را با F نمایش دهیم، خواهیم داشت :
 عبارت دیگر تاکنون (قبل از این فصل) تابعی مشخص شده بود و مشتق آن از ما خواسته می‌شد اما در این فصل مشتق تابعی داده می‌شود و تابع اولیه آن از ما خواسته می‌شود توجه شود که اگر از سمت راست تساوی مشتق بگیریم باید به $f(x)$ برسیم (C عدد ثابتی می‌باشد)

فرمولهای مهم انتگرال

تذکره ۱: در فرمولهای زیر u تابعی از x می‌باشد، (C و a اعداد ثابت هستند)

- ۱) $\int u^n \cdot du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
- ۲) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$
- ۳) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1)$
- ۴) $\int e^u du = e^u + c$
- ۵) $\int \sin u \cdot du = -\cos u + c$
- ۶) $\int \cos u \cdot du = \sin u + c$
- ۷) $\int (1 + \tan^2 u) \cdot du = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + c$
- ۸) $\int (1 + \cot^2 u) \cdot du = \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + c$
- ۹) $\int \tan u \cdot du = -\ln|\cos u| + c$
- ۱۰) $\int \cot u \cdot du = \ln|\sin u| + c$
- ۱۱) $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{u}{a} + c$
- ۱۲) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{ArcSin} \left(\frac{u}{a} \right) + c$
- ۱۳) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c$
- ۱۴) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + c = \sinh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + c$
- ۱۵) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + c = \cosh^{-1} u + c$
- ۱۶) $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + c = \ln|\csc u - \cot u| + c$
- ۱۷) $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c = \ln|\operatorname{tgu} + \sec u| + c$
- ۱۸) $\int \sinh u du = \cosh u + c$
- ۱۹) $\int \cosh u du = \sinh u + c$
- ۲۰) $\int \operatorname{th} u du = \ln(\cosh u) + c$
- ۲۱) $\int \cot \operatorname{th} u du = \ln|\sin u| + c$
- ۲۲) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + c$
- ۲۳) $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{2} [u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2})] + c$
- ۲۴) $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2} [u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{u}{a}] + c$
- ۲۵) $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{-1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right) + c$

توجه ۱: $\int [f(u) + g(u)] du = \int f(u) du + \int g(u) du$

توجه ۲: $\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$ توجه ۳: $\int \frac{f(u)}{g(u)} du \neq \frac{\int f(u) du}{\int g(u) du}$

توجه ۳: $\int f(u) \cdot g(u) du \neq \int f(u) du \times \int g(u) du$ ، $\int \frac{f(u)}{g(u)} du \neq \frac{\int f(u) du}{\int g(u) du}$

به مثالهای زیر توجه کنید .

۱) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{x} + c$ ۲) $\int \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| + c$

۳) $\int r^x dx = \frac{r^x}{\ln r} + c$ ۴) $\int \Delta e^x = \Delta e^x + c$

۵) $\int \sin rx dx = \int \left(\frac{1}{r}\right) \sin rx dx = \frac{1}{r} \int (\sin rx) r dx = -\frac{1}{r} \cos rx + c$

۶) $\int \cos vx dx = \int \left(\frac{1}{v}\right) \cos vx dx = \frac{1}{v} \int (\cos vx) v dx = \frac{1}{v} \sin vx + c$

۷) $\int (r + \operatorname{tg}^2 x) dx = \int [1 + (1 + \operatorname{tg}^2 x)] dx = \int dx + \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = x + \operatorname{tg} x + c$

۸) $\int \pi(1 + \cot^2 x) dx = -\pi \cot x + c$ ۹) $\int \operatorname{tg} \pi x dx = -\frac{1}{\pi} \ln|\cos \pi x| + c$

۱۰) $\int \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}\right) dx = \int \frac{\sin x}{\sin x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = x + \ln|\sin x| + c$

۱۱) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{r} \operatorname{Arctg} \left(\frac{x}{r}\right) + c$ ۱۲) $\int \frac{dx}{\sqrt{r-x^2}} = \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x}{\sqrt{r}}\right) + c$

۱۳) $\int \frac{dx}{x^2 - r} = \frac{1}{r} \ln \left| \frac{x-r}{x+r} \right| + c$ ۱۴) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-r)^2 + a^2}} = \ln \left| (x-r) + \sqrt{(x-r)^2 + a^2} \right| + c$

۱۵) $\int \frac{r dx}{\sin rx} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{rx}{2} \right| + c = \ln|\operatorname{cosec} rx - \cot grx| + c$ ۱۶) $\int \frac{r dx}{\cos rx} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right| + c = \ln|\operatorname{tg} rx + \sec rx| + c$

۱۷) $\int \cosh \lambda x dx = \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda x + c$ ۱۸) $\int \frac{1}{a} \sinh \lambda x dx = \frac{1}{\lambda a} \cosh \lambda x + c$

تذکره ۲: در فرمولهای ذکر شده توجه داریم که وقتی عبارت بر حسب u داریم، du نیز کنار آن موجود است در بعضی از مثالهای فوق مانند مثال شماره ۵ عبارت $\sin rx$ داخل انتگرال موجود ولی $rx dx$ کنار آن وجود ندارد لذا با تغییری که مشاهده کردید $rx dx$ را ایجاد کردیم تا بتوانیم از فرمولهای ذکر شده استفاده کنیم، این تغییر در مثالهای ۶، ۹، ۱۷ و ۱۸ نیز انجام شده است، تغییرات انجام شده ساده‌ترین نوع تغییر متغیر می‌باشد که با توجه به مثالهای زیر می‌توان درک بهتری از مفهوم تغییر متغیر داشت :

مثال ۱: حاصل انتگرالهای زیر را با استفاده از روش تغییر متغیر بیابید .

۱) $I = \int (rx + \delta)^{1v} dx \Rightarrow u = rx + \delta \rightarrow du = r dx \rightarrow \boxed{dx = \frac{du}{r}}$

$\Rightarrow I = \int u^{1v} \cdot \frac{du}{r} = \frac{1}{r} \int u^{1v} du = \frac{1}{r} \left(\frac{u^{1v+1}}{1v+1} \right) + c = \frac{(rx + \delta)^{1v+1}}{r(1v+1)} + c$

۲) $I = \int \cos(1 + \pi x) dx \Rightarrow u = \pi x + 1 \rightarrow du = \pi dx \rightarrow \boxed{dx = \frac{du}{\pi}}$

$\Rightarrow I = \int (\cos u) \frac{du}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int \cos u du = \frac{1}{\pi} \sin u + c = \frac{1}{\pi} \sin(1 + \pi x) + c$

۳) $I = \int \frac{dx}{(\operatorname{arc} \cos x)^2 \sqrt{1-x^2}} \Rightarrow u = \operatorname{arc} \cos x \Rightarrow \boxed{du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}$

$\Rightarrow I = \int \frac{-du}{u^2} = -\int u^{-2} du = \frac{1}{1} u^{-1} + c = \frac{1}{\operatorname{arc} \cos x} + c$

۴) $I = \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow \sqrt{x} = u \rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = du \rightarrow \boxed{dx = 2\sqrt{x} du}$

$\Rightarrow I = \int 2 \sin u du = -2 \cos u + c = -2 \cos \sqrt{x} + c$

۵) $I = \int \frac{2x+2}{2x+1} dx = \int (1 + \frac{1}{2x+1}) dx = \int dx + \int \frac{1 dx}{2x+1}$

حاصل انتگرال اول برابر X می باشد برای حل انتگرال دوم داریم :

$2x+1 = u \rightarrow 2 dx = du \rightarrow I_1 = \int \frac{1 dx}{2x+1} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|2x+1| + c \Rightarrow I = x + \ln|2x+1| + c$

۶) $I = \int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$I_1: \arcsin x = u \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du \quad (1)$

$I_2: 1-x^2 = t \Rightarrow -2x dx = dt \Rightarrow x dx = -\frac{dt}{2} \quad (2)$

$\xrightarrow{(1),(2)} I = \frac{(\arcsin x)^2}{2} - \sqrt{1-x^2} + c$

۷) $I = \int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{\ln x}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow \ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \rightarrow$

$I = \frac{1}{2} \int u du = \frac{1}{2} (\frac{u^2}{2}) + c = \frac{1}{4} (\ln x)^2 + c$

۸) $I = \int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{dx}{1+\frac{1}{1+\tan^2 x}} = \int \frac{(1+\tan^2 x) dx}{2+\tan^2 x} \rightarrow \tan x = u \rightarrow \boxed{(1+\tan^2 x) dx = du} \rightarrow$

$I = \int \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctg}(\frac{u}{\sqrt{2}}) + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctg}(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}) + c$

۹) $I = \int x^r \cos(x^r + r) dx \Rightarrow x^r + r = u \Rightarrow r x^{r-1} dx = du \rightarrow \boxed{x^r dx = \frac{du}{r}} \rightarrow$

$I = \frac{1}{r} \int \cos u du = \frac{\sin u}{r} + c = \frac{\sin(x^r + r)}{r} + c$

۱۰) $I = \int x(2x+5)^{10} dx \Rightarrow 2x+5 = u \rightarrow \begin{cases} 2x = u-5 \rightarrow dx = \frac{du}{2} \\ x = \frac{u-5}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$I = \int (\frac{u-5}{2})^{10} (\frac{du}{2}) = \frac{1}{4} \int (u-5)^{10} du = \frac{1}{4} \int (u^{11} - 5u^{10}) du = \frac{1}{4} [\frac{u^{12}}{12} - \frac{5}{11} u^{11}] + c = \frac{1}{4} [\frac{(2x+5)^{12}}{12} - \frac{5(2x+5)^{11}}{11}] + c$

۱۱) $I = \int \frac{e^x}{e^x-1} dx \Rightarrow e^x - 1 = u \rightarrow e^x dx = du \rightarrow I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|e^x - 1| + c$

۱۲) $I = \int \frac{a^x dx}{1+a^{2x}} \Rightarrow a^x = u \Rightarrow a^x \ln a dx = du \rightarrow a^x dx = \frac{du}{\ln a}$

$\Rightarrow I = \int \frac{a^x dx}{1+(a^x)^2} = \frac{1}{\ln a} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\ln a} [\text{arctg} u] + c = \frac{\text{arctg}(a^x)}{\ln a} + c$

مثال ۲: مطلوبست محاسبه $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2(1+\sqrt{x^2})}}$

پاسخ: از تغییر متغیر $u = x^{\frac{1}{2}}, u = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow du = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$ استفاده می کنیم. در این صورت:

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2(1+\sqrt{x^2})}} = \int \frac{2du}{1+u^2} = 2 \text{Arctg} u + c = 2 \text{Arctg} \sqrt{x} + c$

مثال ۳: حاصل $I = \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+\tan x}}$ کدام است ؟

(۱) $\frac{1}{\cos x} + \tan x + c$ (۲) $\frac{1}{\cos x} + \cot x + c$ (۳) $\sqrt{1+\tan x} + c$ (۴) $2(1+\tan x) + c$

پاسخ: گزینه «۳» $1 + \tan x = u \Rightarrow (1 + \tan^2 x) dx = du \rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = du \Rightarrow I = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{1+\tan x} + c$

با توجه به مثال های فوق به نتایج غیررسمی زیر می توان رسید:

(۱) در تغییر متغیرها باید کاری کنیم تا فقط نماد تغییر یافته (u در مثالهای بالا) زیر انتگرال وجود داشته باشد و اثری از X نباشد.

(۲) باید مشتق عبارت کنار آن ایجاد شود.

(۳) معمولاً در توابعی که بصورت رادیکالی هستند عبارت داخل رادیکال یا کل رادیکال را u در نظر می گیریم.

(۴) در توابع کسری که توابع نمائی در ترکیب منفرج وجود دارد بهتر است کل منفرج کسر و یا خود تابع نمائی را برابر u در نظر بگیریم.

(۵) در نهایت وقتی جواب انتگرال بر حسب u بدست آمد آنگاه به جای u همان عبارتی بر حسب X که از ابتدا برابر u فرض شده بود را قرار می دهیم.

مثال ۴: حاصل $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ کدام است ؟

(۱) $\frac{2}{\sqrt{\ln x}} + c$ (۲) $\frac{\sqrt{\ln x}}{x} + c$ (۳) $2\sqrt{\ln x} + c$ (۴) $\ln(\ln \sqrt{x}) + c$

پاسخ: گزینه «۳» $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int (\frac{\ln x}{u})^{-\frac{1}{2}} (\frac{dx}{x}) = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{\ln x} + c$

مثال ۵: حاصل $I = \int \frac{e^{\text{Arctg} x}}{1+x^2} dx$ کدام است ؟

(۱) $e^{\text{Arctg} x} + c$ (۲) $2e^{\text{Arctg} x} + c$ (۳) $\frac{1}{2} e^{\text{Arctg} x} + c$ (۴) $\text{Arctg}(e^x + 1) + c$

پاسخ: گزینه «۱» $\text{Arctg} x = u \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2} = du \rightarrow I = \int e^u du = e^u + c = e^{\text{Arctg} x} + c$

مثال ۶: حاصل $\int \frac{\cos x - \sin x}{2 + \sin 2x} dx$ کدام است ؟

(۱) $\text{Arctg}(\sin x - \cos x) + c$ (۲) $\text{Arctg}(\sin x + \cos x) + c$ (۳) $\frac{1}{\sin x + \cos x} + c$ (۴) $\frac{1}{\sin x - \cos x} + c$

پاسخ: گزینه «۲» اگر عبارت منفرج را به فرم $2 + \sin 2x = 1 + (\sin x + \cos x)^2$ بنویسیم. داریم:

$I = \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + (\sin x + \cos x)^2} dx \Rightarrow (\sin x + \cos x) = u \Rightarrow (\cos x - \sin x) dx = du$

$\Rightarrow I = \int \frac{du}{1+u^2} = \text{Arctg} u + c = \text{Arctg}(\sin x + \cos x) + c$

مثال ۷: اگر $F(x) = \int f(x) dx$ آنگاه $\int f(ax+b) dx$ کدام است ؟

(۱) $aF(ax+b)$ (۲) $\frac{1}{a} F(x)$ (۳) $aF(x)$ (۴) $\frac{1}{a} F(ax+b)$

پاسخ: گزینه «۴» $ax + b = u \Rightarrow adx = du \Rightarrow \boxed{dx = \frac{du}{a}} \Rightarrow I = \frac{1}{a} \int f(u) du \rightarrow I = \frac{F(u)}{a} = \frac{1}{a} F(ax+b)$

مثال ۸: مطلوبست محاسبه $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

پاسخ: ابتدا توجه کنید که:

$$\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \sec^2 x dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \tan x - \frac{1}{\cos x} + c = \tan x - \sec x + c$$

بنابراین:

انتگرالهای Sin, Cos با توان فرد

در حل اینگونه انتگرالها، یک توان را جدا کرده و بقیه عبارت را با استفاده از رابطه $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ بر حسب نسبت دیگر (اگر سینوس بود بر حسب کسینوس و بالعکس) نوشته و با استفاده از تغییر متغیر مناسب حاصل انتگرال بدست خواهد آمد.

مثال ۹: $I = \int \sin^3 x dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx \Rightarrow \cos x = u \Rightarrow -\sin x dx = du$

$$\Rightarrow I = - \int (1 - u^2) du = \frac{u^3}{3} - u + c = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c$$

مثال ۱۰: حاصل $I = \int \cos^3 x dx$ کدام است؟

$$\frac{1}{6} \sin^2 x - \frac{1}{4} \sin^4 x + c \quad (f) \quad \frac{1}{4} \sin^2 x - \frac{1}{6} \sin^4 x + c \quad (g) \quad \frac{1}{6} \sin^2 x - \frac{1}{4} \sin^4 x + c \quad (h) \quad \frac{1}{4} \sin^2 x - \frac{1}{6} \sin^4 x + c \quad (d)$$

پاسخ: گزینه «د»

$$I = \int \cos^3 x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx = \int \cos x dx - \int \cos x \sin^2 x dx$$

$$= \int \cos x dx - \frac{1}{3} \int (\sin^2 x)^2 \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^2 x - \frac{1}{5} \frac{(\sin^2 x)^3}{3} + c = \frac{1}{3} \sin^2 x - \frac{1}{15} \sin^6 x + c$$

نکته ۱:

$$1) \int \sin^2 ax dx = -\frac{1}{2a} (\cos ax - \frac{1}{2} \cos^2 ax) + c \quad \text{و} \quad 2) \int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax + \frac{1}{2} \sin^2 ax) + c$$

انتگرال Sin, Cos با توان زوج

با استفاده از فرمولهای توان شکن (طلاتی) توان آنها را کاهش می‌دهیم و سپس حاصل انتگرال را بدست می‌آوریم:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{و} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

مثال ۱۱:

$$I = \int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int [1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x] dx = \frac{1}{4} \int [1 + 2 \cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)] dx$$

$$= \frac{1}{4} (x + \sin 2x) + \frac{1}{8} (x + \frac{\sin 4x}{4}) = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + c$$

مثال ۱۲: حاصل انتگرال $I = \int \sin^4 x dx$ کدام است؟

$$\frac{3x}{8} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (f) \quad \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (g)$$

$$\frac{3x}{8} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (d) \quad \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (h)$$

پاسخ: گزینه «د»

$$I = \int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{4} \int [1 - 2 \cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)] dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + c = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$$

انتگرالهای cotg, tg با توان فرد

در حل اینگونه انتگرالها باید توانهای کمتر از آن نسبت را به اندازه ۲ واحد اضافه و کم کنیم.

$$I = \int \tan^3 x dx = \int [(\tan^2 x + \tan x) - \tan x] dx = \int \tan x (\tan^2 x + 1) dx - \int \tan x dx = \frac{1}{3} \tan^3 x + \ln |\cos x| + c$$

$$\int [\tan x (\tan^2 x + 1) - \tan x] dx = \int \tan x (\tan^2 x + 1) dx - \int \tan x dx = \frac{1}{3} \tan^3 x + \ln |\cos x| + c$$

مثال ۱۳: حاصل انتگرال $I = \int \cot g^3 x dx$ کدام است؟

$$-\frac{1}{3} \cot g^3 x - \ln |\sin x| + c \quad (f) \quad -\frac{1}{3} \cot g^3 x + \ln |\sin x| + c \quad (g)$$

$$\frac{1}{3} \cot g^3 x - \ln |\sin x| + c \quad (d) \quad \frac{1}{3} \cot g^3 x + \ln |\sin x| + c \quad (h)$$

پاسخ: گزینه «د»

$$I = \int \cot g^3 x dx = \int [(\cot g^2 x + \cot g x) - \cot g x] dx = \int \cot g x (\cot g^2 x + 1) dx - \int \cot g x dx = -\frac{\cot g^3 x}{3} - \ln |\sin x| + c$$

نکته ۲: در فرمولهای زیر $n = 2k + 1$ می‌باشد.

$$\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \frac{\tan^{n-3} x}{n-3} + \dots + (-1)^k \ln |\sec x| + c$$

$$\int \cot g^n x dx = -\frac{\cot g^{n-1} x}{n-1} + \frac{\cot g^{n-3} x}{n-3} - \dots + (-1)^k \ln |\sin x| + c$$

مثال ۱۵: حاصل انتگرال $I = \int \tan^5 x dx$ کدام است؟

$$\frac{\tan^4 x}{4} + \frac{\tan^2 x}{2} + c \quad (f) \quad \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \ln |\sec x| + c \quad (g)$$

$$\frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + c \quad (d) \quad \frac{\tan^4 x}{4} + \frac{\tan^2 x}{2} + \ln |\sin x| + c \quad (h)$$

پاسخ: گزینه «د» با توجه به نکته (۲) در این تست $n = 5$ لذا $k = 2$ خواهد بود.

$$\int \tan^5 x dx = \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + (-1)^2 \times \ln \left| \frac{1}{\cos x} \right| + c$$

انتگرالهای cotg, tg با توان زوج

در حل این نوع انتگرالها نیز باید توانهای کمتر از آن نسبت را ۲ واحد اضافه و کم کنیم.

مثال ۱۶:

$$I = \int \tan^4 x dx = \int [(\tan^2 x + \tan^2 x) - (\tan^2 x + 1) + 1] dx = \int [\tan^2 x (\tan^2 x + 1) - (\tan^2 x + 1) + 1] dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c$$

مثال ۱۷: حاصل انتگرال $I = \int \tan x \cot g^2 x dx$ کدام است؟

$$2x - \cot g x + c \quad (f) \quad 2x - \tan x + c \quad (g) \quad x + \cot g x + c \quad (d) \quad x + \tan x + c \quad (h)$$

پاسخ: گزینه «د» با توجه به رابطه: $\tan x \cot g^2 x = \cot g x - \tan x$ خواهیم داشت:

$$I = \int \tan x (\cot g x - \tan x) dx = \int dx - \int \tan^2 x dx = x - (\tan x - x) + c = 2x - \tan x + c$$

مثال ۱۸: حاصل انتگرال $I = \int \cot g^r x dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{\cot g^r x}{r} + x + \cot g x + c$

(۲) $\cot g x + x - \frac{\cot g^r x}{r} + c$

(۳) $x + \cot g^r x - \frac{\cot g^r x}{r} + c$

(۴) $x + \cot g^r x + \frac{\cot g^r x}{r} + c$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\int \cot g^r x dx = \int [(\cot g^r x + \cot g^r x) - (\cot g^r x + 1) + 1] dx =$$

نکته ۳: اگر $n = 2k$ باشد داریم:

۱) $\int \text{tg}^n x dx = \frac{\text{tg}^{n-1} x}{n-1} - \frac{\text{tg}^{n-2} x}{n-2} + \dots + (-1)^k x + c$

۲) $\int \cot g^n x dx = -\frac{\cot g^{n-1} x}{n-1} + \frac{\cot g^{n-2} x}{n-2} - \dots + (-1)^k x + c$

مثال ۱۹: حاصل انتگرال $I = \int \text{tg}^r x dx$ کدام است؟

(۱) $\text{tg}^r x - \frac{1}{r} \text{tg}^{r-1} x + \text{tg} x + x + c$

(۲) $\frac{1}{r} \text{tg}^r x + \frac{1}{r} \text{tg}^{r-1} x - \text{tg} x + x + c$

(۳) $\frac{1}{r} \text{tg}^r x + \frac{1}{r} \text{tg}^r x - \text{tg} x + x + c$

(۴) $\frac{1}{r} \text{tg}^r x - \frac{1}{r} \text{tg}^{r-1} x + \text{tg} x + (-1)^r x + c$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به نکته (۳) در این تست $n = 6$ و لذا $k = 3$ می‌باشد.

محاسبه انتگرالهای حاصلضرب دو جمله سینوسی و کسینوسی

برای محاسبه این نوع انتگرالها باید از فرمول تبدیل حاصلضرب به مجموع استفاده نمود.

۱) $\text{Sina} \cdot \text{cos b} = \frac{1}{2} [\text{Sin}(a+b) + \text{Sin}(a-b)]$

۲) $\text{cosa} \cdot \text{cos b} = \frac{1}{2} [\text{cos}(a-b) + \text{cos}(a+b)]$

۳) $\text{Sina} \cdot \text{Sin b} = \frac{1}{2} [\text{cos}(a-b) - \text{cos}(a+b)]$

مثال ۲۰: حاصل هریک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $I = \int \text{Sin} 2x \text{Sin} 3x dx = \int \frac{1}{2} [\text{Cos}(2x-3x) - \text{cos}(2x+3x)] dx = \frac{1}{2} \int \text{cos} x dx - \frac{1}{2} \int \text{cos} 5x dx = \frac{\text{sin} x}{2} - \frac{\text{sin} 5x}{10} + c$

۲) $I = \int \text{sin} 2x \text{cos} 3x dx = \int \frac{1}{2} [\text{sin}(2x-3x) + \text{sin}(2x+3x)] dx = -\frac{1}{2} \int \text{sin} x dx + \frac{1}{2} \int \text{sin} 5x dx = \frac{\text{cos} 2x}{4} - \frac{\text{cos} 5x}{16} + c$

۳) $I = \int \text{cos} \frac{x}{2} \text{cos} \frac{x}{3} dx = \int \frac{1}{2} [\text{cos}(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}) + \text{cos}(\frac{x}{2} + \frac{x}{3})] dx = \frac{1}{2} \int \text{cos}(\frac{x}{6}) dx + \frac{1}{2} \int \text{cos}(\frac{5x}{6}) dx = \frac{3}{2} \text{sin}(\frac{x}{6}) + \frac{3}{10} \text{sin}(\frac{5x}{6}) + c$

مثال ۲۱: حاصل انتگرال $I = \int \text{sin} 9x \text{sin} x dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{16} \text{sin} 8x - \frac{1}{20} \text{sin} 10x + c$

(۲) $\frac{1}{16} \text{sin} 8x + \frac{1}{20} \text{sin} 10x + c$

(۳) $\frac{1}{20} \text{sin} 10x - \frac{1}{16} \text{sin} 8x + c$

(۴) $\frac{1}{20} \text{sin} 10x + \frac{1}{16} \text{sin} 8x + c$

پاسخ: گزینه «۱»

محاسبه انتگرالهایی به صورت $\int \text{sin}^m x \text{cos}^n x dx$ که در آنها m و n اعدادی صحیح هستند.

حالت اول: اگر یکی از اعداد m و n فرد باشد، تغییر متغیر $\text{cos} x = u$ یا $\text{sin} x = u$ بکار می‌بریم:

مثال ۲۲: حاصل $\int \text{sin}^{10} x \text{cos}^7 x dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{\text{sin}^{11} x}{11} + \frac{\text{sin}^{13} x}{13} + c$

پاسخ: گزینه «۲» در این تست $m = 10$ و $n = 7$ می‌باشد لذا داریم:

$$I = \int \text{sin}^{10} x (1 - \text{sin}^2 x) \text{cos} x dx = \int \frac{\text{sin}^{10} x \text{cos} x dx}{u} - \int \frac{\text{sin}^{12} x \text{cos} x dx}{u}$$

$$\Rightarrow I = \int u^{10} du - \int u^{12} du = \frac{u^{11}}{11} - \frac{u^{13}}{13} + c = \frac{\text{sin}^{11} x}{11} - \frac{\text{sin}^{13} x}{13} + c$$

حالت دوم: اگر m و n هر دو مثبت و زوج باشند، با استفاده از روشهای محاسبه انتگرال توابع $\text{sin} x$ و $\text{cos} x$ با توان زوج انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

مثال ۲۳: مقدار $I = \int \text{cos}^2 x \text{sin}^2 x dx$ را محاسبه کنید.

$$I = \int (\text{cos} 2x \text{sin} 2x)^2 dx = \int \frac{\text{sin}^2 4x}{4} \cdot \frac{1 - \text{cos} 4x}{2} dx =$$

$$\frac{1}{8} \int (\text{sin}^2 4x - \text{sin}^2 4x \text{cos} 4x) dx = \frac{1}{8} \int \left(\frac{1 - \text{cos} 8x}{2} - \text{sin}^2 4x \text{cos} 4x \right) dx$$

$$= \frac{1}{16} \int (1 - \text{cos} 8x) dx - \frac{1}{8} \int \frac{\text{sin}^2 4x \text{cos} 4x dx}{u} = \frac{x}{16} - \frac{\text{sin} 8x}{128} - \frac{\text{sin}^3 4x}{96} + c$$

حالت سوم: اگر m و n اعداد صحیح منفی و هر دو زوج و یا هر دو فرد باشند، تغییر متغیر $\text{tg} x = u$ را بکار می‌بریم.

مثال ۲۴: مطلوبست محاسبه $I = \int \frac{1}{\text{cos}^2 x} dx$

$$I = \int \frac{dx}{\text{cos}^2 x} = \int \left(\frac{1}{\text{cos}^2 x} \right) \left(\frac{1}{\text{cos}^2 x} \right) dx = \int (1 + \text{tg}^2 x)(1 + \text{tg}^2 x) dx = \int (1 + \text{tg}^2 x) dx + \int \frac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x} dx = \text{tg} x + \frac{\text{tg}^3 x}{3} + c$$

مثال ۲۵: مطلوبست محاسبه $\int \frac{dx}{a \text{sin} x + b \text{cos} x}$

پاسخ: فرض می‌کنیم $a = r \text{cos} \theta$, $b = r \text{sin} \theta$, در این صورت $r^2 = a^2 + b^2$, $\text{tg} \theta = \frac{b}{a}$, بنابراین $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = \text{tg}^{-1}(\frac{b}{a})$.

در نتیجه:

$$a \text{sin} x + b \text{cos} x = r \text{cos} \theta \text{sin} x + r \text{sin} \theta \text{cos} x = r \text{sin}(x + \theta)$$

$$\int \frac{dx}{a \text{sin} x + b \text{cos} x} = \int \frac{dx}{r \text{sin}(x + \theta)} = \frac{1}{r} \text{Lntg}\left(\frac{x + \theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{Lntg}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \text{tg}^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right)$$

مثال ۲۶: مطلوبست محاسبه $I = \int \frac{\text{sin} 2\theta}{\text{sin}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta} d\theta$

پاسخ: ابتدا انتگرال را به شکل روبرو در می‌آوریم:

$$I = \int \frac{\text{sin} 2\theta}{\text{sin}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta} d\theta = \int \frac{2 \text{sin} \theta \text{cos} \theta}{\text{sin}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta} d\theta = \int \frac{2 \text{tg} \theta \text{sec}^2 \theta}{\text{tg}^2 \theta + 1} d\theta$$

برای محاسبه انتگرال اخیر از تغییر متغیر $u = \text{tg}^2 \theta$, $du = 2 \text{tg} \theta \text{sec}^2 \theta d\theta$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$I = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \text{Arctg} u + c = \text{Arctg}(\text{tg}^2 \theta) + c$$

محاسبه انتگرال $\int \text{sin}^m x \text{cos}^n x dx$ وقتی m و n اعدادی گویا باشند:

در این حالت قاعده کلی وجود ندارد اما می‌توان یک قاعده که: اگر $m + n$ زوج باشد، آنگاه تغییر متغیر $\text{tg} x = u$ را بکار می‌بریم را بیان نمود.

مثال ۲۷: مطلوبست محاسبه $I = \int \frac{f \sin^2 x}{\cos^4 x} dx$

پاسخ: $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \left(\frac{dx}{\cos^2 x} \right) \rightarrow \text{tg} x = u \rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = du \Rightarrow I = \int \text{tg}^2 u du = \text{tg}^2 u + c = \text{tg}^2 (\text{tg} x) + c$

روش انتگرال گیری جزء به جزء

از این روش معمولاً در محاسبه انتگرالهایی بفرم کلی $\int f(x) \cdot g(x) dx$ استفاده می‌شود که f تابعی است که بدست آوردن مشتق آن به سادگی صورت می‌گیرد. (مانند: $\text{Arcsin } x, \dots$ و x^2, g تابعی است که انتگرال آن براحتی قابل محاسبه است، (مانند: $\sin x, \cos x, e^x$). برای حل اینگونه انتگرالها ابتدا یکی از توابع را U در نظر گرفته و بقیه عبارت زیر انتگرال را برابر dV در نظر می‌گیریم و با استفاده از فرمول کلی $\int U dV = UV - \int V dU$ انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۲۸: حاصل $I = \int \text{Arcsin} x dx$ برابر است با:

(۱) $x \text{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + C$ (۲) $\text{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + C$ (۳) $\text{Arcsin} x + C$ (۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۱»

$\text{Arcsin} x = u \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du \Rightarrow \int \text{Arcsin} x dx = x \text{Arcsin} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \text{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + C$
 $dv = dx \Rightarrow x = v$

مثال ۲۹: حاصل $I = \int x \sin x dx$ کدام است؟

(۱) $\sin x - x \cos x + c$ (۲) $\cos x - x \sin x + c$ (۳) $\sin x + x \cos x + c$ (۴) $\cos x + x \sin x + c$

پاسخ: گزینه «۱»

$x = u \Rightarrow dx = du \Rightarrow \int x \sin x dx = -x \cos x - \int -\cos x dx \Rightarrow$
 $\int \sin x dx = dv \Rightarrow v = -\cos x \Rightarrow I = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$

مثال ۳۰: حاصل $I = \int \text{Ln} x dx$ کدام است؟

(۱) $x \text{Ln} x + x + c$ (۲) $x \text{Ln} x - x + c$ (۳) $\frac{1}{x} \text{Ln} x + x + c$ (۴) $\frac{1}{x} \text{Ln} x - x + c$

پاسخ: گزینه «۲»

$\text{Ln} x = u \rightarrow \frac{dx}{x} = du \rightarrow I = x \text{Ln} x - \int x \left(\frac{dx}{x} \right) = x \text{Ln} x - x + c$
 $dx = dv \rightarrow x = v$

بهنتر است حاصل انتگرال فوق را به خاطر سپرده شود.

مثال ۳۱: حاصل $I = \int \frac{\text{Ln} x}{x^2} dx$ کدام است؟

(۱) $x \text{Ln} x - x^2 + c$ (۲) $-\frac{\text{Ln} x}{x} + \frac{1}{x} + c$ (۳) $-\frac{\text{Ln} x}{x} - \frac{1}{x} + c$ (۴) $x \text{Ln} x + x^2 + c$

پاسخ: گزینه «۳»

$u = \text{Ln} x \rightarrow du = \frac{dx}{x} \rightarrow I = -\frac{\text{Ln} x}{x} - \int \left(-\frac{1}{x} \right) \left(\frac{dx}{x} \right) = -\frac{\text{Ln} x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\text{Ln} x}{x} - \frac{1}{x} + c$
 $dv = \frac{dx}{x^2} \rightarrow v = -\frac{1}{x}$

توضیح: به طور کلی داریم: $\int x^n \cdot \text{Ln} x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\text{Ln} x - \frac{1}{n+1}) + c$ (برای دو مثال فوق $n = -2$ و $n = 0$ می‌باشد).

مثال ۳۲: حاصل $I = \int \frac{x \text{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{1+x^2} \text{arctg} x - \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c$

(۲) $\sqrt{1+x^2} \text{arctg} x - \text{arctg} x + c$

پاسخ: گزینه «۲»

$\text{arctg} x = u \rightarrow \frac{dx}{1+x^2} = du$
 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = dv \rightarrow \sqrt{1+x^2} = v$
 $\Rightarrow I = \sqrt{1+x^2} \text{arctg} x - \int \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \sqrt{1+x^2} \text{arctg} x - \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c$

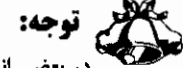
تذکره ۳: معمولاً در انتگرالهایی که شامل توابع Ln و Arc هستند باید این توابع را برابر u در نظر بگیریم و بقیه عبارت زیر انتگرال را dv فرض کنیم.

مثال ۳۳: جواب انتگرال $\int \frac{\text{Ln}(\text{Ln} x)}{x} dx$ کدام است؟

(۱) $\text{Ln} x \text{Ln}(\text{Ln} x) - \text{Ln} x + c$ (۲) $\text{Ln} x - \text{Ln}(\text{Ln} x) + c$ (۳) $\text{Ln}(\text{Ln} x) - \text{Ln} x + c$ (۴) $\text{Ln} x \text{Ln}(\text{Ln} x) + c$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا از تغییر متغیر $u = \text{Ln} x$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$\int \frac{\text{Ln}(\text{Ln} x)}{x} dx = \int \text{Ln} u du$ روش جزء به جزء $u \text{Ln} u - u + c = \text{Ln} x \text{Ln}(\text{Ln} x) - \text{Ln} x + c$



توجه:

در بعضی انتگرالها لازم است که از چند بار قاعده جزء به جزء استفاده نماییم که معمولاً به معادله‌ای می‌رسیم که از آن می‌توانیم حاصل انتگرال مورد نظر را بدست آوریم.

مثال ۳۴: حاصل $I = \int e^x \cos x dx$ کدام است؟

(۱) $e^x (\sin x - \cos x) + c$ (۲) $e^x (\sin x + \cos x) + c$ (۳) $\frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + c$ (۴) $\frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c$

پاسخ: گزینه «۴»

$I = \int e^x \cos x dx \rightarrow \begin{cases} e^x = u \rightarrow e^x dx = du \\ \cos x dx = dv \rightarrow \sin x = v \end{cases} \rightarrow I = e^x \sin x - \int \frac{e^x \sin x dx}{I_1} \Rightarrow I_1 = e^x \sin x - I$ (۱)

توجه شود که انتگرال I_1 تقریباً شبیه انتگرال اصلی می‌باشد لذا با استفاده مجدد از قاعده جزء به جزء داریم:

$I_1: \begin{cases} e^x = u \rightarrow e^x dx = du \\ \sin x dx = dv \rightarrow -\cos x = v \end{cases} \rightarrow I_1 = (-\cos x) e^x + \int \frac{e^x \cos x dx}{I} \Rightarrow I_1 = -e^x \cos x + I$ (۲)

$\xrightarrow{(۲), (۱)} e^x \sin x - I = -e^x \cos x + I \Rightarrow 2I = e^x (\sin x + \cos x) \rightarrow I = \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2}$

نکته ۴:

$1) \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + c$ و $2) \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + c$

مثال ۳۵: مطلوبست محاسبه $I = \int e^{5x} \cos 4x dx$

پاسخ: با توجه به نکته فوق داریم:

$I = \frac{e^{5x}}{41} (4 \cos 4x + 5 \sin 4x) + c$

مثال ۳۶: حاصل $I = \int x e^{2x} dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{x e^{2x}}{4} - \frac{e^{2x}}{2} + c$ (۲) $\frac{x e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + c$ (۳) $\frac{x e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + c$ (۴) $\frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c$

$x = u \rightarrow dx = du$
 $\int e^{2x} dx = dv \rightarrow \frac{1}{2} e^{2x} = v \rightarrow I = x(\frac{e^{2x}}{2}) - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = x(\frac{e^{2x}}{2}) - \frac{e^{2x}}{4} + c$
 پاسخ: گزینه «۴»

مثال ۳۷: مطلوبست محاسبه $A = \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$

$A = \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int x \sec^2 \frac{x}{2} dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx$
 پاسخ:

برای محاسبه $\int x \sec^2 \frac{x}{2} dx$ از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$A = \frac{1}{2} [x \frac{\text{tg } \frac{x}{2}}{1/2} - \int \frac{\text{tg } \frac{x}{2}}{1/2} dx] + \int \text{tg } \frac{x}{2} dx = x \text{tg } \frac{x}{2} + c$

توجه:

انتگرالگیری به روش جزء به جزء از جمله روشهای بی‌قاعده در انتگرالگیری می‌باشد ولی یک قاعده تقریباً کلی در انتخاب U و dv این است که معمولاً آن تابعی را که انتگرال ساده است را همراه dv, dx انتخاب کرده و بقیه را U در نظر می‌گیریم.

انتگرال گیری به کمک تشکیل جدول

در این روش مطابق جدول تابع $f(x)$ و مشتقهایش را در سمت چپ و تابع $g(x)$ و انتگرالهایش را در سمت راست قرار می‌دهیم و تا وقتی که مشتق تابع $f(x)$ صفر شود از تابع $g(x)$ انتگرال گرفته و در نهایت مانند پیکانهای مشخص شده توابع مربوط با پیکان در هم ضرب و آنها را با علامت روی آنها با جمله بعد جمع یا تفریق می‌نماییم که البته این علامتها از بالا به پایین یک در میان مثبت یا منفی هستند. (اگر مشتق $f(x)$ صفر نشود یا بخواهیم در یک سطر دلخواه متوقف شویم دو عبارت روبروی هم را در یکدیگر ضرب می‌کنیم).

مثال ۳۸: حاصل $I = \int x e^{2x} dx$ بیابید.

$f(x)$ و مشتقاتش	$g(x)$ و انتگرالهایش
x	$+ e^{2x}$
1	$- \frac{e^{2x}}{2}$
0	$\frac{e^{2x}}{4}$

(جدول A)

$f(x) = x, g(x) = e^{2x}$
 $I = x(\frac{e^{2x}}{2}) - (1 \times \frac{e^{2x}}{4}) + c$

مثال ۳۹: حاصل انتگرال $I = \int x \cos 2x dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{x \sin 2x}{3} + \frac{\cos 2x}{9} + c$ (۲) $\frac{x \cos 2x}{3} + \frac{\sin 2x}{9} + c$ (۳) $\frac{x \sin 2x}{3} - \frac{\cos 2x}{9} + c$ (۴) $\frac{x \cos 2x}{3} - \frac{\sin 2x}{9} + c$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از روش جدول داریم:

x	$\cos 2x$
1	$-\frac{1}{2} \sin 2x$
0	$-\frac{1}{4} \cos 2x$

$\Rightarrow I = \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + c$

مثال ۴۰: مطلوبست محاسبه $I = \int (x^2 + 1) \cos x dx$

$x^2 + 1$	$\cos x$
$2x$	$-\sin x$
2	$-\cos x$
0	$\cos x$

$\Rightarrow I = (x^2 + 1) \sin x + 2x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + c$

محاسبه انتگرالهایی بفرم کلی $\int R \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ (چند جمله‌ای گویا بر حسب x می‌باشد)

حالت اول: در صورتی که مشتق جمله زیر رادیکال خارج از رادیکال موجود باشد، عبارت زیر رادیکال را برابر u فرض کرده و سپس انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

مثال ۴۱: حاصل انتگرال $I = \int x \sqrt{(1-x^2)^2} dx$ به ازای $x=0$ و $C=1$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) 0 (۴) $-\frac{6}{5}$

$I = \int x \sqrt{(1-x^2)^2} dx = \int x(1-x^2)^2 dx \Rightarrow u = 1-x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow x dx = -\frac{du}{2}$
 پاسخ: گزینه «۲»

$I = \int (u^2)(-\frac{du}{2}) = -\frac{1}{2}(\frac{u^3}{3}) + C = -\frac{1}{6}(1-x^2)^3 + C \xrightarrow{C=1, x=0} I = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

حالت دوم: در صورتی که مشتق زیر رادیکال خارج از رادیکال موجود نباشد عبارت زیر رادیکال را با مربع‌سازی به یکی از شکل‌های

$\sqrt{u^2 + a^2}, \sqrt{u^2 - a^2}$ و یا $\sqrt{a^2 - u^2}$ تبدیل کرده و سپس به ترتیب با استفاده از تغییر متغیرهای $u = a \text{tg } \theta$ و $u = a \text{sec } \theta$ یا $u = a \sin \theta$ تبدیل کرده و سپس به ترتیب با استفاده از تغییر متغیرهای

$u = a \text{sec } \theta$ و $u = a \sin \theta$ پاسخ انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۴۲: حاصل انتگرال $I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4x} + c$ (۲) $\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4} + c$ (۳) $-\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4} + c$ (۴) $\frac{-\sqrt{x^2 + 4}}{4x} + c$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه مشتق عبارت داخل رادیکال بیرون رادیکال موجود نیست و عبارت زیر رادیکال بفرم $\sqrt{u^2 + a^2}$ می‌باشد از متغیر $u = a \text{tg } \theta$ استفاده می‌کنیم:

$x = 2 \text{tg } \theta \Rightarrow dx = 2(1 + \text{tg}^2 \theta) d\theta = \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta = 2 \sec^2 \theta d\theta$

$I = \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{4 \text{tg}^2 \theta \sqrt{4 + 4 \text{tg}^2 \theta}} = \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{4 \text{tg}^2 \theta \sqrt{4(1 + \text{tg}^2 \theta)}} = \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{4 \text{tg}^2 \theta (2 \sec \theta)} = \frac{1}{4} \int \frac{\sec \theta}{\text{tg}^2 \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos \theta} d\theta$

$\frac{1}{4} \int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int \underbrace{(\sin \theta)^{-2}}_u \underbrace{\cos \theta}_{du} d\theta = -\frac{1}{4} \sin^{-(2+1)} \theta + C = -\frac{1}{4 \sin \theta} + C = -\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4x} + C$

محاسبه انتگرالهایی بصورت $\int R(\sin x, \cos x) dx$ (R یک تابع گویا می باشد)

برای تعیین حاصل اینگونه انتگرالها از تغییر متغیر $t = \tan \frac{x}{2}$ استفاده می کنیم. بدینوسیله $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ، $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ خواهند بود و انتگرال فوق به انتگرال توابع گویا با متغیر جدید t تبدیل می شود.

مثال ۴۳: حاصل انتگرال $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$ به ازای $x = \frac{\pi}{2}$ و $c = 0$ کدام است؟

- (۱) $\ln 2$ (۲) $\ln \sqrt{2}$ (۳) $\ln 2$ (۴) $\ln \sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به مطالب گفته شده خواهیم داشت:

$$I = \int \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + c = \ln|1 + \tan \frac{x}{2}| + c \xrightarrow{c=0, x=\frac{\pi}{2}} I = \ln|1 + \tan \frac{\pi}{4}| + 0 = \ln 2$$

روش انتگرال گیری به روش تجزیه کسرها

برای محاسبه انتگرالهایی به فرم کلی $I = \int \frac{p(x)}{q(x)}$ به روش زیر عمل می کنیم:

اگر درجه چند جمله ای $p(x)$ از $q(x)$ بیشتر باشد، ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم کرده و به فرم $I = \int R(x) + \frac{M(x)}{N(x)}$ خواهیم رسید که $R(x)$ یک چند جمله ای خطی می باشد و انتگرال آن براحتی قابل محاسبه است. و برای محاسبه انتگرال $\frac{M(x)}{N(x)}$ که در آن درجه صورت کسر از مخرج آن کمتر است به حالتی زیر خواهیم رسید:

الف) اگر $N(x) = (ax + b)^m (cx + d)^n$ باشد، که نگاه تجزیه کسر به شکل زیر می باشد:

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^m} + \frac{B_1}{(Cx+d)} + \frac{B_2}{(Cx+d)^2} + \dots + \frac{B_n}{(Cx+d)^n}$$

در عبارتهای سمت راست تساوی مخرج مشترک گرفته و صورت آنها را متحد با $M(x)$ قرار داده و مقادیر $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$ بدست می آید.

ب- اگر $N(x) = (x^2 + px + q)^n$ باشد که $\Delta = p^2 - 4q < 0$ می باشد نگاه:

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{A_1x + B_1}{x^2 + Px + q} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + Px + q)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(x^2 + Px + q)^n}$$

و سپس مانند حالت الف مقادیر $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$ را بدست می آوریم.

مثال ۴۴: مقدار انتگرال $I = \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$ را محاسبه کنید.

پاسخ: چون درجه صورت از مخرج کمتر است باید کسر تجزیه شود.

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow 1 = (A+B)x - 2A - 3B \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-3B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{1}{x-3} dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C = -\ln \left| \frac{x-2}{x-3} \right| + C$$

مثال ۴۵: حاصل $I = \int \frac{x}{(x-1)(x^2+4)} dx$ را بیابید.

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+4}$$

پاسخ: ابتدا کسر داده شده را به کسرهای ساده تجزیه می کنیم:

با ضرب طرفین رابطه فوق در $(x-1)(x^2+4)$ به دست می آید:

$$A(x^2+4) + (Bx+c)(x-1) = x \Rightarrow (A+B)x^2 + (C-B)x + (4A-c) = x$$

با برابر قرار دادن ضرایب در دو طرف رابطه فوق مقادیر A, B, C به ترتیب برابر $\frac{1}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{1}{5}$ به دست می آید. بنابراین:

$$I = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{-1}{x^2+4} dx = \frac{1}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{10} \ln|x^2+4| + \frac{2}{5} \text{Arctg} \frac{x}{2} + c$$

مثال ۴۶: حاصل انتگرال $A = \int \frac{dx}{x(1+x^6)}$ را بیابید.

$$A = \int \frac{dx}{x(1+x^6)} = \int \frac{x^5 dx}{x^6(1+x^6)}$$

پاسخ: ابتدا توجه کنید که انتگرال داده شده را می توان به فرم روبرو نوشت:

حال با استفاده از تغییر متغیر $u = x^6$ ، $du = 6x^5 dx$ یا $x^5 dx = \frac{du}{6}$ خواهیم داشت:

$$A = \int \frac{du}{6u(1+u)} = \frac{1}{6} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \frac{1}{6} \ln \frac{u}{u+1} + c = \frac{1}{6} \ln \frac{x^6}{x^6+1} + c$$

یک فرمول فرعی: $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right|$

حل مثال (۴۴) با توجه به فرمول فرعی: $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = -\ln \left| \frac{x-2}{x-3} \right| + C$

مثال ۴۷: انتگرالهای زیر را بیابید.

- الف) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$ ب) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx$ ج) $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} dx$

پاسخ:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2} dx$$

الف) ابتدا صورت و مخرج کسر را به x^2 تقسیم می کنیم:

حال با تغییر متغیر $u = x - \frac{1}{x}$ ، $du = (1 + \frac{1}{x^2}) dx$ خواهیم داشت:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{tg}^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{tg}^{-1} \left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} \right) + c$$

ب) با تقسیم صورت و مخرج کسر بر x^2 به دست می آید:

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2} dx$$

حال با تغییر متغیر $u = x + \frac{1}{x}$ ، $du = (1 - \frac{1}{x^2}) dx$ خواهیم داشت:

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx = \int \frac{du}{u^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{u - \sqrt{2}}{u + \sqrt{2}} + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + c$$

ج) با روش مشابه قسمتهای الف) و ب) می توان نتیجه گرفت (به عهده دانشجو):

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$$

روش هویساید:

این روش معمولاً خیلی سریع تر ما را در تعیین ضرایب یاری می کند، اگر کسر گویای $f(x)$ به شکل زیر تجزیه شود:

$$f(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2}$$

آنگاه ضرائب به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$A_r = \lim_{x \rightarrow a} [(x-a)^r f(x)]$$

$$B_r = \lim_{x \rightarrow a} [(x-b)^r f(x)]$$

$$A_r = \lim_{x \rightarrow a} [(x-a)^r f(x)]$$

$$B_1 = \lim_{x \rightarrow a} [(x-b)^r f(x)]$$

$$A_1 = \frac{1}{r!} \lim_{x \rightarrow a} [(x-a)^r f(x)]^r$$

توجه شود که در رابطه فوق $f(x)$ تابعی با داشتن عاملهای $(x-a)^r, (x-a)^r, (x-b)^r, (x-b)^r, (x-b)^r$ در نظر گرفته شده است. برای مثال برای حل مثال قبل داریم:

$$\begin{cases} A = \lim_{x \rightarrow 2} [(x-2) \times \frac{1}{(x-2)(x-2)}] = \lim_{x \rightarrow 2} (\frac{1}{x-2}) = -1 \\ B = \lim_{x \rightarrow 2} [(x-2) \times \frac{1}{(x-2)(x-2)}] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = 1 \end{cases}$$

تذکره ۴: چون این نوع انتگرالها در قالبهای تستی بندرت مورد سوال قرار می‌گیرد بحث را در اینجا خاتمه می‌دهیم.

کاهش مرتبه انتگرال گیری

فرمولهای کاهش مرتبه انتگرال گیری، فرمولهایی هستند که انتگرال را به یک انتگرال مشابه ولی با اندیس کمتر تبدیل می‌کنند.

مثال ۴۸: فرمول کاهش $I_n = \int x^n e^x dx$ را به دست آورید.

پاسخ: از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1} \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$I_n = x^n e^x - \int nx^{n-1} e^x dx \Rightarrow I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$$

بنابراین:

مثال ۴۹: فرمول کاهش $I_n = \int tg^n x dx$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$I_n = \int tg^n x dx = \int (tg^n x + tg^{n-2} x) dx - \int tg^{n-2} x dx = \int tg^{n-2} x (tg^2 x + 1) dx - \int tg^{n-2} x dx = \frac{tg^{n-1}}{n-1} - I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{1}{n-1} tg^{n-1} x - I_{n-2}$$

بنابراین فرمول روبرو به دست می‌آید:

مثال ۵۰: فرمول کاهش $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ را به دست آورید و سپس I_4 را به کمک آن محاسبه کنید.

پاسخ: از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \Rightarrow du = -\frac{2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

بنابراین:

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2+a^2) - a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \times \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \times I_n$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \text{Arctg} \frac{x}{a} + c$$

برای محاسبه I_4 ابتدا لازم است I_1 را به دست آوریم:

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} \times \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} I_1 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2a^2} \times \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} \text{Arctg} \frac{x}{a} + c$$

بنابراین:

*** انتگرال معین**

تعریف ۲: اگر انتگرال دارای حد بالا و پائین باشد، انتگرال معین می‌شود:

$F(x)$: تابع اولیه $f(x)$ می‌باشد. توجه شود که در انتگرال معین مقدار ثابت c وجود ندارد، و همانطور که از نام آن پیداست، حاصل آن عددی معین خواهد بود.

تذکره ۵: تابع زیر انتگرال باید در بازه تعیین شده برای انتگرال پیوسته باشد.

مثال ۵۱: حاصل $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{tgx}{\sqrt{\cos x}} dx$ کدام است؟

۲- $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}-1$ (۳) $2\sqrt{2}-1$ (۲) $2\sqrt{2}-2$ (۱)

پاسخ: گزینه «۱»

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{\cos x}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos^{\frac{3}{2}} x} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x)^{-\frac{3}{2}} \sin x dx = \left[\frac{2}{\sqrt{\cos x}} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} - 2$$

مثال ۵۲: حاصل عبارت $I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ کدام است؟

۲+ $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}+1$ (۳) $\sqrt{2}-1$ (۲) $2-\sqrt{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه «۲»

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \rightarrow \begin{cases} x^2+1 = u \rightarrow 2x dx = du \Rightarrow x dx = \frac{du}{2} \\ x=0 \rightarrow u=1, x=1 \rightarrow u=2 \end{cases}$$

$$I = \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \left[\frac{1}{2} \times 2\sqrt{u} \right]_1^2 = \sqrt{2} - 1$$

توضیح: توجه شود وقتی کل عبارات برحسب u نوشته شد، لذا بازه انتگرال گیری را نیز برای متغیر u تغییر دادیم.

مثال ۵۳: حاصل $I = \int_1^2 (x^2-4x)(x-2)^4 dx$ کدام است؟

۱۷ (۴) ۱۸ (۳) ۱۹ (۲) ۲۳ (۱)

پاسخ: گزینه «۲»

$$I = \int_1^2 [(x-2)^2 - 4](x-2)^4 dx = \int_1^2 [(x-2)^6 - 4(x-2)^4] dx = \left[\frac{(x-2)^7}{7} - \frac{4(x-2)^5}{5} \right]_1^2 = 19$$

مثال ۵۴: حاصل $I = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$ کدام است؟

۰ (۴) ۴ (۳) ۵ (۲) ۲ (۱)

پاسخ: گزینه «۳»

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} = u \rightarrow x^2+1 = u^2 \rightarrow 2x dx = 2u du \rightarrow x dx = u du \\ \frac{x}{u} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \\ u \quad 1 \quad 2 \end{cases}$$

بازه انتگرال گیری را نیز با توجه به تغییر متغیر عوض می‌کنیم.

$$\Rightarrow I = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{(2x^2)(x) dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_1^2 \frac{2(u^2-1)u du}{u} = \int_1^2 (2u^2-2) du = [u^3-2u]_1^2 = 4$$

مثال ۵۵: اگر $\int_0^{k\pi} \sin \frac{x}{k} dx = 6$ باشد آنگاه k کدام است؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

پاسخ: گزینه «۳»

$$I = \int_0^{k\pi} \sin \left(\frac{x}{k} \right) dx = \left[-k \cos \left(\frac{x}{k} \right) \right]_0^{k\pi} = -k \cos \left(\frac{k\pi}{k} \right) + k \cos \left(\frac{0}{k} \right) = -k + k = 2k = 6 \rightarrow k = 3$$

که مثال ۵۶: مقدار $\int_{-1}^1 e^{-x^2} d(x|x|)$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) ۲
- (۳) $2(1+e^{-1})$
- (۴) $2(1-e^{-1})$

پاسخ: گزینه «۴» $\int_{-1}^1 e^{-x^2} d(x|x|) = \int_{-1}^0 e^{-x^2} d(-x^2) + \int_0^1 e^{-x^2} d(x^2) = e^{-x^2} \Big|_{-1}^0 + (-e^{-x^2}) \Big|_0^1 = 2(1-e^{-1})$

که مثال ۵۷: حاصل $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ کدام است؟

- (۱) $2 \operatorname{Arctg} \sqrt{e^x-1} + c$
- (۲) $2 \operatorname{Arctg} \sqrt{e^x-1} + c$
- (۳) $2 \operatorname{Ln}(1+\sqrt{e^x-1}) + c$
- (۴) $2 \operatorname{Ln}(1+\sqrt{e^x-1}) + c$

پاسخ: گزینه «۲» از تغییر متغیر $u = e^x - 1$ استفاده می‌کنیم. در این صورت: $dx = \frac{2u}{u^2+1} du$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \int \frac{2u}{u^2+1} \frac{du}{u} = 2 \int \frac{du}{u^2+1} = 2 \operatorname{Arctg} u + c = 2 \operatorname{Arctg} \sqrt{e^x-1} + c$$

که مثال ۵۸: حاصل $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ را بیابید.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x} dx$$

پاسخ: ابتدا انتگرال داده شده را به صورت روبرو می‌نویسیم:

حل از تغییر متغیر $u = \operatorname{tg} x$ استفاده می‌کنیم. در این صورت: $du = \frac{dx}{\cos^2 x}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{a^2 + b^2 u^2} = \frac{1}{b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{(\frac{a}{b})^2 + u^2} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b}{a} \operatorname{Arctg} \frac{bu}{a} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{ab} \operatorname{Arctg} \frac{b}{a}$$

نکات مهم انتگرالهای معین

نکته ۵: $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \Rightarrow \int_a^a f(x) dx = \int_b^b f(x) dx = 0$

نکته ۶: اگر $f(x)$ تابعی زوج و پیوسته باشد، آنگاه داریم: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

نکته ۷: اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، آنگاه داریم: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

که مثال ۵۹: حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+2 \sin^2 x}$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) π
- (۳) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
- (۴) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

پاسخ: گزینه «۳» $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x + 3 \sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cot^2 x + 3} \right) \frac{dx}{\sin^2 x}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cot gx = u \rightarrow \frac{-dx}{\sin^2 x} = du \Rightarrow I = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{-du}{u^2 + (\sqrt{3})^2} \xrightarrow{\text{نکته (۵)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + (\sqrt{3})^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{u}{\sqrt{3}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ \left| \begin{array}{cc} x & 0 & \pi \\ u & \infty & -\infty \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg}(+\infty) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg}(-\infty) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

که مثال ۶۰: مقدار انتگرال $\int_{-1}^2 x \cdot 2^{x^2} dx$ کدام است؟

- (۱) -۱
- (۲) ۰
- (۳) ۴
- (۴) $\ln 2 + 1$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته ۷ و توجه به اینکه تابع زیر انتگرال تابعی فرد است پس حاصل انتگرال برابر صفر خواهد شد.

نکته ۸: اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد، آنگاه داریم: $\int_0^T f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx$

نکته ۹: اگر $f(x)$ بر بازه بسته $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد و $c \in [a, b]$ آنگاه داریم: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

که مثال ۶۱: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ آنگاه حاصل $I = \int_0^2 f(x) dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4\sqrt{2}-1}{2}$
- (۲) $\frac{4\sqrt{2}+1}{2}$
- (۳) $\frac{4\sqrt{2}-1}{3}$
- (۴) $\frac{4\sqrt{2}+1}{3}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{x} dx \Rightarrow I = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{2}-1}{3}$$

نکته ۱۰: $\int_b^a \frac{|x|}{x} dx = |a| - |b|$

که مثال ۶۲: حاصل $I = \int_{-2}^2 \frac{|x|}{x} dx$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۵
- (۳) ۰
- (۴) -۵

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نکته فوق داریم:

نکته ۱۱: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \frac{\pi}{4}$$

که مثال ۶۳: حاصل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{1382} x}{\sin^{1382} x + \cos^{1382} x} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$
- (۲) $\frac{\pi}{2}$
- (۳) 1382π
- (۴) 1382π

پاسخ: گزینه «۱» (با توجه به نکته ۱۲)

نکته ۱۳: $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$

که مثال ۶۴: حاصل انتگرال $I = \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}} dx$ کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۰
- (۳) ۱
- (۴) ۳

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته (۱۳) در این تست $a = 2$ می‌باشد. لذا داریم:

نکته ۱۴: اگر در بازه $[a, b]$ $f(x) \leq g(x)$ آنگاه: $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

که مثال ۶۵: اگر $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$, $I_2 = \int_0^1 x dx$ آنگاه کدامیک از روابط زیر صحیح است؟

- (۱) $I_1 > I_2$
- (۲) $I_1 < I_2$
- (۳) $I_1 = I_2$
- (۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

پاسخ: گزینه «۲» در فاصله $[0, 1]$ مقدار $\sqrt{1+x^2}$ از x بزرگتر است و با توجه به نکته فوق حاصل انتگرال $\sqrt{1+x^2}$ نیز از حاصل انتگرال x در این فاصله بزرگتر است.

مثال ۶۶: مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{ny^{n-1}}{1+y} dy$ برابر کدام است؟

- (۱) ∞ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۰

پاسخ: گزینه «۲» قرار می‌دهیم $A_n = \int_0^1 \frac{ny^{n-1}}{1+y} dy$. در این صورت برای محاسبه A_n از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$A_n = \frac{y^n}{1+y} + \int_0^1 \frac{y^n}{(1+y)^2} dy = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{y^n}{(1+y)^2} dy$$

حال برای $y \in [0, 1]$ داریم: $0 \leq \frac{y^n}{(1+y)^2} \leq y^n \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{y^n}{(1+y)^2} dy \leq \int_0^1 y^n dy = \frac{1}{n+1}$

لذا بنا بر قضیه ساندویچ (فشردگی)، $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{y^n}{(1+y)^2} dy = 0$. پس $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{2}$.

نکته ۱۵: $\int_0^n [x] dx = \frac{n(n-1)}{2}$

مثال ۶۷: حاصل $I = \int_0^{1382} [x] dx$ کدام است؟

- (۱) $(1382)^2$ (۲) $(1382)^2$ (۳) 1382×1382 (۴) 955652
 پاسخ: گزینه «۴» با توجه به نکته فوق داریم: $I = \frac{1382(1382)}{2} = 955652$

نکته ۱۶: اگر $f(a-x) = -f(x)$ آنگاه $\int_0^a f(x) dx = 0$ خواهد بود.

مثال ۶۸: اگر K عدد صحیح باشد آنگاه حاصل $I = \int_0^\pi \frac{\sin Kx}{\sin x} dx$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته فوق در این تست $a = \pi$ می‌باشد، لذا داریم:

$$f(a-x) = f(\pi-x) = \frac{\sin(2k\pi - 2kx)}{\sin(\pi-x)} = -\frac{\sin 2kx}{\sin x} = -f(x)$$

مثال ۶۹: اگر $\int_1^{-7} f(x) dx = 7$ و $\int_1^{-7} f(x) dx = 4$ در این صورت حاصل $I = \int_1^{-7} f(x) dx$ کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۳ (۳) -۱۱ (۴) -۳

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته ۹ و ۵ داریم:

$$\int_1^{-7} f(x) dx = \int_1^7 f(x) dx + \int_7^{-7} f(x) dx = -\int_1^7 f(x) dx + \int_7^{-7} f(x) dx = -4 + 7 = 3$$

مثال ۷۰: نشان دهید که $\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$

پاسخ: قرار می‌دهیم $I = \int_0^\pi xf(\sin x) dx$. در این صورت:

$$I = \int_0^\pi (\pi-x)f[\sin(\pi-x)]dx = \int_0^\pi xf(\sin x) dx = \int_0^\pi \pi f(\sin x) dx - I$$

بنابراین $I = \int_0^\pi \pi f(\sin x) dx$ یا $I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$ و چون $f(\sin x) = f(\sin(\pi-x))$ رابطه اخیر را می‌توان به صورت

$$I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

نیز نوشت.

مثال ۷۱: مقدار $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Ln} \tan x dx$ را بیابید.

پاسخ: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Ln}(\tan(\frac{\pi}{2}-x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Ln} \cot x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Ln} \tan x dx = -I$

بنابراین $I = 0$ و در نتیجه $I = 0$.

مثال ۷۲: حاصل $I = \int_0^\pi \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi(\pi-1)}{2}$ (۲) $\frac{\pi(\pi-2)}{2}$ (۳) $\frac{\pi^2}{2}$ (۴) $\frac{\pi(\pi+1)}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که انتگرال را می‌توان به صورت روبرو نوشت:

$$\int_0^\pi \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \sin x} dx$$

حال با استفاده از رابطه $\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$ خواهیم داشت:

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \sin x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{1}{1 + \sin x}) dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}) dx = \pi(x - \tan x + \frac{1}{\cos x}) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \tan x + \frac{1}{\cos x}) - 1] = \pi(\frac{\pi}{2} - 1)$$

محاسبه انتگرالهای شامل براکت (جزء صحیح)

براکت در محاسبه انتگرال معین به عنوان یک ضریب عمل می‌کند و باید فاصله انتگرال‌گیری را به ترتیبی بشکنیم که عدد صحیح برای براکت در آن فاصله بدست آید.

مثال ۷۳: حاصل انتگرال $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [x] \cos x dx$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۲ (۳) $1 - \sin 1$ (۴) $1 + \sin 1$

پاسخ: گزینه «۳» $I = \int_0^1 0 \times \cos x dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \cos x dx = 0 + [\sin x]_1^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \sin 1$

مثال ۷۴: حاصل $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{1}{x} \right] \frac{dx}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» $\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = 1 \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^1 1 \times \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{3}{2}$

مثال ۷۵: مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [4 \sin^2 x] dx$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{5\pi}{4}$ (۴) $\frac{2\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه بازه انتگرال گیری $0 < x < \frac{\pi}{6}$ می باشد، داریم:

$$0 \leq f \sin^2 x < 1 \Rightarrow 0 \leq \sin x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{6}$$

$$1 \leq f \sin^2 x < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{4}$$

$$2 \leq f \sin^2 x < 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{3}$$

$$3 \leq f \sin^2 x < 4 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin x < 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$$

بنابراین:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f \sin^2 x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 0 dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2 dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3 dx = 0 + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{4}\right) + \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{4}$$

پاسخ: گزینه «۱»

مثال ۷۶: حاصل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f \cos^2 x + 1] dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{8}$ (۲) $\frac{5\pi}{6}$ (۳) $\frac{5\pi}{4}$ (۴) π

پاسخ: گزینه «۳»

$$0 < x \leq \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x < 1 \Rightarrow 4 \leq f \cos^2 x + 1 < 5 \Rightarrow [f \cos^2 x + 1] = 4$$

$$\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3 \leq f \cos^2 x + 1 < 4 \Rightarrow [f \cos^2 x + 1] = 3$$

$$\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2 \leq f \cos^2 x + 1 < 3 \Rightarrow [f \cos^2 x + 1] = 2$$

$$\frac{\pi}{3} < x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \cos x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \leq f \cos^2 x + 1 \leq 2 \Rightarrow [f \cos^2 x + 1] = 1$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f \cos^2 x + 1] dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 3 dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2 dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{5\pi}{4}$$

مثال ۷۷: اگر $f(x) = [x] + [-x]$ ، آنگاه حاصل $I = \int_b^a f(x) dx$ کدام است؟

- (۱) $b+a$ (۲) $b-a$ (۳) $\frac{a+b}{2}$ (۴) $a-b$

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow I = \int_b^a (-1) dx = [-x]_b^a = b-a$$

مثال ۷۸: مقدار $\int_1^{n+1} \ln[x] dx$ کدام است؟

- (۱) $\ln(n!)$ (۲) $\ln(n+1)!$ (۳) $\ln \frac{n}{n+1}$ (۴) $\ln \frac{n+1}{n}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\int_1^{n+1} \ln[x] dx = \int_1^2 \ln[x] dx + \int_2^3 \ln[x] dx + \int_3^4 \ln[x] dx + \dots + \int_n^{n+1} \ln[x] dx$$

$$= \int_1^2 \ln 1 dx + \int_2^3 \ln 2 dx + \int_3^4 \ln 3 dx + \dots + \int_n^{n+1} \ln n dx = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n = \ln(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n) = \ln(n!)$$

محاسبه انتگرالهای شامل قدر مطلق

در محاسبه انتگرالهای شامل قدر مطلق باید فاصله ها را طوری بشکنیم تا داخل قدر مطلق مقدارش در آن فاصله مثبت و یا منفی باشد.

مثال ۷۹: حاصل $I = \int_0^2 (|x-1|+1) dx$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$I = \int_0^1 (-x+1+1) dx + \int_1^2 (x-1+1) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

مثال ۸۰: حاصل $I = \int_{-1}^1 |x+|x|| dx$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲»

$$I = \int_{-1}^1 |x+|x|| dx = \int_{-1}^0 |x-x| dx + \int_0^1 |x+x| dx = \int_0^1 2x dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$$

تابع گاما و بتا

تابع گاما به صورت روبرو تعریف می شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad x > 0$$

خواص تابع گاما:

(۱) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

(۲) اگر x عددی طبیعی یا صفر باشد، آنگاه: $\Gamma(x+1) = x!$

(۳) اگر $x < 0$ ، تابع گاما را می توان به صورت $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ تعریف کرد.

(۴) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(۵) $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

(۶) اگر در تعریف تابع گاما به جای e عدد دلخواه مثبت p قرار گیرد، فرمول روبرو به دست می آید:

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} p^{-t} dt = \frac{\Gamma(x)}{(\ln p)^x}$$

(۷) اگر در فرمول تابع گاما به جای t ، st و به جای x از $n+1$ استفاده کنیم، فرمول روبرو به دست می آید:

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

(۸) اگر در فرمول تابع گاما از تغییر متغیر $t = u^2$ استفاده کنیم، فرمول روبرو حاصل می شود:

$$\int_0^{\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \Gamma(x)$$

(۹) اگر در خاصیت (۷) از تغییر متغیر $t = -\ln x$ استفاده می کنیم، با کمی تغییر فرمول زیر حاصل می شود:

$$\int_0^1 x^s (-\ln x)^n dx = \frac{\Gamma(n+1)}{(s+1)^{n+1}}$$

مثال ۸۱: مقادیر $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ و $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

با استفاده از خاصیت (۳) داریم:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-5}{2}+1\right)}{\frac{-5}{2}} = \frac{-2}{5} \Gamma\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{-2}{5} \times \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}+1\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{4}{15} \Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{4}{15} \times \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}+1\right)}{\frac{-1}{2}} = \frac{-8}{15} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-8\pi}{15}$$

که مثال ۸۲: حاصل $\int_0^{\infty} x^{\gamma} \gamma^{-x} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\gamma!}{\text{Ln} \gamma}$
- (۲) $\frac{\gamma!}{(\text{Ln} \gamma)^{\gamma}}$
- (۳) $\frac{\gamma!}{(\text{Ln} \gamma)^{\gamma}}$
- (۴) هیچکدام

$$\int_0^{\infty} x^{\gamma} \gamma^{-x} dx = \frac{\Gamma(\gamma)}{(\text{Ln} \gamma)^{\gamma}} = \frac{\gamma!}{(\text{Ln} \gamma)^{\gamma}}$$

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از خاصیت (۶) داریم:

تابع بتا: تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt \quad m, n > 0$$

برای محاسبه مقدار تابع بتا می‌توان از فرمول زیر استفاده نمود:

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

خواص مهم تابع بتا:

$$\beta(m, n) = \beta(n, m) \quad (1)$$

$$\int_a^b (x-a)^{m-1} (b-x)^{n-1} dx = (b-a)^{m+n-1} \beta(m, n) \quad (2)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\gamma} t \cos^{\delta} t dt = \frac{1}{\gamma} \beta(m, n) \quad (4)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n}} dt = \beta(m, n) \quad (3)$$

که مثال ۸۳: حاصل $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\gamma} x \cos^{\delta} x dx$ را به دست آورید.

پاسخ: با توجه به خاصیت (۴) داریم:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\gamma} x \cos^{\delta} x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\gamma} x \cos^{\delta} x dx = \beta\left(\frac{\gamma}{2}, \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right)} = \frac{\frac{\gamma}{2} \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \times \frac{\delta}{2} \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{15}{16} \pi$$

مشتق‌گیری از انتگرال

اگر $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ باشد آنگاه $F'(x)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F'(x) = \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right)' = v'(x) \cdot f[v(x)] - u'(x) \cdot f[u(x)]$$

که مثال ۸۴: اگر $S(t) = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^{10}}$ در این صورت $S'(0)$ کدام است؟

- (۱) -۱
- (۲) -۲
- (۳) ۱
- (۴) ۲

$$S'(t) = 1 \times \frac{1}{1+(t)^{10}} - (-1) \times \frac{1}{1+(-t)^{10}} = \frac{2}{1+t^{10}} \Rightarrow S'(0) = 2$$

پاسخ: گزینه «۴»

که مثال ۸۵: حاصل $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin \gamma t dt}{x \sin x}$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) -۱

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه در محاسبه حد به حالت $\frac{0}{0}$ برخورد می‌کنیم از روش هسپیتال استفاده می‌کنیم:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin \gamma t dt - \sin \gamma x}{\sin x + x \cos x} \xrightarrow{\text{Hop}} A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\gamma \sin \gamma x + (\gamma x \cos \gamma x)(\gamma x) - \gamma \cos \gamma x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = -\frac{\gamma}{2} = -1$$

که مثال ۸۶: اگر $f(x) = e^{-\cos x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Ln}(\sin x) dx$ باشد آنگاه مقدار $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ کدام است؟

- (۱) e
- (۲) $\text{Ln} \sin 2$
- (۳) صفر
- (۴) $(\sin 2)e^{\frac{\pi}{2}}$

پاسخ: گزینه «۱» توجه داریم جمله دوم تابع $f(x)$ که انتگرال معین است حاصلش عددی ثابت است و مشتق آن برابر صفر است لذا فقط

مشتق جمله اول را محاسبه می‌کنیم: $f'(x) = (\sin x)e^{-\cos x} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\sin \frac{\pi}{2})e^{-\cos \frac{\pi}{2}} = e$

که مثال ۸۷: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin \sqrt{t} dt}{x^{\gamma}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{\gamma}$
- (۲) $\frac{2}{\gamma}$
- (۳) $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$
- (۴) ۰

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin \sqrt{t} dt}{x^{\gamma}} \xrightarrow{\text{Hop}} A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\gamma x \sin x}{\gamma x^{\gamma}} = \frac{2}{\gamma}$$

پاسخ: گزینه «۲»

که مثال ۸۸: اگر $f(x) = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ و $g(x) = \int (1 + \sin^2 t) dt$ در این صورت $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ برابر کدام است؟

- (۱) -۱
- (۲) ۰
- (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۴) $\sin 2$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که: $f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1+(g(x))^2}}$, $g'(x) = (1 + \sin^2(\cos x)) \times (-\sin x)$

بنابراین: $\Rightarrow g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

که مثال ۸۹: در تابع منحنی با ضابطه $\int_0^y \sqrt{2-2\sin^2 z} dz + \int_0^y \cos t dt = 0$ حاصل $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2-2\sin^2 x}}{\cos y}$
- (۲) $-\frac{\sqrt{2-2\sin^2 x}}{\cos y}$
- (۳) $\frac{\sqrt{2-2\sin^2 x}}{\sin y}$
- (۴) $-\frac{\sqrt{2-2\cos^2 x}}{\sin y}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به قاعده مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$\begin{cases} f'_x = \sqrt{2-2\sin^2 x} \\ f'_y = \cos y \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{2-2\sin^2 x}}{\cos y}$$

توضیح: توجه شود که وقتی f'_x را محاسبه می‌کنیم باید y را عدد ثابت فرض کنیم که مشتق آن صفر است لذا نیازی به محاسبه مشتق انتگرال دوم نیست به همین صورت در مورد محاسبه f'_y دیگر نیازی به محاسبه مشتق انتگرال اول نیست.

که مثال ۹۰: در تابع منحنی $y = \int_0^{\text{Ln} t} e^z dz$, $x = \int_1^{\text{Ln} z} \frac{\text{Ln} z}{z} dz$ کدام است؟

- (۱) $\frac{e^t}{\text{Ln} t}$
- (۲) e^t
- (۳) $\frac{t}{\text{Ln} t}$
- (۴) $\frac{t^t}{\text{Ln} t}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{t} e^{\text{Ln} t}}{\frac{t}{\text{Ln} t}} = \frac{t}{\text{Ln} t}$$

پاسخ: گزینه «۳»

مثال ۹۱: در تابع منحنی $x = \int_0^{\sin t} \arcsin z dz$ ، $y = \int_0^{\sqrt{t}} \frac{\sin z^2}{z} dz$ ، y'_x کدام است؟

$\frac{\sin t}{t\sqrt{t}}$ (۱) $\frac{\text{tgt}}{t^2}$ (۲) $\frac{\text{tgt}}{t\sqrt{t}}$ (۳) $\frac{\text{cost}}{t\sqrt{t}}$ (۴)

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{\sin t}{\sqrt{t}}}{\text{cost} \cdot \arcsin(\sin t)} = \frac{\text{tgt}}{t^2}$

پاسخ: گزینه «۳»

مثال ۹۲: فرض کنید $I(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos \beta x dx$ تابعی از پارامتر حقیقی β باشد. در این صورت $I'(\beta)$ برابر کدام است؟

$-I(\beta)$ (۱) $I(\beta)$ (۲) $2\sqrt{\pi}$ (۳) $2\sqrt{\pi}$ (۴)

$I'(\beta) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-x^2} \cos \beta x) dx = \int_0^{\infty} -x e^{-x^2} \sin \beta x dx$

پاسخ: گزینه «۱»

برای محاسبه انتگرال اخیر از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

$\begin{cases} u = \sin \beta x \Rightarrow du = \beta \cos \beta x \\ -x e^{-x^2} dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{-x^2} \end{cases}$

بنابراین:

$I'(\beta) = \int_0^{\infty} -x e^{-x^2} \sin \beta x dx = \frac{1}{2} e^{-x^2} \sin \beta x \Big|_0^{\infty} - \frac{\beta}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos \beta x dx \Rightarrow I'(\beta) = -\frac{\beta}{2} I(\beta) \Rightarrow I'(\beta) = -\frac{\beta}{2} I(\beta) = -I(\beta)$

مثال ۹۳: شیب خط قائم بر منحنی تابع $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 2t + 2}$ در نقطه‌ای بطول $x = -1$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۱) 1 (۲) -1 (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴)

$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = f'(-1) = 1 \Rightarrow m_{\text{قائم}} = -1$

پاسخ: گزینه «۳»

تعمیم فرمول مشتق انتگرال

$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt = f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$

مثال ۹۴: اگر $f(x) = \int_0^x \frac{\cos(tx)}{t} dt$ آنگاه $\frac{\partial f}{\partial x}$ بیابید.

پاسخ: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cos(x \cdot x)}{x} \times 1 + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cos(tx)}{t} \right) dt = \frac{\cos x^2}{x} + \int_0^x \frac{-t \sin(tx)}{t} dt = \frac{\cos x^2}{x} - \int_0^x \sin(tx) dt$

$\frac{\cos x^2}{x} + \frac{1}{x} \cos(tx) \Big|_0^x = \frac{2 \cos x^2}{x} - \frac{1}{x}$

انتگرالهای غیرعادی (ناسره)

تعریف: انتگرالهایی که یکی یا هر دو حد انتگرالگیری بی‌نهایت باشد و یا تابع زیر انتگرال در بازه انتگرالگیری بیکران باشد را انتگرالهای ناسره (غیرعادی) می‌نامند.

۱- انتگرال با حدود بی‌نهایت: اگر تابع $f(x)$ به ازای $a \leq x < \infty$ پیوسته باشد در این صورت برای محاسبه $I = \int_a^{\infty} f(x) dx$ داریم:

$I = \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ (۱)

اگر حد سمت راست تساوی موجود و متناهی باشد آنگاه انتگرال را همگرا و در غیر اینصورت انتگرال را واگرا می‌نامند. به همین صورت روابط زیر را نیز داریم:

$I = \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ (۲)

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$ (۳)

مثال ۹۵: حاصل $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ کدام است؟

$\frac{\pi}{2}$ (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴)

پاسخ: گزینه «۲»

$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\text{Arctg} b - \text{Arctg} 0) = \frac{\pi}{2}$

مثال ۹۶: حاصل $I = \int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-2)^2}}$ کدام است؟

2 (۱) c (۲) -1 (۳) 1 (۴)

پاسخ: گزینه «۴»

$I = \int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-2)^2}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-2)^2}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-(x^2-2)^{-\frac{1}{2}} \right]_2^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{\sqrt{b^2-2}} + 1 \right] = 1$

مثال ۹۷: حاصل $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$ کدام است؟

$\frac{\pi}{2}$ (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) π (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه «۳»

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-3)^2+1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c \frac{dx}{(x-3)^2+1} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b \frac{dx}{(x-3)^2+1}$

می‌توانیم c را هر نقطه‌ای در بازه $(-\infty, +\infty)$ انتخاب کنیم برای راحتی در محاسبات $c = 3$ انتخاب می‌کنیم.

$I = \lim_{a \rightarrow -\infty} [\text{Arctg}(x-3)]_a^3 + \lim_{b \rightarrow +\infty} [\text{Arctg}(x-3)]_3^b$

$\Rightarrow I = -\lim_{a \rightarrow -\infty} [\text{Arctg}(a-3)] + \lim_{b \rightarrow +\infty} [\text{Arctg}(b-3)] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

آزمون مقایسه

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ به ازای تمام مقادیر $x \geq a$ معین باشند و $0 \leq f(x) \leq g(x)$ آنگاه از همگرایی انتگرال $\int_a^{\infty} g(x) dx$ می‌توان همگرایی

انتگرال $\int_a^{\infty} f(x) dx$ را نتیجه گرفت و از واگرایی انتگرال $\int_a^{\infty} f(x) dx$ می‌توان واگرایی انتگرال $\int_a^{\infty} g(x) dx$ را نتیجه گرفت.

مثال ۹۸: واگرایی یا همگرایی انتگرال $I = \int_1^{\infty} \frac{\cos x + 2}{\sqrt{x}} dx$ را بررسی کنید.

پاسخ: با توجه به نامساوی $\frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}}$ و بررسی انتگرال $I_1 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ داریم:

$I_1 = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [2\sqrt{x}]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (2\sqrt{b}) - 2 = +\infty$

با توجه به اینکه انتگرال I_1 واگراست لذا با توجه به توضیح فوق انتگرال I نیز واگراست.

نکته ۱۷: در محاسبه انتگرال $I = \int_a^{+\infty} f(x) dx$ که $f(x) > 0$ ، اگر بتوانیم وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $f(x)$ را هم‌ارز با عبارت $\frac{A}{x^n}$ قرار دهیم، آنگاه داریم:

- (۱) اگر $n > 1$ انتگرال همگراست.
- (۲) اگر $n \leq 1$ انتگرال واگراست.

مثال ۹۹: واگرایی و یا همگرایی انتگرال $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sin^2 x}$ را بررسی کنید.

پاسخ: برای x های بزرگ تابع $f(x) = \frac{1}{x + \sin^2 x}$ هم‌ارز $\frac{1}{x}$ می‌باشد لذا با توجه به نکته فوق ($n=1$) انتگرال واگراست.

همگرایی مطلق و همگرایی مشروط

فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله $[a, \infty)$ تعریف شده و انتگرال ناسره و $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ همگرا باشد، آنگاه انتگرال $\int_a^{\infty} f(x) dx$ نیز همگراست و در این حالت می‌گوییم انتگرال همگرایی مطلق است و رابطه $\int_a^{\infty} f(x) dx < \int_a^{\infty} |f(x)| dx$ برقرار است.

ولی اگر $\int_a^{\infty} f(x) dx$ همگرا باشد ولی $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ واگرا باشد، آنگاه انتگرال را همگرایی مشروط می‌گوییم.

مثال ۱۰۰: ثابت کنید $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ همگرایی مشروط است.

پاسخ: ابتدا انتگرال داده شده را به صورت روبرو می‌نویسیم:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

انتگرال $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ یک انتگرال عادی است و بنابراین همگراست (زیرا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$) برای محاسبه $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ از روش جز به جز استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2} dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{-\cos x}{x} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

و انتگرال اخیر همگرایی مطلق است، زیرا $\frac{1}{x^2} \leq \frac{|\cos x|}{x^2}$ و $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ همگراست. از بحث فوق نتیجه می‌شود $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ همگراست. حال ثابت می‌کنیم $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ یا به عبارتی $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ واگراست.

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x}$$

کافی است نشان دهیم $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx$ واگراست (به عهده دانشجو). و آنگاه طبق آزمون مقایسه انتگرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ واگراست.

توضیح: انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ به انتگرال دیریکله معروف است و مقدار آن برابر $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

مثال ۱۰۱: همگرایی یا واگرایی انتگرالهای زیر را بررسی کنید.

(الف) $\int_1^{\infty} \frac{x + \sqrt{x+1}}{x^2 + \sqrt{x^2+1}} dx$ (ب) $\int_1^{\infty} \frac{1 - 4 \sin 2x}{x^2 + \sqrt{x}} dx$ (ج) $\int_1^{\infty} (1 - \cos \frac{2}{x}) dx$

(الف) وقتی $x \rightarrow \infty$ ، عبارت $\frac{x + \sqrt{x+1}}{x^2 + \sqrt{x^2+1}}$ هم‌ارز $\frac{1}{x}$ می‌باشد، و بنابراین انتگرال واگراست.

(ب) توجه کنید که علامت عبارت $\frac{1 - 4 \sin 2x}{x^2 + \sqrt{x}}$ به ازای x های مختلف در فاصله $[1, +\infty)$ عوض می‌شود. بنابراین انتگرال

را بررسی می‌کنیم. چون $\frac{|1 - 4 \sin 2x|}{x^2 + \sqrt{x}} < \frac{5}{x^2}$ ، و انتگرال $\int_1^{\infty} \frac{5 dx}{x^2}$ همگراست، پس انتگرال

نیز همگراست، و در نتیجه انتگرال اولیه همگرایی مطلق خواهد بود.

(ج) وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $\frac{2}{x} \rightarrow 0$ و بنابراین $1 - \cos \frac{2}{x} \sim \frac{(\frac{2}{x})^2}{2} = \frac{2}{x^2}$ ، و چون انتگرال $\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2} dx$ همگراست، پس انتگرال اصلی نیز همگرا خواهد بود.

۲- انتگرال با توابع بیکران:

شرایط تابع $f(x)$ را در بازه $[a, b]$ بررسی می‌کنیم:

(الف) اگر $f(x)$ فقط در نقطه $x = a$ بیکران باشد:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

(ب) اگر $f(x)$ فقط در نقطه $x = b$ بیکران باشد:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$$

(ج) اگر $f(x)$ در نقطه $x = c$ داخل فاصله $[a, b]$ بیکران باشد:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx$$

در تمامی حالات فوق در صورت وجود حدود سمت راست انتگرال همگرا و در غیر اینصورت واگراست.

مثال ۱۰۲: حاصل $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$
- (۲) انتگرال واگراست
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲» تابع $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ بیکران است لذا داریم:

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right]_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{3}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\epsilon}{4} \right) \right] = \infty \Rightarrow$$

انتگرال واگراست.

نکته ۱۸: انتگرال $I = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ برای $n < 1$ همگرا و برای $n \geq 1$ واگراست.

نکته ۱۹: انتگرال $I = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ برای $n < 1$ همگرا و برای $n \geq 1$ واگراست.

مثال ۱۰۳: حاصل $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ کدام است؟

- (۱) -۶
- (۲) ۰
- (۳) انتگرال واگراست
- (۴) ۶

پاسخ: گزینه «۳»

$$I = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$

با توجه به نکات (۱۸) و (۱۹) هر دو انتگرال واگرا هستند. ($n = \frac{2}{2} > 1$)

کمال مثال ۱۰۴: مقدار انتگرال $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ چقدر است؟

- (۱) ۲
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) انتگرال واگراست.
- (۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» ✓

$$\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \underbrace{\frac{-\ln x}{x}}_{\text{صفر}} \Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x} \Big|_1^{\infty} = 1$$

کمال مثال ۱۰۵: حاصل انتگرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^2 + 1} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) انتگرال واگراست.

پاسخ: گزینه «۴» وقتی $x \rightarrow \infty$ داریم $\frac{x - \sin x}{x^2 + 1} \sim \frac{1}{x}$ و چون $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x}$ واگراست، پس انتگرال مورد نظر نیز واگراست.

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱- به ازای چه مقدار $x \in [2, 3]$ تساوی $\int_1^x |t|^2 dt = 2(x-1)$ (که در آن | | علامت جزء صحیح است)، برقرار است؟ (عمران - سراسری ۷۸)

- (۱) $x = \frac{5}{2}$
- (۲) $x = \frac{7}{2}$
- (۳) $x = \frac{8}{3}$
- (۴) $x = 3$

۲- به ازای چه مقدار C، انتگرال $\int_1^{\infty} (\frac{x}{2x^2 + 2c} - \frac{c}{x+1}) dx$ همگرا است؟ (عمران - سراسری ۷۸)

- (۱) $C = -\frac{1}{2}$
- (۲) $C = \frac{1}{2}$
- (۳) $C = 0$
- (۴) $C = 1$

۳- حاصل $\int_1^e \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$ کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{e}{2} - 1$
- (۲) $2e - 1$
- (۳) $\frac{e}{2} + 1$
- (۴) $2e + 1$

۴- حاصل $\int_1^e \frac{dx}{2x^2 + x}$ کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$
- (۴) $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{4}$

۵- انتگرال تابع $y = x^2 \times e^{x^2}$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۸)

(۱) $\int x^2 \times e^{x^2} dx = \frac{1}{4} e^{x^2} + c$

(۲) $\int x^2 \times e^{x^2} dx = \frac{1}{3} x^2 \cdot e^{x^2} + c$

(۳) $\int x^2 \times e^{x^2} dx = \frac{x^3}{3} e^{x^2} + c$

(۴) $\int x^2 \times e^{x^2} dx = \frac{1}{3} x^2 \cdot e^{x^2} + c$

۶- تابع اولیه $I = \int \frac{\ln x}{x(1 + \ln x)} dx$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۸)

- (۱) $\ln(\frac{1 + \ln x}{x}) + c$
- (۲) $\ln|\frac{x}{1 + \ln x}| + c$
- (۳) $\ln(x(1 + \ln x)) + c$
- (۴) $\ln(\ln x) + \ln x + 1 + c$

۷- مطلوب‌بست محاسبه انتگرال $y = \int_{-1}^2 \sqrt{|1-x|} |x| dx$ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۸)

- (۱) $y = 3/00676$
- (۲) $y = 3/507$
- (۳) $y = 4/004$
- (۴) $y = 5/3$

۸- مقدار انتگرال $\int_1^2 \frac{dx}{x-2}$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۸)

- (۱) صفر
- (۲) $\ln|x-2|$
- (۳) $\ln 3 - \ln 2$
- (۴) نامتناهی

۹- تابع اولیه تابع $f(x) = \int \frac{dx}{x(1+x)^2}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۸)

(۱) $\ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{1}{2(x+1)} + c$

(۲) $\ln(x) - 2\ln|x+1| + \frac{\ln x}{2(1+x)} + c$

(۳) $\ln|x| - \ln|1+x| + \frac{1}{1+x} + c$

(۴) $\ln(x) - 2\frac{x+1}{\ln(x+1)} + c$

۱۰- حد تابع $y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^x e^{t^2} dt}{\sin(x)}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۸)

- (۱) $y = 1$
- (۲) $y = 2$
- (۳) $y = 3$
- (۴) $y = 4$

۱۱- اگر $f''(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته و $f(a) = f(b) = 0$ ، حاصل $\int_a^b x f''(x) dx$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۸)

- (۱) $af'(a) - bf'(b)$
- (۲) $af'(b) - bf'(a)$
- (۳) $bf'(b) - af'(a)$
- (۴) $bf'(a) - af'(b)$

ک ۱۲- حاصل $\int \coth x dx$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - برابری ۷۸)

(۱) $\ln(e^x - 1) + 1$ (۲) $\ln(e - 1) + 1$ (۳) $\ln(e + 1) - 1$ (۴) $\ln(e^x + 1) - 1$

ک ۱۳- حاصل $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - برابری ۷۸)

(۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$

ک ۱۴- حاصل $\int_1^e x \ln x dx$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - برابری ۷۸)

(۱) $\frac{1}{2}(e^x - 1)$ (۲) $\frac{1}{2}(e^x + 1)$ (۳) $\frac{1}{4}(e^x - 1)$ (۴) $\frac{1}{4}(e^x + 1)$

ک ۱۵- مقدار $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin x} dx$ کدام است؟

(آمار - برابری ۷۸)

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۳

ک ۱۶- حاصل $\int x^{2x} (\ln x + 1) dx$ کدام است؟

(آمار - برابری ۷۸)

(۱) $\frac{1}{4} x^{4x} + c$ (۲) $4x \ln x + c$ (۳) $4x e^{4x \ln x} + c$ (۴) $\frac{1}{4} x (\ln x + 1) + c$

ک ۱۷- حاصل $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx$ کدام است؟

(آمار - برابری ۷۸)

(۱) ۰ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) $4\sqrt{2} - 4$

ک ۱۸- هرگاه $\int_1^x f(x) dx = 3$ ، آنگاه مقدار $\int_{\frac{1}{x}}^1 f(\frac{1}{x}) dx$ کدام است؟

(آمار - برابری ۷۸)

(۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) $\frac{3}{4}$

ک ۱۹- اگر $f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \sin^{17} t} dt$ مقدار $(f^{-1})'(0)$ کدام است؟

(آمار - برابری ۷۸)

(۱) ۰ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴) ۱

ک ۲۰- اگر f تابعی پیوسته باشد، حاصل $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$ برابر کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - برابری ۷۸)

(۱) $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$ (۲) $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$ (۳) $-\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$ (۴) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$

ک ۲۱- حاصل انتگرال $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - برابری ۷۸)

(۱) $4 - \ln 9$ (۲) $9 - \ln 4$ (۳) $4 + \ln 9$ (۴) $9 + \ln 4$

ک ۲۲- حاصل $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1 - x^2}$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - برابری ۷۸)

(۱) $-\ln 2$ (۲) $-\ln 3$ (۳) $\ln 2$ (۴) $\ln 3$

ک ۲۳- حاصل $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - برابری ۷۸)

(۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi}{9}$ (۴) $\frac{\pi}{12}$

ک ۲۴- حاصل $\int x e^{2x} dx$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - برابری ۷۸)

(۱) $\frac{1}{4}(xe^x + 1)$ (۲) $\frac{1}{4}(xe^x - 1)$ (۳) $\frac{1}{4}(xe^x + 1)$ (۴) $\frac{1}{4}(xe^x - 1)$

(عمران - برابری ۷۹)

ک ۲۵- به ازاء چه مقدار a ، انتگرال $\int_1^x \frac{dx}{x(\ln x)^a}$ همگراست؟

(۱) $|a| = 1$ (۲) $a > 1$ (۳) $a < 1$ (۴) هر مقدار a

(مکانیک - برابری ۷۹)

ک ۲۶- مقدار انتگرال $\int_0^{\pi} \sin(nx) f''(x) dx$ کدام است؟ (n عدد صحیح و $f''(x)$ روی $[0, \pi]$ پیوسته است)

(۱) $nf(\pi) + (-1)^n n f'(\pi) - n^2 \int_0^{\pi} \sin(nx) f''(x) dx$ (۲) $nf(0) + (-1)^{n+1} n f'(\pi) - n^2 \int_0^{\pi} \sin(nx) f''(x) dx$

(۳) $nf(0) + (-1)^n n f(\pi) - n^2 \int_0^{\pi} \sin(nx) f''(x) dx$ (۴) $nf(0) + (-1)^{n+1} n f'(\pi) - n^2 \int_0^{\pi} \sin(nx) f''(x) dx$

(مکانیک - برابری ۷۹)

ک ۲۷- با فرض $p < q$ ، انتگرال $\int \frac{dx}{x^p + x^q}$ به ازاء چه مقادیری از p و q همگرا است؟

(۱) $|p| \leq 1$ (۲) $q \leq 1$ (۳) $|q| < 2$ (۴) $p \leq 1 < q$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - برابری ۷۹)

ک ۲۸- هرگاه $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$ آنگاه $f(4) - f(2) < A$ عدد A کدام است؟

(۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{1}{5}$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - برابری ۷۹)

ک ۲۹- $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\sin x) \cot x dx$ برابر کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{2}(\ln 2)^2$ (۲) $-\frac{1}{2} \ln 2$ (۳) $\frac{1}{2} \ln 4$ (۴) $\frac{1}{2} \ln 2$

ک ۳۰- اگر $\int \frac{f(x)}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\sec x}{1 + \tan x} + C$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - برابری ۷۹)

(۱) $-\cos x$ (۲) $\cos x$ (۳) $-\sin x$ (۴) $\sin x$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - برابری ۷۹)

ک ۳۱- حاصل $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ کدام است؟

(۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) ۰

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - برابری ۷۹)

ک ۳۲- مقدار انتگرال $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$ چقدر است؟

(۱) $\sqrt{\pi}$ (۲) $\sqrt{2\pi}$ (۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (۴) $2\sqrt{\pi}$

(مهندسی هسته‌ای - برابری ۷۹)

ک ۳۳- حاصل $\int \frac{x dx}{-1 - x^2 + x^2 + 1}$ کدام است؟

(۱) ۰ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\pi - 1$

(مهندسی هسته‌ای - برابری ۷۹)

ک ۳۴- برای کدام است $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} \int_2^x \sqrt{20-t^2} dt$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۴

۳۵- حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} e^{-x^2} dx$ برابر کدام است؟

- (۱) $2e$ (۲) e (۳) $2e^{-1}$ (۴) e^{-1}

(آمار - سراسری ۷۹)

۳۶- مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt$ کدام است؟

- (۱) 60 (۲) $\frac{1}{60}$ (۳) 360 (۴) $\frac{1}{360}$

(عمران - سراسری ۸۰)

۳۷- به ازای چه مقدار c ، انتگرال $\int_1^{\infty} (\frac{x}{2x^2+2c} - \frac{c}{x+1}) dx$ همگرا است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۸- تابع f رابطه $f(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} dt, x \geq 0$ را تعریف شده است (لازم نیست این انتگرال را محاسبه کنید) و تابع g معکوس f می‌باشد. کدام گزینه برقرار است؟

(عمران - سراسری ۸۰)

- (۱) $g'(x) = g^2(x)$ (۲) $g'(x) = \frac{1}{2}g^2(x)$ (۳) $g'(x) = \frac{2}{3}g^2(x)$ (۴) $g'(x) = \frac{3}{2}g^2(x)$

(عمران - آزاد ۸۰)

۳۹- مقدار انتگرال روبرو چیست؟ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

- (۱) $\csc^{-1}|x| + c$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + c$ (۳) $\sec^{-1}|x| + c$ (۴) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x} + c$

(عمران - آزاد ۸۰)

۴۰- انتگرال روبرو را به دست آورید؟ $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$

- (۱) $\frac{9}{2}[\sin^{-1} \frac{x}{3} + \frac{x\sqrt{9-x^2}}{9}] + c$ (۲) $\frac{9}{2}[\sin^{-1} \frac{x}{3} - \frac{x\sqrt{9-x^2}}{9}] + c$
 (۳) $\frac{3}{2}[\sin^{-1} \frac{x}{3} - \frac{x\sqrt{9-x^2}}{3}] + c$ (۴) $\frac{3}{2}[\sin^{-1} \frac{x}{3} + \frac{x\sqrt{9-x^2}}{3}] + c$

(عمران - آزاد ۸۰)

۴۱- انتگرال بگیرد: $\int \sec \theta d\theta$

- (۱) $\ln|\sec \theta + \tan \theta| + c$ (۲) $\ln|\csc \theta + \tan \theta| + c$ (۳) $\ln \sqrt{\frac{1-\sin \theta}{1+\sin \theta}} + c$ (۴) $\ln(\frac{1-\sin \theta}{1+\sin \theta})^2 + c$

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۰)

۴۲- مقدار $\int_1^e (\ln x)^n dx$ برابر است با:

- (۱) $n!$ (۲) $(-1)^n (n-1)!$ (۳) $(n-1)!$ (۴) $(-1)^n n!$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

۴۳- مقدار انتگرال $\int_{-2}^2 x(2x^2) dx$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) 0 (۳) 4 (۴) $1 + \ln 2$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

۴۴- مقدار انتگرال $I = \int_1^2 \frac{x+2x^2}{\sqrt{x^2+2x^2+5}} dx$ برابر است با:

- (۱) $2-\sqrt{2}$ (۲) $2-\sqrt{2}-1$ (۳) $3-\sqrt{2}$ (۴) $5-2\sqrt{2}$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

۴۵- اگر $F(\theta) = \int_0^{\cos \theta} \frac{d\theta}{1+\sin \theta}$ حاصل $F(\theta)$ با شرط $F(0) = 0$ کدام است؟

- (۱) $\ln(2-\cos \theta)$ (۲) $\ln(1+\sin \frac{\theta}{2})$ (۳) $\ln(1-\sin \theta)$ (۴) $\ln(1+\sin \theta)$

۴۶- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) 1 (۴) $\frac{2}{3}$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) 1 (۴) $\frac{2}{3}$

۴۷- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$

۴۸- انتگرال $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ چگونه است؟

- (۱) واگرا - حد پایین صفر (۲) واگرا - حد بالا $\frac{1}{e}$ (۳) همگرا - حد بالا $1 + \frac{1}{e}$ (۴) همگرا - حد بالا $\frac{1}{e}$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$

۴۹- حاصل $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$

۵۰- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{Arctg} x dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$

۵۱- $f(x) = \int_0^x e^{t^2} \sqrt{1+9t^2} dt, g(x) = x^n e^{2x}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f'(x)}{g(x)} \right| = 3$ ، آنگاه n برابر است با:

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

(آمار - سراسری ۸۰)

۵۲- اگر $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t \cos t dt$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$ برابر است با:

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

(ریاضی - سراسری ۸۰)

۵۳- مقدار $\int_0^{+\infty} e^{-mx} dx$ ، $m > 0$ ، برابر است با:

- (۱) $-\frac{1}{m^2}$ (۲) $-\frac{1}{m}$ (۳) $\frac{1}{m^2}$ (۴) $\frac{1}{m}$

(ریاضی - سراسری ۸۰)

۵۴- اگر $A = \int_1^e \frac{2^x}{x} dx$ ، مقدار $\int_1^e \frac{2^x}{x^2} dx$ کدام است؟

- (۱) $2 + A \ln 2$ (۲) $1 + \ln A$ (۳) $A \ln 2$ (۴) $A + \ln 2$

(ریاضی - سراسری ۸۰)

۵۵- حاصل $\int x\sqrt{x+1} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}(\sqrt{2+1})$ (۲) $\frac{4}{15}(\sqrt{2+1})$ (۳) $\frac{2}{15}(\sqrt{2+1})$ (۴) $\frac{1}{3}(\sqrt{2+1})$

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۰)

۵۶- حاصل $\int \frac{x^2+1}{x+1} dx$ کدام است؟

- (۱) $\ln 3$ (۲) $2 \ln 3$ (۳) $3 \ln 3$ (۴) $2 \ln 2$

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۰)

۵۷- مقدار انتگرال $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^2+2x^2+4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$ (۳) $\frac{\pi\sqrt{2}}{36}$ (۴) $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$

(مهندسی معدن، اکتشاف معدن - سراسری ۸۰)

که ۵۸- در مورد انتگرال نامتعارف (غیرعادی) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x} dx$ کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

- (۱) این انتگرال واگراست.
 (۲) این انتگرال همگراست و مقدار همگرایی صفر است.
 (۳) این انتگرال همگراست و مقدار همگرایی یک است.
 (۴) این انتگرال همگراست و مقدار همگرایی $\frac{1}{e}$ است.

(مهندسی معدن، استخراج معدن - سراسری ۸۰)

که ۵۹- مقدار انتگرال $\int \frac{x dx}{x^2 + 2x^2 + 4}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$ (۳) $\frac{\pi\sqrt{3}}{26}$ (۴) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

(مهندسی معدن، استخراج معدن - سراسری ۸۰)

که ۶۰- انتگرال $I = \int x^2 e^x dx$ برابر کدام است؟

(۱) e (۲) $2e$ (۳) $e-1$ (۴) $e-2$

(برق - آزاد ۸۰)

که ۶۱- مقدار انتگرال $\int \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$ برابر است با:

(۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi^2}{8}$ (۳) $\frac{\pi^2}{2}$ (۴) $\frac{\pi^2}{4}$

(برق - آزاد ۸۰)

که ۶۲- مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ برابر است با:

(۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{8}$ (۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{16}$ (۴) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

(برق - آزاد ۸۰)

که ۶۳- مقدار $\int_0^1 \sin(tx^2) dx$ برابر است با:

(۱) $\int_0^1 x^2 \cos(tx^2) dx + 2t \sin t^2$ (۲) $\int_0^1 x \cos(tx^2) dx + 2t \sin t^2$
 (۳) $\int_0^1 x \cos(tx^2) dx + 2t \sin t$ (۴) $\int_0^1 x \cos(tx^2) dx + 2t \sin t^2$

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

که ۶۴- حاصل انتگرال معین $\int_1^e \frac{dx}{x-3}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\ln|x-3|$ (۳) نامتناهی (۴) $\ln 4 - \ln 2$

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

که ۶۵- حاصل انتگرال معین $\int (3x+1)d(x^2-1)$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۱

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

که ۶۶- حاصل انتگرال $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ کدام است؟

(۱) π (۲) 2π (۳) ۱ (۴) صفر

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۰)

که ۶۷- حاصل انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^p x dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{12}{15} - \frac{\pi}{4}$ (۲) $3 + \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{11}{15} - \frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{9}{15} + \frac{\pi}{4}$

(عمران - سراسری ۸۱)

که ۶۸- به ازای چه مقدار c ، انتگرال $\int_1^{\infty} (\frac{cx}{2x^2+1} - \frac{1}{x+1}) dx$ همگراست؟

(۱) $c=2$ (۲) $c=1$ (۳) $c=-2$ (۴) $c=-1$

که ۶۹- فرض کنید g تابعی همه جا پیوسته باشد، و $\int_0^1 g(t) dt = 1$ ، $f(x) = \int_0^x (x-t)^2 g(t) dt$ مقدار $f''(1)$ کدام است؟

- (عمران - سراسری ۸۱)
 (۱) $f''(1) = -1$ (۲) $f''(1) = -2$ (۳) $f''(1) = 1$ (۴) $f''(1) = 2$

که ۷۰- انتگرال $\int x^2 \sin x dx$ را بیابید.

(۱) $-x^2 \cos x - 2x \sin x + 2 \cos x + C$
 (۲) $-x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \cos x + C$
 (۳) $-x^2 \cos x - 2x \sin x + 2 \cos x + C$
 (۴) $-x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \cos x + C$

که ۷۱- انتگرال $\int \frac{\cot \theta d\theta}{1 + \sin^2 \theta}$ را بیابید.

(۱) $\ln|\sin \theta| - \frac{1}{2} \ln|1 + \sin^2 \theta| + C$
 (۲) $\ln|\cos \theta| - \frac{1}{2} \ln|1 + \sin^2 \theta| + C$
 (۳) $\ln|\cos \theta| + \frac{1}{2} \ln|1 + \sin^2 \theta| + C$
 (۴) $\ln|1 + \sin^2 \theta| + C$

که ۷۲- انتگرال $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x}}$ را بیابید.

(۱) $\frac{4}{5} x^{5/4} - x + \frac{4}{3} x^{3/4} - 2x^{1/2} + 4x^{1/4} - 4 \ln|1 + x^{1/4}| + C$
 (۲) $\sin^{-1}(x^2 - \sqrt{x}) + C$
 (۳) $\ln|\sin^{-1} \sqrt{x}| + C$
 (۴) $\frac{2}{3} x^{3/4} - 2x^{1/2} + \ln|x^2 - \sqrt{x}| + C$

که ۷۳- $\int \frac{x^2}{x^6 + 64} dx$ برابر است با:

(۱) $\frac{\pi}{96}$ (۲) $\frac{\pi}{12}$ (۳) $\frac{\pi}{32}$ (۴) $\frac{2\pi}{3}$

که ۷۴- مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |x \cos x| dx$ برابر است با:

(۱) $1 - \frac{1}{2} \sin 1$ (۲) $1 - \sin 1$ (۳) $1 + \sin 1$ (۴) $1 + \frac{1}{2} \sin 1$

که ۷۵- مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \sqrt{x} dx$ برابر است با ...

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

که ۷۶- مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$ برابر است با ...

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲

که ۷۷- حاصل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x} \sin x dx$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)

(۱) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} + 1)$ (۲) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ (۳) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ (۴) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} + 1)$

۷۸- حاصل $\int_2^9 \frac{dx}{9-x^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6} \ln \frac{7}{3}$
- (۲) $-\frac{1}{6} \ln \frac{7}{3}$
- (۳) $\frac{1}{6} \ln \frac{5}{3}$
- (۴) $-\frac{1}{6} \ln \frac{3}{5}$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری (۸۱))

۷۹- حاصل $\int_{-1}^2 (x+|x|)dx$ کدام است؟

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری (۸۱))

۸۰- حاصل $\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$
- (۲) $\frac{\pi}{3} - \sqrt{2}$
- (۳) $\frac{\pi}{2} - \sqrt{3}$
- (۴) $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری (۸۱))

۸۱- اگر $F(x) = \int f(x)dx$ حاصل $\int f(1-2x)dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2} F(1-2x)$
- (۲) $-\frac{1}{2} F(1-2x)$
- (۳) $-2F(1-2x)$
- (۴) $F(1-2x)$

(ریاضی - سراسری (۸۱))

۸۲- حاصل $I = \int_1^{+\infty} e^{-x^2+2x} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{2e}$
- (۳) $e\sqrt{\pi}$
- (۴) $e\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(ریاضی - سراسری (۸۱))

۸۳- مقدار مشتق عبارت $\int_{2x}^{2x^2+2} \sqrt{\cos t} dt$ در $x=0$ کدام است؟

- (۱) -۳
- (۲) -۲
- (۳) ۰
- (۴) ۳

(ریاضی - سراسری (۸۱))

۸۴- اگر $f(x) = \int \frac{2+e^{-t}}{1+\tan^2 t} dt$ مقدار $(f^{-1})'(0)$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{3}$
- (۳) ۲
- (۴) $(f^{-1})'(0)$ وجود ندارد.

(ریاضی - سراسری (۸۱))

۸۵- حاصل $\int_1^2 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{16}$
- (۲) $\frac{\pi}{8}$
- (۳) $\frac{\pi}{12}$
- (۴) $\frac{\pi}{4}$

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری (۸۱))

۸۶- مقدار انتگرال معین $\int_2^5 \frac{dx}{x^2+x}$ کدام است؟

- (۱) $\ln(\frac{5}{3})$
- (۲) $\ln(\frac{4}{5})$
- (۳) $\ln(\frac{3}{5})$
- (۴) $\ln(\frac{5}{4})$

(مهندسی معدن، اکتشاف معدن و استخراج معدن - سراسری (۸۱))

۸۷- مقدار انتگرال $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x}$ کدام است؟

- (۱) e
- (۲) e^2
- (۳) ۲
- (۴) ۱

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد (۸۱))

۸۸- مقدار انتگرال $\int_{-1}^2 (x-1)(2x+3)dx$ برابر است با:

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $-\frac{2}{3}$
- (۳) $-\frac{2}{2}$
- (۴) $\frac{2}{2}$

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد (۸۱))

۸۹- مقدار انتگرال $\int_{-1}^2 \frac{xdx}{x+2}$ برابر است با:

- (۱) $4 - 2\ln 2$
- (۲) $4 + 2\ln 2$
- (۳) $2 + 4\ln 2$
- (۴) $2 - 4\ln 2$

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد (۸۱))

۹۰- مقدار انتگرال $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{\ln 2}$
- (۲) $\frac{1}{\ln 2}$
- (۳) $\frac{1}{2\ln 2}$
- (۴) $2\ln 2$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد (۸۱))

۹۱- مقدار $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{1+x \tan x}$ کدام است؟

- (۱) $\ln \frac{\pi}{2}$
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) $\frac{\pi}{e^2}$

(علوم کامپیوتر - سراسری (۸۲))

۹۲- به ازای چه مقادیری از ثابت‌های a, b $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{a+t}} = 1$ ؟

- (۱) $a=2, b=4$
- (۲) $a=4, b=1$
- (۳) $a=0, b=4$
- (۴) $a=2, b=1$

(عمران - سراسری (۸۲))

۹۳- حد عبارت روبرو چقدر است؟

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) ∞

(عمران - آزاد (۸۲))

۹۴- یک ایزوتوپ رادیواکتیو توسط کارخانه‌ای در هوا آزاد می‌شود. این ایزوتوپ پایا نیست و به علت تسایع رادیواکتیو دو سوم آن خاصیت رادیواکتیو خود را پس از گذشت یک ماه از دست می‌دهد. اگر ۱۰ گرم از این ایزوتوپ در پایان ماه اول و سپس در پایان ماه‌های بعد در هوا آزاد شود، در دراز مدت یعنی با فرض اینکه این فرآیند زباله‌سازی و تسایع رادیواکتیو همچنان ادامه داشته باشد، مقدار این ایزوتوپ در پایان هر ماه چقدر خواهد بود؟

- (۱) ۱۰ گرم
- (۲) ۱۵ گرم
- (۳) ۳۰ گرم
- (۴) $\frac{20}{3}$ گرم

۹۵- فرض کنید تابع حقیقی f بر R مشتق‌پذیر باشد و $f(1) = 1$ و $f(-1) = -1$ و روی تمام R $|f'(x)| \leq 1$ ، در این صورت: (MBA ۸۲)

- (۱) $f(0) = 0$
- (۲) $f(0) = 1$
- (۳) $f(0) = 2$
- (۴) با این اطلاعات نمی‌توان $f(0)$ را تعیین کرد.

۹۶- مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + \sin x} \cos x dx$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری (۸۲))

- (۱) $\frac{3}{2}$
- (۲) $\frac{2}{3}(\sqrt{27} + \sqrt{8})$
- (۳) $\frac{2}{3}(\sqrt{27} - \sqrt{8})$
- (۴) $\frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

۹۷- انتگرال $\int \ln(1+x) dx$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری (۸۲))

- (۱) -۱
- (۲) $2\ln 2$
- (۳) $2\ln 2 - 1$
- (۴) $2\ln 2 + 1$

۹۸- مقدار $\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری (۸۲))

- (۱) ۱
- (۲) $\frac{\pi}{4}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) ∞

۹۹- حاصل انتگرال $\int x^2 e^{-x} dx$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری (۸۲))

- (۱) ۶
- (۲) $\sqrt{\pi}$
- (۳) ۲۴
- (۴) $2\sqrt{\pi}$

۱۰۰- حد تابع $f(x) = \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{2x^5}$ هرگاه $x \rightarrow 0$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری (۸۲))

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{10}$
- (۴) ∞

۱۰۱- مقدار انتگرال معین $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$ برابر است با: (آمار - سراسری (۸۲))

- (۱) ۱
- (۲) $\ln 2 - 1$
- (۳) $\ln 2$
- (۴) $+\infty$

۱۰۲- در مورد تابع $f(x) = \int_{-x}^x \frac{dt}{t^2 + 1}$ کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) تابعی است اکیداً صعودی
- (۲) تابعی است اکیداً نزولی
- (۳) تابع f دارای یک نقطه ماکزیمم مطلق است.
- (۴) تابع f دارای یک نقطه می نیمم مطلق است.

(آمار - سراسری ۸۲)

۱۰۳- مقدار $\int_b^{\infty} e^{x^2-b^2} (x^2+1) dx$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{e}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۱
- (۴) $+\infty$

(ریاضی - سراسری ۸۲)

۱۰۴- اگر $A = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}} dx$ آنگاه A برابر است با:

- (۱) $\frac{3\pi}{2}$
- (۲) $\frac{2\pi}{3}$
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) $\frac{\pi}{3}$

(ریاضی - سراسری ۸۲)

۱۰۵- حاصل $\int_{\ln 2}^{\ln 8} \sqrt{e^{2x} + e^{4x}} dx$ کدام است؟

- (۱) ۱۲
- (۲) $\frac{37}{3}$
- (۳) $\frac{38}{3}$
- (۴) $e^4 - e^2$

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

۱۰۶- حاصل $\int_{\sqrt{e}}^1 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}(4-\sqrt{2})$
- (۲) $\frac{2}{3}(2-\sqrt{2})$
- (۳) $\frac{2}{3}(3-\sqrt{2})$
- (۴) $\frac{\pi}{2}$

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

۱۰۷- حاصل $\int_2^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x^2(1-x^2)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \ln 2)$
- (۲) $\frac{1}{6} + \ln 6$
- (۳) $\frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \ln 2)$
- (۴) $\frac{1}{6}(1 + \ln 6)$

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

۱۰۸- کدام گزینه جواب $\int \sin x \cos x dx$ نیست؟

- (۱) $-\frac{1}{4} \cos^2 x + c$
- (۲) $\frac{1}{4} \cos^2 x + c$
- (۳) $-\frac{1}{4} \cos 2x + c$
- (۴) $\frac{1}{4} \sin^2 x + c$

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

۱۰۹- حاصل $\int x \ln x dx$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$
- (۲) ۰
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) ۱

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

۱۱۰- تحت چه شرایطی رابطه $\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = 0$ برقرار است؟

- (۱) اگر m و n فقط اعداد صحیح باشند.
- (۲) اگر m و n فقط اعداد صحیح و نامساوی باشند.
- (۳) برای کلیه مقادیر m و n برقرار است.
- (۴) به ازاء هیچ مقدار از m و n تساوی برقرار نیست.

(مهندسی معدن - سراسری ۸۲)

۱۱۱- اگر $f(x) = \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$ و $f(0) = 1$ و $f(x) = 1$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{xe^x}{x+1} + 1$
- (۲) $\frac{xe^x}{x+1} + 1$
- (۳) $\frac{e^x}{x+1} + x + 1$
- (۴) $-\frac{e^x}{x+1} + e^x + 1$

(مهندسی معدن - سراسری ۸۲)

۱۱۲- فرض کنیم $I = \int \frac{\sin x}{(1+x)^2} dx$ و $J = \int \frac{\cos x}{1+x} dx$ کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) I و J هر دو همگرای مشروط هستند.
- (۲) I و J هر دو همگرای مطلق هستند.
- (۳) I همگرای مطلق و J همگرای مشروط است.
- (۴) I همگرای مشروط و J همگرای مطلق است.

(مهندسی معدن - سراسری ۸۲)

۱۱۳- مقدار انتگرال $\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x+2}} dx$ برابر است با:

- (۱) $\frac{4}{3}$
- (۲) $\frac{3}{4}$
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) ۲

(مکانیک - آزاد ۸۲)

۱۱۴- مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} e^{-xt} \cos t dt$ برابر است با:

- (۱) $\frac{x}{x+1}$
- (۲) $\frac{1}{x^2+1}$
- (۳) $\frac{x^2}{x^2+1}$
- (۴) $\frac{x}{x^2+1}$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۲)

۱۱۵- مقدار انتگرال $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{x-1}} + c$
- (۲) $\sqrt{x-1} + c$
- (۳) $2 \ln |\sqrt{x+1}| + c$
- (۴) $2 \ln |\sqrt{x-1}| + c$

(عمران - سراسری ۸۳)

۱۱۶- اگر $f(t) = \int_0^t \frac{\sin tx}{x} dx$ باشد آنگاه $\frac{df}{dt}$ برابر کدام است؟

(عمران - سراسری ۸۳)

- (۱) $t \sin t$
- (۲) $\frac{\sin tx}{x}$
- (۳) $\frac{2 \sin t^2}{t}$
- (۴) $\int_0^1 \cos tx dx$

۱۱۷- مقدار انتگرال $\int \frac{dx}{x^2+2x-8}$ برابر است با:

- (۱) $-\frac{1}{2} \ln 4$
- (۲) انتگرال واگراست.
- (۳) $-\frac{1}{2} \ln 8$
- (۴) $-\frac{1}{2} \ln 2$

(عمران - آزاد ۸۲)

۱۱۸- اگر $f(t) = \int_0^t \frac{\sin tx}{x} dx$ آنگاه $\frac{df}{dt}$ برابر است با:

(عمران - آزاد ۸۳)

- (۱) $\int_0^1 \cos tx dx$
- (۲) $\frac{2 \sin t^2}{t}$
- (۳) $\frac{\sin tx}{x}$
- (۴) $t \sin t$

۱۱۹- مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\cosh x}$ برابر کدام است؟

- (۱) π
- (۲) $\frac{\pi}{2}$
- (۳) $\frac{\pi}{4}$
- (۴) $\pi - 1$

(مکانیک - سراسری ۸۳)

۱۲۰- حاصل $\int \frac{dx}{\cosh x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{\pi}{4}$
- (۴) $\frac{\pi}{2}$

(MBA - سراسری ۸۳)

۱۲۱- اگر $F(x) = x \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t}}$ خط مماس بر منحنی تابع $F(x)$ در نقطه $x=2$ محور y ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(MBA - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{4}{3}$
- (۴) $\frac{8}{3}$

۱۲۲- شیب خط مماس بر یک منحنی در هر نقطه $M(x,y)$ از آن برابر $\sqrt{1+x+y+xy}$ است. اگر این منحنی از $(-1,-1)$ عبور کند. محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

(MBA - سراسری ۸۳)

- (۱) $-\frac{8}{9}$
- (۲) $-\frac{7}{9}$
- (۳) $-\frac{2}{3}$
- (۴) $-\frac{1}{3}$

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۲)

۱۲۳- اگر $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$ آنگاه مقدار $(f^{-1})'(0)$ برابر است با:

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- (۴) $\sqrt{2}$

۱۲۴- حاصل $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} dx$ برابر است با:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۱۲۵- اگر $F(\alpha) = \int_{\frac{\alpha}{\sqrt{1-4x^2}}^{\alpha} \frac{\sin^{-1} 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ آنگاه $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{2}} F(\alpha)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{\pi^2}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{\pi^2}{16}$

۱۲۶- حاصل $\int_1^e \frac{\ln x}{x(1+\ln x)} dx$ برابر است با:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) $1 - \ln 2$ (۲) $e - \ln 2$ (۳) $2 - \ln 2$ (۴) $\frac{-1}{e} + \ln 2$

۱۲۷- مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+e^{ax}}$ ($a > 0$ ثابت) برابر است با:

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{1}{a}$ (۲) $a \ln 2$ (۳) $\frac{1}{a} \ln 2$ (۴) ∞ (انتگرال واگراست)

۱۲۸- مقدار انتگرال $\int \cos(\ln x) dx$ برابر است با:

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۳)

- (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ∞

۱۲۹- حاصل $\int \frac{dx}{e^{2x} - 4e^x + 4}$ برابر است با:

(آمار - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{e^x}{e^x - 2} \right| - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^x - 2} \right) + C$ (۲) $\frac{1}{4} x - \frac{1}{2} \ln |e^x - 2| - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^x + 2} \right) + C$

- (۳) $\frac{1}{4} x - \frac{1}{2} \ln |e^x + 2| - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^x + 2} \right) + C$ (۴) $\frac{1}{4} x - \frac{1}{4} (e^x - 2) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{e^x - 2} \right) + C$

۱۳۰- حاصل $\int x^2 \tan^{-1} x dx$ برابر است با:

(آمار - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{1}{3} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C$ (۲) $\frac{1}{3} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{3} \ln(1+x^2) + C$

- (۳) $\frac{1}{3} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{6} \tan^{-1} x + C$ (۴) $\frac{1}{3} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{3} \tan^{-1} x + C$

۱۳۱- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \sin t^2 dt$ کدام است؟

(آمار - سراسری ۸۳)

- (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) وجود ندارد.

۱۳۲- مقدار $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\int_1^{1+h} e^{-t^2} dt - \int_1^h e^{-t^2} dt}{h}$ برابر است با:

(آمار - سراسری ۸۳)

- (۱) $-2xe^{-x^2}$ (۲) e^{-x^2} (۳) ۰ (۴) ۱

۱۳۳- y تابعی از x است و تساوی $x = \int \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}}$ برقرار است. کدام رابطه صحیح است؟

(آمار - سراسری ۸۳)

- (۱) $y'' + 4yy' = 0$ (۲) $y'' + 4y = 0$ (۳) $y'' - 4y = 0$ (۴) $y'' + 4y' = 0$

۱۳۴- اگر g تابعی پیوسته و $f(x) = \int_0^x (x-t)g(t)dt$ آنگاه $f'(x)$ کدام است؟

(ریاضی - سراسری ۸۳)

- (۱) ۰ (۲) $xg(x)$ (۳) $2xg(x)$ (۴) $\int_0^x g(t)dt$

۱۳۵- مقدار $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+e^x}$ کدام است؟

(ریاضی - سراسری ۸۳)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\ln 2$ (۴) $+\infty$

۱۳۶- مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x + y^2 \cos^2 x}$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{\pi}{2y}$ (۲) $\frac{1}{y} \tan^{-1} \frac{\pi}{2y}$ (۳) $\frac{1}{y} \tan^{-1} \frac{2}{\pi y}$ (۴) $\frac{2}{\pi y}$

۱۳۷- کدام گزینه در مورد $I = \int_1^2 \frac{dx}{\log x}$ صحیح است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۳)

- (۱) I واگراست. (۲) I همگرا به صفر است. (۳) I همگرا به ۱ است. (۴) I همگرا به $\frac{1}{2}$ است.

۱۳۸- اگر $g(1) = 1$ و برای هر $x > 0$ ، $g'(x^2) = x^2$ ، $g(4)$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{64}{5}$ (۲) ۱۳ (۳) $\frac{66}{5}$ (۴) $\frac{67}{5}$

۱۳۹- اگر تابع g پیوسته، $\int_0^1 g(t)dt = 2$ و $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (x-t)g(t)dt$ ، مقدار $f''(1)$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۳)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۱۴۰- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 + \sin 2t)^{1/2} dt$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۳)

- (۱) ۰ (۲) $e^{1/2}$ (۳) ۱ (۴) e^2

۱۴۱- اگر $f(x) = \int_0^{x^2} xf(t)dt$ آنگاه $f'(x)$ برابر کدام است؟

(مهندسی معدن - سراسری ۸۳)

- (۱) $xf(x^2)$ (۲) $2x^2 f(x^2)$ (۳) $\int_0^{x^2} f(t)dt$ (۴) $2x^2 f(x^2) + \int_0^{x^2} f(t)dt$

۱۴۲- اگر تابع f و مشتق‌های آن تا مرتبه سوم پیوسته و $f(1) = f'(1)$ و $f(0) = -5$ باشند حاصل انتگرال $\int_0^1 x^2 f''(x) dx$ کدام است؟

(مهندسی معدن - سراسری ۸۳)

- (۱) ۵ (۲) ۱۵ (۳) -۵ (۴) -۱۵

۱۴۳- حاصل $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$ برابر است با:

(مهندسی معدن - سراسری ۸۳)

- (۱) $7 + \ln 2$ (۲) $8 + \ln 2$ (۳) $7 + 2 \ln 2$ (۴) $8 + 2 \ln 2$

۱۴۴- انتگرال نامعین زیر برابر با کدام گزینه است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۳)

$$\int \frac{x+4}{x(x^2+4)} dx$$

- (۱) $\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + c$ (۲) $\frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{x}{2} + \ln|x| + c$

- (۳) $\frac{1}{2} \ln|x^2+4| + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{x}{2} + c$ (۴) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2}{x^2+4} \right| + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{x}{2} + c$

۱۴۵- انتگرال $\int \frac{\sqrt{1+x}}{1-x} dx$ برابر است با:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۳)

- (۱) $\sqrt{2} \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{2}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2}} \right| + c$
- (۲) $\sqrt{2} \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{2}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2}} \right| - 2\sqrt{1+x} + c$
- (۳) $\text{Ln} \left| \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{2}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2}} \right| + \text{Ln} \sqrt{1+x} + c$
- (۴) $\sqrt{2} \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{2}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2}} \right| + 2\sqrt{1+x} + c$

۱۴۶- اگر $f(x) = \int_x^1 \frac{dt}{(1+t)^2}$ باشد، مشتق $y = x^2 f(x)$ در $x=1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۳)

- (۱) ۰
- (۲) -۱
- (۳) ۱
- (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۴۷- انتگرال $\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ برابر است با:

(عمران - سراسری ۸۴)

- (۱) $-\pi$
- (۲) صفر
- (۳) $\sqrt{\pi}$
- (۴) 2π

۱۴۸- اگر $f(x) = \int_{x \text{Ln} x}^{\text{Ln} x} dx$ باشد آنگاه $f(e^T) - f(e)$ کدام است؟

(عمران - آزاد ۸۴)

- (۱) ۰
- (۲) e
- (۳) $\text{Ln} 2$
- (۴) $\text{Ln} 2$

۱۴۹- حاصل انتگرال $\int \left(\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$ برابر کدام است؟

(MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) $\pi\sqrt{2}$
- (۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۵۰- با توجه به حاصل $\int e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$ مقدار $\int x^6 \cdot e^{-x} dx$ کدام است؟

(MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) ۹۶
- (۲) ۱۲۰
- (۳) ۱۴۴
- (۴) ۷۲۰

۱۵۱- تابع $F(x) = \int_1^{2x} e^{-t^2} dt$ به ازای کدام مقدار x بیشترین مقدار را دارد؟

(MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) $\sqrt{\text{Ln} 8}$
- (۲) $\sqrt{\text{Ln} 9}$
- (۳) $\sqrt{\frac{1}{2} \text{Ln} 2}$
- (۴) $\sqrt{\frac{1}{2} \text{Ln} 2}$

۱۵۲- حاصل $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx$ کدام است؟

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) π
- (۴) 2π

۱۵۳- اگر $a > 1$ باشد، مقدار $\int_1^a \log_a x dx + \int_1^a a^y dy$ کدام است؟

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) a
- (۲) $\frac{1}{\text{Ln} a}$
- (۳) $a \text{Ln} a$
- (۴) $\frac{a}{a \text{Ln} a}$

۱۵۴- اگر f در فاصله $[0, b]$ پیوسته باشد مقدار $\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)} dx$ کدام است؟

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{b}{2}$
- (۳) b
- (۴) 2b

۱۵۵- اگر $\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ مقدار آن چقدر است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۴)

- (۱) ∞
- (۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- (۳) $\sqrt{\pi}$
- (۴) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

۱۵۶- مقدار $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$ برابر است با:

(آمار - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{8}{15}$
- (۲) $\frac{4}{15}$
- (۳) $\frac{18}{15}$
- (۴) $\frac{28}{15}$

۱۵۷- بین n و m کدام رابطه برقرار باشد تا $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x dx}{x^n}$ همگرا گردد؟

(آمار - سراسری ۸۴)

- (۱) $n < m$
- (۲) $m < n$
- (۳) $n < m + 1$
- (۴) $m < n + 1$

۱۵۸- اگر $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{dt}{1+t^2}$ آنگاه $f'(2)$ کدام است؟

(آمار - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{4}{65}$
- (۲) $\frac{4}{9}$
- (۳) $\frac{4}{33}$
- (۴) $\frac{2}{9}$

۱۵۹- فرض کنیم $f(x) = \int_1^{\text{Ln} x} \sqrt{1+e^t} dt$ مقدار $f'(e)$ برابر است با:

(ریاضی - سراسری ۸۴)

- (۱) $e(1+e)^{-2}$
- (۲) $e(1+e)^{-1}$
- (۳) $e(1-e)^{-2}$
- (۴) $e(1-e)^{-1}$

۱۶۰- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2} \int_0^{x^2} e^{t^2} \sin t dt$ برابر است با:

(ریاضی - سراسری ۸۴)

- (۱) صفر
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) ۲
- (۴) بی‌نهایت

۱۶۱- در صورتیکه تابع f مخالف صفر و $x \neq 0$ ، ضابطه $f'(x^2+1) = \int_0^{x^2+1} \frac{f(t)}{(t+1)^2} dt$ ضابطه f(x) برابر است با:

(ریاضی - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{1}{2(x+1)} + C$
- (۲) $\frac{2}{x+1} + C$
- (۳) $-\frac{1}{2(x+1)} + C$
- (۴) $\frac{1}{2(x+1)^2} + C$

۱۶۲- اگر f تابعی پیوسته باشد حاصل مقدار $\int \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)} dx$ کدام است؟

(ریاضی - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۱۶۳- حاصل $\int_1^7 \frac{(y^2+1)dy}{\sqrt{y^2+2y+5}}$ کدام است؟

(ریاضی - سراسری ۸۴)

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۶۴- مقدار $\int_1^a \frac{\log_a x^2}{x} dx$ کدام است؟

(ریاضی - سراسری ۸۴)

- (۱) $2 \text{Ln} a$
- (۲) ۱
- (۳) $\text{Ln} a$
- (۴) $\frac{1}{\text{Ln} a}$

۱۶۵- حاصل $\int_1^e \cos(\text{Ln} x) dx$ کدام است؟

(ریاضی - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{1}{2} e(\cos 1 + \sin 1)$
- (۲) $\frac{1}{2} e(\cos 1 - \sin 1)$
- (۳) $2e(\cos 1 + \sin 1)$
- (۴) $2e(\cos 1 - \sin 1)$

۱۶۶- حاصل $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) $\frac{\pi}{3}$
- (۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۶۷- اگر $F(x) = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+6}}$ مقدار $F(30) - F(2)$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{3} \text{Ln} \frac{12-3\sqrt{5}}{12+3\sqrt{5}}$
- (۲) $\frac{\sqrt{5}}{5} \text{Ln} \frac{12+3\sqrt{5}}{12-3\sqrt{5}}$
- (۳) $\frac{\sqrt{5}}{5} \text{Ln} \frac{12-3\sqrt{5}}{12+3\sqrt{5}}$
- (۴) $\frac{\sqrt{2}}{3} \text{Ln} \frac{12+3\sqrt{5}}{12-3\sqrt{5}}$

۱۶۸- حاصل $\int_0^1 \frac{2x-3}{x^2-2x+2} dx$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) $\text{Ln} \frac{3^4}{1^2}$
- (۲) $\text{Ln} \frac{3^5}{1^2}$
- (۳) $\text{Ln} \frac{3^{12}}{1^2}$
- (۴) $\text{Ln} \frac{3^{12}}{3^4}$

۱۶۹- اگر $F(x) = \int x^2 \cos x dx$ و $F(0) = 0$ ، $F(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{\pi}{8} - 2$
- (۲) $\frac{\pi}{6} - 2$
- (۳) $\frac{\pi}{2} - 2$
- (۴) $\frac{\pi}{4} - 2$

۱۷۰- اگر $\int \cos(\ln x) dx = \frac{1}{x} \cos(\ln x) + f(x) + C$ ، $f(x)$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) $x \sin(\ln x)$
- (۲) $\frac{1}{x} \ln(\sin x)$
- (۳) $\frac{1}{x} \sin(\ln x)$
- (۴) $x \ln(\sin x)$

۱۷۱- اگر $y = \int_1^t \sin \sqrt{t} dt$ حاصل $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) $2x \sin x - \sin \sqrt{x}$
- (۲) $2x \sin x + \sin \sqrt{x}$
- (۳) $x \sin x - 2 \sin \sqrt{x}$
- (۴) $x \sin x + 2 \sin \sqrt{x}$

۱۷۲- حاصل انتگرال $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2(1+x)}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۴)

- (۱) $\frac{1}{2} + \ln 2 - \ln 4$
- (۲) $-\frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3}$
- (۳) $-\frac{1}{2} + \ln 2 - \ln 4$
- (۴) $\frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3}$

۱۷۳- اگر ثابت انتگرال گیری $\epsilon = -1$ فرض شود، حاصل انتگرال $\int \frac{xe^x dx}{(x+1)^2}$ به ازای $x = 0$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۴)

- (۱) ۱
- (۲) صفر
- (۳) -۱
- (۴) ∞

۱۷۴- معادله منحنی که در نقطه‌ای به طول $x = 1$ بر خط $y = x - 2$ مماس باشد و داشته باشیم $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۴)

- (۱) $y = x^2 - 2x + 1$
- (۲) $y = x^2 - 2x - 2$
- (۳) $y = x^2 - 2x + 4$
- (۴) $y = x^2 - 2x$

۱۷۵- حاصل $\int_1^e \frac{dx}{x}$ کدام است؟ (مهندسی شیمی نساجی - آزاد ۸۴)

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) $e^2 - e$
- (۴) e^2

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱- گزینه «۱»
 $\int_0^x [t]^2 dt = \int_0^1 dt + \int_1^2 dt + \int_2^x t^2 dt = 1 + 2(x-2) \Rightarrow 4x - 7 = 2x - 2 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

۲- گزینه «۲»
 $\int_1^\infty (\frac{x}{2x^2+2c} - \frac{c}{x+1}) dx = (\frac{1}{2} \ln(2x^2+2c) - c \ln(x+1)) \Big|_1^\infty = \ln \frac{(2x^2+2c)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^c} \Big|_1^\infty$

برای همگرایی انتگرال فوق لازم است، صورت و مخرج کسر هم درجه باشند، یعنی $c = \frac{1}{2}$.

۳- گزینه «۱» از روش جز به جز استفاده می‌کنیم.

$u = xe^x \Rightarrow du = e^x(x+1) dx$

$dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{x+1}$

$\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx = \frac{-xe^x}{x+1} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx = \frac{-e}{2} + e^x \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1$

۴- گزینه «۳»
 $\frac{1}{x(2x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{2x^2+1} \Rightarrow A(2x^2+1) + (Bx+C)x = 1$

از رابطه فوق مقادیر A، B و C به ترتیب برابر ۱، -۲ و ۰ به دست می‌آید. بنابراین:

$\int_1^2 \frac{dx}{2x^2+x} = \int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{2x}{2x^2+1} dx = \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \ln(2x^2+1) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$

۵- گزینه «۱»
 $x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du \Rightarrow x^2 dx = \frac{du}{2}$

$I = \int x^2 \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

۶- گزینه «۲»
 $\ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \Rightarrow$

$I = \int \frac{u}{1+u} du = \int (1 - \frac{1}{1+u}) du = u - \ln|u+1| + c = \ln x - \ln|\ln x + 1| + c = \ln \left| \frac{x}{1 + \ln x} \right| + c$

۷- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$I = \int_{-1}^2 \sqrt{|1-x|} \cdot |x| dx = \int_{-1}^0 \sqrt{1-x} \cdot (-x) dx + \int_0^1 \sqrt{1-x} \cdot x dx + \int_1^2 \sqrt{x-1} \cdot x dx$

$1-x = u \Rightarrow -dx = du, -x = u-1, x = -1 \Rightarrow u = 2, x = 0 \Rightarrow u = 1$

$1-x = u \Rightarrow -dx = du, x = 1-u, x = 0 \Rightarrow u = 1, x = 1 \Rightarrow u = 1$

$\Rightarrow I = \int_2^1 \sqrt{u}(1-u) du - \int_1^0 \sqrt{u}(1-u) du + \int_0^1 \sqrt{u}(u+1) du = [\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}]_2^1 - [\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}]_1^0 + [\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}]_0^1$

$= [(\frac{2}{3} \times 1 - \frac{2}{5} \times 1) - (\frac{2}{3} \times 2\sqrt{2} - \frac{2}{5} \times 4\sqrt{2})] + \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = 2 \times \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$

$= \frac{2 \times 0 - 2}{15} + (\frac{8}{5} - \frac{2}{3})\sqrt{2} = \frac{24}{15} + \frac{4}{15}\sqrt{2} = 1.97$

۸- گزینه «۴»

ملاحظه می‌گردد که حاصل انتگرال نامتناهی است. $\int_1^2 \frac{dx}{x-2} = \int_1^2 \frac{dx}{x-2} + \int_2^2 \frac{dx}{x-2} = [\ln(x-2)]_1^2 + [\ln(x-2)]_2^2 \Rightarrow$

۹- گزینه «۴»

$$\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{(1+x)^2} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{(1+x)^2} \Big|_{x=0} = 1 \\ B = \left(\frac{1}{x}\right)' \Big|_{x=-1} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' \Big|_{x=-1} = -1 \\ C = \frac{1}{x} \Big|_{x=-1} = -1 \end{cases}$$

$$I = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) dx = \ln|x| - \ln|1+x| + \frac{1}{1+x} + c$$

۱۰- گزینه «۱» اگر $x=0$ را در تابع قرار دهیم به حالت $\frac{0}{0}$ برخورد می‌کنیم که با استفاده از قاعده هوییتال و قاعده مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}}{\cos x} = 1$$

۱۱- گزینه «۳»

انتگرال	مشتق	$\int_a^b x f'(x) dx = [x f(x) - f(x)]_a^b = b f'(b) - a f'(a)$
$\oplus x$	$f''(x)$	
$\ominus 1$	$f'(x)$	
$\oplus 0$	$f(x)$	

۱۲- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\int_0^1 \coth x dx = \ln|\sinh x| \Big|_0^1 = \ln \sinh 1 - \ln \sinh 0 = \ln \sinh 1 - \ln(0^+) = \ln \sinh 1 - \ln(0^+) = +\infty$$

۱۳- گزینه «۱» از تغییر متغیر $x = \sec t$, $dx = \sec t \cdot \text{tg}t dt$ استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t \cdot \text{tg}t dt}{\sec t \sqrt{\sec^2 t - 1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{tg}t dt}{\sqrt{1 - \cos^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

۱۴- گزینه «۴» از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \\ \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right) dx = \left[-2 \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

۱۶- گزینه «۱» از تغییر متغیر $u = x^{2x}$, $du = 2x^{2x} (\ln x + 1) dx$ استفاده می‌کنیم، بنابراین:

$$\int x^{2x} (\ln x + 1) dx = \int \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} u + c = \frac{1}{2} x^{2x} + c$$

۱۷- گزینه «۲»

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx = (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2\sqrt{2}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 -f(u) du = \int_1^2 f(u) du = 2 \quad \text{با استفاده از تغییر متغیر } u = \frac{1}{x} \text{ داریم: } du = -\frac{1}{x^2} dx$$

۱۹- گزینه «۴» از رابطه $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین برای محاسبه $(f^{-1})'(0)$ ابتدا به جای $f(x)$ مقدار 0 را قرار می‌دهیم.

$$0 = \int_0^x \sqrt{1 + \sin^2 t} dt \Rightarrow x = 0$$

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \sin^2 t} dt \Rightarrow f'(x) = \sqrt{1 + \sin^2 x} \Rightarrow f'(0) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

۲۰- گزینه «۴» از تغییر متغیر $u = \frac{\pi}{2} - x$, $du = -dx$ استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -f(\cos(\frac{\pi}{2} - u)) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u) du$$

۲۱- گزینه «۱» از تغییر متغیر $x = t^2$ استفاده می‌کنیم در این صورت $dx = 2t dt$ و انتگرال به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_0^2 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t dt}{1+t} = \int_0^2 \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dt = 2t - 2 \ln(1+t) \Big|_0^2 = 4 - 2 \ln 3 = 4 - \ln 9$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \ln 2$$

۲۲- گزینه «۴»

$$\int_{\sqrt{e}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{3} \text{Arctg} \frac{x}{3} \Big|_{\sqrt{e}}^{\infty} = \frac{1}{3} \text{Arctg} \infty - \frac{1}{3} \text{Arctg} \frac{\sqrt{e}}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{9}$$

۲۳- گزینه «۳»

۲۴- گزینه «۱» از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} dv = e^{rx} dx \Rightarrow v = \frac{1}{r} e^{rx} \\ u = x \Rightarrow du = dx \end{cases}$$

$$\int_0^r x e^{rx} dx = \left[\frac{x}{r} e^{rx} \right]_0^r - \int_0^r \frac{1}{r} e^{rx} dx = e^r - \frac{1}{r} e^{rx} \Big|_0^r = \frac{r}{r} e^r + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} (re^r + 1)$$

۲۵- گزینه «۳»

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, x=1 \Rightarrow u=0, x=2 \Rightarrow u = \ln 2$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^a} = \int_0^{\ln 2} \frac{du}{u^a} \Rightarrow \text{برای همگرایی لازم است } a < 1 \text{ باشد.}$$

بنابراین:

۲۶- گزینه «۲»

مشق	انتگرال
$\oplus \sin nx$	$f''(x)$
$\ominus n \cos x$	$f'(x)$
$\oplus -n^2 \sin nx$	$f(x)$

$$\int_0^\pi \sin(nx) f''(x) dx = (\sin(nx) f'(x) - n \cos x f(x)) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi n^2 \sin(nx) f(x) dx$$

$$= n f(0) + (-1)^{n+1} n f(\pi) - n^2 \int_0^\pi \sin(nx) f(x) dx$$

بنابراین:

۲۷- گزینه «۲» انتگرال داده شده در $x=0$ ناسره می‌باشد. چون طبق فرض $p < q$ ، بنابراین در همسایگی نقطه $x=0$ داریم

$$\frac{1}{x^p + x^q} \sim \frac{1}{x^p} \text{ از طرفی شرط همگرایی } \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \text{ این است که } p < 1. \text{ با توجه به گزینه های داده شده فقط گزینه ۲ می تواند صحیح باشد.}$$

$$f(4) - f(2) = \int_1^4 \frac{dt}{1+t^2} - \int_1^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int_2^4 \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \int_2^4 \frac{dt}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+(2)^2} (4-2) = \frac{2}{5}$$

۲۸- گزینه «۳»

توجه کنید که عبارت $\frac{1}{1+t^2}$ در فاصله $[2, 4]$ بیشترین مقدار خود را به ازای $t=2$ اتخاذ می‌کند.

۲۹- گزینه «۱»

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) \times \frac{\cos x}{\sin x} dx, \quad \ln(\sin x) = u \Rightarrow \begin{cases} \frac{\cos x}{\sin x} dx = du \Rightarrow du = \cot x dx \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \ln 1 = 0, x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \ln \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) \times \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int_{\ln \frac{1}{2}}^0 u \cdot du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_{\ln \frac{1}{2}}^0 = -\frac{1}{2} (\ln \frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{2} (-\ln 2)^2 = -\frac{1}{2} (\ln 2)^2$$

۳۰- گزینه «۱» برای محاسبه انتگرال سمت چپ از تغییر متغیر $u = 1 + \tan x$ استفاده می‌کنیم:

$$1 + \tan x = u \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} dx = du \Rightarrow (\sec x)^2 dx = du$$

$$I = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} \Rightarrow I = -\frac{1}{1 + \tan x} = -\frac{1}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = -\frac{\cos x}{\sin x + \cos x} \Rightarrow f(x) = -\cos x$$

۳۱- گزینه «۳» صورت و مخرج کسر زیر انتگرال را در e^x ضرب می‌کنیم:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_0^\infty \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int_0^\infty \frac{\overset{du}{e^x dx}}{1 + \underbrace{(e^x)^2}_u} = \text{Arctg} e^x \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

۳۲- گزینه «۱»

$$-\ln x = u \Rightarrow -\frac{dx}{x} = du \Rightarrow dx = -x du, \quad -\ln x = u \Rightarrow x = e^{-u}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \int_{+\infty}^0 \frac{-e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot u^{-\frac{1}{2}} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

۳۳- گزینه «۱» تابع مقابل انتگرال، تابعی فرد می‌باشد، پس انتگرال موردنظر برابر صفر است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \int_0^x \sqrt{20-t^2} dt}{x-2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\int_0^x \sqrt{20-t^2} dt + x \sqrt{20-x^2}}{1} = 4$$

۳۴- گزینه «۴»

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_1^{1+h} e^{-x^2} dx}{h} \stackrel{HOP}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-(1+h)^2} \times 1}{1} = e^{-1}$$

۳۵- گزینه «۴»

$$\text{۳۶- گزینه «۲» از رابطه } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x dx = \frac{1}{2} \beta(m, n) \text{ استفاده می‌کنیم.}$$

$$2m-1=5 \Rightarrow m=3, \quad 2n-1=5 \Rightarrow n=3$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^5 x dx = \frac{1}{2} \beta(3, 3) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3)\Gamma(3)}{\Gamma(3+3)} = \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 2}{6!} = \frac{1}{60}$$

بنابراین:

۳۷- گزینه «۴» به حل تست (۲) مراجعه کنید.

۳۸- گزینه «۳» تابع g معکوس تابع f می‌باشد، بنابراین:

$$f(g(x)) = x \Rightarrow g'(x) f'(g(x)) = 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \Rightarrow g''(x) = \frac{-g'(x) f''(g(x))}{(f'(g(x)))^2} = -\frac{f''(g(x))}{(f'(g(x)))^2}$$

$$f'(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{2} x^{-2} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

حال مقادیر f' و f'' را از رابطه داده شده به دست می‌آوریم:

$$g''(x) = -\frac{-\frac{1}{2} g^2(x) (1+g^2(x))^{-\frac{3}{2}}}{(1+g^2(x))^2} = \frac{1}{2} g^2(x)$$

با جایگزینی روابط فوق در g'' خواهیم داشت:

$$\text{۳۹- گزینه «۳» از تغییر متغیر } dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt, x = \frac{1}{\cos t} \text{ استفاده می‌کنیم. در این صورت:}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t} dt}{\frac{1}{\cos t} \sqrt{1-\cos^2 t}} = \int dt = t + c = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + c = \sec^{-1} x + c$$

۴۰- گزینه «۲» از تغییر متغیر $x = r \sin t$, $dx = r \cos t dt$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\int \frac{x^r dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{r \sin^r t \times r \cos t dt}{\sqrt{9-9\sin^2 t}} = \int r \sin^r t dt = \frac{9}{r} \int (1 - \cos^2 t) dt = \frac{9}{r} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + c = \frac{9}{r} \left(\sin^{-1} \frac{x}{3} - \frac{x\sqrt{9-x^2}}{9} \right) + c$$

۴۱- گزینه «۱»

۴۲- گزینه «۴» مقدار انتگرال مورد نظر را I_n فرض می‌کنیم. برای محاسبه I_n از روش جزیه‌جز استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} u = (\ln x)^n \Rightarrow du = n(\ln x)^{n-1} \frac{dx}{x} \\ du = dx \Rightarrow u = x \end{cases}$$

$$I_n = x(\ln x)^n \Big|_1^1 - \int n(\ln x)^{n-1} dx = -nI_{n-1}$$

از رابطه فوق نتیجه می‌شود $I_n = (-1)^n n!$ و با توجه به اینکه $I_0 = 1$ ، بنابراین:

۴۳- گزینه «۲» تابع $y = x^{2x}$ تابع زوج و تابعی فرد است و حاصل ضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد، تابعی فرد است. پس چون تابع زیر انتگرال فرد است لذا با توجه به متقارن بودن بازه انتگرال گیری مقدار انتگرال صفر است.

۴۴- گزینه «۴»

$$\begin{cases} u = x^2 + 2x^2 + 5 \Rightarrow du = (2x + 4x^2) dx \Rightarrow \frac{du}{2} = (x + 2x^2) dx \\ x=1 \Rightarrow u=8, x=2 \Rightarrow u=25 \end{cases}$$

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = [\sqrt{u}]_8^{25} = 5 - 2\sqrt{2}$$

$$1 + \sin \theta = u \Rightarrow \cos \theta d\theta = du$$

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln u + c \Rightarrow f(\theta) = \ln(1 + \sin \theta) + c, f(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(\theta) = \ln(1 + \sin \theta)$$

۴۵- گزینه «۴»

۴۶- گزینه «۴»

$$\cos x = u \Rightarrow \begin{cases} -\sin x dx = du \\ x=0 \Rightarrow u=1, x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{-du}{u^2} = \int \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = [\text{Arcsin}(x-1)]_{\frac{1}{2}}^1 = 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

۴۷- گزینه «۱»

۴۸- گزینه «۳»

$$x^r = u \Rightarrow r x dx = du$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^r} dx = \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{du}{r\sqrt{u}} = \frac{1}{r} \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du = \frac{\sqrt{\pi}}{r}$$

روش اول:

از طرفی $\frac{\sqrt{\pi}}{r} < 1 + \frac{1}{e}$ می‌باشد، لذا حد بالای انتگرال برابر $1 + \frac{1}{e}$ است.

روش دوم: ابتدا توجه کنید که در فاصله $[0, 1]$, $0 \leq e^{-x^r} \leq 1$ ، بنابراین:

$$0 < \int_0^1 e^{-x^r} dx \leq \int_0^1 dx = 1$$

$$0 < \int_1^{\infty} e^{-x^r} dx \leq \int_1^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{e}$$

از بحث فوق نتیجه می‌شود $\int_0^{\infty} e^{-x^r} dx$ همگراست و مقدار آن از $\frac{1}{e} + 1$ بزرگتر نیست.

$$\int_0^{\sqrt{r}} \frac{r x dx}{\sqrt{1-(x^r)^2}} = \frac{r}{r} [\text{Arcsin } x^r]_0^{\sqrt{r}} = \frac{r}{r} \text{Arcsin } \frac{1}{r} = \frac{\pi}{r}$$

۴۹- گزینه «۱»

۵۰- گزینه «۱» به نظر می‌رسد منظور طراح از عدد $\frac{\pi}{4}$ ، عدد ۱ بوده است.

$$\begin{cases} u = \text{Arctg } x \rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^1 x \text{Arctg } x dx = \frac{x^2}{2} \text{Arctg } x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{8} - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{Arctg } x\right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

۵۱- گزینه «۲»

$$f(x) = \int_0^x e^{rt} \sqrt{1+9t^2} dt \Rightarrow f'(x) = e^{rx} \sqrt{1+9x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{rx} \sqrt{1+9x^2}}{x^n e^{rx}} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{rx^r}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} r x^{r-n}$$

برای اینکه حد فوق برابر ۳ باشد، لازم است $0 < r-n < 2$ و $n=2$ یا 0 .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \cos t dt}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{1} = 0$$

۵۲- گزینه «۱»

$$\int_0^{+\infty} e^{-mx} dx = \frac{-1}{m} e^{-mx} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{m}$$

۵۳- گزینه «۱»

$$\frac{d}{dm} \int_0^{+\infty} e^{-mx} dx = \frac{d}{dm} \left(\frac{1}{m} \right) = \frac{-1}{m^2}$$

بنابراین:

۵۴- گزینه «۳» از روش انتگرال گیری جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = r^x \Rightarrow du = r^x \ln r \\ dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{x} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\int_1^r \frac{r^x}{x^2} dx = -\frac{r^x}{\ln r} \Big|_1^r + \ln r \int_1^r \frac{r^x}{x} dx = A \ln r$$

۵۵- گزینه «۲»

$$\int_0^1 x\sqrt{x+1} dx = \int_0^1 (x+1)\sqrt{x+1} dx - \int_0^1 \sqrt{x+1} dx = \left[\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{5} \times 2^{5/2} - \frac{2}{3} \times 2^{3/2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$$

۵۶- گزینه «۲»

$$\int_0^r \frac{x^r+1}{x+1} dx = \int_0^r \left(x-1 + \frac{2}{x+1} \right) dx = \left[\frac{x^r}{r} - x + 2\ln(x+1) \right]_0^r = 2\ln r$$

۵۷- گزینه «۳»

$$\int \frac{xdx}{(x^r+1)^r + (\sqrt{r})^r} = \int \frac{\frac{1}{r} du}{u^r + (\sqrt{r})^r} = \frac{1}{r\sqrt{r}} \operatorname{Arctg} \frac{u}{\sqrt{r}} + c = \frac{1}{r\sqrt{r}} \operatorname{Arctg} \frac{x^r+1}{\sqrt{r}} + c$$

بنابراین:

$$\int_0^{\sqrt{r}} \frac{xdx}{x^r + 2x^r + r} = \frac{1}{r\sqrt{r}} \operatorname{Arctg} \frac{x^r+1}{\sqrt{r}} \Big|_0^{\sqrt{r}} = \frac{1}{r\sqrt{r}} \operatorname{Arctg} \sqrt{r} - \frac{1}{r\sqrt{r}} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{\pi\sqrt{r}}{2r}$$

۵۸- گزینه «۳»

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = (-xe^{-x} - e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$$

۵۹- گزینه «۳»

$$\int \frac{xdx}{(x^r+1)^r + (\sqrt{r})^r} = \int \frac{\frac{1}{r} du}{u^r + (\sqrt{r})^r} = \frac{1}{r\sqrt{r}} \operatorname{Arctg} \frac{u}{\sqrt{r}} + c = \frac{1}{r\sqrt{r}} \operatorname{Arctg} \frac{x^r+1}{\sqrt{r}} + c$$

بنابراین:

$$\int_0^{\sqrt{r}} \frac{xdx}{x^r + 2x^r + r} = \frac{1}{r\sqrt{r}} \operatorname{Arctg} \frac{x^r+1}{\sqrt{r}} \Big|_0^{\sqrt{r}} = \frac{1}{r\sqrt{r}} \operatorname{Arctg} \sqrt{r} - \frac{1}{r\sqrt{r}} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{\pi\sqrt{r}}{2r}$$

۶۰- گزینه «۴»

مشتق	انتگرال
+	$x^r \rightarrow e^x$
-	$rx \rightarrow e^x$
+	$r \rightarrow e^x$
-	$0 \rightarrow e^x$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^r e^x dx = (x^r e^x - r x e^x + r e^x) \Big|_0^1 = e - r$$

۶۱- گزینه «۴» از تغییر متغیر $x = \pi - t$ استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^r x} dx = \int_\pi^0 \frac{(\pi-t) \sin(\pi-t)}{1 + \cos^r(\pi-t)} (-dt) = \int_0^\pi \frac{(\pi-t) \sin t}{1 + \cos^r t} dt$$

$$\Rightarrow I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^r x} dx = \int_0^\pi \frac{\pi \sin t dt}{1 + \cos^r t} - \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 + \cos^r t} dt \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^r t} dt$$

برای حل انتگرال اخیر از تغییر متغیر $u = \cos t$ ، $du = -\sin t dt$ استفاده می‌کنیم:

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^r t} dt = \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^r} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^r} = \frac{\pi}{2} \operatorname{Arctg} u \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$$

۶۲- گزینه «۴» از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$dv = xe^{-x^r} dx, v = \frac{-1}{r} e^{-x^r}$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$\int_0^\infty x^r e^{-x^r} dx = \frac{-x}{r} e^{-x^r} \Big|_0^\infty + \frac{1}{r} \int_0^\infty e^{-x^r} dx = 0 + \frac{1}{r} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2r}$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \sin(tx^r) dx = \sin t^\delta \times r t + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} (\sin tx^r) dx = r t \sin t^\delta + \int_0^t x^r \cos(tx^r) dx$$

$$\int_r^r \frac{dx}{x-r} = \int_r^r \frac{dx}{x-r} + \int_r^r \frac{dx}{x-r}$$

و چون $\int_r^r \frac{dx}{x-r}$ و $\int_r^r \frac{dx}{x-r}$ و اگر می‌باشند. پس انتگرال داده شده نیز و اگر است.

$$\int_0^1 (rx+1)d(x^r-1) = \int_0^1 (rx+1)rx dx = \int_0^1 (rx^2 + rx) dx = (rx^3 + \frac{1}{2}rx^2) \Big|_0^1 = r$$

۶۶- گزینه «۴» تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ تابع فرد می‌باشد و بنابراین انتگرال خواسته شده برابر صفر است.

$$\int_0^\pi \operatorname{tg}^r x dx = \left(\frac{1}{\delta} \operatorname{tg}^\delta x - \frac{1}{r} \operatorname{tg}^r x + \operatorname{tg} x - x \right) \Big|_0^\pi = \frac{1}{15} - \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_1^\infty \left(\frac{cx}{rx^r+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{c}{r} \operatorname{Ln}(rx^r+1) - \operatorname{Ln}(x+1) \right) \Big|_1^\infty = \operatorname{Ln} \frac{(rx^r+1)^{\frac{c}{r}}}{x+1} \Big|_1^\infty$$

برای همگرایی لازم است صورت و مخرج هم‌درجه باشند، یعنی $c = 2$.

$$f(x) = \int_0^x (x-t)^r g(t) dt \Rightarrow f'(x) = (x-x)^r g(x) + \int_0^x r(x-t)g(t) dt = \int_0^x r(x-t)g(t) dt$$

$$f''(x) = r(x-x)g(x) + \int_0^x rg(t) dt = r \int_0^x g(t) dt \Rightarrow f''(1) = r \int_0^1 g(t) dt = r$$

۷۰- گزینه «۳» با توجه به جدول مقابل نتیجه می‌شود:

مشتق	انتگرال
$\oplus x^r$	$\sin x$
$\ominus rx$	$-\cos x$
$\oplus r$	$-\sin x$
$\ominus 0$	$\cos x$

$$\int x^r \sin x dx = -x^r \cos x + rx \sin x + r \cos x + c$$

۷۱- گزینه «۱» با استفاده از تغییر متغیر $x = \sin \theta$ ، $dx = \cos \theta d\theta$ نتیجه می‌شود:

$$\int \frac{\cot \theta}{1 + \sin^r \theta} d\theta = \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta (1 + \sin^r \theta)} = \int \frac{dx}{x(1+x^r)} = \operatorname{Ln}|x| - \frac{1}{r} \operatorname{Ln}(1+x^r) + c = \operatorname{Ln}|\sin \theta| - \frac{1}{r} \operatorname{Ln}(1 + \sin^r \theta) + c$$

۷۲- گزینه «۱» از تغییر متغیر $x = u^r$ ، $dx = ru^{r-1} du$ استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x}} = \int \frac{ru^{\frac{r}{2}} du}{1 + u} = r \int (u^{\frac{r}{2}} - u^{\frac{r}{2} + 1} + u^{\frac{r}{2} - 1} - u + 1 - \frac{1}{u+1}) du$$

$$= \frac{r}{5} u^{\frac{5}{2}} - u^{\frac{3}{2}} + \frac{r}{3} u^{\frac{3}{2}} - ru^{\frac{1}{2}} + ru - r \ln(u+1) + c = \frac{r}{5} x^{\frac{5}{4}} - x^{\frac{3}{4}} + \frac{r}{3} x^{\frac{3}{4}} - rx^{\frac{1}{4}} + rx^{\frac{1}{2}} - r \ln(1 + x^{\frac{1}{4}}) + c$$

۷۳- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$\int \frac{x^r}{x^{\frac{r}{2}} + \frac{r}{2}} dx = \int \frac{x^r dx}{(x^{\frac{r}{2}})^2 + \frac{r}{2}} = \int \frac{\frac{1}{r} du}{u^2 + \frac{r}{2}} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{\frac{r}{2}} \operatorname{Arctg} \frac{u}{\frac{r}{2}} = \frac{1}{2r} \operatorname{Arctg} \frac{x^{\frac{r}{2}}}{\frac{r}{2}}$$

$u = x^{\frac{r}{2}} \Rightarrow du = \frac{r}{2} x^{\frac{r}{2}-1} dx$

بنابراین:

$$\int_0^{\frac{r}{2}} \frac{x^r}{x^{\frac{r}{2}} + \frac{r}{2}} dx = \frac{1}{2r} \operatorname{Arctg} \frac{x^{\frac{r}{2}}}{\frac{r}{2}} \Big|_0^{\frac{r}{2}} = \frac{1}{2r} \operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{96}$$

۷۴- گزینه «۲»

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [x] \cos x dx = \int_0^1 0 dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_1^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \sin 1$$

۷۵- گزینه «۲» از تغییر متغیر $x = u^2$ ، $dx = 2u du$ استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \sqrt{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2u \sin u du = (-2u \cos u + 2 \sin u) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

۷۶- گزینه «۲»

$$I = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\int_0^x e^{t^r} dt)^r}{\int_0^x e^{t^r} dt} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r \int_0^x e^{t^r} dt}{e^{x^r}} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r e^{x^r}}{r x e^{x^r}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

۷۷- گزینه «۳»

$$1 + \cos x = u \Rightarrow -\sin x dx = du \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 2 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$I = \int_1^2 -\sqrt{u} du = \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

۷۸- گزینه «۲»

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9-x^2} = -\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2 - (3)^2} = -\frac{1}{2 \times 3} \operatorname{Ln} \frac{x-3}{x+3} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{1}{6} \operatorname{Ln} \frac{x+3}{x-3} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} [\operatorname{Ln} \frac{9}{3} - \operatorname{Ln} \frac{1}{5}] = \frac{1}{6} [\operatorname{Ln} 3 - \operatorname{Ln} 5] = \frac{1}{6} \operatorname{Ln} \frac{3}{5} = -\frac{1}{6} \operatorname{Ln} \frac{5}{3}$$

۷۹- گزینه «۲»

$$\int_{-1}^2 (x + |x|) dx = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^2 |x| dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \int_0^2 x dx = \frac{0}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{0}{2} - \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{3}{2}$$

۸۰- گزینه «۴»

$$\begin{cases} x = \sec \theta \Rightarrow dx = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta d\theta \\ x = -2 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}, x = -1 \Rightarrow \theta = \pi \end{cases}$$

$$I = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{\sqrt{(\sec^2 \theta - 1)}}{\sec \theta} (\sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot d\theta) = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta} \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot d\theta = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} |\operatorname{tg} \theta| \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot d\theta$$

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} -\operatorname{tg}^2 \theta d\theta = (\theta - \operatorname{tg} \theta) \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = \frac{\pi}{3} - (\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$$

چون θ در ربع دوم قرار دارد لذا $\operatorname{tg} \theta < 0$ خواهد بود.

۸۱- گزینه «۲» از تغییر متغیر $u = 1 - 2x$ ، $du = -2dx$ استفاده می‌کنیم.

$$\int f(1-2x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{-1} f(u) du = -\frac{1}{2} \int f(u) du = -\frac{1}{2} F(u) = -\frac{1}{2} F(1-2x)$$

۸۲- گزینه «۴»

$$\int_1^{\infty} e^{-x^r + rx} dx = e \int_0^{\infty} e^{-(x-1)^r} dx = e \int_0^{\infty} e^{-u^r} du = e \frac{\sqrt{\pi}}{r}$$

۸۳- گزینه «۱»

$$f(x) = \int_{rx}^{rx^2+2r} \sqrt{\cos t} dt \Rightarrow f'(x) = rx \sqrt{\cos(rx^2+2r)} - r \sqrt{\cos rx} \Rightarrow f'(0) = -r$$

۸۴- گزینه «۲»

$$f(x) = 0 \Rightarrow \int_0^x \frac{r + e^{-t}}{1 + \operatorname{tg}^2 t} dt = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (f^{-1})(0) = \frac{1}{f'(0)}$$

$$f'(x) = \frac{r + e^{-x}}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \Rightarrow f'(0) = r \Rightarrow (f^{-1})(0) = \frac{1}{r}$$

۸۵- گزینه «۱» از تغییر متغیر $x = \operatorname{Sint}$ استفاده می‌کنیم، در اینصورت $dx = \operatorname{Cost} dt$ و وقتی $0 < x < 1$ باشد، آنگاه $0 < t < \frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

$$\int_0^1 x^r \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin}^r t \operatorname{Cos}^r t dt = \frac{1}{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin}^{r-1} t dt = \frac{1}{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{Cos}^2 t}{2} dt = \frac{1}{r} \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{8} \operatorname{Sin} 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

۸۶- گزینه «۴»

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^r + x} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x(x+1)} = \operatorname{Ln} \frac{x}{x+1} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} = \operatorname{Ln} \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} - \operatorname{Ln} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \operatorname{Ln} \frac{1}{4} - \operatorname{Ln} \frac{1}{3} = \operatorname{Ln} \frac{3}{4}$$

۸۷- گزینه «۳»

$$\int_e^{e^r} \frac{dx}{x} = \operatorname{Ln} x \Big|_e^{e^r} = \operatorname{Ln} e^r - \operatorname{Ln} e = r$$

۸۸- گزینه «۳»

$$\int_{-1}^2 (x-1)(rx+2) dx = \int_{-1}^2 (rx^2 + x - r) dx = \frac{r}{3} x^3 + \frac{x^2}{2} - rx \Big|_{-1}^2 = \frac{-r}{3}$$

۸۹- گزینه «۴»

$$\int_{-1}^2 \frac{x dx}{x+2} = \int_{-1}^2 \frac{(x+2)-2}{x+2} dx = \int_{-1}^2 \left(1 - \frac{2}{x+2} \right) dx = (x - 2 \operatorname{Ln}(x+2)) \Big|_{-1}^2 = r - 4 \operatorname{Ln} r$$

۹۶- گزینه «۴»

$$\tau + \sin x = u \Rightarrow \begin{cases} \cos x dx = du \\ x = 0 \Rightarrow u = \tau, x = \frac{\pi}{\tau} \Rightarrow u = \tau \end{cases}$$

$$I = \int_{\tau}^{\tau} \sqrt{u} \cdot du = \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{\tau}^{\tau} = \frac{2}{3} [\sqrt{\tau^3} - \sqrt{\tau^3}] = \frac{2}{3} [\tau\sqrt{\tau} - \tau\sqrt{\tau}]$$

۹۷- گزینه «۳» انتگرال زیر باید به خاطر سپرده شود و می‌توان از انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء به این نتیجه رسید.

$$\int Lnu \cdot du = uLn u - u$$

$$\int_0^1 Ln(1+x) dx = [(1+x)Ln(1+x) - (1+x)]_0^1 = \tau Ln \tau - \tau - (-1) = \tau Ln \tau - 1$$

$$I = \int \frac{dx}{\tau + x^{\tau}} = \frac{1}{\tau} \left[\text{Arctg} \frac{x}{\tau} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\tau} \text{Arctg}(\infty) = \frac{1}{\tau} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\tau}$$

۹۸- گزینه «۲»

$$\int_0^{+\infty} x^{\tau} e^{-x} dx = \Gamma(\tau) = \tau! = 6$$

۹۹- گزینه «۱» انتگرال فوق تابع گاما به ازای $x = \tau$ می‌باشد، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^{\tau} dt}{\tau x^{\Delta}} \stackrel{\text{HOP}}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^{\tau}}{1 \circ x^{\tau}} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\tau}}{1 \circ x^{\tau}} = \frac{1}{1 \circ}$$

۱۰۰- گزینه «۳»

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = Ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^{\infty} = Ln 1 - Ln \frac{1}{2} = Ln 2$$

۱۰۱- گزینه «۳»

$$f'(x) = \frac{1}{\tau + x^{\tau}} \times 1 - \frac{1}{\tau + (-x)^{\tau}} \times (-1) = \frac{\tau}{\tau + x^{\tau}} > 0 \Rightarrow f \text{ اکیداً صعودی}$$

۱۰۲- گزینه «۱»

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\int_0^b e^{x^{\tau} - b^{\tau}} (x^{\tau} + 1) dx}{b} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\int_0^b e^{x^{\tau}} (x^{\tau} + 1) dx}{be^{b^{\tau}}} \stackrel{\text{HOP}}{\sim} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{b^{\tau}} (b^{\tau} + 1)}{e^{b^{\tau}} (1 + \tau b^{\tau})} = \frac{1}{\tau}$$

۱۰۳- گزینه «۲»

$$A = \int_1^{\tau} \frac{x dx}{\sqrt{\tau x - x^{\tau}}} = \int_1^{\tau} \frac{x dx}{\sqrt{\tau^2 - (\tau - x)^{\tau}}}$$

۱۰۴- گزینه «۲» ابتدا انتگرال را به شکل روبرو می‌نویسیم:

حال از تغییر متغیر $dx = -du$, $u = \tau - x$ استفاده می‌کنیم:

$$A = \int_1^{-1} \frac{(\tau - u)(-du)}{\sqrt{\tau^2 - u^{\tau}}} = \int_{-1}^1 \frac{\tau - u}{\sqrt{\tau^2 - u^{\tau}}} du = \int_{-1}^1 \frac{\tau du}{\sqrt{\tau^2 - u^{\tau}}} + \int_{-1}^1 \frac{-u du}{\sqrt{\tau^2 - u^{\tau}}}$$

$$A = \int_{-1}^1 \frac{\tau du}{\sqrt{\tau^2 - u^{\tau}}} = \tau \text{Arcsin} \frac{u}{\tau} \Big|_{-1}^1 = \frac{2\pi}{\tau}$$

انتگرال دوم برابر صفر است، زیرا تابع $\frac{-u}{\sqrt{\tau^2 - u^{\tau}}}$ فرد می‌باشد، بنابراین:

$$\int_{Ln \tau}^{Ln \Lambda} e^x \sqrt{1 + e^x} dx = \left[\frac{2}{3} (1 + e^x) \sqrt{1 + e^x} \right]_{Ln \tau}^{Ln \Lambda} = 18 - \frac{16}{3} = \frac{38}{3}$$

۱۰۵- گزینه «۳»

$$\int_{\tau}^{\infty} \frac{dx}{xLn^{\tau} x} = \frac{-1}{Ln x} \Big|_{\tau}^{+\infty} = \frac{1}{Ln \tau}$$

۹۰- گزینه «۲»

$$\int_0^{\frac{\pi}{\tau}} \frac{x dx}{1 + x \text{tg} x} = \int_0^{\frac{\pi}{\tau}} \frac{x \cos x dx}{\cos x + x \sin x} = Ln(\cos x + x \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{\tau}} = Ln \frac{\pi}{\tau}$$

۹۱- گزینه «۱»

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^{\tau} dt}{\sqrt{a+t}} \stackrel{\text{HOP}}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^{\tau+1}}{\tau+1}}{bx - \sin x}$$

۹۲- گزینه «۲»

اگر $b \neq 1$ باشد حاصل حد برابر صفر خواهد بود که خلاف فرض است، بنابراین $b = 1$.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^{\tau}}{\sqrt{a+x}}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^{\tau}}{\sqrt{a}}}{\frac{x^{\tau}}{\tau}} = \frac{\tau}{\sqrt{a}}$$

پس $\frac{\tau}{\sqrt{a}} = 1$ و در نتیجه $a = \tau^2$.

۹۳- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^{\tau} x^{\tau}) dt}{x^{\Delta}} &\stackrel{\text{HOP}}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^{\tau} + \int_0^x \tau t^{\tau} x \cos(t^{\tau} x^{\tau}) dt}{\Delta x^{\tau}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x^{\tau}}{\Delta x^{\tau}} + \frac{\tau}{\Delta} \times \frac{\int_0^x t^{\tau} \cos(t^{\tau} x^{\tau}) dt}{x^{\tau}} \right) \stackrel{\text{HOP}}{\sim} \frac{1}{\Delta} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau}{\Delta} \times \frac{x^{\tau} \cos x^{\tau} - \int_0^x \tau t^{\tau} x \sin(t^{\tau} x^{\tau}) dt}{\tau x^{\tau}} \\ &= \frac{1}{\Delta} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau}{\Delta} \times \left(\frac{\cos x^{\tau}}{\tau} - \frac{\int_0^x \tau t^{\tau} \sin(t^{\tau} x^{\tau}) dt}{\tau x} \right) = \frac{1}{\Delta} + \frac{\tau}{15} - \frac{\tau}{15} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^{\tau} \sin(t^{\tau} x^{\tau}) dt}{x} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{HOP}}{\sim} \frac{1}{\tau} - \frac{\tau}{15} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\tau} \sin x^{\tau} - \int_0^x \tau x t^{\tau} \cos(t^{\tau} x^{\tau}) dt}{1} = \frac{1}{\tau}$$

۹۴- گزینه «۲» اگر مقدار ماده رادیواکتیو در زمان t را $x(t)$ فرض کنیم، با توجه به فرضیات مسأله به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{dx}{dt} = 10 - \frac{\tau}{3} x \Rightarrow x(t) = 15 + ce^{-\frac{\tau}{3} t}$$

حال اگر $t \rightarrow +\infty$ ، مقدار ماده تقریباً ۱۵ گرم خواهد بود.

۹۵- گزینه «۱» از رابطه $|f'(x)| \leq 1$ نتیجه می‌شود:

$$-1 \leq f'(x) \leq 1 \Rightarrow \int_0^1 -1 dx \leq \int_0^1 f'(x) dx \leq \int_0^1 1 dx \Rightarrow -1 \leq f(1) - f(0) \leq 1$$

$$-1 \leq f'(x) \leq 1 \Rightarrow \int_1^0 -1 dx \leq \int_1^0 f'(x) dx \leq \int_1^0 1 dx \Rightarrow -1 \leq f(0) - f(1) \leq 1$$

از دو رابطه فوق نتیجه می‌شود $0 \leq f(0) \leq 2$ و $-2 \leq f(0) \leq 0$ ، بنابراین $f(0) = 0$.

۱۰۶- گزینه «۱» از تغییر متغیر $x = \text{tgt}$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $dx = (1 + \text{tg}^2 t) dt$ و انتگرال داده شده بصورت زیر در می‌آید:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\text{tg}^2 t + 1}}{\text{tg}^2 t} (1 + \text{tg}^2 t) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{Cost}}{\text{Sin}^2 t} dt = \left[\frac{-1}{\text{rSin}^2 t} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3} (4 - \sqrt{2})$$

۱۰۷- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2 + (1-x^2)}{x^2(1-x^2)} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[-\frac{1}{2} \text{Ln} \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{x} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

۱۰۸- گزینه «۲» کافی است از گزینه‌ها مشتق بگیرید.

۱۰۹- گزینه «۱» از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = \text{Ln} x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^1 x \text{Ln} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \text{Ln} x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{2} dx = 0 - \frac{x^2}{4} \Big|_0^1 = -\frac{1}{4}$$

۱۱۰- گزینه «۲»

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos(m+n)x - \cos(m-n)x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m+n} \sin(m+n)x - \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \right) \Big|_0^{2\pi}$$

واضح است که اگر m و n اعداد صحیح و نامساوی باشند حاصل عبارت فوق برابر صفر خواهد بود.

۱۱۱- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} u = xe^x \Rightarrow du = (e^x + xe^x) dx \\ dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{x+1} \end{cases}$$

$$f(x) = \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx = \frac{-xe^x}{x+1} + \int e^x dx = \frac{-xe^x}{x+1} + e^x + c = \frac{e^x}{x+1} + c$$

از $f(0) = 1$ نتیجه می‌شود که $c = 0$. بنابراین $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$

۱۱۲- گزینه «۳» ابتدا نشان می‌دهیم I همگرایی مطلق است. در فاصله $[0, +\infty)$ داریم $\left| \frac{\sin x}{(1+x)^2} \right| \leq \frac{1}{(1+x)^2}$ و چون $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2}$ همگراست، پس I همگرایی مطلق است.

حال ثابت می‌کنیم J همگراست. بدین منظور برای محاسبه J از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x} dx = \left[\frac{\sin x}{1+x} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^2} dx = 0 + I = I$$

پس J همگراست. ولی نشان می‌دهیم که $\int_0^{\infty} \left| \frac{\cos x}{1+x} \right| dx$ واگراست. بدین منظور توجه کنید که:

$$\left| \frac{\cos x}{1+x} \right| \geq \frac{\cos^2 x}{1+x} = \frac{1 - \cos 2x}{2(1+x)}$$

و انتگرال

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\cos x}{1+x} \right| dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left| \frac{\cos 2x}{2(1+x)} \right| dx$$

واگراست (زیرا $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{2(1+x)} dx$ همگراست و $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x}$ واگراست). پس $\int_0^{\infty} \left| \frac{\cos x}{1+x} \right| dx$ نیز واگراست

۱۱۳- گزینه «۱»
$$\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x+2}} dx = \int_1^2 \frac{x+2-1}{\sqrt{x+2}} dx = \int_1^2 \left(\sqrt{x+2} - \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) dx = \left(\frac{2}{3} (x+2)\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+2} \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3}$$

۱۱۴- گزینه «۴» انتگرال داده شده، تبدیل لاپلاس تابع $\cos t$ می‌باشد.

۱۱۵- گزینه «۴»
$$u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2 \Rightarrow dx = 2u du$$

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}} = \int \frac{2u du}{u^2 - u} = 2 \int \frac{du}{u - 1} = 2 \text{Ln} |u - 1| + c = 2 \text{Ln} |\sqrt{x} - 1| + c$$

۱۱۶- گزینه «۳»
$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin tx}{x} dx \Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\sin t^2}{t} + \int_0^t \cos tx dx = \frac{\sin t^2}{t} + \frac{\sin tx}{t} \Big|_0^t = \frac{2 \sin t^2}{t}$$

۱۱۷- گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:
$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 2x - 8} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)(x+4)}$$

چون مخرج کسر عبارت انتگرال به ازای $x = 2$ صفر می‌شود و این ریشه در فاصله $[0, 4]$ قرار دارد بنابراین انتگرال داده شده نامرئ می‌باشد و چون در همسایگی $x = 2$ داریم:

بنابراین در همسایگی $x = 2$ عبارت مقابل انتگرال معادل $\frac{1}{6(x-2)}$ می‌باشد و چون این انتگرال واگراست. پس انتگرال داده شده نیز واگراست.

۱۱۸- گزینه «۲»
$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin(tx)}{x} dx \Rightarrow f'(t) = \frac{\sin t^2}{t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sin(tx)}{x} \right) dx$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{\sin t^2}{t} + \int_0^t \cos x dx = \frac{\sin t^2}{t} + \frac{1}{t} \sin(tx) \Big|_0^t = \frac{2 \sin t^2}{t}$$

۱۱۹- گزینه «۲»
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\text{ch} x} = \int_0^{\infty} \frac{2 dx}{e^x + e^{-x}} = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^x dx}{(e^x)^2 + 1} = 2 \text{Arctg} e^x \Big|_0^{\infty} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

۱۲۰- گزینه «۴»
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = \int_0^{+\infty} \frac{2 dx}{e^x + e^{-x}} = \int_0^{+\infty} \frac{2e^x}{(e^x)^2 + 1} dx = 2 \text{Arctg} e^x \Big|_0^{+\infty} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

۱۲۱- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.
$$F(x) = x \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - vt}} \Rightarrow F'(x) = 0$$

$$F'(x) = \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - vt}} + x \times \frac{2x}{\sqrt{x^4 - vx^2}} \Rightarrow F'(x) = \frac{2}{x}$$

بنابراین معادله خط مماس در نقطه $x = 2$ به صورت روبرو در می‌آید:

$$y - 0 = \frac{2}{x} (x - 2) \Rightarrow y = \frac{2}{x} x - \frac{4}{x} = \frac{-4}{x}$$

در محل تقاطع با محور y داریم $x = 0$ و در نتیجه $y = \frac{-4}{x}$

۱۲۲- گزینه «۱» شیب منحنی همان مشتق منحنی می‌باشد، بنابراین:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1+x)(1+y)} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1+y}} = \sqrt{1+x} dx$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه فوق به دست می‌آید:

$$2\sqrt{1+y} = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c$$

و چون منحنی از $(-1, -1)$ عبور می‌کند لذا $c = 0$. پس معادله منحنی به شکل روبرو در می‌آید:

$$2\sqrt{y+1} = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$$

برای به دست آوردن محل تلاقی با محور y ها، x را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x = 0 \Rightarrow 2\sqrt{y+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{-8}{9}$$

۱۲۳- گزینه «۳» چون $f(1) = 0$ ، بنابراین:

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۱۲۴- گزینه «۲»

$$I = \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x} dx = 2 \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$$

$$I = 2 \int \frac{du}{u^2} = \frac{-2}{u} = -\frac{2}{\sin x} \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} = -\frac{2}{\sin x} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -2 - (-4) = 2$$

۱۲۵- گزینه «۴»

$$\int [\text{Arcsin}(2x)] \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{\text{Arcsin } 2x}{u} \left(\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{1}{4} u^2 = \frac{1}{4} (\text{Arcsin } 2x)^2$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{2}} F(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4} (\text{Arcsin } 2\alpha)^2 \right] = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{4} \times (\text{Arcsin } 2\alpha)^2 = \frac{1}{4} \times \left[\text{Arcsin} \left(2 \times \frac{1}{2} \right) \right]^2 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{16}$$

۱۲۶- گزینه «۱» با تغییر متغیر داریم:

$$u = 1 + \text{Ln}x \Rightarrow \begin{cases} dx = du, u-1 = \text{Ln}x \\ x=1 \Rightarrow u=1+\text{Ln}1=1, x=e \Rightarrow u=2 \end{cases}$$

$$I + \int \frac{\text{Ln}x}{x(1+\text{Ln}x)} dx = \int \frac{u-1}{u} (du) = \int \left(1 - \frac{1}{u} \right) du = [u]_1^2 - [\text{Ln}u]_1^2 = (2-1) - (\text{Ln}2 - \text{Ln}1) = 1 - \text{Ln}2$$

۱۲۷- گزینه «۴»

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}} \right) dx = \left(x - \frac{1}{a} \text{Ln}(1+e^{ax}) \right) \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a} (ax - \text{Ln}(1+e^{ax})) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a} \text{Ln} \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a} \text{Ln} 1 - \frac{1}{a} \text{Ln} \frac{1}{2} = \frac{1}{a} \text{Ln} 2$$

۱۲۸- گزینه «۲» از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = \cos(\text{Ln}x) \Rightarrow du = -\frac{1}{x} \sin(\text{Ln}x) \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$I = \int \cos(\text{Ln}x) dx = x \cos(\text{Ln}x) + \int \frac{\sin(\text{Ln}x) dx}{x}$$

مجدداً برای محاسبه I' از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = \sin(\text{Ln}x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} \cos(\text{Ln}x) \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$I' = \int \sin(\text{Ln}x) dx = x \sin(\text{Ln}x) - \int \cos(\text{Ln}x) dx = x \sin(\text{Ln}x) - I$$

با جایگزینی مقدار به دست آمده برای I' در رابطه اولیه خواهیم داشت:

$$I = x \cos(\text{Ln}x) + x \sin(\text{Ln}x) - I \Rightarrow I = \frac{x}{2} (\sin(\text{Ln}x) + \cos(\text{Ln}x))$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \cos(\text{Ln}x) dx = \frac{x}{2} (\sin(\text{Ln}x) + \cos(\text{Ln}x)) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$129- \text{گزینه «۱» با استفاده از تغییر متغیر } u = e^x, dx = \frac{du}{u} \text{ خواهیم داشت: } \int \frac{dx}{e^{2x} - fe^x + f} = \int \frac{du}{u(u^2 - fu + f)}$$

$$\frac{1}{u(u^2 - fu + f)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-f} + \frac{C}{(u-f)^2}$$

برای محاسبه انتگرال اخیر از روش تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم:

که از رابطه فوق $A = \frac{1}{f}, B = -\frac{1}{f}, C = \frac{1}{f}$ به دست می‌آید.

$$\int \frac{du}{u(u^2 - fu + f)} = \int \frac{1}{f} \frac{du}{u} - \int \frac{1}{f} \frac{du}{u-f} + \int \frac{1}{f} \frac{du}{(u-f)^2} = \frac{1}{f} \text{Ln}|u| - \frac{1}{f} \text{Ln}|u-f| - \frac{1}{f(u-f)} + c = \frac{1}{f} \text{Ln} \left| \frac{e^x}{e^x - f} \right| - \frac{1}{f(e^x - f)} + c$$

۱۳۰- گزینه «۱» از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = \text{Arctg}x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\int x^2 \text{Arctg}x dx = \frac{x^3}{3} \text{Arctg}x - \int \frac{x^3}{3(1+x^2)} dx = \frac{x^3}{3} \text{Arctg}x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3 + x - x}{x^2 + 1} dx = \frac{x^3}{3} \text{Arctg}x - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \text{Arctg}x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \text{Ln}(1+x^2) + c$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x^2}{2x} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x} = \infty$$

۱۳۱- گزینه «۱»

۱۳۲- گزینه «۲»

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_1^{x+h} e^{-t^2} dt - \int_1^x e^{-t^2} dt}{h} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-(x+h)^2}}{1} = e^{-x^2}$$

روش اول:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_1^{x+h} e^{-t^2} dt - \int_1^x e^{-t^2} dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \text{ روش دوم: فرض کنید } F(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt \text{ در این صورت:}$$

$$F(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt \Rightarrow F'(x) = e^{-x^2} \text{ حد اخیر همان } F'(x) \text{ می‌باشد.}$$

۱۳۳- گزینه «۳»

$$x = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1+4y^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{1+4y^2} \Rightarrow y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{8y}{2\sqrt{1+4y^2}} y' = 4y \Rightarrow y'' - 4y = 0$$

۱۳۴- گزینه «۴»

$$f(x) = \int_0^x (x-t)g(t)dt \Rightarrow f'(x) = (x-x)g(x) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}(x-t)g(t)dt = \int_0^x g(t)dt$$

۱۳۵- گزینه «۳»

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx = -\ln(e^{-x}+1) \Big|_0^\infty = \ln 2$$

۱۳۶- گزینه «۱»

$$u = \operatorname{tg} x \Rightarrow du = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x + y^2 \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + y^2} = \frac{1}{y} \operatorname{Arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{y}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2y}$$

۱۳۷- گزینه «۱» از تغییر متغیر $x = 1 \circ^1 \ln 1 \circ dt$ استفاده می‌کنیم. در این صورت انتگرال به فرم زیر در می‌آید:

$$\int_1^t \frac{dx}{\log x} = \int_0^{\log t} \frac{1 \circ^1 \ln 1 \circ dt}{t} \geq \int_0^{\log t} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_0^{\log t} \Rightarrow \text{واگرا}$$

۱۳۸- گزینه «۴» مشتق تابع $y = g(x^2)$ برابر $y' = 2xg'(x^2)$ می‌باشد، بنابراین:

$$y' = 2xg'(x^2) = 2x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{\text{انتگرال}} y = g(x^2) = \frac{2}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} + c$$

از $g(1) = 1$ نتیجه می‌شود $C = \frac{2}{5}$. بنابراین $g(x^2) = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{5}$. با قرار دادن $x = 2$ نتیجه می‌شود $g(4) = \frac{6\sqrt{2}}{5}$.

۱۳۹- گزینه «۲»

$$f'(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (x-t)g(t)dt = \int_0^x (x-t)g(t)dt$$

$$f''(x) = \int_0^x g(t)dt \Rightarrow f''(1) = \int_0^1 g(t)dt = 2$$

۱۴۰- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1+\sin \pi t)^{\frac{1}{t}} dt}{x} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\sin \pi x)^{\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+\pi x)^{\frac{1}{x}} = e^\pi$$

۱۴۱- گزینه «۴»

$$f(x) = \int_0^{x^2} x f(t) dt \Rightarrow f'(x) = x f(x^2) \cdot 2x + \int_0^{x^2} f(t) dt$$

۱۴۲- گزینه «۴»

$$\int_0^1 x^2 f''(x) dx = (x^2 f'(x) - 2x f(x) + 2f(x)) \Big|_0^1 = f'(1) - 2f'(1) + 2f(1) - 2f(0) = -15$$

مشتق	انتگرال
$\oplus x^2$	$f''(x)$
$\ominus 2x$	$f'(x)$
$\oplus 2$	$f(x)$
$\ominus 0$	$f(x)$

۱۴۳- گزینه «۳» از تغییر متغیر $x = u^2$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $dx = 2udu$. بنابراین:

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1} = \int_1^2 \frac{2u^2 du}{u-1} = \int_1^2 (2u + 2 + \frac{2}{u-1}) du = u^2 + 2u + 2\ln(u-1) \Big|_1^2 = 7 + 2\ln 2$$

۱۴۴- گزینه «۴» از روش تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x+4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

از ضرب کردن طرفین رابطه در $x(x^2+4)$ به دست می‌آید:

$$A(x^2+4) + x(Bx+C) = x+4 \Rightarrow A=1, B=-1, C=1$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-x+1}{x^2+4} dx = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{x}{2} + C$$

۱۴۵- گزینه «۲» از تغییر متغیر $u = \sqrt{x+1}$ ، $x = u^2 - 1$ و $dx = 2udu$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{1-x} dx = \int \frac{2u^2 du}{2-u^2} = \int \frac{(2u^2-4)+4}{2-u^2} du = \int (-2 + \frac{4}{2-u^2}) du$$

$$= \int -2 du - 4 \int \frac{du}{u^2-2} = -2u - \frac{4}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}} \right| + c = -2\sqrt{1+x} + \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}} \right| + c$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{2}, f(1) = 0$$

بنابراین:

$$y = x^2 f(x) \Rightarrow y' = 2x f(x) + x^2 f'(x) \Rightarrow y'(1) = 2f(1) + f'(1) = \frac{-1}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

۱۴۸- گزینه «۴» با استفاده از تغییر متغیر $u = \ln x$ ، $du = \frac{dx}{x}$ نتیجه می‌شود.

$$f(x) = \int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln(\ln x) + c$$

بنابراین:

$$f(e^2) - f(e) = \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2$$

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1+x^2} - \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

برای محاسبه انتگرال دوم یعنی $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ از تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ ، $dx = \frac{-1}{t^2} dt$ استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_\infty^0 \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{1+\frac{1}{t^2}} = \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{1+t^2}$$

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2} dx - \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 0$$

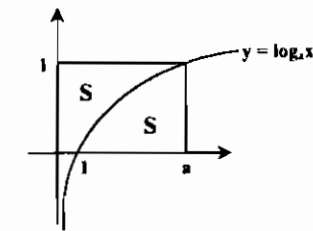
با جایگزینی رابطه اخیر در I خواهیم داشت:

۱۵۰- گزینه «۴» انتگرال مورد نظر برابر $\Gamma(6)$ می باشد.

$$\int_0^{\infty} x^5 e^{-x} dx = \Gamma(6) = 5! = 120$$

۱۵۱- گزینه «۳» $F'(x) = \tau e^{-\tau x^\tau} - e^{-x^\tau}$, $F'(x) = 0 \Rightarrow \tau e^{-\tau x^\tau} = e^{-x^\tau} \Rightarrow e^{\tau x^\tau} = \tau \Rightarrow \tau x^\tau = \text{Ln } \tau \Rightarrow x = \pm \sqrt[\tau]{\frac{1}{\tau} \text{Ln } \tau}$

۱۵۲- گزینه «۳» $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arcsin } x \Big|_{-1}^1 = \pi$



روش اول: $I = \int_1^a \log_a x dx + \int_1^a a^y dy = \frac{1}{\text{Lna}} (x \text{Ln} x - x) \Big|_1^a + \frac{1}{\text{Lna}} a^y \Big|_0^1 = a$

روش دوم: انتگرالهای داده شده به ترتیب برابر S_1 و S_2 می باشند و چون $S_1 + S_2 = a$ پس $I = a$

۱۵۴- گزینه «۲»

۱۵۵- گزینه «۳»

۱۵۶- گزینه «۲» از تغییر متغیر $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$ استفاده می کنیم:

$$\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt$$

برای محاسبه انتگرال اخیر می توانیم از تابع بتا استفاده کنیم.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(3) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{3}{2} \Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{4}{15}$$

۱۵۷- گزینه «۳» انتگرال داده شده در \circ ناسره می باشد. وقتی $x \rightarrow \circ$ داریم $\sin^m x \sim x^m$ بنابراین انتگرال به صورت $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^{n-m}}$ می آید. و بنابراین برای همگرایی لازم است $n-m < 1$ یا $n < m+1$.

۱۵۸- گزینه «۲» $f(x) = \int_{\tau}^{x^{\tau}} \frac{dx}{1+t^{\tau}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\tau x}{1+(x^{\tau})^{\tau}} \Rightarrow f'(\tau) = \frac{\tau}{9}$

۱۵۹- هیچکدام از گزینه ها صحیح نیست. $f(x) = 0 \Rightarrow \int_1^{\text{Ln} x} \sqrt{1+e^t} dt = 0 \Rightarrow \text{Ln} x = 1 \Rightarrow x = e$

$$f(x) = \int_1^{\text{Ln} x} \sqrt{1+e^t} dt \Rightarrow f'(x) = \sqrt{1+e^{\text{Ln} x}} \times \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{1+x}}{x} \Rightarrow f'(e) = \frac{\sqrt{1+e}}{e}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \times x - \sqrt{1+x}}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-x-\tau}{\tau x^{\tau} \sqrt{1+x}} \Rightarrow f''(e) = \frac{-e-\tau}{\tau e^{\tau} \sqrt{1+e}}$$

$$(f^{-1})'(0) = -\frac{f'(e)}{(f'(e))^{\tau}} = \frac{e(e+\tau)}{\tau(1+e)^{\tau}}$$

۱۶۰- گزینه «۱» $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{x^{\tau}} e^{t^{\tau}} \sin t dt}{x^{\tau}} \stackrel{\text{HOP}}{\sim} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^{\tau}} \sin x^{\tau} \times \tau x}{\tau x^{\tau}} \stackrel{\text{همبازی}}{\sim} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^{\tau}} \times \tau x^{\tau}}{\tau x^{\tau}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{x^{\tau}} = \circ$

۱۶۱- گزینه «۳» با مشتق گیری از طرفین رابطه داده شده به دست می آید:

$$x^{\tau} f(x^{\tau} + 1) f'(x^{\tau} + 1) = \frac{f(x^{\tau} + 1)}{(x^{\tau} + \tau)^{\tau}} \times \tau x^{\tau} \Rightarrow f'(x^{\tau} + 1) = \frac{1}{\tau(x^{\tau} + \tau)^{\tau}}$$

با ضرب کردن طرفین رابطه اخیر در τx^{τ} خواهیم داشت:

$$\tau x^{\tau} f'(x^{\tau} + 1) = \frac{\tau x^{\tau}}{\tau(x^{\tau} + \tau)^{\tau}} \Rightarrow \int \tau x^{\tau} f'(x^{\tau} + 1) dx = \int \frac{\tau x^{\tau}}{\tau(x^{\tau} + \tau)^{\tau}} dx \Rightarrow f(x^{\tau} + 1) = \frac{-1}{\tau(x^{\tau} + \tau)} + c$$

$$\Rightarrow f(x^{\tau} + 1) = \frac{-1}{\tau(x^{\tau} + 1)} + c \Rightarrow f(u) = \frac{-1}{\tau(u+1)} + c$$

روش دوم: در رابطه داده شده قرار می دهیم $u = x^{\tau} + 1$ و سپس طرفین رابطه مشتق می گیریم:

$$f^{\tau}(u) = \int_0^u \frac{f(t)}{(t+1)^{\tau}} dt \Rightarrow \tau f(u) f'(u) = \frac{f(u)}{(u+1)^{\tau}} dt \Rightarrow f'(u) = \frac{1}{\tau(u+1)^{\tau}} \Rightarrow f(u) = \frac{-1}{\tau(u+1)} + c$$

۱۶۲- گزینه «۲»

۱۶۳- گزینه «۴» از تغییر متغیر $u = y^{\tau} + \tau y + \delta$, $du = \tau(y^{\tau} + 1) dy$ استفاده می کنیم:

$$\int_1^{\tau} \frac{(y^{\tau} + 1) dy}{\sqrt{y^{\tau} + \tau y + \delta}} = \frac{1}{\tau} \int_1^{\tau} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{\tau}{\tau} \sqrt{u} \Big|_1^{\tau} = 4$$

۱۶۴- گزینه «۱» $\int_1^a \log_a x^{\tau} dx = \frac{\tau}{\text{Lna}} \int_1^a \frac{\text{Ln} x}{x} dx = \frac{\tau}{\text{Lna}} \times (\text{Ln} x)^{\tau} \Big|_1^a = \tau \text{Lna}$

۱۶۵- هیچکدام از گزینه ها صحیح نیست. با دو بار استفاده از روش جز به جز می توان نتیجه گرفت:

$$\int_1^e \cos(\text{Ln} x) dx = \frac{x}{\tau} (\sin(\text{Ln} x) + \cos(\text{Ln} x)) \Big|_1^e = \frac{e}{\tau} (\sin 1 + \cos 1) - \frac{1}{\tau}$$

۱۶۶- گزینه «۴»

۱۶۷- هیچکدام از گزینه ها صحیح نیست.

$$x + \epsilon = u^{\tau} \Rightarrow dx = \tau u du$$

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+\epsilon}} = \int \frac{\tau u du}{(u^{\tau}-\delta)u} = \tau \int \frac{du}{u^{\tau}-\delta} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \text{Ln} \frac{u-\sqrt{\delta}}{u+\sqrt{\delta}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \text{Ln} \frac{x+\epsilon-\sqrt{\delta}}{x+\epsilon+\sqrt{\delta}}$$

$$F(\tau) - F(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \text{Ln} \frac{\tau\epsilon-\sqrt{\delta}}{\tau\epsilon+\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \text{Ln} \frac{\epsilon-\sqrt{\delta}}{\epsilon+\sqrt{\delta}}$$

۱۶۸- هیچکدام از گزینه ها صحیح نیست. $\int_{\tau}^{\tau} \frac{\tau x - \tau}{x^{\tau} - \tau x + \tau} dx = \text{Ln}(x^{\tau} - \tau x + \tau) \Big|_{\tau}^{\tau} = \text{Ln} \epsilon - \text{Ln} \tau = \text{Ln} \tau$

مشتق	انتگرال
$\oplus x^r$	$\cos x$
$\ominus 2x$	$\sin x$
$\oplus 2$	$-\cos x$
$\ominus 0$	$-\sin x$

$$\Rightarrow F(x) = \int x^r \cos x dx = x^r \sin x + rx \cos x - r \sin x + c$$

از $F(0) = 0$ ، نتیجه می‌شود $c = 0$. بنابراین $F(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^r}{4} - r$

۱۷۰- گزینه «۳»

۱۷۱- گزینه «۱»

$$\frac{dy}{dx} = rx \sin x - \sin \sqrt{x}$$

۱۷۲- گزینه «۱»

$$f(x) = \frac{1}{x^r(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^r} + \frac{C}{1+x} \Rightarrow Ax(1+x) + B(1+x) + Cx^r = 1$$

از رابطه فوق $A = -1$ ، $B = 1$ و $C = 1$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$\int_1^r f(x) dx = \int_1^r \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^r} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \left(-\ln x - \frac{1}{x} + \ln(1+x) \right) \Big|_1^r = \frac{1}{r} + \ln r - \ln r$$

۱۷۳- گزینه «۲»

$$u = xe^x \Rightarrow du = (e^x + xe^x) dx = (x+1)e^x dx$$

$$dv = \frac{dx}{(x+1)^r} \Rightarrow v = \frac{-1}{x+1}$$

$$f(x) = \int \frac{xe^x}{(x+1)^r} dx = \frac{-xe^x}{x+1} + \int e^x dx = \frac{-xe^x}{x+1} + e^x + c = \frac{e^x}{x+1} + e$$

بنابراین:

به ازای $c = -1$ نتیجه می‌شود $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$. بنابراین $f(0) = 0$

۱۷۴- گزینه «۴»

$$\frac{d^r y}{dx^r} = 6x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \int 6x dx = 3x^2 + c \Rightarrow y = \int (3x^2 + c) dx = x^3 + cx + d$$

چون طبق فرض منحنی فوق در $x = 1$ بر خط $y = x - 2$ مماس می‌باشد، بنابراین منحنی از نقطه $P(1, -1)$ عبور می‌کند و شیب آن در $x = 1$ برابر شیب خط یعنی یک خواهد بود.

$$\begin{cases} 1 + c + d = -1 \\ 3 + c = 1 \Rightarrow c = -2, d = 0 \end{cases}$$

$$\int_e^{e^r} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_e^{e^r} = \ln e^r - \ln e = r - 1 = r$$

۱۷۵- گزینه «۲»

تست‌های تکمیلی فصل چهارم

۱- حاصل انتگرال $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\ln \sin x} dx$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

۲- حاصل انتگرال $\int_{-1}^1 \sqrt{|x|-x} dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ (۲) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

۳- حاصل $\int \frac{x}{\sqrt{x+5}} dx$ کدام است؟

(۱) $c + \frac{2}{3}x\sqrt{x+5}$ (۲) $\frac{-20x}{3}\sqrt{x+5} + c$

۴- حاصل انتگرال گیری $\int \cos 2x \cos 7x dx$ کدام است؟

(۱) $I = \frac{1}{6}(\sin 2x + \sin 11x) + c$

(۲) $I = \frac{1}{6}\sin 2x + \frac{1}{22}\sin 11x + c$

(۳) $I = \frac{1}{6}\sin 2x + \frac{1}{22}\sin 11x + c$

(۴) $I = \frac{1}{22}(\sin 11x + \sin 2x) + c$

۵- حاصل انتگرال $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲

(۳) ۰ (۴) ۱

۶- حاصل $\int x^r e^x dx$ کدام است؟

(۱) $e^x(x^r + 2x - 2) + c$ (۲) $e^x(x^r - 2x + 2) + c$

(۳) $e^x(x^r - 2x - 2) + c$ (۴) $e^x(x^r + 2x + 2) + c$

۷- حاصل $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$ کدام است؟

(۱) $-\cos(\ln x) + c$ (۲) $\sin(\ln x) + c$

(۳) $\frac{1}{x}\cos(\ln x) + c$ (۴) $-\frac{1}{x}\sin(\ln x) + c$

۸- جواب انتگرال گیری $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$ کدام است؟

(۱) $-\text{Arc sin} \frac{x-2}{3} + c$ (۲) $\text{Arc cos} \frac{x+2}{3} + c$

(۳) $-\text{Arc cos} \frac{x-2}{3} + c$ (۴) $\text{Arc sin} \frac{x+2}{3} + c$

۹- حاصل انتگرال گیری $\int \frac{\sin^r x}{\cos^r x} dx$ کدام است؟

(۱) $I = \frac{1}{r}\cos^r x + c$

(۲) $I = \frac{1}{r}\sin^r x + c$

(۳) $I = \frac{1}{r}\tan^r x + \frac{1}{\Delta}\tan^{\Delta} x + c$

(۴) $I = \frac{1}{r}\tan^r x + \sin^r x + c$

۱۰- حاصل انتگرال $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ کدام است؟

(۱) $I = \text{Arc sin}(1-x) + c$ (۲) $I = \text{Arc sin}(x-1) + c$

(۳) $I = -\text{Arccos}(1-x) + c$ (۴) $I = -\text{Arccos}(x-1) + c$

۱۱- حاصل $\int_0^1 x \sinh x dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{e}$

(۲) e

(۳) $2e$

(۴) e^2

۲۳- حاصل $I = \int_0^1 (x - [x]) dx$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۲۴- حاصل انتگرال $I = \int \frac{dx}{\sin x}$ کدام است؟

- $I = -\frac{1}{\cos x} + c$ (۴) $I = -\text{Lntg}x + c$ (۳) $I = -\frac{\cos x \sin^2 x}{2} + c$ (۲) $I = \text{Ln}\left(\text{tg}\frac{x}{2}\right) + c$ (۱)

۲۵- حاصل انتگرال گیری $I = \int \cosh^2(\lambda x + \delta) dx$ کدام است؟

- $I = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \sinh(\lambda x + \delta) + c$ (۲) $I = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16} \sinh(\lambda x + \delta) + c$ (۱)

- $I = \frac{1}{2}x + \frac{1}{32} \sinh(16x + \delta) + c$ (۴) $I = \frac{x}{2} - \frac{1}{32} \sinh(16x + \delta) + c$ (۳)

۲۶- حاصل $\int \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x + 1} dx$ برابر کدام است؟

- $x - \frac{x}{x-1} + c$ (۴) $x + \frac{x}{x-1} + c$ (۳) $x - \frac{2}{x-1} + c$ (۲) $x + \frac{x}{x-1} + c$ (۱)

۲۷- حاصل $\int \frac{dx}{3 + 2 \cos x}$ برابر کدام است؟

- $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ (۲) π (۱)

۲۸- حاصل $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 5}$ کدام است؟

- $\frac{1}{2} \text{Ln}(e^x - 5) + e^x + c$ (۴) $\Delta \text{Ln}(e^x - 5) + e^x + c$ (۳) $2 \text{Ln}(e^x - 5) + e^x + c$ (۲) $\text{Ln}(e^x - 5) + e^x + c$ (۱)

۲۹- اگر $F(x) = \int_2^x \frac{\sin t}{1 + 2t} dt$ باشد آنگاه $F'(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

- $1 + \pi$ (۴) $1 + \frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{1 + \pi}{2}$ (۲) $\frac{1}{1 + \pi}$ (۱)

۳۰- اگر $\int 2f'(ax - b) dx = f(ax + 2) + c$ باشد مقدار $(a - b)$ کدام است؟

- -5 (۴) 5 (۳) -1 (۲) 1 (۱)

۳۱- حاصل $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\text{Ln}x)^5}$ کدام است؟

- $\frac{1}{4} \text{Ln}^4 2$ (۴) $4 \text{Ln}^4 2$ (۳) $\frac{4}{\text{Ln}^4 2}$ (۲) $\frac{1}{4 \text{Ln}^4 2}$ (۱)

۳۲- اگر $\int f(x) dx = \sqrt{x} + c$ آنگاه $\int \frac{1}{f(x)} dx$ کدام است؟

- $\frac{4}{3} x \sqrt{x} + c$ (۴) $\frac{1}{3x \sqrt{x}} + c$ (۳) $\frac{x}{2 \sqrt{x}} + c$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{x}} + c$ (۱)

۳۳- مقدار $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \text{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{tg}^2 x dx$ کدام است؟

- 6 (۴) 4 (۳) 2 (۲) 0 (۱)

۳۴- حاصل $\int \frac{\cos x - \sin x}{2 + \sin 2x} dx$ کدام است؟

- $\frac{1}{\sin x - \cos x} + c$ (۴) $\frac{1}{\sin x + \cos x} + c$ (۳) $\text{Arctg}(\sin x + \cos x) + c$ (۲) $\text{Arctg}(\sin x - \cos x) + c$ (۱)

۱۲- حاصل $\int_0^1 \text{Ln}(x^2 + 1) dx$ کدام است؟

- $\text{Ln} 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$ (۴) $\text{Ln} 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$ (۳) $\text{Ln} 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$ (۲) $\text{Ln} 2 + 2 - \frac{\pi}{2}$ (۱)

۱۳- معادل کسر $y = \frac{2}{x(x+1)^2}$ کدام است؟

- $y = \frac{2}{x} + \frac{2}{(x+1)^2}$ (۴) $y = \frac{2}{x} + \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1}$ (۳) $y = \frac{2}{x} - \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1}$ (۲) $y = \frac{2}{x} - \frac{2}{(x+1)^2}$ (۱)

۱۴- حاصل انتگرال گیری $I = \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$ کدام است؟

- $I = 2 \text{Arc tan}(2x - 6) + C$ (۲) $I = \frac{1}{2} \text{Arc tan} \frac{x-2}{2} + C$ (۱)

- $I = \frac{1}{4} \text{Ln}(x - 2 + \sqrt{(x-2)^2 + 4}) + C$ (۴) $I = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{x-2}{2} + C$ (۳)

۱۵- حاصل انتگرال گیری $I = \int \tanh^2 x dx$ کدام است؟

- $I = \tanh x - x + c$ (۲) $I = x - \tanh x + c$ (۱) $I = \tanh x - x^2 + c$ (۴) $I = \tanh x + x^2 + c$ (۳)

۱۶- حاصل انتگرال گیری $I = \int x 2^{-x} dx$ کدام است؟

- $I = \frac{x^2 2^{-x}}{\text{Ln} 2} + c$ (۴) $I = (x - 2^{-x}) \text{Ln} 2 + c$ (۳) $I = \frac{\text{Ln} 2 + 1}{2^x \text{Ln}^2 2} + c$ (۲) $I = -\frac{x \text{Ln} 2 + 1}{2^{-x} \text{Ln}^2 2} + c$ (۱)

۱۷- حاصل انتگرال گیری $I = \int_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$ کدام است؟

- $\frac{e}{1 + e^2} + c$ (۴) $\text{Arc sine} - \frac{\pi}{4}$ (۳) $\text{Arc tan} e + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\text{Arc tan} e - \frac{\pi}{4}$ (۱)

۱۸- حاصل انتگرال $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ کدام است؟

- $\text{tg}x - \text{cotg}x + c$ (۴) $\text{tg}x + \text{cotg}x + c$ (۳) $\tan x - \csc x + c$ (۲) $-\text{cotg}x - \sec x + c$ (۱)

۱۹- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} dx$ کدام است؟

- $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۱)

۲۰- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$ برابر کدام است؟

- $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۱)

۲۱- حاصل $\int x \sqrt{x - 5} dx$ کدام است؟

- $I = 20(x - 5)^2 + 10(x - 5)^5$ (۱) $I = \frac{2x}{2\sqrt{x-5}}$ (۲)

- $I = \frac{2}{10}(x - 5)^{\frac{2}{2}} - (x - 5)^{\frac{5}{2}} + c$ (۴)

۲۲- حاصل $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ کدام است؟

- $2(e^{2\pi} - 1)$ (۴) $2(e^{2\pi} + 1)$ (۳) $\frac{1}{2}(1 + e^{\pi})$ (۲) $\frac{1}{2}(1 - e^{\pi})$ (۱)

۳۵- حاصل $I = \int_0^{\pi} |\cos x| dx$ کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۲
۳) ۲ ۴) ۱

۳۶- حاصل $I = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

- ۱) $\arctan x + c$ ۲) $\arctan(x+2) + c$
۳) $\arctan(x+1) + c$ ۴) $\frac{1}{2} \arctan(x+1) + c$

۳۷- حاصل $I = \int 3^x e^x dx$ کدام است؟

- ۱) $\frac{3^x e^x}{\ln 3}$ ۲) $\frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1}$
۳) $\frac{3^x + 1}{\ln 3 + 1}$ ۴) $\frac{3^x + e^x}{\ln 3}$

۳۸- حاصل $I = \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx$ کدام است؟

- ۱) $\ln(\sin^2 x) + c$ ۲) $\ln(1 + \sin^2 x) + c$
۳) $\ln x \ln x + c$ ۴) $\cos \ln(1 + \sin x) + c$

۳۹- حاصل $I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx$ کدام است؟

- ۱) $-\left(\frac{3x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + \cot x + e\right)$ ۲) $\cot x - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{3x}{2} + c$
۳) $\frac{\sin 2x}{4} - \cot x + c$ ۴) $\frac{\sin 2x}{4} + \cot x + \frac{3x}{2} + c$

۴۰- حاصل $I = \int \frac{3 - 2 \cot^2 x}{\cos^2 x} dx$ کدام است؟

- ۱) $2 \tan x + 2 \cot x + c$ ۲) $2 \tan x + \cot x + c$
۳) $2 \tan x + 2 \cot x + c$ ۴) $\frac{\tan x + 2 \cot x}{2x} + c$

۴۱- حاصل $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{\arcsin(\frac{3x}{2})}{3} + c$ ۲) $\frac{\arcsin 3x}{3} + c$
۳) $\frac{1}{2} \arcsin 3x$ ۴) $\frac{1}{2} \arcsin \frac{3x}{2}$

۴۲- حاصل $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2 - 4x}}$ کدام است؟

- ۱) $\arcsin \frac{x+2}{3} + c$ ۲) $\arcsin \frac{x+2}{2} + c$
۳) $\arcsin \frac{x+2}{2} + c$ ۴) $\arcsin \frac{x+2}{3} + c$

۴۳- حاصل $I = \int \frac{y^{x+1} - \Delta^{x-1}}{10^x} dx$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{\ln \Delta} \Delta^{-x} + c$ ۲) $-\frac{2}{\ln \Delta} \Delta^{-x} + \frac{1}{\Delta \ln 2} 2^{-x} + c$
۳) $\frac{1}{\Delta \ln 2} 2^{-x} + c$ ۴) هیچکدام

۴۴- حاصل $I = \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx$ کدام است؟

- ۱) $\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2 x^2} + c$ ۲) $-\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2 x^2} + c$
۳) $\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2 x^2} + c$ ۴) $-\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2 x^2} + c$

۴۵- حاصل $I = \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{1 + \ln x} + c$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{1 + \ln x}} + c$
۳) $\frac{1}{\sqrt{1 + \ln x}} + c$ ۴) $\frac{1}{2\sqrt{1 + \ln x}} + c$

۴۶- حاصل $I = \int_0^{\frac{\Delta x}{\pi}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx$ کدام است؟

- ۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\Delta \pi}{4}$
۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) π

۴۷- حاصل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ کدام است؟

- ۱) $200\sqrt{2}$ ۲) ۲۰۰
۳) $\sqrt{2}$ ۴) $100\sqrt{2}$

۴۸- کدامیک از روابط زیر صحیح نیست؟

- ۱) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$ ۲) $\int_a^b \sin x f(\cos x) dx = 0$

- ۳) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -2$ ۴) $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$

۴۹- حاصل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ کدام است؟

- ۱) $\pi + 2$ ۲) $\pi - 2$
۳) $2 - \pi$ ۴) $\frac{\pi}{2} - 1$

۵۰- حاصل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{2 + \sin 2x} dx$ کدام است؟

- ۱) $\ln 2$ ۲) $\frac{1}{2} \ln 2$
۳) $\frac{1}{2} \ln 2$ ۴) $\frac{1}{2} \ln 2$

۵۱- کدامیک از روابط زیر صحیح نیست؟

- ۱) $\int_{-a}^a \frac{x^{\Delta} \sin^{\Delta} x}{x^{\Delta} + 2x^{\Delta} + 1} dx = 0$ ۲) $\int_{-a}^a \cos x f(x^{\Delta}) dx = 2 \int_0^a \cos x f(x^{\Delta}) dx$

- ۳) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{\Delta} \sin^{\Delta} x dx = 0$ ۴) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\sin x} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} e^{\sin x} dx$

۵۲- طول نقطه ماکزیمم تابع با ضابطه $F(x) = \int_1^x e^{-t^2} (1-t^2) dt$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۰ ۳) -۱ ۴) ۲

۵۳- مجموع طول نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع با ضابطه $F(x) = \int_0^x \frac{t^2 - \Delta t + 4}{2 + e^t} dx$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۲ ۳) ۰ ۴) -۱

۵۴- برای تابع ضمنی $\int_0^y e^t dt + \int_0^y \sin t dt = 0$ کدام است $\frac{dy}{dx}$ ؟

- ۱) $-e^{-y} \sin x$ ۲) $e^y \sin x$
۳) $e^{-y} \sin x$ ۴) $e^{-y} \cos x$

۵۵- حاصل $I = \int \frac{x^{\Delta} dx}{1+x^{\Delta}}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{2\pi}{4}$
۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi}{16}$

۵۶- اگر $f'(x) = \frac{x^{\Delta}}{\sqrt{x^{\Delta} + 1}}$ و $f(0) = \frac{2}{3}$ ، آنگاه $f(2)$ کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) $\frac{A}{2}$
۳) ۰ ۴) ۲

۵۷- اگر $\int \frac{x^r dx}{\sqrt{x^r+1}} = A(x^r+1)^k + c$ ، آنگاه A کدام است ؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۵۸- حاصل $\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cot}^2 x) dx$ کدام است ؟

- (۱) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cot} x - 2x + c$ (۲) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cot} x + 2x + c$ (۳) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cot} x - 2x + c$ (۴) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cot} x - 2x + c$

۵۹- حاصل $I = \int |x| dx$ کدام است ؟

- (۱) $x|x| + c$ (۲) $\frac{x|x|}{2} + c$ (۳) $\frac{|x|}{2x} + c$ (۴) $\frac{x^2}{2} + c$

۶۰- مقدار $I = \int_{-1}^1 (x - [x]) dx$ کدام است ؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۲ (۴) $\frac{3}{2}$

۶۱- فرض کنیم نمودار تابع $y = f(x)$ از نقاط $A(1,2)$ و $B(2,4)$ عبور می کند، مقدار $I = \int_1^2 f'(x) dx$ کدام است ؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۶۲- مقدار $I = \int_{-1}^1 ([x] + [-x]) dx$ کدام است ؟ ([] نماد جزء صحیح است)

- (۱) ۰ (۲) ۶ (۳) -۶ (۴) ۱

۶۳- اگر $F(x) = \int_{x^2}^{138x} \frac{dt}{t}$ ، آنگاه $F''(x)$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{3}{x^2}$ (۲) $\frac{138x}{x^2}$ (۳) $-\frac{3}{x}$ (۴) $-\frac{138x}{x}$

۶۴- حاصل $\int \frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2-12x+6}} dx$ کدام است ؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۶۵- حاصل انتگرال $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^2 x} dx$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۶۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) ۰ (۳) ∞ (۴) $\frac{\pi^2}{4}$

۶۷- مجموع طولهای نقاط اکسترمم و عطف تابع $y = \int_1^x (t-1)(t-2)^2 dt$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{13}{3}$ (۳) ۰ (۴) $\frac{19}{3}$

۶۸- حاصل $I = \int_{-\pi}^{\pi} x^r \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} x^r \sin nx dx$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{v}{n}$ (۲) $\frac{2}{n}$ (۳) ۰ (۴) $\frac{4}{n}$

۶۹- حاصل $I = \int \sin 10x \sin 15x dx$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{\sin 25x}{50} - \frac{\sin 5x}{10} + c$ (۲) $\frac{\sin 25x}{10} + \frac{\sin 25x}{50} + c$ (۳) $\frac{\sin 25x}{50} - \frac{\sin 5x}{10} + c$ (۴) $\frac{\sin 5x}{10} - \frac{\sin 25x}{50} + c$

۷۰- حاصل $I = \int \cos x \cos 2x \cos 5x dx$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{1}{22} \sin 8x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{24} \sin 6x + c$ (۲) $\frac{1}{22} \sin 8x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{24} \sin 6x + \frac{1}{8} \sin 2x + c$

- (۳) $\frac{1}{22} \sin 8x + \frac{1}{24} \sin 6x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + c$ (۴) هیچکدام

۷۱- حاصل $I = \int \operatorname{tg}^2 x dx$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + c$ (۲) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4} + \operatorname{Ln}|\operatorname{Sec} x| + c$

- (۳) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4} + \operatorname{Ln}|\operatorname{Sec} x| + c$ (۴) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + c$

۷۲- حاصل $I = \int \operatorname{Cotg}^2 x dx$ کدام است ؟

- (۱) $-\frac{1}{5} \operatorname{Cotg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{Cotg}^3 x - x + c$ (۲) $\frac{\operatorname{Cotg}^3 x}{3} - \operatorname{Cotg} x - \frac{\operatorname{Cotg}^5 x}{5} - x + c$

- (۳) $\frac{\operatorname{Cotg}^3 x}{3} - \operatorname{Cotg} x - \frac{\operatorname{Cotg}^5 x}{5} - x + c$ (۴) $\frac{\operatorname{Cotg}^5 x}{5} + \operatorname{Cotg} x - \frac{\operatorname{Cotg}^3 x}{3} - x + c$

۷۳- حاصل $I = \int \cos(\operatorname{Ln} x) dx$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{x}{2} [\cos(\operatorname{Ln} x) + \sin(\operatorname{Ln} x)] + c$ (۲) $\frac{x}{2} [\sin(\operatorname{Ln} x) + \cos x] + c$

- (۳) $\frac{x}{2} [\sin(\operatorname{Ln} x) + \cos x] + c$ (۴) $\frac{x}{2} [\sin x + \cos(\operatorname{Ln} x)] + c$

۷۴- حاصل $I = \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \operatorname{Ln}^2 x}$ کدام است ؟

- (۱) انتگرال واگراست (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۷۵- حاصل $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ کدام است ؟

- (۱) $\operatorname{Arctg} \frac{1}{2}$ (۲) انتگرال واگراست (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۷۶- حاصل $I = \int_0^{\infty} x \sin x dx$ کدام است ؟

- (۱) انتگرال واگراست (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۰

۷۷- حاصل $I = \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\operatorname{Ln} x}}$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۱ (۳) $e+1$ (۴) انتگرال واگراست

۷۸- حاصل $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$ کدام است ؟

- (۱) $-x \operatorname{cot} gx + \operatorname{Ln}|\sin x| + c$ (۲) $-x \operatorname{Cotg} x + \sin x$ (۳) $-x \operatorname{Cotg} x - \operatorname{Ln}|\sin x| + c$ (۴) $-x \operatorname{Cotg} x + \operatorname{Ln}|\cos x| + c$

۷۹- حاصل $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ کدام است ؟

کدام است؟ $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} dx + c$ (۱)

کدام است؟ $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1} dx + c$ (۲)

کدام است؟ $\int \frac{\sqrt{x+1}}{1-x} dx + c$ (۳)

کدام است؟ $\int \frac{\sqrt{x+1}}{1-x} dx + c$ (۴)

۸۰. حاصل $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}} dx$ برابر است با:

(۱) $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}$

(۲) $\frac{1-x}{2\sqrt{2x+3}}$

(۳) $\frac{x-1}{2\sqrt{2x+3}}$

(۴) $x\sqrt{2x+3}$

۸۱. حاصل $\int \frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x} dx$ برابر است با:

(۱) $\operatorname{Ln}|\operatorname{Sin}x + \operatorname{Cos}x|$

(۲) $\operatorname{Ln}|\operatorname{Sin}x - \operatorname{Cos}x|$

(۳) $-\operatorname{Ln}|\operatorname{Cos}x - \operatorname{Sin}x|$

(۴) $-\operatorname{Ln}|\operatorname{Sin}x + \operatorname{Cos}x|$

۸۲. مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Ln} \operatorname{tg}x dx$ چقدر است؟

(۱) ۱

(۲) $\frac{\pi}{2}$

(۳) ۰

(۴) ∞

۸۳. مقدار $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{2}$

(۲) $\operatorname{Ln} \frac{b}{a}$

(۳) $\operatorname{Ln} \frac{a}{b}$

(۴) e^{ab}

۸۴. بر بازه $[-1, 1]$ همواره $f(-x) = -f(x)$ حاصل $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ کدام است؟

(۱) ۰

(۲) ۱

(۳) $f(1)$

(۴) $2f(1)$

۸۵. حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x} dx$ برابر است با:

(۱) ۰

(۲) $\frac{\pi}{2}$

(۳) π

(۴) $\frac{\pi}{4}$

۸۶. مقدار $\int_{-1}^1 [x + \frac{1}{x}] dx$ چقدر است؟

(۱) $-\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) ۰

۸۷. مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [2\operatorname{Sin}x] dx$ چقدر است؟

(۱) $\frac{\pi}{3}$

(۲) $\frac{2\pi}{3}$

(۳) $\frac{\pi}{2}$

(۴) $\frac{\pi}{4}$

۸۸. مقدار انتگرال $\int \operatorname{Ln}\sqrt{1+x^2} dx$ برابر است با:

(۱) $\frac{1}{2}\operatorname{Ln}2$

(۲) $\frac{1}{2}\operatorname{Ln}2 + \frac{\pi}{4} - 1$

(۳) $\operatorname{Ln}2 + \frac{\pi}{4} - 1$

(۴) $\frac{1}{2}\operatorname{Ln}2 + \frac{\pi}{4}$

۸۹. اگر $x = \int \frac{dt}{\sqrt{2+3t^2}}$ مقدار $\frac{1}{y} \times \frac{d^2y}{dx^2}$ کدام است؟

(۱) ۶

(۲) ۳

(۳) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{1}{6}$

۹۰. مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{1+t^2} dt$ کدام است؟

(۱) $\operatorname{Ln}4 - \frac{15}{16}$

(۲) $\operatorname{Ln}4 - \frac{15}{32}$

(۳) $\operatorname{Ln}2 + \frac{15}{32}$

(۴) $\operatorname{Ln}2 + \frac{15}{16}$

۹۱. حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta d\theta$ کدام است؟

(۱) $\frac{2\pi}{16}$

(۲) $\frac{5\pi}{16}$

(۳) $\frac{3\pi}{32}$

(۴) $\frac{5\pi}{32}$

۹۲. حاصل $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$ کدام است؟

(۱) $\operatorname{Ln}\sqrt{2}$

(۲) $\operatorname{Ln}2$

(۳) $1 - \operatorname{Ln}2$

(۴) $1 - \operatorname{Ln}\sqrt{2}$

۹۳. g تابعی پیوسته و $\int g(x) dx = 0$ و $\int_0^x (x-1)^n g(t) dt = f(x)$ باشد، مقدار $f^{(n)}(1)$ کدام است؟

(۱) $n!$

(۲) $-n!$

(۳) $-(n-1)!$

(۴) ۰

۹۴. کدامیک از گزینه‌های زیر در رابطه با انتگرال $I = \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Ln}x}{(1+x)^2} dx$ صحیح می‌باشد؟

(۱) واگرا است.

(۲) همگراست با مقدار همگرایی یک

(۳) همگراست با مقدار همگرایی $\frac{1}{4}$

(۴) همگراست با مقدار همگرایی $\operatorname{Ln}2$

۹۵. اگر $y = \int_1^x (e^{\operatorname{Ln}t} + e^t) dt$ ، کدامیک از گزینه‌ها زیر صحیح می‌باشند؟

(۱) $y'' + y' = x^x \operatorname{Ln}x$

(۲) $y'' - y' = x^x \operatorname{Ln}x$

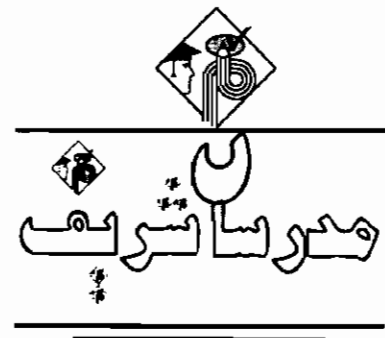
(۳) $y'' + y' = e^x$

(۴) $y'' - y' = x^x$

شرافت به خود و ادب است نه به ثروت و مال.

هرگز راستی و درستی خود را با پول، قدرت یا شهرت عوض نکن.

«حضرت علی (ع)»



فصل پنجم

« کاربرد انتگرال »

محاسبه حد مجموع به کمک انتگرال معین

در بعضی مسائل لازم است که حد مجموعی را که تعداد جملات آن بطور نامتناهی افزایش می‌یابند را حساب کنیم برای این منظور می‌توان از انتگرال معین استفاده کرد، توجه شود که باید بتوان آن مجموع را به مجموع انتگرال تبدیل کرد.

توجه: اگر تابع f بر بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

* تذکر ۱: رابطه $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$ نیز نمایش دیگری از فرمول فوق می‌باشد.

مثال ۱: مقدار $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \dots + \frac{n}{2n^2} \right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{6}$
 - (۲) $\frac{\pi}{3}$
 - (۳) $\frac{\pi}{4}$
 - (۴) $\frac{\pi}{2}$
- پاسخ: گزینه «۳»

$$\left. \begin{aligned} \frac{n}{n^2+1} &= \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} \right) \Rightarrow i=1 \\ \frac{n}{n^2+4} &= \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} \right) \Rightarrow i=2 \\ \frac{n}{n^2+9} &= \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{9}{n^2}} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\left(\frac{3}{n}\right)^2} \right) \Rightarrow i=3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} \right]$$

با توجه به اینکه عبارت داخل پرانتز (در صورت سؤال) به فرم $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$ که $f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$ نوشته شد لذا می‌توان با توجه به تعریف

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\text{Arc tg}x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

فوق حد را محاسبه کرد:

مثال ۲: مقدار $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[1 + \sqrt{\frac{n}{n+2}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \sqrt{\frac{n}{n+10}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+2(n-1)}} \right]$ کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۶
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) ۰

پاسخ: گزینه «۱» عبارت داخل کروشه را بصورت روبرو می‌نویسیم:

$$B = \left[\sqrt{\frac{1}{1+0}} + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{n}}} + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2(n-1)}{n}}} \right]$$

لذا $f\left(\frac{i}{n}\right) = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2i}{n}}}$ که $f(x) = \sqrt{\frac{1}{1+2x}}$ را نتیجه می‌دهد لذا داریم:

$$A = \frac{1}{n} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1+2x}} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 (1+2x)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{n} \left[\frac{2^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1+2x}}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{n} \left(\frac{2^{-\frac{1}{2}} \sqrt{3}}{2} - \frac{2^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1}}{2} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \right)$$

مثال ۳: مقدار $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$
- (۲) $\frac{2}{\pi}$
- (۳) ۱
- (۴) $\frac{1}{\pi}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$A = \frac{\pi}{2n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right]$$

$$\left[\cos \frac{0 \times \pi}{n} + \cos \frac{1 \times \pi}{2n} + \cos \frac{2 \times \pi}{2n} + \cos \frac{3 \times \pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right] \Rightarrow f\left(\frac{i}{n}\right) = \cos \frac{i\pi}{2n} = \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x \Rightarrow A = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x \right]_0^1 = 1$$

مثال ۴: مقدار $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) ۰
- (۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲»

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}} \Rightarrow A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}} + \sqrt[3]{\frac{2}{n^3}} + \sqrt[3]{\frac{3}{n^3}} + \dots + \sqrt[3]{\frac{n}{n^3}} \right)$$

$$f\left(\frac{i}{n}\right) = \sqrt[3]{\frac{i}{n^3}} \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow A = \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx = \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

مثال ۵: مقدار $A = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right]$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$
- (۲) $-\frac{1}{3}$
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n^2}{(2n)^2} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{2n}{n}\right)^2} \right] \Rightarrow f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow A = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x+1} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

مثال ۶: مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n}) \dots (1 + \frac{n}{n})}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\ln 3 - 1$
- (۲) $\ln 4 - 1$
- (۳) $\ln 2 + 1$
- (۴) $\ln 4 + 1$

پاسخ: گزینه «۲»

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n}) \dots (1 + \frac{n}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln[(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n}) \dots (1 + \frac{n}{n})] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + \frac{i}{n}) = \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

برای محاسبه انتگرال اخیر از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$A = [(1+x)\ln(1+x) - x] \Big|_0^1 = \ln 4 - 1$$

محاسبه مقادیر متوسط توابع

اگر تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه عدد حقیقی c وجود دارد بطوریکه: $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$ توجه شود که c عدد یکتائی نمی‌باشد.

مثال ۷: عدد حقیقی c در قضیه مقدار میانگین برای انتگرال $I = \int_1^5 \frac{x^2-1}{x^2} dx$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$
- (۲) $\sqrt{3}$
- (۳) $\frac{5}{2}$
- (۴) $\frac{5}{3}$

$$f(c) = \frac{\int_1^5 (1 - \frac{1}{x^2}) dx}{5-1} = \frac{[x + \frac{1}{x}]_1^5}{4} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow f(c) = 4 \Rightarrow 1 - \frac{1}{c^2} = 4 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

پاسخ: گزینه «۱»

مثال ۸: مقدار متوسط تابع $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ در فاصله $[0, 2]$ کدام است؟

- (۱) 0.283
- (۲) 0.383
- (۳) 0.183
- (۴) 0.483

$$f(c) = \frac{1}{2-0} \int_0^2 \frac{dx}{e^x+1} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در ضرب می‌کنیم}} \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{e^{-x} dx}{1+e^{-x}} \Rightarrow 1+e^{-x} = u$$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\Rightarrow -e^{-x} dx = du \rightarrow \int \frac{e^{-x} dx}{1+e^{-x}} = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| = \ln|\frac{1}{u}| = \ln \frac{1}{e^{-x}+1} \Rightarrow f(c) = \frac{1}{2} [\ln(\frac{1}{e^{-x}+1})]_0^2$$

$$f(c) = \frac{1}{2} \ln(\frac{1}{e^{-2}+1}) - \frac{1}{2} \ln(\frac{1}{2}) = 0.283$$

مثال ۹: مقدار متوسط تابع $f(x) = 3^x - 2x + 3$ در فاصله $[0, 2]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\lambda}{\ln 3}$
- (۲) $1 + \frac{\lambda}{\ln 3}$
- (۳) $\frac{\lambda}{\ln 3} + 1$
- (۴) $\frac{\lambda}{\ln 3} + 3$

$$f(c) = \frac{1}{2-0} \int_0^2 (3^x - 2x + 3) dx = \frac{1}{2} [\frac{3^x}{\ln 3} - x^2 + 3x]_0^2 = \frac{1}{2} [\frac{\lambda}{\ln 3} + 2]$$

پاسخ: گزینه «۳»

نکته ۱: اگر تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته و M, m به ترتیب مقادیر مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع در این بازه باشند، آنگاه خواهیم داشت:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

مثال ۱۰: اگر $I = \int_1^2 \frac{dx}{1+x^2}$ حدود I کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2} \leq I \leq 1$
- (۲) $1 \leq I \leq 2$
- (۳) $0 \leq I \leq \frac{1}{17}$
- (۴) $\frac{1}{17} \leq I \leq \frac{1}{2}$

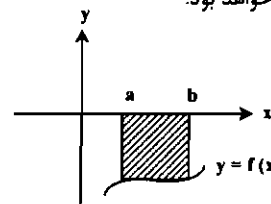
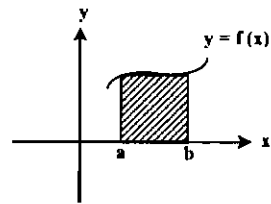
$$\frac{1}{17} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{17}(2-1) \leq I \leq \frac{1}{2}(2-1) \Rightarrow \frac{1}{17} \leq I \leq \frac{1}{2}$$

پاسخ: گزینه «۴»

سطح محصور:

تعریف ۱: مساحت سطح محصور زیر نمودار تابع $y = f(x)$ در بازه $[a, b]$ بصورت زیر بیان می‌شود: $S = \int_a^b |f(x)| dx$

اگر $f(x) \geq 0$ ، $f(x)$ بالای محور x قرار گرفته باشد. $S = \int_a^b f(x) dx$ و اگر $f(x) < 0$ ، $f(x)$ پائین محور x قرار گرفته باشد. $S = -\int_a^b f(x) dx$ خواهد بود.



مثال ۱۱: مساحت محدود به سهمی $y = \frac{x^2}{2}$ ، خطهای $x=1$ و $x=2$ و محور طولها را محاسبه کنید؟

$$S = \int_1^2 (\frac{x^2}{2}) dx = [\frac{x^3}{6}]_1^2 = \frac{13}{3}$$

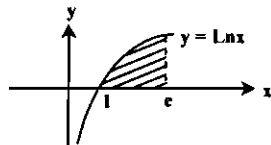
پاسخ: گزینه «۳»

تذکره ۲: اگر حدود سطح داده نشود، این حدود همان جوابهای معادله $f(x) = 0$ خواهند بود.

مثال ۱۲: مساحت محدود به منحنی $y = \ln x$ و محور x ها و خط $x = e$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) 1
- (۳) $\frac{e}{2}$
- (۴) e

پاسخ: گزینه «۲»



$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \int_1^e \ln x dx = [x \ln x - x]_1^e = 1$$

مثال ۱۳: مساحت سطح محصور بین منحنی $y = -x^2 + 4x - 3$ و محور x ها کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{3}{2}$
- (۳) $\frac{4}{3}$
- (۴) $\frac{3}{4}$

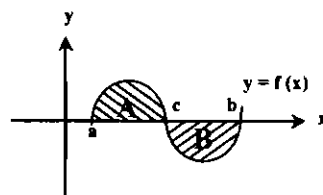
پاسخ: گزینه «۳»

$$y = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$$

$$S = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = [-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x]_1^3 = \frac{4}{3}$$

تذکره ۳: هر گاه در محاسبه سطح محصور در فاصله $[a, b]$ منحنی محور x ها را در نقطه‌ای مانند c (نقطه‌ای بین a و b می‌باشد) قطع کند، مساحت با استفاده از رابطه زیر بدست خواهد آمد.

$$S = \int_a^c f(x) dx + \left| \int_c^b f(x) dx \right|$$



با توجه به توضیحات فوق معادله $f(x) = 0$ را حل کرده و اگر جواب بدست آمده در فاصله داده شده بود، انتگرال را به دو بخش تقسیم کرده و مساحت را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱۴: سطح محصور بین منحنی $f(x) = x^2 - 1$ و خطوط $x=0$ ، $x=2$ و محور x ها کدام است؟

- (۱) 3
- (۲) $3/5$
- (۳) 4
- (۴) $4/5$

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$x = 1$ در بازه $(0, 2)$ قرار دارد پس سطوح محصور از دو ناحیه تشکیل می‌شود:

$$S = \left| \int_0^1 (x^2 - 1) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^2 - 1) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 \right| = \left| \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - 0 \right| + \left| \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right| = 2/3$$

تذکره ۴: تابع با ضابطه $y = f(x)$ را در نظر بگیرید، اگر انتگرال معین $y = f(x)$ در بازه $[a, b]$ محاسبه شود و مقدار سطح محصور بین منحنی و محور x ها در این بازه نیز حساب شود، خواهیم دید که مقدار انتگرال معین با سطح محصور آن تفاوت خواهد داشت و حالت تساوی فقط در صورتی برقرار است که در بازه داده شده علامت $f(x)$ تغییر نکند (یا بالای محور y ها واقع شده باشد، یا زیر محور y ها که در این حالت باید قدر مطلق مقدار را در نظر بگیریم).

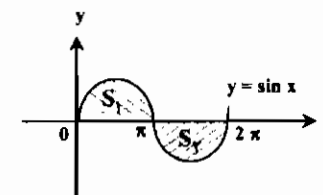
مثال ۱۵: سطح محصور بین منحنی $y = \sin x$ و محور x ها را در بازه $[0, 2\pi]$ بدست آورده و آن را با مقدار انتگرال معین تابع $y = \sin x$ در این فاصله مقایسه کنید.

توضیح:

$$I = \int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -1 + 1 = 0 \Rightarrow \text{مقدار انتگرال معین}$$

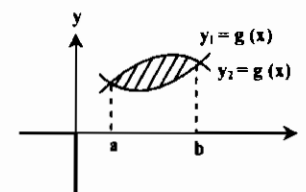
$$S = \left| \int_0^{\pi} \sin x dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = \left| [-\cos x]_0^{\pi} \right| + \left| [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} \right|$$

$$S = |2| + |-2| = 4 \Rightarrow \text{سطح محصور}$$



نکته ۲: سطح محصور بین دو منحنی $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ از رابطه $S = \int_a^b (y_1 - y_2) dx$ بدست خواهد آمد که a, b طول نقاط تلاقی دو منحنی $y_1 = f(x)$ ، $y_2 = g(x)$ خواهند بود.

توضیح: برای بدست آوردن طول نقاط تلاقی دو منحنی باید ریشه‌های معادله $y_1 - y_2 = 0$ را بدست آوریم.



مثال ۱۶: اندازه سطح محدود به دو منحنی $y = x^2 - 1$ و $y = x^2 - x^2$ و محور y ها کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad \frac{2}{3} \quad (2) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad \frac{1}{4} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۱» حد پائین انتگرال $x = 0$ می‌باشد (چون محور y ها در صورت سؤال قید شده است).

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x^2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 1 - x^2 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$S = \left| \int_0^1 [(x^2 - 1) - (x^2 - x^2)] dx \right| = \left| \int_0^1 (x^2 - 1) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 \right| = \frac{2}{3}$$

مثال ۱۷: مساحت بین منحنی‌های $y = 16 - x^2$ و $y = (x - 4)^2$ و محور x ها کدام است؟

$$9 \quad (1) \quad \frac{22}{3} \quad (2) \quad \frac{64}{3} \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} y_1 = x^2 - 8x + 16 \\ y_2 = 16 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + x^2 - 16 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$$

$$S = \left| \int_0^4 (y_1 - y_2) dx \right| = \left| \int_0^4 (2x^2 - 8x) dx \right| = \left| \left[\frac{2x^3}{3} - 4x^2 \right]_0^4 \right| = \frac{64}{3}$$

تذکره ۵: اگر مساحت محدود بین دو منحنی $y = g(x), y = f(x)$ در بازه $[a, b]$ خواسته شود پس از حل معادله $f(x) - g(x) = 0$ و بدست آوردن نقاط تلاقی منحنی بررسی می‌کنیم که آیا این نقاط در بازه $[a, b]$ هستند؟ در اینصورت اگر مثلاً نقطه‌ای مانند c که ریشه معادله می‌باشد در بازه $[a, b]$ بود آنگاه مساحت سطح محصور بین دو منحنی در بازه $[a, b]$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S = \left| \int_a^c [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \int_c^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

مثال ۱۸: مساحت ناحیه محدود بین منحنی‌های $f(x) = x^2 + 2x + 5$ و $g(x) = -x^2 + 5x + 9$ و دو خط $x = -1$ و $x = 4$ کدام است؟

$$\frac{25}{3} \quad (1) \quad \frac{22}{3} \quad (2) \quad \frac{28}{3} \quad (3) \quad \frac{22}{3} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۱» $f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 5 + x^2 - 5x - 9 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$

$$S = \left| \int_{-1}^2 (2x^2 - 3x - 4) dx \right| + \left| \int_2^4 (2x^2 - 3x - 4) dx \right| = \frac{25}{3}$$

چون نقطه $x = 2$ متعلق به بازه $[-1, 4]$ می‌باشد لذا داریم:

توجه:

اگر معادلات منحنی‌ها به فرم $x = f(y)$ بیان شود، تمامی فرمولهای قبل با شرط تعویض x و y با یکدیگر قابل استفاده می‌باشد.

مثال ۱۹: مساحت محدود بین منحنی $y^2 = -x + 1$ و خط $y = 2$ و محور oy چقدر است؟

$$\frac{17}{3} \quad (1) \quad \frac{19}{3} \quad (2) \quad \frac{22}{3} \quad (3) \quad \frac{20}{3} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۴» $x = 1 - y^2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

$$S = \int_1^2 x dy = \int_1^2 (1 - y^2) dy = \left[\frac{-y^3}{3} + y \right]_1^2 = \frac{20}{3}$$

مثال ۲۰: مساحت محدود به سهمی‌های $x = \frac{2}{3}y^2 + 1$ و $x = y^2$ و $x = y^2$ کدام است؟

$$4 \quad (1) \quad \frac{4}{3} \quad (2) \quad \frac{8}{3} \quad (3) \quad \frac{16}{3} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\begin{aligned} x &= y^2 \\ x &= \frac{2}{3}y^2 + 1 \end{aligned} \Rightarrow y^2 - \frac{2}{3}y^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$S = \left| \int_{-2}^2 (x_1 - x_2) dx \right| = \left| \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{3}y^2 - 1 \right) dx \right| = \left| \left[\frac{y^3}{12} - y \right]_{-2}^2 \right| = \frac{8}{3}$$

نکته ۳: سطح محصور بین دو منحنی $y^2 = ax$ ، $x^2 = by$ از رابطه $S = \frac{|ab|}{3}$ بدست می‌آید.

نکته ۴: سطح محصور بین دو منحنی $y = x^n$ ، $y = \sqrt[n]{x}$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$S = \begin{cases} \frac{2(n-1)}{n+1} & ; \text{ اگر } n \text{ فرد باشد} \\ \frac{n-1}{n+1} & ; \text{ اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

مثال ۲۱: اگر مساحت سطح محصور بین دو منحنی $x^2 = by, y^2 = ax$ برابر ۶ باشد آنگاه $|ab|$ کدام است؟

$$9 \quad (1) \quad 18 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 27 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته (۳) داریم: $S = \frac{|ab|}{3} \Rightarrow 6 = \frac{|ab|}{3} \Rightarrow |ab| = 18$

مثال ۲۲: سطح محصور بین منحنی تابع $y = x^2$ و تابع معکوس آن کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» معکوس تابع $y = x^2$ تابع $y = \sqrt{x}$ می باشد و لذا با توجه به نکته (۴) داریم:

$$S = \frac{2(2-1)}{2+1} = 1$$

نکته ۵: مساحت محدود به منحنی پارامتری $x = x(t)$ و $y = y(t)$ با استفاده از رابطه زیر بدست می آید:

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (xy' - yx') dt$$

محاسبه حجم

(۱) حجم حاصل از دوران تابع $y = f(x)$ حول محور x ها در بازه $[a, b]$ بصورت زیر محاسبه می شود:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

(۲) حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به دو منحنی $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ و دو خط $x = a$ و $x = b$ حول محور x ها از رابطه:

$$V_x = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

به دست خواهد آمد.

(۳) حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به دو منحنی $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ و دو خط $x = a$ و $x = b$ (هم علامت) حول محور y ها برابر است با $V = 2\pi \int_a^b x |f(x) - g(x)| dx$. به این روش برای محاسبه حجم، روش پوسته استوانه ای گفته می شود.

مثال ۲۳: حجم حاصل از دوران منحنی $y = \sin x$ حول محور ox و در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ کدام است؟

- (۱) π^2 (۲) $\frac{\pi^2}{4}$ (۳) $\frac{\pi^2}{3}$ (۴) $\frac{\pi^2}{2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

مثال ۲۴: اندازه حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $y = x^2$ و خط $y = x$ حول محور x کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{15}$ (۲) $\frac{2\pi}{15}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{2\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$y_1 = x, y_2 = x^2 \Rightarrow x^2 = x \rightarrow x = 0, x = 1, V_x = \pi \int_0^1 (y_1^2 - y_2^2) dx \Rightarrow V_x = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{2\pi}{15}$$

مثال ۲۵: حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به نمودار $xy = 1$, $x = 3$, $x = 1$, $y = 0$ حول محور x کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{12}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) π (۴) $\frac{4\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow V_x = \pi \int_1^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^3 = \frac{2\pi}{3}$$

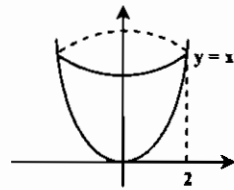
$y = b$

* تذکر ۶: حجم جسمی را که از دوران شکل محدود به منحنی $x = g(y)$ حول محور oy و دو خط $y = a$ و $y = b$ حول محور oy بدست

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy$$

می آید با توجه به فرمول روبرو به دست می آید:

مثال ۲۶: حجم دوار در شکل مقابل کدام است؟



روش اول: حجم موردنظر از دوران $y = x^2$ در فاصله $0 < x < 2$ حول محور y ها حاصل شده است. بنابراین طبق روش پوسته استوانه ای:

$$U = 2\pi \int_0^2 x |f(x)| dx = 2\pi \int_0^2 x^2 dx = 2\pi \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 8\pi$$

روش دوم: ابتدا از رابطه $x \cdot y = x^2$ را بر حسب y به دست می آوریم. سپس به روش معمول حجم را محاسبه می کنیم.

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y}, 0 < y < 4$$

$$U = \pi \int_0^4 (f(y))^2 dy = \pi \int_0^4 y dy = \pi \times \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 8\pi$$

بنابراین:

مثال ۲۷: ناحیه واقع بین یک قوس از منحنی $y = \sin x$ و محور y ها و خط $y = 1$ را حول محور y ها دوران می دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi(\pi^2 - 4)}{4}$ (۲) $\frac{\pi(\pi^2 - 4)}{8}$ (۳) $\frac{\pi^2 - 8}{8}$ (۴) $\frac{\pi(\pi^2 - 8)}{4}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$y = \sin x \Rightarrow x = \arcsin y \Rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow u = 0, y = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$$

با فرض $\arcsin y = u$ خواهیم داشت:

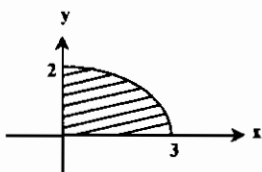
$$V_y = \pi \int_0^1 (\arcsin y)^2 dy \Rightarrow V_y = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 \cos u du \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} V_y = \frac{\pi(\pi^2 - 8)}{4}$$

روش دوم: این بار برای محاسبه حجم، از روش پوسته استوانه ای استفاده می کنیم:

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1 - \sin x) dx = 2\pi \left(\frac{x^2}{2} + x \cos x - \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi(\pi^2 - 8)}{4}$$

مثال ۲۸: در شکل زیر یک ربع بیضی به مرکز مبدأ مختصات مشخص شده است. حجم حاصل از دوران سطح محدود به نمودار بیضی و محورهای مختصات حول محور oy کدام است؟

- (۱) 14π (۲) 12π (۳) 10π (۴) 8π



پاسخ: گزینه «۲» معادله بیضی فوق $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ می باشد لذا داریم:

$$V_y = \pi \int_0^3 x^2 dy = \pi \int_0^3 9 \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) dy = 12\pi$$

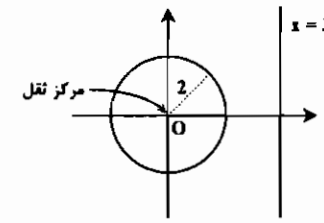
نکته ۶: حجم حاصل از دوران دایره $x^2 + y^2 = R^2$ حول محور x ها از رابطه $V = \frac{4}{3}\pi R^2$ بدست خواهد آمد.

قضایای پاپوس (کلدین)

۱. مساحت سطح حاصل از دوران یک منحنی حول محوری که آن را قطع نمی کند، برابر است با حاصل ضرب در ازای منحنی (طول قوس منحنی) در محیط پیموده شده توسط مرکز ثقل (مرکز هندسی) منحنی.

۲. حجم حاصل از دوران یک ناحیه حول محوری که ناحیه را قطع نمی کند، برابر است با حاصل ضرب مساحت ناحیه در محیط پیموده شده توسط مرکز ثقل (هندسی) ناحیه.

مثال ۲۹: حجم چنبره حاصل از دوران دایره $x^2 + y^2 = 4$ حول خط $x = 3$ را بیابید.



پاسخ: فاصله مرکز ثقل دایره از محور دوران برابر ۲ است، بنابراین محیط دایره پیموده شده توسط مرکز ثقل برابر است با:

محیط دایره $= P = 2\pi \times 2 = 4\pi$
 و مساحت ناحیه دوران یافته (مساحت دایره) برابر $\pi \times 2^2 = 4\pi$ می‌باشد. بنابراین طبق قضیه دوم پاپوس:

محاسبه طول قوس منحنی

فرض کنیم تابع f در فاصله $[a, b]$ پیوسته و در فاصله (a, b) مشتق پیوسته داشته باشد. در این صورت برای محاسبه طول منحنی $y = f(x)$ در فاصله $x = a$ تا $x = b$ از فرمول روبرو استفاده می‌کنیم:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

مثال ۳۰: طول قوس منحنی $y = \sqrt{1-x^2}$ از نقطه $x = 0$ تا $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$
- (۲) $\frac{\pi}{2}$
- (۳) ۰
- (۴) $\frac{3\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۲»

نکته ۷: در صورتی که $x = f(y)$ باشد آنگاه طول منحنی از رابطه $L = \int_a^b \sqrt{1 + (x'_y)^2} dy$ بدست می‌آید.

مثال ۳۱: طول قسمتی از منحنی $x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}$ را که بین دو نقطه به عرضهای $y = 1$ و $y = 2$ واقع، کدام است؟

پاسخ: گزینه «۲»

نکته ۸: در صورتی که معادلات به صورت پارامتری بیان شود خواهیم داشت:

مثال ۳۲: طول یکی از قوسهای سیکلوئید به معادله پارامتری $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ از نقطه $t = 0$ و $t = 2\pi$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۲»

نکته ۹: مساحت مختصات مرکز ثقل یک ناحیه مسطح

با استفاده از روابط زیر می‌توان مختصات مرکز ثقل $M(x_c, y_c)$ یک ناحیه مسطح را محاسبه کرد:

مثال ۳۳: محیط آستروئید به معادله پارامتری $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۳»

نکته ۹: طول قوس در فضای سه بعدی از رابطه مقابل بدست می‌آید:

مثال ۳۴: طول قوس از خم فضایی به معادلات $x = \frac{2}{3}t^2 - t, y = t^2 - 1, z = t^2 + 4$ از نقطه نظیر $t = 0$ تا $t = 2$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۳»

مثال ۳۳: محیط آستروئید به معادله پارامتری $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) a
- (۳) $6a$
- (۴) $8a$

پاسخ: گزینه «۳»

نکته ۹: طول قوس در فضای سه بعدی از رابطه مقابل بدست می‌آید:

مثال ۳۴: طول قوس از خم فضایی به معادلات $x = \frac{2}{3}t^2 - t, y = t^2 - 1, z = t^2 + 4$ از نقطه نظیر $t = 0$ تا $t = 2$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۳»

نکته ۹: طول قوس در فضای سه بعدی از رابطه مقابل بدست می‌آید:

مثال ۳۴: طول قوس از خم فضایی به معادلات $x = \frac{2}{3}t^2 - t, y = t^2 - 1, z = t^2 + 4$ از نقطه نظیر $t = 0$ تا $t = 2$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۳»

الف) اگر ناحیه مسطح باشد: برای ناحیه مسطح محدود به منحنی $y = f(x)$ و محور OX و خطوط $x = a$ و $x = b$ داریم:

گشتاور نسبت به محور x ها $M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx$

گشتاور نسبت به محور y ها $M_y = \int_a^b xy dx$

ب) اگر منحنی مسطح باشد: برای منحنی مسطح گشتاور استاتیکی از روابط زیر محاسبه می‌شود:

گشتاور نسبت به محور y ها $M_y = \int_a^b x \sqrt{1 + (y')^2} dx$

گشتاور نسبت به محور x ها $M_x = \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$

تذکر ۷: اگر تابع نسبت به یکی از محورها متقارن باشد آنگاه گشتاور حول آن محور صفر خواهد بود.

مثال ۳۵: گشتاور استاتیکی مثلث محدود به خطهای $x = 0$ و $y = 0$ و $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ نسبت به محور OX کدام است؟

پاسخ: گزینه «۳»

مثال ۳۵: گشتاور استاتیکی مثلث محدود به خطهای $x = 0$ و $y = 0$ و $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ نسبت به محور OX کدام است؟

پاسخ: گزینه «۳»

مثال ۳۵: گشتاور استاتیکی مثلث محدود به خطهای $x = 0$ و $y = 0$ و $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ نسبت به محور OX کدام است؟

پاسخ: گزینه «۳»

مثال ۳۵: گشتاور استاتیکی مثلث محدود به خطهای $x = 0$ و $y = 0$ و $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ نسبت به محور OX کدام است؟

پاسخ: گزینه «۳»

مثال ۳۵: گشتاور استاتیکی مثلث محدود به خطهای $x = 0$ و $y = 0$ و $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ نسبت به محور OX کدام است؟

پاسخ: گزینه «۳»

مثال ۳۵: گشتاور استاتیکی مثلث محدود به خطهای $x = 0$ و $y = 0$ و $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ نسبت به محور OX کدام است؟

پاسخ: گزینه «۳»

$$x_c = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_a^b xy dx}{S} \quad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\int_a^b y^2 dx}{S}$$

S: مساحت ناحیه مسطح می‌باشد.

مختصات مرکز ثقل یک منحنی مسطح

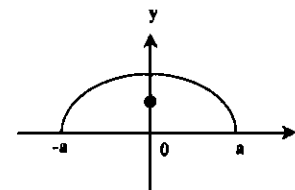
$$X_c = \frac{M_y}{L} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+(y')^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2} dx} \quad Y_c = \frac{M_x}{L} = \frac{\int_a^b y \sqrt{1+(y')^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2} dx}$$

L: طول قوسی منحنی در فاصله a و b می باشد.

مثال ۲۶: مرکز ثقل قوس نیم دایره $x^2 + y^2 = a^2$ ($y \geq 0$) کدام است؟

- (۱) $(0, \frac{2}{\pi}a)$ (۲) $(0, \frac{3a}{\pi})$ (۳) $(0, \frac{\pi}{2}a)$ (۴) $(0, \frac{2\pi}{3}a)$

پاسخ: گزینه «۱»



$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow \sqrt{1+(y')^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$M_x = \int_{-a}^a y \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_{-a}^a (\sqrt{a^2 - x^2}) \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) dx = \int_{-a}^a a dx = 2a^2$$

$$L = \int_{-a}^a \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_{-a}^a \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pi a \Rightarrow y_c = \frac{M_x}{L} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}$$

چون تابع نسبت به محور y ها متقارن است لذا $M_y = 0$ و در نتیجه $X_c = 0$ خواهد بود.

مثال ۲۷: عرض مرکز ثقل سطح محدود به $y = 1 - x^2$ و محور x ها کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{15}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{2}{\delta}$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{15}$$

پاسخ: گزینه «۴»

$$S = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3} \Rightarrow y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{5}$$

تست های طبقه بندی شده فصل پنجم

۱- اگر $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ آنگاه یک کران برای I کدام است؟

(عمران - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{1}{3} < I < \frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3} < I < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{2} < I < \frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{9} < I < \frac{1}{2}$

۲- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^{n-1}}}{n}$ کدام است؟

(آمار - سراسری ۷۸)

- (۱) $e-1$ (۲) $e+1$ (۳) $\frac{e-1}{2}$ (۴) $\frac{e+1}{2}$

۳- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \dots + \frac{1}{4n-2} \right)$ برابر کدام است؟

(آمار - سراسری ۷۹)

- (۱) $\frac{2}{3} \ln 2$ (۲) $\frac{2}{3} \ln 2$ (۳) $\ln 2$ (۴) $2 \ln 2$

۴- اگر $S_n = \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n} \right)$ حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

- (۱) $-1 + \ln 2$ (۲) $-1 + \ln 4$ (۳) $1 + \ln 2$ (۴) $1 + \ln 4$

۵- اگر $F(x) = \int_a^x \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) تعریف نشده

۶- منحنی به معادله $y = \text{ch} x$ را حول محور y ها دوران می دهیم مساحت سطح دوار کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

- (۱) $2\pi(e-1)$ (۲) $\pi(e-1)$ (۳) $2\pi(1 - \frac{1}{e})$ (۴) $\pi(1 - \frac{1}{e})$

۷- در سطح نیم دایره همگن به قطر $AB = 6$ فاصله مرکز ثقل مساحت نیم دایره تا قطر AB کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

- (۱) $\frac{2}{\pi}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{2}{\pi}$ (۴) $\frac{4}{\pi}$

۸- طول منحنی زنجیری به معادله $y = \cosh x$ از نقطه $x = -1$ تا $x = 1$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۰)

- (۱) $e - \frac{1}{2e}$ (۲) $e - \frac{1}{e}$ (۳) $e + \frac{1}{2e}$ (۴) $e + \frac{1}{e}$

۹- مؤلفه \bar{x} مرکز ثقل ناحیه محدود به نمودار تابع $y = x^2$ ، $y = 0$ و $x = 1$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۰)

- (۱) ۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{4}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۱۰- سطح حاصل از دوران منحنی $y = e^x$ حول محور x ها ($0 \leq x \leq 1$) برابر است با ...

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۰)

- (۱) $\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1+e^{2x}} dx$ (۲) $2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1+e^{2x}} dx$ (۳) $\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1+e^{2x}} dx$ (۴) $2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1+e^{2x}} dx$

۱۱- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3}$ برابر است با ...

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۱۲- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$ برابر است با:

(آمار - سراسری ۸۰)

- (۱) ۱ (۲) $\ln 2$ (۳) $\ln 2$ (۴) e

۱۳- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x \ln x}}$ در فاصله $[e, e^2]$ حول محور x ها برابر است با: (ریاضی - سراسری - ۸۰)

(۱) π (۲) $\pi(\ln 2 - 1)$ (۳) $\pi \ln 2$ (۴) 2π

۱۴- طول قوس منحنی $x = \cos^2 t$ و $y = \sin^2 t$ برابر است با: (برق - آزاد - ۸۰)

(۱) $\frac{16}{3}$ (۲) $\frac{28}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{10}{3}$

۱۵- طول منحنی زنجیری $r(t) = t\mathbf{i} + \cosh t\mathbf{j} = (t, \cosh t)$ از نقطه $(0, 1)$ تا نقطه $(x, \cosh x)$ کدام است؟ (عمران - سراسری - ۸۱)

(۱) $\cosh x$ (۲) $1 - \sinh x$ (۳) $\sinh x$ (۴) $\sinh x - 1$

۱۶- طول قوس منحنی $9x^2 = 4y^2$ را از نقطه $(0, 0)$ تا نقطه $(2\sqrt{3}, 3)$ محاسبه کنید. (عمران - آزاد - ۸۱)

(۱) ۵ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{14}{3}$ (۴) ۴

۱۷- حد عبارت زیر را وقتی که $n \rightarrow \infty$ محاسبه کنید. (عمران - آزاد - ۸۱)

$$\frac{e^{1/n} + e^{2/n} + \dots + e^{(n-1)/n} + e^{n/n}}{n}$$

(۱) e (۲) ۱ (۳) $e-1$ (۴) $\frac{1}{e}$

۱۸- ناحیه بین نمودار $y = \ln(\frac{1}{x})$ ، محور x ها، و محور y ها به دور محور x ها دوران کرده است. حجم جسمی را که تولید می‌گردد به دست آورید. (عمران - آزاد - ۸۱)

(۱) $\frac{2\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) 2π (۴) π

۱۹- مقدار $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n + e^{n-1} + \dots + e^1}{n}$ برابر است با ... (علوم کامپیوتر - سراسری - ۸۱)

(۱) e (۲) $e+1$ (۳) $e-1$ (۴) $2e$

۲۰- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n}) \dots (1+\frac{n}{n})}$ کدام است؟ (آمار - سراسری - ۸۱)

(۱) $\ln 2 - 1$ (۲) $\ln 2 + 1$ (۳) $\ln 4 - 1$ (۴) $\ln 4 + 1$

۲۱- مقدار متوسط تابع $f(x) = (\sin^2 x)(\cos x)$ روی بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ کدام است؟ (آمار - سراسری - ۸۱)

(۱) $\frac{4}{9\pi}$ (۲) $\frac{4\sqrt{2}}{9\pi}$ (۳) $\frac{4-\sqrt{2}}{9\pi}$ (۴) $\frac{4+\sqrt{2}}{9\pi}$

۲۲- طول نمودار تابع با ضابطه $y = \ln(\frac{e^x - 1}{e^x + 1})$ کدام است؟ (آمار - سراسری - ۸۱)

(۱) $\ln(e^2 + e)$ (۲) $\ln(e^2 - 1)$ (۳) $\ln(1 + e^2)$ (۴) $\ln(e^2 + e^{-2})$

۲۳- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\sqrt{\frac{n+1}{n^2}} + \sqrt{\frac{n+2}{n^2}} + \dots + \sqrt{\frac{n+n}{n^2}}]$ کدام است؟ (ریاضی - سراسری - ۸۱)

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{4} - 1$ (۴) $2\sqrt{2} - 1$

۲۴- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}})$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری - ۸۱)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۵- مقدار میانگین تابع $f(x) = \sqrt{x}$ روی $[0, 25]$ برابر است با: (مهندسی معدن، اکتشاف معدن و استخراج معدن - سراسری - ۸۱)

(۱) $\frac{2}{10}$ (۲) $\frac{2}{50}$ (۳) $\frac{10}{3}$ (۴) $\frac{50}{3}$

۲۶- طول قوس منحنی به معادله زیر کدام است؟ (مکانیک - آزاد - ۸۲)

$$\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

(۱) $e\sqrt{2}$ (۲) $e - \sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}(e-1)$ (۴) $\sqrt{2}(e+2)$

۲۷- سطح محصور به وسیله $y^2 = 4x^2 - x^4$ چقدر است؟ (علوم کامپیوتر - سراسری - ۸۲)

(۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{16}{3}$ (۳) $\frac{17}{3}$ (۴) $\frac{22}{3}$

۲۸- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ حول محور $x = \pi$ و y ها کدام است؟ (علوم کامپیوتر - سراسری - ۸۲)

(۱) $\frac{\pi}{e}$ (۲) π (۳) 2π (۴) 4π

۲۹- ناحیه A محصور به منحنی $y = \sin x$ و $y = 1$ و $x = 0$ حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چقدر است؟ (علوم کامپیوتر - سراسری - ۸۲)

(۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi^2}{4}$ (۴) $\frac{\pi^2}{8}$

۳۰- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ برابر است با: (آمار - سراسری - ۸۲)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ∞

۳۱- طول منحنی پارامتری c به معادله $x = \frac{t^2}{3} + \frac{1}{3t}$ و $y = \sqrt{2} \ln t$ ، $x = \frac{t^2}{3} + \frac{1}{3t}$ وقتی $1 \leq t \leq 2$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری - ۸۲)

(۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{31}{12}$ (۴) π

۳۲- مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $x = y^2$ و $y = x^2$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری - ۸۲)

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۳۳- مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$ برابر است با: (برق - آزاد - ۸۲)

(۱) $\ln 2 - \frac{1}{4}$ (۲) $\ln 2 - \frac{2}{8}$ (۳) $\ln 2 + \frac{1}{4}$ (۴) $\ln 2 + \frac{2}{8}$

۳۴- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^{15}}{n^{16}}$ کدام است؟ (مکانیک - سراسری - ۸۲)

(۱) $0/025$ (۲) $0/125$ (۳) $0/0625$ (۴) $0/325$

۳۵- سطح محصور بین منحنی $y = \sin x$ و محور x ها در فاصله $0 \leq x \leq 2\pi$ برابر است با: (مکانیک - آزاد - ۸۲)

(۱) ۰ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۲

۳۶- اگر $g(b) = \int_{-1}^b \frac{1+x}{1-x} dx$ آنگاه $\lim_{b \rightarrow 1^-} g(b)$ کدام است؟ (MBA - سراسری - ۸۲)

(۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) ۱ (۴) ۲

۳۷- شیب خط مماس بر یک منحنی در هر نقطه $M(x, y)$ از آن برابر با $\sqrt{1+x+y+xy}$ است. اگر این منحنی از نقطه $(-1, -1)$ بگذرد. محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (MBA - سراسری - ۸۲)

(۱) $-\frac{8}{9}$ (۲) $-\frac{7}{9}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۳۸- مساحت رویه حاصل از دوران خط $\Delta: \begin{cases} x+y=1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ حول محور $x-4y=9$ ها برابر است با: (علوم کامپیوتر - سراسری ۸۳)

- (۱) $2\sqrt{\pi}$
- (۲) $\pi\sqrt{2}$
- (۳) $2\pi\sqrt{2}$
- (۴) $\pi\sqrt{2}\pi$

۳۹- مقدار متوسط تابع $y = \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$ در بازه $[1, 4]$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر - سراسری ۸۳)

- (۱) $2(e^{-1} - e^{-2})$
- (۲) $2(e^2 - e^1)$
- (۳) $\frac{2}{3}(e^{-1} - e^{-2})$
- (۴) $\frac{2}{3}(e^{-1} - e^{-4})$

۴۰- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به نمودار $(x \geq 0)$ ، $y = x^2$ ، خط $y = 1$ و محور y حول محور y کدام است؟ (علوم کامپیوتر - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{2\pi}{5}$
- (۲) $\frac{2\pi}{3}$
- (۳) $\frac{\pi}{3}$
- (۴) $\frac{\pi}{2}$

۴۱- طول کمانی از منحنی به معادله $y = \int_0^x \sqrt{\cos t} dt$ از $x = 0$ تا $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۲) $\sqrt{2}$
- (۳) ۱
- (۴) ۲

۴۲- سطح محصور بین نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ و خطوط $x = 0$ و $x = 1$ و محور x ها کدام است؟ (علوم کامپیوتر - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{\pi}{2}$
- (۲) $\frac{\pi}{8}$
- (۳) $\frac{\pi-2}{8}$
- (۴) $\frac{\pi-1}{4}$

۴۳- خم (منحنی) بسته با معادله $x^2 + y^2 = 1$ حول محور x دوران کرده است مساحت رو به (سطح) دوار حاصل چقدر است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{6\pi}{5}$
- (۲) $\frac{12}{5}$
- (۳) $\frac{24\pi}{5}$
- (۴) $\frac{12\pi}{5}$

۴۴- حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود زیر خم $y = \sqrt{\cos x}$ وقتی $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ حول محور x ها کدام است؟ (آمار - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) π

۴۵- طول منحنی پارامتری C به معادله $x = \sin^2 t$ ، $y = \cos^2 t$ وقتی $0 \leq t \leq \pi$ کدام است؟ (آمار - سراسری ۸۳)

- (۱) ۰
- (۲) $\sqrt{2}$
- (۳) ۲
- (۴) $2\sqrt{2}$

۴۶- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{(n+i)^2}$ برابر است با: (آمار - سراسری ۸۳)

- (۱) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$
- (۲) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$
- (۳) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$
- (۴) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

۴۷- مساحت ناحیه محدود به نمودار توابع با ضابطه $y = \sqrt{1-x}$ و $y = \sqrt{1+x}$ و محور x ها کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$
- (۲) $\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)$
- (۳) $\frac{16}{3}(2\sqrt{2}-2)$
- (۴) $\frac{22}{3}(2\sqrt{2}-1)$

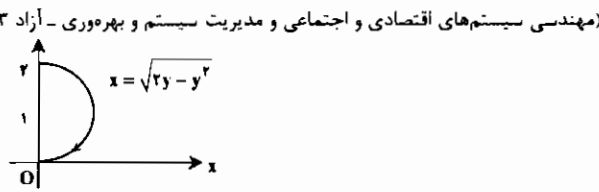
۴۸- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 0 + \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}}{n}$ کدام است؟ (مهندسی معدن - سراسری ۸۳)

- (۱) ۲
- (۲) $\frac{\pi}{2}$
- (۳) $\frac{2}{\pi}$
- (۴) حد ندارد.

۴۹- مختصات مرکز جرم ورقه محصور بین منحنی $2y^2 = 18 - 3x$ و محور y ها کدام است؟ مشروط بر آنکه چگالی سطحی در نقطه (x, y) برابر $\sqrt{6-x}$ کیلوگرم بر مترمربع باشد. (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۳)

- (۱) $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, 2)$
- (۲) $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 2)$
- (۳) $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, 0)$
- (۴) $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$

۵۰- حجم حادث از دوران سطح هاشور خورده در شکل داده شده حول محور OX چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۳)



- (۱) $\frac{\pi^2}{2}$
- (۲) π^2
- (۳) $2\pi^2$
- (۴) $\frac{2}{3}\pi^2$

۵۱- طول قوسی از منحنی به معادله $x^2 + y^2 = 1$ کدام است؟ (MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) ۳
- (۲) ۶
- (۳) ۸
- (۴) ۱۲

۵۲- طول منحنی به معادله پارامتری $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t^2 \\ y = t \cosh t - \sinh t \end{cases}$ ، $0 \leq t \leq 1$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) $e-1$
- (۲) $1 - \frac{1}{e}$
- (۳) $e+1$
- (۴) $1 + \frac{1}{e}$

۵۳- ناحیه R واقع بین نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}}$ و خطوط $x = 0$ ، $x = 1$ و محور x ها دوران می‌دهیم حجم جسم حاصل از دوران کدام است؟ (علوم کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) $\pi \text{Ln} 2$
- (۲) $\frac{\pi}{2} \text{Ln}(e+1)$
- (۳) $2\pi \text{Ln}(e+1)$
- (۴) $\pi \text{Ln}(\frac{e+1}{2})$

۵۴- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(2n+i)^2}{n^2}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{19}{2}$
- (۲) $\frac{17}{2}$
- (۳) $\frac{16}{2}$
- (۴) $\frac{14}{2}$

۵۵- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tan^{-1}(\frac{2i-1}{2n})$ برابر است با: (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{\pi}{4} - \text{Ln} 2$
- (۲) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \text{Ln} 2$
- (۳) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \text{Ln} 2$
- (۴) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \text{Ln} 2$

۵۶- قرص دایره به مرکز $(b, 0)$ و به شعاع a در صفحه xy ($0 < a < b$) آورده است. حجم جسم دوار کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۴)

- (۱) $4\pi ba$
- (۲) $\pi^2 a^2 b$
- (۳) $4\pi^2 ba^2$
- (۴) $(2\pi b)(\pi a^2)$

۵۷- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \dots + \frac{n}{2n^2} \right\}$ (آمار - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{\pi}{4}$
- (۲) $\frac{\pi}{3}$
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) $\frac{3\pi}{4}$

۵۸- طول منحنی به معادله $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\text{Ln} x}{2}$ از نقطه $x = 1$ تا $x = 2$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{2}{4} + \text{Ln} 2$
- (۲) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \text{Ln} 2$
- (۳) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \text{Ln} 2$
- (۴) $\frac{4}{3} + \text{Ln} 2$

۵۹- مساحت محدود به منحنی بسته $y^2 = x(x-1)^2$ چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۴)

- (۱) $\frac{2}{5}$
- (۲) $\frac{1}{3}$
- (۳) $\frac{8}{15}$
- (۴) $\frac{2}{5}$

۶۰- مساحت ناحیه محصور بین نمودارهای $y = 2^x$ و $y = 2^{-x}$ و خط $x = 2$ کدام است؟ ($\text{Ln} 2 = 0.693$) (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۴)

- (۱) ۳
- (۲) $2/75$
- (۳) $2/5$
- (۴) $2/25$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم

۱- گزینه «۲» ابتدا لازم است مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$ را در فاصله $[0,1]$ به دست آوریم.

$$f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{2+x-x^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{نقطه بحرانی} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}, f(0) = f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین در فاصله $[0,1]$ داریم: $\frac{2}{\sqrt{2}} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{2}} dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{2} dx \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} < I < \frac{\sqrt{2}}{2}$

۲- گزینه «۱» $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[k]{e^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e-1$

۳- گزینه «۱» $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \dots + \frac{1}{2n-2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+2 \times \frac{1}{n}} + \dots + \frac{1}{1+2 \left(\frac{n-1}{n} \right)} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{2k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+2x} = \frac{1}{2} \ln(1+2x) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{\ln 3}{2}$$

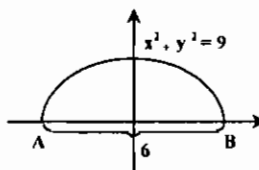
۴- گزینه «۲» $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} S_n = \int_0^1 \ln(1+x) dx = (1+x)\ln(1+x) - x \Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1$

۵- گزینه «۲» می‌دانیم $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{Arcsec } x + c$ بنابراین: $F(\alpha) = \text{Arcsec } 2 - \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \text{Arcsec } \alpha = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

۶- گزینه «۳» $y = \cosh x \Rightarrow y' = \sinh x \Rightarrow \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \cosh x$

$$\text{مساحت} = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_0^1 x \cosh x dx = 2\pi (x \sinh x - \cosh x) \Big|_0^1 = 2\pi \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

۷- گزینه «۴» چون نیم‌دایره نسبت به محور y متقارن است، لذا مرکز ثقل روی محور y قرار دارد. پس کافی است عرض نقطه موردنظر را به دست آوریم.



$$\bar{y} = \frac{M_x}{\text{مساحت نیم‌دایره}} = \frac{\frac{1}{2} \int_{-3}^3 (9-x^2) dx}{\frac{1}{2} \times 9\pi} = \frac{36}{9\pi} = \frac{4}{\pi}$$

۸- گزینه «۲» $y' = \sinh x \rightarrow 1+y'^2 = 1+\sinh^2 x = \cosh^2 x$

$$\Rightarrow L = \int_{-1}^1 \sqrt{\cosh^2 x} dx = \int_{-1}^1 \cosh x dx = \sinh x \Big|_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}$$

۹- گزینه «۳» $\bar{x} = \frac{\int_0^1 xf(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} = \frac{\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx}{\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

۱۰- گزینه «۲» $S = 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1+e^{2x}} dx$

۱۱- گزینه «۱» $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

۱۲- گزینه «۲» $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2$

۱۳- گزینه «۲» $U = \pi \int_e^{e^2} y^2 dx = \pi \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \pi (\ln(\ln x)) \Big|_e^{e^2} = \pi \ln 2$

۱۴- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \Rightarrow x'(t) = -2\cos t \sin t \\ y(t) = \sin^2 t \Rightarrow y'(t) = 2\sin t \cos t \end{cases} \Rightarrow (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 4\sin^2 t \cos^2 t$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 1$$

۱۵- گزینه «۳» $L = \int_0^x \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^x \sqrt{1+\sinh^2 t} dt = \int_0^x \cosh t dt = \sinh t \Big|_0^x = \sinh x$

۱۶- گزینه «۳» $9x^{\frac{1}{2}} = 4y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{4}{9}y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{4}{9}y^{\frac{1}{2}}$

و چون طول قوس در فاصله $0 < y < 3$ خواسته شده $\frac{dx}{dy} = \sqrt{y}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت:

$$L = \int_0^3 \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^3 \sqrt{1+y} dy = \frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = \frac{14}{3}$$

۱۷- گزینه «۳» $S = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{i=1}^x e^{\frac{i}{x}} = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e-1$

۱۸- گزینه «۳» تابع داده شده را می‌توان به صورت $y = -\ln x$ نوشت. تابع محور x ها را در $x=1$ قطع می‌کند. پس حجم موردنظر برابر است با:

$$V = \pi \int_1^e (f(x))^2 dx = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi \Gamma(2) = \pi \times 2! = 2\pi$$

۱۹- گزینه «۲» $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{i=1}^x e^{\frac{i}{x}} = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e-1$

۲۰- گزینه «۳» $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\left(1+\frac{1}{n}\right) \left(1+\frac{2}{n}\right) \dots \left(1+\frac{n}{n}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1+\frac{2}{n}) + \dots + \ln(1+\frac{n}{n}))$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(1+\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x) dx = ((1+x)\ln(1+x) - x) \Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1$$

۲۱- گزینه «۴»

$$\text{مقدار متوسط} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{4})} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{\sin^3 x}{3} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{9\pi}$$

۲۲- گزینه «۴»

$$y = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) \Rightarrow y' = \frac{re^x}{e^{rx} - 1} \Rightarrow 1 + y'^r = 1 + \frac{re^{rx}}{(e^{rx} - 1)^r} = \frac{(e^{rx} + 1)^r}{(e^{rx} - 1)^r}$$

$$L = \int_r^t \sqrt{1 + y'^r} dx = \int_r^t \frac{e^{rx} + 1}{e^{rx} - 1} dx = \int_r^t \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \int_r^t \coth x dx$$

$$= \ln|\sinh x| \Big|_r^t = \ln \sinh t - \ln \sinh r = \ln r \cosh t = \ln(e^t + e^{-t})$$

۲۳- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{x} \int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx = (1+x)^{\frac{2}{3}} \Big|_0^1 = 2\sqrt[3]{2} - 1$$

۲۴- گزینه «۲»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2$$

۲۵- گزینه «۳»

$$\text{مقدار میانگین} = \frac{1}{2.5 - 0} \int_0^{2.5} \sqrt{x} dx = \frac{1}{2.5} \cdot \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^{2.5} = \frac{10}{3}$$

۲۶- گزینه «۳»

$$\begin{cases} x'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t \\ y'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t \end{cases}$$

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + (e^t \cos t - e^t \sin t)^2 = 2e^{2t}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{2e^{2t}} dt = \int_0^1 \sqrt{2} e^t dt = \sqrt{2} e^t \Big|_0^1 = \sqrt{2}(e - 1)$$

بنابراین طول قوس منحنی برابر است با:

۲۷- گزینه «۴» محل تلاقی منحنی با محور X ها، نقاط ± 2 و $X=0$ می باشد. و با توجه به اینکه نمودار منحنی نسبت به محور X ها و Y ها متقارن است، کافی است سطح محصور مابین $y = \sqrt{4x^2 - x^4}$ و محور X ها را در فاصله $0 \leq x \leq 2$ به دست آورده و حاصل را در ۴ ضرب می کنیم:

$$S = 4 \int_0^2 \sqrt{4x^2 - x^4} dx = 4 \int_0^2 x \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{-4}{3} (4 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{32}{3}$$

۲۸- گزینه «۴» برای محاسبه حجم، از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می کنیم.

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x) dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\sin x}{x}\right) dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 4\pi$$

۲۹- گزینه «۳»

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1^2 - \sin^2 x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \pi \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

۲۰- گزینه «۲»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{\frac{n}{2}} + \sqrt{\frac{n}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2$$

$$L = \int_1^r \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_1^r \sqrt{\left(\frac{2t}{t} - \frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{t}\right)^2} dt$$

۲۱- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^r) dx = \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

۲۲- گزینه «۴» به وضوح محل تلاقی دو منحنی $X=1$ و $X=0$ می باشد. بنابراین:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^r x}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x (1 - \cos^2 x)^r}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{tg} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx$$

۲۳- گزینه «۴»

$$= -\ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x dx = -\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 + \frac{1}{8}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^{15}}{n^{16}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^{15} = \int_0^1 x^{15} dx = \frac{1}{16} = 0.0625$$

۲۴- گزینه «۳»

۲۵- گزینه «۲» منحنی $y = \sin x$ محور X ها را در $x = \pi$ قطع می کند، بنابراین:

$$S = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = (1 - (-1)) + (1 - (-1)) = 4$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \text{Arcsin } x \Big|_0^1 = \pi$$

۲۶- گزینه «۲»

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(x+1)(y+1)} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y+1}} = \sqrt{x+1} dx \Rightarrow 2\sqrt{y+1} = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + c$$

۲۷- گزینه «۱»

طبق فرض منحنی از نقطه $(-1, -1)$ عبور می کند، پس $c=0$. بنابراین معادله به صورت روبرو در می آید:

$$\sqrt{y+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow y+1 = \frac{1}{9} \Rightarrow y = -\frac{8}{9}$$

برای به دست آوردن محل تقاطع با محور Y ها، قرار می دهیم $x=0$ ، در نتیجه:

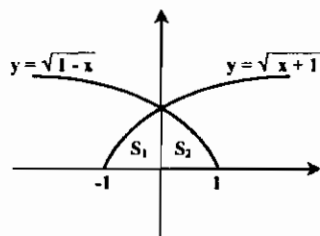
$$x+y=1 \Rightarrow y=1-x \Rightarrow y'=-1$$

۲۸- گزینه «۲»

$$S = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2} x dx = \pi\sqrt{2}$$

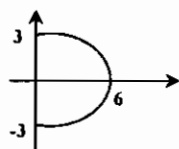
۴۷- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با توجه به شکل مساحت ناحیه موردنظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^0 \sqrt{x+1} dx + \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^0 + \frac{-2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \int_0^1 \sin \pi x dx = -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

۴۸- گزینه «۳»



۴۹- گزینه «۳»
شکل ورقه نسبت به محور X ها حالت متقارن دارد بنابراین مرکز جرم روی محور X ها قرار می‌گیرد. پس با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینه ۳ می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

۵۰- گزینه «۲»

$$x = \sqrt{2y-y^2} \Rightarrow y^2 - 2y + x^2 = 0 \Rightarrow y_1 = 1 + \sqrt{1-x^2}, y_2 = 1 - \sqrt{1-x^2}$$

روش اول:

توجه کنید که y_1 قسمت بالایی نیم‌دایره و y_2 قسمت پایینی نیم‌دایره را تشکیل می‌دهد. بنابراین حجم حاصل از دوران ناحیه محصور مابین y_1 و y_2 حول محور X ها از فرمول روبرو به دست می‌آید:

$$V = \pi \int_{-1}^1 (y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_{-1}^1 4\sqrt{1-x^2} dx = 4\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

انتگرال اخیر مساحت ربع دایره‌ای به شعاع ۱ می‌باشد، بنابراین برابر $\frac{\pi}{4}$ خواهد بود و در نتیجه $V = \pi^2$.

روش دوم: از قضیه پاپوس استفاده می‌کنیم. مساحت ناحیه مزبور برابر $\frac{\pi}{4}$ می‌باشد. مرکز هندسی ناحیه روی خط $y=1$ واقع است پس فاصله مرکز جسم تا محور دوران برابر ۱ می‌باشد. بنابراین: $V = 2\pi \times 1 \times \frac{\pi}{4} = \pi^2$ مساحت ناحیه \times فاصله مرکز جسم تا محور دوران $\times 2\pi =$ حجم

$$51- \text{گزینه «۲» منحنی داده شده را می‌توان به شکل پارامتری} \begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases} \text{ نوشت. در این صورت:}$$

$$x'(t) = 2 \sin t \cos t, y'(t) = -2 \cos t \sin t \Rightarrow (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 4 \sin^2 t \cos^2 t$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{4 \sin^2 t \cos^2 t} dt = \int_0^{\pi} 2 |\sin t \cos t| dt = 2 \int_0^{\pi} |\sin 2t| dt = 2 \int_0^{\pi} |\sin 2t| dt = 4$$

۵۲- گزینه «۲»

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 \\ y(t) = t \cosh t - \sinh t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = t \\ y'(t) = t \sinh t \end{cases} \Rightarrow (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = t^2 + t^2 \sinh^2 t = t^2 \cosh^2 t$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^1 t \cosh t dt = (t \sinh t - \cosh t) \Big|_0^1 = \sinh 1 - \cosh 1 + 1 = 1 - \frac{1}{e}$$

$$39- \text{گزینه «۳» مقدار متوسط} = \frac{1}{4-1} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = \frac{-2}{3} e^{-\sqrt{x}} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} (e^{-1} - e^{-2})$$

۴۰- گزینه «۱» برای محاسبه حجم از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:

$$U = 2\pi \int_0^1 x(f(x) - g(x)) dx = 2\pi \int_0^1 x(1-x^2) dx = 2\pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{5}$$

$$y = \int_0^x \sqrt{\cos 2t} dt \Rightarrow y' = \sqrt{\cos 2x}$$

۴۱- گزینه «۳»

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \cos x dx = 1$$

$$S = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

۴۲- گزینه «۳»

برای محاسبه انتگرال فوق از تغییر متغیر $x = \tan u$ استفاده می‌کنیم: $dx = \frac{du}{\cos^2 u}$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 u du}{(1+\tan^2 u)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 u}{\cos^4 u} \cdot \frac{du}{\cos^2 u} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 u du = \frac{\pi-2}{8}$$

۴۳- گزینه «۴»

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow y' = -\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow 1+y'^2 = 1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow S = 2\pi \int_{-1}^1 y \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_{-1}^1 (1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = 4\pi \int_0^1 (1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \frac{-12\pi}{5} (1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{3}} \Big|_0^1 = \frac{12\pi}{5}$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\cos x})^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \pi \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

۴۴- گزینه «۴»

۴۵- گزینه «۴»

$$\begin{cases} y(t) = \sin^2 t \Rightarrow x'(t) = 2 \sin t \cos t \\ y(t) = \cos^2 t \Rightarrow y'(t) = -2 \sin t \cos t \end{cases} \Rightarrow (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 4 \sin^2 t \cos^2 t$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{4 \sin^2 t \cos^2 t} dt = \int_0^{\pi} 2 |\sin t \cos t| dt = 2 \int_0^{\pi} |\sin 2t| dt = 4$$

$$46- \text{گزینه «۲»} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{(n+i)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$

۵۲- گزینه «۴»

$$U = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \pi \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \pi \ln(e^x + 1) \Big|_0^1 = \pi \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

۵۴- گزینه «۱»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(in+i)^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \int_0^1 (x+x)^2 dx = \frac{(x+x)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{19}{3}$$

۵۵- گزینه «۲»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{i}{n} - \frac{1}{2n}\right) = \int_0^1 \operatorname{Arctg} x dx = \left(x \operatorname{Arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

۵۶- گزینه «۴» مساحت دایره به شعاع a برابر πa^2 می‌باشد. فاصله مرکز دوران یعنی مرکز دایره تا محور y ها برابر b می‌باشد. پس طبق قضیه پاپوس داریم:
حجم = $2\pi b \times \pi a^2$

۵۷- گزینه «۱»

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2} + \dots + \frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2} \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

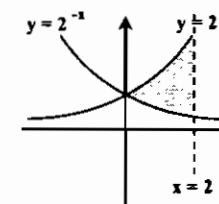
۵۸- گزینه «۳»

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2}} dx = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{\ln x}{2}\right) \Big|_1^2 = \frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

۵۹- گزینه «۳» از حل معادله $y=0$ ، نقاط ۱ و $x=0$ به دست می‌آیند. این نقاط، محل تلاقی منحنی با محور x ها هستند. چون منحنی نسبت به محور x ها متقارن است، کافی است مساحت محصور مابین $y = \sqrt{x(x-1)}$ و محور x ها را در فاصله $0 \leq x \leq 1$ ، به دست آوریم و حاصل را در ۲ ضرب کنیم. بنابراین:

$$S = 2 \int_0^1 |x-1| \sqrt{x} dx = 2 \int_0^1 (\sqrt{x} - x\sqrt{x}) dx = 2 \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}$$

۶۰- گزینه «۲» با توجه به شکل، مساحت موردنظر برابر است با:

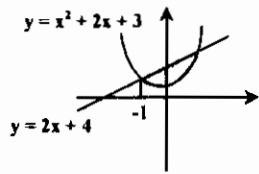


$$S = \int_0^2 (2^x - 2^{-x}) dx = \left(\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \right) \Big|_0^2 = \frac{9}{4 \ln 2} \approx 3.25$$

تست‌های تکمیلی فصل کاربرد انتگرال

۱- مساحت هاشور زده مقابل چقدر است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
- (۲) $\frac{5}{2}$
- (۳) $\frac{4}{3}$
- (۴) $\frac{2}{3}$



۲- حجم حادث از دوران $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ حول خط $x = y + 2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{3} \pi$
- (۲) $\frac{16}{3} \pi$
- (۳) $\frac{4}{3} \pi$
- (۴) $\frac{22}{3} \pi$

۳- طول خم تابع پارامتری با ضابطه $\begin{cases} x = t^2 + 2t^2 \\ y = t^2 - 2t^2 \end{cases}$ وقتی $0 \leq t \leq 2$ کدام است؟

- (۱) $13\sqrt{26} - 8\sqrt{2}$
- (۲) $13\sqrt{26} - 4\sqrt{2}$
- (۳) $13\sqrt{26} + 8\sqrt{2}$
- (۴) $13\sqrt{26} + 4\sqrt{2}$

۴- حجم حاصل از دوران $y = \sqrt{25 - 10x^2 + x^4}$ در فاصله $|1, 2|$ حول محور x ها کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{3} \pi$
- (۲) $\frac{8}{3} \pi$
- (۳) ۳
- (۴) $\frac{10}{3} \pi$

۵- طول خم تابع پارامتری با ضابطه $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t^2 \end{cases}$ وقتی $0 \leq t \leq 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}(13\sqrt{13} - 4)$
- (۲) $\frac{1}{9}(13\sqrt{13} - 8)$
- (۳) $\frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8)$
- (۴) $\frac{1}{18}(13\sqrt{13} - 4)$

۶- حجم حادث از دوران سطح محصور بین $y = \frac{1}{\cos x}$ و خطوط $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{3\pi}{4}$ حول محور x ها کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) π
- (۴) 2π

۷- مساحت ناحیه محصور بین نمودارهای $y = |x| + |x-1|$ و $y = x + 1$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) $\frac{3}{2}$
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۸- سطحی که تابع $y = \sqrt{\sin x}$ در فاصله $\pi \leq x \leq 2\pi$ با محور x ها پدید می‌آورد، چند مترمربع است؟

- (۱) صفر
- (۲) $\frac{\pi}{2}$
- (۳) $\frac{1}{2\pi}$
- (۴) $\frac{1}{\pi}$

۹- طول قوس منحنی نمودار $y = \ln(\cos x)$ از $x = 0$ تا $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\ln 2$
- (۲) $\ln(\sqrt{2} + 1)$
- (۳) $\frac{4}{\pi} \ln$
- (۴) $\ln(\sqrt{2} - 1)$

۱۰- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right]$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۱- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) $\ln 2$
- (۳) ۳
- (۴) $\ln 2$

۱۲- مقدار متوسط تابع $\sin^2 x$ در فاصله $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$
- (۲) π
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) ۱

۱۳- مساحت ناحیه محدود به خطوط $x = 0$ و $x = 2$ و منحنیهای $y = 2x - x^2$ و $y = 2^x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{\ln 2}$
- (۲) $\frac{4}{3}$
- (۳) $\frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}$
- (۴) $\frac{2}{\ln 2} + \frac{4}{3}$

۱۴- مساحت ناحیه محدود به سهمی های $x^2 = 4y$ و $y = \frac{A}{x^2 + 4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{6\pi - 4}{2}$ (۲) $\frac{6\pi}{3}$ (۳) 2π (۴) $\frac{4}{3}$

۱۵- مساحت ناحیه محدود به خط $y = x + 1$ و $y = \cos x$ و محور x ها کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) 1 (۳) 2 (۴) $\frac{3}{2}$

۱۶- سطح محصور بین دو منحنی $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{A}{3}$ (۲) $\frac{10}{3}$ (۳) $\frac{14}{3}$ (۴) $\frac{16}{3}$

۱۷- سطح محصور بین تابع $y = |\cos x|$ و محور x ها از $x = 0$ تا $x = \pi$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) 2π (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۸- سطح محصور بین منحنی $y = |x - 2| + |x - 1|$ و خط $y = x$ برابر است با:

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۹- طول منحنی $x = \ln\left(\frac{1}{\sin y}\right)$ از نقطه $y = \frac{\pi}{4}$ تا $y = \frac{3\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$ (۲) $\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{1+2\sqrt{2}}\right|$ (۳) $\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|$ (۴) $\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|$

۲۰- مقدار حدودی I با توجه رابطه: $I = \int \sqrt{1+x^2} dx$ کدام است؟

- (۱) $0 < I < \sqrt{2}$ (۲) $1 < I < 2$ (۳) $1 < I < \sqrt{2}$ (۴) $0 < I < 2$

۲۱- اگر $I_1 = \int x^2 \sin^2 x dx$ و $I_2 = \int x \sin^2 x dx$ از روابط زیر صحیح است؟

- (۱) $I_1 = I_2$ (۲) $I_1 > I_2$ (۳) $I_1 < I_2$ (۴) هیچکدام

۲۲- مقدار متوسط تابع $f(x) = a + b \cos x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ کدام است؟

- (۱) a (۲) b (۳) $\frac{a+b}{2}$ (۴) $\frac{a-b}{2}$

۲۳- مقدار متوسط تابع $f(x) = \sin^2 x$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) 1 (۴) $\frac{1}{4}$

۲۰- مساحت محدود به منحنی $r^2 = a^2 \cos 2\phi$ کدام است؟

- (۱) $\frac{a^2}{3}$ (۲) $\frac{a^2}{2}$ (۳) $\frac{a^2}{4}$ (۴) a^2

۲۱- طول منحنی $x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}$ از $y = 1$ تا $y = e$ کدام است؟

- (۱) $e^2 + 1$ (۲) $\frac{e^2 + 1}{2}$ (۳) $\frac{e^2 + 1}{3}$ (۴) $\frac{e^2 + 1}{4}$

۲۲- مختصات مرکز ثقل مثلث محدود به خطهای $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$ کدام است؟

- (۱) $\left(\frac{a}{3}, 0\right)$ (۲) $\left(0, \frac{a}{3}\right)$ (۳) $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ (۴) (a, a)

۲۵- مساحت ناحیه محدود به منحنی پارامتری $\begin{cases} x = a \cos^2 t \\ y = b \sin^2 t \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) πab (۲) $2\pi ab$ (۳) $3\pi ab$ (۴) $4\pi ab$

۲۶- مساحت محدود به سهمی $y = x^2 - 2x + 2$ و خط مماس به آن در نقطه $M(3, 5)$ و محور y ها کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 6 (۳) 9 (۴) 12

۲۷- مساحت محدود به سهمی های $y = \frac{x^2}{9}$ و $y = 4x^2$ و خط $y = 2$ را حساب کنید؟

- (۱) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ (۲) $\frac{20\sqrt{2}}{5}$ (۳) $20\sqrt{2}$ (۴) $\frac{20\sqrt{2}}{3}$

۲۸- مساحت محدود به دو شاخه منحنی $(y-x)^2 = x^2$ و خط $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) 1 (۴) $\frac{3}{5}$

۲۰- حاصل $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$

۳۱- حاصل $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4\sqrt{2} + 2}{3}$ (۲) $\frac{4\sqrt{2} - 1}{3}$ (۳) $\frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$ (۴) $\frac{2(2\sqrt{2} - 1)}{3}$

۳۳- حجم حاصل از دوران سطح محدود به منحنی $y = \tan x$, محور x ها و خط $x = \frac{\pi}{4}$ حول محور x ها کدام است؟

- (۱) $\pi\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$ (۲) $\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ (۳) $\pi\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$ (۴) $\pi\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$

۳۴- سطح محدود به منحنی $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$ و محور x ها و دو خط $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2 - \sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2} - 1$ (۴) $\sqrt{2} + 1$

۳۵- حجم حاصل از دوران سطح هاشورزده زیر. حول محور x ها کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi^2}{4}$ (۲) $\frac{\pi^2}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$

۳۶- طول قوس منحنی $\begin{cases} x = 2 \sin t + \cos t \\ y = \sin t - 2 \cos t \end{cases}$ در فاصله $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ چقدر است؟

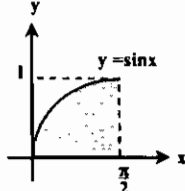
- (۱) π (۲) $\pi\sqrt{5}$ (۳) $\frac{\pi\sqrt{5}}{2}$ (۴) $\frac{\pi\sqrt{5}}{5}$

۳۷- در کاسه‌ای به شکل نیمکره که شعاع آن ده سانتی‌متر است تا ارتفاع ۵ سانتی‌متر آب ریخته‌ایم. حجم آن چند سانتی‌متر مکعب است؟

- (۱) $\frac{520\pi}{3}$ (۲) $\frac{575\pi}{3}$ (۳) $\frac{625\pi}{3}$ (۴) $\frac{675\pi}{3}$

۳۸- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به نمودار به معادله‌های $x = y^2$ و $x = \frac{y^2}{2}$ حول خط $y = 4$ کدام است؟

- (۱) $\frac{206\pi}{25}$ (۲) $\frac{208\pi}{25}$ (۳) $\frac{205\pi}{15}$ (۴) $\frac{206\pi}{15}$



۳۹- حاصل حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1+\frac{n}{n}})$ چقدر است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ (۴) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

۴۰- مساحت محدود به حلقه منحنی $y^2 = (x-1)(x-2)^2$ کدام است؟

(۱) $\frac{8}{15}$ (۲) $\frac{7}{15}$ (۳) $\frac{11}{15}$ (۴) $\frac{14}{15}$

۴۱- مساحت واقع بین منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ و خط $x+y=1$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۴۲- مساحت ناحیه‌ای از کاردیوئید $\rho = 1 + \cos \phi$ را که به وسیله دایره $\rho = \sqrt{2} \sin \phi$ قطع می‌شود کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}(\pi - \sqrt{3})$ (۲) $\frac{2}{3}(\pi + \sqrt{3})$ (۳) $\frac{2}{3}(\pi - \sqrt{3})$ (۴) $\frac{2}{3}(\pi + \sqrt{3})$

۴۳- مساحت ناحیه محدود به منحنی $\rho = \cos^2 \theta$ چقدر است؟

(۱) $\frac{5\pi}{8}$ (۲) $\frac{5\pi}{16}$ (۳) $\frac{5\pi}{32}$ (۴) $\frac{5\pi}{64}$

۴۴- مساحت ناحیه محدود به منحنی $x^2 + y^2 = a^2(x^2 + y^2)^2$ کدام است؟

(۱) πa^2 (۲) $\sqrt{2}\pi a^2$ (۳) $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\pi a^2}{2}$

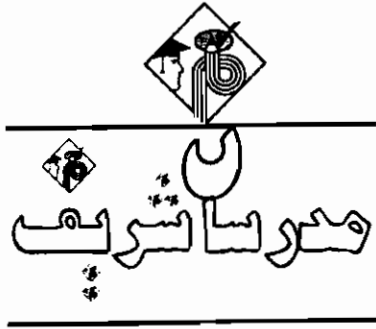
۴۵- سطح محصور مابین $y_2 = 2 \cos x$ و $y_1 = 2 \sin x$ در فاصله $|\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}|$ چقدر است؟

(۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{2} - 2$ (۳) $2\sqrt{2} - 2$ (۴) $4\sqrt{2} - 4$

هر دردی را درمانی است، جز بد اخلاقی که درمان پذیر نیست.
خطاکارترین گمان افرادی هستند که عیب دیگران را می‌بینند.

«حضرت علی (ع)»

«ببین»



فصل ششم

«دنباله و سری»

تعریف دنباله: دنباله تابعی از n است که n فقط اعداد طبیعی را میتواند اختیار کند: $a_n = 2n - 1 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, \dots$

گراندداری دنباله: وقتی حد دنباله ای زمانی که $n \rightarrow \infty$ برابر ∞ نشود آنگاه گوئیم دنباله گرانددار است.

یکنوائی دنباله: دنباله ای که همواره صعودی یا همواره نزولی باشد، یکنوا نامیده می شود.

همگرایی دنباله: وقتی حد دنباله‌ای زمانی که $n \rightarrow \infty$ عدد مشخص و معلوم باشد آنگاه گوئیم دنباله به سمت آن عدد معلوم همگرا است.

واگرایی دنباله: چنانچه حد دنباله ای برابر ∞ شود ویا دنباله حد مشخص نداشته باشد، گوئیم، دنباله واگرا است.

تذکر ۱: هر دنباله همگرا، گرانددار نیز خواهد بود، اما دنباله واگرا ممکن است گرانددار باشد.

تذکر ۲: یک دنباله ممکن است همگرا و گرانددار باشد ولی یکنوا نباشد.

تذکر ۳: حد هر دنباله همگرا منحصر به فرد است.

مثال ۱: یکنوائی، گراندداری و همگرایی دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

۱) $a_n = (-1)^n$ ۲) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ ۳) $a_n = \sin n$ ۴) $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$ ۵) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
 ۶) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ ۷) $a_n = n \sin \frac{\pi}{n}$ ۸) $a_n = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n + \delta}$ ۹) $a_n = (-1)^n \cos n\pi$ ۱۰) $a_n = \cos \frac{\pi}{n}$

دنباله گرانددار است و چون حد مشخصی ندارد و اگر است. دنباله مرتباً $+1$ و -1 می‌شود و نمی‌تواند یکنوا باشد. ۱) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \pm \infty$

دنباله همگرا و گرانددار می‌باشد، اما دنباله یکنوا نمی‌باشد. ۲) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

دنباله گرانددار است و چون حد مشخصی ندارد لذا واگراست، چون مرتباً تغییر علامت داریم، دنباله یکنوا نیست. ۳) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty$

دنباله گرانددار و واگراست و چون مرتباً تغییر علامت داریم دنباله یکنوا نیست. (دنباله تنها مقدار 1 و 0 و -1 را میتواند داشته باشد) ۴) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty$

دنباله همگرا و گرانددار است همچنین دنباله نزولی نیز می‌باشد. ۵) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

دنباله گرانددار ولی واگراست، یکنوا نیز نمی‌باشد. ۶) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty \Rightarrow a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_2 = a_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, a_4 = a_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

دنباله همگرا و گرانددار است ۷) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n} = \pi$

حد $\frac{1}{n + \delta}$ وقتی $n \rightarrow +\infty$ برابر صفر خواهد بود پس وقتی در حد جمله سینوسی ضرب شود حاصل صفر خواهد بود، پس دنباله به عدد صفر همگرا است و در نتیجه گرانددار نیز خواهد بود. ۸) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n + \delta}$

می‌دانیم $\cos n\pi = (-1)^n$ لذا $a_n = (-1)^{2n} = 1$ خواهد بود، پس دنباله همگرا و کراندار می‌باشد.

۹) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$

۱۰) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \cos 0 = 1$
 $\Rightarrow \cos \pi = -1, \cos \frac{\pi}{2} = 0, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \dots, \cos 0 = 1 \quad n \neq 0 \rightarrow n = 1, 2, 3, \dots$

مثال ۲: بزرگترین جمله دنباله $a_n = \frac{n^2}{n^2 + 4000}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{40}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{30}$

پاسخ: گزینه «۴» عبارتی ماکزیم تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4000}$ مورد سؤال است:

$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 4000) - x^2(2x)}{(x^2 + 4000)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 8000x - 2x^3 = 0 \Rightarrow x(8000 - 2x^2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ غ ق} \\ x = 20 \Rightarrow f(20) = \frac{(20)^2}{(20)^2 + 4000} = \frac{1}{30} \end{cases}$

مثال ۳: حد دنباله $a_n = \frac{\sin n + \cos n}{\sqrt{n}}$ کدام است؟

- (۱) وجود ندارد (۲) برابر یک است (۳) صفر (۴) نامشخص است

پاسخ: گزینه «۳» $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ و چون عبارت $(\sin n + \cos n)$ کراندار است پس حد کل عبارت برابر صفر خواهد شد.

تذکره: مقدار عددی $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ همان عدد همگرایی دنباله a_n می‌باشد.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$
--	--

نکته ۱:

مثال ۴: دنباله $a_n = \frac{2n^n + n!}{2n^n + 2n!}$ به سمت کدام عدد همگراست؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{2}{7}$ (۴) ۴

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2n^n}{2n^n} = 1$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نکته (۱) داریم:

مثال ۵: در دنباله $a_n = \frac{e^n}{2n^n}$ به سمت چه عددی همگراست؟

(۱) ۱ (۲) ۰ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته (۱) حد دنباله برابر صفر است.

نکته ۲: اگر $0 < a < 1$ باشد آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ خواهد بود.

نکته ۳: وقتی $n \rightarrow \infty$ نگاه برای محاسبه حدودی به فرم $\lim_{n \rightarrow \infty} (1^k + 2^k + \dots + n^k)$ می‌توان عبارت را هم ارز با $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k+1}}{k+1}$ قرار داد.

مثال ۶: حاصل $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n)^2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{16}$

پاسخ: گزینه «۱»

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^2}{3} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^3}{3} \Rightarrow A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3}{3}}{\frac{8n^3}{3}} = \frac{1}{8}$

مثال ۷: حد دنباله $a_n = \frac{2^n + \Delta^{n-1}}{2^{n-1} + \Delta^n}$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) $\frac{1}{\Delta}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta^n \left[\left(\frac{2}{\Delta} \right)^n + \frac{1}{\Delta} \right]}{\Delta^n \left[\left(\frac{2}{\Delta} \right)^n \times \frac{1}{2} + 1 \right]} = \frac{1}{\Delta}$

مثال ۸: دنباله $a_n = n + 2 - \sqrt{n^2 - 6n + 11}$ به سمت کدام عدد همگراست؟

(۱) ۲ (۲) ۵ (۳) واگراست (۴) ۱۱

پاسخ: گزینه «۲»

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \approx n + 2 - n + 2 = 4$

مثال ۹: در مورد دنباله $a_n = (n + 4) \cos \frac{\pi}{n}$ کدام گزاره صحیح است؟

- (۱) صعودی، همگرا و کراندار است. (۲) نزولی، همگرا و کراندار است. (۳) نزولی، واگرا و کراندار است. (۴) صعودی، واگرا و بیکران است.

پاسخ: گزینه «۴»

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 4) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{n} = (\infty)(1) = \infty$

با توجه به اینکه $(n + 4)$ و $\cos \frac{\pi}{n}$ صعودی و مثبت هستند در نتیجه حاصل ضرب آنها نیز صعودی است.

مثال ۱۰: دنباله $\left\{ \frac{\sqrt[n]{n!} \sin n!}{n + \Delta} \right\}$ همگرا به کدام عدد است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) صفر

پاسخ: گزینه «۴»

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!} (\sin n!) = 0 \times (-1 \leq \text{عدد} \leq 1) = 0$

مثال ۱۱: دنباله $\left\{ \frac{n^n}{n!} \right\}$ دارای کدامیک از خاصیت‌های زیر است؟

- (۱) نه نزولی است و نه صعودی است (۲) نزولی است (۳) کراندار نیست (۴) کراندار است ولی همگرا نیست

پاسخ: گزینه «۳» مطابق با نکته متن درس $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$ لذا دنباله کراندار نیست.

نکته ۴: اگر دو دنباله a_n و b_n همگرا باشند، دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ ، $\{a_n \cdot b_n\}$ و $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ نیز همگرا می‌باشند.

نکته ۵: اگر دو دنباله a_n و b_n واگرا باشند، دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ ، $\{a_n \cdot b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ممکن است همگرا باشند.

مثال ۱۲: دو دنباله $x_n = n$ ، $y_n = 1 - n$ هر دو واگرا هستند اما دنباله $x_n + y_n = 1$ همگرا به ۱ است و یا دو دنباله $a_n = (-1)^{n+1}$ ، $b_n = (-1)^n$ هر دو واگرا هستند ولی دنباله $\frac{a_n}{b_n} = -1$ دنباله ثابت همگرا به -۱ می‌باشد.

نکته ۶: اگر دنباله a_n همگرا و b_n واگرا باشند آنگاه $\{a_n \pm b_n\}$ واگراست اما $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0\right)$ ، $\{a_n \cdot b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ممکن است همگرا باشند.

مثال ۱۳: دنباله $x_n = \frac{1}{n}$ همگرا و دنباله $y_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ واگراست در حالیکه دنباله مجموع آنها $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \frac{n + n(-1)^n + 2}{2n}$ واگرا و حاصلضرب آنها $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \frac{1 + (-1)^n}{2n}$ همگراست.

نکته ۷: با اضافه یا کم کردن تعداد محدودی جمله به یک دنباله همگرایی و یا واگرایی آن دنباله تغییری نمی‌کند.

همگرایی دنباله (تعریف)

وقتی می‌گوئیم دنباله به L همگراست که جملات نهائی در همسایگی L با شعاع کوچک ϵ واقع باشند:

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, N \geq M \rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

M : عدد بسیار بزرگی فرض شده است، ϵ شعاع همسایگی است.

مثال ۱۴: دنباله $\frac{(-1)^n}{n}$ بعد از جمله چندم در شعاع $\epsilon = 0.1$ همگرایی خود قرار می‌گیرد؟

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \frac{1}{100} \rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \rightarrow n \geq 101$$

دنباله بعد از جمله 101 ام در همسایگی $\epsilon = 0.1$ برای $L = 0$ قرار می‌گیرد.

مثال ۱۵: کوچکترین عدد طبیعی n که به ازای آن فاصله دنباله $\left\{\frac{n+2}{2n-3}\right\}$ از نقطه همگرایی کمتر از $\frac{1}{100}$ باشد کدام است؟

$$\frac{264}{4} \quad \frac{276}{3} \quad \frac{265}{2} \quad 177 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n-3} = \frac{1}{2} \rightarrow \left| \frac{n+2}{2n-3} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\rightarrow \frac{7}{2(2n-3)} < \frac{1}{100} \rightarrow \frac{7}{2n-3} < \frac{1}{50} \rightarrow 2n-3 > 350 \rightarrow n > 176.5 \rightarrow n = 177$$

درجه یک دنباله

در بعضی دنباله‌ها، برای یافتن هر جمله باید جملات ماقبل آن را بدانیم، اختلاف بزرگترین اندیس و کوچکترین اندیس را درجه آن دنباله نامند.

برای مثال درجه دنباله $a_{n+2} = \frac{1+n}{a_{n+1}}$ برابر ۱ است.

مثال ۱۶: دنباله‌ای با $t_1 = 2$ و $t_{n+1} = \frac{t_n+1}{t_n-1}$ تعریف می‌شود، این دنباله:

(۱) به سمت ۱ همگراست. (۲) به سمت صفر همگراست. (۳) واگراست. (۴) به $\sqrt{2}+1$ همگراست.

دنباله واگراست $\rightarrow t_1 = 2, t_2 = 3, t_3 = 2, t_4 = 3, \dots$

پاسخ: گزینه «۳»

$$L = \frac{L+1}{L-1} \rightarrow L^2 - 2L - 1 = 0 \rightarrow L = +1 \pm \sqrt{2} \rightarrow \text{غیر قابل قبول}$$

سری: مجموع جملات نامتناهی یک دنباله را سری می‌گوئیم و با نماد \sum نمایش می‌دهیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) = 1+3+5+\dots$$

همگرایی سری

برای همگرا بودن یک سری اولاً باید حد دنباله آن سری برابر صفر شود و سپس با توجه به نکاتی که گفته خواهد شد باید شرایط همگرایی آن سری را بررسی کنیم توجه شود که صفر شدن حد دنباله شرط لازم برای همگرایی سری می‌باشد و اگر حد دنباله یک سری صفر نشد، میتوان قطعاً اظهار نظر کرد که آن سری واگراست.

۱- P سری:

نکته ۸: سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ شرط لازم همگرایی را دارد و با توجه به مقدار P ، واگرایی و همگرایی آن مشخص خواهد شد:

همگراست $\rightarrow P > 1$
واگراست $\rightarrow P \leq 1$

* تذکر ۵: اگر $P = 1$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را سری همساز یا هارمونیک می‌نامند.

نکته ۹: اگر دو سری در جملاتشان تقریباً با یکدیگر برابر باشد، میتوان در مورد همگرایی و واگرایی آنها نیز نظر داد که مانند یکدیگر خواهند بود.

مثال ۱۷: واگرایی و همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

۱) سری واگراست $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{1+n} = -1 \neq 0$

۵) واگراست \rightarrow معادل سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$

۲) (سری همساز) واگراست \rightarrow نکته ۸ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

۶) همگراست \rightarrow نکته ۸ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 1}$

۳) همگراست \rightarrow نکته ۸ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

۷) این سری با $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ قابل مقایسه هست پس سری واگراست $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

۴) واگراست \rightarrow نکته ۸ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

این سری شرط لازم را دارد و همگرایی آن باید بررسی شود که همگرا خواهد بود. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

مثال ۱۸: اگر مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ برابر با عدد e باشد حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 5}{2a_n^2 + 3}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3e}$ (۳) $-\frac{5}{3}$ (۴) صفر

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه سری $\sum a_n$ همگرا می‌باشد لذا باید داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ پس:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 5}{2a_n^2 + 3} = \frac{0 - 5}{0 + 3} = -\frac{5}{3}$$

۲- سری هندسی: در یک تصاعد هندسی اگر جمله اول a و قدر نسبت تصاعد باشد در صورتی که $|q| < 1$ باشد، سری همگراست و حد مجموع

جملات با استفاده از فرمول $S = \frac{a}{1-q}$ محاسبه خواهد شد.

مثال ۱۹: عدد همگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{11}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{4}{9}$

$a = \frac{4}{9}, q = \frac{2}{3} \Rightarrow S = \frac{4}{1-2/3} = 12$

پاسخ: گزینه «۳»

مثال 20: حاصل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}$ کدام است؟

(1) $\frac{1}{5}$

(2) $\frac{1}{6}$

(3) $\frac{5}{6}$

(4) $\frac{6}{5}$

پاسخ: گزینه «3»

$$a = 1, q = -\frac{1}{5} \Rightarrow S = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{5})} = \frac{5}{6}$$

مثال 21: یکی از مقادیر x از معادله $1 + \cos x + \cos^2 x + \dots = 2$ کدام است؟

(1) $\frac{\pi}{6}$

(2) $\frac{5\pi}{6}$

(3) $\frac{\pi}{3}$

(4) $\frac{2\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «3»

$$a = 1, q = \cos x \Rightarrow S = \frac{1}{1 - \cos x} \rightarrow \frac{1}{1 - \cos x} = 2 \Rightarrow 2 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

مثال 22: مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k - 2^k}{10^k}$ کدام است؟

(1) $\frac{2}{3}$

(2) $\frac{3}{2}$

(3) $\frac{2}{4}$

(4) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه «3»

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{5}{10}\right)^k - \left(\frac{2}{10}\right)^k \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{5}\right)^k \right] = A - B$$

$$A = S_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1, \quad B = S_2 = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4}, \quad \Rightarrow S = A - B = \frac{3}{4}$$

سری تلسکوپی

3- سری هائی به فرم $\sum_{k=1}^n [(f_k) - (f_{k+1})]$ (سری تلسکوپی):

سریهائی که به شکل فوق باشند، معمولاً سریهائی همگرا هستند، البته باید توجه کرد که بعضی از سریها شکل ظاهری فوق را دارند ولی واگرا هستند. طریقه محاسبه آنها به شکل زیر است که جمله اول پرانتز اول و جمله آخر پرانتز دوم را فقط در نظر می گیریم.

$$\sum_{k=1}^n [(f_k) - (f_{k+1})] = f_1 - f_{n+1}$$

مثال 23: مجموع سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ کدام است؟

(1) $\frac{4}{15}$

(2) $\frac{1}{15}$

(3) $\frac{1}{4}$

(4) $\frac{1}{8}$

پاسخ: گزینه «2»

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4 \times 1 - 1} - \frac{1}{4 \times 3 + 3} \right] = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{15} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{15} = \frac{1}{15}$$

مثال 24: مجموع سری $\sum_{k=10}^{\infty} \frac{5}{k(k+1)}$ کدام است؟

(1) $\frac{9}{11}$

(2) $\frac{5}{22}$

(3) $\frac{9}{22}$

(4) $\frac{5}{10}$

پاسخ: گزینه «4» توجه شود در این مثال جمله اول به ازای $k=10$ بدست می آید:

$$5 \sum_{k=10}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \Rightarrow 5 \left(\frac{1}{10} - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k+1} \right) \right) = \frac{5}{10}$$

توضیح: توجه شود جمله دوم به دلیل اینکه $n \rightarrow \infty$ باید با استفاده از محاسبه حدی به دست آید.

مثال 25: همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{k+1}{k+2}$ کدام است؟

(1) 0

(2) واگراست

(3) 1

(4) 2

پاسخ: گزینه «2»

سری شرط لازم همگرایی را دارد: $\lim_{k \rightarrow \infty} \log \frac{k+1}{k+2} = \log(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k+2}) = \log 1 = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{k+1}{k+2} = \sum_{k=1}^{\infty} [\log(k+1) - \lim_{k \rightarrow \infty} \log(k+2)] = \log 2 - \log \infty = -\infty$$

سری واگراست چون مجموع برابر $-\infty$ شده است.

مثال 26: حاصل سری $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{27})$ کدام است؟

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 4

پاسخ: گزینه «2» سری تلسکوپی است لذا داریم:

$$S = \sqrt[3]{27} - \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{27})^{n+1} = 3 - 1 = 2$$

مثال 27: همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)}{(k^2+1)(k^2+2k+2)}$ را بررسی کنید.

(1) 1

(2) $\frac{1}{2}$

(3) 0

(4) واگراست

پاسخ: گزینه «2»

$$(2k+1) = (k+1)^2 - k^2 = (k+1)^2 + 1 - (k^2 + 1) \Rightarrow \frac{2k+1}{(k^2+1)(k^2+2k+2)} = \frac{(k+1)^2 + 1 - (k^2 + 1)}{(k^2+1)[(k+1)^2 + 1]} = \frac{1}{k^2+1} - \frac{1}{(k+1)^2+1}$$

$$S_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k - f_{k+1}) = \frac{1}{2} - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(k+1)^2+1} \right) = \frac{1}{2}$$

نکته 10:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n)} = \frac{1}{nn!}$$

مثال 28: حاصل سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ کدام است؟

(1) 1

(2) $\frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{4}$

(4) $\frac{1}{8}$

پاسخ: گزینه «2» با توجه به نکته فوق در این تست $n=2$ می باشد لذا داریم:

$$S = \frac{1}{2 \times 2!} = \frac{1}{4}$$

مثال 29: حاصل $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ کدام است؟

(1) $\frac{1}{30}$

(2) $\frac{1}{4}$

(3) $\frac{1}{20}$

(4) $\frac{1}{60}$

پاسخ: گزینه «4» به فرمول زیر که حالت کلی تر نکته 10 می باشد، توجه کنید:

$$S = \sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n)} = \frac{(p-1)!}{n(n+p-1)!}$$

$$S = \frac{(5-1)!}{2(2+5-1)!} = \frac{4!}{2 \times 6!} = \frac{4!}{2 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{1}{60}$$

در این تست $n=2$ و $P=5$ می باشد، لذا داریم:

سری تلسکوپی به صورت مجموع دو جمله‌ای

در بعضی مواقع سری تلسکوپی به صورت مجموع دو جمله است که در این صورت ضریب $(-1)^k$ باید وجود داشته باشد و قاعده به صورت زیر بیان گردد:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n (-1)^k (f_k + f_{k+1}) = (-1)^1 f_1 + (-1)^n f_{n+1} \\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (f_k + f_{k+1}) = (-1)^1 f_1 + \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k f_{k+1} \end{cases}$$

کدام مثال ۳۰: فرض کنید $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ باشد. در این صورت S کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۲ (۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴»
 $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = (-1)^{1+1} \times \frac{1}{1} - \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} = 1$

* تذکر ۶: اگر اختلاف اندیس‌ها بیشتر از یک باشد، باید از یک تا شماره اختلاف اندیس‌ها جملات f_k را با هم جمع کنیم و عدد اختلاف

اندیس در جمله آخر ضرب شود. برای مثال داریم:

کدام مثال ۳۱: حاصل $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 2k}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه «۲»
 $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right]$
 اختلاف اندیس‌ها ۲ است

اختلاف اندیس‌ها برابر ۲ است. لذا دو جمله اول پراتر اول را باید بنویسیم.

۴- با استفاده از رابطه: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ میتوان بعضی همگرانیها را حساب کرد.

کدام مثال ۳۲: سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ به چه عددی همگرا است؟

پاسخ: این سری بسط e^x است که به جای x عدد ۳ جایگزین شده است پس مجموع فوق برابر e^3 خواهد شد.

نکته ۱۱: اگر $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دو سری همگرا و c عدد ثابتی باشد آنگاه سریهای $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ ، $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ ، $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ نیز همگرا هستند.

نکته ۱۲: مجموع یک سری واگرا با یک سری همگرا قطعاً واگراست.

نکته ۱۳: حاصلضرب یک سری واگرا و یک سری همگرا ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

نکته ۱۴: اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ نیز واگراست. ($k \neq 0$)

نکته ۱۵: در مورد جمع و تفریق دو سری واگرا نمی‌توان هیچ اظهارنظری کرد یعنی ممکن است واگرا یا همگرا باشند.

بررسی همگرانی سریها با استفاده از آزمون

(۱) آزمون مقایسه: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دو سری با جملات مثبت باشند و $a_n \leq b_n$ باشد آنگاه:

(الف) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ یعنی سری بزرگتر همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (یعنی سری کوچکتر) نیز همگرا خواهد بود.

(ب) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (یعنی سری کوچکتر) واگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (یعنی سری بزرگتر) نیز واگرا خواهد بود.

کدام مثال ۳۳: همگرانی یا واگرانی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 5}$ را بررسی کنید؟

پاسخ: چون سری $\frac{1}{3^n}$ یک سری هندسی و همگرا می‌باشد و با توجه به اینکه $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^n + 5}$ سری $\frac{1}{3^n + 5}$ نیز همگرا می‌باشد.

کدام مثال ۳۴: همگرانی یا واگرانی سریهای $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ و $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{Lnn}$ را بررسی کنید.

پاسخ: با توجه به اینکه به ازای هر $n \geq 2$ داریم: $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^n}$ و سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ یک سری هندسی همگرا است لذا با توجه به آزمون فوق

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ نیز همگراست.

حال سری دوم را بررسی می‌کنیم. با توجه به اینکه $n \geq 2$ می‌باشد، لذا $n > Lnn$ می‌باشد و می‌دانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ که یک سری

هارمونیک است واگراست، لذا سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{Lnn}$ نیز واگراست.

(۲) آزمون خارج قسمت (مقایسه حدی):

(الف) هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0$ باشد آنگاه سریهای $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ از نظر وضعیت همگرانی مانند هم هستند، یعنی یا هر دو همگرا و یا هر دو واگرا هستند.

(ب) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا خواهد بود.

(ج) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگرا خواهد بود.

کدام مثال ۳۵: همگرانی یا واگرانی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n}$ را بررسی کنید.

پاسخ: اگر فرض کنیم: $a_n = \frac{1}{3^n - n}$ ، $b_n = \frac{1}{3^n}$ باشد با توجه به اینکه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 > 0$ و در نظر گرفتن توضیحات بند «الف»

آزمون فوق می‌توان نتیجه گرفت a_n و b_n همرفتار هستند و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ یک سری همگراست لذا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n}$ نیز همگرا خواهد بود.

(۳) آزمون دالامبر: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ داریم:

(الف) اگر $L < 1$ باشد سری همگراست.

(ب) اگر $L > 1$ باشد، سری واگراست.

(ج) اگر $L = 1$ باشد از این آزمون نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت.

مثال ۳۶: همگرانی یا واگرانی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n!}$ را بررسی کنید.

پاسخ: با توجه به بند «الف» آزمون فوق داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(-1)^n 3^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{سری همگرا می‌باشد}$$

مثال ۳۷: همگرانی یا واگرانی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ را بررسی کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)2^n}{2^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2(2n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{4n} = \frac{1}{2} < 1$$

سری همگراست: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{4n} = \frac{1}{2} < 1$

آزمون کوشی:

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری مثبت باشد و فرض کنیم $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ ، آنگاه:

الف - اگر $L < 1$ باشد، سری همگراست.

ب - اگر $L > 1$ باشد، سری واگراست.

ج - اگر $L = 1$ باشد از این آزمون نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت.

توضیح: بیشتر تستهایی که مطرح می‌شود در غالب دو آزمون فوق (دالامبر و کوشی) می‌باشد و معمولاً زمانی از دو آزمون فوق استفاده می‌کنیم که جملاتی نظیر n^n , a^n , $n!$, در عبارت وجود داشته باشند و توجه داشته باشیم برای مسائلی که در آنها چندجمله‌ای و یا تابع L_n وجود دارد استفاده از دو آزمون فوق نتیجه‌ای را برای ما مشخص نخواهد ساخت.

مثال ۳۸: همگرانی یا واگرانی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ را بررسی کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n+1}\right) \times n} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

سری همگراست: $e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$

مثال ۳۹: همگرانی یا واگرانی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{2n}}{3^{2n}}$ را بررسی کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n e^{2n}}{3^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(e^2)^n}{(9)^n}} = \frac{e^2}{9} > 1$$

سری واگراست: $\frac{e^2}{9} > 1$

۵۵ آزمون انتگرال: فرض کنیم تابع $f(x)$ به ازای $x \geq 1$ پیوسته مثبت و آکیدا نزولی باشد. در اینصورت برای تعیین واگرانی و یا همگرانی

سری $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ باید واگرانی و یا همگرانی انتگرال $\int_1^{\infty} f(x) dx$ را تعیین نمود.

مثال ۴۰: همگرانی و یا واگرانی سری $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$ را بررسی کنید.

$$\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a (-2x e^{-x^2}) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{2} e^{-x^2} \right]_1^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-1}{2} e^{-a^2} + \frac{1}{2e} = \frac{1}{2e}$$

سری همگراست: $\frac{1}{2e}$

مثال ۴۱: همگرانی و یا واگرانی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Arctg} n}{1+n^2}$ را بررسی کنید.

سری همگراست:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctg} x}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\int_1^a \frac{\text{Arctg} x}{1+x^2} dx \right) \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} (\text{Arctg} a)^2 - \frac{\pi^2}{22} \right] = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{22} = \frac{3\pi^2}{22} < 1$$

نکته ۱۶: اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری مثبت باشد و $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ موجود باشد، آنگاه خواهیم داشت:

الف) اگر $P > 1$ سری همگراست.

ب) اگر $0 < p \leq 1$ سری واگراست.

محاسبه فاصله همگرانی و شعاع همگرانی

برای تعیین شعاع همگرانی از یکی از دو فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{R} \quad , \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{1}{R}$$

فاصله همگرانی: برای بدست آوردن فاصله همگرانی باید قدرمطلق عبارت شامل X را بدون در نظر گرفتن توان، کوچکتر یا مساوی شعاع همگرانی قرار دهیم و تغییرات X را بدست آوریم:

مثال ۴۲: شعاع و فاصله همگرانی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{n^2}$ کدام است؟

۱) $1 \leq x \leq 2$, $R = 1$ (۱) ۲) $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$, $R = 2$ (۲) ۳) $2 \leq x \leq 4$, $R = 1$ (۳) ۴) $1 \leq x \leq 5$, $R = 2$ (۴)

پاسخ: گزینه «۱»

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} \Rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow |2x-3| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 2x-3 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$$

توجه شود که در نقاط مرزی $x=1$, $x=2$ سری به فرم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ می‌باشد و هر دو سری فوق همگرا هستند. (در بعضی مواقع

نقاط مرزی باعث واگرانی سری می‌شوند لذا باید نقاط روی مرز را با احتیاط بعنوان بازه همگرانی لحاظ کرد)

نکته ۱۷: اگر شعاع همگرانی یک سری برابر ∞ شود آنگاه به ازای تمامی مقادیر X آن سری همگرا خواهد بود.

مثال ۴۳: به ازای چه مقادیری از X سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ همگراست؟

۱) $-\infty < x < \infty$ (۱) ۲) $x > 0$ (۲) ۳) $x > 1$ (۳) ۴) $1 < x < 2$ (۴)

پاسخ: گزینه «۱»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)!}{(2n+1)!} \times \frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1} (2n-1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+1)(2n)} = 0$$

$$\frac{1}{R} = 0 \Rightarrow R \rightarrow \infty \Rightarrow -\infty < x < \infty$$

مثال ۴۴: فاصله همگرانی متغیر x و همچنین شعاع همگرانی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n (2n-1)}$ کدام است؟

۱) $0 < x \leq 2$, $R = 1$ (۱) ۲) $-1 < x < 2$, $R = 2$ (۲) ۳) $-1 \leq x \leq 2$, $R = 2$ (۳) ۴) $0 < x < 2$, $R = 1$ (۴)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n (2n-1)}{2^{n+1} (2n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+4} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2$$

پاسخ: گزینه «۲»

$$|x-1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x-1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -1 < x < 2$$

توضیح: به ازای $x=2$ و $x=-1$ سری به فرم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^n (2n-1)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2)^n}{2^n (2n-1)}$ تبدیل خواهد شد و هر دو سری فوق واگرا هستند لذا

نقاط روی مرز نمی‌تواند بعنوان نقاط همگرانی محسوب شود.

مثال ۴۵: سری $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-a)^n$ به ازای چه مقادیری از x همگراست؟

(۱) $-a < x < a$ (۲) $x < a$ (۳) $x = a$ (۴) $x > a$

پاسخ: گزینه «۳»
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n}{n!} = \infty$

$\frac{1}{R} = \infty \Rightarrow R = 0 \Rightarrow |x-a| \leq 0 \Rightarrow x = a$
 توجه شود که تنها در حالت تساوی سری همگراست به ازای مقادیر $x < a$ نامساوی برقرار نیست. (عبارت قدرمطلق منفی نمی‌تواند باشد)

سری متناوب و همگرایی شروط و مطلق

تعریف سری متناوب: سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ را که در آن $a_n > 0$ می‌باشد، را سری متناوب می‌نامیم.

آزمون لایب نیتز: یک سری متناوب وقتی همگرا است که دو شرط زیر برقرار باشد:
 الف) $|a_{n+1}| < |a_n|$ ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

مثال ۴۶: همگرایی و یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n^n}$ را بررسی کنید؟

پاسخ: سری همگراست $\rightarrow a_n$ نزولی است $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 $a_n = \frac{3^n}{n^n}$

تعریف همگرایی مطلق: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را در صورتی که $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد، همگرایی مطلق می‌نامیم.

مثال ۴۷: شرایط همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ را بررسی کنید.

پاسخ: سری قدر مطلق را بررسی می‌کنیم $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ و با توجه این که سری‌هایی به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ در صورتی که

$p > 1$ باشد همگرا هستند پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگرا می‌باشد لذا خود سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ همگرا می‌باشد. و در نتیجه سری همگرایی مطلق دارد.

تعریف همگرایی مشروط: اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا، اما سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ واگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرایی مشروط می‌نامیم.

مثال ۴۸: شرایط همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ را بررسی کنید.

پاسخ: سری متناوب است و باید شرایط همگرایی آن را با توجه به آزمون لایب نیتز بررسی کنیم:

$$\begin{cases} \frac{\ln(n+1)}{n+1} < \frac{\ln n}{n} \Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n| \quad (n > 1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{cases}$$

هر دو شرط آزمون لایب نیتز برقرار است پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ همگرا می‌باشد. حال شرایط همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \ln n}{n} \right|$ را بررسی کنیم.

چون تابع $\frac{\ln x}{x}$ به ازای $x \geq e$ پیوسته، مثبت و اکیداً نزولی است پس می‌توانیم از آزمون انتگرال شرایط همگرایی را بررسی کنیم.

سری قدرمطلق واگراست پس سری همگرایی مشروط دارد.
 $\int_e^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \left[\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{2} \right]_e^M = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 M}{2} - \frac{1}{2} = \infty \Rightarrow$

بسط تیلور و مک‌لورن

بسطهای تیلور و مک‌لورن: اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد و در این فاصله مشتقات پیوسته تا مرتبه n داشته باشد و مشتق متناهی مرتبه $(n+1)$ در فاصله (a, b) وجود داشته باشد آنگاه به ازای هر x متعلق به بازه $[a, b]$ دستور زیر برقرار است:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n$$

که R_n باقیمانده نامیده می‌شود و اگر به ازای هر x متعلق به بازه $[a, b]$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ باشد آنگاه خواهیم داشت:

بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه $x = a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \dots$$

اگر در دستور فوق $a = 0$ قرار دهیم، آنرا دستور مک‌لورن می‌نامند.

بسط مک‌لورن تابع $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0) \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \dots$$

بسط مک‌لورن توابع معروف به شرح زیر است:

۱) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty)$

۲) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty)$

۳) $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (|x| < \frac{\pi}{2})$

۴) $\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1)$

۵) $\operatorname{ArcSin} x = x + \frac{x^3}{2 \times 3} + \frac{3x^5}{2 \times 4 \times 5} + \frac{1 \times 3 \times 5 \times x^7}{2 \times 4 \times 6 \times 7} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1)$

۶) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \leq 1)$

۷) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$

۸) $(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots \quad -1 < x < 1$

۹) $\sin hx = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$

۱۰) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$

مثال ۴۹: اگر چند جمله‌ای $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ را با استفاده از دستور تیلور برحسب توانهای نزولی $(x-1)$ بنویسیم ضریب $(x-1)^4$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

پاسخ: گزینه «۴» جمله پنجم بسط تیلور حول نقطه $x=1$ را می‌نویسیم:

$f'(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2 \Rightarrow f^{(3)}(x) = 60x^2 - 48x + 6$

$\Rightarrow f^{(4)}(x) = 120x - 48 \rightarrow f^{(4)}(1) = 72 \rightarrow (x-1)^4$ ضریب $= \frac{f^{(4)}(1)}{4!} = \frac{72}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 3$

مثال ۵۰: ضریب چهارمین جمله بسط تابع $f(x) = \ln(1+2x)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Rightarrow \ln(1+2x) = (2x) - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} \Rightarrow \text{ضریب جمله چهارم} = -\frac{2^4}{4} = -4$$

مثال ۵۱: سه جمله اول بسط تیلور تابع $f(x) = \sqrt{x}$ بر حسب توانهای $(x-4)$ کدام است؟

- (۱) $2 + \frac{x-4}{16} - \frac{(x-4)^2}{32}$ (۲) $2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{16}$ (۳) $2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64}$ (۴) $2 + \frac{x-4}{3} - \frac{(x-4)^2}{16}$

پاسخ: گزینه «۲» در واقع بسط تیلور تابع در نقطه $x=4$ مورد سوال است:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \Rightarrow f(4) = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}, f''(4) = -\frac{1}{32}$$

$$f(x) = f(4) + f'(4)\frac{(x-4)}{1!} + f''(4)\frac{(x-4)^2}{2!} + \dots \Rightarrow f(x) = 2 + \frac{(x-4)}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \dots$$

مثال ۵۲: در بسط تابع $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ برای $|x| < 1$ بر حسب قوای x ضریب x^2 کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به بسط مکلاورن تابع $\ln(1+x)$ داریم:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots \Rightarrow \text{ضریب } x^2 = \frac{1}{3}$$

مثال ۵۳: بسط مکلاورن تابع $f(x) = xe^x$ کدام است؟

- (۱) $x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \dots$ (۲) $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n!}$
 (۳) $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ (۴) $x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \dots$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به بسط مکلاورن تابع $y = e^x$ داریم:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \Rightarrow x \cdot e^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n!} + \dots$$

مثال ۵۴: ضریب x^2 در بسط مکلاورن $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) 1 (۴) $-\frac{1}{6}$

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x (1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \dots) dt = (t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{10} - \dots) \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \dots$$

پاسخ: گزینه «۲»

بنابراین ضریب x^2 برابر $-\frac{1}{3}$ می باشد.

مثال ۵۵: اگر $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \dots$ آنگاه $f'(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

- (۱) π (۲) $\pi+1$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) 1

پاسخ: گزینه «۴» بسط داده شده مربوط به تابع $f(x) = x \sin x$ می باشد، بنابراین:

$$f'(x) = \sin x + x \cos x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{2}) = 1$$

تست های طبقه بندی شده فصل ششم

۱- اگر $\epsilon(x)$ با رابطه $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$ تعریف شده باشد، کدامیک از روابط زیر برقرار است؟ (عمران - سراسری ۷۸)

- (۱) $\sqrt{1+x} \cos x = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{24}x^2 + x^2 \epsilon(x)$ (۲) $\sqrt{1+x} \cos x = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{24}x^2 + x^2 \epsilon(x)$
 (۳) $\sqrt{1+x} \cos x = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{8}x^2 + x^2 \epsilon(x)$ (۴) $\sqrt{1+x} \cos x = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + x^2 \epsilon(x)$

(مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{9}{4}$

(مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) 3

۴- سری تیلور تابع $\ln(1+x^2)$ کدامیک از عبارات زیر است؟

(مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۷۸)

- (۱) $x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \dots$ (۲) $x^2 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} - \frac{x^8}{4!} + \dots$
 (۳) $x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots$ (۴) $x - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots$

(مهندسی هسته ای - سراسری ۷۸)

- (۱) 1 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

(مهندسی هسته ای - سراسری ۷۸)

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-3, 3)$ (۳) $(-3, \infty)$ (۴) $(-\infty, \infty)$

(آمار - سراسری ۷۸)

- (۱) واگراست (۲) همگرا و حد آن $\frac{1}{\ln 2}$ است. (۳) همگرا و حد آن $\frac{1}{5}$ است. (۴) همگرا و حد آن 0 است.

(آمار - سراسری ۷۸)

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-4, 4)$ (۳) $(-2, 2)$ (۴) $(-16, 16)$

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۷۸)

- (۱) صعودی و کراندار (۲) نزولی و کراندار (۳) همگرا (۴) فقط کراندار

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۷۸)

- (۱) $P < -\frac{2}{4}$ (۲) $P < -\frac{2}{3}$ (۳) $P < -\frac{2}{4}$ (۴) $-\frac{2}{4} < P < -\frac{2}{3}$

۱۱- شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n z^n$ چقدر است؟

(عمران - سراسری ۷۹)

- (۱) ۱ (۲) e (۳) $\frac{1}{e}$ (۴) \sqrt{e}

۱۲- مجموع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{2}{8}$ (۳) $\frac{25}{48}$ (۴) $\frac{27}{48}$

۱۳- سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{1+n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{1+n^3}$ به ترتیب چگونه‌اند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

- (۱) همگرا - واگرا (۲) همگرا - همگرا (۳) واگرا - همگرا (۴) واگرا - واگرا

۱۴- در سری مک لورن تابع $f(x) = x \cdot \ln(1+x^2)$ ضریب x^7 کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۵- فاصله همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

- (۱) (۰, ۱) (۲) (-۱, ۱) (۳) (۰, e) (۴) (-e, e)

۱۶- به ازای کدام مقادیر x سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$ همگرا است؟

(آمار - سراسری ۷۹)

- (۱) $0 \leq x < 2$ (۲) $0 < x \leq 2$ (۳) $1 < x < 2$ (۴) $1 \leq x < 2$

۱۷- سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k+1) - \log k}{\tan^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

(آمار - سراسری ۷۹)

- (۱) همگرا به ۱ است. (۲) واگرا است. (۳) همگرا به ۲ است. (۴) همگرا به $\log 2$ است.

۱۸- اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرایی مطلق باشد در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) a_n$...

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۰)

- (۱) همگرایی مطلق است. (۲) همگرا است ولی ممکن است همگرایی مطلق نباشد. (۳) ممکن است همگرا نباشد. (۴) همگرایی مطلق نیست.

۱۹- شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{(n^2+1)3^n}$ برابر است با ...

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۳

۲۰- حد دنباله $\{\sqrt{2}, \sqrt{2}\sqrt{2}, \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}, \dots\}$ برابر است با ...

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۰)

- (۱) ۰ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) ۱

۲۱- ضریب x^2 در بسط تیلور $x e^{-x}$ حول نقطه صفر کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{24}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۲۲- مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{(n+1)}}{3^n}$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

- (۱) ۳ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{11}{2}$

۲۳- جواب سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{0}{987}$ (۲) $\frac{0}{999}$ (۳) $\frac{1}{1001}$ (۴) $\frac{1}{1111}$

۲۴- نمایش سری توانی $\frac{1}{(1-x)^2}$ وقتی که $|x| < 1$ است کدام گزینه می‌باشد؟

(آمار - سراسری ۸۰)

- (۱) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ (۲) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$

۲۵- به ازای چه مقادیر p سری $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^p+1} - \sqrt{n^p})$ همگراست؟

(آمار - سراسری ۸۰)

- (۱) $p < 1$ (۲) $p > 1$ (۳) $p > 2$ (۴) $p < 2$

۲۶- اگر $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2n}{n^2+k}$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ کدام است؟

(ریاضی - سراسری ۸۰)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $+\infty$

۲۷- مقدار سری $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots$ کدام است؟

(ریاضی - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{2}{4}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۲۸- اگر $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2}$ مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۰)

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{e}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (۴) صفر

۲۹- اگر $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$ و $b_n = \text{Arcsin} \frac{1}{n}$ آنگاه:

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۰)

- (۱) هر دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ واگرا هستند. (۲) $\sum a_n$ همگرا و $\sum b_n$ واگرا است. (۳) هر دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا هستند. (۴) $\sum a_n$ واگرا و $\sum b_n$ همگرا است.

۳۰- بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} (x-1)^n$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۰)

- (۱) (-۱, ۳) (۲) (-۱, ۱) (۳) (-۳, ۱) (۴) (-۲, ۲)

۳۱- بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n(\ln n)^2}$ برابر است با:

(مهندسی معدن، اکتشاف معدن و استخراج معدن - سراسری ۸۰)

- (۱) [-۱, ۳] (۲) [۱, ۳] (۳) (-۱, ۱) (۴) [-۱, ۱]

۳۲- مجموع سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ با کدام گزینه برابر است؟

(عمران - سراسری ۸۱)

- (۱) $e-2$ (۲) $2e-2$ (۳) $e+1$ (۴) $2e+1$

۳۳- مقدار x را طوری پیدا کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n 3^n}$ همگرا باشد.

(عمران - آزاد ۸۱)

- (۱) $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ (۲) $1 \leq x \leq 2$ (۳) $-\frac{3}{2} < x \leq \frac{3}{2}$ (۴) $1 < x \leq 2$

۳۴- اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، آنگاه واگراست.

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۱)

- (۱) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$

۳۵- ضرب جمله‌های x^2 در بسط مک‌لورن تابع $y = \cos^2 2x$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری (۸۱))

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

۳۶- اگر $u_n = (\frac{1}{n})^n$ و $v_n = \frac{1}{n}$ آنگاه از نظر همگرایی $s = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$ و $t = \sum_{i=1}^{\infty} v_i$ چگونه‌اند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری (۸۱))

- (۱) هر دو واگرا (۲) هر دو همگرا (۳) S همگرا و t واگرا (۴) S واگرا و t همگرا

۳۷- در مورد دنباله $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی با ضابطه $x_n = \frac{1}{n}(x_{n-2} + x_{n-1})$ ، $n > 2$ ، $x_1 = 1$ ، $x_2 = 2$ ، کدام گزاره درست است؟

(آمار - سراسری (۸۱))

- (۱) به $\frac{2}{3}$ همگرا است. (۲) به $\frac{5}{3}$ همگرا است. (۳) به صفر همگرا است. (۴) واگرا است.

۳۸- مقدار $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n e^{-2}}{(n-2)!}$ کدام است؟

(آمار - سراسری (۸۱))

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۹- فاصله همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$ کدام است؟

(آمار - سراسری (۸۱))

- (۱) (۱, ۳) (۲) [۱, ۳] (۳) [۱, ۴] (۴) [۱, ۴]

۴۰- اگر $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ کدام است؟

(ریاضی - سراسری (۸۱))

- (۱) ۰ (۲) $\ln 2$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) موجود نیست.

۴۱- سری $\sum_{k=1}^{\infty} [\frac{1}{(k+2)(k+3)} + (\frac{2}{3})^{k-1}]$ واگراست؟

(ریاضی - سراسری (۸۱))

- (۱) به $\frac{3}{10}$ همگراست. (۲) به 10 همگراست. (۳) به $\frac{10}{3}$ همگراست. (۴) واگراست.

۴۲- سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(1+\frac{1}{n})^{2n}}$ به ازای کدام مقادیر x همگراست؟

(ریاضی - سراسری (۸۱))

- (۱) $x > -e$ (۲) $x < \sqrt{e}$ (۳) $|x| < e$ (۴) $|x| < \sqrt{e}$

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری (۸۱))

- (۱) [۲, ۵] (۲) (۱, ۵] (۳) [۱, ۵] (۴) (۲, ۵]

۴۴- بسط تیلور e^x حول $x = a$ به کدام صورت است؟

(مهندسی معدن، اکتشاف معدن - سراسری (۸۱))

- (۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$ (۲) $e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$ (۳) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{na}(x-a)^n}{n!}$ (۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{na}(x-a)^n}{n!}$

۴۵- کدامیک از سریهای زیر همگراست؟

(مهندسی معدن، اکتشاف معدن - سراسری (۸۱))

- (۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{Lnn}{n}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1}$

۴۶- بازه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ کدام است؟

(مهندسی معدن، اکتشاف معدن - سراسری (۸۱))

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $[0, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 0)$ (۴) $(-\infty, 0]$

۴۷- کدامیک از سریهای زیر همگراست؟

(مهندسی معدن، استخراج معدن - سراسری (۸۱))

- (۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^2+1}{n^2}$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{Lnn}{n}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1}$

۴۸- ضرب x^6 در بسط مک‌لورن $\cos x$ برابر است با:

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد (۸۱))

- (۱) $\frac{1}{6!}$ (۲) $-\frac{1}{6!}$ (۳) ۰ (۴) $\frac{1}{6}$

۴۹- سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$:

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد (۸۱))

- (۱) همگرا است به ازاء $|x| < 1$ و واگراست به ازاء $|x| > 1$ (۲) همگرا است به ازاء تمام x ها (۳) همگرا است به ازاء تمام x ها (۴) واگرا است به ازاء تمام x ها

۵۰- کدامیک از عبارات زیر در مورد دنباله $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ ، $n = 1, 2, \dots$ درست است؟

(عمران - آزاد (۸۲))

- (۱) همگرا، صعودی و از بالا کراندار است. (۲) همگرا، نزولی و از پایین کراندار است. (۳) واگرا می‌باشد. (۴) وابسته به مقدار a_1 گزینه‌های ۲ و ۳ می‌تواند درست باشند.

۵۱- ضرب x^3 در بسط مک‌لورن تابع $\ln(1+\sin x)$ برابر است با:

(مکانیک - آزاد (۸۲))

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۰ (۴) ۱

۵۲- ضرب x^5 در بسط مک‌لورن $\ln(1+x)$ کدام است؟

(مکانیک - سراسری (۸۲))

- (۱) $-\frac{1}{5!}$ (۲) ۰ (۳) $\frac{1}{5!}$ (۴) $\frac{1}{5!}$

۵۳- دنباله‌های مثبت $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ را در نظر بگیرید. اگر $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ ، آنگاه:

(MBA - سراسری (۸۲))

- (۱) همگرایی $\sum u_n$ همگرایی $\sum v_n$ را نتیجه می‌دهد. (۲) همگرایی $\sum v_n$ همگرایی $\sum (u_n + v_n)$ را نتیجه می‌دهد. (۳) همگرایی $\sum \frac{u_n}{v_n}$ همگرایی $\sum v_n$ را نتیجه می‌دهد. (۴) همگرایی $\sum v_n$ همگرایی $\sum (u_n + v_n)$ را نتیجه می‌دهد.

۵۴- کدام سری واگراست؟

(علوم کامپیوتر - سراسری (۸۲))

- (۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Lnn}{2n^2-1}$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n})$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \{(\frac{1}{n})^n - 1\}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(Lnn)(LnLn)^2}$

۵۵- فاصله همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n x^n}{n 2^n}$ کدام است؟

(علوم کامپیوتر - سراسری (۸۲))

- (۱) $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ (۲) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ (۳) $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ (۴) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

۵۶- ضرب جمله x^4 در بسط مک‌لورن $f(x) = \cos x$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری (۸۲))

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) $\frac{1}{24}$ (۴) ۴

۵۷- کدام گزاره درست است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری (۸۲))

- (۱) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Lnn}{n} = 1$ (۲) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n} = 1$ (۳) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 0$ (۴) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

۵۸- بسط مک‌لورن تابع $\ln(1+x)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری (۸۲))

- (۱) $-x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$ ، $|x| < 1$ (۲) $x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \dots$ ، $|x| < 1$ (۳) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$ ، $|x| < 1$ (۴) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ ، $|x| < 1$

۵۹- فرض کنید: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ سری مک لورن f باشد. به ازای چه مقادیری از a_1 و a_2 نقطه $x=0$ برای f یک

نقطه ماکسیمم است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۲)
 (۱) $a_1 = -2, a_2 = 0$ (۲) $a_1 = 0, a_2 = 0$ (۳) $a_1 = -2, a_2 = 0$ (۴) $a_1 = -1, a_2 = 0$

۶۰- مقدار حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sqrt[n]{n} \cos n}{2n^5}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۲)

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۶۱- هرگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} K_n$ به عدد a همگرا باشد سری $\sum_{n=1}^{\infty} (K_n + b)$ به ازای $b \in \mathbb{R}$ و $b \neq 0$ در کدام مورد صدق می‌کند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۲)
 (۱) به عدد b همگراست. (۲) واگراست. (۳) ممکن است همگرا باشد. (۴) به عدد $a + b$ همگراست.

۶۲- کدامیک از احکام زیر همواره صحیح است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۲)

- (۱) هر دنباله صعودی واگراست. (۲) دنباله‌ای که نه صعودی باشد و نه نزولی، واگراست. (۳) هر دنباله صعودی از بالای کراندار، همگراست. (۴) دنباله‌ای که صعودی و از پایین کراندار باشد همگراست.

۶۳- سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ دارای کدامیک از مشخصات است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۲)

- (۱) همگراست. (۲) واگراست. (۳) دارای حد صفر است. (۴) در شرایطی همگراست.

۶۴- کدام سری همگراست؟ (آمار - سراسری ۸۲)

- (۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n^2}$

۶۵- اگر $A = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ و $B = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$ کدام مورد درست است؟ (آمار - سراسری ۸۲)

- (۱) $A = B = +\infty$ (۲) $A = +\infty, B < +\infty$ (۳) $A < +\infty, B < +\infty$ (۴) $A < +\infty, B = +\infty$

۶۶- فرض کنید، $x_1 = 1$ و $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$ برای $n \geq 2$ ، کدام گزاره درست است؟ (آمار - سراسری ۸۲)

- (۱) دنباله $\{x_n\}$ همگراست. (۲) دنباله $\{x_n\}$ کراندار است ولی همگرا نیست. (۳) دنباله $\{x_n\}$ یکنوا است ولی کراندار نیست. (۴) دنباله $\{x_n\}$ واگراست.

۶۷- فاصله همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n^2}$ کدام است؟ (آمار - سراسری ۸۲)

- (۱) $(4, 6]$ (۲) $[4, 6]$ (۳) $(-\infty, 4) \cup (6, \infty)$ (۴) $(-\infty, 4] \cup (6, \infty)$

۶۸- شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} Z^n$ کدام است؟ (آمار - سراسری ۸۲)

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۶۹- مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ ، $0 < x < 1$ برابر است با: (ریاضی - سراسری ۸۲)

- (۱) $\frac{1+x}{(1-x)^2}$ (۲) $\frac{x+x^2}{(1-x)^2}$ (۳) $\frac{x-x^2}{(1+x)^2}$ (۴) $\frac{1-x}{(1+x)^2}$

۷۰- اگر $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ مقدار S کدام است؟ (ریاضی - سراسری ۸۲)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۲

۷۱- کدام گزاره در مورد دنباله $x_n = \frac{1}{n}(1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n})$ صحیح است؟ (ریاضی - سراسری ۸۲)

- (۱) همگرا با حد صفر است. (۲) واگراست. (۳) همگرا با حد یک است. (۴) $\frac{x_n}{n}$ همگرا به یک است.

۷۲- ضریب جمله x^4 در بسط مک لورن تابع با ضابطه $y = x \sin 2x$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

- (۱) $-\frac{2}{4}$ (۲) $-\frac{4}{2}$ (۳) $\frac{2}{4}$ (۴) $\frac{4}{2}$

۷۳- کدام گزاره در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ صحیح است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

- (۱) همگراست. (۲) واگراست. (۳) همگرا و مجموع آن صفر است. (۴) همگرا و مجموع آن یک است.

۷۴- اگر $A = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n})$ و $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2}$ ، آنگاه کدام گزاره درست است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

- (۱) A و اگر اولی B همگراست. (۲) B همگرا ولی A واگراست. (۳) A و B هر دو همگرا هستند. (۴) A و B هر دو واگرا هستند.

۷۵- در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2 + 2n + 1} - \sqrt{n^2 + an}$ ($a > 0$) کدام گزینه درست است؟ (مهندسی معدن - سراسری ۸۲)

- (۱) به ازای تمام مقادیر a همگراست. (۲) به ازای تمام مقادیر a واگراست. (۳) به ازای $a = 2$ همگراست و به ازای $a \neq 2$ واگراست. (۴) به ازای $a = 2$ واگراست و به ازای $a \neq 2$ همگراست.

۷۶- کدام سری همگراست؟ (مهندسی معدن - سراسری ۸۲)

- (۱) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}}$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 4n - 7}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

۷۷- به ازای $n \geq 2$ عبارت $T_n = (1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16}) \dots (1 - \frac{1}{n^2})$ با کدام عدد برابر است؟ (مهندسی معدن - سراسری ۸۲)

- (۱) $\frac{n-1}{2n}$ (۲) $\frac{2n}{n-1}$ (۳) $\frac{2n}{n+1}$ (۴) $\frac{n+1}{2n}$

۷۸- ضریب x^4 در بسط مک لورن $\tan x$ کدام است؟ (برق - آزاد ۸۲)

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) ۰ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۷۹- مقدار سری $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۲)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲

۸۰- شعاع همگرایی سری توانی بصورت $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^n Z^n$ برابر چیست؟ (عمران - سراسری ۸۲)

- (۱) e^{-1} (۲) یک (۳) e (۴) صفر

۸۱- شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{2}{n})^n Z^n$ برابر است با: (عمران - آزاد ۸۲)

- (۱) e (۲) e^2 (۳) e^3 (۴) e^{-2}

۸۲- شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} Z^n$ برابر است با: (عمران - آزاد ۸۲)

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۴

۸۳- مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$ برابر است با:

(مکانیک - آزاد ۸۳)

- (۱) $(x+1)e^x$ (۲) $(x^2+1)e^x$ (۳) x^2e^x (۴) $(x^2+x)e^x$

۸۴- در بسط تابع $f(x) = \ln(1-x^2)$ به صورت یک سری بر حسب توانهای صعودی x جمله عمومی به کدام صورت است؟

(MBA - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{-x^{2n}}{n}$ (۲) $\frac{-x^{2n}}{n!}$ (۳) $(-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$ (۴) $(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$

۸۵- اگر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log x^n}{(\log x)^n} = 4$ باشد، x کدام است؟

(MBA - سراسری ۸۳)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۶ (۳) ۵۰ (۴) ۱۰۰

۸۶- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n p^2)$ کدام است؟

(MBA - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۸۷- بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(n+1)4^n} (x-1)^{2n}$ کدام است؟

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۳)

- (۱) $(0, \frac{5}{3})$ (۲) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ (۳) $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ (۴) $(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$

۸۸- بازه همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ برابر است با:

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۳)

- (۱) $\{0\}$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(-\infty, +\infty)$

۸۹- سری مکالورن تابع $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ به کدام صورت است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$ (۲) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^{2n-1}$ (۳) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{2n+1}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{2n}$

۹۰- شعاع همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ کدام است؟

(آمار - سراسری ۸۳)

- (۱) e^{-1} (۲) ۱ (۳) e (۴) $+\infty$

۹۱- اگر $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{(x-\frac{\pi}{6})^2}{2!} + \frac{(x-\frac{\pi}{6})^4}{4!} + \frac{(x-\frac{\pi}{6})^6}{6!} + \dots$ ، $f(x) = (x-\frac{\pi}{6})^2$ ، $f(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟

(آمار - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{\pi}{3}\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\pi}{6}\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\pi}{12}\sqrt{3}$ (۴) $\frac{\pi}{24}\sqrt{3}$

۹۲- فرض کنید f تابعی حقیقی باشد که سری تیلور آن همه جا به آن همگراست. اگر $f(0) = 2$ ، $f'(0) = 2$ و برای $n \geq 2$ داشته باشیم $f^{(n)}(0) = 3$ آنگاه $f(x)$ توسط کدام ضابطه داده می‌شود.

(آمار - سراسری ۸۳)

- (۱) $xe^x + 2x - 1$ (۲) $3e^x - x - 1$ (۳) $e^{3x} + 2x + 1$ (۴) $3e^x - x + 1$

۹۳- فاصله همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^n}{n}$ کدام است؟

(آمار - سراسری ۸۳)

- (۱) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (۲) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (۳) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (۴) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

۹۴- سری $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$ مفروض است رفتار این سری از نظر همگرایی یا واگرایی به کدام صورت است؟

(ریاضی - سراسری ۸۳)

- (۱) همگرا به یک عدد گویا (۲) همگرا به یک عدد گنگ (۳) واگرا (۴) واگرایی نوسانی

۹۵- حد دنباله $a_n = \frac{1}{n^2+n} + \frac{1}{n^2+n+1} + \dots + \frac{1}{n^2+2n}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ کدام است؟

(ریاضی - سراسری ۸۳)

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ∞

۹۶- دنباله $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n + 9^n}$ مفروض است، حد آن کدام است؟

(ریاضی - سراسری ۸۳)

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۹

۹۷- مجموع سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 n^n}$ برابر با کدام عدد است؟

(ریاضی - سراسری ۸۳)

- (۱) $-\frac{5}{8} - \ln \frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{5}{8} + \ln \frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{5}{4} - \ln \frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{5}{4} + \ln \frac{1}{2}$

۹۸- سری مکالورن تابع $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ به کدام صورت است؟

(ریاضی - سراسری ۸۳)

- (۱) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{n!(2n)} x^{2n+1}$ (۲) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{n!(2n+2)} x^{2n+1}$
 (۳) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{(2n+1)2^n n!} x^{2n+1}$ (۴) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}$

۹۹- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{(n^2+n)^{1/2}} + \frac{1}{(n^2+n+1)^{1/2}} + \dots + \frac{1}{(n^2+2n)^{1/2}} \right\}$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۳)

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۰۰- اگر A سری $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ و B سری $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ باشند کدام گزینه در مورد این دو سری صحیح است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۳)

- (۱) A همگرا و B واگرا است. (۲) A و B همگرا است. (۳) هر دو همگرا است. (۴) هر دو واگرا هستند.

۱۰۱- مجموع سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$ کدام است؟

(مهندسی معدن - سراسری ۸۳)

- (۱) xe^x (۲) $x(e^x + 1)$ (۳) $(x-1)e^x$ (۴) $x(e^x - 1)$

۱۰۲- ضریب x^2 در بسط مکالورن $\frac{x+1}{x^2+1}$ کدام است؟

(برق - آزاد ۸۳)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۱۰۳- ضریب x^2 در بسط مکالورن $(x^2+5)e^x$ کدام است؟

(برق - آزاد ۸۳)

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{11}{6}$ (۴) $-\frac{11}{6}$

۱۰۴- مجموع عبارت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(fn-2)(fn+1)}$ برابر است با:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۳)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۰۵- کدامیک از سری‌های زیر واگرا هستند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۳)

- (۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+2}$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

۱۰۶- بازه همگرایی عبارت $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{4^n}$ برابر است با:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۳)

- (۱) $|x| < 1$ (۲) $-2 < x < 2$ (۳) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ (۴) $x > 0$

۱۰۷- ضریب x در بسط مک‌لورن تابع $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ برابر با چیست؟

(عمران - سراسری ۸۴)

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{c}{2}$ (۴) $\frac{c}{2}$

۱۰۸- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$ برابر است با:

(عمران - سراسری ۸۴)

- (۱) xe^x (۲) $x^2 e^x$ (۳) $(x+1)e^x$ (۴) $(x^2+x)e^x$

۱۰۹- مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\Delta^n} - 2^{-n})$ کدام است؟

(عمران - آزاد ۸۴)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{2}{4}$ (۳) $\frac{2}{4}$ (۴) $-\frac{4}{2}$

۱۱۰- در سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ فاصله همگرایی کدام است؟

(عمران - آزاد ۸۴)

- (۱) $-1 \leq x \leq +1$ (۲) $-\infty < x < +\infty$ (۳) $-1 \leq x < 1$ (۴) $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$

۱۱۱- سری تیلور تابع $\ln(1+x^2)$ کدامیک از عبارات زیر است؟

(عمران - آزاد ۸۴)

- (۱) $x^2 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} - \frac{x^8}{4!} + \dots$ (۲) $x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \dots$
 (۳) $x^2 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} - \frac{x^8}{4!} + \dots$ (۴) $x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \dots$

۱۱۲- در بسط مک‌لورن تابع $f(x) = (2+x^2)^{\frac{5}{2}}$ ضریب x^4 کدام است؟

(مکانیک - سراسری ۸۴)

- (۱) $5\sqrt{2}$ (۲) $15\sqrt{2}$ (۳) $\frac{15\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{15\sqrt{2}}{8}$

۱۱۳- بازه همگرایی سری زیر کدام است؟

(مکانیک - سراسری ۸۴)

- (۱) $(-a, a)$ (۲) $[-a, a]$ (۳) $(-b, b)$ (۴) $[-b, b]$

۱۱۴- در سری $\sum_{n=1}^{\infty} n! (\frac{x}{n})^n$ فاصله همگرایی کدام است؟

(MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) ϕ (۲) R (۳) $(-e, e)$ (۴) $(-e, 0)$

۱۱۵- در بسط تابع $f(x) = e^{\sin x}$ به صورت توان‌های صعودی x ضریب x^4 کدام است؟

(MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) 0 (۴) $\frac{1}{8}$

۱۱۶- بازه همگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(Lnn)^2} (x-1)^n$ کدام است؟

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) $(0, 2)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $[0, 2)$ (۴) $[-1, 1]$

۱۱۷- حد دنباله $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, $n \geq 2$ ، $a_1 = \sqrt{2}$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) e (۲) 2 (۳) 2 (۴) ∞

۱۱۸- اگر $|a| < 1$ و $|b| < 1$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+\dots+a^n}{1+b+\dots+b^n}$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) 0 (۲) 1 (۳) ∞ (۴) $\frac{b-1}{a-1}$

۱۱۹- سری توانی $|x| < \infty$ ، $\dots - 7x^6 + 5x^5 - 3x^4 + 1$ به کدام تابع همگراست؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ (۲) $\frac{1-x}{1+x^2}$ (۳) $\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}$ (۴) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

۱۲۰- کدام سری واگراست؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 \circ 0)^n}{n!}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$

۱۲۱- مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

۱۲۲- مقدار $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j^2(j+1)^2}$ برابر است با:

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) 1 (۳) 2 (۴) ∞

۱۲۳- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n \times 3^n}$ کدام است؟

(آمار - سراسری ۸۴)

- (۱) 3 (۲) 2 (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۲۴- شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\Delta^n} (x+1)^{2n}$ کدام است؟

(ریاضی - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) 5

۱۲۵- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل ششم

۱- گزینه «۴» با توجه به گزینه‌ها می‌توان حدس زد که بسط مکلاورن تابع $f(x) = \sqrt{1+x} \cos x$ خواسته شده است.

$$f(x) = \sqrt{1+x} \cos x \Rightarrow f'(0) = 1, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \cos x - \sqrt{1+x} \sin x \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{4\sqrt{1+x}} \cos x - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \sin x - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \sin x - \sqrt{1+x} \cos x \Rightarrow f''(0) = -\frac{5}{4}$$

$$\sqrt{1+x} \cos x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + x^2 \varepsilon(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8} x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

بنابراین:

۲- گزینه «۲» سری داده شده مجموع دو سری هندسی می‌باشد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (r^{-n} + r^{-n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{r}} + \frac{1}{1-\frac{1}{r}} = \frac{2}{r-1}$$

۳- گزینه «۴»

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{2n+1}} x^{2n} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{r}\right)^n$$

حال، با فرض $y = \frac{x^2}{r}$ سری فوق به شکل زیر در می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{2n+1}} x^{2n} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} y^n$$

$$R_y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{r} = |y| < 1 \Rightarrow x^2 < r \Rightarrow -\sqrt{r} < x < \sqrt{r} \Rightarrow R_x = \sqrt{r}$$

۴- گزینه «۱»

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \Rightarrow \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \dots$$

۵- گزینه «۴» مثال حل شده در متن کتاب

۶- گزینه «۴»

$$R = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+1} = 0 \Rightarrow |x| < +\infty \Rightarrow -\infty < x < +\infty$$

۷- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\frac{n}{n(Lnn)^2} \sim \frac{n}{(n^2-5)(Lnn)^2} \sim \frac{n}{n^2(Lnn)^2} \sim \frac{1}{n(Lnn)^2}$ و چون سری $\sum \frac{1}{n(Lnn)^2}$ همگراست، پس سری موردنظر نیز همگراست. اما به نظر نمی‌رسد مقدار همگرایی این سری را بتوان محاسبه نمود، و در صورت امکان محاسبه نیز هیچکدام از مقادیر داده شده صحیح به نظر نمی‌رسند.

۸- گزینه «۴» بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ با هم برابر است زیرا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ از انتگرال‌گیری سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حاصل شده است. بنابراین کافی است بازه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را بدست آوریم. فرض کنید $y = x^2$ در اینصورت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$$

طبق فرض سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ وقتی $|x| < 4$ و یا $x^2 < 16$ باشد همگراست، بنابراین سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ وقتی $|y| < 16$ باشد همگرا خواهد بود.

۹- گزینه «۴»

$$S_1 = -1, S_2 = -\frac{1}{3}, S_3 = -\frac{14}{15}, \dots$$

با توجه به چند جمله اول دنباله ملاحظه می‌شود که دنباله صعودی یا نزولی نمی‌باشد. ضمناً به سادگی می‌توان نشان داد که بطور کلی $-1 \leq S_n \leq 0$. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۱۰- گزینه «۲» سری داده شده به فرم یک p -سری می‌باشد و برای همگرایی لازم است:

$$rp + r < -1 \Rightarrow rp < -4 \Rightarrow p < -\frac{4}{r}$$

۱۱- گزینه «۲»

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \Rightarrow R = e$$

۱۲- گزینه «۳»

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}\right) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{n+4}\right)\right]$$

اختلاف اندیس‌ها ۴ است، لذا چهار جمله اول پرانتز اول را می‌نویسیم.

$$\frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 4 \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+4}\right)\right] = \frac{1}{4} \times \frac{25}{12} = \frac{25}{48}$$

۱۳- گزینه «۱»

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{1+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{1+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

با مقایسه سربهای فوق با P سری واضح است که S_1 همگرا و S_2 واگراست.

۱۴- گزینه «۳»

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \dots \Rightarrow x \ln(1+x^2) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{3} - \frac{x^9}{4} + \dots$$

۱۵- گزینه «۴»

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{1}{e} \Rightarrow R = e$$

$$|x| < e \Rightarrow -e < x < e$$

۱۶- گزینه «۲»

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

سری مزبور به ازای $x=0$ به سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ تبدیل می‌شود، که واگراست و به ازای $x=2$ به سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ تبدیل می‌شود که همگراست.

۱۷- گزینه «۲»

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log(k+1) - \log k}{\text{Arctg}\left(\frac{1}{k}\right)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\text{Arctg}\left(\frac{1}{k}\right)} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{kLn10}}{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2Ln10}$$

بنابراین سری شرط لازم برای همگرایی را ندارد

۱۸- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) = 1$$

بنابراین طبق آزمون مقایسه حدی دو سری $\sum a_n$ و $\sum \left(\frac{n+1}{n} \right) a_n$ رفتار یکسانی دارند و چون طبق فرض سری $\sum a_n$ همگرای مطلق است، پس سری $\sum \left(\frac{n+1}{n} \right) a_n$ نیز همگرای مطلق است.

۱۹- گزینه «۱» قرار می‌دهیم $y = 2x + 1$ و شعاع همگرایی سری حاصل را R_y فرض می‌کنیم. در این سری $a_n = \frac{1}{(n^2 + 1)3^n}$ بنابراین:

$$R_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{((n+1)^2 + 1)3^{n+1}}{(n^2 + 1)3^n} \right| = 3$$

پس برای به دست آوردن شعاع همگرایی سری اصلی به جای y مقدار آن یعنی $2x + 1$ را قرار می‌دهیم:

$$|y| < 3 \Rightarrow |2x + 1| < 3 \Rightarrow |x + \frac{1}{2}| < \frac{3}{2} \Rightarrow R_x = \frac{3}{2}$$

۲۰- گزینه «۳» جملات دنباله داده شده را می‌توان به صورت بازگشتی $a_1 = \sqrt{2}$ و $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ تعریف کرد. اگر حد جمله عمومی دنباله را L فرض کنیم، در این صورت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2a_n} \Rightarrow L = \sqrt{2L} \Rightarrow L = 2$$

۲۱- گزینه «۲» بسط e^{-x} حول نقطه صفر به صورت روبرو است:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$xe^{-x} = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \dots \Rightarrow x^4 \text{ ضریب } = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

۲۲- گزینه «۳» $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{(n+1)}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n + 2 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right]$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + 2 \times \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} + \frac{4}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2}$$

با دقت ملاحظه می‌گردد که دو سری هندسی داریم:

۲۳- گزینه «۲» ملاحظه می‌گردد که یک سری تسکوپی داریم:

$$\sum_{k=1}^{999} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{999} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{999+1} = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000} = 0.999$$

۲۴- گزینه «۴» می‌دانیم سری توانی $\frac{1}{1-x}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

۲۵- گزینه «۳» $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^p+1} - \sqrt{n^p}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p+1} + \sqrt{n^p}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{p}{2}}}$

پس سری داده شده هم‌ارزی یک p سری است و برای همگرایی باید $\frac{p}{2} > 1$ یا $p > 2$ باشد.

۲۶- گزینه «۳» نخست توجه کنید که به ازای هر $1 \leq k \leq n$ داریم:

$$\frac{2n}{n^2 + n} \leq \frac{2n}{n^2 + k} < \frac{2n}{n^2}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{2n}{n^2 + n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{2n}{n^2 + k} < \sum_{k=1}^n \frac{2n}{n^2}$$

بنابراین:

از طرفی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2n}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + n} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2$$

بنابراین طبق قضیه ساندویچ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$

۲۷- گزینه «۲» سری داده شده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = \frac{1}{1!} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} = 1$$

۲۸- گزینه «۴» واضح است که:

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}, \quad 0 < \frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{n^2}, \quad \dots, \quad 0 < \frac{1}{(n+n)^2} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow 0 < a_n < n \times \frac{1}{n^2} \Rightarrow 0 < a_n < \frac{1}{n}$$

حد دنباله‌های $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ و $\{0\}$ هر دو برابر صفر است، پس $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

۲۹- گزینه «۲» واضح است که $\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ و چون سری $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ همگراست، بنابراین سری $\sum a_n$ نیز طبق آزمون مقایسه همگراست. چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Arcsin } \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ ، پس طبق آزمون مقایسه حدی واگرایی سری $\sum \frac{1}{n}$ واگرایی سری $\sum b_n$ را نتیجه می‌دهد.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{n+1}{3^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n 3^{n+1}}{(n+1) 3^n} = 3$$

$$|x-1| < 3 \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3$$

۳۱- گزینه «۲»

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(\ln n)^2}{(n+1)(\ln(n+1))^2} \right| = 1 \Rightarrow |x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 2 = 2e - 2$$

۳۲- گزینه «۲»

گزینه ۲۳

$$R = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{r^n}{n r^n}}{\frac{r^{n+1}}{(n+1)r^{n+1}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)r^{n+1} \times r^n}{n r^n \times r^{n+1}} = \frac{r}{r}$$

بنابراین سری در فاصله $\frac{-r}{r} < x < \frac{r}{r}$ همگراست. در نقطه $x = \frac{r}{r}$ سری به صورت $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ در می‌آید که همگراست ولی به ازای $x = \frac{-r}{r}$ سری به صورت $\sum \frac{1}{n}$ در می‌آید که مضرب همساز می‌باشد و واگراست.

گزینه ۲۴

ابتدا توجه کنید که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم: $na_n \geq a_n$ و چون سری $\sum a_n$ واگراست، پس طبق آزمون مقایسه سری $\sum na_n$ واگراست.

گزینه ۲۵

$$y = \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x$$

برای نوشتن بسط مکالورن $\cos 4x$ کافی است در بسط $\cos x$ به جای x ، $4x$ قرار دهیم. بنابراین:

$$y = \cos^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(4x)^2}{2!} + \frac{(4x)^4}{4!} - \dots \right)$$

گزینه ۲۶

سری $\sum a_n$ با توجه به $P=1$ می‌باشد و اگر است. برای سری دوم ابتدا شرط لازم را بررسی می‌کنیم:

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)^n \Rightarrow \ln y = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)^n \Rightarrow \ln y = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{n} \right)^n \Rightarrow \ln y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{n}}{n} \xrightarrow{HOP} \ln y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) \Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1$$

ملاحظه می‌گردد که حد دنباله صفر نیست و چون سری شرط لازم همگرایی را ندارد، لذا سری واگراست.

گزینه ۲۷

$$r^r = \frac{1}{r} (r+1) \Rightarrow r r^r - r - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -\frac{1}{r}$$

بنابراین دنباله x_n را می‌توان به صورت روبرو نوشت:

$$x_n = a_1 r_1^n + a_2 r_2^n = a_1 + a_2 \left(-\frac{1}{r} \right)^n$$

چون طبق فرض $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ ، پس:

$$\begin{cases} a_1 - \frac{1}{r} a_2 = 1 \\ a_1 + \frac{1}{r} a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{\Delta}{r}, a_2 = \frac{r}{r}$$

$$x_n = \frac{\Delta}{r} + \frac{r}{r} \left(-\frac{1}{r} \right)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta}{r} + \frac{r}{r} \left(-\frac{1}{r} \right)^n \right) = \frac{\Delta}{r}$$

بنابراین دنباله x_n را می‌توان به صورت روبرو نوشت:

گزینه ۲۸

$$\sum_{n=r}^{\infty} \frac{r^n e^{-r}}{(n-r)!} = r e^{-r} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{r^{n-r}}{(n-r)!} = r e^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} = r e^{-r} \times e^r = r$$

گزینه ۲۹

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow |x-2| < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

در $x=1$ سری به صورت $\sum n(-1)^n$ در می‌آید که واگراست و در $x=3$ به صورت $\sum n$ در می‌آید که واگراست.

$$\text{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

گزینه ۴۰: بسط مک لورن تابع $y = \text{Arctg} x$ به صورت روبرو است:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \text{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

اگر در بسط فوق به جای x مقدار یک را قرار دهیم به دست می‌آید:

گزینه ۴۱

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(k+r)(k+r)} + \left(\frac{r}{r} \right)^{k-1} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+r)(k+r)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r} \right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+r} - \frac{1}{k+r} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r} \right)^{k-1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{1-\frac{r}{r}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{1-r} = \frac{1}{r}$$

سری هندسی سری تلکوبی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x^{rn}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^r}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^r}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{x^r}{e} < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt{e}$$

گزینه ۴۲: از آزمون ریشه n ام استفاده می‌کنیم.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)r^n}{(n+r)r^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x+r)r^{n+1}}{(n+1)r^n} = r$$

گزینه ۴۳

همچنین به ازای $x=5$ سری واگرا و به ازای $x=2$ سری همگراست. پس بازه همگرایی می‌باشد.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(a) = e^a \Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!} (x-a)^n$$

گزینه ۴۴

$$a_n = \frac{Lnn}{n} \text{ چون } a_{n+1} < a_n \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{، بنابراین طبق آزمون لایب نیتس سری متناوب} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{Lnn}{n} \text{ همگرا می‌باشد.}$$

گزینه ۴۵

گزینه ۴۶: برای اینکه سری داده شده همگرا باشد، طبق آزمون نسبت لازم است:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}} = e^{-x}$$

پس برای همگرایی کافی است $e^{-x} < 1$ باشد، و بنابراین $x > 0$ می‌باشد.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{Lnn}{n} \text{ بنابراین طبق آزمون لایب نیتس سری متناوب} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ و } a_{n+1} < a_n \text{ چون } a_n = \frac{Lnn}{n} \text{ فرض کنید} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{Lnn}{n} \text{ همگرا می‌باشد.}$$

گزینه ۴۷

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

گزینه ۴۸: بسط مکالورن $\cos x$ به صورت روبرو است:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^r}{(n+1)^r} = 1 \Rightarrow |x| < R \Rightarrow |x| = 1$$

گزینه ۴۹

هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. اگر $a_1 < 2$ ، دنباله حاصل صعودی و از بالا کراندار است و اگر $a_1 > 2$ ، آنگاه دنباله حاصل نزولی و از پایین کراندار خواهد بود.

۵۱- گزینه «۱» می‌دانیم بسط $\ln(1+u)$ به شکل روبرو است:

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots$$

حال به جای u ، $\sin x$ قرار می‌دهیم:

$$\ln(1+\sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} - \dots$$

در بسط فوق، در جمله اول ضریب x^2 برابر $\frac{1}{6}$ ، در جمله دوم ضریب x^2 صفر، و در جمله سوم ضریب x^2 برابر $\frac{1}{3}$ می‌باشد، در تمام جملات

بعدی نیز ضریب x^2 برابر صفر است. بنابراین:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

۵۲- گزینه «۳»

۵۳- گزینه «۲» و «۴» صحیح است! از رابطه $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ به ازای $n=1, 2, \dots, k-1$ به دست می‌آید:

$$\frac{u_2}{u_1} \leq \frac{v_2}{v_1}, \frac{u_3}{u_2} \leq \frac{v_3}{v_2}, \dots, \frac{u_k}{u_{k-1}} \leq \frac{v_k}{v_{k-1}}$$

با ضرب کردن روابط فوق در یکدیگر، خواهیم داشت $\frac{u_k}{u_1} \leq \frac{v_k}{v_1}$ و یا $u_k \leq \frac{u_1}{v_1} v_k$. بنابراین طبق آزمون مقایسه همگرایی $\sum v_n$ همگرایی $\sum u_n$ را نتیجه می‌دهد و بنابراین همگرایی $\sum (u_n + v_n)$ نتیجه می‌شود.

۵۴- گزینه «۳» وقتی $n \rightarrow +\infty$ داریم:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \sim n \left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{n}$$

و چون سری $\sum \frac{1}{n}$ واگراست. پس سری $\sum \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right\}$ نیز واگرا می‌باشد.

۵۵- گزینه «۱»

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{r^n}{n r^n}}{\frac{r^{n+1}}{(n+1)r^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)r^{n+1} \times r^n}{n r^n \times r^{n+1}} = \frac{r}{r}$$

$$|x| < \frac{r}{r} \Rightarrow -\frac{r}{r} < x < \frac{r}{r}$$

در نقطه مرزی $x = \frac{r}{r}$ سری به صورت $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ در می‌آید که همگراست، و در نقطه مرزی $x = -\frac{r}{r}$ به صورت $\sum \frac{1}{n}$ در می‌آید که واگراست.

۵۶- گزینه «۳»

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \Rightarrow x^4 \text{ ضریب } = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

۵۷- گزینه «۴» علت اشتباه بودن سه گزینه دیگر را بررسی می‌کنیم:

۱) گزینه ۱: $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{HOP}} A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$

۲) گزینه ۲: $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{HOP}} A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{1} = e^{+\infty} = +\infty$

۳) گزینه ۳: $A = \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = r^0 = 1$

۵۸- گزینه «۴»

۵۹- گزینه «۳» بسط مکلاورن تابع $f(x)$ به صورت روبرو است:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots$$

چون $x=0$ قرار است یک نقطه ماکزیمم برای تابع باشد لذا باید $f'(0)=0$ و $f''(0) < 0$ باشد پس باید $a_1=0$ و $a_2 < 0$ باشد.

۶۰- گزینه «۱»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x} \cos n}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{x} = 0$$

توجه شود که در صورت کسر چون $n \rightarrow \infty$ لذا از جمله دوم در مقابل $\sqrt[n]{x}$ صرف‌نظر کردیم و در قسمت دوم چون توان n مخرج بیشتر از توان n صورت بود، حاصل حد برابر صفر شد.

۶۱- گزینه «۲»

روش اول: سری واگراست $\sum_{n=1}^{\infty} k_n + b = \sum_{n=1}^{\infty} k_n + \sum_{n=1}^{\infty} b = a + \sum_{n=1}^{\infty} b = a + \infty = \infty$

روش دوم: طبق فرض سری $\sum k_n$ همگراست، پس $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 0$. ولی سری $\sum (k_n + b)$ شرط لازم برای همگرایی را ندارد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k_n + b) = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b = 0 + b = b$$

و چون $b \neq 0$ پس سری $\sum (k_n + b)$ واگراست.

۶۲- گزینه «۳»

۶۳- گزینه «۲» سری داده شده شرط لازم برای همگرایی را ندارد، بنابراین واگراست.

۶۴- گزینه «۴» فرض کنید $a_n = \frac{n+1}{n^2}$ ، در این صورت واضح است که $a_{n+1} < a_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ، بنابراین طبق آزمون لایب‌نیتز سری داده

شده همگراست.

۶۵- گزینه «۲»

۶۶- گزینه «۱»

۶۷- گزینه «۲»

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

سری در هر دو سر بازه یعنی ۴ و ۶ نیز همگراست، پس بازه همگرایی [۴، ۶] می‌باشد.

۶۸- گزینه «۴»

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{r^n}{n^2}}{\frac{r^{n+1}}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n (n+1)^2}{r^{n+1} n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{r n^2} = \frac{1}{r}$$

۶۹- گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

حال با مشتق گیری از طرفین رابطه فوق به دست می آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

با مشتق گیری از رابطه اخیر به دست می آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

۷۰- گزینه «۲» می دانیم، اگر $a_n \rightarrow 0$ ، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n + a_{n+1}) = -a_1$ بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = -(-1) = 1$$

۷۱- گزینه «۲» قرار می دهیم $a_n = \sqrt[n]{n}$ بنابراین:

$$x_n = \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

بنابراین x_n میانگین حسابی a_n می باشد و چون $a_n \rightarrow 1$ پس $x_n \rightarrow 1$.

۷۲- گزینه «۲» در بسط مک لورن تابع $\sin x$ ، به جای x ، $2x$ قرار می دهیم. در این صورت داریم:

$$\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + \dots \Rightarrow x \sin 2x = 2x^2 - \frac{4x^4}{6} + \dots$$

۷۳- گزینه «۲» چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ ، بنابراین واگرایی سری $\sum \frac{1}{n}$ ، واگرایی سری داده شده را نتیجه می دهد. (آزمون مقایسه حدی در سریها).

۷۴- گزینه «۳» چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$ ، پس همگرایی سری $\sum \frac{1}{n^2}$ ، همگرایی سری $\sum (1 - \cos \frac{1}{n})$ را نتیجه می دهد. (طبق آزمون مقایسه حدی).

واضح است که $\frac{\sqrt{n-1}}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ، پس طبق آزمون مقایسه، همگرایی $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ، همگرایی سری B را نتیجه می دهد.

۷۵- گزینه «۳» $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+2n+1} - \sqrt{n^2+an}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-a)n+1}{\sqrt{n^2+2n+1} + \sqrt{n^2+an}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-a)n}{2n^2} = \frac{2-a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ سری همساز می باشد و واگراست پس فقط به ازای $a=2$ سری مورد نظر همگراست.

۷۶- گزینه «۲» واضح است که $\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} < \frac{1}{n^2}$ ، و چون سری $\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه سری $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ نیز همگراست.

۷۷- گزینه «۴»

$$T_n = (1 - \frac{1}{r})(1 - \frac{1}{r}) \dots (1 - \frac{1}{r})(1 + \frac{1}{r})(1 + \frac{1}{r}) \dots (1 + \frac{1}{r}) = (\frac{r-1}{r})^n \times (\frac{r+1}{r})^n = \frac{r-1}{r} \times \frac{r+1}{r} = \frac{r^2-1}{r^2}$$

۷۸- گزینه «۲» tgx تابعی فرد است، بنابراین ضریب x^r در بسط مک لورن آن برابر صفر خواهد بود.

۷۹- گزینه «۳»

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+(n+1)}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right) = -\frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^{\infty}}{\infty} = +1$$

۸۰- گزینه «۳»

$$\frac{1}{R} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} \Rightarrow R = e$$

۸۱- گزینه «۴» از آزمون ریشه n ام استفاده می کنیم: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(1 + \frac{r}{n})^n z^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} ((1 + \frac{r}{n})^n |z|)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (|z| e^r)^n$

هرگاه حاصل حد فوق کوچکتر از ۱ باشد سری همگراست، و برای اینکه حاصل حد کوچکتر از ۱ باشد باید $|z| e^r < 1$ و بنابراین $|z| < \frac{1}{e^r}$ پس شعاع همگرایی $\frac{1}{e^r}$ است.

۸۲- گزینه «۳»

روش اول:

$$R = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n!)^r}{(n+1)!} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n!)^r ((n+1)!)^r}{(n!)^r (n+1)!} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n!)^r (n+1)^r \times (n!)^r}{(n!)^r (n+1)(n+1)(n!)^r} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^r}{(n+1)(n+1)} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^r}{(n!)^r}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(\frac{r}{n})^{rn}}{(\frac{r}{n})^{rn}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\frac{r}{n})^r}{(\frac{r}{n})} = r \Rightarrow R = \frac{1}{r}$$

۸۳- گزینه «۴»

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n+1} + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+2} + x e^x = x^2 e^x + x e^x$$

۸۴- گزینه «۱» می دانیم جمله عمومی بسط مک لورن $\ln(1+u)$ به صورت زیر است:

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n}$$

با قرار دادن $-x^2$ به جای u خواهیم داشت: $\ln(1-x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x^2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^{2n}}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log x^n}{(\log x)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log x}{(\log x)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\log x)^{n-1}}$$

۸۵- گزینه «۴»

با فرض $t = \frac{1}{\log x}$ ، مجموع فوق به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$ در می آید. برای محاسبه این مجموع به ترتیب زیر عمل می کنیم، می دانیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \xrightarrow{\text{مشتق}} \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \Rightarrow \frac{1}{(1-t)^2} = 4 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

بنابراین $\frac{1}{\log x} = \frac{1}{2}$ و از آنجا $\log x = 2$ ، در نتیجه $x = 10^2$.

۸۶- گزینه «۱» هرگاه $n \rightarrow \infty$ داریم: $n^5 + 3^5 + 2^5 + \dots + 1^5 \sim \frac{n^6}{6}$ پس:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^6} \sum_{p=1}^n p^5 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^6} \cdot \frac{n^6}{6} \right) = \frac{1}{6}$$

۸۷- گزینه «۴» برای تعیین بازه همگرایی از آزمون ریشه استفاده می کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^{2n}}{(n+1)4^n} (x-1)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{4\sqrt[n]{n+1}} (x-1)^2 = \frac{9}{4} (x-1)^2$$

برای اینکه سری همگرا باشد، لازم است $\frac{9}{4} (x-1)^2 < 1$ باشد که از آن نتیجه می شود $\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$.

۸۸- گزینه «۴»

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+2} = 0$$

پس بازه همگرایی $(-\infty, +\infty)$ می باشد.

۸۹- گزینه «۳» بسط مکلاورن $\frac{1}{1+x}$ به صورت روبرو می باشد:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

با مشتق گیری از طرفین این رابطه به دست می آید:

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} \xrightarrow{\text{به جای } x, x^2 \text{ قرار می دهیم}} \frac{-1}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{2n-2}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین } \times x} \frac{x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{2n+1}$$

۹۰- گزینه «۳» با استفاده از آزمون ریشه داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e}{n}} = \frac{1}{e} \Rightarrow R = e$$

۹۱- گزینه «۳» با جایگزینی $x = \frac{\pi}{6}$ ، به جای x در بسط $\cos x$ ، خواهیم داشت:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4}{4!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^6}{6!} + \dots$$

با ضرب کردن طرفین رابطه فوق در $x - \frac{\pi}{6}$ به دست می آید:

$$\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^5}{5!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^7}{7!} + \dots$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$

پس:

۹۲- گزینه «۲»

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = 2 + 2x + 2\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) = 2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) = 2e^x - 1 - x$$

۹۳- گزینه «۳» از آزمون نسبت استفاده می کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\sin x)^{n+1}}{(\sin x)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n \sin x}{n+1} \right| = |\sin x|$$

برای اینکه سری همگرا باشد، لازم است $|\sin x| < 1$ و بنابراین $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ باشد و در نقطه مرزی $x = \frac{\pi}{2}$ سری به $\sum \frac{1}{n}$ تبدیل می شود که

واگراست و در نقطه مرزی $x = -\frac{\pi}{2}$ سری به $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ تبدیل می شود که همگراست.

۹۴- گزینه «۳»

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right)$$

سری $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ سری همساز است که واگرا به $+\infty$ می باشد و سری $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ سری هندسی است که همگرا به $1 - \frac{1}{2}$ می باشد.

بنابراین سری مورد نظر واگرا به $+\infty$ می باشد.

۹۵- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$\frac{1}{n^2 + 2n} \leq \frac{1}{n^2 + n + k} \leq \frac{1}{n^2 + n}$$

بنابراین:

$$\frac{n}{n^2 + 2n} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + k} \leq \frac{n}{n^2 + n}$$

و چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 2n} = 0$ ، بنابراین طبق قضیه ساندویچ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

۹۶- گزینه «۲»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r^n + 5^n + 7^n + 9^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{9^n} = 9$$

۹۷- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که بسط مکلاورن $\ln(1+x)$ به صورت زیر است:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

با جایگزینی $x = \frac{-1}{2}$ در رابطه فوق به دست می آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{-1}{2}\right)^n}{n} = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n 2^n} = 1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = \ln \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} = \frac{-5}{8} - \ln \frac{1}{2}$$

۹۸- گزینه «۳» تابع داده شده همان تابع $\text{Arcsinh } x$ می باشد.

۹۹- گزینه «۳» واضح است که هر یک از جملات مجموع فوق بین $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ و $\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ قرار دارند. بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

حد چپ و حد راست در عبارت فوق برابر ۱ می‌باشد، پس طبق قضیه ساندویچ حد خواسته شده نیز برابر ۱ می‌باشد.

۱۰۰- گزینه «۳» قدر مطلق جملات هر دو سری نزولی می‌باشد و حد جملات عمومی آنها نیز برابر صفر است، پس هر دو سری طبق آزمون لایب نیتز همگرا هستند.

۱۰۱- گزینه «۴»

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 \right) = x(e^x - 1)$$

۱۰۲- گزینه «۲» می‌دانیم بسط مکلاورن $\frac{1}{1+x}$ به صورت زیر است:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \xrightarrow{\text{به جای } x^2, x \text{ قرار می‌دهیم}} \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین } \times (x+1)} \frac{x+1}{1+x^2} = (x+1)(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots)$$

و جمله x^2 فقط از ضرب x در $-x^2$ ایجاد می‌شود، پس ضریب آن برابر ۱- خواهد بود.

۱۰۳- گزینه «۳»

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$(x^2 + \delta)e^x = x^2(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots) + \delta(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)$$

$$x^2 \text{ ضریب} = 1 + \frac{\delta}{2} = \frac{11}{6}$$

۱۰۴- گزینه «۱» سری داده شده، سری تلسکوپی می‌باشد، بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n-2)(4n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4 \times \infty + 1} \right) = \frac{1}{4}$$

۱۰۵- گزینه «۲» در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n^2}$ داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty$ ، بنابراین سری مزبور شرط لازم برای همگرایی را ندارد. پس واگراست.

۱۰۶- گزینه «۲»

۱۰۷- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. تابع داده شده در $x=0$ تعریف نشده و بنابراین بسط مکلاورن ندارد.

۱۰۸- گزینه «۴»

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{2^n}}{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \times 2^{n+1}}{(n+1)^2 \times 2^n} = 2$$

$$|x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 \quad \text{بازه همگرایی}$$

۱۰۷- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. تابع داده شده در $x=0$ تعریف نشده و بنابراین بسط مکلاورن ندارد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n+1} + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} + xe^x = x^2 e^x + xe^x = (x^2 + x)e^x$$

۱۰۹- گزینه «۲»

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} - \frac{1}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-2}{4}$$

۱۱۰- گزینه «۱»

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = 1$$

پس سری در فاصله $-1 < x < 1$ همگراست. در نقاط مرزی -1 و 1 سری به ترتیب به صورت $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ و $\sum \frac{1}{n^2}$ در می‌آید که هر دو سری همگرا هستند.

۱۱۱- گزینه «۲» کافی است در بسط $\ln x$ ، به جای x ، x^2 قرار دهیم.

۱۱۲- گزینه «۴»

$$f'(x) = \delta x (2+x^2)^{\frac{2}{3}}, \quad f''(x) = \delta (2+x^2)^{\frac{2}{3}} + 15 \delta x^2 (2+x^2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'''(x) = 4\delta x (2+x^2)^{-\frac{1}{3}} + 15\delta x^2 (1+x^2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f^{(4)}(x) = 4\delta (2+x^2)^{-\frac{4}{3}} + 90\delta x^2 (2+x^2)^{-\frac{5}{3}} - 15\delta x^2 (2+x^2)^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 4\delta \sqrt{2}$$

$$x^2 \text{ ضریب} = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{4\delta \sqrt{2}}{24} = \frac{15\sqrt{2}}{8}$$

۱۱۳- گزینه «۱»

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a^n + b^n}}{\frac{1}{a^{n+1} + b^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = a$$

$$|x| < a \Rightarrow -a < x < a$$

به ازای $x = a$ و $x = -a$ سری به ترتیب به صورت $\sum \frac{a^n}{a^n + b^n}$ و $\sum \frac{(-a)^n}{a^n + b^n}$ در می‌آید که هر دو سری واگرا می‌باشند، زیرا شرط لازم برای همگرایی را ندارند.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{a^n + b^n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-a)^n}{a^n + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \text{نیست}$$

۱۱۴- گزینه «۳»

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^{-n}}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{e^n}} = \frac{1}{e}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{e} \Rightarrow R = e \Rightarrow \text{فاصله همگرایی} = (-e, e) \quad (\text{در محاسبات فوق از هم‌ارزی } n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ استفاده کرده‌ایم.})$$

۱۱۵- گزینه «۲» سری مکلاورن $\sin x$ را به جای $\sin x$ قرار می‌دهیم و چون می‌خواهیم ضریب x^4 را محاسبه کنیم. بنابراین کافی است بسط $\sin x$ را تا x^7 بنویسیم.

$$e^{\sin x} \sim e^{x - \frac{x^3}{6}} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4}{4!} + \dots$$

ضریب x^4 در جملات $(x - \frac{x^2}{6})^2$ و $(x - \frac{x^2}{6})^3$ برابر صفر است (زیرا هر دو جمله فقط شامل توانهای فرد می‌باشند). ضریب x^4 در جمله سوم

یعنی $\frac{(x - \frac{x^2}{6})^2}{2!}$ برابر $\frac{-1}{6}$ و در جمله پنجم یعنی $\frac{(x - \frac{x^2}{6})^4}{4!}$ برابر $\frac{1}{24}$ می‌باشد. بنابراین:

$$x^4 \text{ ضریب} = \frac{-1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{-1}{8}$$

۱۱۶- گزینه «۳»

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(\ln(n+1))^2}}{\frac{1}{(\ln n)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^2}{(\ln(n+1))^2} = 1$$

$$|x-1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

در نقطه مرزی $x=0$ سری به صورت $\sum \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2}$ در می‌آید که همگراست و در $x=2$ سری به صورت $\sum \frac{1}{(\ln n)^2}$ در می‌آید که واگراست.

۱۱۷- گزینه «۳» وقتی $n \rightarrow \infty$ آنگاه مقدار a_n و a_{n-1} تقریباً با هم برابر است، اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ در نظر گرفته شود داریم:

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \Rightarrow L = \sqrt{2 + L} \Rightarrow L^2 = 2 + L \Rightarrow (L+1)(L-2) = 0 \Rightarrow L = 2$$

$$S = \frac{1}{1-a} = \frac{1-b}{1-a} = \frac{b-1}{a-1}$$

۱۱۸- گزینه «۴» در صورت و منخرج کسر یک سری هندسی با جملات نامحدود داریم:

۱۱۹- گزینه «۴» تابع مورد نظر را که سری به آن همگراست $f(x)$ فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$\int f(x) dx = x - x^2 + x^5 - x^4 + \dots = x(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) = \frac{x}{1+x^2}$$

حال با مشتق‌گیری از رابطه $\int f(x) dx = \frac{x}{1+x^2}$ به دست می‌آید:

$$f(x) = \frac{1 \times (1+x^2) - 2x \times x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

۱۲۰- گزینه «۱»

$$\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \sum \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ یک سری واگراست، لذا با استفاده از آزمون مقایسه حدی داریم:

با توجه به آزمون مقایسه حدی هرگاه $c > 0$ باشد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ باشد. اگر سری b_n واگرا باشد آنگاه سری a_n نیز واگرا خواهد بود.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+k)} = \frac{1}{kk!}$$

۱۲۱- گزینه «۱» به نکته روبرو توجه کنید:

در این تست $k=2$ می‌باشد لذا $S = \frac{1}{2 \times 2!} = \frac{1}{4}$ می‌باشد.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j^2(j+1)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j+1)^2 - j^2}{j^2(j+1)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{(j+1)^2} \right) = 1$$

۱۲۲- گزینه «۲»

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n \times 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) = \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} = \frac{3}{2}$$

۱۲۳- گزینه «۳»

۱۲۴- گزینه «۲» فرض می‌کنیم $y = (x+1)^2$ در این صورت سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\delta^n} y^n$ در می‌آید.

$$R_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{\delta^n}}{\frac{n+1}{\delta^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\delta^{n+1}}{(n+1)\delta^n} = \delta$$

پس شعاع همگرایی سری اولیه برابر $R_x = \sqrt{R_y} = \sqrt{\delta}$ می‌باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۱۲۵- گزینه «۴» سری تلسکوپی می‌باشد.

تست‌های تکمیلی فصل ششم

۱- رابطه صحیح کدام است؟

(۱) $\sum_{i=p}^n (k + x_i) = (n-p)k + \sum_{i=p}^n x_i$

(۲) $\sum_{i=p}^n (k + x_i) = (n-p-1)k + \sum_{i=p}^n kx_i$

۲- کدامیک از سری‌های زیر همگراست؟

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta n + 1}$

۳- سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^\alpha}$ در صورتی همگراست که:

(۱) $\alpha \leq 2$

۴- فاصله همگرایی سری $S = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} + \dots$ کدام است؟

(۱) $-1 \leq x \leq 1$

۵- کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ همگراست.

۶- حد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$ کدام است؟

(۱) ۰

۷- شعاع همگرایی سری $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 \times 2} + \frac{x^3}{2^3 \times 3} + \dots$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

۸- سومین جمله بسط تیلور برای $f(x) = \cos 2x$ برحسب توان‌های $x - \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

(۱) ۰

۹- ضریب x^4 در بسط سری تیلور تابع $y = e^{-x^2}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{2}$

۱۰- تابع $f(n) = \frac{10n^2}{n^2 + 14}$ مفروض است. عبارت صحیح در مورد این تابع کدام است؟

- (۱) تابع دارای کران بالای صفر دارد.
- (۲) تابع دارای کران بالای $\frac{5}{4}$ دارد.
- (۳) تابع کران دار نیست.
- (۴) تابع دارای کران بالای ۱۰ دارد.

۱۱- بزرگترین جمله دنباله $a_n = \frac{n^2}{n^2 + 4000}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{40}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{30}$

(۴) $\frac{1}{30}$

۱۲- اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) عددی مخالف صفر
- (۳) هر عدد حقیقی
- (۴) یک

۱۳- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{1}{4}$

۱۴- کدام حکم همواره درست می‌باشد؟

- (۱) دنباله واگرا نامحدود می‌باشد.
- (۲) هر دنباله‌ای همگرا می‌باشد.
- (۳) دنباله‌ای که کراندار باشد همگراست.
- (۴) هر دنباله صعودی و کراندار، همگرا می‌باشد.

۱۵- کدامیک از دنباله‌های زیر صعودی است؟

- (۱) $\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$
- (۲) $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$
- (۳) $\left\{ \frac{n^2}{2n} \right\}$
- (۴) $\left\{ \frac{2^n}{n^2} \right\}$

۱۶- شعاع همگرایی سری $S = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \dots$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ∞
- (۴) ۴

۱۷- کدام دنباله واگرا است؟

- (۱) $\left\{ \sqrt[n]{n} \right\}$
- (۲) $\left\{ \sqrt{n} - 2 \right\}$
- (۳) $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$
- (۴) $\left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right\}$

۱۸- دنباله $\left\{ \frac{\sqrt[n]{n^2} \sin n!}{n+5} \right\}$ همگرا به کدام عدد است؟

- (۱) ۱
- (۲) $\frac{1}{3}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) صفر

۱۹- دنباله $\left\{ \frac{n^n}{n!} \right\}$ دارای کدامیک از خاصیت‌های زیر است؟

- (۱) نه نزولی است و نه صعودی است
- (۲) نزولی است
- (۳) کراندار نیست
- (۴) کراندار است ولی همگرا نیست

۲۰- کدامیک از سری‌های زیر همگرا است؟

- (۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$
- (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
- (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{2n^2 + 1}$
- (۴) هر سه مورد

۲۱- سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{\Delta n} \right)$... است.

- (۱) همگرا به $\frac{1}{15}$
- (۲) همگرا به ۱
- (۳) همگرا به صفر
- (۴) واگرا

۲۲- سری $\sum_{n=2}^{\infty} (n + \sqrt{8} - \sqrt{8})$... است.

- (۱) واگرا
- (۲) همگرا به -۱
- (۳) همگرا به -۲
- (۴) همگرا به صفر

۲۳- اگر مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ برابر با عدد e باشد حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 5}{2a_n^2 + 3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{e}$
- (۲) $\frac{1}{re}$
- (۳) $-\frac{5}{3}$
- (۴) صفر

کدامیک از دنباله‌های زیر واگرا است؟

(۱) $\left\{ \ln \frac{1}{n-1} \right\}$ (۲) $\left\{ \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right\}$

کدامیک از دنباله‌های زیر همگراست؟

(۱) $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right\}$ (۲) $\left\{ \cos \frac{n\pi}{2} \right\}$ (۳) $\left\{ \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \right\}$ (۴) $\{1 + (-1)^n\}$

دنباله $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \dots$ همگرا به کدام عدد است؟

(۱) $\frac{1}{p}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) ۲

دنباله $\{(-1)^n \cos n\pi\}$:

(۱) همگرا به ۱ است (۲) همگرا به صفر است

دنباله $\left\{ \frac{4^n - 3^n}{4^n} \right\}$ به کدام عدد همگراست؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

اگر دنباله‌های $\{a_n\}, \{b_n\}$ واگرا باشند، در این صورت کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

(۱) دنباله $\{a_n b_n\}$ همگراست. (۲) دنباله $\{a_n + b_n\}$ واگراست. (۳) هیچکدام

دنباله $\left\{ \frac{n + \cos n}{2^n} \right\}$ به کدام عدد همگراست؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) واگراست

کدامیک از دنباله‌های زیر همگراست؟

(۱) $n\sqrt[n]{n}$ (۲) $\{n \cos^2 \frac{\pi}{n}\}$ (۳) $\{(-1)^n \frac{n+2}{n+2}\}$ (۴) $\frac{5^n}{n!}$

کدامیک از دنباله‌های زیر نزولی است؟

(۱) $\{\sqrt{n}\}$ (۲) $\{1 - \frac{1}{n}\}$ (۳) $\frac{2n+1}{2n+1}$ (۴) $\{1 - \frac{1}{2^n}\}$

دنباله $\frac{n}{\pi} \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}$ به کدام عدد همگراست؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{\pi}$

دنباله $\left\{ \frac{\cos n + \sqrt{2}n^2}{n^2 + 100} \right\}$ به کدام عدد همگراست؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{100}$

دنباله $\left\{ \frac{15^n + (-15)^n}{2^n} \right\}$ به کدام عدد همگراست؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{15}$ (۴) $\frac{4}{15}$

در مورد دنباله $\left\{ \frac{9^n + (-9)^n}{4^n} \right\}$ کدام گزاره صحیح است؟

(۱) همگرا به صفر است (۲) همگرا به ۲ است (۳) واگراست (۴) همگرا به $\frac{1}{9}$ است

کدامیک از دنباله‌های زیر کراندار نیست؟

(۱) $x_n = \frac{5n^2}{n^2 + 2}$ (۲) $x_n = (-1)^n \frac{2n}{n+2} \cos n$ (۳) $x_n = n \cos \pi n$ (۴) $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{5}$

در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ کدام گزاره صحیح است؟

(۱) سری همگرانی مشروط دارد (۲) سری همگرانی مطلق دارد (۳) سری واگراست (۴) هیچکدام

به ازای چه مقادیری از x سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}$ همگراست؟

(۱) $-3 < x < 1$ (۲) $-2 < x < 1$ (۳) $x < 1$ (۴) $-3 < x \leq 1$

اگر $x > 0$ باشد آنگاه حاصل $(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) + (\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}) + \dots + (\sqrt{x-2} - \sqrt{x-3}) + \dots$ کدام است؟

(۱) ۰ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) سری واگراست (۴) ۰

کدامیک از سریهای زیر واگراست؟

(۱) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{Lnn}$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 2}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

کدامیک از سریهای زیر واگراست؟

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Lnn}{2n^2 - 1}$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{2n^2 - 1}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Lnn}{2n^2 + 2}$

کدامیک از سریهای زیر همگراست؟

(۱) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nLnn}$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{n^2}$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n^2}$

کدامیک از سریهای زیر واگراست؟

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2}$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n \cdot 5^n}\right)$

کدامیک از سریهای زیر همگراست؟

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin^2 \frac{1}{n}$ (۲) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(Lnn)^2}{n^2}$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n - Lnn}{n^2 + 10n^2}}$ (۴) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{Lnn}{n}$

سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(Lnn)^q}$ (q عدد ثابت است) در چه صورت همگراست؟

(۱) $q < 1$ (۲) $q = 1$ (۳) $q > 1$ (۴) $\frac{1}{2} < q < 1$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2n-1}$...

(۱) همگرانی مطلق دارد. (۲) واگراست. (۳) همگرانی مشروط دارد. (۴) حاصل سری برابر $\frac{1}{3}$ است.

کدامیک از سریهای زیر همگراست؟

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 2n + 2}$ (۲) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{Lnn}$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-1)^n}{n^2 + 1}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

که ۵۰ سری $\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots$ به کدام عدد همگراست؟

- (۱) $\ln 2$ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) سری واگراست

که ۵۱ نمایش تابع $f(x) = \ln x$ بر حسب قوای نزولی $x-1$ کدام است؟

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^{n-1}}{n}$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n}$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{n}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$

که ۵۲ بسط تابع $f(x) = \cos x$ بر حسب توانهای $x - \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - \frac{\pi}{2})^{2n-1}}{(2n-1)!}$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n-1)!}$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n-1}}{(2n)!}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!}$

که ۵۳ کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

- (۱) مجموع دو سری همگرا ممکن است واگرا باشد.
 (۲) مجموع یک سری همگرا و یک سری واگرا ممکن است همگرا باشد.
 (۳) مجموع دو سری واگرا ممکن است همگرا باشد.
 (۴) هر دنباله کراندار و همگرا، یکنوا می باشد.

که ۵۴ ضریب x^2 در بسط مکلورن تابع $y = \sqrt{1-x}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{4}{81}$ (۲) $\frac{4}{27}$ (۳) $-\frac{4}{81}$ (۴) $-\frac{4}{27}$

که ۵۵ سری مکلورن تابع $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ وقتی $-1 < x < 1$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{2} (x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \dots)$ (۲) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ (۳) $-x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$ (۴) $\frac{1}{2} (x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots)$

که ۵۶ مجموع جملات سری $\sum_{n=1}^{\infty} n (\frac{2}{3})^{n-1}$ کدام است؟

(۱) $\frac{16}{3}$ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

که ۵۷ ضریب x^2 در بسط مکلورن $e^{\cos x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{e}{2}$ (۲) $-\frac{e}{2}$ (۳) $\frac{e}{6}$ (۴) $-\frac{e}{6}$

که ۵۸ ضریب x^4 در بسط مکلورن $\ln \cos x$ چقدر است؟

(۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $-\frac{1}{12}$

که ۵۹ ضریب x^2 در بسط مکلورن $\frac{x}{e^x - 1}$ چقدر است؟

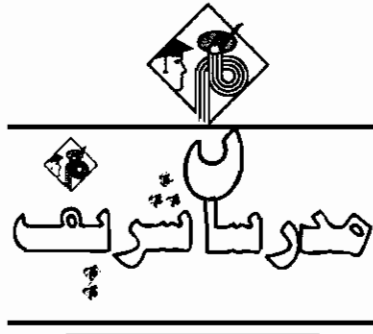
(۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $-\frac{1}{12}$

که ۶۰ حاصل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ برابر است با:

(۱) $\ln(1+x^2)$ (۲) $\cos 2x$ (۳) $\sin 2x$ (۴) $\cos x$

خودپرستی آفت دوستی و باعث تباهی فرد است.
 آنان که نمی‌توانند خود را اداره کنند، ناچار از اطاعت دیگرانند.

«حضرت علی (ع)»
 «هوکو»

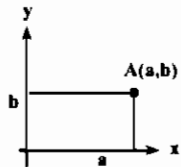


فصل هفتم

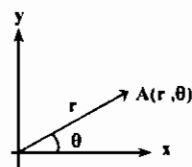
«دستگاه مختصات قطبی»

معرفی دستگاه مختصات قطبی

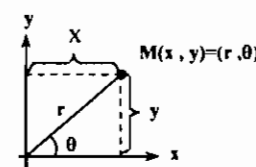
در بعضی مواقع به جای استفاده از دستگاه مختصات قائم که در آن هر نقطه یک طول و یک عرض مشخص دارد از دستگاه مختصات قطبی که در آن یک نقطه دارای یک فاصله از مبدأ و یک زاویه جهت‌دار است، استفاده می‌شود برای مثال اگر در دستگاه مختصات قائم نقطه $A(a, b)$ (شکل ۱) را در نظر بگیریم، مختصات آن در دستگاه مختصات قطبی به صورت نمایش داده شده در (شکل ۲) می‌باشد.



شکل (۱)



شکل (۲)



نمایش نقطه M در یک دستگاه با دو نوع مختصات

تبدیل دستگاه مختصات قائم به قطبی و بالعکس

رابطه تبدیل مختصات قائم به قطبی:
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $\text{tg} \theta = \frac{y}{x}$

تبدیل مختصات قطبی به قائم:
 $x = r \cos \theta$
 $y = r \sin \theta$

که مثال ۱: صورت قطبی معادله $x^2 + y^2 = 9$ را بدست آورید.

$\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta = 9 \Rightarrow \rho^2 = 9$

پاسخ:

که مثال ۲: صورت قائم معادله $\rho^2 = 4 \rho \sin \theta + 5$ را بدست آورید.

پاسخ: با جایگزینی $\rho^2 = x^2 + y^2$ و $\rho \sin \theta = y$ بدست می‌آید:

$x^2 + y^2 = 4y + 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 5 \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 9$

که مثال ۳: نمودار معادله قطبی $r = \frac{6}{\sqrt{9-5 \sin^2 \theta}}$ در دستگاه مختصات کارتزین (قائم) به چه شکل خواهد شد؟

(۱) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (۲) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (۳) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$ (۴) هیچکدام

$r = \frac{6}{\sqrt{9-5 \sin^2 \theta}} \Rightarrow r^2 = \frac{36}{9-5 \sin^2 \theta} \Rightarrow 9r^2 - 5r^2 \sin^2 \theta = 36$

پاسخ: گزینه «۲»

معادله یک بیضی می‌باشد. $\Rightarrow 9(x^2 + y^2) - 5y^2 = 36 \Rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

* تذکر ۱: هرگاه در مختصات قطبی نقطه P به صورت (r, θ) باشد که r منفی است، این نقطه معادل نقطه $(-r, \pi + \theta)$ می‌باشد.

مثال ۴: مختصات نقطه $P(-2, \frac{\pi}{6})$ را در مختصات دکارتی بنویسید.

پاسخ: نقطه داده شده معادل نقطه $(2, \frac{7\pi}{6})$ می باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = 2 \cos \frac{7\pi}{6} = -\sqrt{3} \\ y = r \sin \theta = 2 \sin \frac{7\pi}{6} = -1 \end{cases} \Rightarrow P(-\sqrt{3}, -1)$$

تذکر ۲: فاصله دو نقطه $P(r, \theta)$ و $Q(r', \theta')$ از فرمول روبرو به دست می آید:

تذکر ۳: مساحت مثلث ABC که سه رأس آن $A(r, \theta)$ ، $B(r', \theta')$ و $C(r'', \theta'')$ باشد برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} [r r' \sin(\theta' - \theta) + r' r'' \sin(\theta'' - \theta') + r'' r \sin(\theta - \theta'')]]$$

معادله نیم خط، خط، دایره و مقاطع مخروطی در مختصات قطبی

(۱) معادله خط $ax + by = c$ در مختصات قطبی به صورت $r = \frac{c}{a \cos \theta + b \sin \theta}$ می باشد.

تذکر ۴: به طور کلی معادله هر خط در مختصات قطبی را می توان به صورت $r \cos(\theta - \theta_0) = a$ نشان داد که در آن a فاصله خط از مبدأ مختصات و θ_0 زاویه خط با محور x ها می باشد.

(۲) معادله دایره ای که مرکز آن مبدأ مختصات و شعاع آن a باشد، در مختصات قطبی به صورت $r = a$ می باشد. به طور کلی معادله دایره ای که مرکز آن (x_0, y_0) و شعاع آن a باشد، در مختصات قطبی به صورت $r^2 - 2x_0 r \cos(\theta - \theta_0) + x_0^2 + y_0^2 - a^2 = 0$ می باشد.

(۳) معادله نیم خطی که از مبدأ مختصات عبور کند و با محور x ها زاویه θ_0 بسازد، در مختصات قطبی به صورت $\theta = \theta_0$ می باشد.

(۴) معادله قطبی $r = \frac{a}{1 \pm e \cos \theta}$ مقاطع مخروطی افقی را نمایش می دهد.

اگر $e > 1$ ، معادله هذلولی با خروج از مرکز e خواهد بود.

اگر $e = 1$ ، معادله سهمی خواهد بود.

اگر $e < 1$ ، معادله بیضی با خروج از مرکز e خواهد بود.

(۵) معادله قطبی $r = \frac{a}{1 \pm e \sin \theta}$ مقاطع مخروطی قائم را نشان می دهد. (این مقاطع مخروطی از دوران مقاطع مخروطی $r = \frac{a}{1 \pm e \cos \theta}$ به اندازه $\frac{\pi}{2}$ حاصل می شوند)

مثال ۵: نمودار قطبی $r = \sec \theta \tan \theta$ عبارت است از:

(۱) هذلولی افقی (۲) هذلولی قائم

سهمی قائم (۳) سهمی افقی (۴) سهمی قائم

$$r = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \Rightarrow r^2 \cos^2 \theta = r \sin \theta \Rightarrow x^2 = y$$

پاسخ: گزینه «۴»

مثال ۶: نمودار $r^2 = \csc 2\theta$ نمایش کدام منحنی است؟

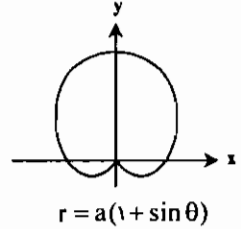
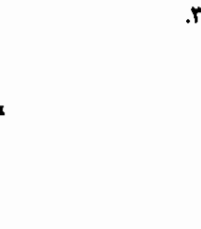
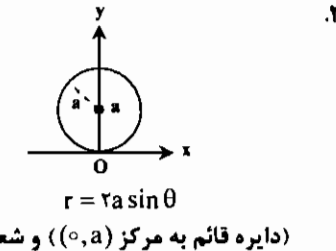
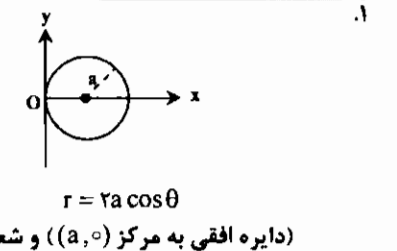
(۱) دایره (۲) هذلولی قائم

سهمی قائم (۳) هذلولی افقی (۴) هیچکدام

$$r^2 = \frac{1}{\sin 2\theta} \Rightarrow r(r \sin \theta)(r \cos \theta) = 1 \Rightarrow rxy = 1$$

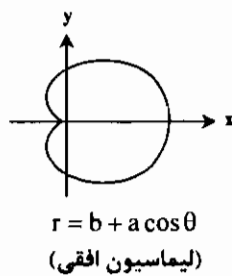
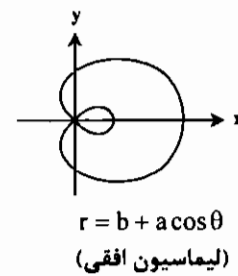
پاسخ: گزینه «۴»

نمودار چند تابع قطبی



نمودار $r = a(1 - \cos \theta)$ و $r = a(1 - \sin \theta)$ از دوران منحنی های فوق به اندازه π به دست می آید.

اگر $a > b$ (۴) اگر $a < b$

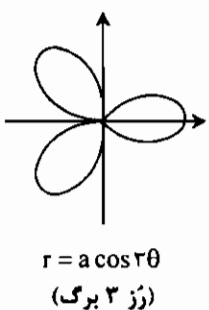
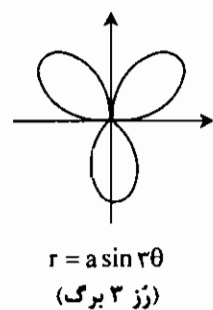
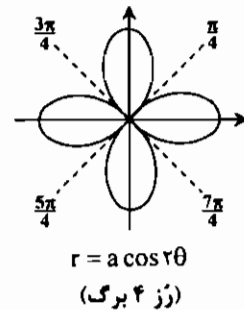
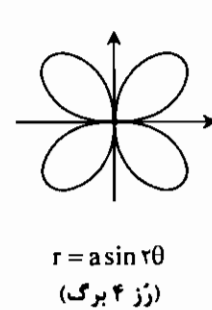
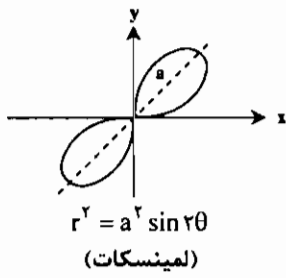
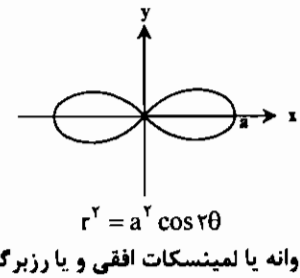


تذکر ۵: اگر در منحنی $r = b + a \cos \theta$ ، $a = b$ آنگاه منحنی یک کاردیوئید (دلووار) خواهد بود.

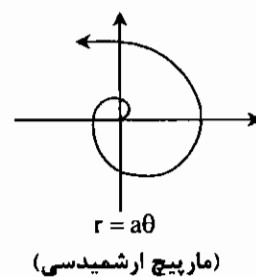
تذکر ۶: اگر در منحنی $r = b + a \cos \theta$ ، $a = 2b$ ، منحنی را تریسکتریکس (تثلیث گر) می گویند.

تذکر ۷: منحنی $r = b - a \cos \theta$ از دوران $r = b + a \cos \theta$ به اندازه π حاصل می شود.

تذکر ۸: منحنی های $r = b \pm a \sin \theta$ لیماسیون قائم می باشند.



تذکر ۹: به طور کلی $r = a \sin(n\theta)$ و $r = a \cos(n\theta)$ ، رز m برگ می باشد که اگر n فرد باشد $m = n$ و اگر n زوج باشد $m = 2n$.



- نکته ۱: اگر با تبدیل θ به $-\theta$ یا تبدیل همزمان r به $-r$ و θ به $\pi - \theta$ معادله عوض نشود، نمودار نسبت به محور x ها متقارن است.
- نکته ۲: اگر با تبدیل θ به $\pi - \theta$ یا تبدیل همزمان r به $-r$ و θ به $-\theta$ معادله عوض نشود، نمودار نسبت به محور y ها متقارن است.
- نکته ۳: اگر با تبدیل θ به $\pi + \theta$ یا r به $-r$ معادله عوض نشود، نمودار نسبت به مبدأ متقارن است.
- نکته ۴: برای دوران یک منحنی به اندازه α در مختصات قطبی، کافی است در معادله آن به جای θ ، قرار دهید $\theta - \alpha$.

مثال ۷: معادله دوران یافته منحنی $r^2 = \cos 4\theta$ به اندازه $\frac{\pi}{8}$ کدام است؟

(۱) $r^2 = -\cos 4\theta$ (۲) $r^2 = \cos(4\theta + \frac{\pi}{8})$ (۳) $r^2 = \cos(4\theta - \frac{\pi}{8})$ (۴) $r^2 = \sin 4\theta$

پاسخ: گزینه «۴» کافی است در معادله داده شده به جای θ ، $\theta - \frac{\pi}{8}$ قرار دهیم:

$$r^2 = \cos(4(\theta - \frac{\pi}{8})) \Rightarrow r^2 = \cos(4\theta - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow r^2 = \sin 4\theta$$

شیب یا ضریب زاویه خط مماس در منحنی قطبی

منحنی قطبی $r = f(\theta)$ را می‌توان به صورت پارامتری $\begin{cases} x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \\ y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$ برحسب پارامتر θ نوشت.

بنابراین شیب خط مماس را می‌توان از فرمول زیر به دست آورد:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta}$$

مثال ۸: معادله خط مماس بر لیماسیون $r = 2 + \cos \theta$ را در $\theta = \frac{\pi}{4}$ بنویسید.

پاسخ: $\begin{cases} x = r \cos \theta = 2 \cos \theta + \cos^2 \theta \\ y = r \sin \theta = 2 \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2 \cos \theta + \cos 2\theta}{-2 \sin \theta - 2 \sin \theta \cos \theta}$

به ازای $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ ، $x = 0$ ، $y = 2$ ، بنابراین معادله خط مماس به صورت روبرو است: $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow 2y - x = 4$

زاویه بین شعاع حامل و خط مماس

در هر نقطه دلخواه مانند P روی منحنی $r = f(\theta)$ ، زاویه بین شعاع حامل و خط مماس را می‌توان از فرمول زیر به دست آورد:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

نکته ۵: اگر $f'(\theta) = 0$ ، آنگاه $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

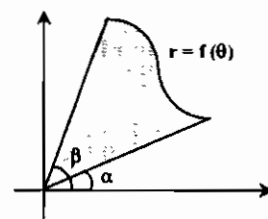
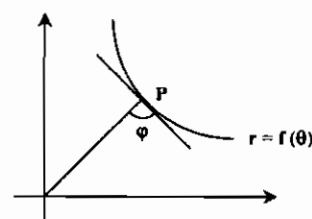
مساحت محصور و طول قوس در مختصات قطبی

مساحت محصور مابین منحنی $r = f(\theta)$ و شعاعهای $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ ($\alpha < \beta$)، از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta$$

مثال ۹: مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع قطبی $r = \cos 2\theta$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$



$\frac{\pi}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه «۲» منحنی داده شده رز ۳ برگ می‌باشد، بنابراین برای محاسبه مساحت کل کافی است مساحت یک برگ را محاسبه کرده و در ۳ ضرب کنیم.

$$r = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$$

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta)^2 d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

نکته ۶: سطح محصور مابین دو منحنی $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ و شعاعهای $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ از فرمول زیر به دست می‌آید (با فرض $f(\theta) \geq g(\theta)$):

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f^2(\theta) - g^2(\theta)) d\theta$$

مثال ۱۰: مساحت محدود به ناحیه داخل $r = 2 \cos \theta$ و خارج نمودار $r = \sqrt{2}$ چند واحد مربع است؟

(۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{3\pi}{4}$ (۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا نقاط تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم:

$$2 \cos \theta = \sqrt{2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{4}$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} ((2 \cos \theta)^2 - (\sqrt{2})^2) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (4 \cos^2 \theta - 2) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = 1$$

نکته ۷: طول منحنی نمودار $r = f(\theta)$ از $\theta = \alpha$ تا $\theta = \beta$ از فرمول روبرو به دست می‌آید:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta$$

مثال ۱۱: طول منحنی قطبی $r = \theta^2$ را در فاصله $0 \leq \theta \leq \sqrt{5}$ بیابید.

پاسخ: $L = \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{(\theta^2)^2 + (2\theta)^2} d\theta = \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2} d\theta = \int_0^{\sqrt{5}} \theta \sqrt{\theta^2 + 4} d\theta = \frac{1}{3} (\theta^2 + 4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{5}} = \frac{19}{3}$

حجم و مساحت حاصل از دوران نمودار قطبی

اگر منحنی $r = r(\theta)$ ، $a < \theta < b$ ، حول محور x ها (قطبی) دوران داده شود، مساحت حاصل از دوران از فرمول زیر به دست می‌آید: (مشابه مختصات دکارتی)

$$S = 2\pi \int y ds \quad (\text{که در آن } y = r \sin \theta, \text{ و } ds = \sqrt{r^2 + r'^2})$$

مثال ۱۲: مساحت سطحی را که از دوران لیمینسکات $r = a \sqrt{\cos 2\theta}$ حول محور قطبی حاصل می‌شود بیابید.

پاسخ: اولاً توجه کنید که باید $\cos 2\theta \geq 0$ باشد، بنابراین $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ (شاخه سمت راست) و یا $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$ (شاخه سمت چپ)، از طرفی داریم:

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \sqrt{a^2 \cos 2\theta + (\frac{a \sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}})^2} d\theta = \frac{a d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$y = r \sin \theta = a \sin \theta \sqrt{\cos 2\theta}$$

با توجه به تقارن شکل نسبت به محور x ها مساحت حاصل از دوران لیمینسکات برابر است با:

$$S = 2 \times 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} y ds = 4\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta =$$

نکته ۸: حجم حاصل از دوران منحنی قطبی $r = f(\theta)$ حول محور قطبی در فاصله $0 \leq \theta \leq \pi$ به دست می‌آید:

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin \theta d\theta$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هفتم

۱- مساحت محدود به ناحیه داخل نمودار قطبی تابع $r = 2 \cos \theta$ و خارج ناحیه نمودار قطبی تابع $r = \sqrt{2}$ چند واحد مربع است؟

(مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) π
- (۲) $\frac{\pi}{2}$
- (۳) $\frac{3\pi}{4}$
- (۴) $\frac{5\pi}{4}$

۲- مساحت سطح حاصل از دوران منحنی قطبی به معادله $r^2 = 2 \cos 2\theta$ حول محور oy کدام است؟

(مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) $2\pi\sqrt{2}$
- (۲) $3\pi\sqrt{2}$
- (۳) $4\pi\sqrt{2}$
- (۴) $4\pi\sqrt{3}$

۳- خم $r = \sin 2\theta$ در مبدأ به کدام خط مماس است؟

(مکانیک - سراسری ۸۰)

- (۱) $\theta = \frac{\pi}{3}$
- (۲) $\theta = \frac{2\pi}{3}$
- (۳) $\theta = \frac{\pi}{2}$
- (۴) $\theta = \frac{\pi}{4}$

۴- مساحت محصور با منحنی $r = 2(1 + \cos \theta)$ برابر است با:

(برق - آزاد ۸۰)

- (۱) 2π
- (۲) 2π
- (۳) 6π
- (۴) π

۵- طول قوس منحنی $r = 2(1 + \cos \theta)$ برابر است با:

(برق - آزاد ۸۰)

- (۱) ۸
- (۲) ۱۶
- (۳) ۳۲
- (۴) ۴

۶- سطح محصور منحنی $r = \sqrt{\theta}$ در ناحیه $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ شعاع و θ زاویه با قسمت مثبت محور x ها است) برابر است با ...

(علوم کامپیوتر - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{\pi}{64}$
- (۲) $\frac{\pi^2}{32}$
- (۳) $\frac{\pi^2}{64}$
- (۴) $\frac{\pi}{32}$

۷- اگر $0 < \theta < \pi$ ، طول قوس سیکلوئید به معادله $\begin{cases} x = a(\theta + \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$ بین مبدأ و نقطه (x, y) کدام است؟

(ریاضی - سراسری ۸۰)

- (۱) axy
- (۲) $\sqrt{8ay}$
- (۳) $a\theta$
- (۴) $8ay$

۸- طول منحنی نمایش $\rho = \sin^2 \frac{\theta}{3}$ چقدر است؟

(ریاضی - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$
- (۲) $\frac{2\pi}{4}$
- (۳) $\frac{4\pi}{3}$
- (۴) $\frac{2\pi}{2}$

۹- مساحت مشترک بین دایره‌های $r = 2a \cos \theta$ ، $r = 2a \sin \theta$ را بیابید.

(ریاضی - آزاد ۸۱)

- (۱) $\frac{a^2}{2}(\pi - 2)$
- (۲) $\frac{a^2 \pi}{2}$
- (۳) $\frac{a^2}{2}(\pi - 1)$
- (۴) $\frac{a^2}{2}(\pi - 2)$

۱۰- سطح محصور مابین دو منحنی به معادلات $\begin{cases} r = 2a \cos \theta \\ r = 2a \sin \theta \end{cases}$ برابر است با:

(ریاضی - سراسری ۸۱)

- (۱) $(\frac{\pi}{2} - 1)a^2$
- (۲) $(\pi - 1)a^2$
- (۳) $(\frac{\pi}{2} + 1)a^2$
- (۴) $(\pi + 2)a^2$

۱۱- مساحت محصور با معادله قطبی $r = 2 + 2 \cos \theta$ برابر است با:

(مدیریت سیستم و بهره‌وری - آزاد ۸۱)

- (۱) 4π
- (۲) 2π
- (۳) 2π
- (۴) 6π

۱۲- خطوط مماس بر $r^2 = 4 \sin 2\theta$ در مبدأ کدام‌اند؟

(مکانیک - سراسری ۸۲)

- (۱) $\theta = \frac{\pi}{2}, \pi$
- (۲) $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
- (۳) $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$
- (۴) $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

۱۳- مساحت ناحیه واقع در داخل دایره $r = 2$ و در خارج دایره $r = 2(1 + \cos \theta)$ کدام است؟

(مکانیک - سراسری ۸۳)

- (۱) $\pi - 1$
- (۲) $4 - \frac{\pi}{2}$
- (۳) $8 - \pi$
- (۴) $4 - \frac{\pi}{4}$

۱۴- مساحت داخل دایره $r = a(1 - \cos \theta)$ برابر است با:

(مکانیک - آزاد ۸۳)

- (۱) $\frac{2\pi a^2}{3}$
- (۲) $2\pi a^2$
- (۳) $\frac{2\pi a^2}{4}$
- (۴) $\frac{2\pi a^2}{2}$

۱۵- خط مماس بر نمودار تابع قطبی $r = 2 \cos \theta + 2 \sin \theta$ در مبدأ کدام است؟

(عمران - سراسری ۸۲)

- (۱) $\theta = 0$
- (۲) $\theta = \frac{\pi}{4}$
- (۳) $\theta = \frac{\pi}{2}$
- (۴) $\theta = \frac{3\pi}{4}$

۱۶- معادله یک منحنی در مختصات قطبی به صورت $\rho = e^{\frac{\theta}{2}}$ است. طول این منحنی از $\theta = 1$ تا $\theta = 2$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

- (۱) $\sqrt{2}(e - \sqrt{e})$
- (۲) $\sqrt{5}(e - \sqrt{e})$
- (۳) $\sqrt{5}(e^2 - \sqrt{e})$
- (۴) $\sqrt{2}(e^2 - \sqrt{e})$

۱۷- منحنی قطبی $r = 1 + \cos \theta$ را در نظر بگیرید. محیط این منحنی قطبی برابر است با:

(مهندسی معدن - سراسری ۸۳)

- (۱) ۴
- (۲) ۶
- (۳) ۸
- (۴) ۱۳

۱۸- مساحت سطح حاصل از دوران منحنی قطبی به معادله $r^2 = 2 \cos 2\theta$ حول محور oy کدام است؟

(عمران - آزاد ۸۴)

- (۱) $2\pi\sqrt{2}$
- (۲) $4\pi\sqrt{2}$
- (۳) $4\pi\sqrt{3}$
- (۴) $4\pi\sqrt{3}$

۱۹- مساحت مشترک دایره $r = 2 \cos \theta$ و کاردیوئید $r = 1 + \cos \theta$ کدام است؟

(MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{3\pi}{2}$
- (۲) $\frac{3\pi}{4}$
- (۳) $\frac{5\pi}{4}$
- (۴) π

۲۰- طول قوس منحنی $r = 2(1 + \cos \theta)$ برابر است با:

(برق - آزاد ۸۴)

- (۱) ۲۴
- (۲) ۸
- (۳) ۳۲
- (۴) ۱۸

باسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هفتم

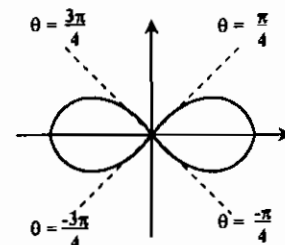
۱- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. ابتدا نقاط تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم. نقاط برخورد ریشه‌های معادله $r \cos \theta = \sqrt{2}$ می‌باشد، یعنی $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $\frac{-\pi}{4}$ بنابراین:

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} ((r \cos \theta)^2 - (\sqrt{2})^2) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (r \cos^2 \theta - 2) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \cos^2 \theta d\theta = \sin^2 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

۲- گزینه «۳» منحنی قطبی داده شده یک لیمینسکات می‌باشد (شکل زیر)

$$r = 0 \Rightarrow r \cos^2 \theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}$$

با توجه به اینکه نمودار نسبت به محور y ها متقارن است، لذا دوران قسمت سمت راست محور y ها که به ازای $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ایجاد می‌شود، کل سطح را ایجاد می‌کند.



$$r^2 = r \cos^2 \theta \Rightarrow r r' = -r \sin^2 \theta \Rightarrow r'^2 = \frac{r \sin^2 \theta}{r^2} = \frac{r \sin^2 \theta}{r \cos^2 \theta}$$

$$r^2 + r'^2 = r \cos^2 \theta + \frac{r \sin^2 \theta}{r \cos^2 \theta} = \frac{r}{r \cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

بنابراین:

$$S = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \cos \theta \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \cos \theta \times \frac{1}{r} d\theta = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta = 4\pi \sqrt{2}$$

۳- گزینه «۳» $r = 0 \Rightarrow \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (f(\theta))^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta) d\theta$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \theta + \cos \theta) d\theta = 2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta + 2 \sin \theta \right) \Big|_0^{2\pi} = 6\pi$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f''(\theta))^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{4(1 + \cos \theta)^2 + 4 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 + 4 \cos \theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 4 \int_0^{2\pi} |\cos \frac{\theta}{2}| d\theta = 4 \left(\int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \right) = 16$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \theta d\theta = \frac{1}{4} \theta^2 \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$$

۷- گزینه «۲» در مبدأ $\theta = 0$ ، اگر θ را در نقطه (x, y) ، فرض کنیم، در این صورت:

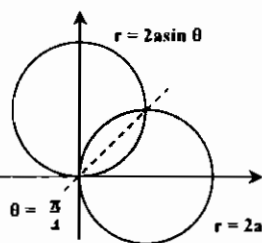
$$L = \int_0^{\theta_0} \sqrt{x'^2 + y'^2} d\theta = \int_0^{\theta_0} \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{\theta_0} \sqrt{2a^2(1 + \cos \theta)} d\theta$$

$$= \int_0^{\theta_0} \sqrt{2a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = \sqrt{2} a \sin \frac{\theta_0}{2} = \sqrt{2} a \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_0}{2}} = \sqrt{2} a \sqrt{\frac{y}{2a}} = \sqrt{\lambda a y}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) d\theta = \frac{2\pi}{2}$$

۹- گزینه «۱»

۱۰- گزینه «۱» معادلات داده شده، دو دایره مطابق شکل می‌باشند. چون شعاع $\theta = \theta_0$ از مبدأ وارد و از یکی از دایره خارج می‌شود و محل تقاطع دو منحنی خط $\theta = \frac{\pi}{4}$ می‌باشد و شکل هاشور خورده نسبت به این خط متقارن است، بنابراین مساحت یک قسمت را محاسبه کرده و حاصل را در ۲ ضرب می‌کنیم.



$$r = 2a \cos \theta \quad S = 2 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2a \cos \theta)^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = 2a^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right)$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r + r \cos \theta)^2 d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}) d\theta = 6\pi$$

$$r = 0 \Rightarrow r \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow r = k\pi \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2}$$

۱۳- گزینه «۳» نقاط برخورد دو منحنی از حل معادله $2(1 + \cos \theta) = 2$ به دست می‌آید، که ریشه‌های معادله برابر $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ خواهد بود. بنابراین سطح محصور برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (r^2 - r^2(1 + \cos \theta)^2) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\lambda \cos \theta - 4 \cos^2 \theta) d\theta = \left(-\lambda \sin \theta - \frac{4}{3} \sin^2 \theta - \theta \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 8 - \pi$$

$$r = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta) d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - 2 \cos \theta \right) d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} - 2 \cos \theta \right) d\theta = \frac{a^2}{2} \left(\frac{3}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta - 2 \sin \theta \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} \times 3\pi = \frac{3\pi a^2}{2}$$

۱۵- گزینه «۴» برای به دست آوردن خط مماس در مبدأ کافی است معادله $r = 0$ را حل کنیم.

$$r \cos \theta + r \sin \theta = 0 \Rightarrow \tan \theta = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{(e^{\frac{\theta}{2}})^2 + (\frac{1}{2} e^{\frac{\theta}{2}})^2} d\theta = \int_1^2 \frac{\sqrt{5}}{2} e^{\frac{\theta}{2}} d\theta = \sqrt{5} e^{\frac{\theta}{2}} \Big|_1^2 = \sqrt{5}(e - \sqrt{e})$$

۱۷- گزینه «۳»

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2 |\cos \frac{\theta}{2}| d\theta = 4 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 8$$

۱۸- گزینه «۲»

$$r = 0 \Rightarrow r \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}$$

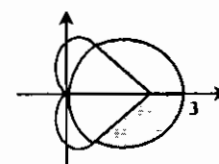
چون منحنی نسبت به محور y ها تقارن دارد، پس کافی است فاصله $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ را در نظر بگیریم.

$$r^2 = r \cos 2\theta \Rightarrow r r' = -r \sin 2\theta \Rightarrow r' = \frac{-r \sin 2\theta}{r} = \frac{-r \sin^2 2\theta}{r \cos 2\theta} = \frac{-r \sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$r^2 + r'^2 = r \cos 2\theta + \frac{r \sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{r}{\cos 2\theta} = \frac{4}{r^2}$$

$$S = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \cos \theta \sqrt{\frac{4}{r^2}} d\theta = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \cos \theta d\theta = 4\pi \sqrt{2}$$

۱۹- گزینه «۳» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به دست می آوریم:



$$r \cos \theta = 1 + \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{3}$$

با توجه به شکل مقابل مساحت محدود بین دو منحنی برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (r \cos^2 \theta - (1 + \cos \theta)^2) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\lambda \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (r + 4 \cos 2\theta - 2 \cos \theta) d\theta = (r\theta + 2 \sin 2\theta - 2 \sin \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi$$

با توجه به شکل فوق برای محاسبه مساحت مشترک بین دو منحنی کافی است مساحت کل دایره را از مساحت به دست آمده در فوق کم کنیم.

دایره $r = 2 \cos \theta$ ، دایره‌ای به شعاع $\frac{r}{2}$ می‌باشد، بنابراین مساحت دایره برابر $\frac{9\pi}{4}$ خواهد بود و در نتیجه مساحت مشترک مورد نظر

$$\text{برابر } \frac{9\pi}{4} - \pi = \frac{5\pi}{4} \text{ خواهد بود.}$$

۲۰- گزینه «۱»

$$r^2 + r'^2 = 9(1 + \cos \theta)^2 + 9(-\sin \theta)^2 = 18(1 + \cos \theta) = 36 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \int_0^{2\pi} 6 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 12 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 24$$

تست‌های تکمیلی فصل هفتم

کج ۱- اگر $M(2, \frac{\pi}{4})$ در مختصات قطبی باشد، مختصات کارتزین نقطه M کدام است؟

- (۱) $(1, \sqrt{2})$ (۲) $(1, \sqrt{3})$ (۳) $(\sqrt{2}, 1)$ (۴) $(\sqrt{3}, 1)$

کج ۲- معادله نیمساز ربع دوم در مختصات قطبی کدام است؟

- (۱) $\theta = -1$ (۲) $\theta = 1$ (۳) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (۴) $\theta = \frac{3\pi}{4}$

کج ۳- صورت قطبی $\rho = 2 \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha}$ منحنی نمایش کدام است؟

- (۱) دایره (۲) بیضی (۳) هذلولی (۴) سهمی

کج ۴- معادله در دستگاه قطبی به صورت $\rho^2(1 + \cos^2 \theta) = 10$ بیان می‌شود. این معادله در دستگاه دکارتی چگونه بیان خواهد شد؟

- (۱) $x^2 + y^2 = 10$ (۲) $x^2 + 2y^2 = 10$ (۳) $y^2 + 2x^2 = 10$ (۴) $x^2 - 2y^2 = 10$

کج ۵- صورت قطبی $(y-1)^2 + x^2 = 1$ کدام است؟

- (۱) $\rho = 2 \cos \alpha$ (۲) $\rho = 2 \cos 2\alpha$ (۳) $\rho = 2 \sin \alpha$ (۴) $\rho = 2 \sin 2\alpha$

کج ۶- نمودار تابع قطبی $r = \cos \theta$ کدام است؟

- (۱) بیضی (۲) خط (۳) دایره (۴) سهمی

کج ۷- زاویه بین شعاع حامل و خط مماس بر $r = \frac{1}{\theta + \cos \theta}$ در $\theta = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{3\pi}{4}$

کج ۸- منحنی $r = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \theta + \cos \theta)$ عبارت است از یک:

- (۱) لیمینسکات (۲) دایره (۳) دلتما (۴) خم ارشمیدس

کج ۹- مساحت داخل دلتمای $r = a(1 - \cos \theta)$ برابر است با:

- (۱) $\frac{2\pi a^2}{3}$ (۲) $2\pi a^2$ (۳) $\frac{2\pi a^2}{4}$ (۴) $\frac{2\pi a^2}{2}$

کج ۱۰- مساحت ناحیه مشترک بین دلواریهای $r = a(1 + \cos \theta)$ و $r = a(1 - \cos \theta)$ برابر است با:

- (۱) $\frac{a^2}{4}(\frac{2\pi}{4} - 4)$ (۲) $\frac{a^2}{4}(\frac{2\pi}{4} - 4)$ (۳) $\frac{a^2}{4}(\frac{2\pi}{2} - 4)$ (۴) $a^2(2\pi - 8)$

کج ۱۱- انتگرال $\int_0^{\pi} d\theta$ در مختصات قطبی معرف

(۱) مساحت یک نیم‌دایره با شعاع یک است.

(۲) مساحت یک دایره با شعاع $\sqrt{2}$ است.

(۳) مساحت یک دایره با قطر ۲ است.

(۴) مساحت یک نیم‌دایره به شعاع $\sqrt{2}$ است.

کج ۱۲- مساحت ناحیه‌ای از کاردیوئید $\rho = 1 + \cos \theta$ که به وسیله $\rho = \sqrt{3} \sin \theta$ قطع می‌شود، چقدر است؟

- (۱) $\pi - \sqrt{3}$ (۲) $\frac{2}{3}(\pi - \sqrt{3})$ (۳) $\frac{2}{4}(\pi - \sqrt{3})$ (۴) $\frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})$

کج ۱۳- مقدار مساحت حلقه منحنی $x^2 + y^2 = 2axy$ چقدر است؟

- (۱) $2a^2$ (۲) $\frac{2}{3}a^2$ (۳) $\frac{a^2}{3}$ (۴) $\frac{a^2}{2}$

کج ۱۴- مساحت ناحیه محدود به منحنی $x^4 + y^4 = a^4(x^2 + y^2)$ ، کدام است؟

- (۱) πa^2 (۲) $\sqrt{2}\pi a^2$ (۳) $\sqrt{4}\pi a^2$ (۴) $4\pi a^2$

ک ۱۵- طول قوس منحنی $\rho = a \sin^2 \theta$ برابر است با:

- (۱) πa (۲) $\frac{2\pi a}{2}$ (۳) $\frac{\pi a}{2}$ (۴) $\frac{\pi a}{3}$

ک ۱۶- طول قسمتی از خط $\rho = a \sec(\theta - \frac{\pi}{3})$ که بین $\theta = 0$ تا $\theta = \frac{\pi}{4}$ واقع است، چقدر می‌باشد؟

- (۱) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{4\sqrt{2}}{3} a$ (۳) $\frac{2\sqrt{2}}{4} a$ (۴) $\frac{2\sqrt{2}}{4} a$

ک ۱۷- طول قوس منحنی $\theta = \frac{1}{2}(\pi + \frac{1}{r})$ از $r = 2$ تا $r = 4$ برابر:

- (۱) $1 + \frac{\text{Ln} 2}{2}$ (۲) $3 - \frac{\text{Ln} 2}{2}$ (۳) $1 - \frac{\text{Ln} 2}{2}$ (۴) $3 + \frac{\text{Ln} 2}{2}$

ک ۱۸- معادله $r^2 = \frac{1}{2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$ عبارت است از:

- (۱) بیضی افقی (۲) بیضی قائم (۳) هذلولی افقی (۴) سهمی

ک ۱۹- نمودار معادلات $r = 2 \sin 2\theta$ و $r = 2 \cos 2\theta$ به ترتیب چند برگ دارند؟

- (۱) ۲ برگ - ۴ برگ (۲) ۴ برگ - ۲ برگ (۳) ۲ برگ - ۲ برگ (۴) ۴ برگ - ۴ برگ

ک ۲۰- معادله دایره به مرکز $(0, a)$ و به شعاع a کدام است؟

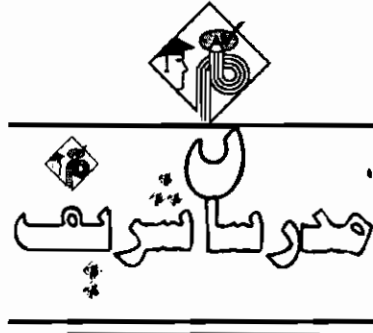
- (۱) $r = a$ (۲) $r = a \sin \theta$ (۳) $r = a \cos \theta$ (۴) $r = r \sin \theta$

از دست دادن فرصت غصه می‌آورد.

مرد بزرگ دیر وعده می‌دهد اما زود انجام می‌دهد.

«حضرت علی (ع)»

«کنفوسیوس»



فصل هشتم

« اعداد مختلط »

اعداد مختلط

❖ تعریف ۱: هر عدد مختلط به فرم $Z = x + iy$ نمایش داده می‌شود که x و y دو عدد حقیقی و $i = \sqrt{-1}$ و لذا $i^2 = -1$ می‌باشد که از این رابطه در ضرب، تقسیم و روابط محاسباتی اعداد مختلط زیاد استفاده می‌شود.

این شکل را شکل دکارتی عدد مختلط می‌گویند. x را قسمت حقیقی Z و y را قسمت موهومی Z می‌نامیم و می‌نویسیم:

$x = \text{Re} z, y = \text{Im} z$

❖ تعریف ۲: مزدوج عدد مختلط $Z = x + iy$ را با \bar{Z} نشان می‌دهیم و به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$\bar{Z} = x - iy$ برای مثال، مزدوج $Z = 5 + 2i$ برابر $\bar{Z} = 5 - 2i$ خواهد بود.

❖ تعریف ۳: قدر مطلق عدد مختلط $Z = x + iy$ را به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ برای مثال، قدر مطلق عدد مختلط $Z = 1 + i\sqrt{3}$ برابر $|z| = 2$ می‌باشد.

* تذکره ۱: قدر مطلق یک عدد مختلط، عددی حقیقی و نامنفی است.

اعمال حسابی در اعداد مختلط

جمع: مجموع دو عدد مختلط $Z_1 = x_1 + iy_1$ و $Z_2 = x_2 + iy_2$ به صورت روبرو است:

$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

تفریق: تفاضل دو عدد مختلط $Z_1 = x_1 + iy_1$ و $Z_2 = x_2 + iy_2$ به صورت روبرو است:

$Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

ضرب: برای ضرب دو عدد مختلط $Z_1 = x_1 + iy_1$ و $Z_2 = x_2 + iy_2$ کافی است دو عدد را بطور معمولی جمله به جمله در هم ضرب کنیم و بجای i^2 مقدار -1 را قرار دهیم.

$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

فرض کنید Z_1 و Z_2 دو عدد مختلط باشند، در این صورت روابط زیر برقرارند:

۱) $\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$ ۲) $\overline{Z_1 - Z_2} = \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2$ ۳) $\overline{Z_1 Z_2} = \bar{Z}_1 \bar{Z}_2$ ۴) $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$

۵) $z \bar{z} = |z|^2$ ۶) $|Z_1 Z_2| = |Z_1| |Z_2|$ ۷) $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$ ۸) $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$

۹) $\text{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ۱۰) $\text{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

ک مثال ۱: حاصل $A = (1 + 2i)(i + 2)$ برابر است با:

- (۱) $5i$ (۲) $-5i$ (۳) 5 (۴) 5

پاسخ:

$A = (1 + 2i)(2 + i) = 2 + i + 4i + 2i^2 = 2 + 5i - 2 = 5i$

تقسیم: برای بدست آوردن خارج قسمت دو عدد مختلط $Z_1 = x_1 + iy_1$ و $Z_2 = x_2 + iy_2$ صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب

می‌کنیم. $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 - i^2y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

مثال ۲: حاصل $A = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$ کدام است؟

(۱) i (۲) $-i$ (۳) 4 (۴) -4
 پاسخ: گزینه «۱»

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i} \times \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i+\sqrt{3}i^2}{3+1} = \frac{\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i-3}{4} = \frac{-2+\sqrt{3}+2i}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}+2i}{2}$$

مثال ۳: حاصل $A = \frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)}$ کدام است؟

(۱) $\frac{i}{10}$ (۲) $-\frac{i}{10}$ (۳) $\frac{1}{10}$ (۴) $-\frac{1}{10}$
 پاسخ: گزینه «۲»

$$A = \frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)} = \frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)} = \frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)} \Rightarrow A = \frac{1}{3+i+9i+3i^2} = \frac{1}{10i} = \frac{1}{10i} \times \frac{-10i}{-10i} = \frac{-i}{100} = -\frac{i}{100}$$

مثال ۴: در معادله مختلط $ix + 5y = 7 + \delta i$ مقادیر اعداد حقیقی x و y کدام است؟

(۱) $x = -1, y = 2$ (۲) $x = 1, y = -2$ (۳) $x = 0, y = -2$ (۴) $x = 1, y = 0$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا طرف چپ تساوی را مرتب می‌کنیم:

$(3x + 5y) + (2y - x)i = 7 + \delta i$

برای آنکه تساوی فوق برقرار باشد، لازم است مقادیر حقیقی و موهومی در طرفین تساوی برابر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2y - x = \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 6y - 3x = 1\delta \end{cases} \Rightarrow 11y = 7 + \delta \Rightarrow y = \frac{7 + \delta}{11}, x = -\frac{\delta}{11}$$

مثال ۵: مقدار $\frac{i^{26} - i^{27}}{i^{24} - i^{12} + i^5}$ برابر کدام است؟

(۱) $1 - i$ (۲) $1 + i$ (۳) $i - 1$ (۴) $-i - 1$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم $i^2 = -1$ ، بنابراین:

$$\frac{i^{26} - i^{27}}{i^{24} - i^{12} + i^5} = \frac{(i^2)^{13} - (i^2)^{13}i}{(i^2)^{12} - (i^2)^6 + (i^2)^2 i} = \frac{(-1)^{13} - (-1)^{13}i}{(-1)^{12} - (-1)^6 + (-1)^2 i} = \frac{-1 + i}{1 - 1 + i} = \frac{-1 + i}{i} = \frac{-1 + i}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{-i + i^2}{-1} = \frac{-i - 1}{-1} = 1 - i$$

شکل قطبی اعداد مختلط

هر عدد مختلط $Z = x + iy$ را می‌توان به شکل روبرو نوشت:

نوع نمایش فوق را شکل قطبی عدد مختلط می‌نامند. در رابطه فوق r و θ از فرمولهای زیر بدست می‌آیند:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

θ را آرگومان یا آوند عدد مختلط Z می‌گویند و r را قدر مطلق یا مدول عدد مختلط Z می‌گویند.

* تذکر ۲: در تعیین مقدار θ از رابطه $\text{tg}\theta = \frac{y}{x}$ استفاده می‌شود باید دقت کنید که نقطه (x, y) در کدام ناحیه مختصات قرار دارد و با توجه به آن θ را تعیین کنید، مثلاً اگر نقطه (x, y) در ناحیه دوم مختصات قرار داشته باشد، باید θ نیز در ناحیه دوم مثلثاتی انتخاب شود.

* تذکر ۳: همواره مقادیری از θ که بین صفر و 2π هستند قابل قبول هستند.

مثال ۶: شکل قطبی اعداد مختلط زیر را بنویسید.

الف) $z = 1 + i \Rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \text{tg}\theta = \frac{1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

ب) $z = 1 - \sqrt{3}i \Rightarrow r = \sqrt{1+3} = 2, \text{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$

θ می‌تواند دو مقدار $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ باشد ولی مقدار $\frac{2\pi}{3}$ قابل قبول نیست، زیرا نقطه $(1, -\sqrt{3})$ در ناحیه چهارم است و بنابراین زاویه‌ای قابل قبول است که در ناحیه چهارم باشد.

$$\Rightarrow z = r \cos \left[\left(\frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{3} \right) \right]$$

ج) $z = -1 - i \Rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \text{tg}\theta = \frac{-1}{-1} = 1$

θ می‌تواند $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{5\pi}{4}$ باشد. ولی فقط $\frac{5\pi}{4}$ قابل قبول است زیرا نقطه $(-1, -1)$ در ناحیه سوم قرار دارد و بنابراین زاویه‌ای قابل قبول است که در ناحیه سوم باشد.

$$\Rightarrow z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

د) $z = \delta i \Rightarrow r = \sqrt{0+\delta^2} = \delta, \text{tg}\theta = \frac{\delta}{0} = +\infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = \delta \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

خ) $z = -2i \Rightarrow r = \sqrt{0+4} = 2, \text{tg}\theta = \frac{-2}{0} = -\infty \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow z = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$

شکل نمایی عدد مختلط

با استفاده از فرمول $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ، هر عدد مختلط به شکل قطبی $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ را می‌توان به فرم $z = r e^{i\theta}$ نوشت که به آن فرم نمایی یک عدد مختلط می‌گویند. عدد $z = r e^{i\theta}$ را به شکل $z = r \angle \theta$ نیز می‌توان نمایش داد.

مثال ۷: عدد مختلط $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ را به فرم دکارتی بنویسید.

$$z = r(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 + \sqrt{3}i$$

پاسخ:

ضرب و تقسیم اعداد مختلط به فرم قطبی یا نمایی

برای جمع یا تفریق دو عدد مختلط استفاده از فرم دکارتی ساده‌تر از فرم قطبی یا نمایی می‌باشد ولی برای محاسبه ضرب و تقسیم دو عدد مختلط استفاده از فرم قطبی یا نمایی ساده‌تر از فرم دکارتی می‌باشد.

اگر $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ آنگاه خواهیم داشت:

۱) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ و ۲) $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

مثال ۸: اگر $z_1 = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ و $z_2 = \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$ مقدار $\frac{z_1^4}{z_2^4}$ کدام است؟

(۱) $-i$ (۲) -1 (۳) 1 (۴) i

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا اعداد داده شده را به فرم نمایی می‌نویسیم. $z_1 = e^{i\frac{\pi}{5}}$ ، $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{5}}$ داریم:

$$\frac{z_1^4}{z_2^4} = \frac{(e^{i\frac{\pi}{5}})^4}{(e^{-i\frac{\pi}{5}})^4} = e^{\frac{4\pi i}{5}} \cdot e^{\frac{4\pi i}{5}} = e^{8\pi i} = \cos 8\pi + i \sin 8\pi = -1$$

توان یک عدد مختلط:

برای به توان رساندن یک عدد مختلط بهتر است ابتدا آنرا به شکل قطبی یا نمایی بنویسیم و سپس آنرا به توان برسانیم. فرض کنید $z = r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ باشد، در اینصورت:

$$z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{i(n\theta)} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

فرمول فوق فرمول موآور نام دارد که در آن n عددی طبیعی است.

مثال ۹: مقدار $(1+i)^{10}$ را بدست آورید.

پاسخ: می‌دانیم $1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، بنابراین:

$$(1+i)^{10} = (\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})^{10} = 2^5 e^{i\frac{10\pi}{4}} = 32 (\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2}) = 32i$$

مثال ۱۰: حاصل $(2 + 2\sqrt{3}i)^5$ کدام است؟

- (۱) $1024\angle 60^\circ$ (۲) $1024\angle 300^\circ$ (۳) $256\sqrt{2}\angle 30^\circ$ (۴) $256\sqrt{2}\angle 60^\circ$

پاسخ: می‌دانیم $2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ بنابراین: $(2 + 2\sqrt{3}i)^5 = (4e^{i\frac{\pi}{3}})^5 = 4^5 (\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}) = 1024\angle 300^\circ$

نکته ۱: اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه همواره داریم:

$$1)(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right], \quad 2)(\sqrt{3}-i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right]$$

مثال ۱۱: حاصل $z = (1+i)^{200}$ کدام است؟

- (۱) 2^{200} (۲) 2^{100} (۳) 2^{50} (۴) $2^{50} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته فوق $n = 200$ و لذا $z = 2^{100} = 2^{100}$ می‌باشد.

ریشه یک عدد مختلط:

برای محاسبه ریشه یک عدد مختلط، ابتدا آنرا به فرم نمایی یا قطبی می‌نویسیم در اینصورت $\sqrt[n]{z}$ از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], k = 0, 1, \dots, n-1$$

نتیجه می‌شود $\sqrt[n]{z}$ دارای n جواب است که به ازای مقادیر مختلف k بدست می‌آیند.

مثال ۱۲: ریشه‌های سوم عدد مختلط $z = 8i$ را بدست آورید.

پاسخ: می‌دانیم $z = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$ بنابراین:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8} e^{i\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{8} \left[\cos\left(\frac{2k\pi + \pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi + \pi}{3}\right) \right]$$

$$\begin{cases} k=0 \Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{8} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \sqrt{3} + i \\ k=1 \Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{8} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = \sqrt{3} - i \\ k=2 \Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{8} \left(\cos \pi + i \sin \pi \right) = -2i \end{cases}$$

مثال ۱۳: حاصل $z = \sqrt{1 + \sqrt{3}i}$ کدام است؟

- (۱) $1 + \sqrt{3}i$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2} + i$ (۴) $\sqrt{2} + i$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ بنابراین:

$$z = \sqrt[2]{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$k=0 \Rightarrow z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

لگاریتم یک عدد مختلط:

برای محاسبه لگاریتم یک عدد مختلط ابتدا آنرا به فرم نمایی می‌نویسیم و سپس از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$$

مثال ۱۴: حاصل عبارت $z = \ln(4 + 4\sqrt{3}i)$ کدام است؟

- (۱) $\ln 2 + \pi i$ (۲) $2 \ln 2 + \frac{\pi}{6} i$ (۳) $\ln 2 + \frac{\pi}{4} i$ (۴) $2 \ln 2 + \frac{\pi}{3} i$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم $4 + 4\sqrt{3}i = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$ بنابراین: $z = \ln(8e^{i\frac{\pi}{3}}) = \ln 8 + \frac{\pi}{3} i = 2 \ln 2 + \frac{\pi}{3} i$

ضرب داخلی و خارجی دو عدد مختلط:

دو عدد مختلط (یا دو بردار) $Z_1 = x_1 + iy_1$, $Z_2 = x_2 + iy_2$ مفروضند. ضرب داخلی Z_2, Z_1 بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_1 \cdot Z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

و ضرب خارجی Z_2, Z_1 بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_1 \times Z_2 = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

زاویه بین دو عدد (بردار) مختلط:

زاویه بین دو عدد مختلط Z_1, Z_2 را می‌توان از یکی از دو رابطه زیر محاسبه نمود:

$$1) \cos \theta = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{|Z_1| |Z_2|} \quad 2) \sin \theta = \frac{Z_1 \times Z_2}{|Z_1| |Z_2|}$$

مثال ۱۵: اگر $z_2 = 3i - 4$, $z_1 = 3 - 4i$ آنگاه حاصل $A = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 \times z_2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{24}$ (۲) $-\frac{7}{24}$ (۳) $-\frac{24}{7}$ (۴) $\frac{24}{7}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = (3)(-4) + (-4)(3) = -24 \\ z_1 \times z_2 = (3)(3) - (-4)(-4) = -7 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 \times z_2} = \frac{-24}{-7} = \frac{24}{7}$$

مثال ۱۶: اگر $z_2 = 3i - 4$, $z_1 = 3 - 4i$ آنگاه زاویه بین دو بردار z_2 و z_1 کدام است؟

- (۱) $\arccos 0/96$ (۲) $\arccos 0/69$ (۳) $\arcsin 0/96$ (۴) $\arcsin 0/69$

پاسخ: گزینه «۱» $\cos \theta = \frac{z_1 \cdot z_2}{|z_1| |z_2|} = \frac{-24}{5 \times 5} = -0/96$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هشتم

۱- مقدار $(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i})^{10}$ برابر است با:

(۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ (۲) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

۲- اگر $a(\cos x + i \sin x) = 1 - i$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{2\pi}{4}$

۳- اگر $z = \frac{1-i}{1+i}$ حاصل $ze^{\frac{\pi}{2}}$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) $-1+i$

۴- یک از کعب‌های عدد $z = \frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$ به کدام صورت است؟

(معماری - سراسری ۷۸)

(۱) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (۲) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

(مکانیک - سراسری ۷۸)

(۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{7\pi}{4}$ (۴) $\frac{3\pi}{4}$

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

(۱) -1 (۲) $1-i$ (۳) 1 (۴) $1+i$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

(۱) $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ (۲) $\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$ (۳) $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ (۴) $\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$

(مکانیک - سراسری ۸۰)

۵- عبارت $(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i})^4$ با کدام گزینه برابر است؟

(۱) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (۲) $-2 - \sqrt{3}i$ (۳) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (۴) $2 + \sqrt{3}i$

(برق - آزاد ۸۱)

۶- چنانچه $z = x + iy$ باشد، آنگاه $|z-2| = 3$ یک دایره است. (۱) یک خط است. (۲) یک دایره است. (۳) یک بیضی است. (۴) دو خط است.

(برق - آزاد ۸۱)

۷- چنانچه $i = \sqrt{-1}$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}$ برابر است با:

(۱) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ (۲) $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$ (۳) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ (۴) $\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$

(برق - آزاد ۸۱)

۸- سه ریشه معادله $x^3 - 2x - 4 = 0$ عبارتند از: (۱) $-1-i, -1+i, -2$ (۲) $1-i, 1+i, 2$ (۳) $-1-i, -1+i, 2$ (۴) $1-i, 1+i, -2$

(برق - آزاد ۸۲)

۹- چنانچه $i = \sqrt{-1}$ و $\frac{2z}{1+i} - \frac{z}{1-i} = \frac{5}{2+i}$ باشد، آنگاه z برابر است با:

(۱) $\frac{1}{3}(1-2i)$ (۲) $\frac{1}{3}(1+2i)$ (۳) $\frac{1}{3}(-1-2i)$ (۴) $\frac{1}{3}(-1+2i)$

(معماری - سراسری ۸۳)

۱۰- مقدار $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{40}$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

(۱) $-2^{19}(1+i\sqrt{3})$ (۲) $2^{19}(1-i\sqrt{3})$ (۳) $-2^{19}(1+i\sqrt{3})$ (۴) $2^{19}(1-i\sqrt{3})$

(مکانیک - سراسری ۸۳)

۱۱- دو عدد a و b ثابت و مختلط‌اند. اگر $aa - az - az + aa = bb - bz - bz + bb$ آنگاه مکان هندسی نقطه $M(x,y)$ متناظر z کدام است؟ (۱) دایره (۲) نیم‌دایره (۳) نقطه ثابت (۴) خط راست

(مکانیک - آزاد ۸۳)

۱۲- مقدار $(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i})^{10}$ برابر است با:

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ (۲) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (۳) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

۱۳- مکان هندسی نقطه M متناظر با عدد مختلط z که در رابطه $z^2 + 2z^2 - 2z = (\bar{z})^2 + 2(\bar{z})^2 - 2(\bar{z})$ صدق کند، کدام است؟

(MBA - سراسری ۸۳)

(۱) سهمی (۲) بیضی (۳) هذلولی (۴) هذلولی متساوی‌الساقین

(برق - آزاد ۸۳)

۱۴- چنانچه $i = \sqrt{-1}$ باشد، آنگاه معادله $|z-i| = 2$:

(۱) یک بیضی است. (۲) یک نقطه است. (۳) یک دایره است. (۴) یک خط است.

(برق - آزاد ۸۳)

۱۵- چنانچه $i = \sqrt{-1}$ و $z = 6e^{\frac{\pi i}{2}}$ باشد، آنگاه $|e^{iz}|$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) $e^{-2\sqrt{3}}$ (۳) ۱ (۴) $e^{-\sqrt{6}}$

(معماری - سراسری ۸۴)

۱۶- معادله $|z-1| + |z+1| = 4$ نمایش دهنده چه شکلی در صفحه مختلط است؟

(۱) خط (۲) بیضی (۳) سهمی (۴) مجموعه تهی

(برق - آزاد ۸۴)

۱۷- چنانچه $i = \sqrt{-1}$ و $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ باشد آنگاه:

(۱) $z^2 = -i$ (۲) $z^2 = 1$ (۳) $z^2 = i$ (۴) $z^2 = -1$

(برق - آزاد ۸۴)

۱۸- چنانچه $i = \sqrt{-1}$ باشد آنگاه یک حل معادله $(\Delta + z)^5 - (\Delta - z)^5 = 0$ برابر است با:

(۱) $\Delta i \tan \frac{\pi}{10}$ (۲) $10i \tan \frac{\pi}{5}$ (۳) $\Delta i \tan \frac{\pi}{5}$ (۴) $10 \tan \frac{\pi}{10}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هشتم

۱- گزینه «۳»

۲- گزینه «۴» ابتدا $Z = 1 - i$ را به فرم قطبی می‌نویسیم. بنابراین:

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = a(\cos x + i \sin x) \Rightarrow a = \sqrt{2}, x = \frac{\pi}{4}$$

۳- گزینه «۴»

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \Rightarrow ze^{\frac{i\pi}{2}} = \frac{1-i}{1+i} \times i = \frac{i-i^2}{1+i} = \frac{i+1}{1+i} = 1$$

۴- گزینه «۲»

$$z = \frac{1+i}{1+i+(1-i)^2} = \frac{1+i}{1+i+1+i^2-2i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+i^2+2i}{1+1} = i \Rightarrow z = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1} \left[\cos \left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} \right) \right] \xrightarrow{k=0} \sqrt[3]{z} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

۵- گزینه «۱»

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \right)^{10} = \left(\frac{re^{\frac{\pi}{3}i}}{re^{-\frac{\pi}{3}i}} \right)^{10} = \left(e^{\frac{2\pi}{3}i} \right)^{10} = e^{\frac{20\pi}{3}i} = e^{\frac{2\pi}{3}i} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

۶- گزینه «۲» به طور کلی $|z - z_0| = r$ معادله یک دایره به مرکز z_0 و شعاع r است.

$$\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i} = \frac{i-1-i+1+i}{1+i} = \frac{i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{i(1-i)}{1-i^2} = \frac{i-i^2}{1+1} = \frac{i+1}{2}$$

۷- گزینه «۱»

۸- گزینه «۳» واضح است که یکی از ریشه‌های معادله برابر ۲ می‌باشد و همچنین مجموع ریشه‌ها برابر صفر است پس فقط گزینه ۳ می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

۹- گزینه «۱»

$$\frac{2z}{1+i} - \frac{2z}{i} = 2z \left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{i} \right) = \frac{2z}{1-i} = \frac{\Delta}{2+i} \xrightarrow{z=x+iy} 2(x+iy)(2+i) = \Delta(1-i) \Rightarrow \begin{cases} 4x-2y = \Delta \\ 2x+4y = -\Delta \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{-3}{2}$$

۱۰- گزینه «۱»

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20} = \left(\frac{re^{\frac{\pi}{3}i}}{re^{-\frac{\pi}{3}i}} \right)^{20} = \left(\sqrt{e^{\frac{2\pi}{3}i}} \right)^{20} = r^{20} e^{\frac{40\pi}{3}i} = r^{20} e^{\frac{4\pi}{3}i} = r^{20} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = r^{20} \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -r^{20} (1+i\sqrt{3})$$

۱۱- گزینه «۱»

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = b\bar{b} \Rightarrow (z-a)(z-\bar{a}) = b\bar{b} \Rightarrow |z-a|^2 = |b|^2$$

۱۲- گزینه «۳»

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \right)^{10} = \left(\frac{re^{\frac{\pi}{3}i}}{re^{-\frac{\pi}{3}i}} \right)^{10} = \left(e^{\frac{2\pi}{3}i} \right)^{10} = e^{\frac{20\pi}{3}i} = e^{\frac{2\pi}{3}i} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

۱۳- گزینه «۳»

$$z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Rightarrow z^2 = x^2 - 2xy^2 + (2x^2y - y^2)i$$

$$z = x + iy \Rightarrow \bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi \Rightarrow \bar{z}^2 = x^2 - 2xy^2 + (y^2 - 2x^2y)i$$

با جایگزینی در رابطه داده شده خواهیم داشت:

$$x^2 - 2xy^2 + (2x^2y - y^2)i + 2(x^2 - y^2 + 2xyi) - 2(x + iy)$$

$$= x^2 - 2xy^2 + (y^2 - 2x^2y)i + 2(x^2 - y^2 + 2xyi) - 2(x - iy)$$

$$\Rightarrow (2x^2y - y^2 + 4xy - 2y)i = (y^2 - 2x^2y - 4xy + 2y)i \Rightarrow y^2 - 2x^2y - 4xy + 2y = 0$$

$$\Rightarrow y(y^2 - 2x^2 - 4x + 2) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ یا } y^2 - 2x^2 - 4x + 2 = 0$$

مکان هندسی موردنظر محور X ها یا یک هذلولی می‌باشد (هذلولی مربوطه متساوی‌الساقین نمی‌باشد زیرا قدرمطلق ضرایب X^2 و Y^2 با هم برابر نیست).

۱۴- گزینه «۳» به طور کلی $|z - z_0| = r$ معادله دایره می‌باشد.

۱۵- گزینه «۲»

۱۶- گزینه «۲» شکل داده شده مکان هندسی نقاطی است که مجموع فاصله آنها از دو نقطه ثابت ۱ و -۱ برابر مقدار ثابت ۴ می‌باشد، که همان بیضی می‌باشد.

$$z = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{\frac{5\pi}{6}i} \Rightarrow z^2 = e^{\frac{5\pi}{3}i} = e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = i$$

۱۷- گزینه «۳»

۱۸- گزینه «۲»

$$(\Delta + z)^\Delta - (\Delta - z)^\Delta = 0 \Rightarrow (\Delta + z)^\Delta = (\Delta - z)^\Delta \Rightarrow \left(\frac{\Delta + z}{\Delta - z} \right)^\Delta = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta + z}{\Delta - z} = \sqrt[\Delta]{1} = e^{\frac{rk\pi}{\Delta}i} \Rightarrow \Delta + z = \Delta e^{\frac{rk\pi}{\Delta}i} - z e^{\frac{rk\pi}{\Delta}i}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\Delta(e^{\frac{rk\pi}{\Delta}i} - 1)}{e^{\frac{rk\pi}{\Delta}i} + 1} = \frac{\Delta(\cos \frac{rk\pi}{\Delta} + i \sin \frac{rk\pi}{\Delta} - 1)}{\cos \frac{rk\pi}{\Delta} + i \sin \frac{rk\pi}{\Delta} + 1} = \frac{1 \cdot \sin \frac{k\pi}{\Delta} (i \cos \frac{k\pi}{\Delta} - \sin \frac{k\pi}{\Delta})}{r \cos \frac{k\pi}{\Delta} (\cos \frac{k\pi}{\Delta} + i \sin \frac{k\pi}{\Delta})} = \Delta \operatorname{itg} \frac{k\pi}{\Delta}$$

تست‌های تکمیلی فصل هشتم

- ۱- زاویه بین دو بردار $Z_1 = 10 + 10\sqrt{3}i$ و $Z_2 = 5\sqrt{3} + 15$ چند درجه است؟
 (۱) 60° (۲) 30° (۳) 90° (۴) صفر
- ۲- اگر $Z_1 = 1 - i$ و $Z_2 = 4i - 2$ باشد، آنگاه مقدار $A = \frac{Z_1 + Z_2 + 1}{Z_1 - Z_2 + i}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{5}{4}$
- ۳- مقدار عبارت مختلط $Z = (2\cos 15^\circ + 2i\sin 15^\circ)^4$ کدام است؟
 (۱) $2 + i\sqrt{3}$ (۲) $16\sqrt{2}$ (۳) $8 + i8\sqrt{3}$ (۴) $8\sqrt{3}$
- ۴- نقطه $A(-2, 0)$ در مختصات قطبی به کدام صورت است؟
 (۱) $(-2, \frac{\pi}{2})$ (۲) $(2, \frac{\pi}{2})$ (۳) $(-2, \pi)$ (۴) $(2, \pi)$
- ۵- تابع مختلط $Z = 800 + 600i$ مفروض است، ریشه سوم این تابع کدام است؟
 (۱) $10\sqrt[3]{53 + 2k\pi}$ (۲) $100\sqrt[3]{12/6 + \frac{2}{3}k\pi}$ (۳) $10\sqrt[3]{53 + 2k\pi}$ (۴) $10\sqrt[3]{17/6 + \frac{2}{3}k\pi}$
- ۶- i برابر است با:
 (۱) $e^{-\pi}$ (۲) $\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$ (۳) $e^{-\frac{\pi}{2}}$ (۴) 0
- ۷- منحنی تغییرات تابع $|z - i| = 3$ کدام است؟
 (۱) خطی است که محورهای مختصات را در نقطه $M(3, -1)$ قطع کند.
 (۲) دایره‌ای به شعاع ۳.
 (۳) یک بیضی است.
 (۴) یک هذلولی است.
- ۸- در معادله مختلط $|z| - z = 1 + 2i$ ، z کدام است؟
 (۱) $2i + \frac{3}{2}$ (۲) $2i - \frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{2} - 2i$ (۴) $2 + \frac{3}{2}i$
- ۹- حاصل عدد مختلط $(\sqrt{3} + i)^2$ کدام است؟
 (۱) $8\sqrt{3} + 8i$ (۲) $8 + 8i$ (۳) 8 (۴) $8i$
- ۱۰- دو نقطه $A \left| \frac{5\pi}{12} \right|$ و $B \left| \frac{3\pi}{4} \right|$ در مختصات قطبی مفروضند، طول پاره خط AB کدام است؟
 (۱) 7 (۲) 8 (۳) 9 (۴) 6
- ۱۱- حاصل $A = \frac{5 + 5i}{3 - 4i} + \frac{20}{4 + 3i}$ کدام است؟
 (۱) $3 + i$ (۲) $3 - i$ (۳) $5 + 5i$ (۴) $5 - 5i$
- ۱۲- حاصل $A = \frac{2(i)^{30} - (i)^{18}}{2i - 1}$ کدام است؟
 (۱) $5 - i$ (۲) $5 + i$ (۳) $1 - i$ (۴) $1 + i$
- ۱۳- اگر $Z_1 = i + 2$ و $Z_2 = 3 - 2i$ حاصل $A = \frac{2Z_2 + Z_1 - 5 - i}{2Z_1 - Z_2 + 3 - i}$ باشد کدام است؟
 (۱) 1 (۲) -1 (۳) 0 (۴) 2
- ۱۴- معادله دایره‌ای به مرکز $(1, 2)$ و به شعاع ۴ کدام است؟
 (۱) $|z + 2 - i| = 4$ (۲) $|z - 2 - i| = 4$ (۳) $|z - 2 - i| = 16$ (۴) $|z + 2 - i| = 16$
- ۱۵- معادله منحنی $P = \frac{2tg\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ در دستگاه دکارتی کدام است؟
 (۱) $y^2 + xy + 3x = 0$ (۲) $y = \frac{x^2}{x - 3}$ (۳) $y = \frac{x^2}{3 - x}$ (۴) $y^2 = 3x + xy$

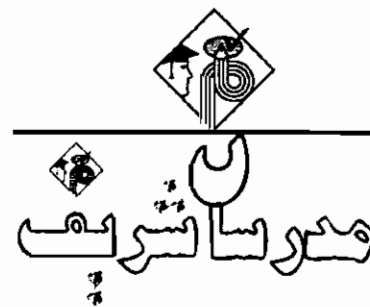
- ۱۶- معادله $\left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 3$ نمودار کدامیک از اشکال زیر است؟
 (۱) دایره (۲) بیضی (۳) هذلولی (۴) پاره خط
- ۱۷- یکی از ریشه‌های معادله $z^2(1-z^2) = 16$ کدام است؟
 (۱) $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}i$ (۲) $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (۳) $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$ (۴) $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- ۱۸- اگر حاصل ضرب دو عدد مختلط برابر صفر شود، آنگاه:
 (۱) هر دو آنها برابر صفرند.
 (۲) حداقل یکی از آنها برابر صفرند.
 (۳) قسمت حقیقی آنها قرینه یکدیگر است.
 (۴) قدر مطلق یکی از آنها برابر صفر است.
- ۱۹- مکان هندسی نقاطی که در رابطه $|z + 2i| + |z - 2i| = 6$ صدق می‌کند کدام است؟
 (۱) دایره (۲) بیضی (۳) هذلولی (۴) پاره خط
- ۲۰- معادله $|z + 2| + |z - 2| = 10$ در دستگاه مختصات دکارتی به کدام صورت است؟
 (۱) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ (۲) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ (۳) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ (۴) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$
- ۲۱- مکان هندسی نقاطی که در رابطه $\text{Im}(z^2) = 4$ صدق می‌کند کدام است؟
 (۱) دایره (۲) بیضی (۳) هذلولی (۴) پاره خط
- ۲۲- یکی از ریشه‌های دوم $z = 8 + 4\sqrt{5}i$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{10} - \sqrt{2}i$ (۲) $\sqrt{2} - \sqrt{10}i$ (۳) $\sqrt{10} + \sqrt{2}i$ (۴) $\sqrt{2} + \sqrt{10}i$
- ۲۳- یکی از ریشه‌های سوم $z = -11 - 2i$ کدام است؟
 (۱) $2 - i$ (۲) $2 + i$ (۳) $1 - 2i$ (۴) $1 + 2i$
- ۲۴- اگر $z = 6e^{\frac{\pi}{2}}$ مقدار $|e^{iz}|$ کدام است؟
 (۱) 1 (۲) $e^{-3\sqrt{2}}$ (۳) $e^{-2\sqrt{2}}$ (۴) $e^{-\sqrt{2}}$
- ۲۵- کدامیک از نامساویهای زیر همواره برقرار است؟
 (۱) $|x| + |y| \leq \sqrt{2}|x + iy|$ (۲) $|x| + |y| \geq \sqrt{2}|x + iy|$ (۳) $|x| + |y| \leq |x + iy|$ (۴) $|x| + |y| \geq |x + iy|$
- ۲۶- رابطه $|z - 1| < |z + 1|$ معادل کدامیک از روابط زیر است؟
 (۱) $\text{Im}(z) < 0$ (۲) $\text{Im}(z) > 0$ (۳) $\text{Re}(z) < 0$ (۴) $\text{Re}(z) > 0$
- ۲۷- مکان هندسی نقاطی که در رابطه $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1$ صدق می‌کند کدام است؟
 (۱) درون یک دایره (۲) درون یک بیضی (۳) ناحیه اول و دوم مختصات به همراه محور x ها (۴) ناحیه اول و چهارم مختصات به همراه محور y ها
- ۲۸- مکان هندسی نقاطی که در رابطه $|z - a| + |z + a| = a^2$ صدق می‌کند کدام است؟
 (۱) دایره (۲) بیضی (۳) لمینکات (۴) دلواری
- ۲۹- فرض کنید $z = 2\cos\theta = z + \frac{1}{z}$ ، در این صورت حاصل $z^2 + \frac{1}{z^2}$ کدام است؟
 (۱) $\cos 4\theta$ (۲) $2\cos 4\theta$ (۳) $\cos^2 \theta$ (۴) $2\cos^2 \theta$
- ۳۰- حاصل $\left(\frac{1 + itg\alpha}{1 - itg\alpha} \right)^n$ برابر کدام است؟
 (۱) $\frac{1 - itg\alpha}{1 + itg\alpha}$ (۲) $\frac{1 + itg\alpha}{1 - itg\alpha}$ (۳) $itg\alpha$ (۴) $1 + itg\alpha$

مالی بهتر از عقل و عبادتی مانند تفکر نیست.

کسی که دارای عزم راسخ است، جهان را مطابق میل خود عوض می‌کند.

«حضرت محمد (ع)»

«گفته»



فصل نهم

« ضمیمه »

توان

❖ تعریف ۱: a به توان n را که به شکل a^n نمایش می‌دهند یعنی اینکه عدد a را n بار در خودش ضرب کنیم، اگر a و b اعداد حقیقی و m و n اعداد صحیح باشند آنگاه روابط زیر را داریم:

۱) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

۴) $(a^m)^n = a^{mn}$

۲) $a^n \times b^n = (ab)^n$

۵) $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

۳) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

۶) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

❖ تذکره ۱: هر عدد به توان یک برابر خود عدد می‌باشد: $a^1 = a$

❖ تذکره ۲: هر عدد غیر صفر اگر به توان صفر برسد برابر یک می‌شود: $a^0 = 1$

رادیکالها

❖ تعریف ۲: عبارتی مانند $\sqrt[n]{a}$ را ریشه n ام a گویند و n را که معمولاً عددی طبیعی می‌باشد فرجه رادیکال می‌نامند.

فضای رادیکالها:

۱) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

۲) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ ($a > 0$)

۳) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

۴) $\sqrt[m]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[mk]{a}$

❖ تذکره ۳: اگر فرجه رادیکال زوج باشد باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد تا رادیکال در مجموعه اعداد حقیقی معنی دار باشد.

❖ تذکره ۴: اگر فرجه رادیکال فرد باشد، عبارت زیر رادیکال منفی نیز می‌تواند باشد.

۱) $\sqrt{۳۶} = ۶$

۲) $\sqrt{-۲۷} = -۳$

۳) $\sqrt{-۱۶} \neq -۴$ مثال

❖ مثال ۱: حاصل عبارت $A = \frac{\sqrt{a} \times \sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{ab^2}$

۲) \sqrt{ab}

۳) $\sqrt{a^2 b}$

۴) هیچکدام

$$A = \frac{\sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2}}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a^2 b^2}}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{ab}} = \sqrt{ab}$$

❖ پاسخ: گزینه «۱»

توجه شود که در صورت کسر برای ضرب کردن، فرجه‌ها برابر نبودند لذا ک.م.م فرجه‌ها را حساب کردیم و عبارت داخل رادیکال را با توجه به فرجه تغییر دادیم.

❖ مثال ۲: حاصل عبارت $A = ۳\sqrt{۵۴} + \sqrt{۱۲} - \sqrt{۱۲۸}$ را بدست آورید.

$$A = ۳\sqrt{۲۷ \times ۲} + \sqrt{۳ \times ۴} - \sqrt{۴^2 \times ۲} = ۶\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۳} - ۴\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۳}$$

❖ پاسخ:

❖ مثال ۳: حاصل عبارت $A = \frac{\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$ کدام است؟ ($x > 0$)

۱) ۱

۲) \sqrt{x}

۳) $\frac{1}{\sqrt{x^2}}$

۴) $\sqrt{x^5}$

❖ پاسخ: گزینه «۳» برای حل اینگونه مسائل باید عبارتهای پشت رادیکال‌های داخل را به زیر رادیکال برد و در نهایت با ضرب فرجه‌ها به یک رادیکال برسیم:

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt{x\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x^2} \times x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{\frac{x}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

اتحادهای جبری

تساوی $f(a) = g(a)$ را وقتی اتحاد گوئیم که به ازای تمام مقادیر a برقرار باشد برای مثال تساوی $(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1$ اتحاد می‌باشد زیرا به ازای تمام مقادیر a برقرار است و تساوی $a^2 - 1 = ۳$ اتحاد نیست زیرا فقط به ازای $a = \pm ۲$ برقرار می‌باشد. انواع اتحادهای مهم که حفظ آنها سرعت محاسبات را در بعضی مسائل افزایش می‌دهد به شرح زیر می‌باشد:

۱) $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm ۲ab$

۶) $(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$

۲) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm ۲b^2 \pm ۲ab$

۷) $a^2 + b^2 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$

۳) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

۸) $a^2 - b^2 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$

۴) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = ۴ab$

۹) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - ۲ab$

۵) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ۲(ab+ac+bc)$

۱۰) $a^2 - b^2 = (a-b)^2 + ۲ab(a-b)$

❖ مثال ۴: اگر $x - \frac{1}{x} = -1$ باشد آنگاه حاصل $A = x^2 - \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

-۲ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

-۴ (۱)

$$A = x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + ۲\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^2 + ۲ \times ۱ \times (-1) = -۴$$

❖ پاسخ: گزینه «۱»

تجزیه عبارتهای جبری:

از کاربردهای تجزیه می‌توان به ساده کردن کسرها و عبارتهای جبری، بدست آوردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ک.م.م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م.ا) اشاره کرد.

❖ مثال ۵: عبارات زیر را تجزیه کنید:

۱) $x^2 - ۲۷ = (x-۳)(x^2 + ۹ + ۳x)$

۳) $x^2 + ۵x + ۶ = (x+۲)(x+۳)$

۲) $x^2 - ۱۶ = (x^2 - ۴)(x^2 + ۴) = (x-۲)(x+۲)(x^2 + ۴)$

۴) $x^2 + ۲x^2 + x = x(x^2 + ۲x + 1) = x(x+1)^2$

❖ مثال ۶: ساده شده عبارت $A = \frac{(x^2 - ۲x^2 + x - ۲)(x^2 + ۳x + ۲)}{(x^2 - ۴)(x^2 - x + 1)}$ کدام است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

(x+1)^2 (۲)

(x+1) (۱)

$$A = \frac{[x^2(x-2) + (x-2)](x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x^2-x+1)} = \frac{(x^2+1)(x-2)(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{(x^2+1)(x+1)}{x^2-x+1} = \frac{(x+1)(x^2+1-x)(x+1)}{(x^2-x+1)} = (x+1)^2$$

❖ پاسخ: گزینه «۲»

گویا کردن مخرج کسرها:

منظور از گویا کردن، حذف رادیکال از مخرج کسر می‌باشد، به طوری که کسر بعد از گویا شدن با کسر قبل از گویا شدن برابر باشد، معمولاً در اینگونه عبارات یکی از جمله‌های طرف دوم اتحادها در مخرج می‌باشد و برای گویا کردن باید صورت و مخرج را در برانتز دوم اتحاد ضرب کرد به مثالهای زیر توجه کنید:

جمله‌ای از اتحاد مزدوج در مخرج کسر می‌باشد.

$$1) \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

جمله‌ای از طرف دوم اتحاد شماره ۸ می‌باشد.

$$2) \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}} = \frac{\text{صورت}}{a-b}$$

$$3) \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$$

بدست آوردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (م.م.ب) و کوچکترین مضرب مشترک (م.م.ک) چند عبارت:

برای بدست آوردن (م.م.ب) دو عبارت پس از تجزیه دو عبارت به حاصلضرب عوامل حاصلضرب عوامل مشترک با کوچکترین توان را بعنوان (م.م.ب) انتخاب می‌کنیم و حاصلضرب عامل‌های مشترک و غیرمشترک با بزرگترین توان را بعنوان (م.م.ک) تعیین می‌کنیم.

مثال ۷: (م.م.ب) و (م.م.ک) بین دو عدد ۲۴ و ۵۴ را تعیین کنید:

پاسخ: $24 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$, $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^3$

(م.م.ب) برابر $2 \times 3 = 6$ و (م.م.ک) برابر $2^2 \times 3^3 = 216$ می‌باشد.

مثال ۸: (م.م.ک) دو عبارت $A = (x^2 - 1)$, $B = (x-1)^2(x+1)^2$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$A = x^2 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) , B = (x-1)^2(x+1)^2$$

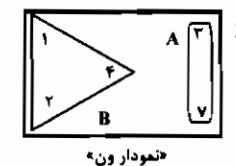
$$\text{م.م.ک} = (x-1)^2(x+1)^2(x^2 + x + 1)$$

مجموعه‌ها

تعریف ۳: مجموعه، عبارت است از یک گروه از اشیاء یا عناصر که کاملاً مشخص باشند، به عبارت دیگر مجموعه، دسته‌ای از اشیاء یا حروف یا اعداد و یا ... می‌باشد که در خاصیتی مشترک هستند، مانند مجموعه اتساهای روی کره زمین، مجموعه اعداد فرد و یا مجموعه دانشجویان رشته برق. برای نشان دادن تعلق یک عضو به یک مجموعه، از علامت \in استفاده می‌کنیم و اگر عنصر متعلق به مجموعه نباشد از نماد \notin استفاده می‌کنیم.

مجموعه مرجع (جهانی):

مجموعه‌ای است مشتمل بر تمام عناصر که برخی از این عناصر در موضوعی خاص، مورد نظر می‌باشند. این مجموعه را با M نشان می‌دهند. بعنوان مثال، اگر نمودار ون زیر را در نظر بگیریم، این نمودار، یک مجموعه مرجع یا جهانی نسبت به مجموعه‌های A و B تلقی می‌شود چون تمام عناصر مجموعه‌های A و B که در زیر نشان داده شده‌اند، در این مجموعه وجود دارند.



$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5\}$$

نمودار ون

مجموعه تهی:

مجموعه‌ای است که فاقد عضو بوده و آنرا با علامت ϕ یا $\{ \}$ نشان می‌دهند. بعنوان مثال، اگر مجموعه جهانی $M = \{1, 2, 3, \dots, 14\}$ را در نظر بگیریم و بخواهیم مجموعه $A = \{x | x > 15\}$ را مطابق با مجموعه جهانی M نشان دهیم، مجموعه A یک مجموعه تهی را تشکیل خواهد داد چون اعضای مجموعه A در M موجود نمی‌باشد. پس A فاقد عضو بوده و آنرا بصورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A = \{ \} \text{ یا } A = \phi$$

زیر مجموعه‌های یک مجموعه:

اگر مجموعه‌ای بنام A داشته باشیم، به هر مجموعه‌ای که کلیه اعضای آن در مجموعه A موجود باشد یک زیر مجموعه از مجموعه A می‌گوییم، بعنوان مثال اگر داشته باشیم:

$$A = \{10, 20, 30, 40, \dots\} , B = \{20, 40, 60, 80\}$$

به مجموعه B ، یک زیر مجموعه A گفته می‌شود، چون تمام اعضای مجموعه B در مجموعه A وجود دارند.

زیر مجموعه بودن یا نبودن را به ترتیب با علامتهای \subset (زیرمجموعه‌ای است از) و $\not\subset$ (زیرمجموعه‌ای نیست از) نشان می‌دهند.

نکته ۱: هر مجموعه، زیر مجموعه خودش محسوب می‌شود. $(A \subset A)$

نکته ۲: مجموعه تهی، زیر مجموعه تمام مجموعه‌ها می‌باشد. $(\phi \subset A)$

نکته ۳: تعداد زیرمجموعه‌های هر مجموعه، 2^n می‌باشد که در آن، n تعداد عضوهای مجموعه می‌باشد، مثلاً اگر مجموعه‌ای ۴ عضو داشته باشد تعداد زیرمجموعه‌های آن $2^4 = 16$ می‌باشد.

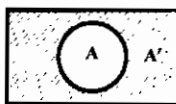
نکته ۴: تعداد زیرمجموعه‌های محض هر مجموعه $2^n - 1$ می‌باشد که در آن، خود مجموعه از تعداد زیرمجموعه‌ها کم می‌شود. مثلاً اگر مجموعه‌ای ۳ عضو داشته باشد تعداد زیرمجموعه‌های محض آن مجموعه $2^3 - 1 = 7$ می‌باشد.

نکته ۵: اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ باشد می‌توان نتیجه گرفت که $A \subset C$ ، یعنی: $(A \subset B, B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

متمم یک مجموعه:

متمم مجموعه‌ای مثل A ، عبارت است از کلیه اعضای متعلق به مجموعه مرجع به غیر از اعضای متعلق به مجموعه A ، متمم A با A' نشان داده می‌شود. بعنوان مثال متمم مجموعه A در نمودار «ون» زیر با هاشور مشخص شده است:

$$A' = \{x | x \in M, x \notin A\}$$



خواص مجموعه‌های متمم:

$$1) A = B \Leftrightarrow A' = B' \quad 2) (A')' = A \quad 3) \phi' = M \quad 4) M' = \phi \quad 5) A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$$

مجموعه‌های هم‌ارز، مساوی و جدا از هم:

اگر تعداد اعضاء دو مجموعه با هم برابر باشند، دو مجموعه را هم‌ارز یا متناظر می‌نامیم و اگر دو مجموعه هم‌ارز اعضایشان نسبت به هم، یک به یک برابر باشند دو مجموعه را مساوی می‌نامیم و اگر دو مجموعه هیچ عضو مشترک نداشته باشند آنها را جدا از هم می‌نامیم. بعنوان مثال اگر مجموعه‌های زیر را داشته باشیم:

$$A = \{2, 3, 10\} , B = \{14, 16, 21\} , C = \{2, 3, 10\}$$

هر سه مجموعه فوق، نسبت به یکدیگر هم‌ارز یا متناظر هستند زیرا تعداد اعضایشان با هم برابر است و دو مجموعه A و C که هم‌ارزند، دو مجموعه مساوی محسوب می‌شوند زیرا اعضایشان نسبت به هم، یک‌به‌یک برابرند ولی دو مجموعه A و B یا دو مجموعه B و C نسبت به یکدیگر دو مجموعه جدا از هم هستند چون هیچ عضو مشترکی با هم ندارند.

اجتماع دو مجموعه:

اجتماع دو مجموعه A و B که به فرم $A \cup B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای است که عناصر آن یا عضوی از A باشند یا عضوی از B و بعبارت دیگر:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

مثال ۹: اجتماع دو مجموعه $A = \{a, \phi\}$ و $B = \{a\}$ چند عضو دارد؟

$$A \cup B = \{a, \phi\}$$

پاسخ: $A \cup B$ دارای دو عضو می‌باشد

خواص اجتماع دو مجموعه:

$$1) A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \quad 2) A \cup A = A \quad 3) A \cup M = M$$

$$4) A \cup A' = M \quad 5) A \cup \phi = A \quad 6) A \cup (A \cap B) = A \quad (\text{قانون جذب})$$

$$7) A \subset (A \cup B) \quad 8) B \subset (A \cup B)$$

اشتراک دو مجموعه:

اشتراک دو مجموعه، عبارت است از مجموعه‌ای که شامل عناصر مشترک دو مجموعه باشد و آنرا با علامت \cap نشان می‌دهند طبق تعریف ریاضی اشتراک دو مجموعه، داریم:



$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ و } x \in B\}$$

خواص اشتراک دو مجموعه:

$$1) A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \quad 5) A \cap \phi = \phi$$

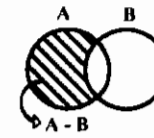
$$2) A \cap A = A \quad 6) A \cap (A \cup B) = A \quad (\text{قانون جذب})$$

$$3) A \cap M = A \quad 7) A \cap (A \cup B \cup C) = A \quad (\text{قانون جذب})$$

$$4) A \cap A' = \phi \quad 8) (A \cap B) \subset A, (A \cap B) \subset B$$

تفاضل دو مجموعه:

تفاضل دو مجموعه، عبارت است از مجموعه عناصری که در مجموعه اول بوده ولی در مجموعه دوم نباشند به عبارت دیگر $A-B$ یعنی عناصری از مجموعه A که در مجموعه B وجود نداشته باشند و طبق تعریف ریاضی تفاضل دو مجموعه، داریم:



$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

خواص تفاضل دو مجموعه:

- ۱) $A - B = A \cap B'$
- ۲) $A - M = \phi$
- ۳) $M - A = A'$
- ۴) $A - \phi = A$
- ۵) $A - A = \phi$
- ۶) $A - A' = A$
- ۷) $(A - B) \subset A, (B - A) \subset B$

حاصلضرب دکارتی دو مجموعه:

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند حاصلضرب دکارتی $A \times B$ بصورت $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ تعریف می‌شود:

به عبارت دیگر، طبق تعریف حاصلضرب دکارتی دو مجموعه عبارتست از مجموعه‌ای که مشتمل بر x هایی از مجموعه A (مجموعه اول) و y هایی از مجموعه B (مجموعه دوم) باشد که اینها تشکیل یک زوج مرتب می‌دهند که عضو اول آن (x) را مختص اول و عضو دوم آن (y) را مختص دوم زوج مرتب می‌گویند. همچنین حاصلضرب دکارتی $B \times A$ نیز بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$B \times A = \{(x, y) | x \in B, y \in A\}$$

مثال ۱۰: اگر داشته باشیم $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{۲, ۴\}$ ، مطلوبست محاسبه $A \times B$ و $B \times A$.

$$A \times B = \{(a, ۲), (a, ۴), (b, ۲), (b, ۴), (c, ۲), (c, ۴)\}$$

$$B \times A = \{(۲, a), (۲, b), (۲, c), (۴, a), (۴, b), (۴, c)\}$$

$\Rightarrow A \times B \neq B \times A$ پاسخ:

* تذکر ۵: ملاحظه می‌شود که در حالت کلی $A \times B \neq B \times A$ می‌باشد.

خواص مجموعه‌ها:

- الف) خاصیت جابجایی $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$
- ب) خاصیت شرکت‌پذیری $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- ج) خاصیت پخشی (نوزیمی) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- د) قوانین دمورگان: $(A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'$

مثال ۱۱: اگر $A \subset B$ باشد آنگاه کدام گزینه درست است؟

- ۱) $B' \subset A'$
- ۲) $A \cap B = \phi$
- ۳) $B' \subset A'$
- ۴) $B \cap A' = \phi$

پاسخ: گزینه «۳» (طبق خاصیت ۵ مجموعه‌های متمم)

مثال ۱۲: اگر $A \cap B = A - B$ باشد، آنگاه A برابر کدام است؟

- ۱) B
- ۲) B'
- ۳) M
- ۴) ϕ

پاسخ: گزینه «۴»

مثال ۱۳: اگر $A \subset B$ باشد، مجموعه $(A - B)' \cap A$ برابر است با:

- ۱) A
- ۲) B'
- ۳) $A \cap B$
- ۴) ϕ

پاسخ: گزینه «۱» اگر $A \subset B$ آنگاه $A - B = \phi$ می‌باشد، لذا داریم:

مثال ۱۴: اگر $A \subset B$ باشد، مجموعه $(A - B)' \cap B$ برابر است با:

- ۱) A
- ۲) B
- ۳) M
- ۴) ϕ

پاسخ: گزینه «۲»

مجموعه‌های عددی:

الف) مجموعه اعداد طبیعی: اعداد $۱, ۲, ۳, ۴, \dots$ را اعداد طبیعی می‌نامند بنابراین اعداد طبیعی که با N نشان داده می‌شود، عبارتست از:

$$N = \{۱, ۲, ۳, ۴, \dots\}$$

مجموعه اعداد طبیعی، خود نیز شامل زیر مجموعه‌هایی بنامهای مجموعه اعداد طبیعی زوج (E) و مجموعه اعداد طبیعی فرد (O) می‌باشد. مجموعه اعداد طبیعی زوج، از ضرب اعداد طبیعی در عدد ۲ بدست می‌آید، بنابراین عبارت خواهد بود از:

$$E = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, \dots\} = \{x | x = 2k, k \in N\}$$

مجموعه اعداد طبیعی فرد نیز بصورت مقابل تعریف می‌گردد:

$$O = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, \dots\} = \{x | x = 2k - 1, k \in N\}$$

ب) مجموعه اعداد حسابی: مجموعه اعداد حسابی با افزودن عدد صفر به مجموعه اعداد طبیعی بدست می‌آید که عبارتست از:

$$I = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \dots\}$$

ج) مجموعه اعداد صحیح: مجموعه اعداد صحیح که دربرگیرنده اعداد صحیح منفی و اعداد حسابی می‌باشد، عبارتست از:

$$Z = \{\dots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \dots\}$$

همچنین مجموعه اعداد صحیح زوج و فرد بصورت زیر بیان می‌گردد.

$$\text{مجموعه اعداد صحیح زوج} = \{\dots, -۶, -۴, -۲, ۰, ۲, ۴, ۶, \dots\} = \{x | x = 2k, k \in Z\}$$

$$\text{مجموعه اعداد صحیح فرد} = \{\dots, -۵, -۳, -۱, ۱, ۳, ۵, \dots\} = \{x | x = 2k + 1, k \in Z\}$$

د) مجموعه اعداد گویا: اگر a و b اعدادی صحیح باشند بطوریکه $b \neq ۰$ باشد، مجموعه اعدادی را که از طریق $\frac{a}{b}$ بدست می‌آیند مجموعه اعداد گویا می‌نامند، یعنی:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

بعنوان مثال، این مجموعه علاوه بر اعداد طبیعی و صحیح، اعدادی مثل $\frac{۳}{۵}$ ، $-\frac{۱}{۶}$ و \dots را نیز شامل می‌شود.

هـ) مجموعه اعداد حقیقی: مجموعه اعداد حقیقی که با R نمایش داده می‌شود، در برگیرنده کلیه اعداد معرفی شده فوق و همچنین اعضای مجموعه $R-Q$ که مجموعه این اعداد را مجموعه اعداد گنگ یا اصم می‌نامند، می‌باشد. بنابراین مجموعه اعداد حقیقی عبارت خواهد بود از مجموعه اعداد گویا و گنگ (اصم): (مجموعه اعداد گویا و گنگ (اصم) $R=$ و داریم:

فاصله:

اگر بخواهیم زیر مجموعه‌های مجموعه اعداد حقیقی را بصورت فاصله نشان دهیم، از علائم باز که با $()$ یا $[]$ مشخص می‌شوند و یا از علائم بسته که با $]]$ نمایش داده می‌شوند، استفاده می‌کنیم. به نمونه‌های زیر توجه کنید.

نمونه ۱) فاصله (a, b) به صورت مقابل نیز تعریف می‌شود:

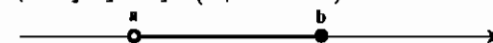
$$(a, b) =]a, b[= \{x | a < x < b\}$$

که در روی محور اعداد، بصورت زیر نمایش داده می‌شود.



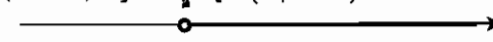
نمونه ۲) فاصله $[a, b]$ بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$[a, b] =]a, b[= \{x | a \leq x \leq b\}$$



نمونه ۳) فاصله باز از a تا $+\infty$ بصورت $(a, +\infty)$ نشان داده می‌شود که عبارتست از:

$$(a, +\infty) =]a, +\infty[= \{x | x > a\}$$



مثال ۱۵: مجموعه‌های زیر را با نماد فاصله بیان کنید.

- الف) $\{x | -۲ \leq x \leq ۵, x \in R\}$
- ب) $\{x | ۳ \leq x < ۱۰, x \in R\}$
- ج) $\{x | x \geq -۳, x \in R\}$
- د) $\{x | x < ۲, x \in R\}$

پاسخ:

- الف) $[-۲, ۵]$
- ب) $[۳, ۱۰[$ یا $[۳, ۱۰)$
- ج) $[-۳, +\infty)$
- د) $]-\infty, ۲[$ یا $(-\infty, ۲)$

معادلات و نامعادلات

معادله یک مجهولی درجه اول:

صورت کلی این معادله به صورت $ax + b = 0$ با شرط $a \neq 0$ است که در این حالت $x = -\frac{b}{a}$ ریشه معادله است.

تعیین علامت عبارت درجه اول $A = ax + b$:

هدف از تعیین علامت یک عبارت جبری آن است که مشخص کنیم به ازای چه مقادیر x عبارت مثبت یا منفی است، مشخص است که علامت عبارت $A = ax + b$ به ازای مقادیر بزرگتر از ریشه معادله $ax + b = 0$

x	$-\frac{b}{a}$
$ax + b$	موافق علامت a مخالف علامت a

موافق علامت ضریب x (a) و به ازای مقادیر کمتر از $-\frac{b}{a}$ مخالف علامت ضریب x است.

نکته ۶: هرگاه عبارتی به صورت حاصلضرب یا خارج قسمت چند عبارت درجه اول باشد، هر یک را جداگانه تعیین علامت نموده و علامتها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌کنیم.

مثال ۱۶: عبارت‌های $A = 2x + 6$ و $B = 4 - 2x$ را تعیین علامت کنید.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$A = 2x + 6$	-	0	+
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$B = 4 - 2x$	+	0	-

۱) $A = 2x + 6 \Rightarrow 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{2} = -2 \Rightarrow$

۲) $B = 4 - 2x \Rightarrow 4 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow$

مثال ۱۷: عبارت $A = \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-1)^2(x+4)}$ را تعیین علامت کنید.

توجه شود که در این مثال چون $(x-1)^2$ یک عبارت همواره مثبت است لذا تاثیری در علامت A ندارد.

x	$-\infty$	-4	2	3	$+\infty$
$x+4$	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	0	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
A	-	+	0	-	+

لازم به توضیح است که نقاط $x = -4$ و $x = 1$ که مخرج کسر را صفر می‌کنند بتوانند نقاط انفصال عبارت محسوب می‌شوند که در فصل دوم کاملاً شرح داده می‌شود.

نتیجه: اگر $x > 3$ یا $2 < x < -4$ آنگاه $A > 0$ خواهد بود.

اگر $x < -4$ یا $x < 2$ یا $2 < x < 3$ آنگاه $A < 0$ خواهد بود.

نکته ۷: در تعیین علامت عبارت جبری از عوامل مضاعف (در مثال قبل $(x-1)^2$) صرف نظر می‌کنیم و بقیه را تعیین علامت می‌کنیم.

نامعادله درجه اول:

نامعادله یک مجهولی درجه اول پس از انتقال دادن همه جمله‌ها به یک طرف نامعادله و ساده کردن به شکل کلی زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ \text{یا} \\ ax + b \geq 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} ax + b < 0 \\ \text{یا} \\ ax + b \leq 0 \end{cases}$$

مثال ۱۸: نامعادله $-\frac{2}{3}x - 1 < \frac{1}{4}x + 4$ را حل کنید.

پاسخ: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x > -5 \Rightarrow 2x > -5 \xrightarrow{\div 2} x > -\frac{5}{2}$

نکته ۸: هرگاه طرفین یک نامساوی را در یک مقدار منفی ضرب و یا تقسیم کنیم جهت نامساوی عوض خواهد شد.

معادله درجه دوم

هر معادله بصورت $ax^2 + bx + c = 0$ که a و b و c اعداد حقیقی هستند با شرط $a \neq 0$ را معادله درجه دوم می‌نامیم. در این معادله مبین (دلتا) به فرم $\Delta = b^2 - 4ac$ بیان می‌شود و داریم:

۱) اگر $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز می‌باشد که از رابطه: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ بدست می‌آید.

۲) اگر $\Delta < 0$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

۳) اگر $\Delta = 0$ معادله ریشه مضاعف دارد: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

نکته ۹: اگر در معادله درجه دوم $a + b + c = 0$ باشد یک ریشه (۱) و ریشه دیگر $(-\frac{c}{a})$ است.

نکته ۱۰: اگر در معادله درجه دوم $a + c = b$ باشد، آنگاه یک ریشه معادله (-۱) و ریشه دیگر $(-\frac{c}{a})$ است.

نکته ۱۱: اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو عدد متوالی باشند آنگاه $\Delta = a^2$ خواهد بود.

نکته ۱۲: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر یک ریشه K برابر ریشه دیگر باشد آنگاه:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(K+1)^2}{K}$$

معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را در نظر بگیرید، داریم:

نکته ۱۳: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش عکس ریشه معادله فوق باشد، به صورت $cx^2 + bx + a = 0$ است.

نکته ۱۴: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش قرینه هر ریشه معادله فوق باشد، به صورت $ax^2 - bx + c = 0$ است.

نکته ۱۵: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش n برابر هر ریشه معادله فوق باشد، به صورت $ax^2 + bnx + cn^2 = 0$ است.

نکته ۱۶: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش مربع هر ریشه معادله فوق باشد به صورت $a^2x^2 + (2ac - b^2)x + c^2 = 0$ است.

مثال ۱۹: کدام معادله زیر ریشه‌هایش ۲ برابر ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ است؟ (مکانیک - آزاد ۸۱)

۱) $x^2 - 5x - 4 = 0$ ۲) $x^2 - 6x - 4 = 0$ ۳) $x^2 + 6x - 4 = 0$ ۴) $x^2 - 5x + 4 = 0$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته ۱۵، در این مثال $n = 2$ می‌باشد.

تشکیل معادله درجه دومی که دو ریشه آن معلوم است: اگر x' و x'' دو ریشه معادله درجه دوم باشند، آنگاه با فرض $S = x' + x''$ و

$P = x' \cdot x''$ معادله درجه دومی که ریشه‌هایش x' و x'' می‌باشند به شکل $x^2 - Sx + P = 0$ بیان می‌شود.

مثال ۲۰: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $1 - \sqrt{2}$ و $1 + \sqrt{2}$ باشد.

$$\begin{cases} S = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2 \\ P = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = -1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

رابطه بین ریشه‌های معادله:

در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} S = x' + x'' = -\frac{b}{a} \rightarrow \text{حاصل جمع دو ریشه} \\ P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a} \rightarrow \text{حاصلضرب دو ریشه} \\ A = |x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \rightarrow \text{قدر مطلق تفاضل دو ریشه} \end{cases} \begin{cases} x'^2 + x''^2 = S^2 - 2P \\ x'^2 + x''^2 = S^2 - 2Sp \\ \sqrt{x'} + \sqrt{x''} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \\ |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \sqrt{S - 2\sqrt{P}} \end{cases}$$

تعیین علامت عبارت $A = ax^2 + bx + c$:

اگر x_1 و x_2 دو ریشه حقیقی معادله فوق باشند آنگاه:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
A	موافق علامت a	مخالف علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a

نکته ۱۷: شرط آنکه عبارت فوق همواره مثبت باشد آن است که: $a > 0, \Delta < 0$

نکته ۱۸: شرط آنکه عبارت فوق همواره منفی باشد آن است که: $a < 0, \Delta < 0$

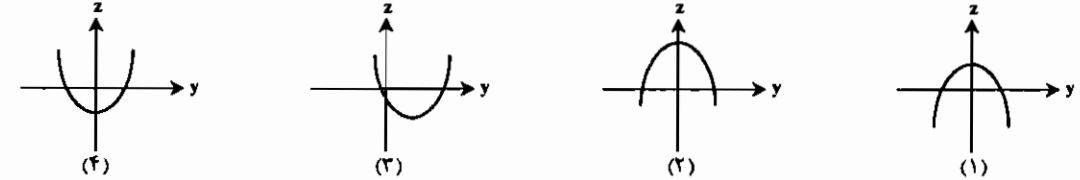
تابع با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید، داریم:

نکته ۱۹: اگر $a > 0$ باشد تابع دارای مینیمم است و اگر $a < 0$ باشد تابع دارای ماکزیمم است.

نکته ۲۰: مختصات نقطه مینیمم یا ماکزیمم $M(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ می‌باشد.

مثال ۲۱: نمودار $z = y^2 - 6y + 5$ به کدام صورت است؟

(برق - سراسری ۷۵)



پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکات فوق چون ضریب y^2 مثبت است لذا نمودار تابع دارای مینیمم است یعنی گزینه‌های ۱ و ۲ اشتباه هستند اما برای بدست آوردن طول نقطه مینیمم داریم:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

لذا با توجه به اینکه طول نقطه مینیمم نمودار گزینه ۴ برابر صفر است نمودار گزینه ۳، مربوط به تابع داده شده می‌باشد.

نکته ۲۱: خط $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن تابع $y = ax^2 + bx + c$ است.

تذکره ۶: در مورد Max و Min توابع در فصول دیگر به طور کامل توضیح داده خواهد شد.

مثال ۲۲: در تابع $y = x^2 - kx + 2$ اگر طول نقطه مینیمم برابر ۲- باشد، مقدار k کدام است؟

(مکانیک - آزاد ۸۱)

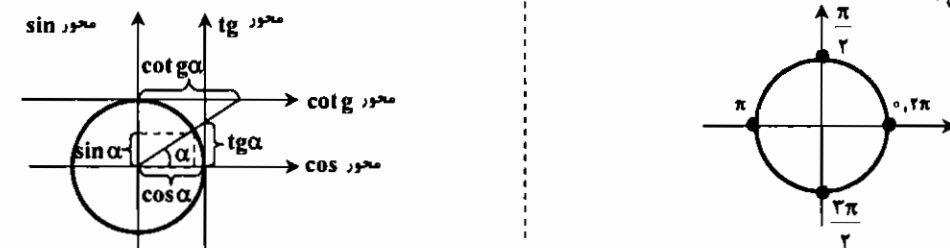
- ۴ (۴) ۲ (۲) -۲ (۳) -۴ (۱)

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نکته ۲۰، طول نقطه مینیمم از رابطه $x = -\frac{b}{2a}$ بدست می‌آید. پس خواهیم داشت:

$$x = \frac{k}{2} = -2 \rightarrow k = -4$$

« مثلثات »

نسبت‌های مثلثاتی:



علامت نسبت‌های مثلثاتی در چهار ربع دایره مثلثاتی در جدول زیر آمده است:

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
Sin x	+	+	-	-
Cos x	+	-	-	+
tg x	+	-	+	-
cot x	+	-	+	-

تذکره ۷: توجه شود که فقط کافی است علامتهای Sin و Cos در چهار ربع حفظ شود، علامتهای tg و cotg که همواره مانند یکدیگر هستند از ضرب علامت Sin و Cos در هم بدست خواهد آمد.

مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای مختلف که باید به خاطر سپرده شود:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
cot x	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

تذکره ۸: واحدهای استفاده شده در جدول فوق برحسب رادیان (R) می‌باشد در صورتی که واحد بر حسب درجه (D) بیان شود از فرمول

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

جهت تبدیل واحدها به یکدیگر استفاده می‌کنیم.

نسبت‌های $\pi \pm \alpha, \pi \pm \alpha, \pi \pm \alpha, \pi \pm \alpha$:

الف) کمان $(-\alpha)$:

1) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ۲) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ۳) $\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg} \alpha$ ۴) $\text{cot}(-\alpha) = -\text{cot} \alpha$

ب) کمان $(\pi - \alpha)$:

1) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ ۲) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ ۳) $\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg} \alpha$ ۴) $\text{cot}(\pi - \alpha) = -\text{cot} \alpha$

ج) کمان $(\pi + \alpha)$:

1) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ ۲) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ ۳) $\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg} \alpha$ ۴) $\text{cot}(\pi + \alpha) = \text{cot} \alpha$

د) کمان $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$:

1) $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$ ۲) $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$ ۳) $\text{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \text{cot} \alpha$ ۴) $\text{cot}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \text{tg} \alpha$

س) کمان $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$:

1) $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$ ۲) $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$ ۳) $\text{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\text{cot} \alpha$ ۴) $\text{cot}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\text{tg} \alpha$

ش) کمان $(2\pi - \alpha)$:

1) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$ ۲) $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$ ۳) $\text{tg}(2\pi - \alpha) = -\text{tg} \alpha$ ۴) $\text{cot}(2\pi - \alpha) = -\text{cot} \alpha$

ن) کمان $(2\pi + \alpha)$:

1) $\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$ ۲) $\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$ ۳) $\text{tg}(2\pi + \alpha) = \text{tg} \alpha$ ۴) $\text{cot}(2\pi + \alpha) = \text{cot} \alpha$

باتوجه به مطالب فوق به نکات زیر جهت یادگیری راحت‌تر توجه فرمایید.

نکته ۲۲: برای tg و cotg مضارب فرد و زوج π حذف می‌شوند. (بعبارت دیگر tang و cotg عبارت بعد از مضارب فرد یا زوج π محاسبه می‌شود و برای Sin و Cos ابتدا یک منفی پشت نسبت قرار داده و سپس مضرب فرد π را حذف می‌کنیم.)

نکته ۲۳: برای Sin و Cos مضارب زوج π حذف می‌شوند. (بعبارت دیگر Sin و Cos عبارت بعد از مضارب زوج π محاسبه می‌شود.)

نکته ۲۴: در تعیین نسبت مثلثاتی کمان ابتدا علامت نسبت مثلثاتی آن کمان را مشخص می‌کنیم، در صورت وجود مضارب فرد

$\frac{\pi}{2}$ Sin را به Cos و tg را به cotg و بالعکس تبدیل می‌کنیم.

مثال ۲۳: مقادیر $\text{tg}(\frac{2\pi}{3} + \alpha), \sin(\pi + \alpha), \cos(\frac{2\pi}{3} - \alpha)$ را تعیین کنید. (α زاویه‌ای حاده می‌باشد)

پاسخ:

۱) $\text{tg}(\frac{2\pi}{3} + \alpha) = -\text{cot} \alpha$	۲) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	۳) $\cos(\frac{2\pi}{3} - \alpha) = \sin \alpha$
--	--	--

مثال ۲۴: اگر $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و انتهای کمان α در ربع دوم باشد آنگاه $\sin(\frac{3\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟ (معماری - سراسری ۸۱)

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه «۲»
چون α در ربع دوم است و $\cos \alpha$ در این ناحیه منفی است $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(\frac{3\pi}{4} + \alpha) = -\cos \alpha = -(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

اما با توجه به نکته ۲۳ داریم:

اتحادهای مهم مثلثاتی:

(۱) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (۲) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

(۳) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ (۴) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cot \alpha = 1, (\alpha \neq \frac{k\pi}{2})$

(۵) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, (\alpha \neq n\pi + \frac{\pi}{2})$ (۶) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, (\alpha \neq n\pi)$

(۷) $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$ (۸) $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$

(۹) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \end{cases}$ (۱۰)

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ (۱۱) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ (۱۲) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

(۱۳) $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ (۱۴) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha$ (۱۵) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

مثال ۲۵: حاصل عبارت $A = \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{5}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۲»
 $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x \xrightarrow{x=\pi/5} A = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\frac{4\pi}{5}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{8}$

مثال ۲۶: اگر $\operatorname{tg} x + \cot x = 3$ باشد حاصل $A = \operatorname{tg}^2 x + \cot^2 x$ کدام است؟ (عمران و معدن - آزاد ۷۶)

(۱) ۱۸ (۲) ۹ (۳) ۲۷ (۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱» بر طبق اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab(a+b)$ داریم:

$\operatorname{tg}^2 x + \cot^2 x = (\operatorname{tg} x + \cot x)^2 - 2 \operatorname{tg} x \cot x = 3^2 - 2 \times 1 \times 3 = 9 - 6 = 3$

مثال ۲۷: اگر $\sin \alpha = \frac{a^2 + 1}{2a^2}$ باشد $\cos 2\alpha$ کدام است؟ (عمران - آزاد ۷۳)

(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) صفر (۴) -۱

پاسخ: گزینه «۴»

$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2(\frac{a^2 + 1}{2a^2})^2 = 1 - 2 \frac{(a^2 + 1)^2}{4a^4} = 1 - \frac{a^4 + 2a^2 + 1}{2a^4} = \frac{2a^4 - a^4 - 2a^2 - 1}{2a^4} = \frac{a^4 - 2a^2 - 1}{2a^4} = -\frac{a^4 + 1}{2a^4}$

$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{a^2 + 1}{2a^2} \leq 1 \Rightarrow a^2 + 1 \leq 2a^2 \Rightarrow (a^2 - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = -1$

نکته ۲۵: اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ باشد آنگاه $(1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{tg} \beta) = 2$

مثال ۲۸: حاصل $(1 + \operatorname{tg} 13^\circ)(1 + \operatorname{tg} 33^\circ)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۴

پاسخ: گزینه «۳» (با توجه به نکته ۲۴)

فرمول‌های نسبت‌های مثلثاتی گمان‌های مجموع و تفاضل:

(۱) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ (۲) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

(۳) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ (۴) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$

فرمول‌های تبدیل مجموع و تفاضل نسبت‌های مثلثاتی به حاصل ضرب نسبت‌ها:

(۱) $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ (۲) $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

(۳) $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ (۴) $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

فرمول‌های تبدیل حاصلضرب نسبت‌های مثلثاتی به حاصل جمع نسبت‌ها:

(۱) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ (۲) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

(۳) $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

مثال ۲۹: حاصل عبارت $A = \frac{\cos 2\alpha + \sin \alpha \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ کدام است؟

(۱) $\operatorname{tg} \alpha$ (۲) $\cot \alpha$ (۳) ۱ (۴) -۱

پاسخ: گزینه «۳»

$A = \frac{\cos 2\alpha - \frac{1}{2} [\cos 2\alpha - \cos \alpha]}{\sin 2\alpha - \frac{1}{2} [\sin 2\alpha + \sin \alpha]} \times \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha} \times \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos 2\alpha + \cos \alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} \times \operatorname{tg} \alpha$
 $= \frac{2 \cos 2\alpha \cos \alpha \times \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin \alpha \cos 2\alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \times \operatorname{tg} \alpha = \cot \alpha \times \operatorname{tg} \alpha = 1$

مثال ۳۰: حاصل $A = \cos(x + \frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{4}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2} \cos 2x$ (۴) $\frac{1}{2} \sin 2x$

پاسخ: گزینه «۳»

$A = \frac{1}{2} [\cos((x + \frac{\pi}{6}) - (x - \frac{\pi}{6})) + \cos((x + \frac{\pi}{6}) + (x - \frac{\pi}{6}))] - \frac{1}{4}$

$A = \frac{1}{2} [\cos(\frac{2\pi}{6}) + \cos 2x] - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{\cos 2x}{2}$

تذکره ۹: توجه شود که اکثر تست‌های مثلثاتی را می‌توان با عددگذاری حل کرد. برای مثال اگر در صورت سؤال $x = 0$ قرار دهیم آنگاه $A = \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos(-\frac{\pi}{6}) - \frac{1}{4}$ که برابر عدد $\frac{1}{2}$ است حاصل می‌شود لذا به ازای $x = 0$ هر گزینه‌ای که حاصلش $\frac{1}{2}$ شد جواب صحیح خواهد بود که تنها گزینه «۳» این شرایط را دارد.

فرمول‌های فرعی:

(۱) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$ (۲) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$

(۳) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - \frac{2}{4} \sin^2 2\alpha$ (۴) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$

(۵) $\cot \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \cot 2\alpha$ (۶) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ (۷) $\operatorname{tg} \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

مثال ۳۱: حاصل $A = \frac{1 - \operatorname{tg} 25^\circ}{1 + \operatorname{tg} 25^\circ} + \frac{1 - \operatorname{tg} 2^\circ}{1 + \operatorname{tg} 2^\circ}$ کدام است؟

(کامپیوتر - آزاد ۷۶)

(۱) $\operatorname{tg} 2^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ$ (۲) $\operatorname{tg} 2^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ$ (۳) $\frac{1 - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ}$ (۴) $\frac{1 - \operatorname{tg} 2^\circ}{1 + \operatorname{tg} 2^\circ}$

پاسخ: گزینه «۱» باتوجه به فرمولهای ۱ و ۲ (فرعی) ملاحظه می‌شود که در این تست $\alpha = 25^\circ$ و $\beta = 2^\circ$ پس داریم:

$A = \operatorname{tg}(45 - 25) + \operatorname{tg}(45 - 2) = \operatorname{tg} 25 + \operatorname{tg} 2$

مثال ۳۲: اگر $A - B = \frac{\pi}{4}$ آنگاه $\cos B - \sin B$ برابر کدام است؟

(۱) $2\sqrt{2} \sin A$ (۲) $\sqrt{2} \sin A$ (۳) $2\sqrt{2} \cos A$ (۴) $\sqrt{2} \cos A$

پاسخ: گزینه «۴» طبق فرمولهای ذکر شده داریم:

$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) \Rightarrow \cos B - \sin B = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - B) = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - A) = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{2} - A) = \sqrt{2} \cos A$

مثال ۳۳: حاصل $A = \operatorname{tg} 2^\circ (1 + \cos 4^\circ)$ برابر کدام است؟

(۱) $\sin 2^\circ$ (۲) $\sin 4^\circ$ (۳) $\cos 2^\circ$ (۴) $\cos 4^\circ$

پاسخ: گزینه «۲»
 $A = \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} \times 2 \cos^2 2^\circ = 2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ = \sin 4^\circ$

چند فرمول فرعی در مورد حاصلضرب عبارات مثلثاتی:

۱) $\sin \alpha \sin(\beta - \alpha) \sin(\beta + \alpha) = \frac{1}{4} \sin 2\alpha$
 ۲) $\cos \alpha \cos(\beta - \alpha) \cos(\beta + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 2\alpha$
 ۳) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\beta - \alpha) \operatorname{tg}(\beta + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha$
 ۴) $\sin \frac{\pi}{2k+1} \times \sin \frac{2\pi}{2k+1} \times \dots \times \sin \frac{k\pi}{2k+1} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2^k}$
 ۵) $\cos \frac{\pi}{2k+1} \times \cos \frac{2\pi}{2k+1} \times \dots \times \cos \frac{k\pi}{2k+1} = \frac{1}{2^k}$
 ۶) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2k+1} \times \operatorname{tg} \frac{2\pi}{2k+1} \times \dots \times \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2k+1} = \sqrt{2k+1}$

مثال ۳۴: حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.

$A = \lambda(\cos 8^\circ)(\cos 4^\circ)(\cos 2^\circ) \xrightarrow[\text{فرمول (۲)}]{\alpha=2^\circ} A = \lambda \times \frac{1}{4} \times \cos 6^\circ = \lambda \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = 1$

$B = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \xrightarrow[\text{فرمول (۵)}]{k=2} B = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$C = \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9} \xrightarrow[\text{فرمول (۴)}]{k=4} C = \frac{\sqrt{2 \times 4 + 1}}{2^2} = \frac{\sqrt{9}}{4} = \frac{3}{4}$

مفهوم Arc

معکوس توابع مثلثاتی را با نماد Arc نمایش می‌دهیم.

منظور از $\operatorname{Arc} \cos \frac{1}{2}$ این است که کسینوس چه زاویه‌ای برابر $\frac{1}{2}$ است (زاویه اصلی). واضح است که $\alpha = \frac{\pi}{3}$ جواب است.

مثال ۳۵: مقدار عددی $A = \operatorname{Sin} \left[\operatorname{Arccos} \left(-\frac{2}{3} \right) \right]$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) -1 (۴) $\frac{\sqrt{7}}{9}$

پاسخ: گزینه «۱»
 $\operatorname{Arccos} \left(-\frac{2}{3} \right) = \alpha \rightarrow \cos \alpha = -\frac{2}{3} \Rightarrow A = \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

توضیح: چون α در ربع دوم قرار دارد $\sin \alpha$ مثبت در نظر گرفته می‌شود.

معادلات مثلثاتی:

فرض می‌کنیم (α) زاویه‌ای معلوم و کمان x زاویه مجهول باشد در حل معادلات پس از انجام عملیات باید آنها را به یکی از فرمهای استاندارد زیر در بیاوریم.

$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha & \rightarrow x = k\pi + \alpha \quad (۳) \\ \cot gx = \cot g\alpha & \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = \cos \alpha & \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \quad (۲) \\ \sin x = \sin \alpha & \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \quad (۱) \end{cases}$

مثال ۳۶: معادله $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$ را حل کنید و جوابهای آن در فاصله $[0, \pi]$ را بدست آورید.

پاسخ: $2 \sin x \cos x = 1 \rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$ جوابهای بین 0 و π $\rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

حالتهای خاص معادلات مثلثاتی:

$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cot x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$
 $\begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$

توضیح: در کلیه عبارات فوق $k \in \mathbb{Z}$ می‌باشد.

مثال ۳۷: معادله $\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$ را حل کنید.

پاسخ: مجموع ضرائب (با فرض $\cos x$ بعنوان مجهول) صفر است، یک ریشه یک و ریشه دیگر $\frac{c}{a}$ می‌باشد.

$\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow \text{غ.ق.ق} \end{cases}$

« لگاریتم »

$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$

تعریف ۴: به ازای هر دو عدد مثبت a و N داریم:

عدد مثبت a ($a \neq 1$) را مبنای لگاریتم می‌نامیم، که اگر مبنای لگاریتم 10 باشد، معمولاً آنرا نمی‌نویسیم.

خواص و قضایای لگاریتم:

(۱) $\log_a a = 1$ (۲) $\log_a 1 = 0$
 (۳) $\log_a M = M$ (۴) $\log_a M.N = \log_a |M| + \log_a |N|$
 (۵) اگر n زوج باشد n با قدر مطلق بیان می‌شود. $\log_a M^n = \frac{n}{m} \log_a N \rightarrow$
 (۶) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a |M| - \log_a |N|$ (۷) $\log_a N = \frac{1}{\log_N a}$
 (۸) $\log_b a . \log_c b = \log_c a$

اگر مبنای لگاریتم عدد نپر ($e \approx 2.7$) باشد آنرا به شکل $L n$ نمایش می‌دهیم.

تعریف کلگاریتم یک عدد:

کلگاریتم عدد مثبت b را با نماد $\operatorname{colog} b$ نمایش می‌دهیم یعنی منفی لگاریتم b .

$\operatorname{colog}_a^b = -\log_a^b$

(کامپیوتر - آزاد ۷۴)

مثال ۳۸: مقدار $A = \frac{1}{\log_3 216} + \frac{1}{\log_2 216}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{6}$

$A = \log_{216} 3 + \log_{216} 2 = \log_{216} 6 = \log_6 6$

پاسخ: گزینه «۱» باتوجه به خاصیت لگاریتم داریم:

مثال ۳۹: معادله $\log(-x) = 3 + \log x^2 + 1$ چه ریشه دارد؟

(۱) هیچ (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

پاسخ: گزینه «۲» باتوجه به فرمول ۵ داریم:

$2 \log |x| + \log(-x) = 3 \rightarrow \log(-x) = 3 \rightarrow 2 \log(-x) = 3 \Rightarrow \log(-x) = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -10^{\frac{3}{2}}$

کمال ۴۰: تعداد ریشه‌های معادله $3^{2x} + 5 \times 3^{2x} + 6 \times 3^x = 0$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۱»

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$3^x = A \rightarrow A^2 + 5A^2 + 6A = 0 \rightarrow A(A^2 + 5A + 6) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3^x = A, A = 0 \Rightarrow 3^x = 0 & \text{غیرممکن} \\ 3^x = A, A = -2 \Rightarrow 3^x = -2 & \text{غیرممکن} \\ 3^x = A, A = -3 \Rightarrow 3^x = -3 & \text{غیرممکن} \end{cases}$$

معادلات لگاریتمی:

برای حل این معادلات باید معادله را به فرم کلی $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ تبدیل کرد و از این تساوی می‌توان نتیجه گرفت $f(x)=g(x)$ که یک معادله ساده قابل حل خواهد بود.

کمال ۴۱: ریشه معادله $(\log x)^2 + \log x + 1 = \frac{y}{\log \frac{x}{10}}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۳»

(۱) $x=2$ (۲) $x=8$ (۳) $x=100$ (۴) $x=10000$

$$\log^2 x + \log x + 1 = \frac{y}{\log x - 1} \Rightarrow \log^2 x - \log^2 x + \log x - \log x + \log x - 1 = y$$

$$\Rightarrow \log^2 x = 8 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100$$

نکته ۲۶: بطور کلی جواب معادلات $\log_a \log_b \log_c \log_d x = A$ که A عدد ثابت است، بصورت $x = d^{c^{b^{a^A}}}$ می‌باشد.

کمال ۴۲: اگر $\log_2 a = \log_3 a$ باشد آنگاه $\log_2 a$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۲»

(۱) $\frac{2}{2(a-1)}$ (۲) $\frac{2}{2(a-1)}$ (۳) $\frac{2}{a-1}$ (۴) $2(a-1)$

$$\log_{1/2} 2 = a \Rightarrow \log_{1/2} 2 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_{1/2} 2^2 \times 2 = \frac{1}{a} \Rightarrow 2 \log_{1/2} 2 + \log_{1/2} 2 = \frac{1}{a} \Rightarrow 2 \log_{1/2} 2 = \frac{1}{a} - 1 \Rightarrow \log_{1/2} 2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - 1 \right)$$

$$\log_{1/2}^2 a = \log_{1/2}^2 2 = 2 \log_{1/2} 2 = 2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) = \frac{1}{a} - 1$$

کمال ۴۳: اگر $\log_2 a = \log_3 a$ باشد مقدار عبارت $A = \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \times \log_3 \frac{\sqrt{2}}{2}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۴»

(۱) $-2a$ (۲) $-a^2$ (۳) $\frac{a}{2}$ (۴) a^2

$$\begin{cases} \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-2} = -2 \log_2 2 = -2a \\ \log_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_3 (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-2}) = \log_3 2^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2} \log_3 2 = -\frac{1}{2} a \end{cases} \Rightarrow A = (-2a) \times \left(-\frac{1}{2} a \right) = a^2$$

کمال ۴۴: حاصل $A = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} \times \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۲»

(۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-2}) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2} \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2 = -\frac{1}{2} \\ \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

«تصادف»

تصادف عددی: عدد ثابت a_1 و عدد ثابت $d \neq 0$ و دنباله‌ای از اعداد را چنان در نظر بگیرید که جمله اول آن a_1 و جمله‌های بعدی هر یک با اضافه کردن مقدار ثابت d به جمله ماقبل بدست آید، چنین دنباله‌ای را تصادف عددی یا حسابی می‌نامیم.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ جمله a_n ام، d قدر نسبت، n تعداد جملات

نکته ۲۷: شرط لازم و کافی برای آنکه سه مقدار a و b و c سه جمله متوالی یک تصادف حسابی باشند آنست که: $2b = a + c$ باشد.

نکته ۲۸: مجموع n جمله اول یک تصادف حسابی: $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ ، $S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$

نکته ۲۹: رابطه بین جمله n ام و m ام یک تصادف عددی به شکل $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$ می‌باشد.

کمال ۴۵: در یک تصادف حسابی $a_7 = 6$ و $a_{13} = 124$ می‌باشد، جمله اول و قدر نسبت این تصادف به ترتیب کدام است؟

(۱) -۵۸ و ۳۲ (۲) -۹ و ۱۶ (۳) ۹۰ و -۶۴ (۴) ۸۴ و -۶۴

پاسخ: گزینه «۱»

$$d = \frac{124 - 6}{13 - 7} = \frac{118}{6} = 19 \frac{2}{3} \rightarrow a_7 = a_1 + 6d \Rightarrow 6 = a_1 + 2 \times 19 \frac{2}{3} \rightarrow a_1 = -58$$

تصادف هندسی: عدد ثابت $t_1 \neq 0$ و عدد ثابت $q (\neq 0 \text{ و } \pm 1)$ را در نظر بگیرید، دنباله‌ای از اعداد را چنان در نظر بگیرید که جمله اول آن t_1 و جمله‌های بعدی آن از ضرب q در جمله ماقبل بدست آید، چنین دنباله‌ای را یک تصادف هندسی می‌نامیم.

جمله n ام یک تصادف هندسی از رابطه $t_n = t_1 q^{n-1}$ محاسبه می‌شود.

نکته ۳۰: شرط لازم و کافی برای آنکه سه مقدار a و b و c سه جمله متوالی یک تصادف هندسی باشند آنست که $b^2 = ac$ باشد.

نکته ۳۱: مجموع n جمله اول یک تصادف هندسی: $S_n = t_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$

نکته ۳۲: رابطه بین جمله n ام و m ام یک تصادف هندسی:

(۱) اگر $n - m$ زوج باشد آنگاه $q = \pm \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$ می‌باشد. (۲) اگر $n - m$ فرد باشد آنگاه $q = \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$ می‌باشد.

کمال ۴۶: در یک تصادف هندسی $t_5 = 162$ و $t_8 = 4374$ مقدار t_3 برابر است با:

(۱) ۲۷ (۲) ۸۱ (۳) ۱۸ (۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۳»

$$\begin{cases} q = \sqrt[3]{\frac{4374}{162}} = \sqrt[3]{27} = 3 \\ t_5 = t_1 q^4 \Rightarrow 162 = t_1 \times 81 \rightarrow t_1 = 2 \rightarrow t_3 = 18 \end{cases}$$

حد مجموع جملات در یک تصادف هندسی با جملات نامحدود:

اگر در یک تصادف هندسی با تعداد جملات نامحدود قدرمطلق قدر نسبت کوچکتر از ۱ باشد ($|q| < 1$) آنگاه حد مجموع جمله‌ها یعنی S برابر است با:

$$S = \frac{t_1}{1 - q}$$

نکات مهم معادله خط

تعریف ۵: اگر $a, b, c \neq 0$ و $ax + by + c = 0$ آنگاه شیب خط برابر می‌باشد.

نکته ۳۳: کلیه خطوطی که به صورت $y = a$ ($a \in \mathbb{R}$) باشند شیب ۰ - صاف است.

نکته ۳۴: کلیه خطوطی که به صورت $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) باشند شیب ∞ است.

نکته ۳۵: کلیه خطوطی که به صورت $ay = bx$ باشند شیب خطشان $\frac{b}{a}$ است.

نکته ۳۶: معادله خطی که از نقطه $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ با شیب m می‌گذرد عبارتند:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

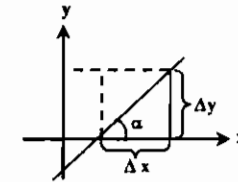
مثال ۴۷: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ بگذرد و شیبش برابر (-2) باشد.

$$y - y_A = m(x - x_A) \rightarrow y - 1 = -2(x - \frac{1}{2}) \rightarrow y = -2x + 2$$

نکته ۳۷: شیب خطی که از دو نقطه $A \left(\frac{x_A}{y_A} \right)$ و $B \left(\frac{x_B}{y_B} \right)$ می‌گذرد برابر است با:

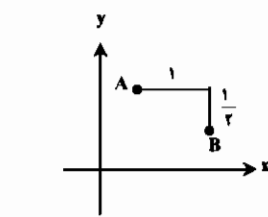
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

نکته ۳۸: شیب یک خط همان تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد یا بعبارت دیگر می‌توان شیب را نسبت تغییرات y به تغییرات x بیان کرد.



$$m = \text{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

مثال ۴۸: در شکل زیر ضریب زاویه خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد کدام است؟



$$m = \text{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{1} = -1$$

- (۱) -2
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) 2

پاسخ: گزینه «۲»

توجه شود که خط گذرنده از دو نقطه A و B دارای شیب منفی می‌باشد.

نکته ۳۹: معادله خطی که از دو نقطه $A \left(\frac{x_A}{y_A} \right)$ و $B \left(\frac{x_B}{y_B} \right)$ می‌گذرد برابر است با:

$$y - y_A = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} (x - x_A)$$

نکته ۴۰: برای آن که دو خط موازی باشند باید شیبهای آن دو خط با هم برابر باشند.

نکته ۴۱: برای آنکه دو خط بر هم عمود باشند باید حاصل ضرب شیبهای دو خط برابر (-1) باشد.

نکته ۴۲: برای آنکه دو خط به معادلات $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ بر هم منطبق باشند باید $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد.

نکته ۴۳: برای تعیین زاویه بین دو خط از فرمول $\text{tg} \alpha = \pm \frac{m - m'}{1 + mm'}$ استفاده می‌کنیم.

برای تعیین مختصات محل برخورد دو خط کافی است معادله دو خط را در یک دستگاه حل نماییم.

مثال ۴۹: مختصات محل تلاقی دو خط به معادله $2x - y = 1$ و $2x + y = 4$ را به دست آورید؟

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = 5 \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{2x - y = 1} A \left(\frac{1}{1} \right) \Rightarrow \text{مختصات محل تلاقی}$$

نکته ۴۴: شرط آنکه سه نقطه $A \left(\frac{x_A}{y_A} \right)$ و $B \left(\frac{x_B}{y_B} \right)$ و $C \left(\frac{x_C}{y_C} \right)$ بر روی یک خط راست واقع باشند آن است که $m_{AB} = m_{AC}$ به عبارت

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$$

مثال ۵۰: به ازای چه مقداری از a سه نقطه $A \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ و $B \left(\frac{2}{5}, 1 \right)$ و $C \left(\frac{2a-1}{6}, 1 \right)$ بر روی یک استقامت واقع می‌باشند.

$$m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \frac{1-1}{\frac{2}{5}-\frac{1}{2}} = \frac{1-1}{\frac{2a-1}{6}-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{0}{-\frac{1}{10}} = \frac{0}{\frac{2a-3}{6}} \Rightarrow 2a-3=4 \Rightarrow a=\frac{7}{2}$$

نکته ۴۵: فاصله نقطه $A \left(\frac{x_A}{y_A} \right)$ از خط D به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته ۴۶: فاصله دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فکتوریل

فکتوریل عددی مانند n را به فرم $n!$ نمایش می‌دهند. $n!$ یعنی حاصلضرب اعداد طبیعی از 1 تا n .

تذکر ۱۰: $n!$ را می‌توان به فرم $(n-1) \times n$ نیز نوشت.

تذکر ۱۱: طبق قرارداد $0! = 1$ می‌باشد.

تذکر ۱۲: روابط $\binom{n}{1} = n, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{0} = 1$ همواره برقرار هستند.

مفهوم ترکیب:

هر گاه در انتخاب k عنصر از n عنصر، ترتیب انتخاب مهم نباشد، ترکیب k از n تعریف می‌شود و آن را با نمادهای C_n^k یا $\binom{n}{k}$ نشان می‌دهیم

و با استفاده از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$A = \frac{\binom{5}{2} \times n!}{\binom{6}{2} \times (n-2)!} \text{ حاصل عبارت } A \text{ کدام است؟}$$

- (۱) $2(n-2)$
- (۲) $n(n-1)$
- (۳) $\frac{n(n-2)}{2}$
- (۴) $\frac{n(n-1)}{2}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 10$$

$$\Rightarrow A = \frac{10 \times (n-2)! \times (n-1) \times n}{2 \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4 \times 3! \times 2 \times 1} = 15$$

مثال ۵۲: اگر مجموعه A دارای ۵ عضو باشد، آنگاه تعداد زیر مجموعه‌های ۲ عضوی آن کدام است؟

- (۱) ۱۰
- (۲) ۲۰
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۵

پاسخ: گزینه «۱» چون ترتیب انتخاب مهم نیست لذا از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 10$$

بسط دوجمله‌ای نیوتن

بسط $(a + b)^n$ به بسط دوجمله‌ای معروف است که فرمول بسط به صورت زیر می‌باشد:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

خواص بسط دوجمله‌ای نیوتن:

(۱) جمله $(k+1)$ ام از فرمول $T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ بدست می‌آید.

(۲) تعداد جملات در بسط فوق $(n+1)$ است.

(۳) در بسط فوق مجموع ضرایب 2^n می‌باشد. به طور کلی در بسط $[f(x)]^n$ برای محاسبه مجموع ضرایب باید $x=1$ قرار داده و مقدار عددی را بدست آوریم.

مثال ۵۳: مجموع جبری ضرایب بسط عبارت $2 + (2x^2 + x^2 - x - 1)^6 + (2x^2 + x - 2)^{99}$ کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۵

پاسخ: گزینه «۴»

$$[2 \times (1)^2 + 1 - 2]^{99} + [2(1)^2 + (1)^2 - 1 - 1]^6 + 2 = 1 + 1 + 2 = 5$$

* تذکر ۱۳: در بسط $(a-b)^n$ مجموع ضرایب صفر و جمله $(k+1)$ ام از رابطه $T_{k+1} = (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ بدست می‌آید.

مثال ۵۴: ضریب x^{-17} در بسط عبارت $(x^4 - \frac{1}{x^3})^{15}$ کدام است؟

- (۱) ۱۳۸۳ (۲) -۱۳۶۵ (۳) -۱۳۸۳ (۴) ۱۳۶۵

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا فرمول جمله $(k+1)$ را می‌نویسیم:

$$T_{k+1} = (-1)^k \binom{15}{k} (x^4)^{15-k} (\frac{1}{x^3})^k = (-1)^k \binom{15}{k} x^{(60-4k)} \cdot x^{-3k} = (-1)^k \binom{15}{k} x^{60-7k} \Rightarrow 60-7k = -17 \Rightarrow k = 11$$

$$\Rightarrow T_{11} = (-1)^{11} \binom{15}{11} x^{-17} = (-1) \times \frac{15!}{(15-11)! \times 11!} x^{-17} = -\frac{15!}{4! \times 11!} x^{-17} = -\frac{11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15}{4 \times 3 \times 2 \times 1} x^{-17} = -1365 x^{-17}$$

مثال ۵۵: در بسط $(a\sqrt{\frac{1}{a}} + \frac{1}{\sqrt{a^2}})^{10}$ جمله مستقل از a جمله چندم است؟ (سیالات - آزاد ۸۱)

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۳ (۴) ۹

پاسخ: گزینه «۲»

$$T_{k+1} = \binom{10}{k} (a^{\frac{1}{2}})^{10-k} (a^{-\frac{1}{2}})^k = \binom{10}{k} a^{\frac{1}{2}(10-k) - \frac{1}{2}k}$$

باید توان a صفر شود تا جمله مستقل از a باشد لذا داریم:

$$\frac{1}{2}(10-k) - \frac{1}{2}k = 0 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow k+1 = 6 \Rightarrow \text{(جمله ششم)}$$

مثال ۵۶: بسط $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[5]{b})^{12}$ چند جمله گویا دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱»

$$T_{k+1} = \binom{12}{k} a^{\frac{12-k}{3}} \cdot b^{\frac{k}{5}}$$

اگر $k = 0, 5, 10$ آنگاه بسط نسبت به b گویا است، فقط اگر $k = 10$ باشد، آنگاه بسط نسبت به a نیز گویا خواهد بود.

توضیح: منظور از گویا بودن صحیح بودن توانهای a و b می‌باشد.

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل نهم

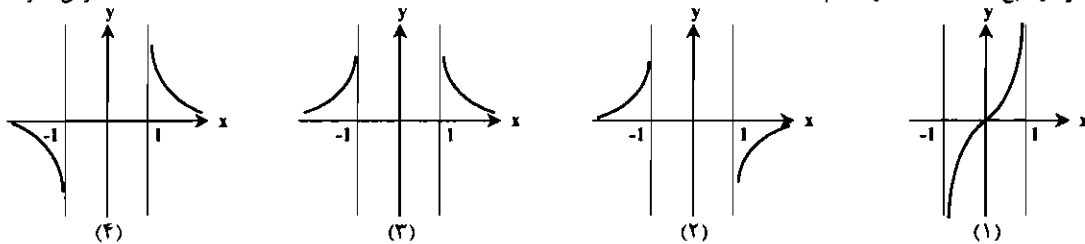
۱- در یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $2\sqrt{3}$ دایره‌ای که بر سه ضلع مماس است را محاط می‌کنیم. مجدداً در سه گوشه مثلث سه دایره را طوری محاط می‌کنیم که بر دو ضلع و دایره اول مماس باشد. مجدداً در سه گوشه باقیمانده مثلث اینکار را بی‌نهایت بار تکرار می‌کنیم. مساحت اشغال شده به وسیله دایره‌های محاطی کلاً چه مقدار است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۸)

- (۱) π (۲) $\frac{3\pi}{2}$ (۳) $\frac{11\pi}{8}$ (۴) $\frac{6\pi}{5}$

۲- اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل $(A \cap B) \cup (A - B)$ کدام مجموعه است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۷۸)

- (۱) A (۲) A^c (۳) B (۴) B^c

۳- نمودار تابع $y = \coth^{-1} x$ کدام است؟ (عمران - آزاد ۸۰)



۴- مقدار $\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x)$ برابر است:

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) π (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) 2π

۵- اگر مجموعه A دارای ۵ عضو و مجموعه B دارای ۶ عضو و $A \cap B$ دو عضو داشته باشد، $A \times B$ چند عضو یا مؤلفه‌های نابرابر دارد؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۶ (۳) ۲۸ (۴) ۳۰

۶- مجموعه x هایی که نامساوی $8 < \frac{3}{\sqrt{x-1}} < 4$ صدق می‌کند، کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)

- (۱) $\{x : \frac{11}{56} < x < \frac{1}{4}\}$ (۲) $\{x : \frac{11}{56} < x < \frac{7}{8}\}$ (۳) $\{x : \frac{1}{4} < x < \frac{24}{7}\}$ (۴) $\{x : \frac{11}{56} < x < \frac{24}{7}\}$

۷- مجموع جواب‌های نامعادله‌های $2 < \frac{4}{3x-2} < 1$ کدام بازه است؟

- (۱) $(\frac{5}{6}, 1)$ (۲) $(\frac{5}{6}, 1)$ (۳) $(\frac{5}{6}, 1)$ (۴) $(\frac{5}{6}, 1)$

۸- مجموع اعضاء دو مجموعه A و B برابر ۸ است. تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه A ، ۴ برابر تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه B است. تعداد اعضاء مجموعه A کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۲)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۱۸

۹- دایره‌ای بر دو خط $2x + 4y - 1 = 0$ و $3x + 4y + 9 = 0$ مماس است. مساحت دایره کدام است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) 4π

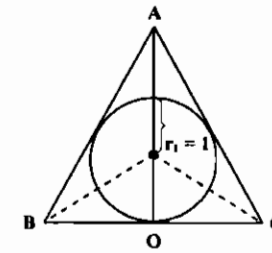
۱۰- در عبارت $(x - \frac{1}{x} + 2)^5$ ، جمله فاقد x چقدر است؟ (MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) -۶۸ (۲) -۶۰ (۳) ۳۲ (۴) ۴۸

۱۱- ضابطه تابع $y = \coth^{-1} x$ با کدام گزینه برابر است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی - سراسری ۸۴)

- (۱) $y = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}$ (۲) $y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ (۳) $y = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2+1}{x^2-1}$ (۴) $y = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل نهم



۱- گزینه «۲» $(OA)^2 = (AC)^2 - (OC)^2 = (2\sqrt{3})^2 - (2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 9 \Rightarrow OA = 3$

$S_1 = \pi r_1^2 = \pi \times (1)^2 = \pi \times 1$

شعاع دایره‌های بعدی $\frac{1}{3}$ شعاع دایره اول $r_1 = \frac{1}{3} r_1$ است: $S_2 = 3 \times \pi \times (r_2)^2 = 3 \times \pi \times (\frac{1}{3})^2 = \frac{\pi}{3}$

شعاع دایره بعدی نیز $\frac{1}{3}$ شعاع دایره دوم است: $r_3 = \frac{1}{3} r_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} r_1 = \frac{1}{9} r_1$

$S = \pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \dots = \frac{\pi}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3\pi}{2}$

بنابراین مجموع مساحتها یک سری هندسی به صورت روبرو خواهد بود:

۲- گزینه «۱» $(A \cap B) \cup (A - B) = (A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B') = A \cap M = A$

۳- گزینه «۴» $\sin^{-1} x = \alpha, \cos^{-1} x = \beta \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta = x \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

۴- گزینه «۳» $\sin^{-1} x = \alpha, \cos^{-1} x = \beta \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta = x \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

۵- گزینه «۳» تعداد عضوهای $A \times B$ برابر $n_A \times n_B$ می‌باشد، لذا $n_{A \times B} = 5 \times 6 = 30$ می‌باشد. اما از آنجائی که $A \cap B$ دارای دو عضو می‌باشد لذا دو عضو مشترک در مجموعه $A \times B$ داریم لذا تعداد عضوهای غیر تکراری مجموعه $A \times B$ ، ۲۸ می‌باشد.

۶- گزینه «۱» $\frac{3}{7x-1} > 4 \Rightarrow 28x - 4 < 3 \Rightarrow x < \frac{1}{4}$
 $\frac{3}{7x-1} < 8 \Rightarrow 56x - 8 < 3 \Rightarrow x > \frac{11}{56}$

۷- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.
 $\frac{4}{3x-2} > 1 \Rightarrow 3x - 2 < 4 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < 2$
 $\frac{4}{3x-2} < 2 \Rightarrow \frac{2}{3x-2} < 1 \Rightarrow 3x - 2 > 2 \Rightarrow x > \frac{4}{3}$

۸- گزینه «۳» $\begin{cases} n(A) + n(B) = 8 \\ n(A) = 4 \times n(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(A) + n(B) = 8 \\ n(A) = 2 + n(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(A) + n(B) = 8 \\ n(A) = n(B) + 2 \end{cases}$
 $n(B) = 3, n(A) = 5$
 از حل دستگاه دو معادله، دو مجهول فوق بدست می‌آید:

۹- گزینه «۱» دو خط داده شده موازی می‌باشند و فاصله آنها برابر است با:
 $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|9 - (-1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$
 $S = \pi r^2 = \pi \times 1^2 = \pi$
 پس قطر دایره موردنظر برابر و بنابراین شعاع آن برابر یک می‌باشد.

۱۰- گزینه «۱» جمله عمومی بسط فوق به صورت $\sum \frac{5!}{a!b!c!} x^a (-\frac{1}{x})^b 2^c$ می‌باشد که در آن $a + b + c = 5$ زمانی جمله فاقد x داریم که $a = b$ باشد. بنابراین:

$a = b = 0, c = 5 \Rightarrow$ مقدار جمله فاقد $x = 32$
 $a = b = 1, c = 3 \Rightarrow$ مقدار جمله فاقد $x = -160$
 $a = b = 2, c = 1 \Rightarrow$ مقدار جمله فاقد $x = 60$
 \Rightarrow کل مقدار جملات فاقد $x = -68$

آزمون (۱)

تعداد سوالات: ۱۵ مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه سطح آزمون: C

۱- تمام برد تابع $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -\frac{1}{4}]$ (۲) $(-\infty, \frac{1}{4}] \cup (0, +\infty)$ (۳) $(-\frac{1}{4}, +\infty)$ (۴) $(-\infty, \infty)$

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{10 - x^2}}{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{5 - x^2}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۳- مشتق تابع $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\cos \sqrt{x}}{4\sqrt{x} \sqrt{\sin \sqrt{x}}}$ (۲) $\frac{\sqrt{\cos \sqrt{x}}}{4\sqrt{x} \sqrt{\sin \sqrt{x}}}$ (۳) $\frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}$ (۴) $\frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \sqrt{\sin \sqrt{x}}}$

۴- هرگاه $y = x|x|$ در این صورت y' کدام است؟

- (۱) $2|x|$ (۲) $|x|$ (۳) $\frac{2|x|}{x}$ (۴) $\frac{|x|}{x}$

۵- فرض کنید $\begin{cases} x = a(\theta + \sin \theta) \\ y = a(1 + \cos \theta) \end{cases}$ در این صورت $\frac{d^2y}{dx^2}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{a}{y^2}$ (۲) $-\frac{a}{y^2}$ (۳) $-\frac{a}{y}$ (۴) $\frac{a}{y^2}$

۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot gx}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ∞

۷- مقدار تقریبی $\sqrt[3]{33}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{2}{40}$ (۲) $\frac{1}{80}$ (۳) $\frac{1}{40}$ (۴) $\frac{1}{80}$

۸- معادله خط مماس بر منحنی $xy = 1$ در نقطه $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ کدام است؟

- (۱) $-x + 9y - 6 = 0$ (۲) $x + 9y - 6 = 0$ (۳) $-x - 9y - 6 = 0$ (۴) $x - 9y + 6 = 0$

۹- تحت مماس بر منحنی $y = be^{\frac{x}{a}}$ چقدر است؟

- (۱) $2|a|$ (۲) $a|a|$ (۳) $\frac{|a|}{2}$ (۴) $|a|$

۱۰- حاصل $\int \frac{1 + 2 \sin x}{\cos^2 x} dx$ کدام است؟

- (۱) $\lg x + \frac{1}{\cos x} + c$ (۲) $\lg x + \cos \sec x + c$ (۳) $\lg x + 2 \cot gx + c$ (۴) $\lg x + 2 \sec x + c$

۱۱- حاصل $\int \frac{dt}{\sin^2(\frac{\pi}{4} - t)}$ چقدر است؟

- (۱) $\cot g(\frac{\pi}{4} - t) + c$ (۲) $\lg(\frac{\pi}{4} - t)$ (۳) $\lg(\frac{\pi}{4} - 2t)$ (۴) $\cot g(\frac{\pi}{4} + t) + c$

آزمون (۲)

تعداد سوالات: ۱۵

مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه

سطح آزمون: C

۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left| \frac{Ax-2}{2x-1} - \frac{4x^2+1}{4x^2-1} \right|$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) $-\frac{1}{4}$

۲- فرض کنید $y = \ln\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}\right)$ در این صورت y' کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\cos 2x}$
- (۲) $\frac{2}{\cos 2x}$
- (۳) $-\frac{2}{\cos 2x}$
- (۴) $-\frac{1}{\cos 2x}$

۳- اگر $y = \sqrt{x-2}\sqrt{x-2}\sqrt{x-2}\sqrt{x-2}\dots$ آنگاه $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{1+y}$
- (۲) $\frac{2}{1+y}$
- (۳) $\frac{1}{2(1+y)}$
- (۴) $1 + \frac{y+1}{x-2}$

۴- مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱۰ متر، وقتی طول اضلاع آن با سرعت ۳ متر در ثانیه افزایش می‌یابد، با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

- (۱) $15\sqrt{3}$
- (۲) $5\sqrt{3}$
- (۳) $3\sqrt{3}$
- (۴) $10\sqrt{3}$

۵- معادله خط مماس بر منحنی $x^2 + 4y^2 - 4x = 0$ در نقطه $(4, 0)$ کدام است؟

- (۱) $y = 2$
- (۲) $x = 2$
- (۳) $x = 4$
- (۴) $y = 4$

۶- تابع $y = \frac{\sin x}{x}$ در فاصله $0 < x < \frac{\pi}{2}$ است.

- (۱) نزولی
- (۲) صعودی
- (۳) نه صعودی و نه نزولی
- (۴) در فاصله $0 < x < \frac{\pi}{4}$ صعودی

۷- حاصل $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}x + \cot gx}$ برابر است با:

- (۱) $-\frac{1}{2} \cos 2x + c$
- (۲) $\frac{\cos 2x}{2} + c$
- (۳) $-\frac{1}{2} \cos 2x + c$
- (۴) $\frac{\cos 2x}{2} + c$

۸- مساحت ناحیه $\{(x, y) | x^2 \leq y \leq |x|\}$ برابر است با:

- (۱) ۳
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{1}{6}$

۹- مختصات قطبی قرینه نقطه $M(r, \theta)$ نسبت به قطب کدام است؟

- (۱) $(r, \pi - \theta)$
- (۲) $(-r, \theta + \pi)$
- (۳) $M(r, \theta - \pi)$
- (۴) $M(r, \theta + \pi)$

۱۰- دامنه تعریف تابع $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}} + \sqrt{\sin x}$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2)$
- (۲) $(0, 2)$
- (۳) $[0, \frac{2}{3})$
- (۴) $R - \{1, 2\}$

۱۱- مشتق مرتبه n ام $\begin{cases} x = \operatorname{Lnt} \\ y = 1/t \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{(-1)^{2n}}{t}$
- (۲) $\frac{(-1)^n}{t}$
- (۳) $\frac{(-1)^n}{t^2}$
- (۴) $\frac{(-1)^{2n}}{t^2}$

۱۲- مقدار $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{9+16\cos^2 x}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\pi}{15}$
- (۲) $\frac{\pi}{30}$
- (۳) $\frac{\pi}{20}$
- (۴) $\frac{\pi}{10}$

۱۳- مختصات قطبی نقطه $A(1, -\sqrt{3})$ کدام است؟

- (۱) $A(2, \frac{\pi}{3})$
- (۲) $A(2, \frac{4\pi}{3})$
- (۳) $A(2, \frac{5\pi}{3})$
- (۴) $A(2, \frac{2\pi}{3})$

۱۴- دوره تناوب تابع $y = \log \cos 2x$ برابر است با:

- (۱) π
- (۲) $\frac{\pi}{2}$
- (۳) 2π
- (۴) $\frac{\pi}{3}$

۱۵- دنباله $a_n = \frac{\log(n^5+1)}{\log(n^2+1)}$ دنباله‌ای است

- (۱) نزولی و همگرا
- (۲) نزولی و واگرا
- (۳) صعودی و همگرا
- (۴) صعودی و واگرا

آزمون (۳)

تعداد سوالات: ۱۵

مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه

سطح آزمون: B

۱- تمام برد تابع $y = \log(1 + \sin \sec^{-1} \sin x)$ کدام است؟

- (۱) $R - \{0\}$ (۲) $\{0\}$ (۳) $\{0, 1\}$ (۴) R^-

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x - \cos(\text{Arcsin } x)}{1 - \text{tg}(\text{Arcsin } x)}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (۳) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳- فرض کنید $x^m y^n = (x+y)^{m+n}$. آنگاه $\frac{dx}{dy}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{x}{y}$ (۲) $\frac{y}{x}$ (۳) $-\frac{x}{y}$ (۴) $-\frac{y}{x}$

۴- اگر $(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n$. آنگاه مقدار عبارت $C_0 + 2C_1 + 2C_2 + \dots + (n+1)C_n$ چقدر است؟

- (۱) $(n+2)2^{n-1}$ (۲) $(n+1)2^{n+2}$ (۳) $(n+2)2^{n+1}$ (۴) $(n+1)2^{n-1}$

۵- فرض کنید $y = \sin(\sin x)$. در این صورت $y'' + y' \text{tg} x$ کدام است؟

- (۱) $2y \cos^2 x$ (۲) $-2y \cos^2 x$ (۳) $y \cos^2 x$ (۴) $-y \cos^2 x$

۶- مقدار حد $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\text{Ln} 2x} - \frac{2x}{2x-1} \right)$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۷- مقدار تقریبی $(1/999)^9$ کدام است؟

- (۱) $62/5$ (۲) $64/808$ (۳) $62/808$ (۴) $63/808$

۸- معادله خط مماس بر منحنی $x = \sqrt{t}$ و $y = t - \frac{1}{\sqrt{t}}$ در $t = 4$ کدام است؟

- (۱) $-17x - 4y + 20 = 0$ (۲) $-17x + 4y - 20 = 0$ (۳) $17x - 4y - 20 = 0$ (۴) $17x + 4y + 20 = 0$

۹- کدامیک از روابط زیر در فاصله $0 < x < \frac{\pi}{2}$ برقرار است؟

- (۱) $\sin x + \cos x < 2x$ (۲) $\sin x + \text{tg} x > 2x$ (۳) $\sin x + \text{tg} x < 2x$ (۴) $\sin x + \cos x > 2x$

۱۰- حاصل $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$ کدام است؟

- (۱) $\text{tg} x - \sec x - x + c$ (۲) $x + \sec x - \text{tg} x + c$ (۳) $x + \text{tg} x + c$ (۴) $\text{tg} x - x + \sec(x) + c$

۱۱- حاصل $\int e^x (1 + \text{tg} x + \text{tg}^2 x) dx$ کدام است؟

- (۱) $-e^x + e^x \text{tg} x$ (۲) $e^x \text{tg} x + c$ (۳) $x e^x + \text{tg} x$ (۴) $e^x - e^x \text{tg} x + c$

۱۲- حاصل $\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{4} \text{Ln} \frac{x^2-1}{x^2} + c$ (۲) $\frac{1}{4} \text{Ln} \frac{x^2-1}{x^2} + c$ (۳) $\frac{1}{2} \text{Ln} \frac{x^2-1}{x^2} + c$ (۴) $\frac{1}{2} \text{Ln} \frac{x^2-1}{x^2} + c$

۱۲- حاصل $\int \sqrt{x} \sqrt{5x\sqrt{x}+3} dx$ برابر است با:

- (۱) $\frac{(\Delta x \sqrt{x} + 3)^{\frac{2}{3}}}{5} + c$ (۲) $\frac{(\Delta x \sqrt{x} + 3)^{\frac{2}{3}}}{4} + c$ (۳) $\frac{1}{10} (\Delta x \sqrt{x} + 3)^{\frac{2}{3}} + c$ (۴) $\frac{2(\Delta x \sqrt{x} + 3)^{\frac{2}{3}}}{5} + c$

۱۳- یکی از ریشه‌های دوم عدد $z = -15 - 8i$ کدام است؟

- (۱) $1 + 4i$ (۲) $-1 - 4i$ (۳) $2 + 4i$ (۴) $1 - 4i$

۱۴- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۵- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\text{Ln} 2x}$ برابر است با:

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) e

آزمون (۴)

سطح آزمون: B

مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه

تعداد سوالات: ۱۵

۱- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^{2x} - 1)(a^x - 1)}{x \operatorname{tg} x}$ برابر است با:

- (۱) Lna
- (۲) $\frac{1}{2} \operatorname{Ln}^2 a$
- (۳) $2 \operatorname{Ln}^2 a$
- (۴) $2 \operatorname{Lna} + 1$

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ برابر است با:

- (۱) e^{-2}
- (۲) $-e$
- (۳) e
- (۴) e^{-1}

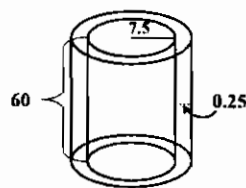
۳- فرض کنید $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ در این صورت $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{1+x^2}$
- (۲) $\frac{-1}{(1+x)^2}$
- (۳) $\frac{1}{(1+x)^2}$
- (۴) $-\frac{1}{1+x^2}$

۴- مقدار حد $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\operatorname{tg} x} \operatorname{tg} 2x$ چقدر است؟

- (۱) صفر
- (۲) $\frac{1}{22}$
- (۳) ۲
- (۴) ۱

۵- با توجه به شکل مقابل و مقادیر داده شده، مقدار تقریبی حجم محصور مابین دو استوانه چقدر است؟



- (۱) $375\pi \text{ cm}^3$
- (۲) $225\pi \text{ cm}^3$
- (۳) $500\pi \text{ cm}^3$
- (۴) $112/5\pi \text{ cm}^3$

۶- تابع $y = x(x+1)(x+2)$ در کدامیک از موارد زیر نزولی است؟

- (۱) $|x+1| < \frac{1}{\sqrt{3}}$
- (۲) $|x + \frac{1}{\sqrt{3}}| < 1$
- (۳) $|x + \frac{2}{\sqrt{3}}| < 1$
- (۴) $|x+1| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

۷- حاصل $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} dx$ برابر است با:

- (۱) $\operatorname{Ln} |\cos(\frac{\pi}{4} + x)| + c$
- (۲) $\operatorname{Ln} \sin(\frac{\pi}{4} + x) + c$
- (۳) $\operatorname{Ln} |\sin(\frac{\pi}{4} - x)| + c$
- (۴) $\operatorname{Ln} |\cos(\frac{\pi}{4} - x)| + c$

۸- حاصل $\int \sec^2 x dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + c$
- (۲) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + c$
- (۳) $\frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg} x + c$
- (۴) $\operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + c$

۹- حاصل $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{1+\sqrt{\operatorname{tg} x}} dx$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{\pi}{6}$
- (۲) $\frac{\pi}{3}$
- (۳) $\frac{\pi}{4}$
- (۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۳- مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x + \cos^2 x}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$
- (۲) $\frac{\pi}{3}$
- (۳) $\frac{\pi}{6}$
- (۴) $\frac{\pi}{8}$

۱۴- مساحت درون بیضی $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$ کدام است؟

- (۱) π
- (۲) 2π
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) 4π

۱۵- حاصل $\int_{-1}^1 |x^2| dx$ چقدر است؟

- (۱) $10 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$
- (۲) $10 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
- (۳) $10 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$
- (۴) $10 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

آزمون (۵)

تعداد سوالات: ۱۵

مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه

سطح آزمون: B

۱- تمام برد تابع $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4}$ کدام است؟

- (۱) $(-\frac{1}{2}, 2]$
- (۲) $[\frac{1}{2}, 2)$
- (۳) $[\frac{1}{2}, 2]$
- (۴) $(-\frac{1}{2}, 2)$

۲- مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cosec} x - 1}{\cot^2 gx}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$
- (۲) صفر
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) ∞

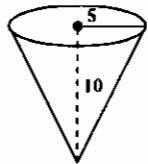
۳- مشتق تابع $y = \operatorname{Arctg}(\frac{2+3\operatorname{tg}x}{3-2\operatorname{tg}x})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}$
- (۲) ۳
- (۳) $\frac{2}{1+(3-2\operatorname{tg}x)^2}$
- (۴) ۱

۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2 \operatorname{Ln}(1 + \frac{1}{x}))$ برابر است با:

- (۱) ۱
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) -۱
- (۴) $-\frac{1}{2}$

۵- مخروطی به شکل مقابل در نظر بگیرید، که آب با سرعت ۴ متر مکعب در ثانیه به آن وارد می‌شود. سرعت بالا آمدن آب در لحظه‌ای که ارتفاع آب ۶ متر می‌باشد چقدر است؟



- (۱) $\frac{4}{9\pi}$
- (۲) $\frac{9}{2\pi}$
- (۳) $\frac{9\pi}{4}$
- (۴) $\frac{2}{9\pi}$

۶- معادله خط مماس بر بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ در نقطه (x_1, y_1) واقع بر بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$
- (۲) $\frac{xx_1}{a} - \frac{yy_1}{b} = 1$
- (۳) $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$
- (۴) $\frac{xx_1}{a} + \frac{yy_1}{b} = 1$

۷- حاصل $\int \frac{\operatorname{Ln} x}{(1+\operatorname{Ln} x)^2} dx$ برابر است با:

- (۱) $\frac{2x}{1+\operatorname{Ln} x} + c$
- (۲) $\frac{2x}{1-\operatorname{Ln} x}$
- (۳) $\frac{x}{1+\operatorname{Ln} x} + c$
- (۴) $\frac{x}{1-\operatorname{Ln} x} + c$

۸- حاصل انتگرال $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{3} \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c$
- (۲) $\frac{1}{3} \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}-1} \right| + c$
- (۳) $\operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c$
- (۴) $\operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}-1} \right| + c$

۹- حاصل $\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx$ چقدر است؟

- (۱) $(b+a) \frac{\pi}{2}$
- (۲) $(b+a)\pi$
- (۳) π
- (۴) $(\frac{b-a}{2})\pi$

۱۰- حاصل $\int_{-1}^2 |(x-1)(x-2)| dx$ برابر است با:

- (۱) ۲
- (۲) ۴
- (۳) $\frac{2}{5}$
- (۴) ۵

۱۱- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(n^2+k^2)}$ چقدر است؟

- (۱) $\operatorname{Ln} 2$
- (۲) $\frac{2}{3} \operatorname{Ln} 2$
- (۳) $\frac{1}{3} \operatorname{Ln} 2$
- (۴) $\frac{1}{2} \operatorname{Ln} 2$

۱۲- مقدار مساحت محصور درون منحنی $ay^2 = x^2(a-x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{15} a^2$
- (۲) $\frac{16}{15} a^2$
- (۳) $\frac{2}{15} a^2$
- (۴) $\frac{8}{15} a^2$

۱۳- نقطه‌ای روی مسیر $y = x(8-x)$ طوری حرکت می‌کند که طولش با زمان طبق قانون $x = 4\sqrt{t}$ تغییر می‌کند. میزان تغییر عرض در نقطه (۷ و ۱) چقدر است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$
- (۲) ۱۸
- (۳) ۳
- (۴) ۹

۱۴- مساحت داخل دلنمای $r = a(1 - \cos \theta)$ برابر است با:

- (۱) $\frac{2\pi a^2}{3}$
- (۲) $2\pi a^2$
- (۳) $\frac{2\pi a^2}{4}$
- (۴) $\frac{2\pi a^2}{2}$

۱۵- در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ کدام گزاره صحیح است؟

- (۱) سری همگرانی مشروط دارد
- (۲) سری همگرانی مطلق دارد
- (۳) سری واگراست
- (۴) هیچکدام

آزمون (۶)

تعداد سوالات: ۱۵ مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه سطح آزمون: B

۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-\sqrt{x}}{(\arccos x)^2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) $-\frac{1}{2}$
- (۴) $\frac{1}{2}$

۲- اگر $e^x + e^y = e^{x+y}$ ، آنگاه $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{e^y(1-e^y)}{e^x(e^x-1)}$
- (۲) $\frac{e^x(1+e^y)}{e^y(e^x+1)}$
- (۳) $\frac{e^x(1-e^y)}{e^y(e^x-1)}$
- (۴) $\frac{e^y(1+e^y)}{e^x(e^x+1)}$

۳- اگر $y = (x + \sqrt{1+x^2})^m$ ، آنگاه $xy' + y''$ برابر است با:

- (۱) my
- (۲) mxy
- (۳) m^2y
- (۴) $\frac{m^2y}{x}$

۴- به ازای چه مقادیر a و b رابطه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+a \cos x) - b \sin x}{x^2} = 1$ برقرار است؟

- (۱) $a = \frac{3}{2}, b = \frac{-5}{2}$
- (۲) $a = \frac{-2}{2}, b = \frac{-5}{2}$
- (۳) $a = -\frac{2}{2}, b = \frac{5}{2}$
- (۴) $a = \frac{2}{2}, b = \frac{5}{2}$

۵- مقدار تقریبی $f(x) = \frac{1}{x^2}$ وقتی $x = 2/0.4$ برابر است با:

- (۱) $0/0.535$
- (۲) $0/0.565$
- (۳) $0/0.545$
- (۴) $0/0.575$

۶- عمده تحت مماس بر منحنی $\begin{cases} x = a(\theta + \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$ در $\theta = \frac{\pi}{3}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
- (۲) $\frac{a}{2}$
- (۳) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
- (۴) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

۷- حاصل $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}((x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}) + c$
- (۲) $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + c$
- (۳) $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}} - 2(x-1)^{\frac{2}{3}} + c$
- (۴) $\frac{1}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + c$

۸- حاصل $\int \cos \sqrt{x} dx$ چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{x}(\sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}) + c$
- (۲) $\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + c$
- (۳) $2(\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}) + c$
- (۴) $2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x} + c$

۹- مقدار $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\pi}{4}$
- (۲) $\frac{\pi}{6}$
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) $\frac{\pi}{3}$

۱۰- مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sqrt{\sin x} dx$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{16}{65}$
- (۲) $\frac{64}{65}$
- (۳) $\frac{24}{65}$
- (۴) $\frac{24}{65}$

۱۰- مقدار $\int_1^e \frac{e^x(1+x \ln x)}{x} dx$ چقدر است؟

- (۱) $e^e - 1$
- (۲) $e^e + 1$
- (۳) $e^e + e$
- (۴) e^e

۱۱- منحنی $y = x^2 e^{-x}$ چند مجانب دارد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۰

۱۲- مختصات مرکز ثقل ربع دایره $x^2 + y^2 \leq r^2$ واقع در ناحیه اول مختصات کدام است؟

- (۱) $(\frac{2r}{2\pi}, \frac{2r}{2\pi})$
- (۲) $(\frac{4r}{2\pi}, \frac{4r}{2\pi})$
- (۳) $(\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi})$
- (۴) $(\frac{2r}{4\pi}, \frac{2r}{4\pi})$

۱۳- حد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) $+\infty$
- (۳) ۱
- (۴) حد ندارد.

۱۴- اگر دنباله‌های $\{a_n\}, \{b_n\}$ واگرا باشند، در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

- (۱) دنباله $\{a_n b_n\}$ همگراست.
- (۲) دنباله $\{a_n b_n\}$ واگراست.
- (۳) دنباله $\{a_n + b_n\}$ واگراست.
- (۴) هیچکدام

۱۵- طول منحنی نمایش $\rho = \sin^2 \frac{\theta}{3}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$
- (۲) $\frac{2\pi}{4}$
- (۳) $\frac{4\pi}{3}$
- (۴) $\frac{2\pi}{2}$

آزمون (۷)

سطح آزمون: B

مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه

تعداد سوالات: ۱۵

۱- تمام برد تابع $y = \log_7(\sqrt{4-x} + \sqrt{x-6})$ کدام است؟

- (۱) $[-\frac{1}{7}, 1]$ (۲) $(-\frac{1}{7}, 1]$ (۳) $(-\frac{1}{7}, 1)$ (۴) $[-\frac{1}{7}, 1)$

۲- اگر $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = a(x-y)$ ، آنگاه $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+y^2}}$ (۲) $-\frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ (۳) $\frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ (۴) $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+y^2}}$

۳- اگر $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n$ ، آنگاه مقدار عبارت $C_1 + 2^2C_2 + 3^2C_3 + \dots + n^2C_n$ برابر است با:

- (۱) صفر (۲) $(n+1)2^{n-2}$ (۳) $(n^2+1)2^{n-2}$ (۴) $(n+1)2^{n-2}$

۴- $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}$ برابر است با:

- (۱) e (۲) \sqrt{e} (۳) $e+1$ (۴) e^{-1}

۵- مردی با ۶ فوت قد، با سرعت ۳ فوت در ثانیه از یک تیر چراغ برق به ارتفاع ۲۴ فوت دور می‌شود. با چه سرعتی انتهای سایه او حرکت می‌کند.

- (۱) ۲ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) $2\sqrt{2}$

۶- مساحت مثلثی که اضلاع آن محور x ها و خطوط مماس و قائم بر منحنی $y(2a-x) = x^2$ در نقطه (a, a) می‌باشند، چقدر است؟

- (۱) $\frac{2}{5}a^2$ (۲) $\frac{12}{5}a^2$ (۳) $\frac{5a^2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}a^2$

۷- حاصل $\int \frac{\cot t dt}{\sqrt{4 \sin^2 t - 1}}$ برابر است با:

- (۱) $\sec^{-1} |2 \cos t| + c$ (۲) $\sec^{-1} |2 \sin t| + c$ (۳) $\sec^{-1} |\sin t| + c$ (۴) $\sec^{-1} |\cos t| + c$

۸- مقدار $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ برابر است با:

- (۱) $2 \operatorname{Arctg}(1+\sqrt{x}) + c$ (۲) $\operatorname{Ln}(1+\sqrt{x}) - 2\sqrt{x} + c$ (۳) $2 \operatorname{Ln}(1+\sqrt{x}) + c$ (۴) $\operatorname{Arctg}(1+\sqrt{x}) - 2\sqrt{x} + c$

۹- مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\cos 2x} dx$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۱۰- مقدار انتگرال $\int_{\frac{1}{e}}^e |\operatorname{Ln} x| dx$ چقدر است؟

- (۱) $2(1+e^{-1})$ (۲) $\frac{(e-1)}{2}$ (۳) $\frac{1+e^{-1}}{2}$ (۴) $2(1-e^{-1})$

۱۱- نمودار معادله $0 = 25x^2 + 10xy + y^2 - 1$ ، نمایشگر کدامیک از منحنی‌های زیر است؟

- (۱) سهمی (۲) بیضی (۳) هذلولی (۴) دو خط

۱۱- حاصل انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Ln} \cot x dx$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) π (۳) ۱ (۴) انتگرال واگراست

۱۲- مساحت درون ناحیه $\{(x, y) \mid x \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$ برابر است با:

- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۳- حاصل $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 2x^2 + 3}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}\right) + c$ (۲) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}\right) + c$ (۳) $\frac{2}{3\sqrt{2}} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}\right) + c$ (۴) $\frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}\right) + c$

۱۴- معادله یک منحنی در مختصات قطبی به صورت $\rho = e^{\frac{\theta}{2}}$ است. طول این منحنی از $\theta = 1$ تا $\theta = 2$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}(e - \sqrt{e})$ (۲) $\sqrt{5}(e - \sqrt{e})$ (۳) $\sqrt{\Delta}(e^2 - \sqrt{e})$ (۴) $\sqrt{2}(e^2 - \sqrt{e})$

۱۵- اگر $f\left(\frac{\pi}{3}\right), f(x) = (x - \frac{\pi}{6}) - \frac{(x - \frac{\pi}{6})^2}{2!} + \frac{(x - \frac{\pi}{6})^3}{3!} - \frac{(x - \frac{\pi}{6})^4}{4!} + \dots$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\pi}{6}\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\pi}{12}\sqrt{3}$ (۴) $\frac{\pi}{24}\sqrt{3}$

آزمون (۸)

تعداد سوالات: ۱۵ مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه سطح آزمون: B

۱- مشتق تابع $y = \text{Arctg}(\frac{x-x^2}{1-3x^2})$ برابر است با:

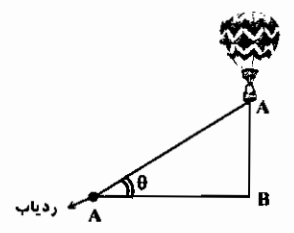
- (۱) $\frac{6}{1+x^2}$
- (۲) $\frac{1}{1+x^2}$
- (۳) $\frac{9}{1+x^2}$
- (۴) $\frac{3}{1+x^2}$

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1-x}$ کدام است؟

- (۱) $e-1$
- (۲) $e+1$
- (۳) $\frac{1}{e}$
- (۴) e

۳- یک بالن با سرعت ۱۴۰ متر در دقیقه از زمین دور می‌شود. با توجه به شکل مقابل یک ردیاب حرکت بالن را دنبال می‌کند. سرعت تغییر زاویه θ وقتی بالن در ارتفاع ۵۰۰ متری می‌باشد چند رادیان است؟

- (۱) $0/14$
- (۲) $0/28$
- (۳) $0/07$
- (۴) $0/21$



۴- معادله خط قائم بر منحنی $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ با محور x زاویه θ می‌سازد. معادله خط قائم کدام است؟

- (۱) $y \cos \theta = a \cos 2\theta$
- (۲) $y \cos \theta + x \sin \theta = a \cos 2\theta$
- (۳) $y \cos \theta - x \sin \theta = a \cos 2\theta$
- (۴) $x \sin \theta = a \cos 2\theta$

۵- حاصل $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ برابر است با:

- (۱) $\text{tg} x - \sec x - x + c$
- (۲) $x + \text{tg} x + c$
- (۳) $\text{tg} x - x + \sec(x) + c$
- (۴) $-\text{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) + c$

۶- حاصل انتگرال $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{2}} \text{tg}^{-1}(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2x}}) + c$
- (۲) $\sqrt{2} \text{tg}^{-1}(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2x}}) + c$
- (۳) $\frac{-1}{\sqrt{2}} \text{Arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2x}} + c$
- (۴) $-\sqrt{2} \text{tg}^{-1}(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2x}}) + c$

۷- مقدار انتگرال $\int \frac{x^2+1}{x^2-x^2+1} dx$ کدام است؟

- (۱) $\text{Arctg}(x - \frac{1}{x})$
- (۲) $\text{Arccot} g(x + \frac{1}{x})$
- (۳) $\text{Arccot} g(x - \frac{1}{x})$
- (۴) $\text{Arctg}(x + \frac{1}{x}) + c$

۸- حاصل $\int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)} dx$ کدام است؟

- (۱) $b-a$
- (۲) $2(b-a)$
- (۳) $\frac{b-a}{2}$
- (۴) هیچکدام

۹- مقدار حد $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} + \frac{\sqrt{n^2-1^2}}{n^2} + \frac{\sqrt{n^2-2^2}}{n^2} + \dots + \frac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n^2})$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\pi}{2}$
- (۲) $\frac{\pi}{4}$
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) $\frac{\pi}{6}$

۱۲- فرض کنید $y = \text{Log}_x 2$. در این صورت y' کدام است؟

- (۱) $\frac{\text{Ln} 2}{2x \text{Ln}^2 x}$
- (۲) $\frac{\text{Ln} 2}{2x \text{Ln}^2 x}$
- (۳) $\frac{-\text{Ln} 2}{2x \text{Ln}^2 x}$
- (۴) $\frac{-\text{Ln} 2}{x \text{Ln}^2 x}$

۱۳- کدامیک از انتگرالهای زیر واگراست؟

- (۱) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$
- (۲) $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$
- (۳) $\int_0^{\infty} \frac{x \text{Arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$
- (۴) $\int_1^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{x}) dx$

۱۴- مجموع سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$ برابر با کدام عدد است؟

- (۱) $-\frac{5}{8} - \text{Ln} \frac{1}{2}$
- (۲) $-\frac{5}{8} + \text{Ln} \frac{1}{2}$
- (۳) $-\frac{5}{4} - \text{Ln} \frac{1}{2}$
- (۴) $-\frac{5}{4} + \text{Ln} \frac{1}{2}$

۱۵- به ازای $n \geq 2$ عبارت $T_n = (1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16}) \dots (1 - \frac{1}{n^2})$ با کدام عدد برابر است؟

- (۱) $\frac{n-1}{2n}$
- (۲) $\frac{2n}{n-1}$
- (۳) $\frac{2n}{n+1}$
- (۴) $\frac{n+1}{2n}$

آزمون (۹)

تعداد سوالات: ۲۰

مدت زمان پیشنهادی: ۳۰ دقیقه

سطح آزمون: A

۱۰- مقدار $\int |x^2 + x| dx$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{2 + \sqrt{5}}{2}$
- (۲) $\frac{2 - \sqrt{5}}{2}$
- (۳) $2 + \sqrt{5}$
- (۴) $2 - \sqrt{5}$

۱۱- معادله مجموعه نقاطی که حاصل ضرب فواصلشان تا نقاط $A(a, 0)$ و $B(-a, 0)$ برابر a^2 باشد کدام است؟

- (۱) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$
- (۲) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$
- (۳) $(x^2 + y^2)^2 = ra^2(x^2 - y^2)$
- (۴) $(x^2 + y^2)^2 = ra(x^2 - y^2)$

۱۲- مجموع حد چپ و راست تابع $f(x) = \frac{1}{x + 2^{1/(x-2)}}$ وقتی $x \rightarrow 2$ چقدر می‌شود؟

- (۱) ∞
- (۲) 0
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) 1

۱۳- هرگاه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - b \cos x + ce^{-x}}{x \sin x} = 2$ در این صورت $a + b + c$ چقدر است؟

- (۱) -1
- (۲) 4
- (۳) -3
- (۴) 5

۱۴- مکان هندسی نقاطی که در رابطه $|z + 2i| + |z - 2i| = 6$ صدق می‌کند کدام است؟

- (۱) دایره
- (۲) بیضی
- (۳) هذلولی
- (۴) پاره خط

۱۵- مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$ برابر است با:

- (۱) $(x+1)e^x$
- (۲) $(x^2+1)e^x$
- (۳) x^2e^x
- (۴) $(x^2+x)e^x$

۱- تمام برد تابع $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$ کدام است؟

- (۱) $R - \{-1, \frac{1}{\Delta}\}$
- (۲) $R - \{\frac{1}{\Delta}, 1, -1\}$
- (۳) R
- (۴) $R - \{1, \frac{1}{\Delta}\}$

۲- حاصل $\int (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}) dx$ کدام است؟

- (۱) $\sin^{-1}(\sin x - \cos x) + c$
- (۲) $\sin^{-1}(\sin x + \cos x) + c$
- (۳) $\sqrt{2} \sin^{-1}(\sin x + \cos x) + c$
- (۴) $\sqrt{2} \sin^{-1}(\sin x - \cos x) + c$

۳- حاصل $\int \frac{dx}{\sin x + \sqrt{3} \cos x}$ برابر است با:

- (۱) $\ln | \operatorname{tg}(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}) | + c$
- (۲) $\ln | \operatorname{tg}(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}) | + c$
- (۳) $\frac{1}{2} \ln | \operatorname{tg}(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}) | + c$
- (۴) $\frac{1}{2} \ln | \operatorname{tg}(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}) | + c$

۴- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+m} + \frac{1}{n+2m} + \dots + \frac{1}{n+nm})$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{m} \ln(1+m)$
- (۲) $\frac{\ln(1+m)}{2m}$
- (۳) $\ln(1+m)$
- (۴) $\ln(1 + \frac{1}{m})$

۵- حاصل $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\tau - \cos \alpha)^{\csc \tau \alpha}$ برابر است با:

- (۱) e^{-1}
- (۲) \sqrt{e}
- (۳) e
- (۴) $\tau \sqrt{e}$

۶- مقدار $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 4} dx$ چقدر است؟

- (۱) $\ln \tau$
- (۲) $\frac{\pi}{4}$
- (۳) $\frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \tau$
- (۴) $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \operatorname{Arctg} \tau$

۷- کدامیک از انتگرالهای زیر واگراست؟

- (۱) $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- (۲) $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^{\sin x} - 1} dx$
- (۳) $\int_0^1 \frac{dx}{x - \operatorname{tg} x}$
- (۴) $\int_0^1 \frac{dx}{1 - e^{\sqrt{x}}}$

۸- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 2n + 4}$

- (۱) $\log 8$
- (۲) $-1 + \log \frac{2}{3}$
- (۳) واگرا
- (۴) $\log \frac{2}{3}$

۹- در تابع $y = |x(x+1)(x+2)\dots(x+10)| + |x+8| |x+9|$ جمع مشتق چپ و راست در $x = -10$ چقدر است؟

- (۱) $2 \times 9!$
- (۲) صفر
- (۳) -2
- (۴) -6

۱۰- محیط آستروئید به معادله پارامتری $x = a \cos^2 t, y = a \sin^2 t$ کدام است؟

- (۱) 0
- (۲) a
- (۳) $6a$
- (۴) Aa

۱۱- کدامیک از سریهای زیر همگراست؟

- (۱) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$
- (۲) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{k+1}}{2^{2k}}$
- (۳) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{2k+2}}{k}$
- (۴) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{rk-1}{rk}$

آزمون (۱۰)

تعداد سوالات: ۲۰ مدت زمان پیشنهادی: ۳۰ دقیقه سطح آزمون: A

۱- حد تابع $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+4})$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) ۱
- (۴) -۱

۲- تابع $y = \begin{cases} |2x| & |x| < 2 \\ x+1 & |x| \geq 2 \end{cases}$ چند نقطه ناپوستگی دارد؟ [] نماد جزء صحیح است.

- (۱) ۷
- (۲) ۹
- (۳) ۸
- (۴) ۴

۳- یکی از جواب‌های معادله $z^4 - z^2 + z^2 - z + 1 = 0$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$
- (۲) $\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$
- (۳) $\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$
- (۴) $\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}$

۴- حاصل $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{30}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) $\frac{1}{20}$
- (۴) $\frac{1}{60}$

۵- حاصل انتگرال $\int \frac{x + \cos x}{1 - \sin x} dx$ برابر است با:

- (۱) $x \sec x + \lg x + c$
- (۲) $x \sec x - \lg x + c$
- (۳) $x(\sec x + \lg x) + c$
- (۴) $x(\sec x - \lg x) + c$

۶- مقدار $\int_0^{\pi} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$ چقدر است؟

- (۱) $1 + \ln 2$
- (۲) $2 - 2 \ln 2$
- (۳) $1 + 2 \ln 2$
- (۴) $2 - \ln 2$

۷- اگر $a_n = \frac{fn+1}{2n+1}$ و $f(x) = b + [2x]$ به ازای کدام مقدار b دنباله $\{f(a_n)\}$ به عدد ۱ همگرا است؟ [] نماد جزء صحیح است.

- (۱) -۲
- (۲) -۲
- (۳) ۱
- (۴) نشدنی

۸- حاصل $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} dx$ برابر:

- (۱) $\ln \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} + c$
- (۲) $\ln \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x - 1} + c$
- (۳) $\ln \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} + c$
- (۴) $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} + c$

۹- حاصل $\int \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\pi}{2}$
- (۲) $\frac{\pi}{3}$
- (۳) $\frac{\pi}{4}$
- (۴) $\frac{\pi}{6}$

۱۰- مقدار $\int_0^{n^2} |\sqrt{x}| dx$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{n(n+1)(fn+1)}{6}$
- (۲) $\frac{n(n-1)(fn-1)}{6}$
- (۳) $\frac{n(n-1)(fn+1)}{6}$
- (۴) $\frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$

۱۱- مقدار $\lim_{t \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{t} - \sin \sqrt{t+1})$ چقدر است؟

- (۱) ۱
- (۲) صفر
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) $\frac{1}{4}$

۱۲- حاصل عبارت $\int_1^{e^2} (\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}) dx$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{e(e-2)}{2}$
- (۲) $\frac{e(e+2)}{2}$
- (۳) $e(e-2)$
- (۴) $e(e+2)$

۱۳- حاصل $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x} dx$ چقدر است؟

- (۱) $2\pi - 1$
- (۲) π
- (۳) 2π
- (۴) $1 + \frac{\pi}{2}$

۱۴- مساحت درون بیضی $2x^2 - 10xy + 10y^2 = 2$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{\pi\sqrt{5}}{5}$
- (۲) $\frac{\pi\sqrt{5}}{10}$
- (۳) $\pi\sqrt{5}$
- (۴) $\frac{2\pi\sqrt{5}}{5}$

۱۵- با فرض $x < 0$ ، مشتق تابع $y = \ln(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}})$ برابر است با:

- (۱) $-x\sqrt{1+x^2}$
- (۲) $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$
- (۳) $x\sqrt{1+x^2}$
- (۴) $-\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$

۱۶- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{\pi}{16}$
- (۲) $\frac{\pi}{8}$
- (۳) $\frac{\pi}{32}$
- (۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۷- مقدار $\int_{-\pi}^{\pi} |\sqrt{2} \cos x| dx$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\pi}{2}$
- (۲) $-\pi$
- (۳) π
- (۴) $-\frac{\pi}{2}$

۱۸- طول قوس منحنی نمودار $y = \ln(\cos x)$ از $x = \frac{\pi}{4}$ تا $x = 0$ کدام است؟

- (۱) $\ln 2$
- (۲) $\ln(\sqrt{2} + 1)$
- (۳) $\ln \frac{4}{\pi}$
- (۴) $\ln(\sqrt{2} - 1)$

۱۹- کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

- (۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ همگرا است.
- (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا است.
- (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$ واگرا است.
- (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ واگرا است.

۲۰- اگر $x > 0$ باشد آنگاه حاصل $S = \sqrt{x} + (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}) + (\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}) + \dots + (\sqrt[2k+1]{x} - \sqrt[2k]{x}) + \dots$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) -۱
- (۳) ۱
- (۴) ۲

۱۲- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{p}{1-x^p} - \frac{q}{1-x^q})$ چقدر است؟

- (۱) $2(p-q)$ (۲) $p-q$ (۳) $(p-q)^2$ (۴) $\frac{p-q}{2}$

۱۳- حاصل $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^5}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{6x^2 - 4x + 1}{12(x-1)^4} + c$ (۲) $\frac{6x^2 - 4x + 1}{6(x-1)^4} + c$ (۳) $-\frac{6x^2 - 4x + 1}{12(x-1)^4} + c$ (۴) $-\frac{6x^2 - 4x + 1}{2(x-1)^4} + c$

۱۴- حاصل $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}}$ کدام است؟

- (۱) $\text{Arcsin} \frac{x+1}{3} + c$ (۲) $2 \text{Arcsin} \frac{x+1}{3} + c$ (۳) $\text{Arcsin} \frac{x+1}{6} + c$ (۴) $\frac{1}{2} \text{Arcsin}(\frac{x+1}{3}) + c$

۱۵- حاصل $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{2 + \text{tg} \frac{x}{2}}$ (۲) $\frac{-1}{1 + \text{tg} \frac{x}{2}}$ (۳) $\frac{-2}{2 + \text{tg} \frac{x}{2}}$ (۴) $\frac{-1}{2 + \text{tg} \frac{x}{2}}$

۱۶- مساحت ناحیه‌ای از کاردیوئید $\rho = 1 + \cos \phi$ را که به وسیله دایره $\rho = \sqrt{3} \sin \phi$ قطع می‌شود کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}(\pi - \sqrt{3})$ (۲) $\frac{2}{3}(\pi + \sqrt{3})$ (۳) $\frac{2}{3}(\pi - \sqrt{3})$ (۴) $\frac{2}{3}(\pi + \sqrt{3})$

۱۷- مساحت ناحیه محدود به منحنی $x^2 + y^2 = a^2(x^2 + y^2)$ کدام است؟

- (۱) πa^2 (۲) $\sqrt{2} \pi a^2$ (۳) $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\pi a^2}{2}$

۱۸- ضریب x^2 در بسط مکلاورن $\text{Ln} \cos x$ چقدر است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $-\frac{1}{12}$

۱۹- طول قسمتی از خط $\rho = a \sec(\theta - \frac{\pi}{3})$ که بین $\theta = 0$ تا $\theta = \frac{\pi}{2}$ واقع است، چقدر می‌باشد؟

- (۱) $\frac{4\sqrt{3}}{3} a$ (۲) $\frac{4\sqrt{2}}{3} a$ (۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3} a$ (۴) $\frac{2\sqrt{2}}{4} a$

۲۰- مکان هندسی نقاطی که در رابطه $|z-a| + |z+a| = a^2$ صدق می‌کند کدام است؟

- (۱) دایره (۲) بیضی (۳) لمینسکات (۴) دلواری

پاسخنامه آزمون‌های خودسنجی

آزمون (۱)

- ۱- گزینه «۲» ۲- گزینه «۱» ۳- گزینه «۱» ۴- گزینه «۱» ۵- گزینه «۳»
 ۶- گزینه «۱» ۷- گزینه «۴» ۸- گزینه «۲» ۹- گزینه «۴» ۱۰- گزینه «۴»
 ۱۱- گزینه «۱» ۱۲- گزینه «۲» ۱۳- گزینه «۳» ۱۴- گزینه «۱» ۱۵- گزینه «۳»

آزمون (۲)

- ۱- گزینه «۱» ۲- گزینه «۲» ۳- گزینه «۳» ۴- گزینه «۱» ۵- گزینه «۳»
 ۶- گزینه «۱» ۷- گزینه «۳» ۸- گزینه «۳» ۹- گزینه «۴» ۱۰- گزینه «۱»
 ۱۱- گزینه «۲» ۱۲- گزینه «۲» ۱۳- گزینه «۴» ۱۴- گزینه «۴» ۱۵- گزینه «۲»

آزمون (۳)

- ۱- گزینه «۲» ۲- گزینه «۴» ۳- گزینه «۱» ۴- گزینه «۱» ۵- گزینه «۴»
 ۶- گزینه «۳» ۷- گزینه «۴» ۸- گزینه «۳» ۹- گزینه «۲» ۱۰- گزینه «۲»
 ۱۱- گزینه «۲» ۱۲- گزینه «۱» ۱۳- گزینه «۱» ۱۴- گزینه «۲» ۱۵- گزینه «۱»

آزمون (۴)

- ۱- گزینه «۳» ۲- گزینه «۲» ۳- گزینه «۲» ۴- گزینه «۴» ۵- گزینه «۲»
 ۶- گزینه «۴» ۷- گزینه «۴» ۸- گزینه «۲» ۹- گزینه «۳» ۱۰- گزینه «۴»
 ۱۱- گزینه «۲» ۱۲- گزینه «۴» ۱۳- گزینه «۴» ۱۴- گزینه «۴» ۱۵- گزینه «۲»

آزمون (۵)

- ۱- گزینه «۳» ۲- گزینه «۲» ۳- گزینه «۴» ۴- گزینه «۲» ۵- گزینه «۱»
 ۶- گزینه «۱» ۷- گزینه «۳» ۸- گزینه «۱» ۹- گزینه «۴» ۱۰- گزینه «۴»
 ۱۱- گزینه «۱» ۱۲- گزینه «۲» ۱۳- گزینه «۲» ۱۴- گزینه «۴» ۱۵- گزینه «۴»

آزمون (۶)

- ۱- گزینه «۲» ۲- گزینه «۱» ۳- گزینه «۳» ۴- گزینه «۲» ۵- گزینه «۴»
 ۶- گزینه «۴» ۷- گزینه «۱» ۸- گزینه «۳» ۹- گزینه «۳» ۱۰- گزینه «۳»
 ۱۱- گزینه «۱» ۱۲- گزینه «۱» ۱۳- گزینه «۴» ۱۴- گزینه «۲» ۱۵- گزینه «۳»

آزمون (۷)

- ۱- گزینه «۴» ۲- گزینه «۲» ۳- گزینه «۳» ۴- گزینه «۱» ۵- گزینه «۳»
 ۶- گزینه «۳» ۷- گزینه «۲» ۸- گزینه «۳» ۹- گزینه «۳» ۱۰- گزینه «۴»
 ۱۱- گزینه «۴» ۱۲- گزینه «۳» ۱۳- گزینه «۳» ۱۴- گزینه «۱» ۱۵- گزینه «۴»

آزمون (۸)

- ۱- گزینه «۴» ۲- گزینه «۳» ۳- گزینه «۲» ۴- گزینه «۱» ۵- گزینه «۴»
 ۶- گزینه «۳» ۷- گزینه «۱» ۸- گزینه «۳» ۹- گزینه «۲» ۱۰- گزینه «۲»
 ۱۱- گزینه «۱» ۱۲- گزینه «۳» ۱۳- گزینه «۲» ۱۴- گزینه «۲» ۱۵- گزینه «۴»

آزمون (۹)

- ۱- گزینه «۴» ۲- گزینه «۴» ۳- گزینه «۲» ۴- گزینه «۱» ۵- گزینه «۲»
 ۶- گزینه «۳» ۷- گزینه «۳» ۸- گزینه «۴» ۹- گزینه «۳» ۱۰- گزینه «۳»
 ۱۱- گزینه «۲» ۱۲- گزینه «۱» ۱۳- گزینه «۲» ۱۴- گزینه «۴» ۱۵- گزینه «۳»
 ۱۶- گزینه «۳» ۱۷- گزینه «۴» ۱۸- گزینه «۱» ۱۹- گزینه «۲» ۲۰- گزینه «۱»

آزمون (۱۰)

- ۱- گزینه «۱» ۲- گزینه «۲» ۳- گزینه «۳» ۴- گزینه «۴» ۵- گزینه «۳»
 ۶- گزینه «۱» ۷- گزینه «۲» ۸- گزینه «۴» ۹- گزینه «۳» ۱۰- گزینه «۳»
 ۱۱- گزینه «۲» ۱۲- گزینه «۴» ۱۳- گزینه «۳» ۱۴- گزینه «۱» ۱۵- گزینه «۴»
 ۱۶- گزینه «۱» ۱۷- گزینه «۳» ۱۸- گزینه «۴» ۱۹- گزینه «۱» ۲۰- گزینه «۳»

نست‌های سراسری ۱۳۸۵

عمران

ک ۱- مقدار انتگرال $\int_0^2 |t^2| dt$ که در آن $|t^2|$ جزء صحیح t^2 می‌باشد برابر با چیست؟

- (۱) $5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ (۲) $4 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ (۳) $5 - 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$ (۴) $4 - 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

ک ۲- بازه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n}$ کدام است؟

- (۱) $[-5, -1]$ (۲) $(-5, -1)$ (۳) $[-5, -1]$ (۴) $(-5, -1]$

ک ۳- اگر $I_n = \int_0^1 (a^x - x^a)^n dx, a > 0, n \geq 1$ رابطه بین I_{n-1} و I_n چیست؟

- (۱) $I_n = \frac{a^n}{2n+1} I_{n-1}$ (۲) $I_n = \frac{2a^n}{n+2} I_{n-1}$ (۳) $I_n = \frac{2a^n}{n+2} I_{n-1}$ (۴) $I_n = \frac{2a^n}{2n+1} I_{n-1}$

ک ۴- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به خطوط $x=2, y=0$ و سهمی $y=x^2$ حول محور y ها برابر با چیست؟

- (۱) 9π (۲) $\frac{27\pi}{2}$ (۳) $\frac{54\pi}{4}$ (۴) $\frac{81\pi}{2}$

عمران - نقشه‌برداری

ک ۵- بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (2x)^{2n}$ کدام است؟

- (۱) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (۲) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (۳) $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (۴) $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$

ک ۶- اگر $\int_0^2 f(t) dt = x^2(1+x)$ مقدار $f(2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ (۴) $1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}$

مکانیک

ک ۷- تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد کدامیک از انتگرال‌های زیر واگراست؟

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x^2+1)}} \quad x > 0$

- (۱) $\int_0^{\infty} f(x) dx$ (۲) $\int_0^1 f^2(x) dx$ (۳) $\int_0^{\infty} f^2(x) dx$ (۴) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} f^2(x) dx$

ک ۸- مطلوبست تقریب درجه دوم تابع $f(x) = \ln(\sec x + \tan x)$ در نزدیکی نقطه $x=0$.

- (۱) x (۲) $-x + \frac{1}{2}x^2$ (۳) $x - \frac{1}{2}x^2$ (۴) $x + \frac{1}{2}x^2$

ک ۹- مطلوبست محاسبه $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}$.

- (۱) -1 (۲) 0 (۳) 1 (۴) e

ک ۱۰- منحنی $y = e^{-kx} \sin x$ در بالای محور x و زیر آن متوالیاً (از مبدأ به سمت راست) زنجیره‌ای از ناحیه‌های دنبال هم را تولید می‌کند که با رفتن به سمت راست، مساحت آنها کاهش می‌یابد هرگاه $k > 0$ (ثابت). نسبت مساحت دانه $(n+1)$ ام به دانه n ام چیست؟

- (۱) e^{-1} (۲) $e^{-\pi}$ (۳) $e^{-n\pi}$ (۴) $e^{-k\pi}$

ک ۱۱- حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}}$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) صفر (۳) $\frac{1}{e}$ (۴) $\frac{4}{e}$

ک ۱۲- بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(1+\frac{1}{n})^{2n}}$ عبارتست از:

- (۱) $(-\sqrt{e}, \sqrt{e})$ (۲) $(-e, e)$ (۳) $[-e, e]$ (۴) $[-\sqrt{e}, \sqrt{e}]$

ک ۱۳- مقدار مشتق انتگرال مقابل را حساب کنید. $\frac{d}{dt} \int_0^1 e^{(t-\tau)^2} d\tau$

- (۱) e^{t^2} (۲) e^{t^2} (۳) $e^{t^2} - 1$ (۴) $e^{(t-2)^2}$

آمار

ک ۱۴- اگر $f(x) = |\cosh x| - |\sinh x|$ مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ کدام است؟ (| جزء صحیح است.)

- (۱) 2 (۲) -1 (۳) صفر (۴) 1

ک ۱۵- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln(e^n + 2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) 2 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 4

ک ۱۶- تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}$ بر R از نظر پیوستگی کدام است؟

- (۱) در یک نقطه ناپیوسته (۲) در دو نقطه ناپیوسته (۳) در سه نقطه ناپیوسته (۴) همواره پیوسته است.

ک ۱۷- طول منحنی تابع با ضابطه $y = x^{\frac{2}{3}}$ از نقطه $x=0$ تا نقطه $x=1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8)$ (۲) $\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-2)$ (۳) $\frac{1}{18}(11\sqrt{11}-8)$ (۴) $\frac{1}{18}(11\sqrt{11}-2)$

ک ۱۸- حاصل انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ کدام است؟

- (۱) $\pi-1$ (۲) $\pi-2$ (۳) $2\pi-1$ (۴) $2\pi-2$

ک ۱۹- مساحت محصور به منحنی $y^2 = x(x-1)^2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{15}$ (۲) $\frac{16}{15}$ (۳) $\frac{15}{16}$ (۴) $\frac{15}{8}$

ک ۲۰- مساحت ناحیه محدود به دایره به معادله $x^2 + y^2 = 1$ و بیضی به معادله $x^2 + 2y^2 = 1$ کدام است؟

- (۱) $\pi(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ (۲) $\pi(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})$ (۳) $\pi(\sqrt{2} - 1)$ (۴) $\pi(\sqrt{2} + 1)$

ک ۲۱- اگر r شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n-1} x^n$ ، S شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} (x-1)^n$ و t شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ باشد.

گزینه صحیح کدام است؟

- (۱) $t < r < S$ (۲) $t < S < r$ (۳) $S < r < t$ (۴) $r < S < t$

مدیریت سیستم و بهره‌وری و مهندسی سیستمهای اقتصادی و اجتماعی

۲۲- مشتق هزارم تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۹۹۹! (۳) ۱۰۰۰! (۴) ۱۰۰۱!

۲۳- هرگاه $19 \leq x^2 \leq 5$ ، مقدار $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(t) dt$ به ازای $x = 4$ کدام است؟

- (۱) $f(4)$ (۲) $2f(8)$ (۳) $8f(2)$ (۴) $8f(16)$

۲۴- $\frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} \frac{dy}{x^2 + y^2}$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) 6π (۳) $\frac{6\pi}{5}$ (۴) $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$

۲۵- در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ میانگین کدام تابع بزرگتر است؟

- (۱) $f_1(x) = \sin x$ (۲) $f_2(x) = \sin^2 x + x$ (۳) $f_3(x) = \cos^2 x$ (۴) $f_4(x) = 2x + 1$

۲۶- مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin x} dx$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۲۷- فرض کنید $n \geq 2$ و $a_n = \int_0^n e^x dx$ ، کدام گزاره درست است؟

- (۱) a_n صعودی است. (۲) a_n نزولی است. (۳) a_n همگراست. (۴) a_n نوسانی است.

۲۸- مقدار انتگرال $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x^2-1}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{12}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

۲۹- مقدار انتگرال $\int_1^y x^y \ln x dx$ به ازای $y > 1$ کدام است؟

- (۱) $\log_5 e$ (۲) $\frac{1}{y+1}$ (۳) $-\frac{1}{(y+1)^2}$ (۴) $-\infty$

۳۰- انتگرال معین $\int_1^e \log_5 x dx$ کدام است؟

- (۱) $\log_5 e$ (۲) $\text{Lne} - \text{Ln}5$ (۳) $\log_e 5 - \log_5 e$ (۴) $\log_5 e(e-1)$

۳۱- انتگرال $I = \int_0^1 \log(1+x) dx$ و دنباله $a_n = \frac{1}{n} [(n+1)(n+2)...(2n)]^n$ چه رابطه‌ای دارند؟

- (۱) $I > \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (۲) $I = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (۳) $I < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (۴) I یک عدد اما $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ بینهایت است.

۳۲- کدام انتگرال واگراست؟

- (۱) $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ (۲) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (۳) $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x}} dx$ (۴) $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$

۳۳- به ازای $x = \frac{2}{3}$ مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2^n})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) $+\infty$

۳۴- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$ کدام است؟

- (۱) یک (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر

۳۵- کدام سری همگراست؟

- (۱) $\sum_{n=2}^{\infty} \log n$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ (۳) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$ (۴) $2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$

۳۶- فرض کنید S و S_n به ترتیب مجموع و مجموع جزئی n ام سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ هستند و $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{10}}$ به ازای چه مقادیری از

$|S_n - S| < \frac{1}{\sqrt{10}}$ برقرار است؟

- (۱) $n > 10$ (۲) $n > 5$ (۳) $n > 2$ (۴) $n > 128$

۳۷- با فرض $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi^2}{8}$ (۲) $\frac{\pi^2}{12}$ (۳) $\frac{\pi^2}{18}$ (۴) $\frac{\pi^2}{24}$

۳۸- فرض کنید برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ داشته باشیم $1 < r < |a_{n+1}/a_n|$ کدام گزاره صحیح است؟

- (۱) دنباله $|a_{n+1}|$ از جمله‌ای به بعد نوسانی است. (۲) دنباله $|a_{n+1}|$ از جمله‌ای به بعد نزولی است.

- (۳) دنباله $|a_{n+1}|$ نزولی و واگراست. (۴) دنباله $|a_{n+1}|$ صعودی و بی‌کران است.

۳۹- بازه همگرایی کدام سری شامل بازه‌های همگرایی سه سری دیگر است؟

- (۱) $f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ (۲) $f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (۳) $f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ (۴) $f_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

ریاضی

۴۰- تابع $f(x) = x + \sin x$ مجانب ندارد زیرا:

- (۱) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ نامتناهی است. (۲) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ موجود نمی‌باشد. (۳) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x)$ موجود نمی‌باشد. (۴) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + x)$ موجود نمی‌باشد.

۴۱- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 - \sin x} dx$ کدام است؟

- (۱) $\text{Ln}2 - \frac{1}{2}$ (۲) $\text{Ln}2 - \frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}(\text{Ln}2 - 1)$ (۴) $\frac{1}{4}(\text{Ln}2 - 1)$

۴۲- فرض کنید $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t} dt$ و $g(x) = 2 \int_1^x \frac{1}{t} dt$ رابطه بین $f(x)$ و $g(x)$ کدام است؟

- (۱) $f(x) = g(x)$ (۲) $g(x) = 2f(x)$ (۳) $f(x) = \dots$ (۴) $f(x) = (g(x))^2$

۴۳- تابع $f(x) = x^2 + ax + bx + cx + d$ دارای دو نقطه عطف است

- (۱) $ra^2 \geq lb$ (۲) $ra < lb$ (۳) $ra > lb$ (۴) $ra^2 < lb$

۴۴- کدامیک از گزاره‌های زیر در مورد $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{Lnn}}{\sqrt{n}}$ درست است؟

- (۱) سری همگرا است. (۲) سری واگرا است. (۳) سری \dots (۴) سری همگرایی مشروط است.

۴۵- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \sin \sqrt{t} dt$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) صفر (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) وجود ندارد.

۴۶- فرض کنید برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ داریم: $f(a+b) = f(a)f(b)$ و $f'(0) \neq 0$ و $f'(0)$ موجود باشد. در این صورت برای هر $x \neq 0$:

- (۱) $f'(x) = f'(0)f(x)$ (۲) $f'(x) = f'(0)f'(x)$ (۳) $f'(x) = f(0)f(x)$ (۴) $f'(x)$ وجود ندارد.

۴۷- کدام گزاره درست است؟

(۱) حد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\cos x}}{x}$ برابر صفر است.

(۲) توابع f و g در a حد دارند در این صورت تابع g نیز در a حد دارد.

(۳) اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد و برای هر x در $[a, b]$ داشته باشیم $a \leq f(x) \leq b$ وجود دارد به طوری که $f(c) = c$.

(۴) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow L} g(x) = M$ باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = M$.

۴۸- اگر $\int \sin(\ln x) dx = \frac{1}{2} x \sin(\ln x) + f(x) + c$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2} x \cos(\ln x)$ (۲) $\frac{1}{2} x \cos(\ln x)$ (۳) $\frac{1}{2} x \ln(\cos x)$ (۴) $\frac{1}{2} x \ln(\cos x)$

۴۹- مشتق تابع $f(x) = \sin x^x$ برای $x > 0$ کدام گزینه است؟

- (۱) $x^x \cos x^x$ (۲) $x^x \ln x \cos x^x$ (۳) $\cos x^x \ln x$ (۴) $x^x (1 + \ln x) \cos x^x$

۵۰- بازه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ کدام گزینه است؟

- (۱) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (۲) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (۳) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

۵۱- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{xf(x)}$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) ∞

۵۲- فرض کنید برای اعداد حقیقی $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ داریم: $C_0 + \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n = 0$ در این صورت:

(۱) معادله $C_0 + C_1x + \dots + C_nx^n = 0$ یک ریشه حقیقی در بازه $[0, 1]$ دارد.

(۲) به ازای هر x $C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n = 0$.

(۳) معادله $C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n = 0$ ریشه حقیقی ندارد.

(۴) به ازای هر x $C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n \neq 0$.

۵۳- مساحت بزرگترین مستطیلی که می‌تواند در یک ناحیه‌ی محدود به $y = 3 - x^2$ و محور x محاط شود کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) 4

۵۴- مساحت ناحیه درون منحنی $r = 2 \cos \theta$ و خارج $r = 1$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{3}$ (۳) $\sqrt{2} + \frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3} + \pi$

۵۵- مقدار $\int_1^a \frac{dx}{x^2 + 1}$ برای $a > 0$ برابر است با:

- (۱) $1 - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2a+1} - \frac{1}{3a+1} + \dots$ (۲) $1 - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{3a+1} + \dots$ (۳) $1 - \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{2a^2+1} - \frac{1}{3a^2+1} + \dots$ (۴) $1 - \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{2a^2+1} + \frac{1}{3a^2+1} + \dots$

۵۶- حجم حاصل از دوران ناحیه‌ای واقع در ناحیه‌ی اول صفحه مختصات و بالای سهمی $y = x^2$ و زیر سهمی $y = 2 - x^2$ حول محور y ها کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) 2π (۴) $\frac{5\pi}{2}$

۵۷- حاصل جمع عبارت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+i)^2}$ برابر است؟

- (۱) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ (۲) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ (۳) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ (۴) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$

۵۸- کدام گزینه در مورد انتگرال نامتعرف (غیرعادی) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$ صحیح می‌باشد؟

- (۱) واگراست. (۲) همگراست. (۳) همگرا به یک است. (۴) همگرا به ۲ است.

MBA

۵۹- برد تابع $f(x) = \sqrt{\log(2x - x^2)}$ کدام بازه است؟

- (۱) $[0, 0]$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $[0, 2]$ (۴) $[1, 1]$

۶۰- در بسط عبارت $(x - \frac{2}{x} + \sqrt{2})^7$ به صورت توان‌های صعودی، ضریب x^0 چقدر است؟

- (۱) 14 (۲) 21 (۳) 28 (۴) 35

۶۱- در منحنی به معادله $(x^2 + y^2)^2 = 9xy$ بیشترین مقدار x کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{2}$

۶۲- اگر $(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^n = -(\sin \theta + i \cos \theta)^6$ آنگاه θ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{8}$ (۳) $\frac{(2k+1)\pi}{4}$ (۴) $\frac{(2k+1)\pi}{8}$

۶۳- حد دنباله $\frac{(n+1)^{n^2}}{3^n}$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) 1 (۴) ∞

۶۴- اگر $x > 0$ و $f(x) = \sin^{-1}(2x^2 - 1) - 2 \sin^{-1} x$ باشد، آنگاه $f(x) + f'(x)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2\pi}{2}$ (۲) $-\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{2\pi}{2}$

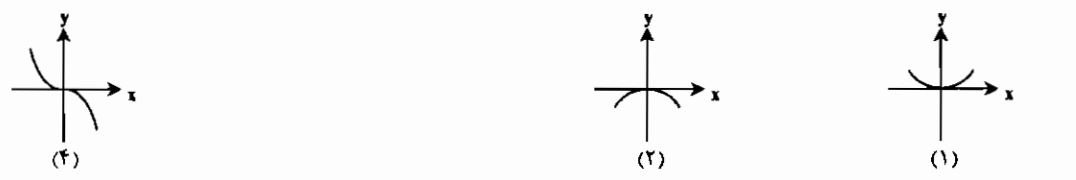
۶۵- مکان هندسی نقطه $M(x, y)$ متناظر با عدد مختلط $z = \cosh(\tau + it); t \in \mathbb{R}$ کدام است؟

- (۱) دایره (۲) هذلولی (۳) بیضی (۴) سهمی

۶۶- اگر $x = y^2 + y$ آنگاه نسبت تغییر y به تغییر x در لحظه $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) 1 (۴) $\frac{1}{20}$

۶۷- نمودار تابع $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x - 2x$ در همسایگی مبدأ مختصات، است؟



معماری کشتی

۸۰- معادله $x^2 - 3x + 1$ در فاصله $|\cdot, 2|$:

- (۱) هیچ ریشه‌ای ندارد. (۲) دارای دو ریشه است. (۳) بیش از دو ریشه دارد. (۴) دارای یک ریشه است.

۸۱- اگر $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ آنگاه:

- (۱) $f(x)$ در \circ دارای مشتق مرتبه‌ی دوم نیست. (۲) $f(x)$ در \circ پیوسته است ولی مشتق پذیر است.
 (۳) $f(x)$ در \circ بی‌نهایت بار مشتق پذیر و دارای بسط تیلور است. (۴) $f(x)$ در \circ همواره به صورت یک فنر است.

۸۲- شعاع قاعده بزرگترین مخروطی که در کره‌ای به شعاع واحد محاط گردیده، کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{2\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$

۸۳- شکل مقابل مربوط به کدام منحنی است؟

- (۱) $r = \cos 2\theta$
 (۲) $r = 1 - \tan^2 \theta$
 (۳) $r^2 = a^2 \sin \theta$
 (۴) $r = a(1 - 2 \sin^2 \theta)$

۸۴- اگر $f(x)$ یک تابع زوج باشد مشتق آن:

- (۱) همواره فرد است. (۲) همواره زوج است.
 (۳) اگر درجه‌ی $f(x)$ فرد باشد فرد است. (۴) اگر درجه‌ی $f(x)$ زوج باشد زوج است.

۸۵- ماکزیمم ارتفاع منحنی $y = 6 \cos x - 8 \sin x$ در بالای محور x ها برابر است با:

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۸۶- معادله پارامتری مقابل معرف کدام منحنی در صفحه است؟
 $\begin{cases} x = 1 + 2 \cosh t \\ y = 3 \sinh t \end{cases}$

- (۱) بیضی (۲) سهمی (۳) هذلولی (۴) شاخه راست یک هذلولی

۸۷- طول قسمتی از منحنی $\begin{cases} y = e^t \sin t \\ x = e^t \cos t \end{cases}$ بین دو نقطه $t = 0$ و $t = 4$ کدام است؟

- (۱) $e^4 - 1$ (۲) $2(e^4 - 1)$ (۳) $\sqrt{2}(e^4 - 1)$ (۴) $\sqrt{2}(e^4 + 1)$

۸۸- بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n(Ln)^2}$ برابر است با:

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $[1, 2]$ (۳) $[-1, 2]$ (۴) $[-1, 1]$

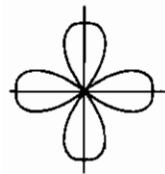
۸۹- فاصله نزدیکترین نقطه از منحنی $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$ از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۲

معدن

۹۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$ برابر است با:

- (۱) e (۲) $2e$ (۳) e^2 (۴) $\frac{1}{2}e$



۶۸- حاصل $\int_0^{\infty} x^5 e^{-x} dx$ ، کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۷۵ (۳) ۸۰ (۴) ۱۲۰

۶۹- حاصل $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۷۰- مساحت ناحیه محدود به دو منحنی قطبی $r = 1 + \sin \theta$ و $r = \sin \theta$ ، کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{2\pi}{2}$ (۳) $\frac{2\pi}{4}$ (۴) $\frac{5\pi}{4}$

۷۱- مختصات نقطه عطف منحنی به معادله $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$ در صفحه xoy ، کدام است؟

- (۱) $(0, 0)$ (۲) $(4, 0)$ (۳) $(1, 3)$ (۴) فاقد نقطه عطف

۷۲- اگر $f(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 + 5} dt$ باشد، خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $x = 2$ نیمساز ناحیه اول را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۴

۷۳- سری $1 + \frac{3}{4^p} + \frac{4}{3^p} + \frac{5}{4^p} + \dots$ به ازای کدام مجموعه مقادیر p همگراست؟

- (۱) $p \geq 1$ (۲) $p > 1$ (۳) $p > 2$ (۴) $p \geq 2$

مهندسی هسته‌ای

۷۴- انتگرال $\int_1^{1-e^{-x}} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$ تقریباً به کدام جواب نزدیک تر است: (راهنمایی: بسط مالکورن e^{-x} را نوشته و جایگذاری نمائید.)

- (۱) 0.55 (۲) 0.79 (۳) ۱ (۴) 1.79

۷۵- به ازای بازه‌های مختلف $[a, b]$ ماکزیمم مقدار $\int_a^b (4x - x^2) dx$ را تعیین کنید؟

- (۱) $\frac{16}{3}$ (۲) $\frac{32}{3}$ (۳) $\frac{64}{3}$ (۴) ∞

۷۶- فرض کنیم z_1 و z_2 دو عدد مختلط غیر صفر باشند به قسمی که $\frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 + z_2|} = 1$ در این صورت:

- (۱) $\text{Re}(z_1 z_2) = 0$ (۲) $\text{Re}(z_1 z_2) < 0$ (۳) $\text{Im}(z_1 z_2) = 0$ (۴) $\text{Re}(z_1 z_2) > 0$

۷۷- اگر $I_{m,n} = \int x^m (\ln x)^n dx$ ، آنگاه می‌توان نشان داد که $I_{m,n} = a I_{m,n-1}$ مقدار a کدام است؟ ($m, n \in \mathbb{N}$)

- (۱) $a = -\frac{n}{m}$ (۲) $a = \frac{-m}{n}$ (۳) $a = \frac{n}{m+1}$ (۴) $a = \frac{-n}{m+1}$

۷۸- مساحت درون حلقه کوچکتر محصور شده توسط خم $r = 1 - \sqrt{2} \cos \theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2} - 1$ (۲) $\frac{\pi-1}{2}$ (۳) $\frac{\pi-2}{2}$ (۴) $\frac{\pi-\sqrt{2}}{2}$

۷۹- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ، آنگاه $f^{(m)}(0)$ برابر است با:

- (۱) $-\frac{1}{5}$ (۲) $-\frac{1}{10}$ (۳) $-\frac{1}{20}$ (۴) -20

۹۱- تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x^2}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار k در مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$
- (۲) 0
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) 1

۹۲- مشتق تابع $f(x) = x^{\sin x} + (\sin x)^x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) -1
- (۲) 0
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) 1

۹۳- با فرض آنکه $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2x + 1$ و $(f^{-1})'(y)$ را بیابید.

- (۱) $\frac{1}{24}$
- (۲) $\frac{1}{12}$
- (۳) $\frac{1}{24}$
- (۴) $\frac{1}{12}$

۹۴- حاصل $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx$ کدامیک از عبارات داده شده است؟

- (۱) صفر
- (۲) یک

۹۵- هرگاه f روی $[a, b]$ اکیداً صعودی و مشتق پذیر باشد و $f(a) = \alpha$ و $f(b) = \beta$ ، آنگاه مقدار $\int_a^b f(x) dx + \int_a^b f^{-1}(x) dx$ برابر

- (۱) $\alpha b - \beta a$
- (۲) $\beta b - \alpha a$
- (۳) $\beta b + \alpha a$
- (۴) $\beta a - \alpha b$

۹۶- بازه (فاصله) همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n}) x^n$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 1)$
- (۲) $(-1, 1)$
- (۳) $[-1, 1]$
- (۴) $(-1, 1]$

۹۷- چنانچه $i = \sqrt{-1}$ باشد، آنگاه $\frac{1-i}{(1+i)^4}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$
- (۲) $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$
- (۳) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$
- (۴) $-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

مهندسی نفت

۹۸- ضریب x^2 در بسط مک لورن $y = (e^x - 1) \cos x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$
- (۲) $-\frac{1}{3}$
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{2}{3}$

۹۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\sin 2x)^{\tan 2x}$ برابر است با:

- (۱) e^{-1}
- (۲) e
- (۳) 0
- (۴) 1

۱۰۰- تعداد جواب‌های حقیقی معادله $x \sin x + \cos x = x^2$ برابر است با:

- (۱) 0
- (۲) 1
- (۳) 2
- (۴) 4

۱۰۱- فرض کنید C_1 نمودار $r = \sin 2\theta$ و C_2 نمودار $r = \cos 2\theta$ باشد. در این صورت کدام گزاره درست است؟

- (۱) C_1 چهار پر و C_2 سه پر دارد.
- (۲) C_1 چهار پر و C_2 چهار پر و شش پر دارد.
- (۳) C_1 دو پر و C_2 سه پر دارد.
- (۴) C_1 دو پر و C_2 چهار پر و شش پر دارد.

۱۰۲- فرض کنیم $z_1 = 3 + i\sqrt{5}$ و $z_2 = 3 - i\sqrt{5}$ و $z_3 = 1 - z_1 = -2 - i\sqrt{5}$ صدق می‌کند در این صورت:

- (۱) $z_2 > z_3$
- (۲) $z_2 < z_1$
- (۳) $z_1 > z_2$
- (۴) z_1 و z_2 نسبت به محور y متقارن‌اند.

۱۰۳- مطلوبست محاسبه مقدار انتگرال معین زیر: $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$

- (۱) $\sqrt{\pi}$
- (۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$
- (۴) $\frac{2\sqrt{\pi}}{4}$

۱۰۴- قضیه مقدار میانگین را در مورد تابع $f(x) = x^2 - 3x$ بر روی بازه $[1, 2]$ به کار می‌گیریم. طول نقطه C که وجود آن در قضیه مورد بحث می‌باشد، کدامیک از اعداد داده شده است؟

- (۱) 1
- (۲) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$
- (۳) $\frac{3}{2}$
- (۴) $\frac{5}{2}$

مهندسی کشاورزی

۱۰۵- اگر $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ و $g(x) = \sqrt{2-x}$ دامنه تابع $g \circ f$ کدام بازه است؟

- (۱) $[0, 0]$
- (۲) $[0, 2]$
- (۳) $[1, +\infty)$
- (۴) $(-\infty, 2]$

۱۰۶- نمودار معکوس تابع $f(x) = x + \ln x$ نیمساز ناحیه اول را در نقطه A قطع می‌کند فاصله A تا نقطه $(5, 3)$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
- (۲) $3\sqrt{2}$
- (۳) $2\sqrt{3}$
- (۴) $2\sqrt{5}$

۱۰۷- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n + \ln n}{n})^{2n-1}$ کدام است؟

- (۱) 4
- (۲) 7
- (۳) 8
- (۴) 9

۱۰۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + \sqrt{x^2 + 12}}{|x^2 + x - 6|}$ کدام است؟

- (۱) $0/25$
- (۲) $0/2$
- (۳) $0/6$
- (۴) $0/75$

۱۰۹- معادله منحنی $x^2 - y^2 = 2xy$ در مختصات قطبی چگونه است؟

- (۱) $r = \cot g 2\theta$
- (۲) $r = \sin 2\theta$
- (۳) $r = \sqrt{\lg 2\theta}$
- (۴) $r = \cos 2\theta$

۱۱۰- مشتق مرتبه دهم تابع $y = \frac{2x+1}{2x+1}$ به ازای $x = -\frac{3}{2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}(10!)$
- (۲) $-\frac{1}{4}(10!)$
- (۳) $\frac{1}{2}(10!)$
- (۴) $-\frac{1}{2}(10!)$

باسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۵

۱- گزینه «۱»

$$\int_0^{\sqrt{2}} [t^{\sqrt{2}}] dt = \int_0^1 [t^{\sqrt{2}}] dt + \int_1^{\sqrt{2}} [t^{\sqrt{2}}] dt + \int_{\sqrt{2}}^2 [t^{\sqrt{2}}] dt + \int_2^{\sqrt{2}} [t^{\sqrt{2}}] dt$$

$$= \int_0^1 dt + \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2} dt + \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{2} dt + \int_2^{\sqrt{2}} \sqrt{2} dt = (\sqrt{2}-1) + \sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{2}) + \sqrt{2}(2-\sqrt{2}) + \sqrt{2}(\sqrt{2}-2) = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

۲- گزینه «۱»

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^{\sqrt{2}}}}{\frac{1}{n^{\sqrt{2}}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{\sqrt{2}}}{n^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$|x + \sqrt{2}| < \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} < x + \sqrt{2} < \sqrt{2} \Rightarrow -5 < x < -1$$

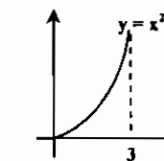
در $x = -5$ سری به صورت $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ در می‌آید که همگراست و در $x = 1$ به صورت $\sum \frac{1}{n+1}$ در می‌آید که واگراست.

۳- گزینه «۴» از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$I_n = x(a^{\sqrt{2}} - x^{\sqrt{2}})^n \Big|_0^a + \sqrt{2} \int_0^a x^{\sqrt{2}} (a^{\sqrt{2}} - x^{\sqrt{2}})^{n-1} dx = \sqrt{2} \int_0^a (x^{\sqrt{2}} - a^{\sqrt{2}} + a^{\sqrt{2}})(a^{\sqrt{2}} - x^{\sqrt{2}})^{n-1} dx$$

$$= -\sqrt{2} I_n + \sqrt{2} n a^{\sqrt{2}} I_{n-1} \Rightarrow (1 + \sqrt{2}) I_n = \sqrt{2} n a^{\sqrt{2}} I_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{\sqrt{2} n a^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} + 1} I_{n-1}$$

۴- گزینه «۴» از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:



$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x(x^2 - 0) dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x^3 dx = \frac{11\pi}{4}$$

۵- گزینه «۲» سری داده شده را به صورت $\sum \frac{(-1)^n}{n} (4x^{\sqrt{2}})^n$ می‌نویسیم. در این صورت:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = 1$$

$$|4x^{\sqrt{2}}| < 1 \Rightarrow x^{\sqrt{2}} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

در نقاط مرزی $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ سری به صورت $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ در می‌آید که همگراست.

۶- گزینه «۴» با مشتق‌گیری از طرفین رابطه داده شده نتیجه می‌شود:

$$\sqrt{2} x f(x^{\sqrt{2}}) = 2x + 2x^{\sqrt{2}} \Rightarrow f(x^{\sqrt{2}}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x \xrightarrow{x=\sqrt{2}} f(2) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2}$$

$$\int_0^1 f^{\sqrt{2}}(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x(x^{\sqrt{2}} + 1)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^{\sqrt{2}} + 1} \right) dx = \left(\ln x - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(x^{\sqrt{2}} + 1) \right) \Big|_0^1 = \infty$$

۷- گزینه «۲»

۸- گزینه «۱»

$$f(x) = \ln(\sec x + \tan x) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 = x$$

بنابراین تقریب درجه دوم f ، به صورت روبرو در می‌آید:

۹- گزینه «۳» از تغییر متغیر $t = \frac{\pi}{2} - x$ و یا $x = \frac{\pi}{2} - t$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (\tan x)^{\cos x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\cot t)^{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\tan t} \right)^{\sin t} \stackrel{\text{هم‌نامی}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t} \right)^t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^t} = 1$$

۱۰- گزینه «۴»

$$\text{مساحت دانه } n \text{ ام} = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-kx} \sin x dx = \frac{e^{-kx}}{k^2 + 1} (-k \sin x - \cos x) \Big|_{(n-1)\pi}^{n\pi} = (-1)^{n+1} \left(\frac{e^{-kn\pi} + e^{-k(n-1)\pi}}{k^2 + 1} \right)$$

$$\text{مساحت دانه } (n+1) \text{ ام} = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-kx} \sin x dx = \frac{e^{-kx}}{k^2 + 1} (-k \sin x - \cos x) \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}$$

$$= (-1)^n \left(\frac{e^{-k(n+1)\pi} + e^{-kn\pi}}{k^2 + 1} \right) = (-1)^n e^{-kn\pi} \left(\frac{e^{-k\pi} + e^{-k(n-1)\pi}}{k^2 + 1} \right)$$

با توجه به مقادیر به دست آمده نسبت مساحت دانه $(n+1)$ ام به دانه n ام برابر $e^{-k\pi}$ می‌باشد.

۱۱- گزینه «۴» از هم‌ارزی $\sqrt[n]{(kn)!} \sim \left(\frac{kn}{e}\right)^k$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}} \cdot \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{\sqrt[n]{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\frac{n}{e}} = \frac{4}{e}$$

۱۲- گزینه «۱» طبق آزمون ریشه، برای همگرایی سری $\sum a_n$ کافی است $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\sqrt{2}}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}}} = \frac{x^{\sqrt{2}}}{e} < 1 \Rightarrow -\sqrt{e} < x < \sqrt{e}$$

در نقاط مرزی $x = \sqrt{e}$ و $x = -\sqrt{e}$ سری واگرا خواهد بود.

$$\frac{d}{dt} \int_0^t e^{(t-\tau)^{\sqrt{2}}} d\tau = e^{(t-t)^{\sqrt{2}}} \times 1 + \int_0^t \sqrt{2}(t-\tau)e^{(t-\tau)^{\sqrt{2}}} d\tau = 1 + (e^{(t-t)^{\sqrt{2}}}) \Big|_0^t = 1 + (-1 + e^{t^{\sqrt{2}}}) = e^{t^{\sqrt{2}}}$$

۱۳- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ([\cosh x] - [\sinh x]) = 1 - 0 = 1$$

۱۴- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ([\cosh x] - [\sinh x]) = 1 - (-1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln(e^n + 2) \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln e^n = \frac{1}{2}$$

۱۵- گزینه «۳»

۱۶- گزینه «۳» تابع f در نقاط 1 و 0 و -1 ناپیوسته است.

۱۷- گزینه «۱»

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+y^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{27} \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{27} (13\sqrt{13}-8)$$

۱۸- گزینه «۲» با توجه به جدول مقابل

انتگرال	مشتق
$\oplus x^r$	$\sin x$
$\ominus 2x$	$\geq \cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^r \sin x dx = (-x^r \cos x + rx \sin x + r \cos x) \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$
$\oplus r$	$\sin x$
\circ	$\cos x$

۱۹- گزینه «۱» نقاط تلاقی منحنی با محور x ها، $x=1$ و $x=0$ می‌باشد. با توجه به تقارن منحنی نسبت به محور y ها، مساحت محصور بین $y = \sqrt{x(x-1)^2}$ و محور x ها را به دست آورده و حاصل را در 2 ضرب می‌کنیم.

$$S = 2 \int_0^1 \sqrt{x(x-1)^2} dx = 2 \int_0^1 (1-x)\sqrt{x} dx = 2 \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}$$

۲۰- گزینه «۱» شعاع دایره داده شده برابر 1 است، بنابراین مساحت آن برابر π می‌باشد. معادله بیضی داده شده را به صورت $x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$

می‌باشد، بنابراین مساحت بیضی برابر $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ خواهد بود. با توجه به اینکه بیضی کاملاً درون دایره قرار دارد، مساحت مورد نظر برابر است با:

$$S = \pi - \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

۲۱- گزینه «۱» به سادگی می‌توان نشان داد $t=0$ و $s=\infty$ ، $t < r < s$.

۲۲- گزینه «۳» به طور کلی مشتق مرتبه n م تابع $y = \frac{1}{ax+b}$ به صورت $y^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$ می‌باشد.

بنابراین:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y^{(1000)} = \frac{(-1)^{1000} \times 1000!}{x^{1001}} \Rightarrow y^{(1000)}(1) = 1000!$$

۲۳- گزینه «۴»

$$\frac{d}{dx} \int_a^{x^r} f(t) dt = r x f(x^r) \stackrel{x=4}{=} 8 f(16)$$

۲۴- گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که:

$$\int_0^{\infty} \frac{dy}{x^r + y^r} = \frac{1}{x} \text{Arctg} \frac{y}{x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{x} \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} \times 0 = \frac{\pi}{2x}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{d^r}{dx^r} \left(\frac{\pi}{2x} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{d^r}{dx^r} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2} \times \frac{(-1)^r \times r!}{x^{r+1}} = \frac{12\pi}{x^5} \Big|_{x=\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}$$

۲۵- گزینه «۴» در بازه داده شده تابع f به ازای تمام مقادیر x از بقیه توابع بزرگتر است، بنابراین میانگین f در بازه داده شده از بقیه بزرگتر خواهد بود و نیازی به محاسبه میانگین توابع داده شده نیست.

۲۶- گزینه «۳»

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx = \int_0^{\pi} \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| dx = \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) dx = \left(-2 \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 4$$

۲۷- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$a_n = \frac{1}{n} \int_0^n e^x dx = \frac{1}{n} e^x \Big|_0^n = \frac{e^n - 1}{n}$$

دنباله به دست آمده یک دنباله صعودی و واگراست.

۲۸- گزینه «۲»

$$\int_{\sqrt{r}}^r \frac{dx}{\sqrt{r} x \sqrt{x^r - 1}} = \text{Arcsec} x \Big|_{\sqrt{r}}^r = \text{Arcsec} r - \text{Arcsec} \sqrt{r} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

۲۹- گزینه «۳» از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} u = \text{Ln} x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^y dx \Rightarrow v = \frac{x^{y+1}}{y+1} \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^y \text{Ln} x dx = \frac{x^{y+1}}{y+1} \text{Ln} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^y}{y+1} dx = 0 - \frac{x^{y+1}}{(y+1)^2} \Big|_0^1 = \frac{-1}{(y+1)^2}$$

۳۰- گزینه «۱»

$$\int_1^e \log_{\Delta} x dx = \int_1^e \frac{\text{Ln} x}{\text{Ln} \Delta} dx = \frac{1}{\text{Ln} \Delta} \int_1^e \text{Ln} x dx = \frac{1}{\text{Ln} \Delta} (x \text{Ln} x - x) \Big|_1^e = \frac{1}{\text{Ln} \Delta} = \log_{\Delta} e$$

۳۱- گزینه «۳»

$$a_n = \left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right) \left(1+\frac{2}{n}\right) \dots \left(1+\frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \text{Ln} a_n = \frac{1}{n} \left[\text{Ln} \left(1+\frac{1}{n}\right) + \text{Ln} \left(1+\frac{2}{n}\right) + \dots + \text{Ln} \left(1+\frac{n}{n}\right) \right] = \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Ln} \left(1+\frac{i}{n}\right) = \int_1^2 \text{Ln}(1+x) dx$$

از رابطه فوق نتیجه می‌شود $\text{Ln} a_n = 1$ و یا $a_n = e^1$ با توجه به گزینه‌های داده شده، گزینه (۳) صحیح است.

۳۲- گزینه «۳» انتگرالهای داده شده در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) در $x=0$ ناسره هستند، ولی هر سه در $x=0$ همگرا می‌باشند زیرا:

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^{\pi} < \infty$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_0^{\pi} < \infty$$

$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 < \infty$$

ولی $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$ در $x=0$ ناسره و واگراست. در همسایگی $x=0$ ، $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \sim \frac{1}{x}$ ، چون $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ واگراست، پس $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$ نیز واگراست.

۳۳- گزینه «۳» قرار می‌دهیم $I_n = (1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n})$ در این صورت:

$$(1-x)I_n = (1-x)(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n}) = (1-x^2)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n}) = \dots = 1-x^{2^{n+1}}$$

$$I_n = \frac{1-(\frac{1}{2})^{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-(\frac{1}{2})^{2^{n+1}}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 2$$

بنابراین $I_n = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ و به ازای $x = \frac{1}{2}$ خواهیم داشت:

۳۴- گزینه «۲»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{i} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$$

۳۵- گزینه «۴» سری $\sum_{n=2}^{\infty} \log n$ واگراست زیرا شرط لازم برای همگرایی را ندارد. سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ نیز واگراست زیرا شرط لازم برای همگرایی را ندارد $(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \infty)$. سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}$ نیز واگراست زیرا وقتی $n \rightarrow \infty$ $\frac{1}{n^{\sqrt{n}}} \sim \frac{1}{n}$ و سری $\sum \frac{1}{n}$ همساز است که واگراست. سری داده شده در گزینه (۴)، مجموع دو سری همگرا به صورت زیر می‌باشد:

$$2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \dots = 2 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \dots) + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \dots)$$

سری $\sum \frac{1}{2^2}$ همگراست. سری همی همگراست.

۳۶- گزینه «۱»

۳۷- گزینه «۱»

روش اول: جمله اول سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^n}$ برابر ۱ است، پس مجموع سری از ۱ بزرگتر است، با توجه به گزینه‌ها فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

روش دوم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$$

از رابطه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ نتیجه می‌شود $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{\pi^2}{24}$ ، که با جایگزینی در رابطه فوق نتیجه می‌شود: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$

۳۸- گزینه «۲» از رابطه داده شده نتیجه می‌شود که از جمله‌ای به بعد دنباله $|a_n|$ یا به طور معادل دنباله $|a_{n+1}|$ نزولی است، در نتیجه دنباله $\frac{|a_{n+1}|}{1-2}$ نیز نزولی است (تقسیم کردن جملات دنباله به عدد مثبت ۲-۱ تأثیری در نزولی بودن دنباله نمی‌گذارد).

۳۹- گزینه «۴» بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ بازه $[0, 2)$ ، بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ بازه $[-1, 1]$ ، بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ بازه $[0, 0]$ و بازه همگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ بازه $(-\infty, +\infty)$ می‌باشد.

۴۰- گزینه «۳» به طور کلی مجانب مایل تابع $y = f(x)$ خط $y = mx + h$ می‌باشد، هرگاه هر دو حد زیر موجود و متناهی باشند.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{و} \quad m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$$

در مورد تابع $f(x) = \sin x + x$ حد $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ موجود و برابر ۱ می‌باشد ولی حد زیر وجود ندارد:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + \sin x - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$$

وجود ندارد

بنابراین تابع مجانب مایل ندارد.

۴۱- گزینه «۴» از تغییر متغیر $t = \sin x$ ، $dt = \cos x dx$ استفاده می‌کنیم، با این تغییر متغیر بازه انتگرال‌گیری به صورت $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ در می‌آید. بنابراین:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 - \sin x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t dt}{1-t} = \int_0^{\frac{1}{2}} (-1 + \frac{1}{1-t}) dt = (-t - \ln(1-t)) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

۴۲- گزینه «۱»

$$f(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^{x^2} = \ln x^2 - \ln 1 = 2 \ln x$$

$$g(x) = 2 \int_1^x \frac{1}{t} dt = 2 \ln t \Big|_1^x = 2 \ln x - 2 \ln 1 = 2 \ln x$$

۴۳- گزینه «۲»

$$y = x^2 + ax^2 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 2x + 2ax + 2bx + c \Rightarrow y'' = 2 + 2a + 4bx + 2c$$

معادله $y'' = 0$ وقتی دارای دو جواب است که $\Delta > 0$. بنابراین:

$$\Delta = (2a)^2 - 4(1)(2b) > 0 \Rightarrow 4a^2 > 8b$$

۴۴- گزینه «۴» چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ و قدر مطلق جملات سری نزولی هستند، بنابراین طبق آزمون لایب نیتز سری همگراست. ولی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

واگراست. بنابراین سری همگرای مشروط است.

۴۵- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \sqrt{x^2}}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{2x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{2x} = \frac{2}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{2x} = -\frac{2}{2} \end{cases}$$

چون حد چپ و راست در $x = 0$ با هم برابر نیست، پس حد وجود ندارد.

۴۶- گزینه «۲» ابتدا نشان می‌دهیم که $f(0) = 1$ در رابطه داده شده به جای a و b صفر قرار می‌دهیم، در این صورت:

$$f(0+0) = f(0)f(0) \Rightarrow f(0) = f(0)f(0) \xrightarrow{f(0) \neq 0} f(0) = 1$$

حال برای محاسبه $f'(x)$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} = f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = f(x)f'(0)$$

۴۷- گزینه «۳» گزاره بیان شده در گزینه (۳) همان قضیه نقطه ثابت می‌باشد و صحیح است. حال به بررسی سایر گزینه‌ها می‌پردازیم:

در گزینه (۱) وقتی $x \rightarrow \infty$ میل می‌کند، عبارت $\cos x$ به طور متناوب تغییر علامت می‌دهد و زیر رادیکال منفی می‌شود، پس حد وجود ندارد.

در گزینه (۲) اگر فرض کنیم $f(x) = x$ و $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ ، آنگاه توابع f و g در $x = 0$ حدی برابر صفر دارند ولی تابع g در $x = 0$ حدی برابر صفر دارند ولی تابع g در $x = 0$ حد ندارد.

در گزینه (۴) اگر فرض کنیم $f(x) = x^2$

۴۸- گزینه «۱» برای محاسبه انتگرال از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = \sin(\ln x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} \cos(\ln x) \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$I = \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

مجدداً برای محاسبه $\int \cos(\ln x) dx$ از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\frac{1}{x} \sin(\ln x) \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$I = \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - (x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx)$$

$$2I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) \Rightarrow I = \frac{1}{2} x \sin(\ln x) - \frac{1}{2} x \cos(\ln x)$$

از معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$f(x) = \frac{-1}{2} x \cos(\ln x)$$

$$(\sin x^x)' = (x^x)' \cos x^x = x^x (1 + \ln x) \cos x^x$$

۴۹- گزینه «۴» می‌دانیم $(x^x)' = x^x (1 + \ln x)$ بنابراین:

$$|x| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

۵۰- گزینه «۳» واضح است که شعاع همگرایی سری $R = \frac{1}{3}$ می‌باشد. بنابراین:

در نقطه مرزی $x = \frac{1}{3}$ سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ در می‌آید که همگراست و در $x = -\frac{1}{3}$ سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ در می‌آید که واگراست.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x f(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{3}} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۵۱- گزینه «۲»

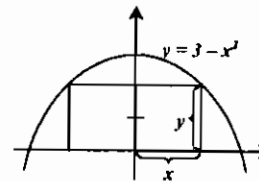
۵۲- گزینه «۱» ابتدا قرار می‌دهیم $f(x) = C_0 x + \frac{C_1}{2} x^2 + \frac{C_2}{3} x^3 + \dots + \frac{C_n}{n+1} x^{n+1}$. در این صورت واضح است که $f(0) = 0$ و طبق فرض $f(1) = 0$. بنابراین طبق قضیه رُل $f'(x) = C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n = 0$ در بازه $[0, 1]$ دارد.

۵۳- گزینه «۴»

با توجه به شکل مقابل مساحت مستطیل برابر $S = 2xy$ است و با جایگزینی y بر حسب x از رابطه داده شده به دست می‌آید:

$$S(x) = 2x(2 - x^2) = 4x - 2x^3 \Rightarrow S'(x) = 4 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 1, y = 2$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر $S = 2 \times 1 \times 2 = 4$ خواهد بود.



۵۴- گزینه «۲» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم.

$$2 \cos \theta = 1 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$$

بنابراین مساحت موردنظر برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} ((2 \cos \theta)^2 - 1^2) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4 \cos^2 \theta - 1) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + 2 \cos 2\theta) d\theta = (\theta + \sin 2\theta) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵۵- گزینه «۱» ابتدا بسط مکملورن تابع مقابل انتگرال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \Rightarrow \frac{1}{x^a + 1} = 1 - x^a + x^{2a} - x^{3a} + \dots$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a + 1} = \int_0^1 (1 - x^a + x^{2a} - x^{3a} + \dots) dx = \left(x - \frac{x^{a+1}}{a+1} + \frac{x^{2a+1}}{2a+1} - \frac{x^{3a+1}}{3a+1} + \dots \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2a+1} - \frac{1}{3a+1} + \dots$$

بنابراین:

۵۶- گزینه «۱» از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم.

$$y_1 = x^2, y_2 = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 = 2 - x^2 \Rightarrow x = -1, 1$$

نقاط تلاقی

$$V = 2\pi \int_0^1 x |f(x) - g(x)| dx = 2\pi \int_0^1 x(2 - x^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^1 (2x - 2x^3) dx = 2\pi \left(x^2 - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^1 = \pi$$

با توجه به اینکه ناحیه موردنظر در ناحیه اول قرار دارد فقط $x = 1$ قابل قبول است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{(n+i)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 (1 + \frac{i}{n})^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n (1 + \frac{i}{n})^2} = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = \int_1^2 \frac{dx}{x^2}$$

۵۷- گزینه «۳»

۵۸- گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x^2 + 1}} < \frac{1}{x^2}$ و چون $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}$ بنابراین طبق آزمون مقایسه انتگرال موردنظر همگراست و مقدارش از $\frac{1}{2}$ کمتر است. بنابراین گزینه «۲» صحیح است.

۵۹- گزینه «۱» ابتدا دامنه تابع را به دست می‌آوریم: $\log(2x - x^2) \geq 0 \Rightarrow 2x - x^2 \geq 1 \Rightarrow -(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x = 1$ بنابراین دامنه تابع فقط شامل نقطه $x = 1$ می‌باشد. که با قرار دادن این مقدار در تابع $y = f(1) = 0$ به دست می‌آید.

۶۰- گزینه «۳» جمله عمومی بسط به صورت زیر است که در آن $a + b + c = 7$.

$$\frac{7!}{a!b!c!} x^a \left(\frac{-2}{x}\right)^b (\sqrt{2})^c = \frac{7!}{a!b!c!} (-2)^b (\sqrt{2})^c x^{a-b}$$

جملات شامل x^5 در بسط به ازای مقادیر زیر برای a, b, c حاصل می‌شود:

$$a = 6, b = 1, c = 0 \text{ ضریب } x^5 = \frac{7!}{6!1!0!} (-2)^1 (\sqrt{2})^0 = -14$$

$$a = 5, b = 0, c = 2 \Rightarrow \text{ضریب} = \frac{7!}{5!2!} (-2)^0 (\sqrt{2})^2 = 42$$

۶۱- گزینه «۱» منحنی داده شده در مختصات قطبی به صورت $\rho^2 = 9\rho^2 \sin \theta \cos \theta$ و یا $\rho = 9 \sin \theta \cos \theta$ در می‌آید. بنابراین می‌خواهیم عبارت $x = \rho \cos \theta$ را تحت قید $\rho = 9 \sin \theta \cos \theta$ ماکسیم کنیم. با جایگزینی قید در عبارت به دست می‌آید:

$$x = \rho \cos \theta = 9 \sin \theta \cos^2 \theta \Rightarrow x' = 9 \cos^3 \theta - 18 \sin^2 \theta \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow 9 \cos \theta (\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0, \cot^2 \theta = 2$$

به ازای $\cos \theta = 0$ مقدار $x = 0$ می‌شود و از $\cot^2 \theta = 2$ نتیجه می‌شود:

$$\cot^2 \theta = 2 \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 9 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2\sqrt{3}$$

بنابراین بیشترین مقدار x برابر $2\sqrt{3}$ است.

۶۲- گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^5 = (e^{i2\theta})^5 = e^{i10\theta}$$

$$-(\sin \theta + i \cos \theta)^6 = -(\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \theta))^6 = e^{\pi i} (e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)})^6 = e^{i(\pi + 6(\frac{\pi}{2} - \theta))} = e^{i(\pi - 6\theta)}$$

$$e^{i10\theta} = e^{i(\pi - 6\theta)} \Rightarrow 10\theta = -6\theta + 2k\pi \Rightarrow 16\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{8}$$

بنابراین معادله داده شده به صورت روبرو در می‌آید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(\frac{n+1}{n})^n]}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n^n} = \infty$$

۶۳- گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n+1}{n})^n = e$ بنابراین:

۶۴- گزینه «۲» قرار می‌دهیم $\alpha = \sin^{-1} x$ و $\beta = \sin^{-1}(2x^2 - 1)$. در این صورت:

$$x = \sin \alpha \Rightarrow 2x^2 - 1 = 2\sin^2 \alpha - 1 = -\cos 2\alpha, \quad 2x^2 - 1 = \sin \beta$$

بنابراین $\sin \beta = -\cos 2\alpha$ و یا $\sin(-\beta) = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)$. که از آن نتیجه می‌شود $\beta - 2\alpha = \frac{-\pi}{2}$. یعنی تابع f داده شده، تابع ثابت $f(x) = \frac{-\pi}{2}$ می‌باشد. پس $f(x) + f'(x) = \frac{-\pi}{2}$.

۶۵- گزینه «۳»

۶۶- گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که به ازای $x = 2$ ، مقدار $y = 1$ به دست می‌آید.

$$x = y^2 + y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 2y^2 + 1 = 4$$

$$g(x) = x^2 + x \Rightarrow \frac{dg}{dx} = 2x + 1 = 5$$

$$\frac{dg}{dy} = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 5 \times 4 = 20 \Rightarrow \frac{dy}{dg} = \frac{1}{20}$$

از رابطه فوق نتیجه می‌شود:

۶۷- گزینه «۳» در همسایگی مبدأ داریم $\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}$ و $\tan x \sim x + \frac{x^3}{3}$. بنابراین در همسایگی مبدأ f به صورت

$$f(x) \sim x + \frac{x^3}{3} + x - \frac{x^3}{6} - 2x = \frac{x^3}{6}$$

که نمودار آن شبیه گزینه (۳) می‌باشد.

۶۸- گزینه «۴» انتگرال موردنظر برابر $120 = 5! = \Gamma(6)$ می‌باشد.

۶۹- گزینه «۲» از تغییر متغیر $x = \sin \theta$ ، $dx = \cos \theta d\theta$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\sin^2 \theta)(\sqrt{1-\sin^2 \theta})} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+\sin^2 \theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta + 2\sin^2 \theta}$$

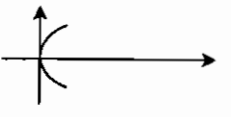
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cot^2 \theta + 2} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg}\left(\frac{\cot \theta}{\sqrt{2}}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

۷۰- گزینه «۴» دایره $r = \sin \theta$ به شعاع $\frac{1}{2}$ درون دلووار قائم $r = 1 + \sin \theta$ قرار می‌گیرد. بنابراین کافی است مساحت دلووار را به دست آورده، سپس مساحت دایره را از آن کم کنیم.

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \sin \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\sin \theta + \frac{1 - \cos 2\theta}{2}) d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

با توجه به اینکه مساحت دایره $\frac{\pi}{4}$ می‌باشد، مساحت موردنظر برابر $\frac{5\pi}{4} = \frac{2\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ خواهد بود.

۷۱- گزینه «۱» با حذف t بین x و y به رابطه $y = x \pm 2\sqrt{x}$ می‌رسیم. در همسایگی مبدأ $x \pm 2\sqrt{x} \sim \pm 2\sqrt{x}$ و بنابراین منحنی را می‌توان به صورت $y = \pm \sqrt{x}$ در نظر گرفت که نمودار آن به صورت زیر می‌باشد. و با توجه به شکل نمودار در مبدأ دارای خط مماس است و جهت تقعر نیز عوض می‌شود. پس مبدأ نقطه عطف می‌باشد.



۷۲- گزینه «۳» به ازای $x = 2$ عرض منحنی f برابر $y = 0$ است. $f(x) = \int_2^x \sqrt{t^2 + 5} dt \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x^2 + 5} \Rightarrow f'(2) = 3$. بنابراین معادله خط مماس $y = 3(x - 2)$ خواهد بود و از تلاقی آن با خط $y = x$ به دست می‌آید.

۷۳- گزینه «۳» سری داده شده $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^p}$ می‌باشد. با توجه به اینکه $\frac{n+2}{n^p} \sim \frac{1}{n^{p-1}}$ ، می‌توان نتیجه گرفت سری به ازای $1 > p - 1 > 0$ و یا $p > 2$ همگراست.

۷۴- گزینه «۲» برای نوشتن بسط مک لورن e^{-x} ، کافی است در بسط مک لورن e^x ، به جای x ، مقدار $-x$ را جایگزین کنیم.

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1 - e^{-x}}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \dots$$

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx \cong \int_0^1 (1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}) dx = (x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18}) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} \approx 0.8$$

۷۵- گزینه «۲» عبارت $4x - x^2$ در فاصله $[0, 4]$ نامنفی و در سایر جاها منفی می‌باشد. بنابراین برای ماکزیمم شدن انتگرال داده شده، قرار

$$\int_0^4 (4x - x^2) dx = (2x^2 - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^4 = \frac{32}{3}$$

می‌دهیم $a = 0$ و $b = 4$. در این صورت:

۷۶- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + \bar{z}_2| \Rightarrow |(x_1 - x_2) + (y_1 + y_2)i| = |(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)i|$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \Rightarrow x_1 x_2 = y_1 y_2$$

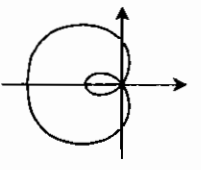
$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)i \Rightarrow \operatorname{Re}(z_1 z_2) = 0$$

از طرفی:

۷۷- گزینه «۴» از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = (\operatorname{Ln} x)^n \Rightarrow du = n(\operatorname{Ln} x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \\ dv = x^m dx \Rightarrow v = \frac{x^{m+1}}{m+1} \end{cases}$$

$$I_{m,n} = \frac{x^{m+1} (\operatorname{Ln} x)^n}{m+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{n}{m+1} x^m (\operatorname{Ln} x)^{n-1} dx = \frac{-n}{m+1} I_{m,n-1}$$



۷۸- گزینه «۳» از $r = 0$ نتیجه می‌شود $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$. حلقه داخلی با توجه به شکل به ازای $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

و $\frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq 2\pi$ ایجاد می‌شود. با توجه به تقارن شکل کافی است محاسبه برای $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ انجام شود و حاصل را در ۲ ضرب کنیم.

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sqrt{2} \cos \theta)^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sqrt{2} \cos \theta + 2 \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sqrt{2} \cos \theta)^2 d\theta = (\theta - 2\sqrt{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi - 2}{2}$$

۸۸- گزینه «۲»

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(Lnn)^{\sqrt{2}}}{(n+1)(Ln(n+1))^{\sqrt{2}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(Ln(n+1))^{\sqrt{2}}}{n(Lnn)^{\sqrt{2}}} = 1$$

$$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

در نقاط مرزی $x=1$ و $x=3$ ، سری به صورت $\sum \frac{1}{n(Lnn)^{\sqrt{2}}}$ و $\sum \frac{(-1)^n}{n(Lnn)^{\sqrt{2}}}$ در می‌آید که هر دو همگرا هستند.

۸۹- گزینه «۳» در واقع می‌خواهیم عبارت $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ و یا به طور معادل $d^2 = g(x, y) = x^2 + y^2$ را تحت قید $y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1}}$

مینیمم کنیم. با جایگزینی y از رابطه $y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1}}$ در معادله g نتیجه می‌شود:

$$g(x, y) = x^2 + \frac{2}{x^2 + 1} \Rightarrow g'(x) = 2x - \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 2x(x^2 + 1)^2 = 4x$$

از حل معادله فوق ۱ و -۱ و $x=0$ به دست می‌آید و مقادیر متناظر برابر y به ترتیب $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{2}$ خواهد بود. با جایگزینی نقاط $P^*(0, 2)$ ، $P^*(-1, \sqrt{2})$ ، $P^*(1, \sqrt{2})$ در d ، مشاهده می‌شود که حداقل مقدار ممکن برای d برابر $\sqrt{2}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^2(x^2 + 1 - x^2 + 1)}{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x^2}{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2 \cdot \frac{x^2}{x^2 - 1}} = e^2$$

۹۰- گزینه «۳»

۹۱- گزینه «۳» ابتدا حد f را در $x=0$ به دست می‌آوریم. برای محاسبه حد، بسط مکلورن e^{-x^2} را تا ۳ جمله می‌نویسیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - 1 + x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

از طرفی $f(0) = k$. بنابراین برای پیوستگی f در $x=0$ ، بایستی $k = \frac{1}{2}$ باشد.

$$f(x) = x^{\sin x} + (\sin x)^x \Rightarrow f'(x) = x^{\sin x} (\cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}) + (\sin x)^x (\ln \sin x + x \cdot \frac{\cos x}{\sin x})$$

۹۲- گزینه «۴»

با جایگذاری $\frac{\pi}{4}$ در معادله فوق نتیجه می‌شود $f'(\frac{\pi}{4}) = 1$.

$$(f^{-1})'(v) = \frac{1}{f'(f^{-1}(v))} = \frac{1}{\lambda x^2 + 12x^2 + 4x} \Big|_{x=1} = \frac{1}{24}$$

۹۳- گزینه «۱»

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx + \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx$$

۹۴- گزینه «۱» ابتدا انتگرال داده شده را به صورت مقابل می‌نویسیم:

حال به کمک تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ ، می‌توان به سادگی نشان داد که انتگرال اول قرینه انتگرال دوم می‌باشد. و بنابراین حاصل عبارت فوق برابر صفر است.

۷۹- گزینه «۳» در همسایگی $x=0$ ، $f(x)$ را می‌توان به صورت روبرو نوشت:

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x^2} = \frac{x - (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots)}{x^2} = \frac{x}{x^2} - \frac{x^2}{5!} + \dots$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{5!} + \dots, f''(x) = \frac{-6x}{5!} + \dots, f'''(x) = \frac{-6}{5!} + \dots \Rightarrow f'''(0) = \frac{-1}{20}$$

بنابراین:

۸۰- گزینه «۲» توجه کنید که در صورت مسأله، معادله‌ای داده نشده و احتمالاً منظور طراح معادله $f(x) = x^2 - 2x + 1 = 0$ بوده است. حال توجه کنید که:

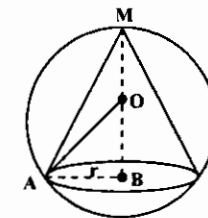
بنابراین طبق قضیه مقدار میانی معادله سه جواب دارد، که دو جواب آن در فاصله $[0, 2]$ است. به طور دقیق‌تر یک جواب در فاصله $[0, 1]$ و یک جواب در فاصله $[1, 2]$ می‌باشد.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{1} = 0$$

۸۱- گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که:

به همین ترتیب می‌توان نشان داد f در $x=0$ بی‌نهایت مرتبه مشتق‌پذیر است و تمام مشتقات آن از هر مرتبه‌ای برابر صفر است. پس f بسط تیلور دارد، ولی چون $f^{(n)}(0) = 0$ ، بنابراین بسط تیلور f به خود f همگرا نیست.

۸۲- گزینه «۳» با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} (h-1)^2 + r^2 = 1 \\ V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi (rh - h^2) h = \frac{\pi}{3} (rh^2 - h^3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow V'(h) = \frac{\pi}{3} (2rh - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = \frac{2}{3}, r = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

۸۳- گزینه «۱» شکل داده شده رز ۴ برگ می‌باشد و معادله آن $r = \cos 2\theta$ است.

۸۴- گزینه «۱» چون طبق فرض f زوج است، بنابراین $f(-x) = f(x)$ ، با مشتق‌گیری از طرفین این رابطه به دست می‌آید $f'(x) = -f'(-x)$ ، یعنی f' فرد است.

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

۸۵- گزینه «۳» به طور کلی داریم:

۸۶- گزینه «۴»

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cosh t \Rightarrow (\frac{x-1}{2})^2 - (\frac{y}{2})^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \\ y = 2 \sinh t \end{cases}$$

با توجه به اینکه x همواره مقداری مثبت است، بنابراین معادله فوق، فقط شاخه راست هذلولی را تشکیل می‌دهد.

۸۷- گزینه «۳»

$$x = e^t \cos t \Rightarrow x' = e^t \cos t - e^t \sin t, y = e^t \sin t \Rightarrow y' = e^t \sin t + e^t \cos t$$

$$x'^2 + y'^2 = (e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 = 2e^{2t}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_0^1 \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^1 e^t dt = \sqrt{2}(e - 1)$$

تست‌های سراسری ۱۳۸۶

MBA

۱- تابع با ضابطه $f(x) = (x-2)^2(x+4)$ در بازه $[a, b]$ وارون پذیر است. اگر $1 \in [a, b]$ باشد، بزرگترین مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۴/۵ (۴) ۵

۲- اگر $1 \leq x \leq 2$ و $f(x) = x^2 - 3x + 2$ و $g(x) = x^2 + x$ باشد، بزرگترین مقدار تابع $g \circ f$ کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۵۴ (۳) ۶۸ (۴) ۱۳۰

۳- به ازای کدام مقدار a نمودار معکوس تابع $f(x) = x^2 + ax$ از نقطه ماکزیمم منحنی به معادله $y = \log_2(4x - x^2)$ می‌گذرد؟

- (۱) ۳/۲ (۲) ۷/۲ (۳) ۱ (۴) ۲

۴- حاصل $\text{Arcsin}(\cos 2x)$ با شرط $x \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2} - 2x$ (۲) $\frac{2\pi}{3} - 2x$ (۳) $2x - \frac{\pi}{2}$ (۴) $2x - \frac{2\pi}{3}$

۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{x}{2x^2 + 1} \right]$ کدام است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) ۱/۲ (۳) ∞ (۴) موجود نیست.

۶- اگر $f(x) = \frac{1}{x^2} - x$ و $g(x) = [x]$ باشد، تابع $g \circ f$ در فاصله $[2, 2+k]$ پیوسته است. بیشترین مقدار k کدام است؟

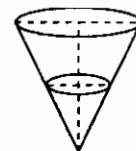
- (۱) ۲/۳ (۲) $-1 + \sqrt{3}$ (۳) $2 - \sqrt{3}$ (۴) ۱

۷- مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ هر خط مماس بر منحنی به معادله $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸- آب با سرعت $\frac{2}{5}$ لیتر در ثانیه وارد مخزن مخروطی شکل به ارتفاع ۲۰ دسی‌متر و قطر دهانه ۱۰ دسی‌متر می‌شود. پایین مخزن سوراخ

است وقتی ارتفاع آب ۱۶ دسی‌متر باشد سطح آب با سرعت ۱ میلی‌متر بر ثانیه بالا می‌آید. مقدار نشت آب در هر ثانیه چند لیتر است؟ ($16\pi = 50$)



- (۱) ۵/۰۶ (۲) ۵/۰۹ (۳) ۵/۱ (۴) ۵/۱۲

۹- از رابطه $9 = x^2 + 4y^2$ اگر $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{K}{y^2} = 0$ باشد، عدد K کدام است؟

- (۱) -۴/۹ (۲) -۹/۱۶ (۳) ۹/۱۶ (۴) ۴/۹

۱۰- زاویه بین مماس‌ها بر دو منحنی به معادلات $x^2 - 5y^2 + 2x + y = 0$ و $4x^2 - x^2y - x + 2y = 0$ در مبدأ مختصات چند درجه است؟

- (۱) صفر (۲) ۴۵ (۳) ۹۰ (۴) ۱۳۵

۱۱- اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{x^2 - x} & x \neq 0, 1 \\ a & x = 0, 1 \end{cases}$ در بازه $[0, 1]$ پیوسته باشد، a کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $-\pi$ (۳) π (۴) نشدنی

۱۲- در طرح یک آموزشکده اگر برای ۴۰ تا ۸۰ نفر جا منظور شود سود حاصل برای هر نفر ۱۶۰۰ واحد پول است. اگر ظرفیت بیش از ۸۰ نفر باشد عدد سود حاصل برای هر نفر به اندازه ۱۶ برابر ظرفیت اضافی بالای ۸۰ نفر کاهش می‌یابد. با کدام ظرفیت بیشترین سود حاصل می‌شود؟

- (۱) ۸۸ (۲) ۸۹ (۳) ۹۰ (۴) ۹۵

۱۳- حاصل $\int_a^b (t + \frac{1}{t})^2 (t^2 - 1) dt$ که در آن $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ و $\beta = 8 + \sqrt{63}$ می‌باشد، کدام است؟

- (۱) ۱۱۲/۳ (۲) ۱۲۱/۳ (۳) ۱۲۴/۳ (۴) ۱۴۲/۳

۱۴- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) ۱ (۴) ۱

۱۵- اگر $\cos x = \frac{1921}{1922}$ باشد، مقدار x چند رادیان است؟

- (۱) ۱/۳۷ (۲) ۱/۳۵ (۳) ۱/۳۱ (۴) ۱/۲۹

۱۶- اگر $i = \sqrt{-1}$ باشد، حاصل $\text{Ln}(\frac{x+iy}{x-iy})$ کدام است؟

- (۱) $i \tan^{-1} \frac{x}{y}$ (۲) $\tan(\sqrt{x^2 + y^2})$ (۳) $\tan \sqrt{x^2 - y^2}$ (۴) $i \tan^{-1} \frac{y}{x}$

۱۷- تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ، $-2 < x < 4$ به صورت سری توان‌های صعودی $(x-1)^n$ نوشته شده است. ضریب جمله شامل $(x-1)^n$ در این سری کدام است؟

- (۱) $\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$ (۲) $\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$ (۳) $\frac{(-1)^n}{3^n}$ (۴) $\frac{(-1)^n}{3^n}$

۱۸- حاصل $\int_0^{\infty} e^{-t} \cos^2 t dt$ کدام است؟

- (۱) ۵/۴ (۲) ۵/۶ (۳) ۵/۷ (۴) ۵/۸

ریاضی

۱۹- تابع f را روی $[0, 1]$ با ضابطه $f(x) = x$ هرگاه x گویا باشد و $f(x) = 1-x$ هرگاه x اصم باشد تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $g(x) = f(f(x))$ کدام گزاره درست است؟

- (۱) f و g تنها در نقطه $\frac{1}{4}$ پیوسته‌اند. (۲) f و g فقط در نقاط گویا پیوسته هستند.

- (۳) g در هر نقطه از $[0, 1]$ و f در نقاط گویا پیوسته است. (۴) g در هر نقطه از $[0, 1]$ و f تنها در $\frac{1}{4}$ پیوسته است.

۲۰- اگر $p, q > 0$ کدام گزینه در مورد انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ صحیح است؟

- (۱) هرگاه $0 < q < 1 < p$ همگراست. (۲) هرگاه $0 < p < 1 < q$ و $0 < q < 1$ همگراست. (۳) هرگاه $p > 1$ و $q > 1$ همگراست. (۴) به ازای هر p, q واگراست.

۲۱- بسط مکلاورن $2x \cos x^2 - 3x^2 \sin x^2$ کدام است؟

- (۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n+2)x^{6n+1}}{(2n)!}$ (۲) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{6n+1} (6n+2)}{(2n)!}$ (۳) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+1} (6n+2)}{(2n+1)!}$ (۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{6n+1} (6n+2)}{(2n+1)!}$

عمران

۳۳- معادله $\tan x + x^2 = 2$ دارای:

(۱) تنها یک ریشه در فاصله $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ است. (۲) دو ریشه در فاصله $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ است.

(۳) ریشه‌ای در فاصله $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ نیست. (۴) دارای سه ریشه در فاصله $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ است.

۳۴- حد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2^x}{x}$ برابر است با:

- (۱) صفر (۲) $\ln 2 + \ln 2 - 1$ (۳) $\ln 2 - \ln 2$ (۴) $\ln 2 + \ln 4 - 2$

۳۵- انتگرال $\int \frac{dx}{1+e^x}$ برابر است با:

- (۱) $C \ln(1-e^x) + x^2$ (۲) $C \ln(1-e^x) + x - x^2$ (۳) $x - \ln(1+e^x) + C$ (۴) $x + \ln(1+e^x) + C$

۳۶- مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ برابر با چیست؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۱

۳۷- شعاع همگرایی سری مقابل برابر با چیست؟ $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n})x^n$, $a > b > 0$

- (۱) $R = \frac{1}{b}$ (۲) $R = \frac{1}{a}$ (۳) $R = a$ (۴) $R = b$

۳۸- به ازای چه مقدار ثابت C، انتگرال $\int \frac{x-C}{\ln x} dx$ همگراست؟

- (۱) $C = -1$ (۲) $C = 1$ (۳) $C = 0$ (۴) $C = 2$

۳۹- مکان هندسی مجموعه تمام z های در صفحه مختلط که در شرط زیر صدق می‌کنند کدام است؟

$|z-1| + |z+1| = 1$

- (۱) پاره‌خط (۲) مجموعه تهی (۳) بیضی (۴) دایره

مکانیک

۴۰- فرض کنید n عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد و $I_n = \int (\cos x)^n dx$. در این صورت مقدار $I_n - (n-1)I_{n-2}$ برابر است با:

- (۱) $(\cos x)^{n-1} \sin x$ (۲) $(\cos x)^{n-2} (\sin x)^2$ (۳) $\cos x (\sin x)^{n-1}$ (۴) $(\cos x)^2 (\sin x)^{n-2}$

۴۱- کدامیک از توابع زیر برابر با $\sinh^{-1} x$ (تابع معکوس سینوس هذلولی) می‌باشد؟

- (۱) $-\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ (۲) $-\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ (۳) $\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ (۴) $\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

۴۲- فرض کنید a_n و b_n همواره مثبت باشند و $L \in \mathbb{R}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. کدامیک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(۱) اگر $L = 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

(۲) اگر $L > 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

(۳) اگر $L = 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

(۴) اگر $L > 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

۲۲- کدام گزینه در مورد $I_n = \int \ln^n x dx$ درست است؟

- (۱) I_n واگراست. (۲) I_n همگرا به $(-1)^n n!$ است. (۳) I_n همگرا به $(-1)^n n$ است. (۴) I_n همگرا به $(-1)^n$ است.

۲۳- کدام گزینه در مورد دنباله $(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n})^{\frac{1}{n}}$ ، $0 < a < b < c$ صحیح است؟

- (۱) واگراست. (۲) همگراست به $\frac{1}{a}$ (۳) همگراست به $\frac{1}{b}$ (۴) همگراست به $\frac{1}{c}$

۲۴- دنباله تعریف شده به صورت $r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$, $r_1 = 1$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

- (۱) دنباله $\{r_n\}$ نزولی و همگرا به $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است. (۲) دنباله $\{r_n\}$ صعودی و همگرا به $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

- (۳) زیر دنباله فرد $\{r_n\}$ نزولی و همگرا به $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است. (۴) زیر دنباله زوج $\{r_n\}$ نزولی و همگرا به $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

۲۵- هرگاه $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{x^j}{n} \sin \frac{jx}{n}$ ، $F(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

۲۶- شعاع، بازه و مرکز همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n}$ به ترتیب کدامند؟

- (۱) $[-1, 0], 1, \frac{-1}{2}$ (۲) $[-1, 0], 1, -\frac{1}{2}$ (۳) $[-1, 0], \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (۴) $[-1, 0], \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$

۲۷- اگر $A = \int \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx$ مقدار $\int \frac{\sin x}{x+2} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi+2} - A$ (۲) $\frac{1}{\pi+2} - \frac{1}{2} + A$ (۳) $\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} - A$ (۴) $\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} + A$

۲۸- در صورتی که بدانیم $f(\pi) = 2$ و $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \sin x dx = 5$ مقدار $f(0)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۵

۲۹- می‌دانیم $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ مقدار انتگرال $\int_1^{\infty} x^2 (\ln \frac{1}{x})^2 dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3^2} \Gamma(3)$ (۲) $\frac{1}{3^2} \Gamma(4)$ (۳) $\frac{1}{3^2} \Gamma(2)$ (۴) $\frac{1}{3^2} \Gamma(4)$

۳۰- در صورتی که $f(x) = \int_0^{x^2+1} \frac{f(t)}{t^2+2t+1} dt$ و $f(0) = 0$ ، $f'(x^2+1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{-1}{2(x+1)} + \frac{1}{2}$ (۲) $\frac{-1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}$

۳۱- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) e^{-1} (۳) ۱ (۴) e

۳۲- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+n+n^2)^{\frac{1}{n}}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) e (۴) ∞

آمار

۴۳- حد دنباله $\{n \sin \frac{\pi}{n}\}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) ∞

۴۴- فرض کنید $[x]$ جزء صحیح x باشد. برد تابع $g(x) = [x] - x$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 0]$ (۲) $(-1, 0)$ (۳) $[-1, 0]$ (۴) R

۴۵- نقطه‌های A و B به ترتیب روی محور x و y قرار دارند و نقطه M وسط قطعه خط AB قرار دارد. معادله خط AB کدام است؟

- (۱) $x + 2y = 8$ (۲) $4x + y = 11$ (۳) $2x + 3y = 12$ (۴) $3x + 2y = 12$

۴۶- $\int_0^{\pi} |\sin x| dx$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۷- تابع $y = |x^2 - 1|$ در $x = 1$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

- (۱) پیوسته است. (۲) مشتق دارد. (۳) ماکزیمم دارد. (۴) حد ندارد.

۴۸- شعاع همگرایی سری توانی $1 + 2x + 3^2 x^2 + 3^2 x^2 + 3^2 x^2 + 3^5 x^5 + \dots$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۴۹- دنباله $\{x_n\}$ حد دارد و به صورت $x_1 = 2$ و $x_n = 2x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$ ، $n = 2, 3, \dots$ تعریف شده است. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2} + 5}{2}$

۵۰- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ، $g(0) = g'(0) = 0$ ، $g''(0) = 7$ ، $g'(0) = 0$ ، $f'(0)$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۳۵ (۴) ۷۰

۵۱- مشتق تابع $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ در $x = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) صفر

مکاترونیک

۵۲- فرض کنید تابع f بر بازه $(2, 4)$ دارای مشتقات مراتب اول و دوم پیوسته باشد. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) + f(2-h) - 2f(2)}{h^2}$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ∞ (۳) $f''(2)$ (۴) $2f'(2)$

۵۳- با توجه به عبارت $x = \int \frac{dt}{\sqrt{5 + 6t^2}}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $y = 4$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴) ۵۰

۵۴- اگر $p > 1$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = A$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = B$ ، مقدار $C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ کدام است؟

- (۱) $C = \frac{p-1}{p} A$ (۲) $C = \frac{1}{p} A$ (۳) $C = \frac{p}{p+1} A$ (۴) $C = \frac{p+1}{p} A$

۴۳- اگر $f(x) = [x^2]$ (منظور از کروشه بزرگترین جزء صحیح است). $1 \leq x \leq 2$ ، آنگاه مقدار $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ به ازای $\sqrt{2} < x < 2$ کدام است؟

- (۱) $2(x-1)$ (۲) $5 - \sqrt{2} - \sqrt{2}$ (۳) $2(x - \sqrt{2})$ (۴) $3x - \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1$

۴۴- مساحت رویه‌ای را تعیین کنید که از دوران قسمتی از دلووار $r = 1 + \cos \theta$ واقع در ربع اول صفحه مختصات، حول محور x تشکیل می‌شود.

- (۱) 3π (۲) $\frac{8\pi}{3}$ (۳) $\frac{16\pi}{5} (1 - \frac{1}{4\sqrt{2}})$ (۴) $\frac{22\pi}{5} (1 - \frac{1}{4\sqrt{2}})$

۴۵- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{1 - x + \ln x}$ برابر است با:

- (۱) $-e$ (۲) -2 (۳) -1 (۴) ۲

معدن

۴۶- مساحت ناحیه نامتناهی راکه در ربع اول و بین خم $y = \tanh x$ و خط $y = 1$ واقع است برابر است با:

- (۱) ∞ (۲) $\ln 2$ (۳) $\cosh 2$ (۴) $2 \ln 2 - \cosh 2$

۴۷- سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{n^2}$ به ازای کدام مقادیر از x همگراست؟

- (۱) واگراست فقط اگر $x \geq 3$ (۲) همگراست اگر $2 \leq x \leq 3$ (۳) واگراست فقط اگر $x \leq 2$ (۴) همگراست اگر و فقط اگر $2 < x < 3$

۴۸- اگر $a_n = \frac{n!n!}{(2n)!}$ آنگاه شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برابر است با:

- (۱) $R = 1$ (۲) $R = 2$ (۳) $R = 4$ (۴) $R = \infty$

۴۹- فرض کنید که برای $n \geq 1$ ، $I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx$ و $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. کدامیک از روابط برگشتی داده شده صحیح است؟

- (۱) $I_n = \frac{n-1}{2} I_{n-1}$ (۲) $I_n = \frac{n-1}{2} I_{n+1}$ (۳) $I_n = -\frac{n-1}{2} I_{n-2}$ (۴) $I_n = \frac{(n-1)}{2} I_{n-2}$

۵۰- مساحت محصور به منحنی $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{a})^2 = 1$ را بیابید.

- (۱) π (۲) $\frac{2}{8} a^2 \pi$ (۳) $\frac{2}{3} a^2 \pi$ (۴) $\frac{4}{3} a^2 \pi$

۵۱- حجم جسم حاصل از دوران مساحت محصور به محورهای مختصات و منحنی $x^2 + y^2 = a^2$ حول محور x را حساب کنید.

- (۱) $5\pi a^3$ (۲) $\frac{1}{2} \pi a^3$ (۳) $\frac{1}{12} \pi a^3$ (۴) $\frac{1}{15} \pi a^3$

۵۲- مشتق تابع ضمنی زیر نسبت به متغیر x را به دست آورید:

$$\int_0^y e^{-t^2} dt + \int_0^{x^2} \sin^2 t dt = 0$$

- (۱) $-2xe^{y^2} \sin^2 x^2$ (۲) $-ye^{y^2} \sin^2 x^2$ (۳) $-2xe^{y^2} \sin^2 x^2$ (۴) $xe^{y^2} \sin x^2$

۵۳- حد $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ را حساب کنید.

- (۱) -1 (۲) e (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{e}$

۶۶- کدام انتگرال همگراست؟

(۱) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ (۲) $\int_0^5 \sec x dx$ (۳) $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ (۴) $\int_0^\infty \cos x dx$

۶۷- مساحت محصور به وسیله منحنی $r = \cos 2\theta$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{\pi}{8}$

۶۸- تابع $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$ بر کدام مجموعه پیوسته است؟

(۱) R (۲) $\{1, -1\}$ (۳) $R - \{-1, +1\}$ (۴) $R - \{0, +1, -1\}$

مدیریت سیستم و بهروری و مهندسی سیستمهای اقتصادی و اجتماعی

۶۹- با توجه به $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ سری $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ به کدام عدد همگراست؟

(۱) $\frac{1}{2} \ln 2$ (۲) $\frac{2}{3} \ln 2$ (۳) $\frac{2}{5} \ln 2$ (۴) $2 \ln 2$

۷۰- طول منحنی $r(\theta) = (\theta - \sin \theta)\bar{i} + (1 - \cos \theta)\bar{j}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۷۱- مساحت محدود به منحنی $x = t + t^2$, $y = t - t^2$, $0 \leq t \leq 1$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{4}{3}$

۷۲- در صفحه اعداد مختلط معادله $|z - (2 + i)| - |z + 3 + 4i| = 7$ معرف چه شکلی است؟

(۱) سهمی (۲) بیضی (۳) هذلولی (۴) دو خط راست

۷۳- اگر تابع f همه جا ناصفر و پیوسته باشد، $f'(x) = 2 \int_1^x f(t) \frac{2t+4}{t^2+4t+27} dt$ ، $f'(x) = 2$ ، $f(x)$ کدام است؟

(۱) $x^2 + 4x + 27$ (۲) $\ln(x^2 + 4x + 27)$ (۳) $\frac{2x+4}{x^2+4x+27}$ (۴) $\frac{x^2+4x+27}{2x+4}$

۷۴- مجموعه‌ای که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n$ روی آن همگراست، کدام است؟

(۱) $(-1, 1]$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $[1, +\infty)$ (۴) $(\frac{1}{2}, +\infty)$

۷۵- می‌دانیم که $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin 3x}{x^2} + \frac{a}{x^2} + b\right) = 0$ ، a و b کدامند؟

(۱) $b = -\frac{9}{2}$ و $a = -3$ (۲) $b = \frac{9}{2}$ و $a = -3$ (۳) $b = \frac{9}{2}$ و $a = 3$ (۴) $b = -\frac{9}{2}$ و $a = 3$

۷۶- کدام انتگرال واگراست؟

(۱) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ (۲) $\int_0^1 \ln x dx$ (۳) $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ (۴) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x dx$

۷۷- با توجه به معادله $v \geq 2$ مقدار $u = \int_2^v \frac{ds}{\sqrt{1+2s^2}}$ به ازای $v = 3$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{2}{\sqrt{19}}$ (۳) $2\sqrt{19}$ (۴) $\frac{\sqrt{19}}{2}$

۷۸- تابع g بر بازه $(-2, 0)$ دارای مشتقات مرتبه اول و دوم پیوسته است. $A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(-1+t) + g(-1-t) - 2g(-1)}{t^2}$ کدام است؟

(۱) ۰ (۲) $g''(-1)$ (۳) $2g'(-1)$ (۴) ∞

۷۹- اگر $x_n = \frac{P_n}{P}$ و $y_n = \frac{A_n}{A}$ به ترتیب نسبت محیط و مساحت n ضلعی منتظم محیط بر دایره به شعاع R به محیط و مساحت این دایره باشند، به ازای $n \geq 3$ رابطه بین $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ کدام است؟

(۱) $x_n = y_n$ (۲) $y_n = R x_n$ (۳) $x_n > y_n$ (۴) $x_n < y_n$

۸۰- اگر $A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ و $B = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ مقدار B بر حسب A کدام است؟

(۱) $B = \frac{A}{2}$ (۲) $B = \frac{2}{3}A$ (۳) $B = \frac{2}{5}A$ (۴) $B = \frac{2}{7}A$

۸۱- کدام سری واگراست؟

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

(۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$ (۴) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$

پاسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۶

۱- گزینه «۲» تابع در یک فاصله وارون پذیر است، اگر در آن فاصله یکنوا باشد.

$$f(x) = (x-2)^2(x+4) \Rightarrow f'(x) = 2(x-2)(x+4) + (x-2)^2 = (x-2)(2x+6) = 2(x-2)(x+4)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2, +2$$

بنابراین تابع f در بازه $[-2, 2]$ وارون پذیر است، زیرا در این فاصله مشتق تغییر علامت نمی‌دهد.

۲- گزینه «۳» با توجه به اینکه g تابعی اکیداً صعودی است ($g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$)، لذا بیشترین مقدار gof به ازای بیشترین مقدار f در فاصله $(-\infty, 1]$ حاصل می‌شود.

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, +1 \Rightarrow f(-1) = 4, f(1) = 0$$

$$g(f) = f^2 + f = 64 + 4 = 68$$

بنابراین بیشترین مقدار f برابر ۴ است، در نتیجه داریم:

۳- گزینه «۳» ابتدا نقطه ماکزیمم $y = \log_4(4x - x^2)$ را به دست می‌آوریم:

$$y' = \frac{4-2x}{(4x-x^2)\ln 4} = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = \log_4(4 \times 2 - 2^2) = 1$$

نقطه $P(2, 1)$ نقطه ماکزیمم تابع مورد نظر می‌باشد و چون نمودار تابع معکوس $f(x) = x^2 + ax$ از $P(2, 1)$ عبور می‌کند لذا نمودار خود تابع f از نقطه $P'(1, 2)$ عبور خواهد کرد.

$$2 = 1^2 + a \times 1 \Rightarrow a = 1$$

۴- گزینه «۴»

روش اول: ابتدا توجه کنید که داریم:

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \Rightarrow \pi \leq 2x \leq 2\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{2\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{2\pi}{2} + (2x - \frac{2\pi}{2})\right) = \sin(2x - \frac{2\pi}{2}) \Rightarrow \text{Arcsin}(\cos 2x) = \text{Arcsin}(\sin(2x - \frac{2\pi}{2})) = 2x - \frac{2\pi}{2}$$

تساوی آخر به این دلیل برقرار است که $2x - \frac{2\pi}{2}$ مقداری بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ است.

روش دوم: (عددگذاری): قرار می‌دهیم $x = \pi$ در این صورت:

$$\text{Arcsin}(\cos 2\pi) = \text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$$

در بین گزینه‌ها، تنها گزینه‌ای که به ازای $x = \pi$ برابر $\frac{\pi}{2}$ می‌شود، گزینه ۴ است.

۵- گزینه «۴» با توجه به اینکه علامت ∞ مشخص نشده، یکبار آنرا $+\infty$ و یکبار $-\infty$ فرض می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{x}{2x^2+1} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{0^+}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{x}{2x^2+1} \right] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{0^-}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \times (-1) = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{حد وجود ندارد.}$$

توضیح: در پاسخنامه سازمان سنجش گزینه (۱) به عنوان گزینه صحیح اعلام شده که احتمالاً اشتباهی در درج پاسخ صحیح صورت گرفته است.

۶- گزینه «۲»

$$gof = g(f(x)) = \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]$$

می‌دانیم تابع جزء صحیح معمولاً در نقاطی که عبارت درون جزء، صحیح، صحیح شود ناپیوسته است و چون به ازای $x = 2$ مقدار عبارت درون جزء صحیح برابر ۰ می‌شود، لذا نقطه ناپیوستگی بعدی تابع به ازای x ای حاصل می‌شود که به ازای آن $\frac{1}{2}x^2 - x = 1$ شود.

$$\Rightarrow x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow 2 + k = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow k = -1 + \sqrt{3}$$

۷- گزینه «۴» نقطه دلخواه $P(x_0, y_0)$ را روی منحنی مورد نظر در نظر می‌گیریم.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \Rightarrow y' = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{y}}} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = -\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت مقابل است:

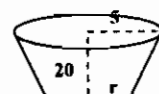
$$y - y_0 = -\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x - x_0)$$

برای به دست آوردن طول از مبدأ و عرض از مبدأ به ترتیب در معادله خط قرار می‌دهیم:

$$y = 0 \Rightarrow x = x_0 + \sqrt{x_0 y_0}, \quad x = 0 \Rightarrow y = y_0 + \sqrt{x_0 y_0}$$

$$x_0 + y_0 + 2\sqrt{x_0 y_0} = (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0})^2 = 4$$

۸- گزینه «۳» با توجه به شکل روبرو نتیجه می‌شود $r = \frac{1}{2}h$ بنابراین:



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{48}\pi h^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{16}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

با جایگزینی فرضیات مسأله در رابطه فوق نتیجه می‌شود $\left(\frac{2}{5}\right)$ لیتر برابر 600 cm^3 است:

$$600 - \text{مقدار نشتی} = \frac{1}{16}\pi \times 160^2 \times \frac{dh}{dt} = \frac{1}{16}\pi \times 160^2 \times \frac{0}{1} = 160\pi = 500$$

$$\Rightarrow \text{مقدار نشتی} = 600 - 500 = 100 \text{ cm}^3 = 0/1 \text{ لیتر}$$

۹- گزینه «۳»

$$x^2 + 4y^2 = 9 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{8y} = -\frac{x}{4y} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4y + 4xy'}{16y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4y - \frac{4x^2}{4y}}{16y^2} = \frac{-4y^2 - x^2}{16y^2} = \frac{-9}{16y^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{9}{16y^2} = 0$$

۱۰- گزینه «۳»

$$4x^2 - x^2y - x + 2y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{8x^2 - 2xy - 1}{-x^2 + 2} \Big|_{(0,0)} = \frac{+1}{2} = m$$

$$x^2 - 5y^2 + 2x + y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x^2 + 2}{-10y^2 + 1} \Big|_{(0,0)} = -2 = m'$$

با توجه به اینکه $mm' = -1$ می‌باشد، پس دو منحنی در مبدأ مختصات بر هم عمودند.

۱۱- گزینه «۲» برای پیوستگی f در بازه $[0, 1]$ لازم است روابط $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ برقرار باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi x}{x^2 - x} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi x}{x^2 - x} = -\pi \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin \pi x}{x^2 - x} \xrightarrow{\text{هوبیتال}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi \cos \pi x}{2x - 1} = -\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -\pi$$

۱۲- گزینه «۳» با توجه به فرضیات مسأله، سود از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$P = 1600(80 + x) - (80 + x)16x = 128000 + 320x - 16x^2 \quad (x \text{ تعداد ظرفیت اضافی است})$$

$$\frac{dP}{dx} = 320 - 32x = 0 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow \text{ظرفیت کل} = 10 + 80 = 90$$

۱۳- گزینه «۱» از تغییر متغیر $u = t + \frac{1}{t}$ استفاده می‌کنیم. در این صورت کرانه‌های انتگرال به صورت زیر عوض می‌شوند:

$$u = t + \frac{1}{t} = 2 + \sqrt{2} + \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = 4, \quad u = t + \frac{1}{t} = 8 + \sqrt{62} + \frac{1}{8 + \sqrt{62}} = \frac{128 + 16\sqrt{62}}{8 + \sqrt{62}} = 16$$

$$I = \int_4^{16} \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_4^{16} = \frac{128}{3} - \frac{16}{3} = \frac{112}{3}$$

۱۴- گزینه «۲»
$$\sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{i}{n})^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + (\frac{i}{n})^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctg}x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

۱۵- گزینه «۲» با توجه به اینکه مقدار $\cos x$ بسیار نزدیک به ۱ است، نتیجه می‌شود که x زاویه‌ای نزدیک به صفر است. بنابراین می‌توانیم از بسط مک‌لورن $\cos x$ استفاده کنیم:

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} = \frac{1921}{1922} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{1}{1922} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{961} \Rightarrow x = \frac{1}{31}$$

۱۶- گزینه «۴»
$$\text{Ln}\left(\frac{x+iy}{x-iy}\right) = \text{Ln}\left(\frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}}\right) = \text{Lne}^{2i\theta} = 2i\theta = 2i \text{Arctg} \frac{y}{x}$$

۱۷- گزینه «۱»
$$(x-1)^n \text{ ضریب جمله شامل } = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^n n!}{3^{n+1}} \Rightarrow \text{ضریب} = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$$

۱۸- گزینه «۲»
$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cos^2 t dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \times \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\infty} e^{-t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} \cos 2t dt \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1+2^2} \right) = 0/6$$

در محاسبه انتگرال دوم از فرمول $\int_0^{\infty} e^{-st} \cos at dt = \frac{s}{s^2 + a^2}$ استفاده کرده‌ایم.

۱۹- گزینه «۴» به سادگی می‌توان مشاهده کرد که $g(x) = x$ ، پس g همواره پیوسته است و f فقط در نقاطی پیوسته است که $x = 1-x$ یا $x = \frac{1}{2}$ باشد.

۲۰- گزینه «۱» انتگرال داده شده در $x = 0$ و بی‌نهایت ناسره می‌باشد. برای اینکه انتگرال در $x = 0$ همگرا باشد لازم است یکی از توانهای p یا q از ۱ کوچکتر باشد و برای همگرایی انتگرال در بی‌نهایت کافی است یکی از توانهای p یا q از ۱ بزرگتر باشد.

۲۱- گزینه «۱»
$$2x \cos x^2 - 2x^2 \sin x^2 = 2x \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \dots\right) - 2x^2 \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \dots\right) = 2x - 4x^3 + \dots$$

۲۲- گزینه «۲» از تابع گاما استفاده کنید.

۲۳- گزینه «۲» از رابطه $a < b < c$ نتیجه می‌شود $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$ ، بنابراین:
$$\left(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n}\right)^{1/n} \sim \left(\frac{1}{a^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{a}$$

۲۴- گزینه «۴» با نوشتن چند جمله اول دنباله می‌توان دید که زیر دنباله زوج به صورت نزولی و زیر دنباله فرد به صورت صعودی همگرا می‌باشند.

$$r = 1 + \frac{1}{r} \Rightarrow r^2 = r + 1 \Rightarrow r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

۲۵- گزینه «۴»
$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{x}{n} \sin\left(\frac{j}{n}\right) x^j = x \int_0^1 \sin tx^j dt = x \left(\frac{-1}{x^j} \cos tx^j\right) \Big|_0^1 = \frac{-1}{x} \cos x^j + \frac{1}{x} \Rightarrow F = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

۲۶- گزینه «۲» ابتدا سری داده شده را به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(x + \frac{1}{2}\right)^n$ می‌نویسیم. واضح است که $\frac{1}{2}$ مرکز همگرایی است و به سادگی می‌توان

نشان داد شعاع همگرایی $R = \frac{1}{2}$ است. بنابراین:
$$\left|x + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow -1 < x < 0$$

در نقطه مرزی $x = 0$ سری به صورت $\sum \frac{1}{n}$ در می‌آید که واگراست و در $x = -1$ سری به صورت $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ در می‌آید که همگراست.

۲۷- گزینه «۲» از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} \sin x dx = dv \Rightarrow v = -\cos x \\ v = \frac{1}{x+2} \Rightarrow du = \frac{-1}{(x+2)^2} dx \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+2} dx = \frac{-\cos x}{x+2} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx = \frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} - A$$

۲۸- گزینه «۳»
$$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \sin x dx = \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx + \int_0^{\pi} f''(x) \sin x dx$$

برای محاسبه هر یک از انتگرال‌های فوق از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = -f(x) \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x) \cos x dx = -f(\pi) \cos \pi + f(0) \cos 0 = 2 + f(0)$$

$$\begin{cases} u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} f''(x) \sin x dx = \sin x f'(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) \cos x dx = -\int_0^{\pi} f'(x) \cos x dx$$

$$\begin{cases} dv = f''(x) dx \Rightarrow v = f'(x) \\ u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \end{cases}$$

از جمع کردن حاصل انتگرال‌ها نتیجه می‌شود:
$$2 + f(0) = 5 \Rightarrow f(0) = 3$$

۲۹- گزینه «۴»
$$\int_0^1 x^r (\text{Ln} \frac{1}{x})^r dx = \int_0^1 x^r (-\text{Ln} x)^r dx = \frac{\Gamma(r)}{r^r}$$

یادآوری: در محاسبه انتگرال فوق از فرمول زیر استفاده کرده‌ایم.
$$\int_0^1 x^s (-\text{Ln} x)^n dx = \frac{\Gamma(n+1)}{(s+1)^{n+1}}$$

۳۰- گزینه «۱» عیناً تست ۱۶۱ صفحه ۲۶۷ کتاب می‌باشد. از طرفین رابطه مشتق می‌گیریم:

$$r \times r x^r f(x^r + 1) f'(x^r + 1) = \frac{f(x^r + 1)}{(x^r + 2)^r} \times r x^r \Rightarrow f'(x^r + 1) = \frac{1}{r(x^r + 2)^r}$$

$$\Rightarrow f'(x^r + 1) = \frac{1}{r((x^r + 1) + 1)^r} \Rightarrow f'(u) = \frac{1}{r(u+1)^r} \Rightarrow f(u) = \frac{-1}{r(u+1)} + c$$

با توجه به اینکه $f(0) = 0$ است، مقدار $c = \frac{1}{r}$ به دست می‌آید.

۳۱- گزینه «۱» از هم‌ارزی $n! \sim (\frac{n}{e})^n$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{n}{e}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n}{e} = \ln \frac{1}{e} = -1$$

۳۲- گزینه «۲»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \sim \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{1}{n}})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

۳۳- گزینه «۱» ابتدا معادله را به صورت $f(x) = 2 \operatorname{tg} x + x^2 - 2 = 0$ بازنویسی می‌کنیم.

با توجه به اینکه $f(0) < 0$ و $f(\frac{\pi}{4}) > 0$ ، پس معادله $f(x) = 0$ طبق قضیه مقدار میانی حداقل یک ریشه در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ دارد. از

طرفی $f'(x) = 2(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 2x > 0$ ، پس f تابعی اکیداً صعودی در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ است و لذا نمی‌تواند بیش از یک ریشه در این بازه داشته باشد.

۳۴- گزینه «۳»

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2^x}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \ln 2 - 2^x \ln 2}{1} = \ln 2 - \ln 2 = 0$$

۳۵- گزینه «۳»

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx = \int (1 - \frac{e^x}{1+e^x}) dx = x - \ln(1+e^x) + c$$

۳۶- گزینه «۴»

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}) = 1$$

۳۷- گزینه «۲»

۳۸- گزینه «۲» با توجه به اینکه انتگرال داده شده در $x=1$ ناسره است $(\ln 1 = 0)$ ، لازم است مقدار C طوری انتخاب شود که صورت کسر نیز در $x=1$ بر ابر صفر شود، یعنی:

۳۹- گزینه «۲» زیرا مجموع فواصل هیچ نقطه‌ای در صفحه مختلط از دو نقطه $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ برابر ۱ نمی‌باشد.

۴۰- گزینه «۱» از روش جزء به جزء استفاده کنید (فرض کنید $dv = \cos x dx$ و $u = \cos^{-1} x$)

۴۱- گزینه «۲» می‌دانیم $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ، حال توجه کنید که:

$$-\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}\right) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$$

۴۲- گزینه «۱» طبق آزمون نسبت.

۴۳- گزینه «۴»

$$F(x) = \int_1^x [t^2] dt = \int_1^{\sqrt{x}} 1 dt + \int_{\sqrt{x}}^x t dt + \int_x^x t dt = t \Big|_1^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} t^2 \Big|_{\sqrt{x}}^x + \frac{1}{2} t^2 \Big|_x^x$$

$$= (\sqrt{x} - 1) + (\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x) + (\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x) = \sqrt{x} - 1$$

۴۴- گزینه «۴» مساحت حاصل از دوران منحنی قطبی حول محور x ها از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin \theta \sqrt{r'^2 + r^2} d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \theta) \sin \theta \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \theta) \sin \theta \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1 + \cos \theta}{\sqrt{2}}) (\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}) \sqrt{2} \cos^{\frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$= 16\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{-32\pi}{\frac{5}{2}} \cos^{\frac{5}{2}} \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32\pi}{\frac{5}{2}} (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$$

۴۵- گزینه «۲» کافی است دو بار از قاعده هوییتال استفاده کنید.

۴۶- گزینه «۲»

$$S = \int_0^{\infty} (1 - \operatorname{tgh} x) dx = (x - \ln \cosh x) \Big|_0^{\infty} = (\ln e^x - \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}) \Big|_0^{\infty} = \ln \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} \Big|_0^{\infty} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

۴۷- گزینه «۲» واضح است که شعاع همگرایی سری $R=1$ است. بنابراین: $|2x - 5| < R = 1 \Rightarrow -1 < 2x - 5 < 1 \Rightarrow 2 < x < 3$ با بررسی نقاط مرزی $x=2$ و $x=3$ مشاهده می‌شود که سری در هر دو نقطه مرزی همگراست.

۴۸- گزینه «۳»

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{(2n)^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2$$

۴۹- گزینه «۴» برای یافتن رابطه بازگشتی موردنظر از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} dv = x e^{-x^2} dx \Rightarrow v = \frac{-1}{2} e^{-x^2} \\ u = x^{n-1} \Rightarrow du = (n-1)x^{n-2} dx \end{cases}$$

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx = \frac{x^{n-1}}{n-1} e^{-x^2} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{-1}{2} (n-1)x^{n-2} e^{-x^2} dx \Rightarrow I_n = \frac{1}{2} (n-1) I_{n-2}$$

۵۰- گزینه «۲» معادله داده شده را می‌توان به صورت پارامتری $x = a \cos^2 t$ ، $y = a \sin^2 t$ در نظر گرفت.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^2 t \times 2a \cos^2 t \sin t dt = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt$$

برای محاسبه انتگرال اخیر ساده‌ترین راه استفاده از تابع بتا می‌باشد که در این صورت:

$$S = 2a^2 \times \frac{1}{2} \beta\left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right) = a^2 \times \frac{\pi}{16} = \frac{\pi a^2}{8}$$

۵۱- گزینه «۴»

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow y = a + x - \frac{1}{2a^2 x^2}$$

$$V = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a (a^2 + x^2 + \frac{1}{4a^4} - \frac{2ax}{2} + \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{x^2}) dx$$

$$\Rightarrow V = \pi \left(a^2 x + \frac{x^3}{3} + \frac{x}{4a^4} - \frac{ax^2}{2} + \frac{1}{2a^2} x - \frac{1}{x} \right) \Big|_0^a = \frac{1}{15} \pi a^2$$

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = 2\sqrt{x-2} \Big|_2^5 = 2\sqrt{3}$$

۶۶- گزینه «۱»

۶۷- گزینه «۱» منحنی $r = 2 = \cos 2\theta$ ، رز ۴ برگ می‌باشد. با توجه به تقارن شکل کافی است مساحت محصور بوسیله منحنی در فاصله $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ را محاسبه کرده و سپس حاصل انتگرال را در ۸ ضرب کنیم.

$$S = 8 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

۶۸- گزینه «۳» تابع f را می‌توان به صورت $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| > 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ -1 & |x| < 1 \end{cases}$ نوشت و بنابراین f در نقاطی که $|x| = 1$ یا $x = \pm 1$ ناپیوسته است.

۶۹- گزینه «۲»

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots \quad (2)$$

$$\ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \dots$$

با جمع طرفین رابطه ۱ و ۲ خواهیم داشت:

بنابراین حاصل سری داده شده برابر $\frac{3}{4} \ln 2$ می‌باشد.

$$r(\theta) = (0 - \sin \theta)\vec{i} + (1 - \cos \theta)\vec{j} \Rightarrow r'(\theta) = (-\cos \theta)\vec{i} + \sin \theta\vec{j} \quad 70- \text{گزینه «۲»}$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos \theta} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = \int_0^{\pi} 2 \sin \frac{\theta}{2} d\theta = -4 \cos \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 4$$

$$\int_0^1 (t - t^2)(1 + 2t) dt = \int_0^1 (-2t^2 + t^3 + t) dt = \left(-\frac{2}{3}t^3 + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \quad 71- \text{گزینه «۱»}$$

یادآوری: مساحت محدود به منحنی پارامتری $x = f(t)$ و $y = g(t)$ از فرمول مقابل به دست می‌آید:

$$S = \int_a^b |g(t)| |f'(t)| dt$$

۷۲- گزینه «۳» به طور کلی اگر Z_1 و Z_2 دو عدد مختلط باشند، معادله $|Z - Z_1| - |Z - Z_2| = C$ معرف یک هذلولی است.

$$2f'(x)f'(x) = 2f'(x) \times \frac{2x+4}{x^2+4x+27} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x+4}{x^2+4x+27} \quad 73- \text{گزینه «۱»}$$

از رابطه اخیر نتیجه می‌شود $f(x) = x^2 + 4x + 27$.

۷۴- گزینه «۴» از آزمون ریشه n ام استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n\right|} = \left|\frac{x-1}{x}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x-1}{x} < 1 \Rightarrow -1 < 1 - \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin^2 x^2 \times 2x}{e^{-y^2}} = -2xe^{y^2} \sin^2 x^2 \quad 52- \text{گزینه «۱»}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n}}{n} = \frac{n}{n} = \frac{1}{e} \quad 53- \text{گزینه «۴»}$$

از هم‌ارزی $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{=} n \times \frac{\pi}{n} = \pi \quad 54- \text{گزینه «۳»}$$

۵۵- گزینه «۱» می‌دانیم $0 \leq x - [x] < 1$ بنابراین $-1 < [x] - x \leq 0$.

۵۶- گزینه «۴» نقطه $A(a, 0)$ و $B(0, b)$ می‌باشند. با توجه به اینکه M وسط قطعه خط AB قرار دارد نتیجه می‌شود $a = 4$ و $b = 6$. معادله خط موردنظر به صورت مقابل است:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 12$$

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4 \quad 57- \text{گزینه «۴»}$$

۵۸- گزینه «۱» ریشه ساده درون قدر مطلق می‌باشد. پس تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. همچنین واضح است که تابع در $x = 1$ پیوسته است.

۵۹- گزینه «۲»

$$2L = L + \frac{\Delta}{L} \Rightarrow L = \frac{\Delta}{L} \Rightarrow L^2 = \Delta \Rightarrow L = \sqrt{\Delta} \quad 60- \text{گزینه «۲»}$$

قرار می‌دهیم $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ در این صورت:

۶۱- گزینه «۳» برای محاسبه $f'(0)$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x)}{2} = 35$$

$$G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \Rightarrow G'(x) = e^{-x^2} \Rightarrow G'(0) = 1 \quad 62- \text{گزینه «۲»}$$

۶۳- گزینه «۳»

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) + f(2-h) - 2f(2)}{h^2} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2+h) - f'(2-h)}{2h} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(2+h) + f''(2-h)}{2} = f''(2)$$

$$x = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{5+6t^2}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{5+6y^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{5+6y^2} \quad 64- \text{گزینه «۲»}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\sqrt{5+6y^2}) = \frac{d}{dy}(\sqrt{5+6y^2}) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{12y}{2\sqrt{5+6y^2}} \times \sqrt{5+6y^2} = 6y = 24$$

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{r^p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \left(\frac{1}{r^p}\right)A \Rightarrow C = \left(1 - \frac{1}{r^p}\right)A \quad 65- \text{گزینه «۱»}$$

تست‌های سراسری ۱۳۸۷

MBA

۱- تعداد جملات گویا در بسط دو جمله‌ای $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^{25}$ کدام است؟

- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۷ (۳)
- ۸ (۴)

۲- اگر $f(x) = \cos x$ و $g(x) = 1 + \tan^2 x$ باشند، مقدار $(g \circ f)(\sqrt{2}-1)$ کدام است؟

- ۳ - $2\sqrt{2}$ (۱)
- ۵ $\sqrt{2} - 7$ (۲)
- ۱۳ - $9\sqrt{2}$ (۳)
- ۱۷ - $12\sqrt{2}$ (۴)

۳- نقطه M بر روی خط $y = 2x$ چنان انتخاب شده است که مجموع فواصل M از دو نقطه (۱, ۲) و (۳, ۴) کمترین مقدار ممکن را دارد. طول نقطه M کدام است؟

- ۲ (۱)
- $\frac{3}{2}$ (۲)
- $\frac{5}{3}$ (۳)
- $\frac{7}{4}$ (۴)

۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x})^{g(x)}$ اگر $g(x) = \frac{12}{x^2}$ باشد، کدام است؟

- ۱ (۱)
- e^{-1} (۲)
- e^{-2} (۳)
- صفر (۴)

۵- یکی از جواب‌های معادله $z^2 + iz - z^2 + 1 - iz - z^2 = 0$ به صورت $\cos \alpha + i \sin \alpha$ است. کمترین مقدار α در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- $\frac{\pi}{5}$ (۱)
- $\frac{\pi}{10}$ (۲)
- $\frac{2\pi}{5}$ (۳)
- $\frac{2\pi}{10}$ (۴)

۶- اندازه مشتق $\tan^{-1}(\sin 2x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- $\frac{1}{2}$ (۱)
- ۲ (۲)
- ۴ (۳)
- تعریف نشده (۴)

۷- اگر $f(\frac{1}{x}) = e^x$ باشد معادله خط مجانب مایل تابع $g(x) = \frac{x}{f(x)}$ است؟

- $y = x$ (۱)
- $y = x + 1$ (۲)
- $y = x - 1$ (۳)
- $y = x - 2$ (۴)

۸- اگر $u = x^2 + 2x$ و $t = u\sqrt{4-u}$ باشد، مقدار $\frac{dx}{dt}$ به ازای $u = 3$ کدام است؟

- $-1/6$ (۱)
- $-1/4$ (۲)
- $1/6$ (۳)
- $1/4$ (۴)

۹- می‌خواهیم از یک قطعه سیم به طول ۴۸ واحد پال‌های یک مکعب مستطیل را بسازیم. بیشترین حجم این مکعب مستطیل در صورتی که یکی از بعدها دو برابر بعد دیگر باشد، کدام است؟

- $\frac{572}{9}$ (۱)
- $\frac{512}{9}$ (۲)
- $\frac{488}{9}$ (۳)
- $\frac{472}{9}$ (۴)

۱۰- دو منحنی به معادلات $27y^2 = 4(x-2)^2$ و $y^2 = 4x$ در نقطه‌ای با کدام طول از یکدیگر می‌گذرند؟

- ۸ (۱)
- ۵ (۲)
- ۲ (۳)
- ۱ (۴)

۱۱- حاصل $\int \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$ ، کدام است؟

- $\frac{\pi^2}{4}$ (۱)
- $\frac{\pi^2}{2}$ (۲)
- $\frac{\pi}{4}$ (۳)
- $\frac{\pi}{2}$ (۴)

۱۲- مساحت محدود به دو منحنی به معادلات $y^2 - 2y^2 - x + 2y = 0$ و $y^2 + x - 2y = 0$ ، کدام است؟

- $\frac{2}{3}$ (۱)
- $\frac{4}{3}$ (۲)
- $\frac{5}{6}$ (۳)
- $\frac{1}{12}$ (۴)

۷۵- گزینه «۲» بسط مکالورن $\sin 2x$ را تا دو جمله می‌نویسیم.

$$\frac{\sin 2x}{x^r} + \frac{a}{x^r} + b = \frac{\sin 2x + ax + bx^r}{x^r} \xrightarrow{\text{بسط}} \frac{2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + ax + bx^r}{x^r} = \frac{(a+2)x + (b - \frac{27}{6})x^r}{x^r}$$

برای اینکه حاصل حد برابر صفر شود، لازم است $a+2=0$ و $b - \frac{27}{6} = 0$ باشد. یعنی $a = -2$ و $b = \frac{9}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \infty$$

۷۶- گزینه «۴»

۷۷- گزینه «۳»

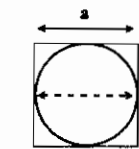
$$\frac{du}{dv} = \frac{1}{\sqrt{1+2v^2}} \Rightarrow \frac{dv}{du} = \sqrt{1+2v^2} \Rightarrow \frac{d}{du}(\sqrt{1+2v^2}) = \frac{d}{dv}(\sqrt{1+2v^2}) \cdot \frac{dv}{du} = \frac{2v}{\sqrt{1+2v^2}} \cdot \sqrt{1+2v^2} = 2v$$

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{d}{du}(2v) = \frac{d}{dv}(2v) \cdot \frac{dv}{du} = 2\sqrt{1+2v^2} \xrightarrow{v=2} \frac{d^2v}{du^2} = 2\sqrt{19}$$

۷۸- گزینه «۲» صورت مبهم است و برای محاسبه حد از قاعده هسپیتال استفاده می‌کنیم.

$$A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g'(-1+t) - g'(-1-t)}{2t} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g''(-1+t) + g''(-1-t)}{2} = \frac{2g''(-1)}{2} = g''(-1)$$

۷۹- گزینه «۳» به ازای $n = 4$ خواهیم داشت: $2r = a \Rightarrow r = \frac{a}{2}$



$$\begin{cases} P_n = \pi a \\ P = 2\pi r = 2\pi(\frac{a}{2}) = \pi a \Rightarrow \frac{P_n}{P} = \frac{a}{\pi} \end{cases} \quad \begin{cases} A_n = a^2 \\ A = \pi r^2 = \pi(\frac{a}{2})^2 = \frac{\pi a^2}{4} \Rightarrow \frac{A_n}{A} = \frac{4}{\pi} \end{cases}$$

ملاحظه می‌گردد که نسبت $\frac{A_n}{A}$ و $\frac{P_n}{P}$ با هم برابرند.

روش دوم: بین A_n و P_n رابطه: $A_n = \frac{RP_n}{r}$ برقرار است و بین A و P رابطه: $A = \frac{RP}{r}$ برقرار است. از تقسیم کردن طرفین این دو رابطه

نتیجه می‌شود که $\frac{A_n}{A} = \frac{P_n}{P}$

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6} A, \quad B = A - 2C \Rightarrow B = A - 2(\frac{1}{6}A) = \frac{2}{3}A$$

۸۰- گزینه «۱» قرار می‌دهیم $C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ ، در این صورت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n \times n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{واگراست}$$

۸۱- گزینه «۳»

(آنتونی رابینز)
(ضرب‌المثل آلمانی)

آنچه سرنوشت ما را تعیین می‌کند، شرایط زندگیمان نیست بلکه تصمیم‌های ماست.
بهتر است دوباره سوال کنی تا اینکه یکبار راه اشتباه بروی.

۱۳- سطح محدود به منحنی $y = \frac{\sqrt{\cos^2 x}}{\sin^2 x}$ محور x ها و دو خط به معادلات $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{\pi}{6}$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

- (۱) $\frac{7\pi}{3}$
- (۲) $\frac{5\pi}{3}$
- (۳) $\frac{4\pi}{3}$
- (۴) $\frac{2\pi}{3}$

۱۴- مختصات مرکز ثقل سطح همگن محدود به منحنی $y = \sqrt{6x - x^2}$ و محور x ها کدام است؟

- (۱) $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$
- (۲) $(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4})$
- (۳) $(\frac{3}{4}, \frac{\pi}{4})$
- (۴) $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$

۱۵- حاصل $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x^2} dx$ چند برابر حاصل $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{3}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{1}{4}$

ریاضی

۱۶- تابع $f(x) = x^2 \cos x$ دارای نمایش سری به صورت $f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$ است. که برای تمام مقادیر x برقرار است. C_4 عبارت است از:

- (۱) $-\frac{1}{6!}$
- (۲) $-\frac{1}{4!}$
- (۳) $\frac{1}{6!}$
- (۴) $\frac{1}{4!}$

۱۷- اگر f تابعی انتگرال پذیر و متناوب با دوره متناوب c باشد مقدار $\int_c^{c+c} f(x) dx$ کدام است؟

- (۱) $\int_c^a f(x) dx$
- (۲) $\int_a^c f(x) dx$
- (۳) $\int_a^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx$
- (۴) $\int_0^c f(x) dx$

۱۸- در مورد همگرایی یا واگرایی دنباله با ضابطه زیر کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

$a_n = 1, a_n = \min\{a_{n-1}, \cos n\}$

(۱) چون کران دار نیست، پس واگرا است.

(۲) نه نزولی و نه صعودی است و واگرا است.

(۳) چون صعودی و کراندار از بالا است، پس بنا به قضیه همگرایی یکنوا، همگرا است.

(۴) چون نزولی و کراندار از پایین است، پس بنا به قضیه همگرایی یکنوا، همگرا است.

۱۹- فرض کنیم a عدد حقیقی دلخواهی باشد. در این صورت همواره دنباله‌ای مانند $\{a_n\}$ از اعداد اصم موجود است به قسمتی که:

- (۱) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$
- (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = a$
- (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{a_n} = a$
- (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{a_n} = |a|$

۲۰- مشتق تابع $\cos^{-1}(1 + \text{tg}^{-1} \sqrt{x})$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{x(1+x)} \sqrt{-2\text{tg}^{-1} \sqrt{x} - (\text{tg}^{-1} \sqrt{x})^2}}$
- (۲) $\frac{-1}{\sqrt{x(1+x)} \sqrt{-2\text{tg}^{-1} \sqrt{x} - (\text{tg}^{-1} \sqrt{x})^2}}$
- (۳) $\frac{-1}{\sqrt{x(1+x^2)} \sqrt{-2\text{tg}^{-1} \sqrt{x} - (\text{tg}^{-1} \sqrt{x})^2}}$
- (۴) $\frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)} \sqrt{-2\text{tg}^{-1} \sqrt{x} - (\text{tg}^{-1} \sqrt{x})^2}}$

۲۱- اگر تابع f چنان باشد که $x^2 \cos \pi x = \int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt$ آنگاه $f(2)$ برابر است با:

- (۱) -16π
- (۲) -8
- (۳) 8
- (۴) 22

۲۲- کدام گزینه جواب انتگرال زیر است؟ $\int \cos(\ln x) dx$

- (۱) $x \cos(\ln x)$
- (۲) $x \sin(\ln x)$
- (۳) $\frac{1}{2} x (\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$
- (۴) $\frac{1}{2} x (\sin(\ln x) + \cos(\ln x))$

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۶
- (۴) ۸

۲۳- طول قوس منحنی $y = \text{Arcsin } x \pm \sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

۲۴- مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{\pi}{4} - \text{tg}^{-1} x) \cot g(\frac{1}{x})$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) ∞

۲۵- اگر $f(\int_0^x \frac{e^t}{t^2+1} dt) = x$ و برای $a \in \mathbb{R}$ ، $f(0) = a$ ، $f'(0) = a$ بر حسب a برابر است با:

- (۱) $\frac{a^2+1}{e^a}$
- (۲) $\frac{e^a}{a^2-1}$
- (۳) $\frac{e^a}{a^2+1}$
- (۴) $\frac{a^2-1}{e^a}$

۲۶- مقدار حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\}^{\frac{1}{n}}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{4}{e}$
- (۲) $\frac{e}{4}$
- (۳) ۱
- (۴) ∞

۲۷- اگر $f(x)$ تابعی مشتق پذیر بوده و $f(0) = 1$ و $f'(x) = \frac{1}{x} f(x)$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- (۲) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$
- (۳) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!}$
- (۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$

۲۸- فرض کنید $a_1 > 0$ و $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + A^2 a_n^{-1})$ ($n = 1, 2, \dots$)، $\{a_n\}$ صحیح است؟ ($A > 0$)

- (۱) واگرا است.
- (۲) صعودی و از بالا کراندار است.
- (۳) نزولی و از پایین کراندار است.
- (۴) یکنوا و کراندار است.

۲۹- فرض کنید f و g توابعی انتگرال پذیر بر $[0, 1]$ باشند و $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$ در این صورت اگر $f \geq g$ بر $[0, 1]$ یا $f \leq g$ بر $[0, 1]$ آنگاه با فرض آنکه بر $[0, 1]$ پیوسته باشد، داریم $f = g$ بر $[0, 1]$.

- (۱) $f - g$
- (۲) $f + g$
- (۳) f یا g
- (۴) f, g

۳۰- به ازای چه مقادیری از a در گزینه‌های زیر تابع $f(x)$ در صفر پیوسته است؟

- (۱) $\frac{1}{e^6}$
- (۲) $\frac{1}{e^2}$
- (۳) $\frac{1}{e^6}$
- (۴) $\frac{1}{e^2}$

۳۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^2 - n}{x}$ کدام است؟

- (۱) $\text{Ln } 2$
- (۲) $\text{Ln } n$
- (۳) $\text{Ln } n!$
- (۴) $\text{Ln}(n+1)$

۳۲- $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۱
- (۴) وجود ندارد.

مکانیک

۳۳- سطح محور به $y = \sin x$ ، $0 \leq x \leq \pi$ و محور x ، حول محورها دوران می‌کند حجم حاصل کدام است؟

- (۱) $2\pi^2$
- (۲) 3π
- (۳) 6π
- (۴) π^2

۳۴- طول قوس منحنی f کدام است؟

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2$$

- (۱) $\frac{5}{2}$
- (۲) $\frac{3}{2} + \ln 2$
- (۳) $2 + \frac{1}{2} \ln 2$
- (۴) $1 + \frac{3}{2} \ln 2$

۳۵- حد دنباله $\{a_n\}$ کدام است؟

$$a_n = (\sqrt[n]{n} - 1) \ln(n)$$

- (۱) 0
- (۲) 1
- (۳) $\frac{1}{e}$
- (۴) ∞

۳۶- شعاع همگرایی سری زیر کدام است؟ (a یک عدد گویای ثابت است.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin(na))x^n, \quad a \neq 0$$

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) 1
- (۳) 2
- (۴) به مقدار a بستگی دارد.

۳۷- ضریب x^{10} در بسط مک لوران تابع زیر کدام است؟

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

- (۱) -5
- (۲) 5
- (۳) 1
- (۴) -1

مهندسی معدن

۳۸- در مورد تابع $f(x) = x \ln x$ ، $0 < x \leq 1$ (نقطه ناپیوستگی رفع کردنی تابع است) کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

- (۱) دارای مینیمم مقدار $\frac{1}{e}$ است.
- (۲) دارای ماکزیمم مقدار $\frac{1}{e}$ است.
- (۳) تعقر منحنی در تمام بازه رو به بالاست.
- (۴) تعقر منحنی در تمام بازه رو به پایین است.

۳۹- اگر $f(x) = x\sqrt{3+x^2}$ ، آنگاه مقدار $(f^{-1})'(-2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$
- (۲) $\frac{\sqrt{7}}{11}$
- (۳) $\frac{5}{2}$
- (۴) $\frac{11}{\sqrt{7}}$

۴۰- اگر $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1 - (\frac{i}{n})^2}$ ، آنگاه مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{8}$
- (۲) $\frac{\pi}{4}$
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) $\frac{\pi}{2}$

۴۱- فاصله (بازه) همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ را تعیین کنید؟

- (۱) $[0, 1]$
- (۲) $(0, 2]$
- (۳) $(0, 1)$
- (۴) $[0, 2)$

۴۲- ناحیه‌ای بی‌کران تحت منحنی $y = f(x) = x - \frac{2}{x}$ از $x=0$ تا $x=1$ حول محورها دوران کرده است. حجم V جسم دوار بی‌کران حاصل را بیابید؟

- (۱) π
- (۲) 2π
- (۳) 4π
- (۴) 8π

آمار

۴۳- مجموعه A شامل نقاطی از صفحه است که عدد مختلط متناظر با آنها یعنی z در نابرابری $|\frac{z+i-1}{z-i}| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ صدق می‌کند. کدام نقطه به A تعلق دارد؟

- (۱) $(-2, 1)$
- (۲) $(0, -1)$
- (۳) $(2, -1)$
- (۴) $(1, -1)$

۴۴- اگر $\int_{-a}^{+a} y(y+a)^{1000} dy = 0$ و $a \geq 0$ ، a کدام است؟

- (۱) 0
- (۲) $\frac{1000}{999}$
- (۳) $\frac{1000}{1001}$
- (۴) $\frac{1001}{1002}$

۴۵- به ازای چه مقادیری از a ، $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^2}{1 + \cos(\frac{\pi x}{a})}$ برابر $\frac{2}{\pi^2}$ است؟

- (۱) $\pm \frac{1}{2}$
- (۲) ± 1
- (۳) $\pm \sqrt{2}$
- (۴) ± 2

۴۶- اگر $f(x) = x^{(x^{x^2-1})}$ ، مقدار تابع f را در $x=1$ چه مقداری انتخاب کنیم تا در این نقطه پیوسته شود؟

- (۱) \sqrt{e}
- (۲) e
- (۳) $1 + \frac{1}{e}$
- (۴) $\sqrt{e} + 1$

۴۷- مقدار $\lim_{n \rightarrow +\infty} [\frac{1}{n} \ln(1 + \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} \ln(1 + \frac{2}{n}) + \dots + \frac{1}{n} \ln n]$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) $\ln 2$
- (۳) $2 \ln 2 - 1$
- (۴) e

۴۸- دنباله $\{a_n\}$ را به صورت $(n^2 + 2)a_{n+1} - (n^2 + 1)pa_n = 0$ ، $a_0 = 1$ ، $a_n \geq 0$ ، n هر n ، اگر همگرا باشد، کدام گزینه درست است؟ همگرایی مطلق کدام است؟

- (۱) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- (۲) $(-1, 1)$
- (۳) $(-2, 2)$
- (۴) $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

۴۹- فرض کنید بازای هر n ، $a_n \geq 0$ ، اگر $\sum a_n$ همگرا باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $\sum \sqrt{a_n}$ همگراست.
- (۲) $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ همگراست.
- (۳) $\sum \frac{1}{n^2 \sqrt{a_n}}$ همگراست.
- (۴) $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{1+a_n}$ همگراست.

۵۰- اگر $x_n = \sin(\sin(\dots(\sin(1))\dots))$ ، کدام گزاره صحیح است؟

- (۱) $\{x_n\}$ به صفر همگراست.
- (۲) $\{x_n\}$ واگراست.
- (۳) $\{x_n\}$ به 1 همگراست.
- (۴) $\{x_n\}$ صعودی است.

مدیریت سیستم و بهره‌وری و مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی

۵۱- $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^{1-x}$ کدام است؟

- (۱) 1
- (۲) ∞
- (۳) e
- (۴) $\frac{1}{e}$

۵۲- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در شرط‌های $f(1) = 2$ و $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ، $x, y \in \mathbb{R}$ صدق می‌کند. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ کدام است؟

- (۱) 0
- (۲) 1
- (۳) 2
- (۴) 3

۵۳- در مورد تابع $x \geq 0$ ، $g(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cosh t}$ ، کدام گزاره درست است؟

- (۱) $g(x) = \tan^{-1}(\sinh x)$
- (۲) $g(x) = \tan^{-1}(e^x)$
- (۳) $g(x) = \ln(\tan x)$
- (۴) $g(x) = \tanh^{-1}(e^x)$

۵۴- مساحت واقع بین محور y ها، خط $y = x$ و منحنی $y = \frac{2}{1+x^2}$ کدام است؟

- (۱) π
- (۲) $\frac{\pi}{2}$
- (۳) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$
- (۴) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$

۵۵- مساحت بین خم $y = e^{-|x|}$ و محور x ها کدام است؟

- (۱) ∞
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

۵۶- کدام سری واگرا است؟

- (۱) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots$
- (۲) $\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{2 \ln 3} + \dots$
- (۳) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} + \dots$
- (۴) $\frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{2(\ln 3)^2} + \frac{1}{4(\ln 4)^2} + \dots$

۵۷- اگر $a > 1$ عددی ثابت باشد، شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} (a + (-1)^n) x^n$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{a}$
- (۲) $\frac{1}{a-1}$
- (۳) $\frac{1}{a+1}$
- (۴) $\frac{a+1}{a-1}$

۵۸- انتگرال نامعین $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x + 25 \cos^2 x}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{10} \tan^{-1}(\frac{2}{5} \tan x) + c$
- (۲) $\frac{1}{10} \tan(\frac{2}{5} \tan x) + c$
- (۳) $\frac{1}{10} \tan^{-1}(\frac{2}{5} \tan^{-1} x) + c$
- (۴) $\frac{1}{10} \tan(\frac{2}{5} \tan^{-1} x) + c$

۵۹- مجموع سری $|x| < 1$ $1 - 2x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \dots$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2x}{1+x^2}$
- (۲) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$
- (۳) $\frac{1+x}{1+x^2}$
- (۴) $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$

۶۰- فرض کنید $\alpha > 1$ ، $c > 0$ اعدادی ثابت باشند. دنباله $\{x_n\}$ با تعریف $x_{n+1} = (1 - \frac{1}{\alpha})^n x_n + \frac{c}{\alpha} x_n^{1-\alpha}$ و $x_1 = c$ م به کدام عدد همگرا است؟

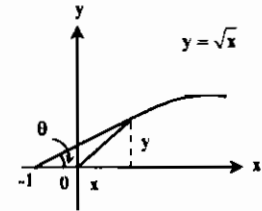
- (۱) $\sqrt[\alpha]{c}$
- (۲) $\sqrt[\alpha]{\alpha}$
- (۳) $\frac{\alpha}{\alpha-1}$
- (۴) $\frac{\alpha \sqrt[\alpha]{\alpha}}{\sqrt[\alpha]{\alpha-1}}$

۶۱- میانگین تابع $f(x) = |x|$ بر بازه $[0, 100]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{49}{5}$
- (۲) ۵۰
- (۳) $\frac{50}{5}$
- (۴) ۵۱

۶۲- بیشترین مقدار زاویه θ در شکل مقابل کدام است؟

- (۱) $\theta = \frac{\pi}{2}$
- (۲) $\theta = \frac{\pi}{4}$
- (۳) $\theta = \tan^{-1} \frac{1}{3}$
- (۴) $\theta = \tan^{-1} \frac{1}{2}$



۶۳- مساحت تولید شده به وسیله دور اول ماریچ ارشمیدسی $\theta \geq 0$ و $r = \frac{1}{2\pi} \theta$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) 2π
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) $\frac{4\pi^2}{3}$

معماری کشتی

۶۴- مقدار انتگرال معین $\int_1^e e^{2t} \ln(2 \ln x + 1) x dx$ کدام است؟

- (۱) $e^e - 1$
- (۲) $e^2 - 1$
- (۳) $e^{\sqrt{e}} - 1$
- (۴) $e^{e^2} - 1$

۶۵- مکان اعداد مختلط $z = x + iy$ که در نامساوی $|\frac{z-i}{z+i}| \leq \frac{\sqrt{2}(1+i)}{1-i}$ صدق کند کدام است؟

- (۱) محیط دایره‌ای به مرکز $(0, 0)$ و شعاع ۴
- (۲) محیط و خارج دایره‌ای به مرکز $(-2, 0)$ و شعاع $2\sqrt{2}$
- (۳) محیط و خارج دایره‌ای به مرکز $(-2, 0)$ و شعاع $2\sqrt{2}$
- (۴) محیط و داخل دایره‌ای به مرکز $(0, 2)$ و شعاع $2\sqrt{2}$

مهندسی نفت

۶۶- بسط تیلور حول $x_0 = 0$ (بسط مک‌لورن) تابع $\arctan x$ کدام است برای $|x| < 1$ ؟

- (۱) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$
- (۲) $x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
- (۳) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$
- (۴) $x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

۶۷- با فرض $x > 1$ بسط $\tan^{-1} x$ کدام است.

- (۱) $\tan^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$
- (۲) $\tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \dots$
- (۳) $\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots$
- (۴) $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

مهندسی کشاورزی

۶۸- اگر $f(x) = \log_7^2$ ، $g(x) = \sqrt{1-2\sin x}$ باشند برد تابع fog کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 0)$
- (۲) $(-\infty, \frac{1}{7})$
- (۳) $(-1, 1)$
- (۴) $(-\frac{1}{7}, 0)$

۶۹- دامنه تابع $f(x) = \arcsin \frac{1}{x-1}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 1]$
- (۲) $[0, 2]$
- (۳) $[2, +\infty)$
- (۴) $\mathbb{R} - (0, 2)$

۷۰- اگر $f(x) = \frac{1+\sin x}{\sin x}$ آن‌گاه $f^{-1}(3)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\pi}{3}$
- (۲) $-\frac{\pi}{6}$
- (۳) $\frac{\pi}{6}$
- (۴) $\frac{\pi}{3}$

۷۱- معادله درجه سوم $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$ از نظر تعداد و علامت ریشه‌ها چگونه است؟

- (۱) یک ریشه منفی
- (۲) یک ریشه مثبت
- (۳) ریشه ساده مثبت - مضاعف منفی
- (۴) ریشه ساده منفی - مضاعف مثبت

۷۲- اگر $f(x) = -x^2 + 2x$ ، $g(x) = (x)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{x}$ بیشترین مقدار تابع fog کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{5}{4}$
- (۴) $\frac{31}{4}$

۷۳- مجانب‌های تابع $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$ خط $y = \frac{2}{3}x$ را در دو نقطه A و B قطع می‌کند، اندازه پاره خط AB کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$
- (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$
- (۳) $\frac{5}{3}$
- (۴) $\frac{5}{2}$

۷۴- حد عبارت $\sin 2x(\cot gx + \cot g2x)$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۲ (۴) ∞

۷۵- مشتق $\cos(\pi \cos x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\pi}{2}$ (۲) صفر (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

۷۶- مشتق عبارت $\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}}$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۷۷- معادله خط مماس بر منحنی $y = e^{2x-1}$ در نقطه $x = \frac{1}{2}$ واقع بر آن کدام است؟

- (۱) $y = -2x$ (۲) $y = -x$ (۳) $y = x$ (۴) $y = 2x$

۷۸- تعقر نمودار تابع $f(x) = x^2 - 3x^2$ در کدام بازه به طرف‌های مثبت است؟

- (۱) $(-\infty, +\infty)$ (۲) $(0, +\infty)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $(1, 2)$

۷۹- دنباله با جمله عمومی $u_n = \cos \frac{n\pi}{3}$ چگونه است؟

- (۱) همگرا به ۱ (۲) همگرا به صفر (۳) همگرا به ۱ (۴) واگرا

۸۰- اگر $x + y = 3$ باشد کمترین مقدار $x^2 + y^2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{27}{4}$ (۲) $\frac{27}{8}$ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{9}{4}$

۸۱- مقدار تقریبی $\sqrt[3]{31/2}$ با استفاده از دیفرانسیل کدام است؟

- (۱) $1/980$ (۲) $1/985$ (۳) $1/990$ (۴) $1/995$

۸۲- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ae^{-x} & ; x \geq 0 \\ x + \frac{b}{x-1} & ; x < 0 \end{cases}$ همواره مشتق‌پذیر است. a, b کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۲ (۴) -۲

۸۳- اگر $F(\alpha) = \int_{\alpha}^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ حاصل $\lim_{\alpha \rightarrow 1} F(\alpha)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۸۴- اگر $F(\alpha) = \int_{\alpha}^2 \frac{dt}{t^2 - 7}$ معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $y = x - 1$ (۲) $y = 2x - 2$ (۳) $y = x + 1$ (۴) $y = 2x + 1$

۸۵- مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = 1 - \lg^2 x$ و محورها، در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ کدام است؟

- (۱) $\pi - 2$ (۲) $\pi - 1$ (۳) $\frac{\pi}{2} - 1$ (۴) π

باسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۷

۱- گزینه «۲» بطور کلی جمله عمومی بسط بصورت روبرو می‌باشد:
 $T_{k+1} = \binom{25}{k} (\sqrt{2})^{25-k} (\sqrt{5})^k = \binom{25}{k} 2^{\frac{25-k}{2}} \times 5^{\frac{k}{2}}$

در رابطه بالا $0 \leq k \leq 25$ می‌باشد و مقادیر k باید طوری انتخاب شود که بر ۳ بخش‌پذیر باشند و همچنین $(25-k)$ بر ۲ بخش‌پذیر باشد که در این صورت k مقادیر ۲۳ و ۲۷ و ۲۱ و ۱۵ و ۹ و ۳ را می‌تواند اتخاذ کند.

۲- گزینه «۴»
 $g(\cos x) = 1 + \lg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x^2}$

$(gog)(\sqrt{2}-1) = g\left(\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}\right) = g\left(\frac{1}{3-2\sqrt{2}}\right) = (3-2\sqrt{2})^2 = 17-12\sqrt{2}$

۳- گزینه «۳» نقطه $P(x, 2x)$ روی خط موردنظر قرار دارد و مجموع فواصل آن از دو نقطه داده شده برابر است با:

$f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (2x-2)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (2x-4)^2}$
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{2x-2}{\sqrt{(x-1)^2 + (2x-2)^2}} + \frac{2x-4}{\sqrt{(x-2)^2 + (2x-4)^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

روش دوم: قرینه یکی از نقاط داده شده را نسبت به خط $y = 2x$ بدست آورده، سپس معادله خط گذرنده از نقطه دیگر و نقطه قرینه شده را بیابید و دو خط را تلاقی دهید.

۴- گزینه «۳»
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln \left(\frac{\sin x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} (\sin x - x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} (-x)} = e^{-1}$

۵- گزینه «۲» با ضرب معادله در $(1+iz)$ نتیجه می‌شود:
 $1+iz^2 = 0 \Rightarrow z^2 = \frac{-1}{i} = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$

۶- گزینه «۳»
 مشتق $= \frac{2 \cos 2x}{1 - \sin^2 2x} = \frac{2 \cos 2x}{\cos^2 2x} = \frac{2}{\cos 2x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos \frac{\pi}{3}} = 4$

۷- گزینه «۳»
 $f\left(\frac{1}{x}\right) = e^x \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow g(x) = \frac{x}{e^x}$

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$h = \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{e^x} - x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - e^x) \sim \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{-1}{x}\right) = -1$

۸- گزینه «۲» به ازای $u = 3$ مقدار $x = 1$ و $t = 3$ حاصل می‌شود.

$\frac{du}{dx} = 2x^2 + 2 \xrightarrow{x=1} \frac{du}{dx} = 4$, $\frac{dt}{du} = \sqrt{4-u} + \frac{-u}{2\sqrt{4-u}} \xrightarrow{u=3} \frac{dt}{du} = -\frac{1}{2}$

و بنابراین $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4}$ بدست می‌آید.

۹- گزینه «۲» یال‌های مکعب را $2x \cdot x \cdot y$ و y فرض می‌کنیم، در این صورت:

$$4x + 4x + 4y = 48 \Rightarrow 2x + y = 12$$

$$\begin{cases} 2x + y = 12 \\ V = x \times 2x \times y = 2x^2 y \end{cases} \Rightarrow V = 24x^2 - 6x^3 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = 48x - 18x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{3}, y = 4$$

بنابراین حجم مکعب مستطیل $\frac{512}{9}$ خواهد بود.

۱۰- گزینه «۱»

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y^2 = \frac{4}{27}(x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{27}(x-2)^2 = 4x \Rightarrow x = 8, x = -1$$

توجه کنید که جواب $x = -1$ قابل قبول نیست.

۱۱- گزینه «۱» می‌دانیم $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$ بنابراین:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\pi \text{Arc tg}(\cos x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}$$

۱۲- گزینه «۴»

$$\begin{cases} x = 2y - y^2 \\ x = y^2 - 2y^2 + 2y \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی منحنی‌ها}} y = 0, 1$$

$$S = \int_0^1 ((2y - y^2) - (y^2 - 2y^2 + 2y)) dy = \int_0^1 (y^2 - y^2) dy = \frac{1}{12}$$

۱۳- گزینه «۳»

$$V = \pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x(1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x} dx = \pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) dx = \pi \left(\frac{-1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{4\pi}{3}$$

۱۴- گزینه «۴» معادله داده شده را می‌توان بصورت $y = \sqrt{9 - (x-3)^2}$ نوشت که نیم‌دایره‌ای به شعاع ۳ و مرکز $P(3, 0)$ است. با توجه به تقارن نیم‌دایره نسبت به خط $x = 3$ ، مرکز ثقل روی این خط قرار دارد. برای محاسبه عرض مرکز ثقل از قضیه پاپوس استفاده می‌کنیم. از دوران نیم‌دایره حول محور x ‌ها کره‌ای به شعاع ۳ بدست می‌آید که حجم کره برابر 36π می‌باشد مساحت نیم‌دایره برابر $\frac{9\pi}{2}$ است، حال طبق قضیه پاپوس:

$$36\pi = 2\pi \bar{y} \times \frac{9\pi}{2} \Rightarrow \bar{y} = \frac{4}{\pi}$$

۱۵- گزینه «۳» از تغییر متغیر $x = t^2, dx = 2t dt$ نتیجه می‌شود:

$$I = \int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^4} dt$$

مجدداً با تغییر متغیر $u = t^2, du = 2t dt$ نتیجه می‌شود:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$f(x) = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) = x^2 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{4!} - \frac{x^8}{6!} \Rightarrow C_1 = \frac{-1}{6!}$$

۱۶- گزینه «۱»

۱۷- گزینه «۱» طبق خواص انتگرال معین داریم:

$$\int_a^{a+c} f(x) dx = \int_c^c f(x) dx$$

۱۸- گزینه «۴» واضح است که دنباله مورد نظر نزولی و کران پایین آن -1 می‌باشد، پس همگراست.

۱۹- گزینه «۱»

۲۰- گزینه «۲»

۲۱- گزینه «۴» از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم.

$$2x \cos \pi x - \pi x^2 \sin \pi x = \frac{1}{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) \xrightarrow{x=4} \lambda = \frac{1}{2} f(2) \Rightarrow f(2) = 22$$

۲۲- گزینه «۴» با استفاده از روش انتگرال‌گیری جز به جز، انتگرال مورد نظر به دست می‌آید.

۲۳- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc tg } x \right) \cot \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \text{Arc tg } x}{\text{tg } \frac{1}{x}} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \text{Arc tg } x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\frac{e^x}{x^2+1} f' \left(\int_c^x \frac{e^t}{t^2+1} dt \right) = 1$$

۲۵- گزینه «۱» با مشتق‌گیری از طرفین رابطه داده شده نتیجه می‌شود:

۲۶- گزینه «۱»

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

۲۷- گزینه «۲» از رابطه $f'(x) = \frac{1}{x} f(x)$ نتیجه می‌شود $f(x) = e^{-x}$ و بسط مک‌لورن تابع مورد نظر $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ می‌باشد.

۲۸- گزینه «۳» واضح است که کران پایین دنباله 0 و دنباله نزولی می‌باشد.

۲۹- گزینه «۱»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} (\sin x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\sin x - x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-\frac{x^2}{6} - \dots}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

۳۱- گزینه «۳» از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^x - n}{x} \xrightarrow{\text{هوییتال}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x \text{Ln } x + x^x \text{Ln } x + \dots + n^x \text{Ln } n}{1} = \text{Ln } x + \text{Ln } x + \dots + \text{Ln } n = \text{Ln}(n!)$$

۳۲- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} \xrightarrow{\text{هوییتال}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt + x e^{x^2}}{2x e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{2x e^{x^2}} \right) + \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{هوییتال}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{x^2}}{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۳۳- گزینه «۱» از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi(-x \cos x + \sin x) \Big|_0^\pi = 2\pi^2$$

۳۴- گزینه «۳»

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx = \int_1^r \sqrt{1+\left(\frac{x}{r}-\frac{1}{rx}\right)^2} dx = \int_1^r \left(\frac{x}{r} + \frac{1}{rx}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2r} + \frac{1}{r} \ln x\right) \Big|_1^r = r + \frac{1}{r} \ln r$$

۳۵- گزینه «۱» می‌دانیم $0 \leq L_{nn} < \sqrt{n}$ بنابراین $(\sqrt{n}-1)\sqrt{n} < L_{nn} < (\sqrt{n}-1)\sqrt{n}$ و چون $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n}-1)\sqrt{n} = \infty$ پس طبق قضیه ساندویچ حد مورد نظر نیز برابر صفر است.

۳۶- گزینه «۱»

۳۷- گزینه «۴» می‌دانیم $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots$ بنابراین:

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} - \frac{x}{1-x^2} = (1+x^2+x^4+\dots) - x(1+x^2+x^4+\dots)$$

بنابراین ضریب مورد نظر ۱- می‌باشد.

۳۸- گزینه «۳»

$$f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = \ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(e^{-1}) > 0 \Rightarrow \text{نقطه } x = e^{-1} \text{ نقطه می‌نیم تابع است}$$

مقدار تابع در این نقطه $f(e^{-1}) = \frac{-1}{e}$ می‌باشد و در بازه مورد نظر همواره $f'' > 0$ است، پس تقعر منحنی روبه بالاست.

۳۹- گزینه «۳»

$$x\sqrt{x^2+3} = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{\sqrt{3+x^2} + x \times \frac{2x}{2\sqrt{3+x^2}}} = \frac{5}{2}$$

۴۰- گزینه «۲»

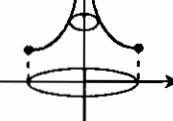
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

انتگرال مورد نظر برابر مساحت ربع دایره‌ای به شعاع ۱ است.

۴۱- گزینه «۴» واضح است که $R=1$ ، بنابراین:

در نقطه $x=0$ سری به صورت $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ در می‌آید که یک سری همگراست ولی در $x=2$ سری $\sum \frac{1}{n}$ حاصل می‌شود که واگراست.

۴۲- گزینه «۳» از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:



$$V = 2\pi \int_0^1 x(x^{\frac{-r}{2}}) dx = 2\pi(r\sqrt{x}) \Big|_0^1 = 4\pi$$

۴۳- گزینه «۱»

$$\left| \frac{x+iy+i-1}{x+iy-i} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow r(x-1)^2 + r(y+1)^2 \geq x^2 + (y-1)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 \geq x^2 + (y-1)^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 \geq 10$$

۴۴- گزینه «۴»

$$\int_{-a}^{1-a} y(y+a)^{100} dy = \int_{-a}^{1-a} (y+a)^{100} dy + \int_{-a}^{1-a} (-a)(y+a)^{100} dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(y+a)^{100r}}{100r} \Big|_{-a}^{1-a} + (-a) \times \frac{(y+a)^{100}}{100} \Big|_{-a}^{1-a} = 0 \Rightarrow \frac{1}{100r} + (-a) \times \frac{1}{100} = 0 \Rightarrow a = \frac{100}{100r}$$

۴۵- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^r}{1+\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)} \stackrel{\text{هویتال}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x-a)^{r-1}}{-\frac{\pi x}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)} \stackrel{\text{هویتال}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{r}{-\frac{\pi r}{a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)} = \frac{ra^r}{\pi^r}$$

بنابراین $a^r = 1$ یعنی $a = \pm 1$.

۴۶- گزینه «۱»

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^{x^x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{x^x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{x^{x-1}} = e^1 = \sqrt{e}$$

۴۷- گزینه «۳» حد مورد نظر برای انتگرال روبرو است:

$$I = \int_0^1 \ln(1+x) dx = ((1+x)\ln(1+x) - x) \Big|_0^1 = r \ln r - 1$$

۴۸- گزینه «۲»

$$(n^r + r)a_{n+1} - (n^r + 1)pa_n = 0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n^r + 1)p}{n^r + r}$$

طبق آزمون نسبت $|P| < 1$ حاصل می‌شود یعنی $-1 < P < 1$.

۴۹- گزینه «۲»

۵۰- گزینه «۱» دنباله x_n دنباله‌ای نزولی و کراندار است، و بنابراین همگراست می‌توان آن را به صورت بازگشتی زیر تعریف کرد:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sin(a_n) \end{cases}$$

در این صورت اگر حد آن را L فرض کنیم نتیجه می‌شود $L = \sin L$ و در نتیجه $L = 0$.

۵۱- گزینه «۴»

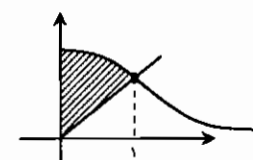
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^{1-x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{-x} = \frac{1}{e}$$

۵۲- گزینه «۱» تابع مورد نظر را می‌توان تابع $f(x) = 2x$ در نظر گرفت در این صورت مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ می‌باشد.

۵۳- گزینه «۳»

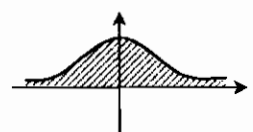
۵۳- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

$$g(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cosh t} = \int_0^x \frac{r dt}{e^t + e^{-t}} = \int_0^x \frac{re^t dt}{e^{2t} + 1} = r \text{Arctg}(e^t) \Big|_0^x$$



$$S = \int_0^1 \left(\frac{r}{1+x^2} - x \right) dx = \left(r \text{Arctg} x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

۵۵- گزینه «۳»



$$S = r \int_0^\infty e^{-x} dx = -re^{-x} \Big|_0^\infty = r$$

۵۶- گزینه «۲» سری داده شده در گزینه (۲)، سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nLn n}$ است بر طبق آزمون انتگرال وگراست.

۵۷- گزینه «۳» طبق آزمون ریشه

۵۸- گزینه «۱» $\int \frac{dx}{\sqrt{2\sin^2 x + 2\cos^2 x}} = \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt{2\delta + 4\delta \tan^2 x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctg}(\frac{\sqrt{2}}{\delta} \tan x) + c$

۵۹- گزینه «۲» قرار می‌دهیم $S = 1 - 2x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \dots$ در این صورت:

$\int S dx = x - x^3 + x^5 - x^7 + \dots = x(1 - x^2 + x^4 - \dots) = \frac{x}{1+x^2} + c$
حال با مشتق‌گیری از طرفین رابطه فوق نتیجه می‌شود:
 $S = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

۶۰- گزینه «۴» حد دنباله موردنظر را L فرض می‌کنیم. در این صورت:

$L = (1 - \frac{1}{\alpha})^r L + \frac{r}{\alpha} L^{1-\alpha} \Rightarrow \frac{r}{\alpha} L^{-\alpha} = \frac{r}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^r} \Rightarrow L = \sqrt[r]{\frac{r\alpha}{r\alpha-1}}$

۶۱- گزینه «۱» میانگین $= \frac{1}{100} \int_0^{100} [x] dx = \frac{1}{100} \times \frac{100 \times 99}{2} = 49.5$

۶۲- گزینه «۴» $\text{tg} \theta = \frac{y}{x+1} = \frac{\sqrt{x}}{x+1} = f(x)$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \text{tg} \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \text{Arctg} \frac{1}{2}$

۶۳- گزینه «۳» $S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi^2} \theta^2 d\theta = \frac{1}{8\pi^2} \times \frac{\theta^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}$

۶۴- گزینه «۴» از تغییر متغیر $du = (2x \ln x + x) dx$ ، $u = x^2 \ln x$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$\int_1^e e^{x^2 \ln x} (2x \ln x + 1) x dx = \int e^u du = e^u = e^{x^2 \ln x} \Big|_1^e = e^{e^2} - 1$

۶۵- گزینه «۲» با توجه به اینکه $|\frac{\sqrt{2}(1+i)}{1-i}| = \sqrt{2}$ ، بنابراین رابطه داده شده بصورت زیر در می‌آید:

$|\frac{z-i}{z+i}| \leq \sqrt{2} \Rightarrow |\frac{x+(y-1)i}{x+(y+1)i}| \leq \sqrt{2}$
 $\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 \leq 2(x^2 + (y+1)^2) \Rightarrow x^2 + y^2 + 6y + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + (y+3)^2 \geq 8$

۶۶- گزینه «۱» $\text{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

۶۷- گزینه «۳» وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $\text{Arctg} x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ، بنابراین بسط موردنظر نیز وقتی $x \rightarrow \infty$ میل کند باید به $\frac{\pi}{2}$ میل کند که تنها گزینه (۳) این ویژگی را دارد.

۶۸- گزینه «۲» $\text{fog} = f(g(x)) = \log_r \sqrt{1-2\sin x}$
می‌دانیم $-\infty \leq \log_r \sqrt{1-2\sin x} \leq \frac{1}{r} \Rightarrow -\infty < \sqrt{1-2\sin x} \leq \sqrt{r}$ بنابراین:

۶۹- گزینه «۴» $-1 \leq \frac{1}{x-1} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 1 & \Rightarrow x \geq 2 \\ \text{یا} & \\ x-1 \leq -1 & \Rightarrow x \leq 0 \end{cases}$

۷۰- گزینه «۳» $\frac{1+\sin x}{\sin x} = r \Rightarrow r \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{r} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

۷۱- گزینه «۱»

۷۲- گزینه «۱» چون تابع g صعودی است ($g'(x) > 0$)، بنابراین بیشترین مقدار $g \circ f$ وقتی حاصل می‌شود که f ماکزیمم باشد.

$f'(x) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1) = 0$

۷۳- گزینه «۱» مجانب‌های f خطوط $x = 1$ و $x = -1$ می‌باشند.

$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (\frac{r}{f} + \frac{r}{f})^2} = \frac{5}{f}$

۷۴- گزینه «۳» $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin 2x (\frac{1}{\text{tg} x} + \frac{1}{\text{tg} 2x}) \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{x \rightarrow \infty} 2x (\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}) = 2$

۷۵- گزینه «۴» $y = \cos(\pi \cos x) \Rightarrow y' = \pi \sin x \sin(\pi \cos x) \Rightarrow y' = (\frac{\pi}{r}) = \frac{\pi\sqrt{r}}{r}$

۷۶- گزینه «۱» $y = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{r} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})$

$y' = \frac{1}{r} (\frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}) \Rightarrow y'(r) = \frac{-1}{6}$

۷۷- گزینه «۴» به ازای $x = \frac{1}{r}$ مقدار $y = 1$ حاصل می‌شود.

$y' = r e^{rx-1} \Rightarrow y'(\frac{1}{r}) = 2$
معادله خط مماس $y-1 = r(x - \frac{1}{r}) \Rightarrow y = rx$

۷۸- گزینه «۲» $f'(x) = \frac{r}{r}(x^{\frac{1}{r}} - x^{-\frac{1}{r}}) \Rightarrow f''(x) = \frac{r}{r} (\frac{1}{r} x^{-\frac{1}{r}} + \frac{1}{r} x^{-\frac{3}{r}})$
همواره مثبت. توجه کنید که دامنه بازه $[0, +\infty)$ است.

۷۹- گزینه «۴» $a_n = \{0, -1, 0, 1, \dots\}$

۸۰- گزینه «۱» $y = r - x \Rightarrow x^r + y^r = x^r + (r-x)^r = f(x)$

$f'(x) = rx^{r-1} - r(r-x)^{r-1} = 0 \Rightarrow x = \frac{r}{2}, y = \frac{r}{2} \Rightarrow \min(x^r + y^r) = \frac{97}{4}$

۸۱- گزینه «۳» می‌دانیم $\sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{na^{n-1}}$ بنابراین:

$$\sqrt[5]{2^5 - 0.8} \approx 2 - \frac{0.8}{5 \times 2^4} = 2 - \frac{1}{100} = 1.99$$

۸۲- گزینه «۱»

$$f(0^+) = f(0^-) \Rightarrow a = -b \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$f'(0^+) = f'(0^-) \Rightarrow -a = 1 - b \Rightarrow b - a = 1$$

۸۳- گزینه «۴» از تغییر متغیر $u = \ln x$ ، $du = \frac{dx}{x}$ نتیجه می‌شود:

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{\ln x} \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 1} f(\alpha) = 2\sqrt{\ln x} \Big|_1^c = 2$$

۸۴- گزینه «۲» به ازای $x = 1$ مقدار $y = f(1) = 0$ حاصل می‌شود.

$$f'(x) = \frac{1}{(2x)^2 - 7} \times 2 \Rightarrow f'(1) = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x - 1)$$

۸۵- گزینه «۱»

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \operatorname{tg}^2 x) dx = (2x - \operatorname{tg} x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$$

صداقت، بهترین سیاست است.
خداوند زیورک است اما نادرست نیست.

(ضرب‌المثل انگلیسی)
"اینشتن"

پاسخنامه تست‌های تکمیلی

فصل اول: تابع

۱- گزینه «۲»	۲- گزینه «۴»	۳- گزینه «۱»	۴- گزینه «۲»	۵- گزینه «۳»
۶- گزینه «۲»	۷- گزینه «۴»	۸- گزینه «۱»	۹- گزینه «۲»	۱۰- گزینه «۱»
۱۱- گزینه «۲»	۱۲- گزینه «۱»	۱۳- گزینه «۳»	۱۴- گزینه «۲»	۱۵- گزینه «۲»
۱۶- گزینه «۱»	۱۷- گزینه «۱»	۱۸- گزینه «۱»	۱۹- گزینه «۲»	۲۰- گزینه «۱»
۲۱- گزینه «۳»	۲۲- گزینه «۲»	۲۳- گزینه «۲»	۲۴- گزینه «۱»	۲۵- گزینه «۱»
۲۶- گزینه «۱»	۲۷- گزینه «۲»	۲۸- گزینه «۲»	۲۹- گزینه «۱»	۳۰- گزینه «۱»
۳۱- گزینه «۲»	۳۲- گزینه «۳»	۳۳- گزینه «۳»	۳۴- گزینه «۳»	۳۵- گزینه «۱»
۳۶- گزینه «۱»	۳۷- گزینه «۱»	۳۸- گزینه «۴»	۳۹- گزینه «۲»	۴۰- گزینه «۱»
۴۱- گزینه «۱»	۴۲- گزینه «۳»	۴۳- گزینه «۳»	۴۴- گزینه «۱»	۴۵- گزینه «۴»
۴۶- گزینه «۳»	۴۷- گزینه «۳»	۴۸- گزینه «۱»	۴۹- گزینه «۱»	۵۰- گزینه «۳»
۵۱- گزینه «۴»	۵۲- گزینه «۳»	۵۳- گزینه «۳»	۵۴- گزینه «۴»	۵۵- گزینه «۴»
۵۶- گزینه «۳»	۵۷- گزینه «۲»	۵۸- گزینه «۱»	۵۹- گزینه «۴»	۶۰- گزینه «۳»
۶۱- گزینه «۱»	۶۲- گزینه «۴»	۶۳- گزینه «۲»	۶۴- گزینه «۲»	۶۵- گزینه «۱»
۶۶- گزینه «۲»	۶۷- گزینه «۴»	۶۸- گزینه «۲»	۶۹- گزینه «۳»	۷۰- گزینه «۱»
۷۱- گزینه «۲»	۷۲- گزینه «۲»	۷۳- گزینه «۲»	۷۴- گزینه «۱»	۷۵- گزینه «۴»
۷۶- گزینه «۳»	۷۷- گزینه «۲»	۷۸- گزینه «۳»	۷۹- گزینه «۴»	۸۰- گزینه «۴»
۸۱- گزینه «۴»	۸۲- گزینه «۱»	۸۳- گزینه «۱»	۸۴- گزینه «۲»	۸۵- گزینه «۲»
۸۶- گزینه «۳»	۸۷- گزینه «۳»	۸۸- گزینه «۲»	۸۹- گزینه «۴»	۹۰- گزینه «۳»

فصل دوم: حد و پیوستگی

۱- گزینه «۱»	۲- گزینه «۲»	۳- گزینه «۲»	۴- گزینه «۳»	۵- گزینه «۴»
۶- گزینه «۱»	۷- گزینه «۴»	۸- گزینه «۳»	۹- گزینه «۳»	۱۰- گزینه «۴»
۱۱- گزینه «۱»	۱۲- گزینه «۴»	۱۳- گزینه «۳»	۱۴- گزینه «۱»	۱۵- گزینه «۴»
۱۶- گزینه «۲»	۱۷- گزینه «۱»	۱۸- گزینه «۲»	۱۹- گزینه «۲»	۲۰- گزینه «۱»
۲۱- گزینه «۴»	۲۲- گزینه «۱»	۲۳- گزینه «۳»	۲۴- گزینه «۲»	۲۵- گزینه «۴»
۲۶- گزینه «۱»	۲۷- گزینه «۱»	۲۸- گزینه «۴»	۲۹- گزینه «۱»	۳۰- گزینه «۳»
۳۱- گزینه «۳»	۳۲- گزینه «۳»	۳۳- گزینه «۱»	۳۴- گزینه «۳»	۳۵- گزینه «۱»
۳۶- گزینه «۱»	۳۷- گزینه «۳»	۳۸- گزینه «۳»	۳۹- گزینه «۲»	۴۰- گزینه «۱»
۴۱- گزینه «۱»	۴۲- گزینه «۱»	۴۳- گزینه «۲»	۴۴- گزینه «۴»	۴۵- گزینه «۳»
۴۶- گزینه «۴»	۴۷- گزینه «۲»	۴۸- گزینه «۳»	۴۹- گزینه «۳»	۵۰- گزینه «۱»
۵۱- گزینه «۱»	۵۲- گزینه «۲»	۵۳- گزینه «۳»	۵۴- گزینه «۲»	۵۵- گزینه «۳»
۵۶- گزینه «۱»	۵۷- گزینه «۱»	۵۸- گزینه «۲»	۵۹- گزینه «۱»	۶۰- گزینه «۴»
۶۱- گزینه «۴»	۶۲- گزینه «۳»	۶۳- گزینه «۳»	۶۴- گزینه «۳»	۶۵- گزینه «۱»
۶۶- گزینه «۲»	۶۷- گزینه «۳»	۶۸- گزینه «۲»	۶۹- گزینه «۲»	۷۰- گزینه «۱»
۷۱- گزینه «۴»	۷۲- گزینه «۱»	۷۳- گزینه «۳»	۷۴- گزینه «۱»	۷۵- گزینه «۱»
۷۶- گزینه «۱»	۷۷- گزینه «۱»	۷۸- گزینه «۳»	۷۹- گزینه «۳»	۸۰- گزینه «۳»
۸۱- گزینه «۱»	۸۲- گزینه «۲»	۸۳- گزینه «۴»	۸۴- گزینه «۴»	۸۵- گزینه «۱»
۸۶- گزینه «۲»	۸۷- گزینه «۲»	۸۸- گزینه «۲»	۸۹- گزینه «۳»	۹۰- گزینه «۲»

فصل سوم: مشتق و کاربرد مشتق

۱- گزینه «۲»	۲- گزینه «۲»	۳- گزینه «۳»	۴- گزینه «۲»	۵- گزینه «۴»
۶- گزینه «۴»	۷- گزینه «۴»	۸- گزینه «۳»	۹- گزینه «۴»	۱۰- گزینه «۲»
۱۱- گزینه «۲»	۱۲- گزینه «۱»	۱۳- گزینه «۳»	۱۴- گزینه «۴»	۱۵- گزینه «۲»
۱۶- گزینه «۳»	۱۷- گزینه «۱»	۱۸- گزینه «۳»	۱۹- گزینه «۱»	۲۰- گزینه «۳»
۲۱- گزینه «۲»	۲۲- گزینه «۲»	۲۳- گزینه «۲»	۲۴- گزینه «۱»	۲۵- گزینه «۲»
۲۶- گزینه «۴»	۲۷- گزینه «۳»	۲۸- گزینه «۱»	۲۹- گزینه «۱»	۳۰- گزینه «۳»
۳۱- گزینه «۱»	۳۲- گزینه «۴»	۳۳- گزینه «۲»	۳۴- گزینه «۴»	۳۵- گزینه «۱»
۳۶- گزینه «۴»	۳۷- گزینه «۳»	۳۸- گزینه «۴»	۳۹- گزینه «۱»	۴۰- گزینه «۴»
۴۱- گزینه «۲»	۴۲- گزینه «۲»	۴۳- گزینه «۱»	۴۴- گزینه «۲»	۴۵- گزینه «۳»
۴۶- گزینه «۴»	۴۷- گزینه «۲»	۴۸- گزینه «۳»	۴۹- گزینه «۲»	۵۰- گزینه «۳»
۵۱- گزینه «۲»	۵۲- گزینه «۱»	۵۳- گزینه «۴»	۵۴- گزینه «۲»	۵۵- گزینه «۳»
۵۶- گزینه «۴»	۵۷- گزینه «۱»	۵۸- گزینه «۱»	۵۹- گزینه «۳»	۶۰- گزینه «۴»
۶۱- گزینه «۳»	۶۲- گزینه «۲»	۶۳- گزینه «۳»	۶۴- گزینه «۲»	۶۵- گزینه «۳»
۶۶- گزینه «۱»	۶۷- گزینه «۲»	۶۸- گزینه «۳»	۶۹- گزینه «۲»	۷۰- گزینه «۴»
۷۱- گزینه «۳»	۷۲- گزینه «۱»	۷۳- گزینه «۱»	۷۴- گزینه «۲»	۷۵- گزینه «۱»
۷۶- گزینه «۱»	۷۷- گزینه «۳»	۷۸- گزینه «۲»	۷۹- گزینه «۳»	۸۰- گزینه «۳»
۸۱- گزینه «۲»	۸۲- گزینه «۴»	۸۳- گزینه «۲»	۸۴- گزینه «۴»	۸۵- گزینه «۲»
۸۶- گزینه «۳»	۸۷- گزینه «۱»	۸۸- گزینه «۲»	۸۹- گزینه «۲»	۹۰- گزینه «۲»

۹۱- گزینه ۴	۹۲- گزینه ۲	۹۳- گزینه ۳	۹۴- گزینه ۳
۹۶- گزینه ۳	۹۷- گزینه ۲	۹۸- گزینه ۴	۹۹- گزینه ۲
۱۰۱- گزینه ۳	۱۰۲- گزینه ۳	۱۰۳- گزینه ۲	۱۰۴- گزینه ۳
۱۰۶- گزینه ۳	۱۰۷- گزینه ۳	۱۰۸- گزینه ۴	۱۰۹- گزینه ۴

فصل چهارم : انتگرال

۱- گزینه ۳	۲- گزینه ۱	۳- گزینه ۲	۴- گزینه ۲
۶- گزینه ۲	۷- گزینه ۱	۸- گزینه ۴	۹- گزینه ۲
۱۱- گزینه ۱	۱۲- گزینه ۱	۱۳- گزینه ۲	۱۴- گزینه ۱
۱۶- گزینه ۲	۱۷- گزینه ۱	۱۸- گزینه ۴	۱۹- گزینه ۴
۲۱- گزینه ۳	۲۲- گزینه ۲	۲۳- گزینه ۱	۲۴- گزینه ۱
۲۶- گزینه ۳	۲۷- گزینه ۲	۲۸- گزینه ۳	۲۹- گزینه ۱
۳۱- گزینه ۱	۳۲- گزینه ۴	۳۳- گزینه ۱	۳۴- گزینه ۲
۳۶- گزینه ۳	۳۷- گزینه ۲	۳۸- گزینه ۲	۳۹- گزینه ۱
۴۱- گزینه ۱	۴۲- گزینه ۲	۴۳- گزینه ۲	۴۴- گزینه ۲
۴۶- گزینه ۳	۴۷- گزینه ۱	۴۸- گزینه ۳	۴۹- گزینه ۲
۵۱- گزینه ۴	۵۲- گزینه ۳	۵۳- گزینه ۲	۵۴- گزینه ۱
۵۶- گزینه ۳	۵۷- گزینه ۲	۵۸- گزینه ۲	۵۹- گزینه ۲
۶۱- گزینه ۱	۶۲- گزینه ۳	۶۳- گزینه ۱	۶۴- گزینه ۳
۶۶- گزینه ۴	۶۷- گزینه ۲	۶۸- گزینه ۳	۶۹- گزینه ۴
۷۱- گزینه ۲	۷۲- گزینه ۲	۷۳- گزینه ۱	۷۴- گزینه ۴
۷۶- گزینه ۱	۷۷- گزینه ۱	۷۸- گزینه ۱	۷۹- گزینه ۳
۸۱- گزینه ۳	۸۲- گزینه ۳	۸۳- گزینه ۲	۸۴- گزینه ۱
۸۶- گزینه ۳	۸۷- گزینه ۱	۸۸- گزینه ۲	۸۹- گزینه ۲
۹۱- گزینه ۴	۹۲- گزینه ۱	۹۳- گزینه ۱	۹۴- گزینه ۴

فصل پنجم : کاربرد انتگرال

۱- گزینه ۳	۲- گزینه ۲	۳- گزینه ۱	۴- گزینه ۲
۶- گزینه ۴	۷- گزینه ۳	۸- گزینه ۱	۹- گزینه ۱
۱۱- گزینه ۲	۱۲- گزینه ۳	۱۳- گزینه ۳	۱۴- گزینه ۱
۱۶- گزینه ۳	۱۷- گزینه ۱	۱۸- گزینه ۱	۱۹- گزینه ۴
۲۱- گزینه ۳	۲۲- گزینه ۱	۲۳- گزینه ۲	۲۴- گزینه ۴
۲۶- گزینه ۳	۲۷- گزینه ۲	۲۸- گزینه ۳	۲۹- گزینه ۴
۳۱- گزینه ۳	۳۲- گزینه ۴	۳۳- گزینه ۲	۳۴- گزینه ۲
۳۶- گزینه ۳	۳۷- گزینه ۲	۳۸- گزینه ۲	۳۹- گزینه ۲
۴۱- گزینه ۳	۴۲- گزینه ۲	۴۳- گزینه ۲	۴۴- گزینه ۲

فصل ششم : دنباله و سری

۱- گزینه ۲	۲- گزینه ۲	۳- گزینه ۲	۴- گزینه ۲
۶- گزینه ۲	۷- گزینه ۲	۸- گزینه ۲	۹- گزینه ۲
۱۱- گزینه ۴	۱۲- گزینه ۲	۱۳- گزینه ۲	۱۴- گزینه ۲
۱۶- گزینه ۱	۱۷- گزینه ۲	۱۸- گزینه ۴	۱۹- گزینه ۳
۲۱- گزینه ۴	۲۲- گزینه ۲	۲۳- گزینه ۳	۲۴- گزینه ۱
۲۶- گزینه ۲	۲۷- گزینه ۱	۲۸- گزینه ۱	۲۹- گزینه ۴
۳۱- گزینه ۴	۳۲- گزینه ۳	۳۳- گزینه ۱	۳۴- گزینه ۲
۳۶- گزینه ۲	۳۷- گزینه ۳	۳۸- گزینه ۲	۳۹- گزینه ۱
۴۱- گزینه ۲	۴۲- گزینه ۱	۴۳- گزینه ۲	۴۴- گزینه ۲
۴۶- گزینه ۲	۴۷- گزینه ۱	۴۸- گزینه ۲	۴۹- گزینه ۱
۵۱- گزینه ۲	۵۲- گزینه ۱	۵۳- گزینه ۳	۵۴- گزینه ۱
۵۶- گزینه ۴	۵۷- گزینه ۲	۵۸- گزینه ۲	۵۹- گزینه ۳

فصل هفتم : دستگاه مختصات قطبی

۱- گزینه ۳	۲- گزینه ۴	۳- گزینه ۲	۴- گزینه ۲
۶- گزینه ۳	۷- گزینه ۴	۸- گزینه ۲	۹- گزینه ۴
۱۱- گزینه ۴	۱۲- گزینه ۳	۱۳- گزینه ۲	۱۴- گزینه ۲
۱۶- گزینه ۱	۱۷- گزینه ۴	۱۸- گزینه ۳	۱۹- گزینه ۴

فصل هشتم : اعداد مختلط

۱- گزینه ۲	۲- گزینه ۱	۳- گزینه ۲	۴- گزینه ۲
۶- گزینه ۳	۷- گزینه ۲	۸- گزینه ۲	۹- گزینه ۲
۱۱- گزینه ۱	۱۲- گزینه ۴	۱۳- گزینه ۱	۱۴- گزینه ۲
۱۶- گزینه ۱	۱۷- گزینه ۳	۱۸- گزینه ۳	۱۹- گزینه ۲
۲۱- گزینه ۳	۲۲- گزینه ۲	۲۳- گزینه ۴	۲۴- گزینه ۳
۲۶- گزینه ۳	۲۷- گزینه ۴	۲۸- گزینه ۳	۲۹- گزینه ۲

منابع و مآخذ :

- 1) LEITHOLD, Louis, «The calculus with Analytic Geometry».
- 2) SILVERMAN, RICHARD, A:«Modern calculus and Analytic Geometry» Macmillan Company.
- 3) HOW TO LEARN CALCULUS OF ONE VARIABLE (volume 1,2) J.D.Ghosh, MD. Anwarul Haque
- 4) General Mathematics Volume two by J.A.Maron
- 5) Elliott Mendelson. Schaum's 3000 Solved Problems in calculus, 1986 McGraw-Hill
- 6) ENGINEERING MATHEMATICS C. S. Sharma / I. J. S. Sarna (c. b. s)

۷) تمرینها و مسائل آنالیز ریاضی از ب - ب - دمیدوویچ، ترجمه پرویز شهریاری

۸) حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی - جرج توماس - راس فینی، ترجمه مرکز نشر دانشگاهی تهران .

۹) مجموعه فرمولهای ریاضی از مورای . و . اشپیگل، انتشارات استاد مشهد ۱۳۷۳.

۱۰) مجموعه آزمونهای مؤسسه مدرسان شریف.