نتایج آن می‌ارزد.

زحمات زیادی برای فرموله کردن مسئله برنامه‌ریزی تولید ادغامی از طریق برنامه‌ریزی خطی کشیده شده است. در سال ۱۹۵۶، Bowman یک مدل حمل و نقل ارایه داد که در آن ظرفیت تولید ماهیانه به عنوان چشمه و تقاضای ماهیانه به عنوان چاه بود که ما این روش را به تفصیل در فصل بعدی این کتاب تحت عنوان کاربرد مدل حمل و نقل در برنامه‌ریزی تولید ادغامی مورد مطالعه قرار خواهیم داد. بوفاومیلر در سال ۱۹۷۹ یک مدل برنامه‌ریزی خطی عمومیت یافته آنچنان عرضه داشتند که شامل سطح تولید، سطح نیروی انسانی، موجودی مازاد بر تقاضا، کسری کالا، استخدام و اخراج به عنوان متغیرهای تصمیم‌گیری می‌شد. پیش فرض‌های اولیه این مدل عبارت از خطی بودن هزینه‌ها برحسب این متغیرها و همچنین اعداد حقیقی بودن آن‌ها بود. به عنوان مثال، هزینه کسری کالا متناسب با میزان کسری از درجه اول بود. این فرض غیر واقعی است. اگر میزان کسری خیلی کم باشد، مشتری با اندکی گلایه صبر خواهد کرد، بنابراین هزینهٔ آن هم ناچیز خواهد بود. اگر میزان کسری زیاد باشد مشتری به سراغ تولید کنندهٔ دیگری خواهد رفت و در نتیجه هزینه خطی غیرقابل پذیرش خواهد بود. به عنوان مثال دوم، مسئله عدد حقیقی بودن میزان تولید را در نظر بگیرید. غالباً میزان تولید یک عدد صحیح است. در بعضی موارد خطای حاصل از فرض خطی بودن قابل اغماض است ولی در موارد دیگر ممکن است غیرقابل پذیرش باشد.

هدف مدل برنامه‌ریزی خطی حداقل کردن هزینه به شکل داده شده در فرمول (۲۲) است به طوری که محدودیت‌های (۲۳) تا (۲۶) برقرار باشد.

$$MinZ = \sum_{t=1}^{T} [A_{p,t} P_t + A_{r,t} R_t + A_{o,t} O_t + A_{i,t} I_t + A_{s,t} S_t + A_{h,t} H_t + A_{l,t} L_t] \qquad (۲۲)$$

به طوری که

$$I_t - S_t = I_{t-1} - S_{t-1} + P_t - F_t \qquad \text{for } t = 1, 2, \ldots, T \qquad (۲۳)$$

$$R_t = R_{t-1} + H_t - L_t \qquad \text{for } t = 1, 2, \ldots, T \qquad (۲۴)$$

$$O_t - U_t = kP_t - R_t \qquad \text{for } t = 1, 2, \ldots, T \qquad (۲۵)$$

$$R_t, O_t, I_t, S_t, H_t, L_t, U_t \geq 0 \qquad \text{for } t = 1, 2, \ldots, T \qquad (۲۶)$$

$$P_t \geq 0$$

که در آن:

P_t = سرعت تولید در زمان t.

$A_{P,t}$ = هزینه تولید هر واحد محصول صرف نظر از نیروی انسانی در دورهٔ t.

R_t = تعداد نفر ـ ساعت موجود در اوقات معمولی دورهٔ t (اگر برحسب تعداد کارگران مورد نظر باشد ترجیح داده می‌شود که با W_t نشان داده شود).

$A_{r,t}$ = هزینه هر نفر ـ ساعت در اوقات معمولی دورهٔ t.

O_t = تعداد ساعات اضافه‌کاری دورهٔ t.

$A_{o,t}$ = هزینه هر نفر ـ ساعت در اوقات اضافه‌کاری در دورهٔ t.

I_t = موجودی در انبار در پایان دورهٔ t.

$A_{i,t}$ = هزینه نگهداری هر واحد محصول.

S_t = میزان کسری در پایان دورهٔ t.

$A_{s,t}$ = هزینه هر واحد کسری در دورهٔ t.

H_t = استخدام جدید بر حسب ساعت در دورهٔ t.

$A_{h,t}$ = هزینه افزایش کار به میزان یک ساعت در دورهٔ t.

L_t = اخراج برحسب ساعت در دورهٔ t.

$A_{l,t}$ = هزینه کاهش کار به میزان یک ساعت در دورهٔ t.

U_t = میزان کارکرد زیر ظرفیت نیروی انسانی در دورهٔ t.

F_t = تقاضای پیش‌بینی شده برای دورهٔ t.

k = ضریب تبدیل هر واحد محصول به نفر ـ ساعت.

T = افق برنامه‌ریزی یا تعداد دوره‌هایی که باید مورد توجه قرار گیرند.

در مواقعی که هزینه تولید صرف نظر از هزینه نیروی انسانی یعنی $A_{P,t}$ در تمام دوره‌ها ثابت است، این هزینه می‌تواند از تابع هدف حذف شود. به همین ترتیب اگر سطح نیروی انسانی ثابت باشد، هزینه اوقات معمولی، استخدام و اخراج همراه با محدودیت (۲۴) حذف خواهد شد. اگر می‌خواستیم برنامه تولید ادغامی را از دیدگاه حداکثر کردن سود مورد توجه قرار دهیم، کافی بود که معادلهٔ (۲۲) را از کل فروش در طول دوره برنامه‌ریزی کم کنیم و سپس ارزش موجودی نهایی را به آن بیفزاییم، یعنی:

$$MaxZ = VI_t + \sum_{t=1}^{T} (VP_t - A_{p,t} P_t - \ldots)$$

اگر مقاصد هر دسته از محدودیت‌ها را مورد بررسی قرار دهیم، آموزنده خواهد بود. معادله (۲۳) لازم می‌بیند که سطح موجودی به صورت دوره به دوره سازگار باقی بماند. یعنی موجودی پایانی دورهٔ t یا میزان کسری S_t برابر است با آنچه که از دورهٔ t−۱ باقی مانده بود. بعلاوه مقداری که در دورهٔ t تولید می‌شود (P_t) منهای تقاضای پیش‌بینی شده F_t. در این محدودیت فرض بر آن است که تمام کسری کالا به جلو برده شده و در آینده تحویل داده می‌شود و در نتیجه کسری کالا هیچ وقت منجر به از دست دادن قدرت فروش آن نمی‌شود. اگر متغیرهای S_t، S_{t-1} را از معادلات (۱) و (۲) و (۵) حذف می‌کردیم مسئله به حالت دیگری محدود می‌شد که در آن کسری کالا مجاز نبود. به همین ترتیب اگر می‌خواستیم یک موجودی احتیاطی I_B واحد هم داشته باشیم، متغیرهای S_t و S_{t-1} را از مدل حذف و مجموعه محدودیت‌های زیر را اضافه می‌کردیم.

$$I_t \geq I_B \qquad t = 1, 2, \ldots, T \qquad (۶)$$

اگر محدودیت حداکثر موجودی I_{max} داشتیم، مجموعه محدودیت‌های زیر را هم اضافه می‌کردیم.

$$I_t \leq I_{max} \qquad t = 1, 2, \ldots, T \qquad (۷)$$

محدودیت (۳) نمایشگر یک مجموعه محدودیت است که سازگاری دوره به دورهٔ سطح نیروی انسانی را ایجاب می‌کند. یعنی سطح نیروی انسانی دورهٔ t برابر است با سطح نیروی انسانی دورهٔ t−۱ بعلاوه استخدام جدید H_t منهای اخراج L_t. همانند قبل می‌توانستیم مسئله را به عدم اخراج و یا استخدام محدود سازیم و این متغیرها را

از معادلات (۱) و (۳) و (۵) حذف کنیم. بعلاوه می‌توانیم سطح نیروی انسانی را در دامنه مشخصی نگه داریم. به عنوان مثال بزرگتر از R_{min} و کوچکتر از R_{max} یعنی محدودیت‌های زیر:

$$R_t \geq R_{min} \qquad t = 1, 2, ..., T \qquad (8)$$

$$R_t \leq R_{max} \qquad t = 1, 2, ..., T \qquad (9)$$

معادلهٔ (۴) نشان دهندهٔ یک مجموعه از محدودیت‌هایی است که مبین میزان اضافه‌کاری O_t یا زیر ظرفیت U_t برای داشتن سرعت تولید P_t است. چونکه O_t و U_t برحسب ساعت بیان شده‌اند، سرعت تولید P_t به توسط ضریب تبدیل k ساعت کار برای هر واحد محصول به زمان تبدیل P_t به توسط ضریب تبدیل k ساعت کار برای هر واحد محصول به زمان تبدیل شده است. با کسر کردن ساعات اوقات معمولی موجود R_t از زمان لازم kp_t میزان اضافه‌کاری و یا زیر ظرفیت کار کردن تنظیم می‌گردد. همچنین می‌توانستیم مسئله را به حالت دیگری که در آن کار کردن زیر ظرفیت قدغن باشد، با حذف U_t از معادلات (۴) و (۵) محدود سازیم.

یک حالت دیگر را هم می‌توانستیم با این فرموله کردن در نظر بگیریم. به عنوان مثال اگر قرارداد جنبی مجاز بود، یک متغیر جدید C_t هم وارد مدل می‌شد. در آن صورت $A_{c,t} C_t$ به تابع هدف (۱)، C_t به معادلات (۲) و (۵) اضافه می‌شد و KC_t از معادله (۴) کم می‌شد. واضح است که این مدل برنامه‌ریزی خطی کاملاً انعطاف‌پذیر است.

مثال عددی ۱ ـ کارخانه تلویزیون رنگی

برای درک بیشتر این روش ابتدا حل مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را برای آخرین مسئله ارایه شده در فصل قبل در نظر بگیرید. به خاطر بیاورید که هزینه تولید هر واحد محصول در اوقات معمولی ۱۵۳ واحد پول بود. در معادله (۱) این رقم مربوط به $A_{r,t}$ است و باید برحسب واحد پول برای هر نفر ـ ساعت بیان شود. با تقسیم ۱۵۳ به زمان استاندارد ۵ ساعت برای هر محصول خواهیم داشت، یعنی $A_{r,t} = 30.60$ واحد پول برای هر نفر ـ ساعت. به همین ترتیب در بررسی هزینه اضافه‌کاری داشتیم که هزینه تولید هر محصول در روزهای پنجشنبه و جمعه به ترتیب ۱۹۸ واحد پول و ۲۴۳ واحد پول بود. تقریب خطی این هزینه‌ها برابر ۲۱۰ واحد پول است که با تقسیم به زمان استاندارد، هزینه $A_{o,t}$ برابر ۴۲ واحد پول خواهد بود. قبلاً هزینه مواد و سربار با رابطه $150P_t + 5000$ داده شد. این رابطه هم باید با یک تقریب خطی تخمین زده شود. لذا عدد انتخاب شده برای $A_{P,t}$ برابر ۱۷۵ واحد پول است. هزینه نگهداری با رابطه $0.12I_t^2 + 12I_t - 1000$ داده شده بود. این رابطه هم باید تقریب خطی زده می‌شد و در نتیجه ضریب $A_{i,t}$ برابر ۱۲ واحد پول انتخاب گردید. قبلاً هزینه اخراج توسط چند جمله‌ای $37L_t^2 + 710L_t$ تخمین زده شده بود و حالا به توسط ۸۰۰ واحد پول برای هر فرد اخراجی تقریب زده می‌شود. چونکه $A_{l,t}$ برحسب واحد پول به ازاء هر ساعت کار از دست داده منتج از اخراج بیان می‌گردد، بنابراین با تقسیم ۸۰۰ بر ۴۰ خواهیم داشت: $A_{l,t} = 20$. بالاخره هزینه استخدام و آموزش که قبلاً توسط مدل $200H_t^2 + 200H_t$ تخمین زده شده بود، در اینجا با ۶۰۰ واحد پول برای هر فرد و یا $A_{h,t} = 15$ واحد پول برای هر ساعت تقریب زده شد.

در این مسئله نمونه، کسری کالا مجاز نبود و در نتیجه متغیرهای S_t و ضریب $A_{s,t}$ از معادلات (۱) و (۲) حذف گردیدند. بنابراین مدل برنامه‌ریزی خطی حاصله برای ۶ دورهٔ آزمایشی به شرح زیر است:

$$MinZ = \sum [175P_t + 30.6R_t + 42.0O_t + 12I_t + 20L_t + 15H_t] \qquad (10)$$

به طوری که:

$$I_t = I_{t-1} + P_t - F_t \qquad t = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \qquad (11)$$

$$R_t = R_{t-1} + H_t - L_t \qquad t = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \qquad (12)$$

$$O_t - U_t = 5P_t - R_t \qquad t = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \qquad (13)$$

$$P_t, R_t, O_t, I_t, H_t, L_t, U_t \geq 0 \qquad t = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \qquad (14)$$

و

$$R_0 = 22 \times 40 = 880$$

$$I_0 = 70$$

$$F_1 = 260,\ F_2 = 270,\ F_3 = 305,\ F_4 = 370,\ F_5 = 310,\ F_6 = 270$$

یک برنامه کامپیوتری که قادر به حل این مسئله در ۲۸ مرحله تکرار بود نتایج زیر را تولید کرده است:

$Z = 576,922.50$	واحد پول
$P_1 = 283.75$	تعداد محصول
$P_2 = 283.75$	تعداد محصول
$P_3 = 283.75$	تعداد محصول
$P_4 = 283.75$	تعداد محصول
$P_5 = 310.00$	تعداد محصول
$P_6 = 270.0$	تعداد محصول
$R_1 = 1418.75$	نفر ـ ساعت در اوقات معمولی
$R_2 = 1418.75$	نفر ـ ساعت در اوقات معمولی
$R_3 = 1418.75$	نفر ـ ساعت در اوقات معمولی
$R_4 = 1418.75$	نفر ـ ساعت در اوقات معمولی
$R_5 = 1418.75$	نفر ـ ساعت در اوقات معمولی
$R_6 = 1350.00$	نفر ـ ساعت در اوقات معمولی
$O_5 = 131.25$	نفر ـ ساعت در وقت اضافه کاری
$I_1 = 93.75$	موجودی برحسب تعداد محصول
$I_2 = 107.50$	موجودی برحسب تعداد محصول
$I_3 = 86.25$	موجودی برحسب تعداد محصول
$H_1 = 538.75$	نفر ـ ساعت استخدام شده
$L_6 = 68.75$	نفر ـ ساعت اخراج شده

رقم هزینه ۵۷۶،۹۲۲/۵۰ یا ۵۷۶،۹۲۳ واحد پول، کمی از هزینه بدست آمده در روش تجربی بیشتر است. این

نتیجه بدان معنی نیست که مدیریت از حل بهینه هم بهتر عمل کرده است، بلکه معنی آن این است که تقریب خطی آنقدر از واقعیت دور شد که روش مدیریت برای مسئله واقعی بهتر از مسئله ساده شده عمل کرد. اگر طرح داده شده در جدول (۱۰) روش تجربی فصل قبلی را با استفاده از تابع هدف (۱۰) ارزیابی می‌کردیم، تصمیم مدیریت باعث ۶۲۰۴۷۱ واحد پول هزینه و روش تجربی ۵۸۶۰۲۶ واحد پول هزینه می‌شد. اگر می‌خواستیم حل مدل برنامه‌ریزی خطی را برای معادلات هزینه واقعی به دست آوریم، هزینه کل ۷۵۹۲۵۵ واحد پول می‌شد که باز هم از تصمیم فعلی مدیریت به مراتب بدتر بود. این نتیجه مبین آن است که تقریب خطی باعث این همه خطا شده است.

با این وجود روش برنامه‌ریزی خطی از بسیاری از محدودیت‌های روش تجربی مبری است. در برنامه‌ریزی خطی از عدم سازگاری روش مدیریت خبری نیست. مدل آن با تغییر هزینه قابل تغییر است. اگر نیروی انسانی کمیاب شود، مدل با افزایش هزینه استخدام از تغییر در سطح نیروی انسانی اجتناب خواهد کرد. یا اینکه اگر عوامل دیگر تغییر یابند، مدل با تغییر هزینه‌های دیگر قابل تنظیم است. حال سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا افزایش هزینه کل به خاطر ساده کردن مسئله به قیمت سازگاری و قابلیت انعطاف می‌ارزد؟

یک مدل کلاسیک برای برنامه‌ریزی تولید ادغامی توسط Holt، Modigliani، Muth و Simon ارایه شده است. آن‌ها خاطر نشان ساختند که در فرموله کردن مسائل توابع هزینه درجهٔ دوم حل بهتری را عاید خواهد ساخت. مدل آن‌ها شامل هزینه‌های حقوق ماهیانه، استخدام و اخراج، اضافه‌کاری و کار کردن زیر ظرفیت، موجودی و سفارشات عقب افتاده است. با مشتق‌گیری جزئی از تابع هزینه نسبت به هر یک از متغیرهای تصمیم‌گیری یک مجموعه معادلات خطی حاصل خواهد شد. تنها محدودیت مورد نیاز در این مدل همان رابطهٔ معروف تغییر موجودی و غیرمنفی بودن حل نهایی است. با استفاده از روش لاگرانژ دستورالعمل بهینه تعیین سطح نیروی انسانی و سرعت تولید به دست خواهد آمد.

این روش دارای محدودیت جدی است. روش پیچیده‌ای برای تخمین ضرایب هزینه درجه دوم مورد نیاز است. برای دوره برنامه‌ریزی طولانی‌تر تعداد معادلات خطی به مراتب زیادتر شده و در نتیجه خطای زیادی حاصل خواهد شد. شاید هم قویترین عقب‌نشینی در این زمینه مشکل درک این روش برای مدیریت باشد. در هر حال ما این روش را تحت عنوان «روش دستورالعمل خطی» به تفصیل در فصل پنجم این کتاب مورد بررسی مجدد قرار خواهیم داد.

حال از آنجایی که تعریف واحد اندازه‌گیری متغیرهای تصمیم‌گیری در مسئلهٔ فوق در مسائل مختلف باعث بروز مشکلاتی می‌شود، لذا ترجیح می‌دهیم که این مدل را برای دو مسئله کاربردی دیگر نیز به کار گیریم. مثال اول یک مسئلهٔ بررسی مورد جدید است ولی مثال دوم همان مسئلهٔ کارخانه پارچه بافی فصل دوم است که با استفاده از مدل‌های مکاشفه‌ای حل شده بود. در هر دو مورد حل بهینه آن‌ها توسط کامپیوتر نیز آورده شده است.

مثال عددی ۲ ـ مورد جدید

یک کارخانه تولید کننده لوازم یدکی را در نظر بگیرید. پیش‌بینی تقاضا، سطح موجودی احتیاطی، تعداد روزهای کاری در هر یک از چهار فصل آینده در جدول ۸ داده شده است. هزینه‌های مربوط به استخدام، اخراج و همچنین مزد کارگران در ساعات معمولی و هزینه نگهداری و بالاخره سایر اطلاعات لازم نیز در جدول ۹ داده شده است.

جدول ۸ ـ پیش‌بینی تقاضا، موجودی احتیاطی و روزهای کاری کارخانه تولید کنندهٔ لوازم یدکی

تعداد روزهای کاری	ذخیره احتیاطی (نفر ـ ساعت)	پیش‌بینی تقاضا (نفر ـ ساعت)	فصل
۶۶	۵۴۷۵	۲۷۳۷۳	۱
۶۰	۱۵۲۳۲	۷۶۱۶۰	۲
۵۴	۷۶۱۶	۳۸۰۸۰	۳
۵۸	۱۱۴۲۴	۵۷۱۲۰	۴

جدول ۹ ـ هزینه‌ها و سایر اطلاعات لازم کارخانه تولید کنندهٔ لوازم یدکی

هزینه استخدام	۱۲۰۰ واحد پول قراردادی برای هر نفر
هزینه اخراج	۱۰۰۰ واحد پول قراردادی برای هر نفر
مزد کارگران در اوقات معمولی	۱۰ واحد پول قراردادی برای هر نفر ـ ساعت
هزینه نگهداری کالا	۰/۹۰ واحد پول قراردادی برای هر نفر ـ ساعت در یک فصل
موجودی اولیه	۱۰۰۰۰ واحد کالا
تعداد کارگران اولیه	۷۵ نفر
ظرفیت ساعات اوقات معمولی	۸۹۰ نفر ـ ساعت در روز
حداکثر اضافه کاری	۸ ساعت برای هر کارگر در هفته
مزد کارگران در اوقات اضافه کاری	۱۵ واحد پول قراردادی برای هر نفر ـ ساعت
تعداد روزهای کاری در هفته	۵ روز
ساعات کار عادی روزانه	۸ ساعت

در این مسئله هدف مینیمم کردن مجموع هزینه‌های تولید در وقت معمولی و اضافه‌کاری و همچنین هزینه‌های نگهداری، استخدام و اخراج است. متغیرهای تصمیم‌گیری این مسئله به صورت زیر است:

I_t سطح موجودی در پایان فصل t (بر حسب نفر ـ ساعت)

O_t تعداد نفر ـ ساعت کار اضافه‌کاری در فصل t (برحسب نفر ـ ساعت در روز)

W_t تعداد کارگران فصل t

H_t تعداد کارگرانی که در ابتدای فصل t استخدام می‌شوند.

L_t تعداد کارگرانی که در ابتدای فصل t اخراج می‌شوند.

با استفاده از این متغیرهای تصمیم‌گیری و اطلاعات داده شده در جداول ۸ و ۹ تابع هدف مسئله فوق به صورت زیر خواهد بود.

هزینه اخراج + هزینه استخدام + هزینه نگهداری + هزینه اضافه کاری + هزینه اوقات معمولی = مینیمم کل هزینه

$$MinZ = ۱۰(۶۶)(۸)W_۱ + ۱۵(۶۶)O_۱ + ۰/۹I_۱ + ۱۲۰۰H_۱ + ۱۰۰۰L_۱ + \dots$$
$$+ ۱۰(۵۸)(۸)W_۴ + ۱۵(۵۸)O_۴ + ۰/۹I_۴ + ۱۲۰۰H_۴ + ۱۰۰۰L_۴$$

در نوشتن محدودیت‌های این مسئله باید چهار دسته محدودیت به شرح زیر در نظر داشته باشیم.

۱) *محدودیت مربوط به ظرفیت :*

$$۸W_۱ \leq ۸۹۰$$
$$\vdots$$
$$۸W_۴ \leq ۸۹۰$$

۲) *محدودیت مربوط به اضافه‌کاری :*

$$۵O_۱ \leq ۸W_۱$$
$$\vdots$$
$$۵O_۴ \leq ۸W_۴$$

۳) *محدودیت ارضاء تقاضا :* قبل از نوشتن این دسته محدودیت‌ها به علت لزوم داشتن ذخیره احتیاطی در این مسئله لازم است که تقاضای مؤثر هر فصل به صورت زیر محاسبه گردد :

تقاضای مؤثر فصل ۱	$۲۴۸۴۸ = ۲۷۳۷۳ + ۵۴۷۵ - ۱۰۰۰۰$
تقاضای مؤثر فصل ۲	$۸۵۹۱۷ = ۷۶۱۶۰ + ۱۵۲۳۲ - ۵۴۷۵$
تقاضای مؤثر فصل ۳	$۳۰۴۶۴ = ۳۸۰۸۰ + ۷۶۱۶ - ۱۵۲۳۲$
تقاضای مؤثر فصل ۴	$۶۰۹۲۸ = ۵۷۱۲۰ + ۱۱۴۲۴ - ۷۶۱۶$

حال با داشتن این تقاضاهای مؤثر محدودیت‌های تقاضا به صورت زیر خواهند بود.

$$۶۶(۸)W_۱ + ۶۶O_۱ \geq ۲۲۸۴۸ + I_۱$$
$$۶۰(۸)W_۲ + ۶۰O_۲ + I_۱ \geq ۸۵۹۱۷ + I_۲$$
$$\vdots$$
$$۵۸(۸)W_۴ + ۵۸O_۴ + I_۳ = ۶۰۹۲۸ + I_۴$$

۴) *رابطه تعادلی مربوط به سطح نیروی انسانی :*

$$W_۱ = ۷۵ + H_۱ - L_۱$$
$$W_۲ = W_۱ + H_۲ - L_۲$$
$$\vdots$$
$$W_۴ = W_۳ + H_۴ - L_۴$$

جدول ۱۰ نمایشگر فرم کامل این مسئله برنامه‌ریزی خطی است. حل بهینه این مدل با استفاده از یک برنامهٔ کامپیوتری در جدول ۱۱ داده شده است. این حل مشخص می‌کنند که ۳۶/۲۵ کارگر در فصل ۱ باید استخدام گردند و ۳۲۰۸۴ نفر - ساعت موجودی در این دوره ذخیره شود. در فصل ۲ موجودی ذخیره باید مصرف شود و از اضافه‌کاری نیز استفاده شود. بالاخره در فصل ۳ تعداد ۹/۲۵ کارگر اخراج و ۱۳۶۰۰ نفر - ساعت موجودی جهت

جدول ۱۰ - مدل برنامه‌ریزی خطی کارخانه تولید کننده لوازم یدکی

$W_۱$	$W_۲$	$W_۳$	$W_۴$	$H_۱$	$H_۲$	$H_۳$	$H_۴$	$L_۱$	$L_۲$	$L_۳$	$L_۴$	$I_۱$	$I_۲$	$I_۳$	$I_۴$	$O_۱$	$O_۲$	$O_۳$	$O_۴$		
۸																				$\leq$	۸۹۰
	۸																			$\leq$	۸۹۰
		۸																		$\leq$	۸۹۰
			۸																	$\leq$	۸۹۰
−۱/۶																۱				$\leq$	۰
	−۱/۶																۱			$\leq$	۰
		−۱/۶																۱		$\leq$	۰
			−۱/۶																۱	$\leq$	۰
۵۲۸												−۱				۶۶				$\geq$	۲۲,۸۴۸
	۴۸۰											۱	−۱				۶۰			$\geq$	۸۵,۹۱۷
		۴۳۲											۱	−۱				۵۴		$\geq$	۳۰,۴۶۴
			۴۶۴											۱	−۱				۵۸	$\geq$	۶۰,۲۹۸
۱				−۱				۱												=	۷۵
−۱	۱				−۱				۱											=	۰
	−۱	۱				−۱				۱										=	۰
		−۱	۱				−۱				۱									=	۰
۵۲۸۰	۴۸۰۰	۴۳۲۰	۴۶۴۰	۱۲۰۰	۱۲۰۰	۱۲۰۰	۱۲۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۰/۹	۰/۹	۰/۹	۰/۹	۹۹۰	۹۰۰	۸۱۰	۸۷۰	$\leq$	Objective Function

مصرف در دورهٔ ۴ ذخیره گردد. ضمناً باید توجه نمود که حل بهینه مدل برنامه‌ریزی خطی جواب غیر عدد صحیح برای تعداد کارگران می‌دهد که به دو صورت زیر این مشکل قابل حل است.

الف) از کارگران نیمه وقت استفاده شود.

ب) اعداد به دست آمده به نزدیکترین عدد صحیح گرد شود.

جدول ۱۱ ـ حل بهینه کارخانه تولید کننده لوازم یدکی

فصل	تعداد کارگران	تعداد استخدام	تعداد اخراج	موجودی مازاد بر ذخیره احتیاطی	مدت اوقات معمولی (نفر ساعت در روز)	اضافه کاری (نفر ساعت در روز)
۱	۱۱۱/۲۵	۳۶/۲۵	۰	۳۲۰۸۴	۸۹۰	۰
۲	۱۱۱/۲۵	۰	۰	۰	۸۹۰	۳۵
۳	۱۰۲	۰	۹/۲۵	۱۳۶۰۰	۸۱۶	۰
۴	۱۰۲	۰	۰	۰	۸۱۶	۰

حل مدل برنامه‌ریزی خطی می‌تواند، اطلاعات ارزندهٔ دیگری نیز در اختیار مدیر قرار دهد. به عنوان مثال قسمتی از جواب‌های مسئله مزدوج که همانا بیانگر ارزش منابع مصرف هستند، در جدول ۱۲ داده شده‌اند. همانطوری که از این جدول برمی‌آید، ارزش جبران هر واحد تقاضای اضافی در دورهٔ ۲ (به توسط اضافه‌کاری) ۵ واحد پول قراردادیست. همچنین اگر تقاضای دورهٔ ۳ یک واحد اضافه شود هزینه کل مسئله ۱/۲۹ واحد پول قراردادی کاهش خواهد یافت.

جدول ۱۲ ـ قیمت‌های مجازی مفید در کارخانه تولید کننده لوازم یدکی

	فصل			
	۱	۲	۳	۴
ارزش افزایش ظرفیت هر ساعت از اوقات معمولی (واحد پول قراردادی هر ساعت)	۴/۱	۰/۴۲	۰	۰
هزینه تدارک تقاضای اضافی (واحد پول قراردادی برای هر ساعت)	۴/۱	۵	‎-۱/۲۹	‎-۰/۳۹

مثال عددی ۳ ـ کارخانه پارچه بافی

در این قسمت می‌خواهیم برای مسئله کارخانه پارچه‌بافی فصل ۲ که قبلاً به روش‌های مکاشفه‌ای حل گردیده است مدل برنامه‌ریزی خطی بنویسیم و سپس حل بهینهٔ آن را که به توسط کامپیوتر به دست آورده‌ایم با حل‌های قبلی مقایسه نماییم.

متغیرهای تصمیم‌گیری در این مسئله به شرح زیر می‌باشند:

در تمام موارد زیر $i = 1, 2, \ldots, 12$ است.

W_i = تعداد کارگران در ابتدای ماه i.

H_i = تعداد کارگرانی که در ابتدای ماه i استخدام می‌شوند.

L_i = تعداد کارگرانی که در ابتدای ماه i اخراج می‌شوند.

O_i = تعداد ساعات اضافه‌کاری در ماه i (نفر ـ ساعت)

I_i = موجودی پایانی ماه i (نفر ـ ساعت)

S_i = تعداد ساعات قرارداد جنبی ماه i (نفر ـ ساعت)

جدول ۱۳ ـ اطلاعات لازم برای مدل برنامه‌ریزی خطی کارخانه پارچه‌بافی

تعداد کارگران موجود در آغاز برنامه‌ریزی	۴۳۵	نفر
حداکثر تعداد کارگردانی که در هر ماه می‌توانند استخدام شوند	۳۰	نفر
حداکثر تعداد کارگران در هر ماه	۵۴۰	نفر
تعداد ساعات کاری روزانه اوقات معمولی	۷	ساعت
حداکثر تعداد ساعاتی که هر کارگر در ماه می‌تواند اضافه کاری کند	۲۱	ساعت
هزینه اضافی هر ساعت اضافه کاری	۳	واحد پول قراردادی
هزینه استخدام هر کارگر	۵۰۰	واحد پول قراردادی
هزینه اخراج هر کارگر	۴۰۰	واحد پول قراردادی
هزینه اضافی هر ساعت قرارداد جنبی	۴	واحد پول قراردادی
هزینه نگهداری هر نفر ـ ساعت محصول در ماه	۰/۴۵	واحد پول قراردادی

اگر تعداد روزهای کاری و تقاضا در ماه iام در جدول ۱ فصل ۲ را به ترتیب با P_i و D_i نشان دهیم مدل برنامه‌ریزی خطی کارخانه پارچه‌بافی بصورت زیر خواهد بود :

$$\text{Min}Z = \sum_{j=1}^{12} [3O_i + 500H_i + 400L_i + 4S_i + 0.45I_i]$$

بطوری که برای $i = 1, 2, \ldots, 12$ داشته باشیم .

$$W_i = W_{i-1} + H_i - L_i$$

$$W_0 = 435$$

$$H_i \leq 30$$

$$W_i \leq 540$$

$$O_i \leq 21\,W_i$$

$$I_i = I_{i-1} + 7P_iW_i + O_i + S_i - D_i$$

$$I_0 = I_{12} = 0$$

$$W_i, O_i, H_i, L_i, S_i, I_i \geq 0 \quad ; \quad i = 1, 2, ..., 12$$

مدل برنامه‌ریزی خطی این مسئله دارای ۶۰ محدودیت و ۷۲ متغیر است که ما برای حل آن ترجیح دادیم که از سیستم MPSX/۳۷۰ سازمان برنامه و بودجه استفاده کنیم که در حال حاضر حل این مدل با نرم‌افزارهای موجود روی کامپیوتر شخصی هم امکان‌پذیر است. حل بهینه روند شدهٔ این مسئله در جدول ۱۴ خلاصه شده است. هزینه کل قبل و بعد از روند کردن اعداد به‌ترتیب ۱۲۴۹۸۹/۸۳ و ۱۲۵۲۵۶/۲۵ واحد پول قراردادیست که با حل آزمایش و خطای B تقریباً معادل است. تنها اختلاف این دو حل در تعداد نیروی انسانی در پنج دورهٔ آخر به تعداد یک نفر کارگر است. ضمناً حل بهینهٔ بدست آمده ما را قادر خواهد ساخت که از متغیرهای مسئلهٔ مزدوج آن که دارای تعبیر اقتصادی هستند استفاده کنیم. قسمتی از این متغیرها در ستون آخر جدول ۱۴ ارایه شده است. این ستون در حقیقت منفی تغییرات تابع هدف را نسبت به افزایش یک نفر ـ ساعت تقاضا نشان می‌دهد. به عنوان مثال اگر تقاضای مهر ماه یک نفر ـ ساعت اضافه شود ۲/۲۶ واحد پول قراردادی از هزینه کل کاسته شده و حال آنکه اگر تقاضای ماه فروردین به اندازه یک نفر ـ ساعت افزایش یابد به اندازه ۰/۴۴ به هزینه کل اضافه خواهد شد.

جدول ۱۴ ـ جدول بهینه کارخانه پارچه‌بافی

ماه	تعداد کارگران W_i	تعداد استخدام H_i	تعداد اخراج L_i	اضافه‌کاری O_i	قرداد جنبی S_i	موجودی I_i	تغییرات تابع هدف به ازای هر واحد افزایش تقاضا
مهر	۴۲۱	۰	۱۴	۰	۰	۳۹۹۸	-۲/۲۶
آبان	۴۲۱	۰	۰	۰	۰	۲۹۷۳۲	-۱/۸۱
آذر	۴۲۱	۰	۰	۰	۰	۲۴۷۸۲	-۱/۳۶
دی	۴۲۱	۰	۰	۰	۰	۲۷۶۲۱	-۰/۹۱
بهمن	۴۵۱	۳۰	۰	۰	۰	۱۵۴۵۲	-۰/۴۶
اسفند	۴۸۱	۳۰	۰	۰	۰	۱۵۷۹۷	-۰/۰۱۱
فروردین	۵۱۱	۳۰	۰	۰	۰	۱۵۲۲۹	+۰/۴۴
اردیبهشت	۵۲۷	۱۶	۰	۰	۰	۱۰۲۵۷	+۰/۸۸۸
خرداد	۵۲۷	۰	۰	۰	۰	۴۹۷۱	+۱/۳۴
تیر	۵۲۷	۰	۰	۰	۰	۰	+۱/۷۸۸
مرداد	۵۲۷	۰	۰	۰	۰	۲۸۶	-۰/۴۳۴۵
شهریور	۵۲۷	۰	۰	۰	۰	۰	-۰/۰۱۵۵

تمرین‌های فصل سوم

۱ ـ تصور کنید که طول دوره برنامه‌ریزی تولید یک مؤسسه تولیدی سه دوره باشد و در هر دوره دو روش تولید معمولی و اضافه‌کاری در اختیار باشد. در جدول زیر مفروضات مربوطه ارایه شده است:

پریود	ظرفیت برحسب واحد محصول		هزینه تولید هر واحد محصول		تقاضای مورد انتظار
	معمولی	اضافه‌کاری	معمولی	اضافه‌کاری	
۱	۱۰۰	۲۰	۱۴	۱۸	۶۰
۲	۱۰۰	۱۰	۱۷	۲۲	۸۰
۳	۶۰	۲۰	۱۷	۲۲	۱۴۰

هزینه انبارداری جهت انتقال هر واحد کالا از یک دوره به دورهٔ دیگر برابر ۱ واحد پول قراردادی است. سطح موجودی در ابتدای دوره برنامه‌ریزی ۱۵ واحد کالاست. مسئله را به عنوان یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۲ ـ تصور کنید در یک کارگاه تولیدی سه محصول توسط چهار دپارتمان تولید می‌گردد. مفروضات مربوطه به صورت زیر است:

محصول	سطح تولید		ساعات تولید برای هر واحد محصول				سود هر واحد محصول
	مینیمم	ماکزیمم	دپارتمان ۱	دپارتمان ۲	دپارتمان ۳	دپارتمان ۴	
A	۲۰	۲۰۰	۰/۱۰	۰/۰۶	۰/۱۸	۰/۱۸	۱۰
B.	۰	۱۰۰	۰/۱۲	۰/۰۵	ـ	۰/۱۰	۱۲
C	۷۰	۱۸۰	۰/۰۵	۰/۰۹	۰/۰۷	۰/۰۸	۱۵
ساعات تولید در دسترس			۳۶	۳۰	۳۷	۳۸	

مسئله را به صورت یک فرمول برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۳ ـ یک کارخانه تولید کننده کود شیمیایی که معمولاً کودهای ۵ ـ ۱۰ ـ ۵ و ۱۰ ـ ۸ ـ ۶ و ۱۴ ـ ۶ ـ ۴ تولید می‌نماید، سفارش کود ۸ ـ ۷ ـ ۵ دریافت می‌دارد (منظور از «۱۰ ـ ۸ ـ ۶» یعنی کودی که شامل ۱۰٪ نیترات، ۸٪ فسفات و ۶٪ پتاس و ۷۶٪ مواد خنثی است). این کارخانه قصد دارد که این سفارش را با استفاده از محصولات تولید شدهٔ خود برآورده سازد. ارزش هر کیلو از کودهای ۵ ـ ۱۰ ـ ۵ و ۱۰ ـ ۸ ـ ۶ و ۱۴ ـ ۶ ـ ۴ به ترتیب ۰/۰۲، ۰/۰۳، ۰/۰۴ واحد پول قراردادی است. تصور کنید که کارخانه در مقابل، کود استاندارد به اندازه کافی در انبار داشته باشد. مطلوب است تعیین درصدی از کودهای استاندارد که برای تولید یک کیلو از کود سفارش شده باید با یکدیگر با حداقل هزینه مخلوط گردند. آیا مدلی که ارایه می‌دهید دارای جواب قابل قبول هست یا خیر؟ چرا؟

۴ ـ یک ماشین تولیدکننده کاغذ، کاغذها را بر روی قرقره‌های استاندارد ۱۸۰ اینچی تولید می‌نماید. اگر یک مشتری عرض‌های متغیری به صورت زیر سفارش دهد:

تعداد قرقره	عرض (اینچ)
۲۰۰	۸۰
۱۲۰	۴۵
۱۳۰	۲۷

شرکت مجبور خواهد بود که این عرض‌ها را از عرض استاندارد ۱۸۰ اینچی با حداقل ضایعات بوجود آورد. مطلوب است مدل برنامه‌ریزی خطی مورد نظر.

۵ ـ مسئله برنامه‌ریزی تولید زیر را با مشخص نمودن تعداد محصول تولیدی در هر دوره به منظور مینیمم کردن کل هزینه انبارداری و تولید فرموله کنید.

	پریود				
	۱	۲	۳	۴	۵
ظرفیت اوقات معمولی (واحد)	۱۲۰	۱۰۰	۹۰	۱۴۰	۹۰
ظرفیت اضافه کاری (واحد)	۳۰	۴۰	۲۰	۴۰	۶۰
نیاز تولید (واحد)	۱۱۰	۱۶۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۵۰
هزینه اوقات معمولی برای هر واحد	۱۴	۱۲	۱۶	۱۰	۱۱
هزینه اوقات اضافه کاری برای هر واحد	۱۵	۱۶	۱۸	۱۴	۱۴

در ابتدای دورهٔ ۱ سطح موجودی برابر با ۲۰ واحد کالا است. تصور کنید که هزینه انبارداری جهت انتقال یک واحد کالا از یک دوره به دورهٔ دیگر برابر با یک واحد پول قراردادی است.

۶ ـ کارخانه‌ای سه نوع محصول A، B و C را تولید می‌نماید. مفروضات زیر مسئله برنامه‌ریزی تولید مربوطه را توجیه می‌نماید.

زمان عملیات (قطعه / ساعت)							
بسته‌بندی	کنترل	صافکاری	فرزکاری	تراشکاری	حداقل تقاضا در هر هفته	سود هر قطعه	نوع محصول
۰/۰۵	۰/۰۲	۰/۱	۰/۵	۰/۲	۱۰۰ قطعه	۲۰	A
۰/۰۶	۰/۰۲	۰/۳	–	۰/۱	۱۸۰ قطعه	۱۸	B
۰/۰۵	۰/۰۲	۰/۱	۰/۰۷	۰/۳	۷۵ قطعه	۲۱	C
۴۰	۴۰	۸۰	۸۰	۱۶۰	ظرفیت دپارتمان در هفته برحسب ساعت		

به عنوان مثال محصول A باید از تمام ۵ دپارتمان مختلف بگذرد و حال آنکه محصول B لازم نیست از دپارتمان فرزکاری استفاده نماید. پیدا کردن سطح تولید هر محصول در هفته مورد نظر است. مسئله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۷ ـ یک کارگاه تولیدی دو محصول A و B را تولید می‌کند. این کارگاه دارای ۴ ماشین است. برای تولید هر محصول راه‌های متفاوتی وجود داشته و سود هر واحد محصول نیز با توجه به ترکیبات مختلفی که از ماشین‌ها استفاده می‌گردد، فرق می‌کند. جدول زیر ترکیبات مختلف، زمان و مقادیر سود را ارایه می‌دهد.

محصول	روش	زمان تولید هر واحد برحسب ساعت				سود هر واحد
		ماشین ۱	ماشین ۲	ماشین ۳	ماشین ۴	
A	۱	۰/۵	–	۰/۲	–	۲
	۲	–	۰/۴	۰/۲	–	۲/۵
B	۱	۰/۴	–	۰/۳	–	۵
	۲	۰/۴	–	–	۰/۴	۴
	۳	–	۰/۶	۰/۳	–	۴
	۴	–	۰/۶	–	۰/۴	۳
		۳۸	۳۱	۳۴	۲۳	ساعات در دسترس

این کارگاه دارای قراردادی است که باید حداقل ۱۰۰ واحد از محصول A و ۵۸ واحد از نوع B در هفته تحویل دهد. مسئله عبارت است از تعیین سودبخش‌ترین برنامه تولید برای کارگاه. این مسئله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۸ ـ یک بنگاه حمل و نقل دارای مسئله کمبود کامیون در بعضی نقاط و زیادی کامیون در نقاط دیگر است. این بنگاه با دو نوع کامیون سر و کار دارد. اطلاعات مندرج در جدول زیر وضعیت جاری را نشان می‌دهد:

مکان	کمبود کامیون		زیادی کامیون	
	نوع I	نوع II	نوع I	نوع II
کرج	–	۲	۷	–
قزوین	۱۰	–	–	۱
دماوند	–	–	۶	۲
قم	۴	–	–	۱۰
اراک	–	۴	۵	–
کاشان	۸	۲	–	–

هزینه انتقال یک کامیون از یک مکان به مکان دیگر متناسب با فاصلهٔ آن‌ها است.

الف) مسئله جابجایی کامیون‌ها را فرموله کنید. فرض بر آنست که نوع کامیون‌ها قابل تعویض نیست.

ب) مسئله جابجایی کامیون‌ها را فرموله کنید، مشروط بر آنکه کامیون نوع II بتواند بجای کامیون نوع I استفاده شود، ولی عکس آن امکان‌پذیر نباشد. بعلاوه تصور کنید که هزینه جابجایی کامیون نوع II، ۲۰ درصد بیش از هزینه جابجایی کامیون نوع I باشد. برای راحتی فرض کنید که هزینه اجاره هر دو نوع کامیون یکی است. (مسئله را با استفاده از جداول فاصله بین شهرها حل کنید).

۹ـ یک تولید کننده کود شیمیایی ۴ نوع کود ۶ـ۸ـ۶، ۱۰ـ۶ـ۴، ۱۲ـ۵ـ۸ و ۱۹ـ۵ـ۱۰ برای چمن عرضه می‌دارد. اعداد فوق به ترتیب درصد وزنی نیترات، فسفات و پتاس کود را نشان می‌دهند.
کارخانه‌ای دارای یک برنامه امتزاج است بطوریکه اجزاء فعال تحت یک درصد بخصوصی با اجزاء خنثی شده ترکیب شده و حاصل بسته‌بندی شده و فروخته گردد. برای دوره برنامه‌ریزی آینده، تولید کننده دارای ۲۳۰۰ تن نیترات، ۱۴۰۰ تن فسفات، ۱۸۰۰ تن پتاس است. این کارخانه هر مقدار خنثی که لازم داشته باشد در دسترس است.
برای دورهٔ مورد نظر میزان تقاضا به صورت جدول زیر است:

محصول	قیمت فروش	پیش‌بینی فروش (تن)	
	هر تن	حداقل	حداکثر
۶ـ۸ـ۶	۶۰	۶۰۰	۸۰۰۰
۱۰ـ۶ـ۴	۸۰	۳۰۰۰	نامحدود
۱۲ـ۵ـ۸	۱۰۰	ـ	۱۰۰۰۰
۱۹ـ۵ـ۱۰	۱۲۰	۴۰۰۰	نامحدود

تولید کننده باید حداقل مورد اشاره را تولید نموده و از مقدار حداکثر فروش که پیش‌بینی شده است نمی‌خواهد تولید نماید.
هزینه هر تن اجزاء کود به ترتیب نیترات ۲۰۰ واحد، فسفات ۶۰ واحد، پتاس ۹۰ واحد و سایر اجزاء ۱۵ واحد پول قراردادی است. هزینه بسته‌بندی مواد، مخلوط کن و فروش ۲۰ واحد پول قراردادی برای هر تن کود صرفنظر از ترکیبات مربوطه تخمین زده می‌شود.
مسئله عبارت است از تعیین میزان تولید هر محصول. مسئله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۱۰ـ جدول زیر شامل میزان تقاضا و ظرفیت در ۵ پریود آینده است:

پریود	ظرفیت زمان معمولی	ظرفیت اضافه‌کاری	تقاضا
۱	۶۰۰	۱۰۰	۴۰۰
۲	۶۰۰	۱۰۰	۵۰۰
۳	۴۰۰	۱۰۰	۶۰۰
۴	۶۰۰	۵۰	۸۰۰
۵	۶۰۰	۱۰۰	۳۰۰

سطح موجودی در ابتدای پریود ۱ برابر با ۱۵۰ واحد است.
حداقل سطح موجودی مجاز ۱۰۰ واحد است.
حداقل سطح تولید باید ۸۰ درصد ظرفیت زمان معمولی باشد.

هزینه تولید هر واحد در زمان معمولی ۱۰ واحد و در زمان اضافه کاری ۱۴ واحد پول قراردادی است.
هزینه نگهداری هر واحد از یک دوره به دورهٔ بعدی ۲ واحد پول قراردادی است.
سطح موجودی در پایان دوره برنامه‌ریزی باید حداقل ممکنه باشد، مشروطه بر آنکه حداقل سطح موجودی مجاز و حداقل سطح تولید را نقض ننماید.
مسئله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۱۱ـ یک شرکت دارای سه کارگاه تولیدی است که همهٔ آن‌ها یک نوع محصول تولید می‌نمایند. این محصول براساس سفارش، تولید می‌شود و مسئله تصمیم‌گیری در این است که در کدام کارگاه باید سفارش صورت پذیرد.

مشتری	تعداد سفارش داده شده	هزینه حمل و نقل هر واحد		
		کارگاه ۱	کارگاه ۲	کارگاه ۳
W	۷۰۰	۸	۴	۶
X	۱۵۰۰	۱۱	۱۰	۸
Y	۴۰۰	۶	۱۲	۷
Z	۵۰۰	۹	۵	۱۴

هزینه تولید محصول و همچنین ظرفیت کارگاه‌ها متفاوت بوده و به صورت جدول زیر است:

ماشین	هزینه تولید هر واحد	ظرفیت موجود
A	۴۵	۱۰۰۰
B	۴۰	۸۰۰
C	۵۰	۱۵۰۰

با فرض اینکه سفارشات می‌تواند بین کارگاه‌ها تقسیم گردد، برنامهٔ تولید و توزیع را چنان ارائه دهید که کل هزینه مینیمم گردد.

۱۲ـ یک شرکت فولادسازی آلیاژهای مورد نظر مشتریان خود را می‌سازد. یک مشتری آلیاژی از ۴ فلز خواسته است که مشخصات آن به شرح زیر است:

فلز	مقدار مورد نیاز
A	کمتر یا مساوی ۱۸٪
B	حداقل ۳۰٪
C	بین ۴۰٪ و ۶۰٪
D	بیشتر از ۲٪ نباشد

معادن مختلفی موجودند که از آن‌ها می‌توان فلزهای مختلف فوق را تهیه نمود. این معادن دارای ناخالصی هستند که باید جدا شده و به دور انداخته شود. مفروضات مربوط در جدول زیر داده شده‌اند.

معدن	فلز A	فلز B	فلز C	فلزD	ناخالصی	هزینه هر تن
۱	٪۲۰	٪۲۰	٪۴۰	٪۰	٪۲۰	۲۵
۲	۱۵	۰	۲۰	۵	۶۰	۱۰
۳	۰	۴۰	۳۰	۰	۳۰	۲۰
۴	۱۰	۲۰	۳۰	۰	۴۰	۱۸
۵	۱۰	۲۵	۲۵	۱۰	۳۰	۲۲
۶	۵	۸	۱۷	۱۰	۶۰	۱۲

مسئله عبارت است از تعیین مقداری از هر معدن است که در هر تن آلیاژ باید مصرف گردد. مسئله را به صورت یک مدل قابل حل توسط برنامه‌ریزی خطی درآورید.

۱۳ ـ در تمرین ۱۲ فرض کنید که سفارش مشتری برای ۳۰۰۰ تن بوده و شرکت دارای مقادیر زیر از معادن مختلف باشد:

معدن	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تن	۱۰۰۰	۳۰۰۰	۲۰۰۰	۸۰۰	۲۶۰۰	۱۷۰۰

مسئله عبارت از پیدا کردن برنامه‌ای با حداقل هزینه است که نیاز مشتری را نیز برآورده سازد. مسئله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۱۴ ـ یک دپارتمان از یک کارخانه دو قطعه A و B را به ترتیب عملیات جدول زیر می‌سازد.

محصول	عملیات	روی ماشین	زمان تولید (ساعت)	درصد ضایعات
A	۱	M_1	۰/۰۳	۰/۰۱
	۲	M_2	۰/۰۷	۰/۰۵
	۳	M_3	۰/۰۵	۰/۰۲
B	۱	M_1	۰/۱۲	۰/۰۳
	۲	M_3	۰/۰۸	۰/۱۰
	۳	M_4	۰/۱۷	۰/۰۲
	۴	M_1	۰/۰۴	۰/۰۷

اطلاعات مربوط به عملیات ماشین‌ها به صورت زیر است :

ماشین	هزینه هر ساعت	ساعات در دسترس
M_1	۲۰	۴۰۰
M_2	۳۰	۲۴۰
M_3	۴۰	۴۱۰
M_4	۵۰	۱۴۰

اطلاعات مربوط به محصولات نیز به صورت زیر است :

محصول	قیمت فروش هر واحد	هزینه هر واحد از مواد خام	محدودیت تقاضا (واحد)	
			حداقل	حداکثر
A	۶۰	۲۰	۱۰۰	—
B	۱۰۰	۲۵	۱۵۹	۲۵۰

مسئله عبارت از زمان‌بندی تولید برای این دپارتمان در دورهٔ بعدی است. مسئله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی درآورید. فرض کنید که تمام قطعات معیوب آشکار شده و فوراً از تولید خارج می‌شوند.

(راهنمایی : فرض کنید که متغیرهای A و B نمایشگر مقدار هر محصول در ابتدای دورهٔ بعدی باشند).

۱۵ ـ یک دپارتمان سه محصول A، B و C را تولید می‌نماید. تولید چهار دورهٔ بعدی باید برنامه‌ریزی گردد. مفروضات زیر در دسترس است:

هزینه هر ساعت تولید در زمان معمولی ۱۰۰ واحد، در ساعات اضافه‌کاری ۱۵۰ واحد پول قراردادی است. هزینه نگهداری هر واحد از A، B و C به ترتیب ۱، ۲ و ۲ واحد پول قراردادی برای هر دوره است.

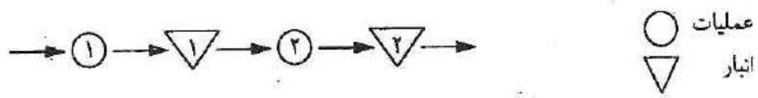
محصول	ساعت برای هر قطعه	نیازمندی در پریود (قطعه)			
		۱	۲	۳	۴
A	۰/۲	۴۰۰	۱۰۰	۸۰	۲۰۰
B	۰/۱	۳۰	۱۲۰	۲۰۰	۴۰۰
C	۰/۴	۲۰۰	۲۰۰	۶۰۰	۱۰۰۰

پریود	ظرفیت موجود (ساعت)	
	ساعات معمولی	اضافه‌کاری
۱	۲۵۰	۵۰
۲	۲۵۰	۴۰
۳	۲۳۰	۴۰
۴	۲۳۰	۴۰

الف) مسئله عبارت از برآوردن نیاز با حداقل هزینه است. مسئله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

ب) اگر بخواهیم بعد از پایان ۴ دوره، سطح موجودی محصولات A، B و C به ترتیب ۱۰، ۱۵ و ۸ واحد باشد فرموله کردن مسئله و حل آن چه تغییراتی خواهد نمود.

۱۶ـ یک محصول از دو فرآیند تولید پی در پی به شکل زیر عبور می‌نماید.



تولید برای سه دورهٔ آینده برنامه‌ریزی می‌گردد. اطلاعات زیر در اختیار است:

مسئله عبارت از تعیین سطح تولید در زمان معمولی و در زمان اضافه‌کاری برای سه دورهٔ آینده است. هدف مینیمم کردن کل هزینه و هزینه نگهداری است.

جدول A

دوره	تقاضا (تعداد)	ظرفیت در دسترس: عملیات ۱ - معمولی	عملیات ۱ - اضافه‌کاری	عملیات ۲ - معمولی	عملیات ۲ - اضافه‌کاری
۱	۸۰	۳۵	۸	۳۸	۷
۲	۸۰	۳۰	۶	۳۲	۶
۳	۹۰	۳۰	۹	۳۴	۷

جدول B

عملیات	زمان تولید برای هر قطعه	هزینه تولید هر واحد - معمولی	هزینه تولید هر واحد - اضافه کاری
۱	۲۰ دقیقه	۱۰	۱۳
۲	۳۰	۱۲	۱۶

جدول C

سطح موجودی	موجودی اولیه	هزینه نگهداری در هر دوره
۱	۵	۲
۲	۶	۱

۱۷ـ یک ماشین A و دو ماشین B هر کدام می‌توانند سه محصول X، Y و Z تولید نمایند. این سه ماشین بطور معمولی ۵ روز در هفته و با سه شیفت در روز کار می‌کنند و اگر لازم باشد در پایان هفته نیز می‌توانند اضافه‌کاری کنند. برنامه تولید سه هفته آینده باید زمان‌بندی گردد. اطلاعات زیر موجود است:

سطح تولید مورد نیاز:

محصول	دورهٔ ۱	دورهٔ ۲	دورهٔ ۳
X	۱۲۰	۱۰۰	۵۰
Y	۲۰۰	۲۰۰	۱۶۰
Z	۷۰	۱۰۰	۱۴۰

هزینه هر واحد:

منبع	محصول X	محصول Y	محصول Z
ماشین A ـ زمان معمولی	۲/۶	۴/۲	۳/۱
ماشین A ـ اضافه کاری	۲/۹	۴/۷	۳/۳
ماشین B ـ معمولی	۲/۸	۴/۳	۳/۲
ماشین B ـ اضافه کاری	۳/۲	۴/۸	۳/۴

ظرفیت تولید (ساعت):

منبع	دورهٔ ۱	دورهٔ ۲	دورهٔ ۳
ماشین A ـ زمان معمولی	۱۲۰	۱۲۰	۱۰۰
ماشین A ـ اضافه کاری	۴۰	۴۰	۲۰
ماشین B ـ معمولی	۲۱۰	۲۰۰	۲۳۰
ماشین B ـ اضافه کاری	۸۰	۶۰	۸۰

هزینه نگهداری هر واحد موجودی در یک پریود:

ماشین	محصول X	محصول Y	محصول Z
A	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۱۸
B	۰/۱۶	۰/۲۸	۰/۲۰

زمان تولید هر واحد (ساعت):

ماشین	محصول X	محصول Y	محصول Z
A	۰/۸۰	۱/۲۰	۱/۰۰
B	۰/۸۰	۱/۳۰	۱/۱۰

مسئله عبارت از تعیین برنامه تولید با حداقل هزینه است که نیاز تولید را نیز برآورده سازد. در ابتدای برنامه‌ریزی سطح موجودی صفر است. مسئله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۱۸ ـ تصور کنید که طول برنامه‌ریزی تولید یک موسسه تولیدی سه دوره بوده و در هر دوره دو روش تولید معمولی و اضافه‌کاری در اختیار داشته باشد. جدول مفروضات مربوطه به صورت زیر است:

دوره	تقاضای مورد انتظار	هزینه تولید هر واحد محصول		ظرفیت برحسب واحد محصول	
		اضافه‌کاری	معمولی	اضافه‌کاری	معمولی
۱	۶۰	۱۸	۱۴	۲۰	۱۰۰
۲	۸۰	۲۲	۱۷	۱۰	۱۰۰
۳	۱۴۰	۲۲	۱۷	۲۰	۶۰

هزینه انبارداری جهت انتقال هر واحد کالا از یک دوره به دورهٔ دیگر برابر صد تومان است. سطح موجودی اولیه در ابتدای دورهٔ برنامه‌ریزی ۱۵ واحد کالاست و به علاوه کسری کالا (Shortage) نیز مجاز نیست. مدل برنامه‌ریزی خطی آن را بنویسید.

۱۹ ـ تمرین ۲ فصل دوم را از طریق برنامه‌ریزی خطی حل کرده و جواب آن را با نتایج روش تثبیت سرعت تولید و همچنین روش ارضاء تقاضا مقایسه کنید.

۲۰ ـ آیا می‌توانید سؤالات تمرین ۳ فصل دوم را با استفاده از تجزیه و تحلیل مدل به دست آمده در تمرین ۱۹ پاسخ دهید؟ در صورت مثبت بودن جواب نتایج را به کمک رایانه به دست آورید و بحث کنید.

۲۱ ـ تمرین ۵ فصل دوم را از طریق برنامه‌ریزی خطی حل کرده و نتایج آن را با نتایج به دست آمده در آن تمرین مقایسه و در مورد علل تمایز بحث کنید.

۲۲ ـ تمرین ۶ فصل دوم را از طریق برنامه‌ریزی خطی حل کرده و نتایج آن را با نتایج به دست آمده در قسمت‌های ب و ج آن تمرین مقایسه نموده و دلایل تمایز را روشن سازید.

۴

کاربرد مدل‌های حمل و نقل

۱ ـ مقدمه

در فصل قبل با کاربرد برنامه‌ریزی خطی در برنامه‌ریزی تولید ادغامی و قدرت عمل آن در این زمینه آشنایی حاصل شد. در آنجا دیدیم مدل برنامه‌ریزی خطی با وجود آن که بیشترین کاربرد را در برنامه‌ریزی تولید دارد ولی ضعف عمده این مدل آن است که تابع هزینه آن باید خطی باشد و حال آن که در بسیاری از موارد کاربردی اینچنین نیست.

در این فصل ما از دو دیدگاه متوسل به مدل حمل و نقل شده‌ایم. اول این که مسائلی در برنامه‌ریزی تولید وجود دارند که از طریق برنامه‌ریزی خطی قابل حل‌اند ولی به علت فرم خاص آن‌ها حلشان از طریق برنامه‌ریزی خطی به صرفه نیست. لذا ما با یک تغییر متغیر ساده این مدل را به یک مدل حمل و نقل تبدیل می‌کنیم که حل آغازی آن بهینه است. پس از آن مسائلی را در برنامه‌ریزی تولید ادغامی در نظر خواهیم گرفت که تابع هزینه آن‌ها نه تنها خطی نیستند بلکه دارای یک هزینه ثابت راه‌اندازی نیز هستند. این مسائل قبلاً از طریق برنامه‌ریزی پویا حل گردیده است ولی با ابتکار جالبی این مسائل را به گونه‌ای درخواهیم آورد که حل آن‌ها از طریق مدل حمل و نقل میسر باشد.

۲ ـ مدل هزینه خطی

اگر هزینه‌ها تابعی خطی از متغیرهای تعریف کننده برنامه تولید تصور گردد، مسئله برنامه‌ریزی تولید می‌تواند بصورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله گردد. مشروط بر آنکه تمام محدودیت‌ها نیز خطی باشد. همانطوری که در فصل قبل دیدیم به علت وجود یک دستورالعمل حل قوی برای مسائل برنامه‌ریزی خطی، مسائل برنامه‌ریزی تولید خطی با بعد بسیار زیاد نیز می‌تواند به صورت یک مدل ریاضی حلاجی گردد. ولیکن بعضی از مدل‌ها به دلیل شکل خاص‌شان دارای دستورالعمل سریعتر جهت به دست آوردن حل بهینه هستند. در اینجا ما ساده‌ترین مدل یعنی مدل حمل و نقل را برای رسیدن سریعتر به جواب بهینه انتخاب نموده‌ایم.

یک مدل نقط با هزینه تولید و انبارداری

این مدل برای مواقعی که روشهای تولید مختلفی موجود باشد و یا منابع مختلفی برای فراهم کردن یک محصول در هر یک از زمانهای T دوره وجود داشته باشد که در آن برای تولید هر واحد محصول توسط منبع i هزینه متغیر معینی تعریف شده باشد مصداق دارد. محصول ممکن است با یک هزینه ثابت انبارداری از یک دوره برای دورهٔ دیگر نگهداری گردد. کسری کالا مجاز نیست. هزینه ثابت تولیدی وجود ندارد و از هزینه متغیر سرعت تولیدی منابع مختلف خبری نیست. هر منبع دارای یک ظرفیت داده شده‌ای در هر دوره است.

برای فرموله کردن مسئله به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرض کنید :

D_t : تعداد مورد نیاز در دورهٔ t $(t = 1, 2, ..., T)$

m : تعداد منابع تولید محصول در هر دوره

P_{it} : ظرفیت برحسب تعداد محصول از منبع i در دوره t $(i = 1, 2, ..., m)$

X_{it} : تعداد محصولی که باید توسط منبع i در دورهٔ t تولید شود.

C_{it} : هزینه متغیر هر واحد از منبع i در دورهٔ t

h_{it} : هزینه نگهداری یک واحد محصول از دورهٔ t تا دورهٔ t+1

I_t : سطح موجودی در پایان دورهٔ t بعد از ارضاء نیازمندی در دورهٔ t

تصور می‌کنیم تعدادی که در طول یک دوره به دست می‌آید برای ارضاء تقاضا در آن دوره می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. مسئله عبارت از انتخاب $\{X_{it}\}$ است که کل هزینه را در طول دوره برنامه‌ریزی مینیمم سازد. بنابراین:

$$\text{MinZ} = \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{i=1}^{m} C_{it} X_{it} + h_t I_t \right) \tag{1}$$

بطوری که

$$X_{it} \le P_{it} \qquad (i = 1, 2, ..., m,\ t = 1, 2, ..., T) \tag{2}$$

$$I_t = I_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} X_{it} - D_t \qquad (t = 1, 2, ..., T) \tag{3}$$

$$X_{it} \ge 0 \qquad (i = 1, 2, ..., m,\ t = 1, 2, ..., T) \tag{4}$$

$$I_t \ge 0 \qquad (t = 1, 2, ..., T) \tag{5}$$

تابع هدف (۱) عبارت از مجموع هزینه کل تدارک محصولات و هزینه کل نگهداریست. هزینه نگهداری در پایان دوره پرداخت می‌گردد. محدودیت‌های (۲) منتج از محدودیت ظرفیت منابع تولیدی است. محدودیت‌های (۳) عبارت از معادلات تعادل مواد هستند که متغیرهای سطح موجودی را به متغیرهای تولید ارتباط می‌دهند. این معادلات دوره‌های مختلف را به یکدیگر ربط می‌دهند و این مشخصات مدل‌های برنامه‌ریزی تولید چند دوره‌ای است. سطح تولید غیرمنفی توسط معادلات (۴) ضمانت می‌گردد و حال آنکه معادلات (۵) بدان معنی است که کسری مجاز نیست. توجه داریم که علاوه بر هزینه‌ها، تقاضاها و ظرفیت‌ها و سطح موجودی اولیه باید داده شده باشند.

با تعریف مجدد متغیرهای تصمیم‌گیری می‌توانیم ملاحظه کنیم که این مسئله دارای ساختار مدل حمل و نقل در برنامه‌ریزی است پس :

y_{ijk} : عبارت از تعداد محصولی که از منبع i در پریود j جهت برآوردن تقاضا دورهٔ k تولید می‌گردد.

γ_{ijk} : هزینه متغیر تولید یک واحد محصول از منبع i در دورهٔ j که برای مصرف تا دورهٔ k نگهداری می‌گردد. این ضریب هزینه به صورت زیر است:

$$\gamma_{ijk} = C_{ij} + h_j + h_{j+1} + ... + h_{k-1} \qquad (k \ge j)$$

چون که هزینه کسری مجاز نیست پس $\gamma_{ijk} = 0$ برای $k<j$ خواهد بود. این عمل در کامپیوتر با تخصیص یک مقدار بسیار بزرگ برای γ_{ijk} در حالت $k \le j$ عملی است. لذا مدل برنامه‌ریزی خطی مسأله به صورت زیر است:

$$\text{MinZ} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{T} \sum_{k=j}^{T} \gamma_{ijk}\, y_{ijk} \tag{6}$$

بطوری که

$$\sum_{k=j}^{T} y_{ijk} \le P_{ij} \qquad (i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., T) \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{T} y_{ijk} = D_k \qquad (k = 1, 2, ..., T) \tag{8}$$

$$y_{ijk} \ge 0 \tag{9}$$

در این مدل فرض بر آن است که یا موجودی اولیه نداریم و یا اینکه موجودی اولیه را به تقاضاها اختصاص داده‌ایم و در نتیجه اثر آن در سیستم به طور ضمنی مشهود خواهد بود. حال اگر بخواهیم که وجود موجودی اولیه را به وضوح مشاهده کنیم، فرض می‌کنیم که y_{ok} تعداد محصول از موجودی اولیه باشد که تقاضاهای دورهٔ kام را ارضاء می‌نماید. γ_{ok} هزینه انبارداری مربوطه برای هر واحد محصول باشد در آنصورت $\gamma_{ok} = h_1 + h_2 + ... + h_{k-1}$ خواهد بود. (هزینه تولید برای محصولات موجودی اولیه صفر می‌شود) لذا مدل تغییر شکل یافته به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{MinZ} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{T} \sum_{k=j}^{T} \gamma_{ijk} \cdot y_{ijk} + \sum_{k=1}^{T} \gamma_{ok}\, y_{ok} \tag{10}$$

بطوری که

$$\sum_{k=j}^{T} y_{ijk} \le P_{ij} \qquad (i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., T) \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{T} y_{ok} \le I_0 \tag{12}$$

$$y_{ok} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} y_{ijk} = D_k \qquad (k = 1, 2, ..., T) \tag{13}$$

$$y_{ok} \ge 0 \qquad (k = 1, 2, ..., T) \tag{14}$$

$$y_{ijk} \ge 0 \tag{15}$$

محدودیت (۱۱) ظرفیت تولید را به توسط منبع و زمان بیان می‌دارد و محدودیت (۱۳) ضمانت می‌نماید که تقاضای هر دوره دقیقاً ارضاء می‌گردد واضح است که سیستم معادلات (۱۰) تا (۱۵) یک مدل حمل و نقل را ارایه می‌دهد. برای حل اینگونه مسائل به راحتی می‌توان از روش‌های حل مسائل حمل و نقل استفاده نمود ولی دستورالعمل زیر حل بهینه اینگونه مسائل (بدون کسری) را به طور سریع به دست می‌آورد:

۱ـ تقاضای اولین دوره را به توسط منابع با حداقل هزینه ارضاء نمایید.

۲ـ ظرفیت‌ها را برای نمایش مقادیر باقیمانده آن بعد از قدم ۱ تنظیم نمایید.

۳ـ تقاضای دومین دوره را به توسط منابع با حداقل هزینه ارضاء کنید.

۴ ـ ظرفیت‌های موجود را تنظیم کنید.

۵ ـ قدم‌های ۳ و ۴ را برای دوره‌های ۳، ۴، ...، T تکرار کنید.

باید توجه نمود که دستورالعمل فوق فقط برای مسائل بدون کسری است. در مسائلی که برای عدم تحویل به موقع کالا (کسری مجاز) جریمه باید پرداخت شود، الگوریتم فوق حل بهینه را عاید نساخته، لذا برای به دست آوردن حل بهینه بهتر است از دستورالعمل «حداقل هزینه» در کل جدول استفاده شود. سپس با استفاده از روش حمل و نقل حل بدست آمده را بهینه نمود.

برای روشن شدن مطلب به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱

یک برنامه تولیدی باید برای ۴ دوره تنظیم گردد به طوری که تقاضاهای این ۴ دوره به ترتیب ۲۰، ۱۰، ۴۰ و ۳۰ واحد است. هزینه انبارداری بصورت $h_t I_t^+$ است که در آن $h_۱ = ۳, h_۲ = ۲, h_۳ = h_۴ = ۱$ و کسری مجاز نیست. هزینه‌های تولید، توابع محدب بوده و در جدول ۱ داده شده است. اعداد داخل جدول هزینه نهایی تولید بوده و برای سرتاسر X_t ثابت فرض می‌گردد، حداکثر تولید در یک دوره برابر ۳۵ است. سطح موجودی خالص اولیه برابر صفر است و موجودی نهایی نیز باید برابر صفر باشد.

جدول ۱ ـ هزینه‌های تولید برای مثال ۱

دامنه تغییرات تولید	دوره تولید ۱	۲	۳	۴
$۱ \leq X_t \leq ۸$	۴	۶	۶	۳
$۹ \leq X_t \leq ۱۷$	۵	۱۰	۸	۵
$۱۸ \leq X_t \leq ۲۵$	۶	۱۲	۱۰	۷
$۲۶ \leq X_t \leq ۳۵$	۸	۱۴	۱۲	۱۰

حل مثال بدون کسری

برای حل این مسئله تصور می‌کنیم که تمام این چهار منبع تولید در هر دوره آماده است و هر یک از این منابع دارای ظرفیت داده شده و هزینه متناسبی است. چون که هزینه نگهداری خطی است، جدول حمل و نقل را برای حل این مسئله می‌توانیم به کار بریم. جدول ۱ نتایج را نشان می‌دهد. اعداد داخل مربع کوچک بالای هر سلول هزینه اضافی مربوط به تولید و نگهداری را نشان می‌دهد.

تخصیص اعداد به هر سلول از دورهٔ ۱ آغاز می‌گردد. وقتی که تقاضای دورهٔ ۱ با تخصیص ارزانترین منبع ارضاء گردید، ظرفیت‌ها در ستون راست برای انعکاس ظرفیت باقیمانده تنظیم شده و به دورهٔ ۲ انتقال می‌یابیم. در دورهٔ ۲ نیز تقاضا با استفاده از ارزانترین منبع ارضاء می‌گردد و کار به همین منوال تا ارضاء تمام تقاضاها ادامه می‌یابد. برنامه بهینه تخصیص یافته $X_۱^* = ۲۵$، $X_۲^* = ۱۰$، $X_۳^* = ۳۵$ و $X_۴^* = ۳۰$ است. برای این برنامه $I_۱^* = ۵$، $I_۲^* = ۰$ و $I_۳^* = I_۴^* = ۰$ است و حداقل هزینه کل برابر ۷۱۳ واحد پولی است.

جدول ۲ ـ حل مثال ۱ بدون کسری

دوره P	منبع تولید	تقاضا در دوره ۱	۲	۳	۴	ظرفیت مصرف نشده	ظرفیت
۱	$۱ \leq X_۱ \leq ۸$	۴ ۸	۷	۹	۱۰	۰	۸
	$۹ \leq X_۱ \leq ۱۷$	۵ ۹	۸	۱۰	۱۱	۰	۹
	$۱۸ \leq X_۱ \leq ۲۵$	۶ ۳	۹ ۲	۱۱ ۳	۱۲	۰	۸
	$۲۶ \leq X_۱ \leq ۳۵$	۸	۱۱	۱۳	۱۴	۰ ۱۰	۱۰
۲	$۱ \leq X_۲ \leq ۸$		۶ ۸	۸	۹	۰	۸
	$۹ \leq X_۲ \leq ۱۷$		۱۰	۱۲ ۲	۱۳	۰ ۷	۹
	$۱۸ \leq X_۲ \leq ۲۵$		۱۲	۱۴	۱۵	۰ ۸	۸
	$۲۶ \leq X_۲ \leq ۳۵$		۱۴	۱۶	۱۷	۰ ۱۰	۱۰
۳	$۱ \leq X_۳ \leq ۸$			۶ ۸	۷	۰	۸
	$۹ \leq X_۳ \leq ۱۷$			۸ ۹	۹	۰	۹
	$۱۸ \leq X_۳ \leq ۲۵$			۱۰ ۸	۱۱	۰	۸
	$۲۶ \leq X_۳ \leq ۳۵$			۱۲ ۱۰	۱۳	۰	۱۰
۴	$۱ \leq X_۴ \leq ۸$				۳ ۸	۰	۸
	$۹ \leq X_۴ \leq ۱۷$				۵ ۹	۰	۹
	$۱۸ \leq X_۴ \leq ۲۵$				۷ ۸	۰	۸
	$۲۶ \leq X_۴ \leq ۳۵$				۱۰ ۵	۰ ۵	۱۰
	تقاضا	۲۰	۱۰	۴۰	۳۰	۴۰	۱۴۰

جدول ۳ ـ حل مثال ۲ باکسری

دوره P	منبع تولید	تقاضا در دوره ۱	۲	۳	۴	ظرفیت مصرف نشده	ظرفیت
۱	$۱ \le X_۱ \le ۸$	$\boxed{۴}$ ۸	$\boxed{۷}$	$\boxed{۹}$	$\boxed{۱۰}$	$\boxed{۰}$	۸
	$۹ \le X_۱ \le ۱۷$	$\boxed{۵}$ ۹	$\boxed{۸}$	$\boxed{۱۰}$	$\boxed{۱۱}$	$\boxed{۰}$	۹
	$۱۸ \le X_۱ \le ۲۵$	$\boxed{۶}$ ۳	$\boxed{۹}$ ۲	$\boxed{۱۱}$ ۳	$\boxed{۱۲}$	$\boxed{۰}$	۸
	$۲۶ \le X_۱ \le ۳۵$	$\boxed{۸}$	$\boxed{۱۱}$	$\boxed{۱۳}$	$\boxed{۱۴}$	$\boxed{۰}$ ۱۰	۱۰
۲	$۱ \le X_۲ \le ۸$	$\boxed{۸}$	$\boxed{۶}$ ۸	$\boxed{۸}$	$\boxed{۹}$	$\boxed{۰}$	۸
	$۹ \le X_۲ \le ۱۷$	$\boxed{۱۲}$	$\boxed{۱۰}$	$\boxed{۱۲}$	$\boxed{۱۳}$	$\boxed{۰}$ ۹	۹
	$۱۸ \le X_۲ \le ۲۵$	$\boxed{۱۴}$	$\boxed{۱۲}$	$\boxed{۱۴}$	$\boxed{۱۵}$	$\boxed{۰}$ ۸	۸
	$۲۶ \le X_۲ \le ۳۵$	$\boxed{۱۶}$	$\boxed{۱۴}$	$\boxed{۱۶}$	$\boxed{۱۷}$	$\boxed{۰}$ ۱۰	۱۰
۳	$۱ \le X_۳ \le ۸$	$\boxed{۱۱}$	$\boxed{۹}$	$\boxed{۶}$ ۸	$\boxed{۷}$	$\boxed{۰}$	۸
	$۹ \le X_۳ \le ۱۷$	$\boxed{۱۳}$	$\boxed{۱۱}$	$\boxed{۸}$ ۹	$\boxed{۹}$	$\boxed{۰}$	۹
	$۱۸ \le X_۳ \le ۲۵$	$\boxed{۱۵}$	$\boxed{۱۳}$	$\boxed{۱۰}$ ۸	$\boxed{۱۱}$	$\boxed{۰}$	۸
	$۲۶ \le X_۳ \le ۳۵$	$\boxed{۱۷}$	$\boxed{۱۵}$	$\boxed{۱۲}$ ۷	$\boxed{۱۳}$	$\boxed{۰}$ ۳	۱۰
۴	$۱ \le X_۴ \le ۸$	$\boxed{۹}$	$\boxed{۷}$	$\boxed{۴}$	$\boxed{۳}$ ۸	$\boxed{۰}$	۸
	$۹ \le X_۴ \le ۱۷$	$\boxed{۱۱}$	$\boxed{۹}$	$\boxed{۶}$	$\boxed{۵}$ ۹	$\boxed{۰}$	۹
	$۱۸ \le X_۴ \le ۲۵$	$\boxed{۱۳}$	$\boxed{۱۱}$	$\boxed{۸}$	$\boxed{۷}$ ۸	$\boxed{۰}$	۸
	$۲۶ \le X_۴ \le ۳۵$	$\boxed{۱۶}$	$\boxed{۱۴}$	$\boxed{۱۱}$ ۵	$\boxed{۱۰}$ ۵	$\boxed{۰}$	۱۰
تقاضا		۲۰	۱۰	۴۰	۳۰	۴۰	۱۴۰

مثال ۲

حال در مثال ۱ تصور کنید که سفارشات عقب افتاده مجاز باشد و هزینه سفارشات عقب افتاده در دورهٔ t بصورت $h_t I_t^-$ باشد که در آن $h_۱ = ۲$، $h_۲ = ۳$، $h_۳ = ۱$ و $h_۴ = \infty$ (چون که $\overline{I_۴} = ۰$ باید باشد) جریمه عدم تحویل هر واحد کالا در دوره‌های مربوطه است. جدول حمل و نقل بهینه در جدول ۳ داده شده است. با مقایسه جداول ۲ و ۳ فوراً متوجه می‌شویم که در مسائل باکسری هزینه مربوط به تمام عناصر جدول محاسبه شده است.

با استفاده از روش «حداقل هزینه» در تمام جدول صرفنظر از ستون ظرفیت مصرف نشده یک حل آغازی خوب حاصل می‌شود که با بهینه کردن آن خواهیم داشت:
$X_۱^* = ۲۵$، $X_۲^* = ۸$، $X_۳^* = ۳۲$ و $X_۴^* = ۳۵$. در این حل سطوح موجودی عبارت از $I_۱^+ = ۵$، $I_۲^+ = ۳$ و $I_۳^+ = I_۴^+ = ۰$ و سفارشات عقب افتاده فقط در دورهٔ ۳ با $I_۳^- = ۵$ اتفاق می‌افتد. حداقل هزینه مربوطه ۷۰۸ واحد پولی است.

مثال ۳: دو محصولی

یک کارخانه تولید کننده لوازم صنعتی دو نوع محصول A و B تولید می‌کند. تقاضای زیاد این محصول در گذشته کارخانه را وادار نموده است که از اضافه‌کاری و قرارداد جنبی استفاده کند. برای برنامه‌ریزی تولید در بهار سال آینده یک قرارداد جنبی تا ۵۰ محصول از A و یا B منعقد گردیده است و کارخانه اجباراً باید از این قرارداد استفاده کند. به علت فشار وزارت صنایع سنگین این کارخانه مجاز نیست که در دوره‌های بعدی دوره برنامه‌ریزی آینده غیر از دورهٔ اول بیش از ۳۰ محصول A و یا B به طور آزاد خریداری نماید. اطلاعات لازم دیگر در جدول ۴ خلاصه شده است. (برای سادگی در محاسبات اعداد گرد شده‌اند).

جدول ۴ ـ اطلاعات مثال ۳

فصل	ظرفیت تولید (واحد محصول): اوقات معمولی	اضافه کاری	قرارداد جنبی	تقاضا (واحد محصول): A	B
بهار	۱۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۵۰
تابستان	۱۰۰	۶۰	۳۰	۱۱۰	۱۲۰
پاییز	۱۲۰	۷۰	۳۰	۷۰	۱۳۰
زمستان	۱۰۰	۶۰		۹۵	۱۲۵
موجودی اولیه				۱۰	۱۰
موجودی پایانی دوره برنامه‌ریزی				۱۵	۲۵
هزینه تولید اوقات معمولی (واحد پول قراردادی)				۱۰	۸
هزینه تولید در وقت اضافی.				۱۲	۱۰
هزینه تهیه کالا از طریق قرارداد جنبی				۱۵	۱۲
هزینه نگهداری کالا برای هر واحد محصول در یک فصل				۱	۲

مسئله عبارت از تعیین بهترین برنامه تولید در اوقات معمولی، اضافه‌کاری و قرارداد جنبی است.

مطابق مثال‌های ۱ و ۲ جدول حمل و نقل این مسئله نیز می‌تواند ساخته شود. تنها فرق این مسئله با مثال‌های قبلی در این است که در اینجا بجای یک ستون در دوره‌های مصرف باید دو ستون (به دلیل وجود دو محصول) بوجود آوریم. ضمناً روش حداقل هزینه روش خوبی برای بدست آوردن اولین حل قابل قبول در این مسئله هست. ولی لزوماً جواب به دست آمده بهینه نیست. حل بهینه این مسئله در جدول ۵ داده شده است. دستورالعمل تولید بهینه آن نیز به منظور استفاده مدیریت در جدول ۶ خلاصه شده است.

جدول ۵ ـ جدول حمل و نقل و حل بهینه مثال ۳

تولید \ مصرف		۱		۲		۳		۴		ظرفیت بکار برده نشده	ظرفیت
		A	B	A	B	A	B	A	B		
۱	اوقات معمولی	[۱۰] ۴۰	[۸]	[۱۱] ۹۰	[۱۰]	[۱۲]	[۱۲]	[۱۳]	[۱۴]	[۰]	۱۳۰
	اضافه کاری	[۱۲]	[۱۰]	[۱۳]	[۱۲]	[۱۴]	[۱۴]	[۱۵] ۴۰	[۱۶]	[۰]	۴۰
	قرارداد جنبی	[۱۵] ۱۰	[۱۲] ۴۰	[۱۰۰]	[۱۰۰]	[۱۰۰]	[۱۰۰]	[۱۰۰]	[۱۰۰]	[۱۰۰]	۵۰
۲	اوقات معمولی			[۱۰]	[۸] ۱۰۰	[۱۱]	[۱۰]	[۱۲]	[۱۲]	[۰]	۱۰۰
	اضافه کاری			[۱۲] ۲۰	[۱۰] ۲۰	[۱۳]	[۱۲]	[۱۴] ۲۰	[۱۴]	[۰]	۶۰
	قرارداد جنبی			[۱۵]	[۱۲]	[۱۶]	[۱۴]	[۱۷]	[۱۶]	[۰] ۳۰	۳۰
۳	اوقات معمولی					[۱۰]	[۸] ۱۱۰	[۱۱] ۱۰	[۱۰]	[۰]	۱۲۰
	اضافه کاری					[۱۲] ۷۰	[۱۰]	[۱۳]	[۱۲]	[۰]	۷۰
	قرارداد جنبی					[۱۵]	[۱۲] ۲۰	[۱۶]	[۱۴]	[۰] ۱۰	۳۰
۴	اوقات معمولی							[۱۰]	[۸] ۱۰۰	[۰]	۱۰۰
	اضافه کاری							[۱۲] ۴۰	[۸] ۲۰	[۰]	۶۰
	قرارداد جنبی							[۱۵]	[۱۲] ۳۰	[۰]	۳۰
	تقاضا	۵۰	۴۰	۱۱۰	۱۲۰	۷۰	۱۳۰	۱۱۰	۱۵۰	۴۰	۱۲۰ / ۸۲۰

جدول ۶ ـ خلاصه حل بهینه مثال ۳

فصل		۱		۲		۳		۴	
محصول		A	B	A	B	A	B	A	B
تولید	اوقات معمولی	۱۳۰	—	—	۱۰۰	۱۰	۱۱۰	—	۱۰۰
	اضافه کاری	۴۰	—	۴۰	۲۰	۷۰	—	۴۰	۲۰
	قراردادی	۱۰	۴۰	—	—	—	۲۰	—	۳۰
	جمع	۱۸۰	۴۰	۴۰	۱۲۰	۸۰	۱۳۰	۴۰	۱۵۰
	تقاضا	۶۰	۵۰	۱۱۰	۱۲۰	۷۰	۱۳۰	۹۵	۱۲۵
موجودی	آغازی	۱۰	۱۰	۱۳۰	—	۶۰	—	۷۰	—
	پایانی	۱۳۰	—	۶۰	—	۷۰	—	۱۵	۲۵
	اوقات معمولی	۱,۳۹۰	—	—	۸۰۰	۱۱۰	۸۸۰	—	۸۰۰
	اضافه کاری	۶۰۰	—	۵۲۰	۲۰۰	۸۴۰	—	۴۸۰	۲۰۰
	قرارداد جنبی	۱۵۰	۴۸۰	—	—	—	۲۴۰	—	۳۶۰
	جمع جزئی	۲,۱۴۰	۴۸۰	۵۲۰	۱,۰۰۰	۹۵۰	۱,۱۲۰	۴۸۰	۱,۳۶۰
	کل هزینه	۸,۰۵۰ واحد پول قراردادی							

متأسفانه جدول حمل و نقل علیرغم ساده و قابل درک بودن آن قادر نیست حل بهینه بدست آمده را تجزیه و تحلیل حساسیت بنماید. اگر این مسئله از طریق برنامه‌ریزی خط حل شود آنالیز حساسیت بعد از حل بهینه اطلاعات ارزنده‌ای را در اختیار مدیر قرار می‌دهد. به عنوان مثال از متغیرهای مزدوج این مسئله براحتی می‌توان دریافت که اگر ظرفیت فصل زمستان را یک واحد افزایش دهیم، پنج واحد پول قراردادی از کل هزینه مسئله می‌کاهیم. این نکته مبین آن است که هر چه از تهیه کالا از بازار آزاد بکاهیم و به ظرفیت تولید اوقات معمولی بیافزاییم به صرفه خواهد بود. همچنین کم کردن هر واحد از ظرفیت قرارداد جنبی در دورهٔ اول ۳ واحد پول قراردادی به نفع این کارخانه خواهد بود.

از محدودیت‌های دیگر مدل حمل و نقل این است که اگر تعداد محصولات زیاد شوند حل مدل حمل و نقل به مراتب پیچیده‌تر می‌شود مضافاً بر اینکه ارتباط متقابل محصولات و همچنین هزینه مربوط به از دست دادن تقاضا و یا سایر محدودیت‌های دیگر را در نظر نمی‌گیرد.

شایان ذکر است که هزینه کل در این مسأله برابر ۸۰۵۰ واحد پول قراردادی است.

۳ـ مدل‌های تولید با هزینه ثابت راه‌اندازی

همان طوری که در ابتدای این فصل اشاره کردیم توابع هزینه مدل‌های برنامه‌ریزی تولید لزوماً خطی نیستند. در این قسمت ما می‌خواهیم یک مدل بسیار رایجی را در برنامه‌ریزی تولید مورد توجه قرار دهیم که برای شروع تولید احتیاج به پرداخت هزینه ثابت راه‌اندازی باشد. نمونه‌های بسیار جالب این مدل کارخانجاتی هستند که تولیدات آن‌ها مثل کارخانجات لاستیک‌سازی پس از پرداخت هزینه ثابت مربوط به آماده‌سازی قالب تولید میسر است. این مساله برای تدارک کالاهایی که از طریق ثبت سفارش با پرداخت هزینه تهیه می‌شوند نیز مصداق دارد. بنابراین هزینه تولید X_t واحد محصول در دورهٔ t به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$C_t(X_t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } X_t = 0 \text{ باشد} \\ A_t + C_t X_t & \text{اگر } X_t > 0 \text{ باشد} \end{cases} \qquad (۱۶)$$

که در آن A_t هزینه ثابت راه‌اندازی و C_t هزینه متغیر تولید هر واحد محصول در دورهٔ t است. این توابع هزینه به علت همین ناپیوستگی در نقطه $X_t = 0$ جزء توابع مقعر به حساب می‌آیند.

در این قسمت این مسئله را در حالت بدون محدودیت در ظرفیت تولید و با محدودیت در ظرفیت تولید در نظر خواهیم گرفت و در هر مورد ابتدا راه حل دینامیکی آنرا که در اغلب کتاب‌های برنامه‌ریزی تولید موجود است عرضه خواهیم داشت. سپس مسئله را با یک راه حل ابتکاری که خاص خود نویسنده است حل خواهیم نمود. در راه حل ابتکاری متوجه خواهیم شد که تعداد محاسبات به نحو چشمگیری کمتر از راه‌حل‌های موجود است.

۱.۳ـ بدون محدودیت در ظرفیت تولید

۱.۱.۳ـ راه حل دینامیکی

فرض کنید که:

X_t: مقدار تولید در دورهٔ t باشد.

D_t: تقاضای انتظاری در دورهٔ t باشد.

$K(X_t, I_t)$: هزینه تولید X_t واحد محصول در دورهٔ t و نگهداری I_t واحد محصول در پایان دورهٔ t باشد.

توجه داشته باشید که $t = 1, 2, ..., T$ است.

بنابراین در مدل مورد مطالعه داریم:

$$K(X_t, I_t) = \begin{cases} h_t I_t & \text{اگر } X_t = 0 \text{ باشد} \\ A_t + C_t X_t + h_t I_t & \text{اگر } X_t > 0 \text{ باشد} \end{cases} \qquad (۱۷)$$

که در آن h_t هزینه نگهداری یک واحد محصول در دورهٔ t و C_t هزینه متغیر تولید هر واحد محصول و A_t هزینه ثابت راه‌اندازی در دورهٔ t است.

$f_t(I)$ حداقل هزینه تولید و نگهداری در دوره‌های $t, t+1, ..., T$ باشد که در آن موجودی خالص در شروع دورهٔ t برابر I است.

تصمیم‌گیری در دورهٔ t را در نظر بگیرید. اگر سطح موجودی در آغاز دورهٔ t برابر $I = I_{t-1}$ باشد و متغیر تصمیم‌گیری برابر X_t باشد، در آن صورت هزینه مربوطه در دورهٔ t برابر $K_t(X_t, I_t)$ خواهد بود. بعلاوه موجودی I_t که به توسط X_t و D_t و I قابل توجیه است بر روی مینیمم هزینه در دورهٔ مورد نظر t موثر است. با فرض اینکه یک رویه بهینه بعد از دورهٔ t اتخاذ گردد. متغیر تصمیم‌گیری X_t باعث خواهد شد که هزینه $K_t(X_t, I_t) + f_{t+1}(I_t)$ برای دوره‌های $t, t+1, ..., T$ پرداخت گردد. بنابراین بهترین تصمیم‌گیری با داشتن موجودی I در ابتدای دورهٔ t از معادله برگشتی زیر معلوم خواهد شد:

$$f_t(I) = \min_{X_t \geq 0} [K_t(X_t, I_t) + f_{t+1}(I_t)] \qquad (۱۸)$$

که در آن $t = 1, 2, ..., T$ بوده و $f_{T+1} = 0$ است و I_t از رابطه تعادل موجودی بصورت زیر بدست خواهد آمد:

$$I_t = I_{t-1} + X_t - D_t \qquad (۱۹)$$

حل مسائل برنامه‌ریزی تولید با استفاده از فرمول (۱۸) در حالت کلی و برای تمام مقادیر $X_t \geq 0$ بسیار طولانی است. لذا محققین سعی بر آن داشته‌اند تا خواصی از این مدل استخراج کنند که باعث کاهش محاسبات گردد. برای روشن شدن این تلاش اجازه بدهید که مدل بهینه‌سازی این مسئله را بنویسیم.

$$\text{Min}Z = \sum_{t=1}^{T} [A_t \delta(X_t) + C_t X_t + h_t I_t] \qquad (۲۰)$$

بطوری که

$$\begin{aligned} & I_t = I_{t-1} + X_t - D_t \qquad t = 1, 2, ..., T \\ & I_0 = I_T = 0 \\ & I_t, X_t \geq 0 \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

که در آن

$$\delta(X_t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } X_t = 0 \text{ باشد} \\ 1 & \text{اگر } X_t > 0 \text{ باشد} \end{cases}$$

طبق اثبات قضیه ۳ ضمیمه کتاب، مینیمم یک تابع مقعر بر روی یک مجموعه از محدودیت‌های خطی حتماً بر روی یکی از نقاط غائی آن اتفاق خواهد افتاد. یک نقطه غائی در اینجا حداکثر T متغیر غیر صفر خواهد داشت. اگر $D_t > 0$ باشد در آن صورت یکی یا هر دو X_t و I_{t-1} باید بزرگتر از صفر باشد چونکه T محدودیت و فقط T متغیر در یک حل غائی موجود است، لذا دقیقاً یکی از متغیرهای I_{t-1} و X_t باید دارای مقدار مثبت باشند. بنابراین تمام حل‌های غائی، حتی حل بهینه دارای خاصیت $X_t \cdot I_{t-1} = 0$ برای $t = 1, 2, ..., T$ است. حال اگر تقاضا در دورهٔ k برابر صفر باشد می‌توانیم داشته باشیم $I_{k-1} = 0$ و هم $X_k = 0$ و آن بدین معنی است که در یک حل غائی می‌تواند $I_{t-1} > 0$ و $X_t > 0$ برای بعضی از $t \neq k$ باشد. ولی چنین حلی نمی‌تواند بهینه باشد. برای ملاحظه آن توجه داریم که اگر $I_{k-1} = X_k = 0$ باشد می‌توانیم حل مینیمم هزینه را به توسط تجزیه مسئله به دو مسئله مستقل حل نماییم.

برنامه‌ریزی از دورهٔ ۱ تا $k-۱$ و برنامه‌ریزی از دورهٔ $k+۱$ تا T. مسئله اول دارای $k-۱$ محدودیت بوده و در نتیجه دارای $k-۱$ متغیر غیر صفر در حل بهینه خواهد بود، دومی دارای $T-K$ محدودیت و $T-K$ متغیر غیر صفر هم خواهد بود. در نتیجه فقط $T-۱$ متغیر غیر صفر در حل بهینه مسئله ترکیبی موجود خواهد بود و این خود دوباره دلیل بر صحت $I_{t-۱}\ X_t = ۰$ است.

دانستن این چنین خاصیتی از حل بهینه باعث نقصان فضای تصمیم‌گیری در وضعیت سیستم بوده و در نتیجه ما را قادر خواهد ساخت که از برنامه‌ریزی پویا به راحتی استفاده نماییم، فقط لازم خواهد بود که مقادیر زیر را برای x_t در نظر بگیریم:

$$D_t + D_{t+۱} + \dots D_T,\ \dots,\ D_t + D_{t+۱},\ D_t,\ ۰$$

نقاطی از زمان که سطح موجودی دوباره صفر می‌شود به نام نقاط «شروع مجدد» می‌نامند. برای هر دورهٔ زمانی که تولید برنامه‌ریزی شده باشد، شروع آن دوره را به نام زمان شروع مجدد می‌گیریم. براساس این خاصیت دستورالعمل زیر را ارایه می‌دهیم.

دستورالعمل پیش‌روی - بدون کسری

فرض کنید که M_{jk} هزینه تولید در دورهٔ $j+۱$ جهت ارضاء تقاضای دوره‌های $j+۱, j+۲ \dots k$, بوده، به طوری که:

$$(k = j+۱, j+۲, \dots T;\ j=۰, ۱, \dots, T-۱)$$

باشد. M_{jk} شامل هزینه نگهداری نیز هست. توجه کنید که فرض ما بر این است که پایان دورهٔ j و پایان دورهٔ k زمان‌های شروع مجدد هستند. یعنی $I_j=۰$ و $I_k=۰$ است در آن صورت؛

$$X_{j+۱} = D_{j+۱} + D_{j+۲} + \dots + D_k \qquad (۲۲)$$

$$I_t = X_{j+۱} - \sum_{r=j+۱}^{t} D_r = \sum_{r=t+۱}^{k} D_r \quad , \qquad (t = j+۱, j+۲, \dots, k-۱) \qquad (۲۳)$$

$$M_{jk} = C_{j+۱}(X_{j+۱}) + \sum_{t=j+۱}^{k-۱} H_t(I_t)$$

در نتیجه:

$$M_{jk} = C_{j+۱}\Big(\sum_{r=j+۱}^{k} D_r\Big) + \sum_{t=j+۱}^{k-۱} H_t\Big(\sum_{r=t+۱}^{k} D_r\Big) \qquad (۲۴)$$

فرض کنید که F_k نمایشگر هزینه رویه بهینه برای دوره‌های ۱، ۲، ...، k به شرط $I_k=۰$ باشد، پس؛

$$F_k = \min_{۰\le j\le k-۱} [F_j + M_{jk}] \qquad (k = ۱, ۲, \dots, T) \qquad (۲۵)$$

و $F_۰=۰$ است.

برای مرتب کردن روش محاسبه، α_{jk} را بعنوان بهترین هزینه برای دوره‌های ۱، ۲، ... و k تعریف می‌نماییم، که در آن $I_k=۰$ و $j+۱$ دورهٔ آخرین تولید است یعنی:

$$X_{j+۲} = X_{j+۳} = \dots = X_k = ۰ \qquad \text{و} \qquad X_{j+۱} > ۰$$

در آن صورت داریم:

$$\alpha_{jk} = F_j + M_{jk} \qquad (۲۶)$$

$$F_k = \min_{۰\le j\le k-۱} [\alpha_{jk}] \qquad (۲۷)$$

سپس مدل نشان داده شده در شکل ۱ را ایجاد نمایید. برای یک دوره k، نقطه شروع مجدد بهینه $j^*(k)$ بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha_{j^*(k),k} = \min_{۰\le j\le k-۱} \alpha_{jk} \qquad (۲۸)$$

برای هر نقطه شروع مجدد k داده شده، می‌توان نقطه شروع مجدد بهینه قبلی k یعنی j^* که در آن سطح موجودی برابر صفر است پیدا نمود. با شروع از $k = T$ و استفاده از روش پس‌روی می‌توان نقاط شروع مجدد را در حل بهینه مشخص نمود.

شماره دورهٔ آخرین تولید $(j+۱)$	نقطه شروع مجدد قبلی (j)	افق برنامه‌ریزی (k): ۱	۲	۳	...	T
۱	۰	۰۱	۰۲	۰۳	...	۰T
۲	۱		۱۲	۱۳	...	۱T
۳	۲			۲۳	...	۲T
:	:					:
T	T−۱					t−۱, T
$F_k = \min_j \alpha_{jk}$		$F_۱$	$F_۲$	$F_۳$	...	F_T
نقطه شروع بهینه قبلی $[j^*(k)]$		$j^*(۱)$	$j^*(۲)$	$j^*(۳)$	...	$j^*(T)$

شکل ۱ - جدول دستورالعمل پیش‌روی - بدون سفارشات عقب‌افتاده

مثال ۴

می‌خواهیم برای یک دوره ۴ دوره‌ای برنامه‌ریزی تولید بنماییم. موجودی اولیه صفر بوده و سطح موجودی نهایی نیز باید صفر باشد. کسری مجاز نیست. هزینه‌های تولید و نگهداری به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$C_t(X_t) = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } X_t = ۰ \\ A_t + c_t X_t & \text{اگر } X_t > ۰ \end{cases}$$

$$H_t(I_t) = h_t\ I_t$$

تخمین پارامترهای هزینه و تقاضا در جدول داده شده است.

ابتدا مسئله تک دوره‌ای را در نظر بگیرید.

$$M_{۰۱} = A_۱ + C_۱ D_۱ = ۳۰ + (۳)(۲۰) = ۹۰$$

$$F_۱ = \alpha_{۰۱} = F_۰ + M_{۰۱} = ۰ + ۹۰ = ۹۰$$

حل فرعی یک دوره‌ای:

$j^*(۱) = ۰$ و $X^*_۱ = ۲۰$

جدول ۷ـ مفروضات مثال ۴

دوره t	پیش‌بینی تقاضا D_t	هزینه آماده‌سازی A_t	هزینه متغیر هر واحد محصول C_t	هزینه نگهداری برای هر دورهٔ h_t
۱	۲۰	۳۰	۳	۲
۲	۳۰	۴۰	۳	۲
۳	۴۰	۳۰	۴	۱
۴	۳۰	۵۰	۴	۱

سپس مسئله دو دوره‌ای را در نظر می‌گیریم $(k=۲)$:

$$M_{۰۲} = A_۱ + C_۱(D_۱ + D_۲) + h_۱ D_۲ = ۳۰ + (۳)(۲۰+۳۰) + (۲)(۳۰) = ۲۴۰$$

$$M_{۱۲} = A_۲ + C_۲ D_۲ = ۴۰ + (۳)(۳۰) = ۱۳۰$$

$$F_۲ = \text{Min} \begin{cases} \alpha_{۰۲} = F_۰ + M_{۰۲} = ۰ + ۲۴۰ = ۲۴۰ \\ \alpha_{۱۲} = F_۱ + M_{۱۲} = ۹۰ + ۱۳۰ = ۲۲۰ \end{cases}$$

حل فرعی دو دوره‌ای:

$X_۲^* = ۳۰$ ،$X_۱^* = ۲۰$ و $j^*(۲) = ۱$ ،$F_۲ = ۲۲۰$

برای مسئله سه دوره‌ای داریم $(k=۳)$:

$$A_{۰۳} = A_۱ + C_۱(D_۱ + D_۲ + D_۳) + h_۱(D_۲ + D_۳) + h_۲ D_۳ = ۵۲۰$$

$$M_{۱۳} = A_۲ + C_۲(D_۲ + D_۳) + h_۲ D_۳ = ۳۳۰$$

$$M_{۲۳} = A_۳ + C_۳ D_۳ = ۱۹۰$$

$$F_۳ = \text{Min} \begin{cases} \alpha_{۰۳} = F_۰ + M_{۰۳} = ۰ + ۵۲۰ = ۵۲۰ \\ \alpha_{۱۳} = F_۱ + M_{۱۳} = ۹۰ + ۳۳۰ = ۴۲۰ \\ \alpha_{۲۳} = F_۲ + M_{۲۳} = ۲۲۰ + ۱۹۰ = ۴۱۰ \end{cases}$$

حل فرعی سه دوره‌ای:

$X_۳^* = ۴۰$ ،$X_۲^* = ۳۰$ ،$X_۱^* = ۲۰$ و $j^*(۳) = ۲$ ،$F_۳ = ۴۱۰$

و بالاخره برای مسئله چهار دوره‌ای داریم $(k=۴)$:

$$M_{۰۴} = A_۱ + C_۱(D_۱ + D_۲ + D_۳ + D_۴) + h_۱(D_۲ + D_۳ + D_۴) + h_۲(D_۳ + D_۴) + h_۳ D_۴ = ۷۶۰$$

$$M_{۱۴} = A_۲ + C_۲(D_۲ + D_۳ + D_۴) + h_۲(D_۳ + D_۴) + h_۳ D_۴ = ۵۱۰$$

$$M_{۲۴} = A_۳ + C_۳(D_۳ + D_۴) + h_۳ D_۴ = ۳۴۰$$

$$M_{۳۴} = A_۴ + C_۴ D_۴ = ۱۷۰$$

$$F_۴ = \text{Min} \begin{cases} \alpha_{۰۴} = F_۰ + M_{۰۴} = ۰ + ۷۶۰ = ۷۶۰ \\ \alpha_{۱۴} = F_۱ + M_{۱۴} = ۹۰ + ۵۱۰ = ۶۰۰ \\ \alpha_{۲۴} = F_۲ + M_{۲۴} = ۲۲۰ + ۳۴۰ = ۵۶۰ \\ \alpha_{۳۴} = F_۳ + M_{۳۴} = ۴۱۰ + ۱۷۰ = ۵۸۰ \end{cases}$$

حل نهایی: بنابراین $X_۴^* = ۰$ ،$X_۳^* = ۷۰$ ،$X_۲^* = ۳۰$ ،$X_۱^* = ۲۰$ و $j^*(۴) = ۲$ و $F_۴ = ۵۶۰$. این نتایج در جدول ۸ خلاصه شده است.

جدول ۸ـ تعیین F_k و $j^*(k)$ از مقادیر jk مثال ۴

j \ k	۱	۲	۳	۴
۰	۹۰	۲۴۰	۵۲۰	۷۶۰
۱		۲۲۰	۴۲۰	۶۰۰
۲			۴۱۰	۵۶۰
۳				۵۸۰
F_k	۹۰	۲۲۰	۴۱۰	۵۶۰
$j^*(k)$	۰	۱	۲	۲

توجه داریم که ما مسئله را بصورت پی‌درپی با افق برنامه‌ریزی یک، دو، سه و چهار دوره حل کردیم. برای فهمیدن اینکه برنامه تولید بهینه چگونه تعیین شده است، اطلاعات داده شده در جدول ۸ را مطالعه بفرمایید. برای $k=۴$ آخرین نقطه شروع مجدد ۲ است یعنی:

$$x_۴^* = ۰ \quad , \quad I_۳^* = D_۴ = ۳۰$$

$$X_۳^* = D_۳ + D_۴ = ۷۰ \quad , \quad I_۲^* = ۰$$

چونکه سطح موجودی در پایان دورهٔ ۲ برابر صفر است فرض می‌کنیم $k=۲$ است و نقطهٔ شروع مجدد قبلی را که ۱ است بدست می‌آوریم. پس $I_۱^* = ۰$ و $X_۲^* = D_۲ = ۳۰$ برای $k=1$ داریم $j(۱^*) = ۰$ و $X_۱^* = D_۱ = ۲۰$ خواهد بود.

دستورالعمل پیش‌روی ـ سفارشات عقب‌افتاده مجاز است

وقتی کسری مجاز باشد و سفارش برای کالاهای عقب‌افتاده داده شود موجودی خالص I_t ممکن است مقادیر منفی اختیار نماید. حال فرض می‌کنیم که

$$K_t(x_t, I_t) = C_t(x_t) + H_t^+(I_t^+) + H_t^-(I_t^-)$$

که در آن I_t^+ موجودی در دست و I_t مقدار کالای دوباره سفارش داده شده در پایان دورهٔ t است. $I_t = I_t^+ - I_t^-$ و C_t، H_t^- و H_t^+ مقعر فرض می‌شوند. رویه تولید بهینه دارای این خاصیت است که حداقل دو تا از سه کمیت I_{t-1}^+، I_t^- و x_t صفر است، یعنی تقاضا در هر دوره t کاملاً به توسط موجودی ارضاء گردیده (تولید در دوره‌های قبلی بوده است) یا کاملاً متوسط تولید در دوره t خواهد بود. این خاصیت ممکن است به طریقی مشابه حالت بدون کسری که در آن نشان داده‌ایم $X_t = 0$ I_{t-1} است ولی به مراتب مشکل‌تر اثبات گردد.

این خاصیت حل بهینه بدین معنی است که اگر تولید در دورهٔ t صورت پذیرد $j<t$ و $k>t$ نزدیکترین نقاط شروع مجدد $(I_k=0, I_j=0)$ قبل و بعد از t باشد داریم :

$$X_t = \sum_{r=j+1}^{k} D_r \qquad (28)$$

لازم به تذکر است که اگر j و k دو نقطه شروع مجدد پی‌درپی باشند. دقیقاً یک دوره‌ای مثل t موجود خواهد بود که $j<t\leq k$ بوده و در آن حتماً تولید صورت می‌پذیرد. ما M_{jk} را دوباره بدین صورت تعریف می‌کنیم که آن مینیمم هزینه تولید دقیقاً در یکی از دوره‌های $j+1$, $j+2$, ...,k است به طوری که تقاضا در فاصله این دوره‌ها را ارضاء می‌نماید و $I_k = I_j = 0$ است. پس

$$M_{jk} = \begin{cases} C_{j+1}(D_{j+1}) & \\ \min\limits_{j+1\leq t\leq k} \left[C_t(X_t) + \sum\limits_{t=j+1}^{t-1} H_t^-(I_t^-) + \sum\limits_{l=t}^{k-1} H_l^+(I_l^+)\right] & \text{اگر } k>j+1 \end{cases}$$

که در آن x_t به توسط (۲۸) داده شده است و

$$I_1^- = \sum_{r=j+1}^{t} D_r \qquad \text{اگر } l = j+1, 2, ..., t-1 \qquad (30)$$

$$I_1^+ = \sum_{r=l+1}^{k} D_r \qquad \text{اگر } l = t+t, 1, ..., k-1 \qquad (31)$$

معادله برگشتی پیشرو، بصورت زیر است :

$$F_k = \min_{0\leq j\leq k-1} [F_j + M_{jk}]$$

$$F_k = \min_{0\leq j\leq k-1} [\alpha_{jk}] \qquad \text{اگر } k = 1, 2, ..., T \qquad (32)$$

که در آن $F_0 = 0$ است. در حالت وجود سفارشات عقب افتاده محاسبات مربوط به مینیمم سازی اولیه M_{jk} خود نیاز به عملیات بیشتری دارد.

مثال ۵

در مثال ۴ تصور کنید که سفارشات عقب افتاده مجاز باشد و جریمه سفارش جدید دادن بصورت زیر تعریف گردد :

$$H_t^-(I_t^-) = \pi_t I_t^-$$

همچنین در آن $\pi_1=1$، $\pi_2=1$، $\pi_3=2$ و $\pi_4=2$ تعریف شوند. قدم اول عبارت از محاسبه M_{jk} برای $k = 1, 2, 3, 4$ است و تمام $j<k$ است. این مسئله درگیر محاسبه دورهٔ بهینه تولید بین نقاط شروع مجدد j و k است. این دوره را به توسط $t^*(j,k)$ تعریف می‌نماییم.

$$M_{01} = C_1(D_1) = 90 \; ; \; t^*(0, 1) = 1$$

$$M_{02} = \min \begin{cases} C_1(D_1 + D_2) + H_1^+(D_2) = 240 \\ C_2(D_1 + D_2) + H_1^-(D_1) = 210 \end{cases}$$

$$M_{02} = 210 \; ; \; t^*(0, 2) = 2$$

$$M_{03} = \min \begin{cases} C_1(D_1 + D_2 + D_3) + H_1^+(D_2 + D_3) + H_2^+(D_3) = 520 \\ C_2(D_1 + D_2 + D_3) + H_1^-(D_1) + H_2^+(D_3) = 410 \\ C_3(D_1 + D_2 + D_3) + H_1^-(D_1) + H_2^-(D_1 + D_2) = 460 \end{cases}$$

$$M_{03} = 410 \; ; \; t^*(0, 3) = 2$$

$$M_{04} = \min \begin{cases} C_1\left(\sum\limits_{r=1}^{4} D_r\right) + H_1^+(D_2 + D_3 + D_4) + H_2^+(D_3 + D_4) + H_3^+(D_4) = 760 \\ C_2\left(\sum\limits_{r=1}^{4} D_r\right) + H_1^-(D_1) + H_2^+(D_3 + D_4) + H_3^+(D_4) = 590 \\ C_3\left(\sum\limits_{r=1}^{4} D_r\right) + H_1^-(D_1) + H_2^-(D_1 + D_2) + H_3^+(D_4) = 610 \\ C_4\left(\sum\limits_{r=1}^{4} D_r\right) + H_1^-(D_1) + H_2^-(D_1 + D_2) + H_3^-(D_1 + D_2 + D_3) = 780 \end{cases}$$

$$M_{04} = 590 \; ; \; t^*(0, 4) = 2$$

$$M_{12} = C_2(D_2) = 130 \; ; \; t^*(1, 2) = 2$$

$$M_{13} = \min \begin{cases} C_2(D_2 + D_3) + H_2^+(D_3) = 330 \\ C_3(D_2 + D_3) + H_2^-(D_2) = 340 \end{cases}$$

$$M_{13} = 330 \; ; \; t^*(1, 3) = 2$$

$$M_{14} = \text{Min} \begin{cases} C_2(D_2 + D_3 + D_4) + H_2^{+}(D_3 + D_4) + H_3^{+}(D_4) = 510 \\ C_3(D_2 + D_3 + D_4) + H_2^{-}(D_2) + H_3^{+}(D_4) = 490 \\ C_4(D_2 + D_3 + D_4) + H_2^{-}(D_2) + H_3^{-}(D_2 + D_3) = 620 \end{cases}$$

$M_{14} = 490 \; ; \; t^*(1 , 4) = 3$

$M_{23} = C_3(D_3) = 190 \; ; \; t^*(2 , 3) = 3$

$$M_{24} = \text{Min} \begin{cases} C_3(D_3 + D_4) + H_3^{+}(D_4) = 340 \\ C_4(D_3 + D_4) + H_3^{-}(D_3) = 410 \end{cases}$$

$M_{24} = 340 \; ; \; t^*(2 , 4) = 3$

$M_{34} = C_4(D_4) = 170 \; ; \; t^*(3 , 4) = 4$

جدول ۸ شامل خلاصه‌ای از محاسبات است. قدم بعدی عبارت از حل مسئله برای F_k و $j^*(k)$ با استفاده از مقادیر M_{jk} در رابطه برگشتی (۳۲) است. این نتایج در جدول ۱۰ داده شده است.

جدول ۹ ـ تعیین M_{jk} برای مثال ۵

نقطه شروع مجدد قبلی (j)	نقطه شروع مجدد بعدی (k)	پریود تولید (t)				t*(j, k)	Mjk
		۱	۲	۳	۴		
۰	۱	۹۰*				۱	۹۰
	۲	۲۴۰	۲۱۰*			۲	۲۱۰
	۳	۵۲۰	۴۱۰*	۴۶۰		۲	۴۱۰
	۴	۷۶۰	۵۹۰*	۶۱۰	۷۸۰	۲	۵۹۰
۱	۲		۱۳۰*			۲	۱۳۰
	۳		۳۳۰*	۳۴۰		۲	۳۳۰
	۴		۵۱۰	۴۹۰*	۶۲۰	۳	۴۹۰
۲	۳			۱۹۰*		۳	۱۹۰
	۴			۳۴۰*	۴۱۰	۳	۳۴۰
۳	۴				۱۷۰*	۴	۱۷۰

از جدول ۱۰ ملاحظه می‌کنیم که نقاط شروع مجدد بهینه ۰، ۲ و ۴ هستند. برای نقاط شروع مجدد j=۰ و k=۲ جدول ۹ عبارت ۲ = $t^*(0 , 2)$ را عاید می‌سازد. پس $x^* = 0$ و $x^*_2 = 50$ است.

جدول ۱۰ ـ تعیین F_k و $j^*(k)$ از مقادیر α_{jk} برای مثال ۵

j \ k	۱	۲	۳	۴
۰	۹۰*	۲۱۰*	۴۱۰	۵۹۰
۱		۲۲۰	۴۲۰	۵۸۰
۲			۴۰۰*	۵۵۰*
۳				۵۷۰
F_k	۹۰	۲۱۰	۴۰۰	۵۵۰
$j^*(k)$	۰	۰	۲	۲

پس ۳ = $t^*(2 , 4)$ و همچنین X^*_3 و $X^*_4 = 0$ را به دست می‌آوریم. تمام متغیرهای موجودی و سفارشات عقب‌افتاده صفراند غیر از $I_1^{-} = 20$ و $I_3^{+} = 30$. هزینه کل این برنامه بهینه برابر ۵۵۰ واحد پول قراردادیست.

۲.۱.۳ ـ راه حل ابتکاری برای مسائل بدون کَسری

برای اینکه به یک الگوریتم ساده جهت حل مسائل برنامه‌ریزی تولید با تابع هزینه مقعر و در حالت بدون محدودیت در ظرفیت تولید دسترسی پیدا کنیم باید یک سری عملیات ریاضی به شرح زیر انجام دهیم. ابتدا یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای این مسئله بوجود می‌آوریم. پس از آن یک شرط کافی برای این مسئله به دست می‌آوریم. چون در این مسئله تقاضای هر دوره باید توسط تولید در همان دوره و یا موجودی دوره‌های قبل برآورده گردد، لذا جدول حمل و نقلی را برای حل مسئله تعریف خواهیم نمود. متغیرهای بهینه مدل برنامه‌ریزی خطی، شرط کافی و جدول حمل و نقل فوق ما را قادر خواهد ساخت که یک الگوریتم جدیدی جهت حل این مسئله ارایه دهیم. ضمناً اثبات چند قضیه باعث خواهد شد که تعداد محاسبات این الگوریتم به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش یابد.

مدل برنامه‌ریزی خطی

فرض کنید که متغیر $y_i = 1$ و $y_i = 0$ به ترتیب مبین تولید و عدم تولید در دورهٔ i باشد و x_{ij} نمایشگر نسبتی از تقاضای دورهٔ j باشد که در دورهٔ i تولید می‌گردد. در آن صورت طبق مدل برنامه‌ریزی اعداد صحیح مختلط پیشنهادی Bitran و همکاران او مدل P را به صورت زیر خواهیم داشت :

$$\text{Min } x_0 = \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{T} C_{ij} X_{ij} + \sum_{i=1}^{T} A_i y_i$$

بطوری که

$$\sum_{i=1}^{j} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, T$$

$$0 \le x_{ij} \le y_i \qquad i = 1, 2, \ldots, T; \; j \ge i$$

$y_i \le 1$ و y_i عدد صحیح

٦

مدل‌های تولید

۱ ـ مقدمه

هدف از تولید حداقل در معنای ایده‌آل آن غنی سازی اجتماع از طریق تولید محصولاتی با عملکرد مطلوب، زیبایی مطلوب، ایمن از لحاظ محیط زیست، از نظر اقتصادی قابل تهیه، قابل اطمینان و با کیفیت بالا است. اهداف اصلی همچون صلح جهانی، ایمنی مالی و شهروندان مسئولیت پذیر، اغلب مضامینی متناقض هستند. تعریف واقع بینانه‌تری از هدف تولید، رسیدن به عملکرد، کیفیت و قابلیت اطمینان موردنظر مشتری با حداقل هزینه است. مسئولیت مدیریت تولید برقراری اولویت‌ها، اهداف ونظارت بر اجرای کار است. مهندسین تولید یا صنایع تعیین می‌کنند که چگونه می‌توان از ورودی‌های در دسترس همچون کارگران، تکنولوژی، سرمایه، مواد و اطلاعات برای دستیابی به اهداف فوق بهره جست. نگرش مطرح شده در این کتاب حول استفاده از مدل‌های تحلیلی و تجربی سیستم تولیدی است که به تصمیم‌گیری‌های مهندسی و تولیدی کمک می‌کنند.

هدف دیگر تولید فراهم آوردن کارگرانی سودرسان برای به خرکت درآوردن چرخ‌های اقتصادی است. با این وجود در طول قرن بیستم، درصد استخدام داخلی ایالات متحده در صنایع تولیدی به سرعت رو به کاهش گذارده است. این کاهش تدریجی بوده و در حدود سال‌های ۱۹۶۰ به ۳۰ درصد رسیده است. سپس نرخ کاهش با تأثیرپذیری بخش خدمات روند عکس طی کرده است. در سال‌های ۱۹۸۰ تنها ۲۱ درصد استخدام داخلی ایالات متحده در بخش تولید بوده‌است. کاهش‌های پیشین به میزان زیادی با بهره‌وری فزاینده امروز مورد توجه قرارگرفته است. در سال‌های اخیر کارایی بهبود یافتهٔ شرکای تجارت بین‌المللی امریکا، موقعیت رقابتی صنایع تولیدی ایالات متحده را به فرسایش کشانده است. کافی است نگاهی به بر چسب‌های «ساخت» خودروها، ضبط صوت، دوربین، لباس و سایر کالاهای مصرفی بیاندازیم تا این وضعیت دشوار را درک کنیم. روبات‌ها و دستگاه‌های خودکار بجای آنکه موجب از دست رفتن مشاغل گردند تبدیل به بخش ضروری فعالیت‌های تجاری شده‌اند. بدون مزایای بهره‌وری حاصل از خودکارسازی (اتوماسیون) همچنان مشاغل بیشتری از دست می‌رفتند. اقتصاد رو به رشد دهه ۱۹۶۰ حاکی از آن بود که هر محصولی که تولید می‌شد بطور بالقوه قابلیت فروش و سودآوری را داشت. انگیزه بهبود اندک محصول رو به تحلیل گذاشت و کاهش بهره‌وری نیز کاملاً نادیده گرفته شد. در بازارهای جهانی امروز دیگر کالاهای تجملاتی قابل تهیه نیستند. صنعت به ما آموخت که بهبود مستمر برای تداوم بقا، یک پیش نیاز اجتناب ناپذیر است.

تولید را می‌توان بصورت تولید بخش‌های مجزا و یا فرآوری پیوسته طبقه‌بندی نمود. تولید بخش‌های مجزا با قطعات مجزایی مانند مدارهای چاپی و یاقطعات موتور که به وضوح قابل تشخیص هستند، شناخته می‌شود. صنایع فرآوری بر اساس محصولی کار می‌کنند که بطور مستمر در حال جریان است. واضح‌ترین مثال‌های این نوع صنعت، پالایشگاه نفت و صنایع شیمیایی است. این کتاب از دیدگاه تولید قطعات مجزا تحریر شده است. با این