SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

۲۲۱۳ حل تمرین (۲۰۴)

شنبه ۳ / ۸۳ / ۷

[redacted]

مقاومت مصالح ۱

استاد سیروس غلامپور

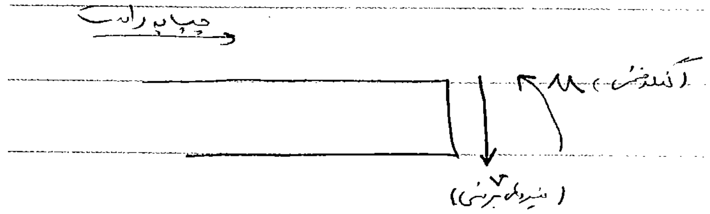
دانشگاه صنعتی شریف

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

در تیر :



بازو = سطح مقطع مستطیلی

میله = سطح مقطع دایره‌ای

بارگذاری محوری = یعنی در امتداد یک محور نیرو وارد شود [مثلاً فقط در امتداد محور zها به سازه نیرو وارد شود]

بارگذاری چندمحوری = یعنی در امتداد چند محور نیرو وارد شود [مثلاً در امتداد هر سه محور مختصات به سازه نیرو وارد شود]

STAEDTLER

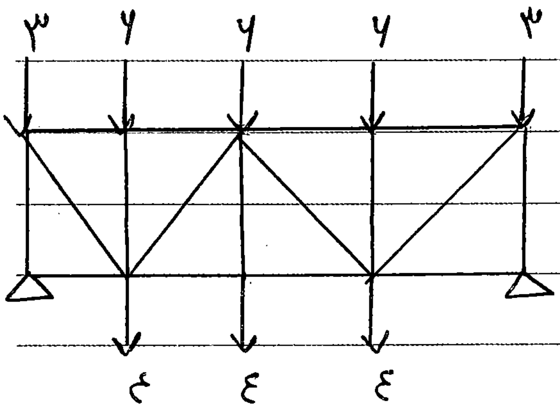
الف) محاسبات سازه

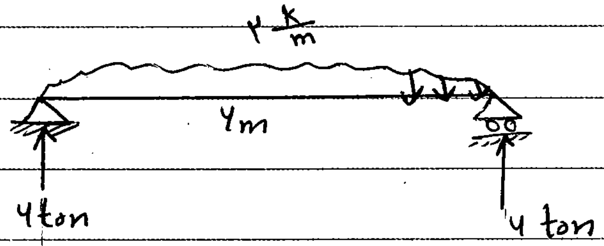
۱) بارگذاری (لنگر و نیرو): تعیین کنیم بار خارجی به سازه وارد می‌شود به کجا وارد می‌شود و مقدار آن چقدر است [یعنی تعیین نیروها و لنگرهای خارجی وارد بر سازه] ← [بارگذاری، مهندسی زلزله، پل سازی ...]

۲) تحلیل (استاتیک - تحلیل سازه‌های ۱ و ۲): (نیروی داخلی را
تعیین سازه‌های معین — تعیین سازه‌های نامعین
بدست می‌آوریم) تعیین نیروها و لنگرهای داخلی وارد بر سازه

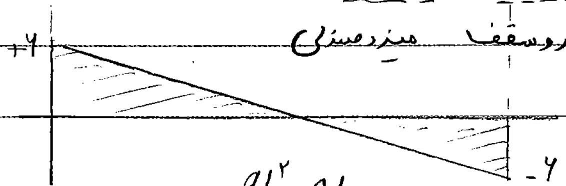
۳) طراحی: مقاومت مصالح ۱ و ۲ (طراحی سازه) - طراحی سازه‌های
به مقاومت مصالح بستگی دارد
فولادی ۱ و ۲ - طراحی سازه‌های بتن آرمه ۱ و ۲

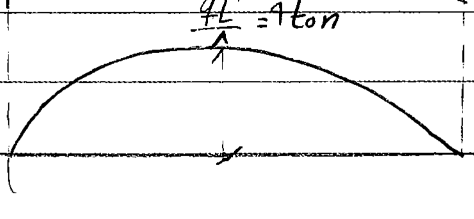
ب) اجراء





بارگذاری: بار ثقلی یا بار عمودی - بار جانبی یا افقی
(بار مرده و بار زنده) (زلزله - باد - ...)
دیوار و سقف   میز و صندلی

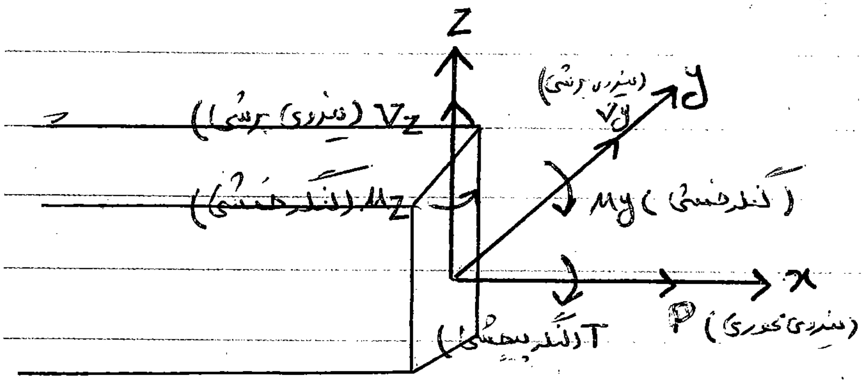




SUBJECT :

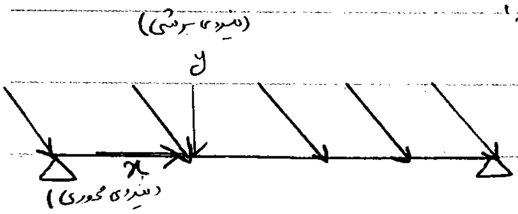
Year (   ) Month (   ) Date (   )

یک مقطع: ۳ نیرو و ۳ لنگر دارد.



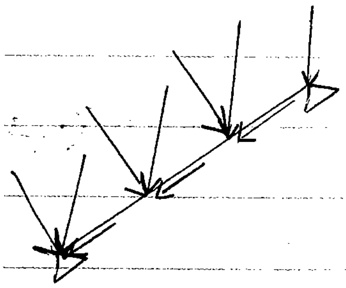
در خرپا فقط نیروی محوری داریم چون عضو دو نیرویی دارد.

P

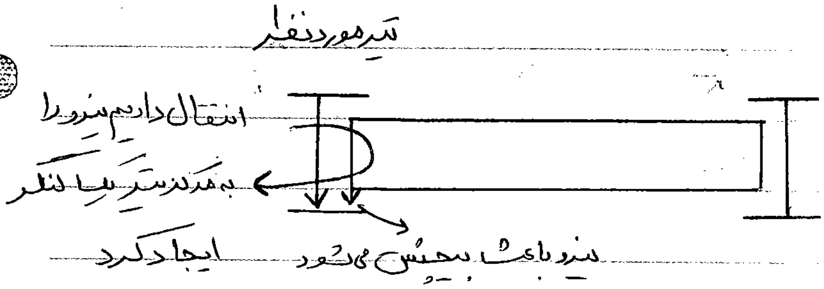


در تیر: حتما نیروی برشی و لنگر خمشی هست

نیروی محوری هم در تیر می‌تواند وجود داشته باشد مانند: تیرهای مورب یا تیر سقف راه پله



یک تیر می‌تواند پیچش هم داشته باشد



نکته:

بارگذاری برای تحلیل مهم است - برای طراحی، تحلیل مهم است

در نیروی محوری، علامت مهم است. چون مقاومت مصالح در کشش و فشار با هم فرق می‌کند

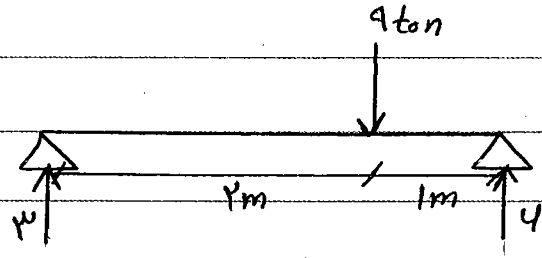
رفتار مصالح در کشش و فشار با هم فرق دارد.

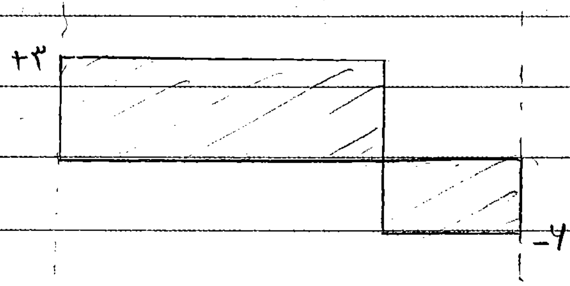
SUBJECT :

Year (　　) Month (　　) Date (　　)

نتیجه: در طراحی می‌خواهیم انجام دهیم علامت مهم است

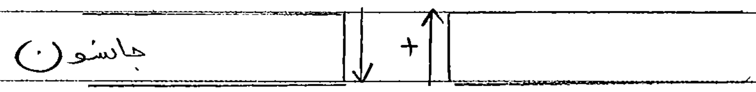
مقاومت برشی مصالح در مثبت و منفی فرقی ندارد.

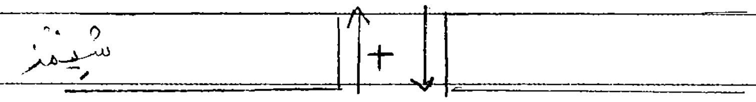




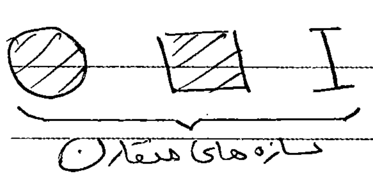
این تیر باید تحمل 6ton برش را داشته باشد علامت مهم نیست

نکته:





نکته: تنش برشی هم در علامت فرقی ندارد اما تنش خمشی در علامت مهم است



فقط برای سازه‌های متقارن علامت در تنش خمشی مهم نیست!

اما برای سازه‌های غیرمتقارن مانند: بتن آرمه T علامت مهم است.

در تنش خمشی و نیروی محوری علامت مهم است ولی در نیروی برشی و تنش پیچشی علامت مهم نیست و قراردادی است.

SUBJECT :

Year (　　) Month (　　) Date (　　)

نکته: نیرو و لنگر برای مقطع است = استاتیک
تنش برای نقطه است = مقاومت مصالح
و برای رسیدن به نقطه باید مقطع بزنیم

« فصل اول »

« stress مفهوم تنش »

تنش : نیروی وارد بر واحد سطح

محوری (نیروی داخلی) — برشی (نیروی داخلی)

نیرو محوری همواره در راستای محوری عضو و عمود بر مقطع می‌باشد

$$\sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$$

سیگما — تنش قائم — نیروی محوری — مساحت مقطع

تنش قائم (محوری) : نیروی محوری وارد بر واحد سطح

نیروی برشی مماس بر مقطع و عمود بر محور می‌باشد

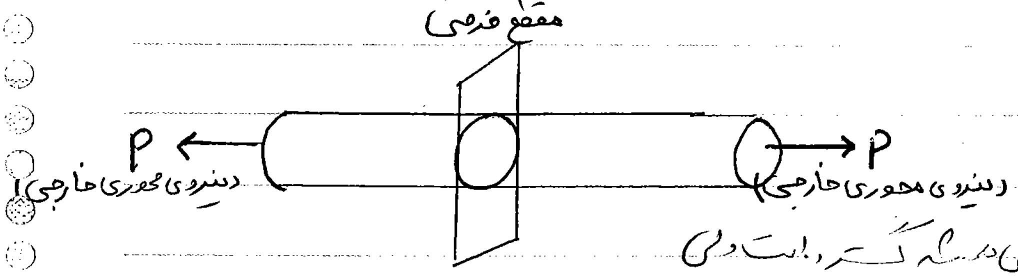
$$\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$$

تنش برشی (تاو) — نیروی برشی — سطح مقطع

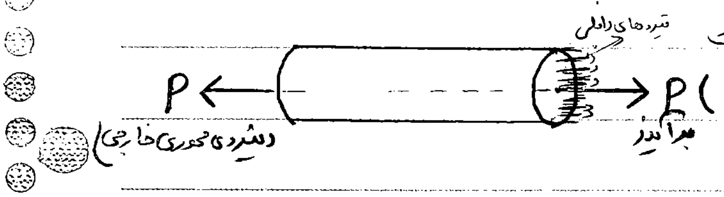
تنش برشی : نیروی برشی وارد بر واحد سطح

$\sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$ و $\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$ یعنی مقدار میانگین تنش روی مقطع است

به جای این که تنش در نقطه‌ای به خصوص از سطح مقطع باشد



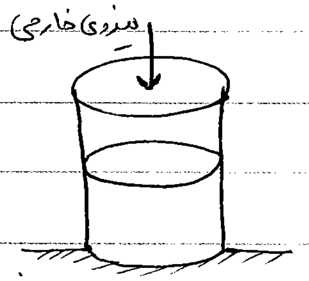
نکته: وقتی برش می‌زنیم نیروهای داخلی همیشه گسترده است ولی نیروی خارجی هم متمرکز و هم گسترده می‌تواند باشد.



(نیروی محوری داخلی)

نکته: اگر بار یا نیروهای خارجی گسترده باشند توزیع تنش یکنواخت است
اما اگر بار یا نیروی خارجی متمرکز باشد توزیع تنش بعد از مقطع یکسان است و تنش در مرکز بیشتر است.

— نیروی متمرکز یا نقطه‌ای بر سطحی وارد می‌شود که در مقایسه با سطح کل بسیار ناچیز است.



— نیروی داخلی همیشه گسترده است.

— نیروی خارجی می‌تواند هم گسترده هم نقطه‌ای باشد.

$\sigma = \frac{P}{A}$ تنش محوری یا قائم

$$10^3 \frac{kg}{cm^2} = 1 \frac{ton}{cm^2}$$

$$psi = \frac{lb}{in^2}$$

$$ksi = \frac{kLb}{in^2}$$ (کیلو)

$$1 \text{ ملیون } (10^6)\ pa = 1\ \underset{\text{مگا}}{M}pa = \frac{N}{mm^2}$$

$$pa = \frac{N}{m^2}$$

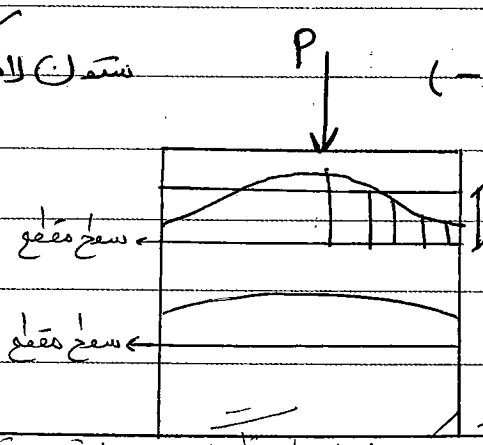
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

نکته: علامت تنش همیشه به علامت نیرو بستگی دارد (نیروی کششی مثبت است)

اگر نیروی محوری کششی (+) ← تنش کششی (+)

اگر نیروی محوری فشاری (−) ← تنش فشاری (−)



$$\sigma_{AVE} = \frac{P}{A}$$

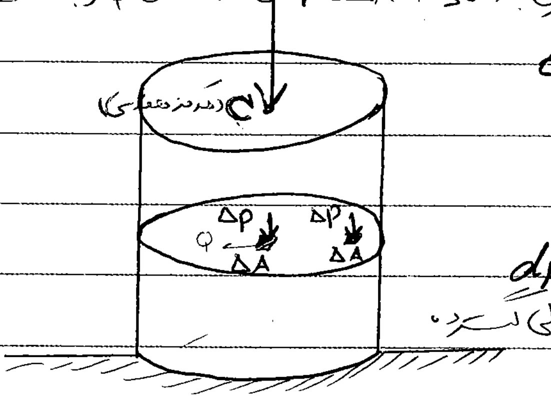
هرچه فاصله بیشتر شود، تنش یکنواخت تر شد.

پس تنش به فاصله و جنس مصالح بستگی دارد.

برای تعریف تنش در نقطه‌ی مفروض Q از مقطع عرضی، می‌بایست یک سطح کوچک ΔA را در نظر بگیریم. با تقسیم مقدار ΔP بر ΔA مقدار میانگین تنش روی ΔA را به دست آوریم. با میل دادن ΔA به ۰ ← $P < \Delta A$ تنش در نقطه‌ی Q را به دست می‌آوریم.

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA}$$

ص ۴ جا شود ①



$$dP = \sigma \cdot dA \Rightarrow \boxed{P = \int \sigma \cdot dA}$$

برآیند نیروهای داخلی است.

اگر σ ثابت باشد یا ثابت فرض شود ← $P = \sigma \cdot A$ یا $\sigma = \frac{P}{A}$

یعنی توزیع تنش یکنواخت باشد.

هرجا σ بود منظور σ_{AVE} است.

تنش قائم
- تنش موجود (ما به دست می‌آوریم)
- تنش مجاز (صورت مسئله می‌دهد) که در آزمایشگاه به دست می‌آید.

کنترل

اگر تنش موجود > تنش مجاز (تنش نهایی) ⟸ شکستگی اتفاق می‌افتد

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

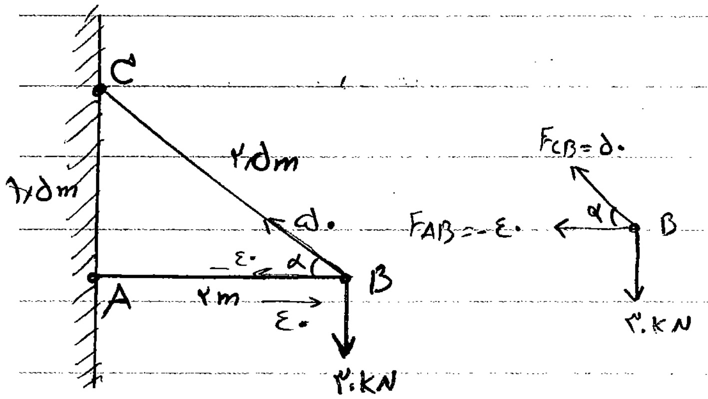
کنترل :

$\sigma_{موجود} = \frac{P_{موجود}}{A_{موجود}} \leq \sigma_{مجاز}$ okk ✓

در غیر این صورت یا باید سطح را قوی‌تر کرد یا جنس را قوی‌تر کرد.

مثال: الف) میله‌ی BC به قطر ۲۰mm و از فولاد با $\sigma = 140$ Mpa را کنترل نمایید

سطح مقطع دایره‌ای



تحلیل:

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow$

$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow$

$F_{BC} = ۵۰$ کششی

$F_{AB} = -۴۰$ فشاری

$\alpha = \mathrm{Arctan}\ \frac{۱/۵}{۲} \Rightarrow \alpha = ۳۷°$

طراحی:

$۱۴۰\ \mathrm{Mpa} = \frac{N}{mm^2}$ $\quad \sigma_{موجود} = \frac{۵۰ \times ۱۰^3\ N}{\pi (۱۰)^2\ mm^2} = ۱۵۹ \frac{N}{mm^2}$ یا Mpa ≤ ۱۴۰ Mpa okk ✓

سطح اقتصادی است

$$\boxed{\sigma_{مجاز} = \frac{\sigma_{\text{نهایی یا گسیختگی}}}{\underset{S.F}{\text{ضریب اطمینان}}} = \frac{۲۴۰\ \mathrm{Mpa}}{۱/۵} = ۱۴۰\ \mathrm{Mpa}}$$

چون σ نهایی ۲۴۰ بوده چون ما به ۱/۵ تقسیم کرده‌ایم در اطمینان

چون بارگذاری، تحلیل، طراحی با خطا و تقریب است از ضریب اطمینان استفاده می‌کنیم و بیشتر ضریب اطمینان بزرگتر را به کار می‌برند که در اجرا هم خطا وجود دارد و ضریب اطمینان بستگی به دقیق بودن محاسبه و اجرا دارد و بستگی به نوع سازه دارد که چی می‌خواهیم بسازیم

- ظرفیت باربری : $\hat{P}_{\text{حداکثر مجاز}} \leq \sigma_{مجاز} \cdot A_{موجود}$ به سمت پایین گرد می‌شود

- طراحی : $\hat{A}_{\text{حداقل مورد نیاز}} \geq \frac{P_{موجود}}{\sigma_{مجاز}}$ به سمت بالا گرد می‌شود

STAEDTLER

ب) قطر میله BC از آلومینیوم با $\sigma_{مجاز} = ۱۰۰$ Mpa را طراحی نمایید.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{\overset{F_{BC}}{50\times10^{3}}}{100} = 500\,mm^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

قطر لازم $d = 25/2\,mm$

طراحی $\boxed{d = 24\,mm}$

یادآوری:

تنش قائم (محوری): نیروی محوری وارد بر واحد سطح

$$\underset{\text{سیگما}}{\sigma_{Ave}} = \frac{P_{\text{نیروی محوری}}}{A_{\text{مساحت مقطع}}}$$

تنش برشی: نیروی برشی وارد بر واحد سطح

$$\underset{\text{تاؤ یا تو}}{\tau_{Ave}} = \frac{V_{\text{نیروی برشی}}}{A_{\text{مساحت مقطع}}}$$

نیروی برشی یعنی عمود وارد شود

+ یا منفی بودن تنش قائم به P بستگی دارد و + یا − تنش برشی به V بستگی دارد.

تنش برشی + با تنش برشی − فرقی ندارد.

اگر در صورت مسئله نیروی محوری کششی بود برای کنترل باید این صورت عمل کنیم

$$\sigma_{\text{موجود کششی}} = \frac{P_{\text{موجود کششی}}}{A_{\text{موجود}}} \le \sigma_{\text{مجاز کششی}}$$

" " " " " " " " فشاری بود " "

$$\sigma_{\text{موجود فشاری}} = \frac{P_{\text{موجود فشاری}}}{A_{\text{موجود}}} \le \sigma_{\text{مجاز فشاری}}$$

پس نیروی کششی و فشاری (−) (+) با هم فرق دارند اما نیروی برشی (+) یا (−) فرق نمی‌کند.

SUBJECT :

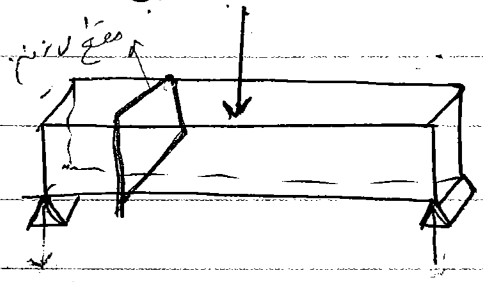
Year (   ) Month (   ) Date (,   )

نکته: معمولاً تنش های برشی در پیچ ها، پین ها و میخ پرچ ها، در اتصال عضوهای مختلف سازه ها و اجزای ماشین به کار می روند، یافت می شوند

مثال: تیر چوبی

(مثال برای تنش برشی)

بار خارجی $= 10(t)$

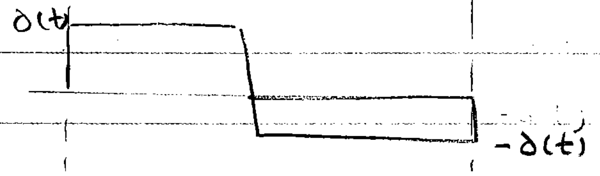


نیروی داخلی همیشه ناشی از برش است:

$5(t)$ بار خارجی

$5(t)$

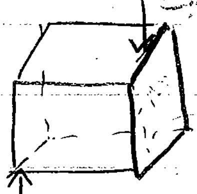
بار داخلی = کنش العمل همیشه گام



دیاگرام مقطع:

داخلی $V = 5(t)$

چون V با مقطع آن در یک صفحه موازی است برشی است



$$\tau_{\text{Ave}} = \frac{V}{A} < \tau_{\text{مجاز}}$$

متوسط نیز می شود

خارجی $= 5(t)$

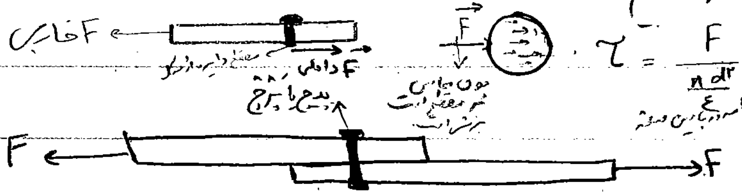
در اصل باید $\tau_{max} < \tau_{\text{مجاز}}$ باشد

(البته اضافه می شود)

* در این جا τ مثبت است چون در این دیاگرام نیروی برشی $5(t)+$ است طبق نمودار نیروی برشی *

دیاگرام مقطع دایره ای شکل

مثال: فرض کنیم دو ورق را به هم پیچ کنیم و با نیروی F بکشیم

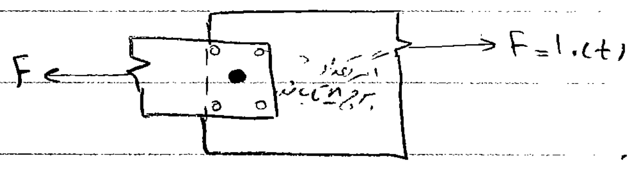


$$\tau = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} \quad (1)$$

ادامه در پایین صفحه

برای دایره (قطر $\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$ شعاع)

دیاگرام وقتی از بالا به آن نگاه می کنیم:



نکته: اگر مقطعی که می خواهیم عمود بر F باشد تنش قائم و اگر مماسی بر آن باشد تنش برشی است.

یا موازی

ادامه (1):

$$\tau = \frac{F_{\text{داخلی}}}{n \times \frac{\pi d^2}{4}} \leq \tau_{\text{مجاز پیچ یا پرچ}}$$

$\Longleftarrow$ در صورتی که همه پیچ ها یک اندازه باشد (از نظر قطر حتی) (اگر تعداد پیچ n تا بود) ***

تعداد پیچ یا پرچ ها یا تعداد اتصال ها

قطر پیچ یا پرچ

مثلاً اگر پیچ ها از نظر قطرها فرق داشتند (مثلاً یکی قطرش $2mm$ و چهار تای دیگر $3mm$ باشد) آن گاه:

STAEDTLER

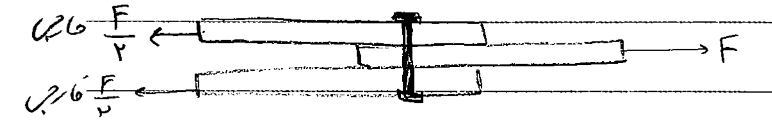
$$\tau = \frac{F}{1 \times \frac{\pi (2)^2}{4} + 4 \times \frac{\pi (3)^2}{4}}$$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

اگر اتصال دو برشی باشد یعنی برای جدا کردن

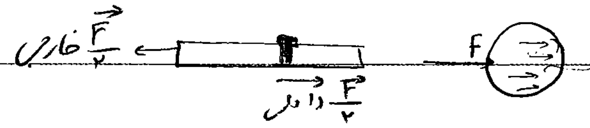
اتصال نیاز به ۲ برش داشته باشد



اگر ۳ تا ورق داشتیم ۲ برش می‌شود.
اگر ۴ تا ورق داشته ۳ برش می‌شود

مثلا در شکل (الف) ۱ [illegible]

دیاگرام ورق بالایی:



$$\tau = \frac{F/2}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

کنترل:

$$\tau = \frac{F}{n \cdot m \cdot \frac{\pi d^2}{4}} \le \tau_{\text{مجاز پیچ یا پرچ}}$$

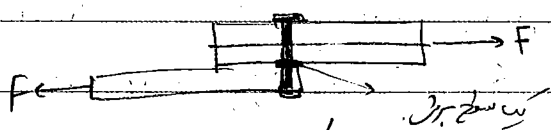
n ← تعداد پیچ یا پرچ

m ← تعداد سطوح برشی هر پیچ

$$\text{سطح مقطع پرچ‌ها} = n \cdot m \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

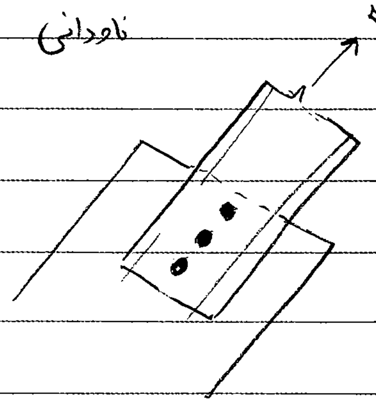
$$\boxed{n \cdot m = \text{تعداد سطوح برش}}$$

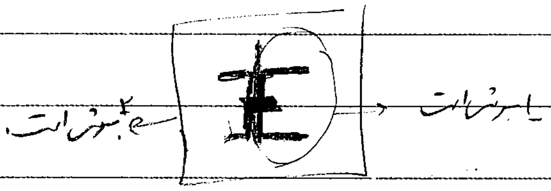
الف) زمانی می‌توانیم بگوییم که تعداد سطوح برشی یکی از تعداد ورق‌ها کمتر است که تعداد ورق‌های میانی در خلاف جهت هم باشند

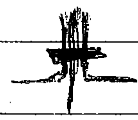


(شکل الف)

ناودانی







اتصال ابری که ۲ تا پیچ دارد

و ۱ سطح برش.

_ کنترل: $\tau_{\text{موجود}} = \frac{V_{\text{موجود}}}{A_{\text{موجود}}} \le \tau_{\text{مجاز}}$

_ ظرفیت باربری (به سمت پایین رند شود) $\underset{\text{حداکثر}}{V_{\text{مجاز}}} = \tau_{\text{مجاز}} \times A_{\text{موجود}}$

_ طراحی: (به سمت بالا رند شود) (d را به سمت بالا رند می‌کنیم) $\underset{\text{حداقل}}{A_{\text{لازم}}} = \frac{V_{\text{موجود}}}{\tau_{\text{مجاز}}}$

در طراحی F موجود معلوم است و A مجهول است.

نکته: (۱ معادله و ۲ مجهول بی‌نهایت جواب دارد) مثل: $2x+3y=10$

در جوش مساحت جوش برابر است: تعداد جوش × طول جوش × ضخامت جوش (در مقاومت مصالح هست)

تنش لهیدگی (تکیه‌گاهی):

$$\sigma_B = \frac{P}{A} \le \sigma_{B_{\text{مجاز}}}$$

تنش لهیدگی مجاز

$\sigma_{B_{\text{مجاز}}}$ = براساس جنس ضعیف‌تر

از بین دو جسم ضعیف‌تر است / با کدام جسم ضعیف‌تر است لهیدگی

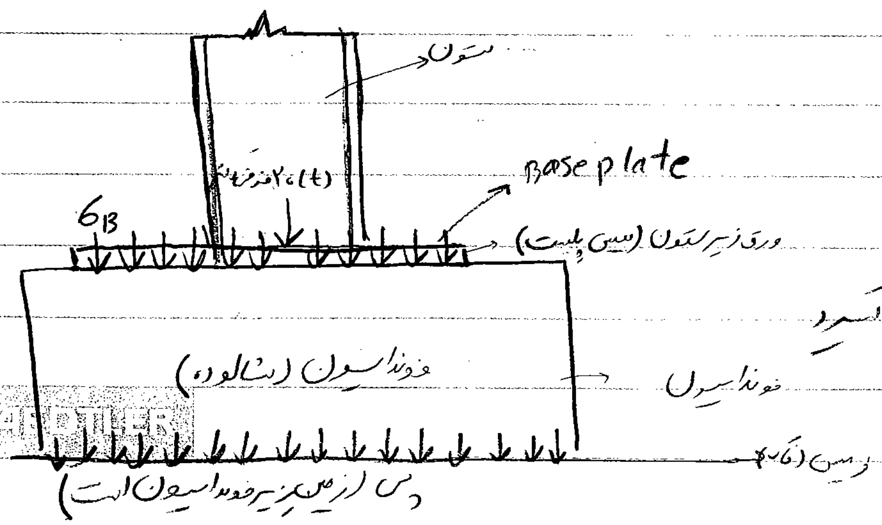
(حالت خاصی از تنش قائم است)

و فرق آن با تنش قائم این است که اگر دو جسم را به‌طور تکیه‌گاهی به هم وصل کنیم امکان دارد یکی له شود (اونی که σ کمتری دارد = ضعیف‌تر است له می‌شود)، به هم فشار وارد می‌کنند و له می‌شود.

تنش لهیدگی (تکیه‌گاهی) بین ۲ دو جسم است و فقط از سطح تماس به معادله می‌شود فشاری است و (خاص است)

اما تنش قائم داخل جسم است و سطح مقطع هم که تنش ... با کدوم قسمت ...

ستون فولادی



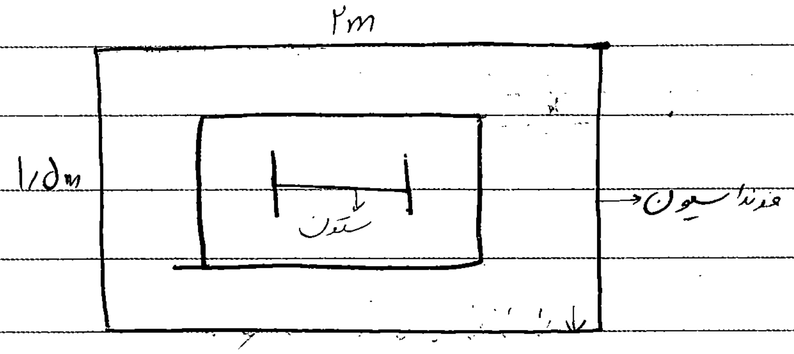
σ_B = تنش لهیدگی

کنترل: $\sigma_B = \frac{P}{A} \le \sigma_{B_{\text{مجاز}}}$

پس: خاک به باری که وارد می‌کند فشار می‌آورد

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



از بالا به شکل مستطیل نگاه می‌کنیم

چند جا ممکن است لهیدگی اتفاق بیفتد (بین هر ۲ جسم) =

حتی در جسم بین فونداسیون را در نظر می‌گیریم (کنترل می‌کنیم) باید $A = ۲/۵ \times ۱/۵$ و P آن هم می‌شود $۲۰t$ به علاوه‌ی
مساحت فونداسیون

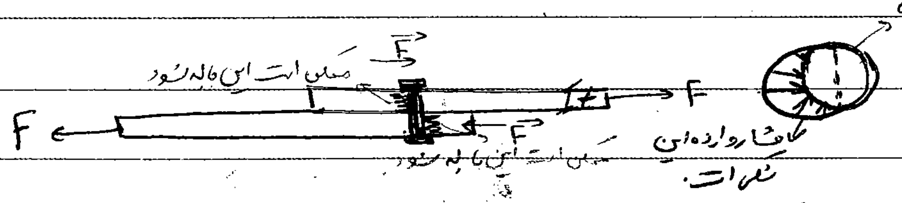
وزن فونداسیون که $\frac{۲۰t + w}{۲/۵ \times ۱/۵} \leq \sigma_B$ خاک (بر)

خاک را در نظر می‌گیریم چون ضعیف‌تر است.

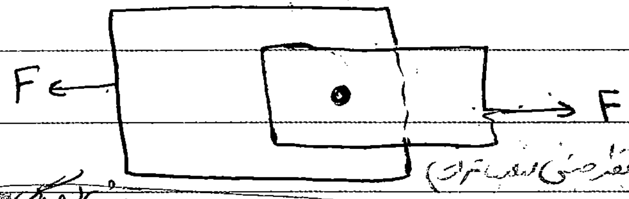
بین فونداسیون و بیس پلیت هم تنش لهیدگی وجود دارد. $P = ۲۰t + w$
وزن بیس پلیت

برای سطح مقطع اصل مشترک ... اون را می‌گیریم به سطح مقطع کمتری دارد.

بین بیس پلیت و ستون تنش به همان دلایل که کدام ضعیف‌تر و قوی‌تر است.



اگر سطح استوانه را تصویر کنیم
یک مستطیل به ابعاد $d \times t$ می‌شود)



$$\sigma_B = \frac{F}{t \cdot d} \leq \sigma_{B_{مجاز}}$$

از آن که ضعیف‌تر است را قرار می‌دهیم
پیستل ... دارد (اون مهم‌تر ... است)
را در نظر بگیر

تنش لهیدگی

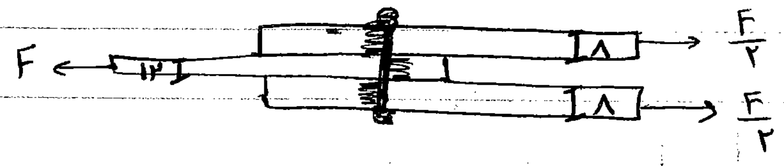
$$\sigma_B = \frac{F}{n \cdot t_{min} \cdot d} \leq \sigma_{B_{مجاز}}$$

تعداد پیچ یا پرچ
کمترین ضخامت ورق
قطر پیچ یا پرچ

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

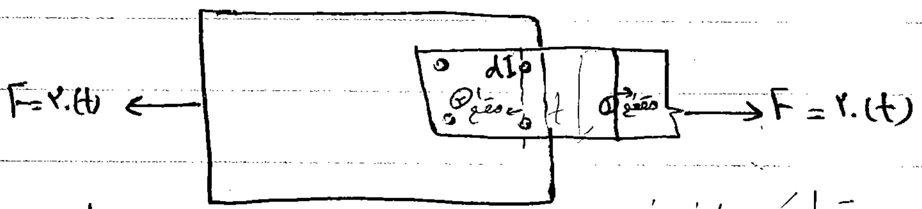
۲- برشی



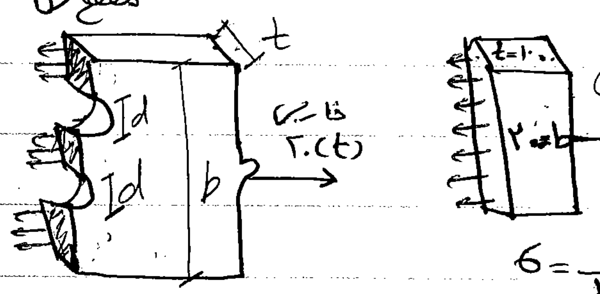
اگر ۱ برش بود t_{min} ورق‌ها را در نظر بگیریم

اگر ۲ برش بود متفاوت ۱ ورق را با مجموع ۲ ورق دیگر در نظر می‌گیریم و آن که کوچکتر است را می‌گیریم

اگر ۳ برش بود مجموع ۲ تا ورق را با مجموع ۲ تا ورق دیگر با هم مقایسه می‌کنیم و آن که کوچکتر است را می‌گیریم



مقطع ۲



اگر F فشاری باشد در مقطع ۱ سوراخ‌ها فقط جهت نیروها عوض می‌شود اما در کل سوراخ خارج هم جهت نیرو برد و هم در داخل خود سوراخ نیرو وجود دارد

بیشترین تنش

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A_n} = \frac{P}{t(b-2d)}$$

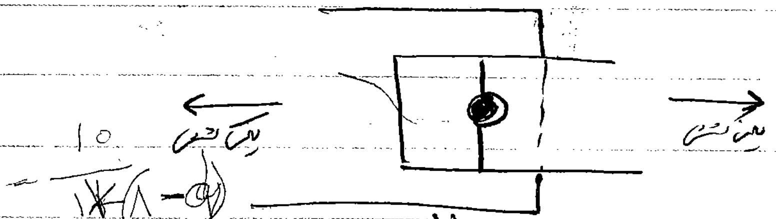
A_n: سطح مقطع خالص که در این حالت سطح کل منهای ۲ مستطیل کوچک

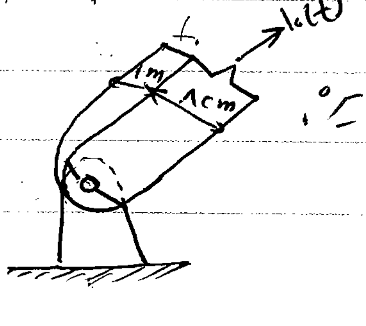
مقطع ۱

$$\sigma = \frac{20}{1(20-2\times 2)} = 1.25$$

$$\sigma = \frac{20}{1\times 20} = 1 \ \frac{(t)}{cm^2}$$ (تعداد سوراخ‌ها مهم است)

① مقطع $b\times t$





سطح مقطع = ۸cm×۱cm منهای سطح دایره

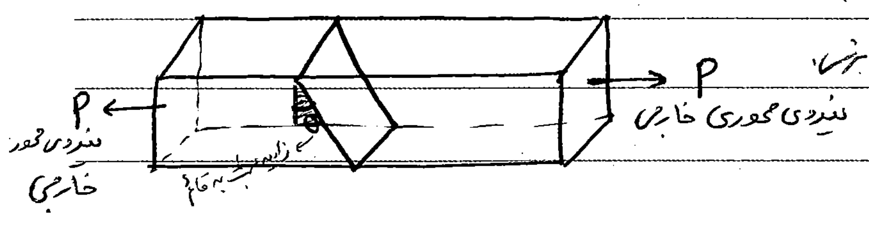
حتی اگر فشاری هم بود سطح مقطع خالص در نظر بگیرد

SUBJECT :

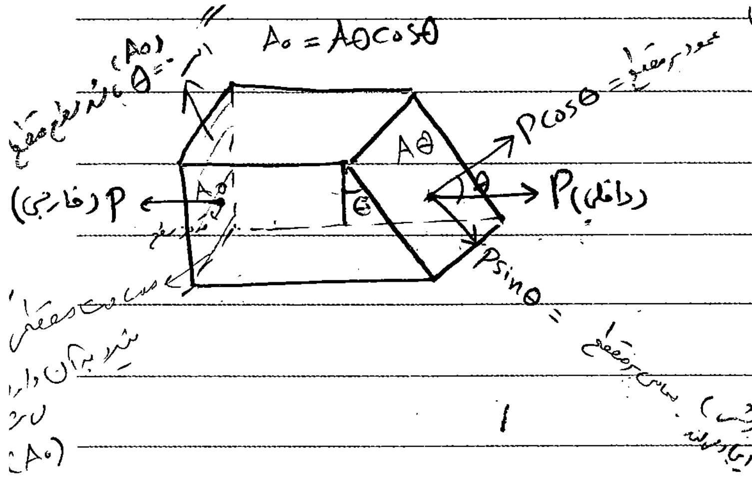
Year (   ) Month (   ) Date (   )

تنش در مقاطع مورب (مایل) تحت بار محوری:

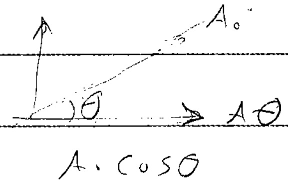
پس در مقاطع مورب دو نوع تنش داریم: تنش قائم / تنش برشی



θ = زاویه‌ای است که سطح مورب با عمود بر نیرو می‌سازد (تنش قائم)



A_0 = مساحت سطح مقطع عمود بر مقطع



بنابراین با توجه به شکل بالا

$$\sigma_\theta = \frac{P\cos\theta}{A_\theta} = \frac{P\cos\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}} = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta \le \sigma \quad (1)$$

(تنش قائم) — مجاز چسب یا جوش

اگر θ=0 باشد آنگاه سطح مقطع ما شبیه ... در دو فرمول ...

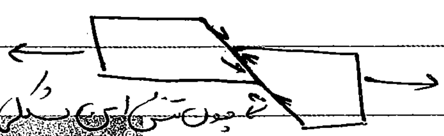
$$\tau = \frac{P\sin\theta}{A_\theta} = \frac{P\sin\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}} = \frac{P}{A_0}\sin\theta\cdot\cos\theta = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta \le \tau \quad (2)$$

(تنش برشی) — مجاز چسب یا جوش

اگر ۱ و ۲ برقرار نباشد:

چون تنش این شکلی است و چسب کنده می‌شود پس $\sigma_\theta \le \sigma$ مجاز نیست

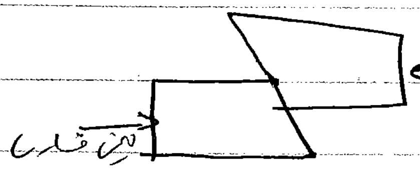
اگر ۱ و ۲ برقرار باشد یعنی هیچ اتفاقی در چسب یا جوش یا ... اتفاق نمی‌افتد



چون تنش این شکلی است و چسب بریده شده پس $\tau \le \tau$ مجاز نیست

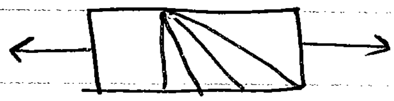
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



این با هم برشی است
اما ببیند و فشاری است
به صحبت شده‌ها توجه شود

اگر بخواهند دو تا چوب را بهم بچسبونیم بهترین زاویه کدام است؟
اگر یک قطعه یا یک پارچه چوب در اختیار داشته باشیم.



** 45° بیشترین تنش برشی را دارا است **

هر عضوی که تحت کشش یا فشار باشد باید چک گردد

یعنی هر عضوی یا پارچه که داشتیم باید از فرمول تنش مشتق بگیریم و max و min آن را بدست آوریم.

$$\sigma_\theta = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta \qquad \frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{P}{A_0} \leq \sigma} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma_{min} = 0 \end{cases}$$

مجاز چسب یا فولاد

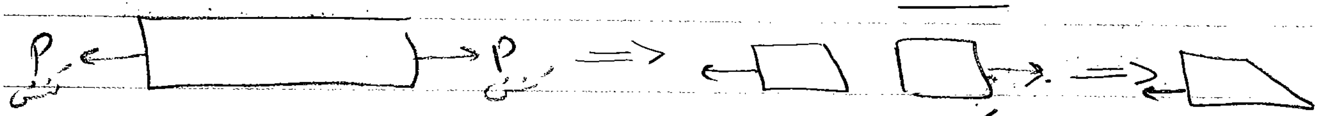
$$\tau_\theta = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta \qquad \frac{d\tau_\theta}{d\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = \frac{P}{2A_0} \leq \tau} \\ \theta = 0, \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tau_{min} = 0 \end{cases}$$

مجاز چسب یا فولاد

_ اگر یک عضو یا پارچه تحت کشش یا فشار بود درست‌ترین تنش آن را در زاویه $\theta = 0$ باشد و $\sigma_{max} = \frac{P}{A_0} \leq \sigma$

مجاز چسب یا فولاد یا ... دیگر

اگر عضو یا پارچه ای را بخواهیم بچسبانیم در صورتی برش می‌شود که $\theta = \frac{\pi}{4}$ باشد. و در صورتی کنده می‌شود $\theta = 0$ باشد



کنده شد یعنی $\sigma_{max} \leq \sigma$ نیست

بریده شده
یعنی $\tau_{max} < \tau$ نیست

SUBJECT :

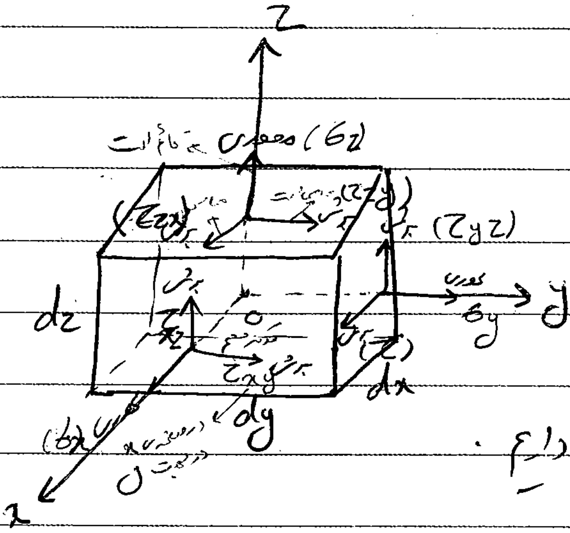
Year ( ) Month ( ) Date ( )

اگر صفحه شیب‌دار نداشتیم $\sigma_{max}=\frac{P}{A_0}\le\sigma_{مجاز}$ و $\tau_\theta=\frac{P}{2A_0}\le\tau_{مجاز}$ را کنترل کنیم ولی اگر
یعنی شیب وجود نداشتیم

یعنی صفحه شیب‌دار بود و شیب وجود داشت باید این دو فرمول $\sigma_{max}=\frac{P}{A_0}\cos^2\theta\le\sigma$ و $\tau_{max}=\frac{P}{2A_0}\sin 2\theta\le\tau$
را کنترل کرد یعنی باید ۲ فرمول بالایی برای صفحه شیب‌دار هم کنترل کنیم

مولفه‌های تنش:

یک المان است:



در هر مقطع یک تنش محوری و دو تا تنش برشی داریم.

پس همیشه در هر سطح دلخواه یک σ و دو تا τ داریم.

بنابراین:

σ_x و σ_y ، σ_z

$$\begin{cases}\tau_{xy}=\tau_{yx}\\ \tau_{xz}=\tau_{zx}\\ \tau_{zy}=\tau_{yz}\end{cases}$$

پس به جای ۹ تا مجهول ۶ تا مجهول داریم

در تنش برشی جای اندیس‌ها را می‌توان عوض کرد ①
و در دو سطح عمود بر هم تنش‌ها ~~...~~ همگرا هستند با هم برابرند ②
نتیجه که باید اثبات شود

اثبات:

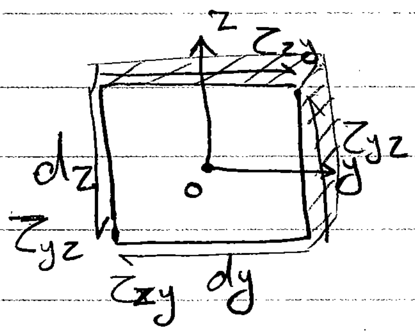
اگر $\sum M_z=0$ باشد آنگاه اثبات می‌شود که $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ و اگر $\sum M_y=0$
باشد آنگاه $\tau_{xz}=\tau_{zx}$ اثبات می‌شود و اگر $\sum M_x=0$ باشد $\tau_{zy}=\tau_{yz}$ اثبات می‌شود

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

اثبات : $\tau_{zy} = \tau_{yz}$:

صفحه ی zy را در نظر می گیریم : $\tau = \frac{P}{A}$



$$\Sigma M_x = 0 \Longrightarrow \tau_{zy} \underbrace{(dx \times dy)}_{\text{نیرو}} \times \underbrace{dz}_{\text{فاصله}} = \underbrace{\tau_{yz} (dx \times dz)}_{\text{نیرو}} \underbrace{dy}_{\text{فاصله}} \Longrightarrow \overset{\text{ثابت شد}}{\boxed{\tau_{zy} = \tau_{yz}}}$$

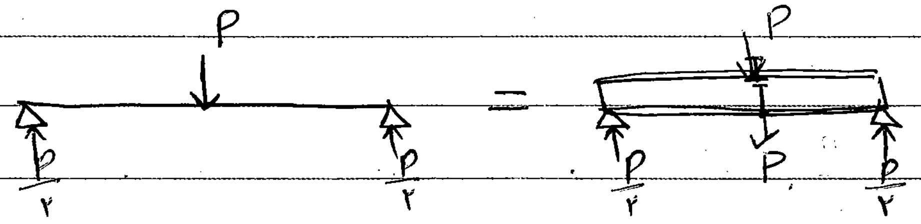
می توان این تنش ها را به صورت ماتریس متقارن نشان داد :

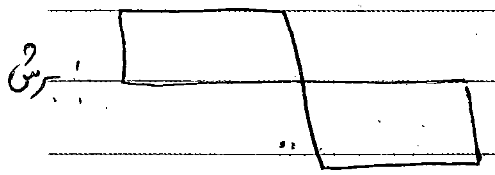
این تنش ها با هم برابرند

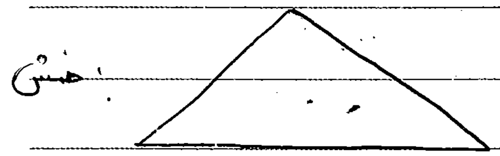
$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

قطر اصلی تنش ها

« فصل دوم » « رابطه‌ی تنش - تنجش و تغییر طول اعضا تحت بار محوری »







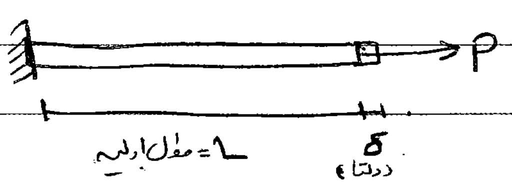
برای یک تیر آهن عملاً فرقی نمی‌کند بار محوری آن باشد یا داخل آن باشد اما در استاتیک فرق می‌کرد چون ما اجسام را صلب فرض می‌کردیم. وقتی در استاتیک صلب فرض می‌کردیم نه فرض دقیقی نیست اما با این وجود به محاسبات استاتیک لطمه وارد نمی‌کرد چون در نهایت عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی که ما در استاتیک می‌خواستیم درست بدست می‌آمد (صلب = تغییر شکل نمی‌دهد)

(در این فصل منظور از تغییر شکل تغییر طول است که اگر نیرو + باشد (کششی) افزایش طول داریم و اگر نیرو - باشد (فشاری) کاهش طول داریم)

stress (تنش) : نیروی وارد بر واحد سطح $\sigma = \frac{P}{A}$ تنش قائم یا محوری

میله‌ی الاستیکی

این میله تحت کشش است



$\delta =$ تغییر طول (دلتا)

strain (تغییر طول نسبی / کرنش / تنجش) : تغییر طول واحد طول

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

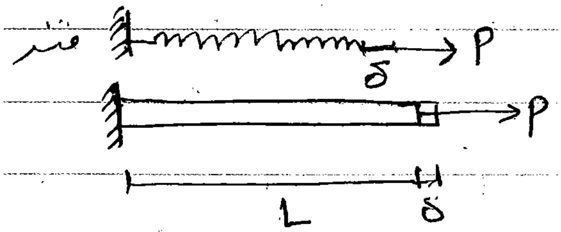
ε تغییر طول نسبی، تغییر طول واحد طول، یعنی بدون بعد است؛ δ تغییر طول؛ $L =$ طول اولیه

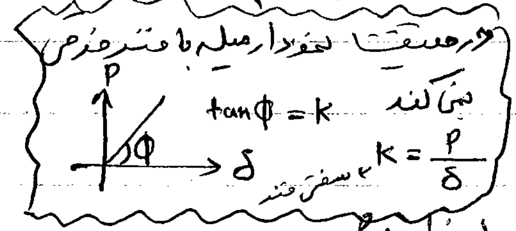
L همیشه مثبت است بنابراین علامت ε به δ بستگی دارد که اگر δ + باشد (کششی) ε هم مثبت است

* ε تغییر طول واحد طول را می‌دهد یعنی مثلاً تغییر طول 1m یا 1mm یا 1in و ... را می‌دهد *

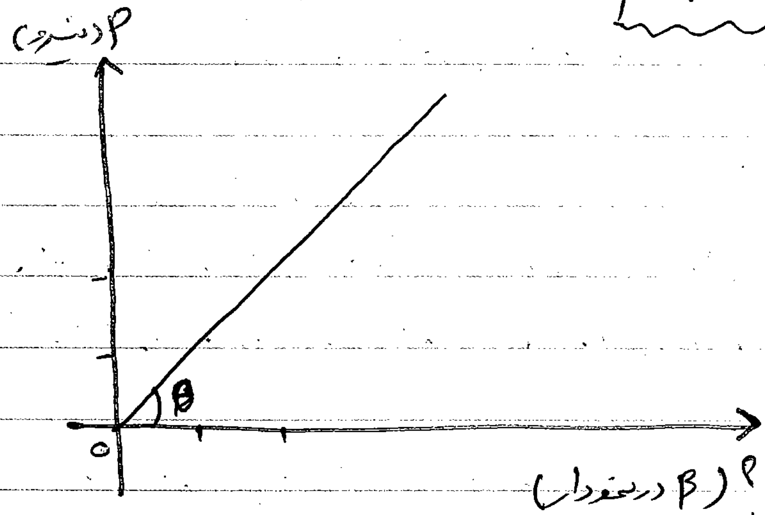
مثلاً اگر $\delta = 2mm$ و $L = 200mm$ باشد $\varepsilon = \frac{2}{200} = 0/01$ می‌شود؛ یعنی 1mm، 0/01 تغییر طول دارد.

قطعاً بین تنش و کرنش رابطه وجود دارد یعنی طبق رابطهٔ $\sigma = \frac{P}{A}$ هرچه P بیشتر باشد σ بیشتر می‌شود و در نهایت طبق رابطهٔ $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ هرچه δ بیشتر باشد ε هم بیشتر می‌شود طبق شکل صفحه قبل (میلهٔ آلومینیومی)





فرض می‌کنیم رابطه خطی باشد
حتی منحنی هم می‌تواند باشد



شیب نمودار به چه عواملی بستگی دارد؟ (β در نمودار)

δ به 4 عامل بستگی دارد. P، L، E و A طبق رابطهٔ

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

تغییر طول

بعداً اثبات می‌شود

سختی (هرچه ماده قوی‌تر باشد تغییر طولش کمتر می‌شود)

مساحت

شیب نمودار؟

شیب نمودار

$$\tan\theta = \frac{P}{\delta} = \frac{EA}{L}$$

در حقیقت نقش k در فنر را بازی می‌کند

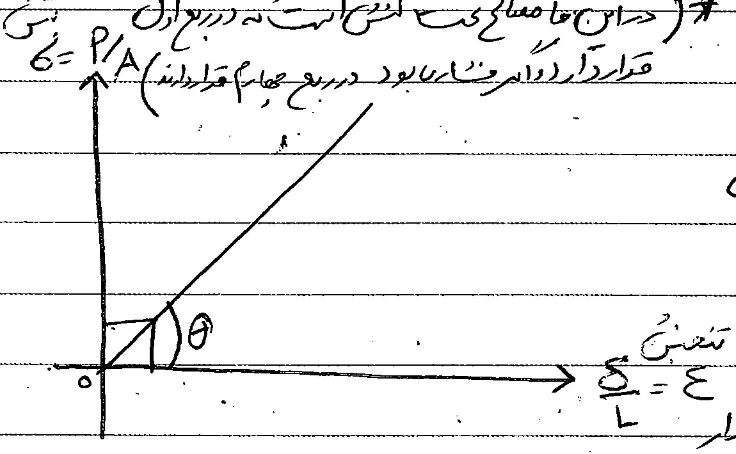
پس نمودار نیرو ـ تغییر طول به عوامل زیر بستگی دارد: (در حقیقت شیب نمودار هم به عوامل زیر بستگی دارد)

۱ـ جنس مصالح (آلومینیوم ـ فولاد ـ ...) ۲ـ مساحت مقطع ۳ـ طول عضو

* و هر وقت بخواهیم نمودار نیرو ـ تغییر طول را معرفی کنیم برای یک شیء باید هر سه را ذکر کنیم (جنس مصالح ـ مساحت مقطع و طول عضو را بدهیم) * = این نمودار زیاد در مقاومت کاربرد ندارد.

** ما در حقیقت نموداری را می‌خواهیم که فقط به جنس مصالح بستگی دارد یعنی ما نمودار تنش ـ کرنش را می‌خواهیم **

* (در این جا مصالح تحت کشش است که در ربع اول قرار دارد و اگر فشاری بود در ربع چهارم قرار دارند)



(این نمودار فقط به جنس مصالح بستگی دارد و این نمودار برای ما مهم است)

اگر ما در این نمودار شیب را بدانیم این نمودار تعریف می‌شود پس برای ما $\tan\theta$ مهم است.

$(1-1)\ \tan\theta = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E$ (واحد E هم واحد σ است) (چون ε واحد ندارد)

(همان جنس مصالح که قبلاً مطرح شد) مُدول الاستیسیته (ضریب ارتجاعی) (مدول یانگ)

نکته: σ و ε همواره در هر نقطه هم علامت هستند بنابراین نتیجه می‌شود که E همواره مثبت است.

ـ رابطه‌ی ۱ـ۱ معمولاً به صورت: $\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon}$ کاربرد بیشتری دارد که به قانون هوک معروف می‌باشد.

E در صورت مسئله داده می‌شود.

نکته: E مثل k در فنر برای هر ماده ثابت است مثلاً:

$E_{st} = 2.1\times10^{6}\ \frac{kg}{cm^2} = 2.1\times10^{5}\ \frac{N}{mm^2} =$ (فولاد)

[redacted] $\times10^{6}\ \frac{Lb}{in^2}$ (پوند)

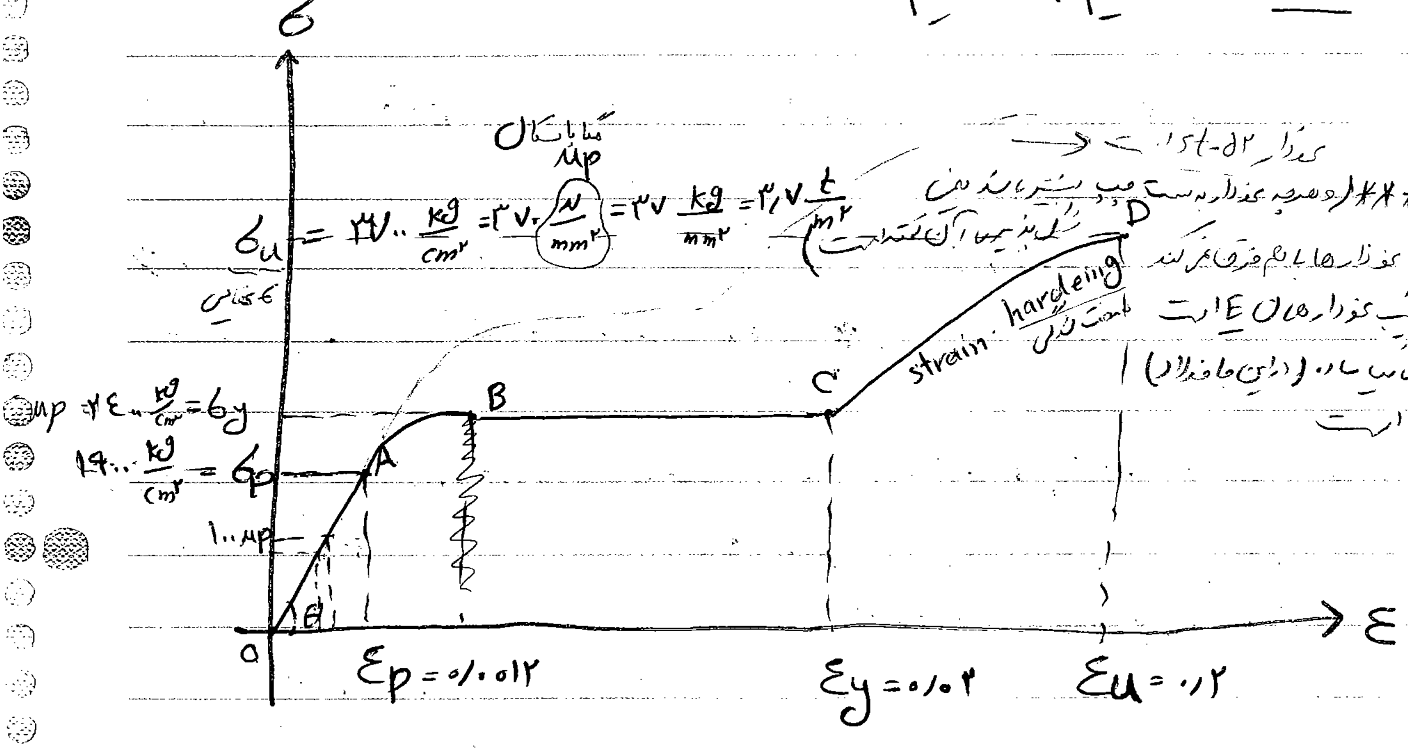
$E_{Al} = 0.7\times10^{6}\ \frac{kg}{cm^2}$ (آلومینیوم)

$E_{c} = (0.26 \text{ تا } 0.35)\times10^{6}\ \frac{kg}{cm^2}$ (بتن)

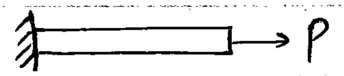
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

نمودار فولاد را می‌خواهیم بررسی کنیم :



*** هر چه نمودار به سمت چپ بیشتر باشد نشان شکل‌پذیری آن کمتر است ولی شیب نمودارها با هم فرق نمی‌کند زیرا شیب نمودارها E است. E برای همه (در این جا فولاد) ثابت است



اگر یک میله فولادی تحت کشش باشد و ما بخواهیم نمودار تنش - تغییر شکل آن را رسم کنیم طبق نمودار بالا می‌شود.

الاستیک مثل فنر = یعنی اگر عضو تغییر شکل داد آن را ول کنیم به حالت اولیه برمی‌گردد

با توجه به نمودار بالا :

یعنی منحنی است (اسم در نمودار)

OA = منطقه الاستیک خطی

یعنی برگشت پذیر با ارتجاعی با کشسان (آهن‌ربای نمودار)

دبیرستانی

AB : منطقه الاستیک غیرخطی

BC : (منطقه) پلاستیک (ضمناً افقی است و شیب صفر است و الاستیک دارای ارتجاع نیست)

CD : منطقه سخت شدگی مجدد تنش

و نقطه D، نقطه گسیختگی (پاره شدن) فولاد است.

$\frac{15}{100} \times 5$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

st به معنای فولاد است

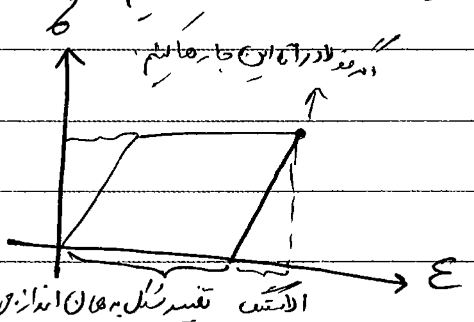
مثلاً st37 یعنی فولادی که نقطه‌ی گسیختگی آن $37 \frac{kg}{mm^2}$ است

نکته در مورد نمودار تنش - کرنش :

در عمل و در واقع از منحنی AB (الاستیک غیرخطی) صرف‌نظر می‌کنند [اما در تئوری باید باشد]
و در عمل ملاک ما 370 Mp نیست بلکه 240 Mp است. فرض این است که تنش بیش از 240 باشد تغییر شکل خیلی زیاد می‌شود.

[برای شکل‌پذیری به ε و برای سختی به σ توجه می‌کنیم]

فرض می‌کنیم که فولاد تا 240 تحمل می‌کند و ضریب اطمینان را 240 قرار می‌دهیم.



(معمولاً نمودار فولاد را به همین صورت رسم می‌کنند)

اثبات $\delta = \frac{PL}{EA}$:

قانون هوک : $\sigma = E \cdot \varepsilon$

تغییر طول در اثر کشش یا فشار

$$\frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L} \Rightarrow (I)\ \boxed{\delta = \frac{PL}{EA}}$$

علامت δ به P بستگی دارد و طول L، E و A همواره مثبت هستند

الف) برای استفاده از فرمول (I)، باید در تمام طول عضو (L) سه شرط زیر برقرار باشد :

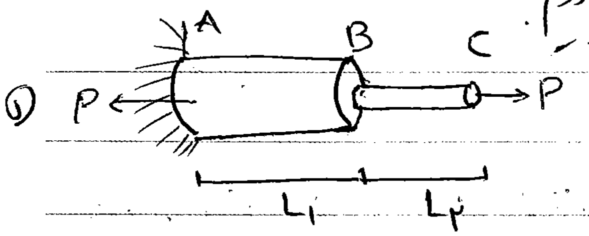
1) عضو دو نیرویی باشد (P ثابت باشد)
2) همگن باشد (E ثابت باشد)
3) مقطع عضو یکنواخت باشد (A ثابت باشد)

در صورت برقراری این شروط از فرمول I استفاده می‌کنیم.

SUBJECT :

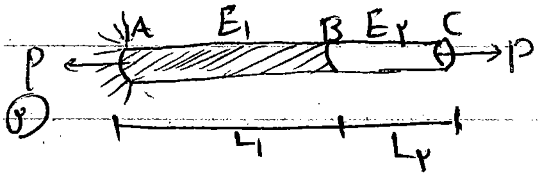
Year ( ) Month ( ) Date ( )

ب) اگر در طول عضو نیرو (P) یا جنس (E) یا مساحت مقطع (A) به طور ناگهانی یا غیر تدریجی تغییر نماید، عضو را به چند قسمت جزئی تقسیم می‌کنیم که هر قسمت آن به طور مجزا ۳ شرط صفحه قبل را دارا باشد و از فرمول زیر تغییر طول کل عضو را بدست می‌آوریم:



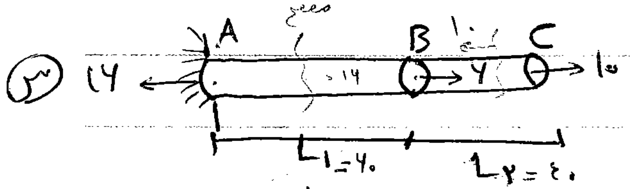
A ثابت است

$$\boxed{\delta=\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_iL_i}{E_iA_i}} \quad (II)$$



E ثابت است

P + ۶ − ۱۶ = ۰



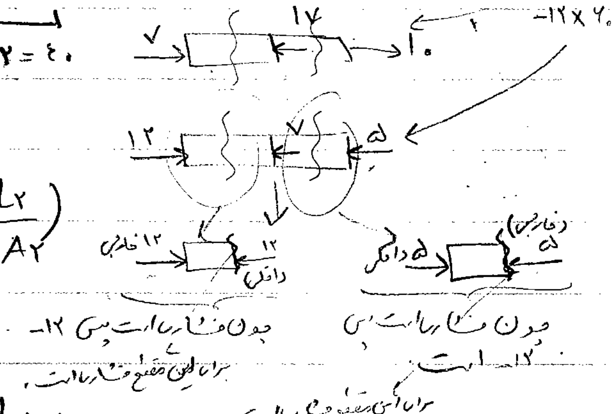
P ثابت است

$$\delta=\frac{1}{EA}(P_1L_1+P_2L_2)$$

$12\times60 \quad 10\times40$

$-7\times60 \quad 10\times40$

$-12\times60 \quad -5\times40$



برای شکل ①:

از آنجایی که ثابت است آن را بیرون

$$\delta=\frac{P}{E}\left(\frac{L_1}{A_1}+\frac{L_2}{A_2}\right)$$

برای شکل ②:

$$\delta=\frac{P}{A}\left(\frac{L_1}{E_1}+\frac{L_2}{E_2}\right)$$

برای شکل ③:

$$\delta=\frac{1}{EA}(P_1L_1+P_2L_2)$$

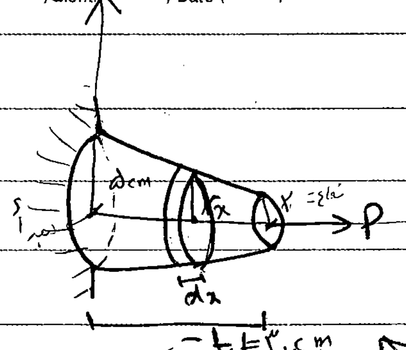
ج) اما اگر نیرو (P) و جنس (E) و یا مساحت (A) در طول عضو به طور تدریجی تغییر نماید از فرمول انتگرالی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{\delta=\int_0^L\frac{P_x\,dx}{E_xA_x}} \quad (III)$$

تابعی بر حسب x

تابعی بر حسب x

SUBJECT: (شفاهی ۲)
Year ( ) Month ( ) Date ( )



مساحت آن به طور تدریجی تغییر کرده

تغییر طول این المان می‌شود:

$$\delta = \frac{P\,dx}{E \cdot A}$$

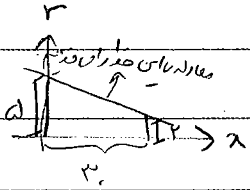
اما برای کل شکل باید از این المان انتگرال گرفت که می‌شود تغییر طول کل.

$$\boxed{\delta = \frac{P}{E}\int_0^L \frac{dx}{A_x}} \Rightarrow \frac{P}{E}\int_0^{30} \frac{dx}{\pi r_x^2}$$

$r = ax + b$

$\begin{cases} x = 0 \to r = ? \\ x = L \to r = ? \end{cases}$

مثلاً در شکل زیر:



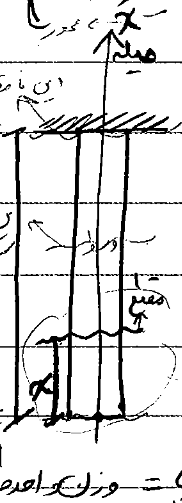
$r = ax + b$

$r_x = 5 - 0.1x$

$\begin{cases} x = 0 \to r = 5 \\ x = 30 \to r = 2 \end{cases}$

$$\delta = \frac{P}{E}\int_0^{30} \underbrace{\frac{dx}{\pi(5 - 0.1x)^2}}_{\text{برای وقتی که مساحت تدریجی تغییر کند}}$$

مثال برای این که P تدریجی تغییر کند؟ وقتی که وزن دارد) [مثال تغییر طول در اثر تغییر وزن]



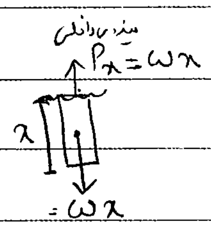
A ثابت است

E ثابت است

P متغیر است با x

$$\delta = \frac{1}{EA}\int_0^L P_x\,dx = \frac{1}{EA}\int_0^L \omega \cdot x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\omega}{EA}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^L\right] = \frac{\overbrace{\omega L}^{W = \omega \cdot L}{}^2}{2E \cdot A} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{W \cdot L}{2EA}}$$

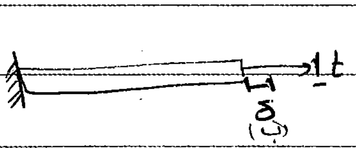
این فرمول $\frac{1}{2}$ برابر فرمول قبلی است.

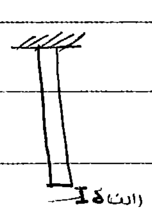
ω = وزن واحد طول است

نکته: نیروی داخلی در جایی که مقطع زده می‌شود وارد می‌شود.

وزن کل میله $= W = \omega \cdot L$

$\delta = ?$



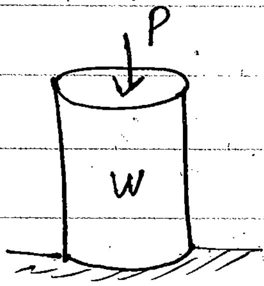


تغییر طول الف نصف تغییر طول ب است.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

نتیجه مهم: تغییر طول ناشی از وزن نصف تغییر طول ناشی از کشیدن است
کنکوری



مثال: ستون است که کاهش طول ناشی از :

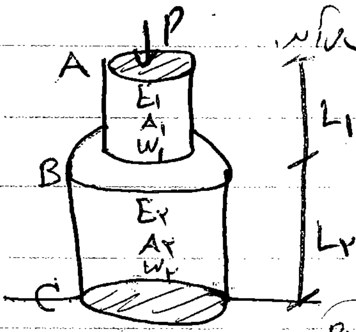
الف) مقدار کاهش طول $\frac{WL}{2EA} + \frac{PL}{EA}$ ج) ....

ب) .... د) ....

تغییر طول خواست (گزینه الف درست)

تست: مقدار کاهش ارتفاع کل ستون ؟؟

تغییر ارتفاع کل ستون یعنی تغییر ارتفاع AC که از جمع AB + BC بدست می‌آید

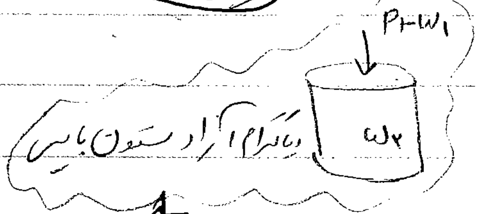


$\delta_1+\delta_2$

ستون بالایی

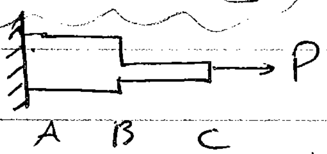
$$\delta_{AC}=\delta_{AB}+\delta_{BC}=\left[\frac{PL_1}{E_1A_1}+\frac{W_1L_1}{2E_1A_1}\right]+\left[\frac{(P+W_1)L_2}{E_2A_2}+\frac{W_2L_2}{2E_2A_2}\right]$$

با دادن فرمول مقدار قبل هم استفاده کنیم ... آنرا ل تغییر چون



نکته:

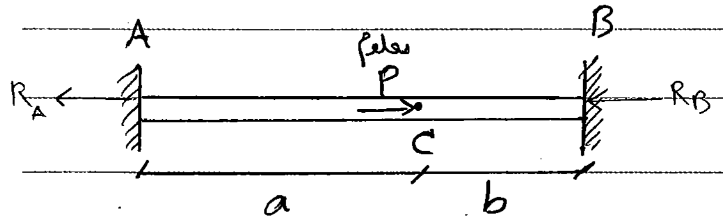
تغییر مکان (جابجایی) نقطه C = ؟؟



δ_C (تغییر مکان (جابجایی) نقطه C) $=\delta_{AC}$

SUBJECT :
Year (   ) Month (   ) Date (   )

حل مسائل نامعین استاتیکی :

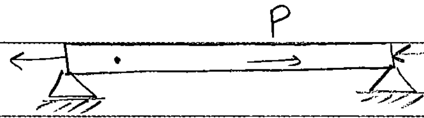


اگر نیروی P عمودی بود هر تکیه‌گاه ۳ عکس‌العمل داشت، ولی چون نیرو افقی است هر تکیه‌گاه یک عکس‌العمل دارد

معادله‌ی تعادل : $\Sigma F_x = 0$ $\boxed{R_A + R_B = \overset{\text{معلوم}}{P}}$ (1)

معادله‌ی سازگاری : تغییر شکل‌ها
تغییر طول‌ها
(در مقاومت)

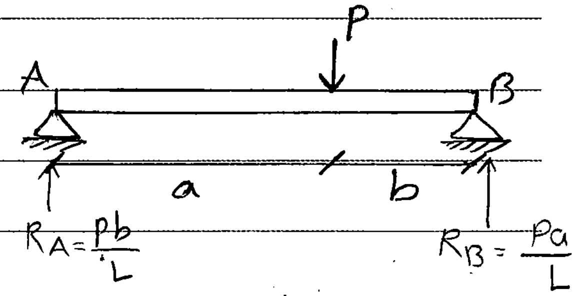
$\delta_{AB} = 0 \Longrightarrow$ یا



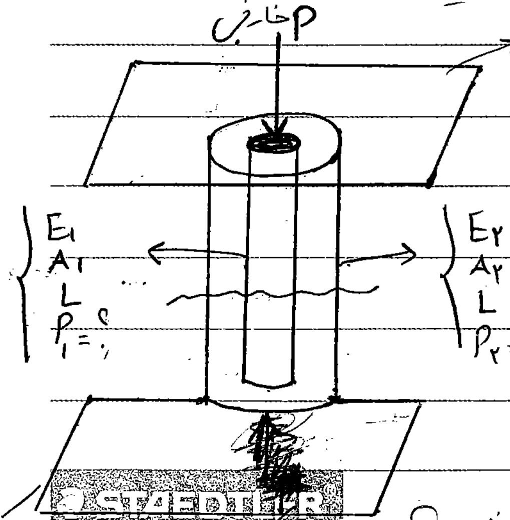
$\delta_{AC} + \delta_{BC} = 0$

$$\boxed{\delta = \frac{PL}{EA}} \qquad \boxed{\frac{\overset{\text{کششی}}{R_A \cdot a}}{E \cdot A} + \frac{\overset{\text{فشاری}}{-R_B \cdot b}}{EA} = 0} \quad (2)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} R_A = P\dfrac{b}{L} \\ R_B = P\dfrac{a}{L} \end{cases}$$



** در استاتیک معین در ترم ۱ می‌آمدیم و این جوری حل می‌کردیم که
با حل در مقاومت نامعین در ترم دو سیستم برابر بود **



مثال: نیروی میله و لوله را بدست آورید.

الف) $\Sigma F_y = 0$

معادله‌ی تعادل : $\boxed{P_1 + P_2 = P \text{ معلوم}}$ (1)

معادله‌ی سازگاری تغییر طول‌ها

$\delta_1 = \delta_2$ تغییر طول در لوله و میله یکسان است به خاطر وجود صفحه‌ی صلب

$$\boxed{\frac{P_1 L}{E_1 A_1} = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}}$$

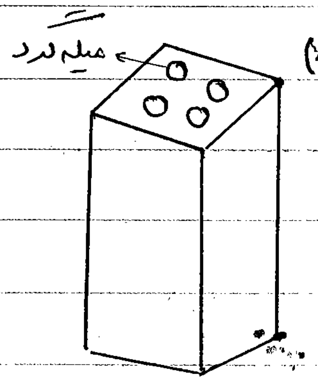
الف) میله‌ی فولادی داخل لوله می‌باشد که بین صفحه‌ی صلب زیر دست صفحه‌ی صلب روی آن قرار دارد با بار گسترده P نیز که در آن نشان داده شده است.

SUBJECT :

Year (　　) Month (　　) Date (　　)

$$\begin{cases} P_1 = P\dfrac{E_1A_1}{E_1A_1+E_2A_2} \\[2ex] P_2 = P\dfrac{E_2A_2}{E_1A_1+E_2A_2} \end{cases}$$

می‌توانیم از فرمول بالا استفاده کنیم؟



$$\begin{cases} P_1 = P\dfrac{E_1A_1}{E_1A_1+E_2A_2} \\[2ex] P_2 = P\dfrac{E_2A_2}{E_1A_1+E_2A_2} \end{cases} \Longrightarrow$$

در ستون شکل مقابل سهم بتن نسبت به فولاد؟ $\dfrac{P_1}{P_2} = ?$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{E_1A_1}{E_2A_2}$$ (به نسبت صلبیت محوری)

ب) تنش در هر کدام را بدست آورید؟

(به نسبت مدول الاستیسیته)

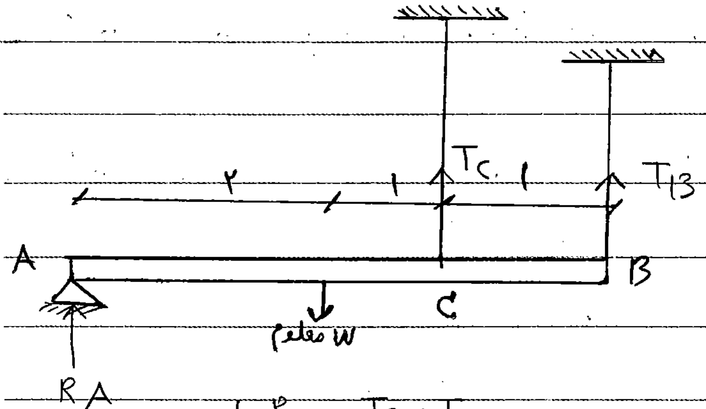
$$\left.\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{P_1}{A_1} = P\dfrac{E_1}{\Sigma EA} \\[2ex] \sigma_2 = \dfrac{P_2}{A_2} = P\dfrac{E_2}{\Sigma EA} \end{cases}\right\} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2}$$

ج)

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E_1} = \dfrac{P}{\Sigma EA} \\[2ex] \varepsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E_2} = \dfrac{P}{\Sigma EA} \end{cases} \qquad \boxed{\sigma = E\varepsilon}$$

د)

$$\begin{cases} \delta_1 = \varepsilon_1 L = \boxed{\dfrac{PL}{\Sigma EA}} \\[2ex] \delta_2 = \varepsilon_2 L = \dfrac{PL}{\Sigma EA} \end{cases}$$



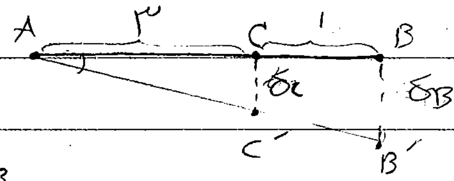
با وجود نیروی W میله حول نقطه A که ثابت است می‌چرخد و در کابل‌ها تغییر طول ایجاد می‌شود.

معادلات تعادل

$$R_A + T_B + T_C = W_{\text{معلوم}}$$

گشتاور حول A : $4T_B + 3T_C = 2W$

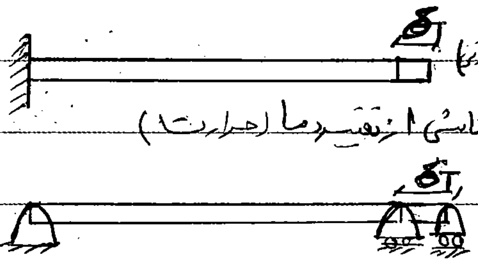
معادلات سازگاری تغییر طول‌ها



$$\frac{\delta_C}{\delta_B} = \frac{3}{4} \rightarrow \delta_C = \frac{3}{4}\delta_B$$

$$\frac{T_C \cdot L_C}{E_C \cdot A_C} = \frac{3}{4}\,\frac{T_B \cdot L_B}{E_B \cdot A_B}$$

اثرات تغییر دما : (در اثر دما تغییر طول می‌بینیم)



$$\boxed{\delta_T = \alpha \cdot L \cdot \Delta T}$$

δ_T (mm)، α ($\frac{1}{°C}$) ضریب انبساط طولی حرارتی، L (mm) طول، ΔT (°C) $(T_2 - T_1)$ تغییر دما

به مساحت بستگی ندارد

$$\boxed{\delta = \frac{PL}{EA}}$$

تغییر طول در اثر کشش است.

کرنش حرارتی $\boxed{\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha \cdot \Delta T}$

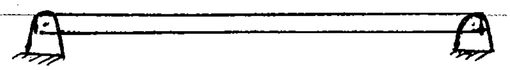
میله‌ای را گرم کنیم و افزایش طول دهد یا سرد کنیم و کاهش طول دهد تنش صفر است. تنش $\sigma_T = 0$

SUBJECT :

Year (　　) Month (　　) Date (　　)

- اگر تغییر دما بر میله هایی که می توانند تغییر طول داشته باشند که یک سر میله آزاد است

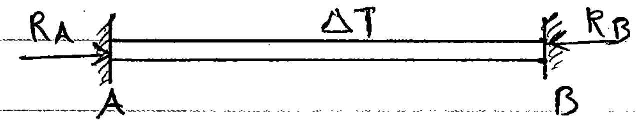
- اگر تغییر دما بر میله هایی که نمی توانند تغییر طول داشته باشند؟



δ تغییر طول $= 0$

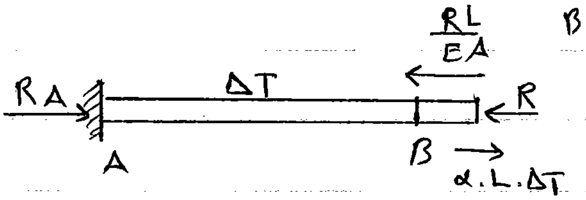
$\varepsilon = 0$

σ تنش $= ?$



معادله ی تعادل: $\sum F_x = 0 \Longrightarrow R_A = R_B = R$

فرض: اگر تکیه گاه B نبوده؟



معادله ی سازگاری تغییر طول ها: $\delta_{AB} = 0$

$$(\alpha . L . \Delta T) + \left(\frac{RL}{EA}\right) = 0$$

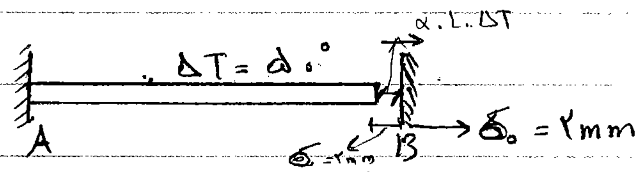
عکس العمل $\boxed{R = -EA . \alpha . \Delta T}$

اگر سرد کنیم $\Delta T \leftarrow - \leftarrow +R$

اگر گرم کنیم $\Delta T \leftarrow + \leftarrow -R$

$$\sigma_{\text{تنش}} = \frac{R}{A} = -E . \alpha . \Delta T$$

مثال: σ تنش $= ?$



δ_T تغییر طول $= \underbrace{\alpha . L . \Delta T}_{5}$ $\begin{cases} 5 \le \frac{\delta_0}{2} & \text{نمی خورد به تکیه گاه B} \\ 5 > \frac{\delta_0}{2} & \text{می خورد به تکیه گاه B} \end{cases}$

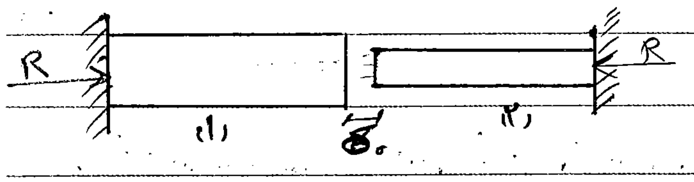
معادله ی سازگاری: $\delta_{AB} = 2mm$

$$\underbrace{\alpha . L \Delta T}_{5} + \underbrace{\frac{R . L}{E . A}}_{-3} = 2 \longrightarrow \boxed{R = 2}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال: $R = ?$



معادله سازگاری: $\delta_1 + \delta_2 = \underset{\text{معلوم}}{\delta_0}$

$$\left(\alpha_1 \cdot L_1 \cdot \Delta T + \frac{R \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1}\right) + \left(\alpha_2 \cdot L_2 \cdot \Delta T + \frac{R L_2}{E_2 A_2}\right) = \delta_0$$

اگر دو میله ی بالا به هم چسبیده بود و تنش را می خواست: $\delta_0 = 0$ می ذاریم در معادله بالا

نسبت پواسون (ضریب پواسون): ص ۵۲ کتاب

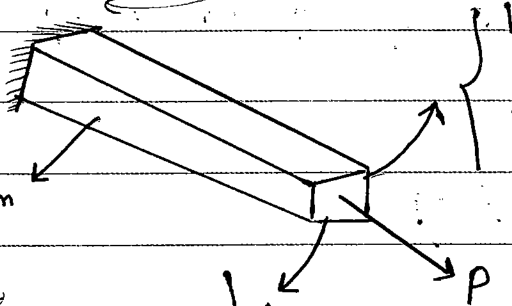
فرض: یک میله ی فولادی را در آزمایشگاه تحت کشش قرار می دهیم می بینیم که طول آن 1mm

$\sigma_x = \frac{P}{A}$

اضافه شده اما تغییر طول در راستای Z و y کمتر می شود. $\sigma_y = \sigma_z = 0$ اما $\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0$

$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ ← مدول کشسانی



$L_z = 20\,mm$
$\delta_z = -0/006\,mm$
$\varepsilon_z = -0/0003\,mm$

$L_x = 1000\,mm$
$\delta_x = 1\,mm$
$\varepsilon_x = 0/001 \quad \frac{\delta}{L}$

$L_y = 30\,mm$
$\delta_y = -0/009\,mm$
$\varepsilon_y = -0/0003$

$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{L_x}$

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

(برای مواد ایزوتروپ)

$$\underset{\text{(نسبت پواسون)}}{\overset{\text{نیو}}{\nu}} = \left| \frac{\text{تغییر طول نسبی جانبی}}{\text{تغییر طول نسبی محوری}} \right| = \frac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{-\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad \text{یا} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\varepsilon_y = \varepsilon_z}_{\text{کرنش های جانبی}} = -\nu \underbrace{\varepsilon_x}_{\text{کرنش محوری}}} \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{\underset{\text{مدول الاستیسیته}}{E}} \qquad \sigma_x = \frac{P}{A}$$

همگن: خواص ماده در تمام نقاط ماده یکسان و ثابت باشد. (خواص عددی) یا اسکالر

STAEDTLER

SUBJECT :

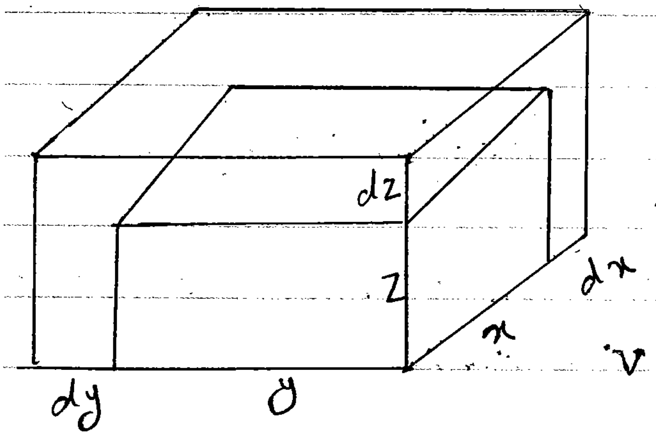
Year (   ) Month (   ) Date (   )

ایزوتروپیا: ماده‌ای ایزوتروپ است که کلیه‌ی خواص آن در تمام جهات یکسان باشد

مثال: مثلاً اگر یک مکعب فولادی را در آب جوش بیندازیم به همان شکل مکعب می‌ماند چون تغییر طول در تمام بعدها یکسان است.

$v' - v$ تغییر حجم

تغییر حجم نسبی: $\left(\varepsilon_v = \frac{\delta_v}{v} \right)$ تغییر حجم نسبی



$$V = x \cdot y \cdot z$$

حجم ثانویه $V' = [(x+dx)(y+dy)](z+dz)$

$$[xy + xdy + ydx](z+dz)$$

$$V' = xyz + yzdx + xzdy + xydz$$

$$\varepsilon_v = \frac{yzdx + xzdy + xydz}{xyz}$$

$$\boxed{\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$ (I) فرمول کلی

** اگر حجمی به هر دلیلی تغییر کرد [نیرو یا دما]، تغییر حجم نسبی برابر است با مجموع سه تغییر طول نسبی **

کاربرد فرمول: الف) تغییر حجم نسبی ناشی از تغییر دما:

ب) تغییر حجم نسبی ناشی از نیروی محوری: (تغییر نیرو)

SUBJECT :

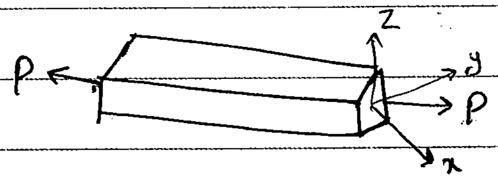
Year (   ) Month (   ) Date (   )

الف) تغییر حجم نسبی ناشی از تغییر دما:

$$\varepsilon_v = \underbrace{\varepsilon_x}_{\alpha\Delta T} + \underbrace{\varepsilon_y}_{\alpha\Delta T} + \underbrace{\varepsilon_z}_{\alpha\Delta T} \Longrightarrow \boxed{\varepsilon_v = 3\alpha\cdot\Delta T} \quad (II)$$

ضریب انبساط حجمی حرارتی

ب) تغییر حجم نسبی ناشی از نیروی محوری:



$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \underbrace{\varepsilon_y}_{-\nu\varepsilon_x} + \underbrace{\varepsilon_z}_{-\nu\varepsilon_x} \Longrightarrow$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$$

$$\Longrightarrow \boxed{\varepsilon_v = \varepsilon_x(1-2\nu)} \quad (III)$$

اگر $\nu = 0 \Longrightarrow \varepsilon_v = \varepsilon_x$

اگر $\nu = 0.5 \Longrightarrow \varepsilon_v = 0$

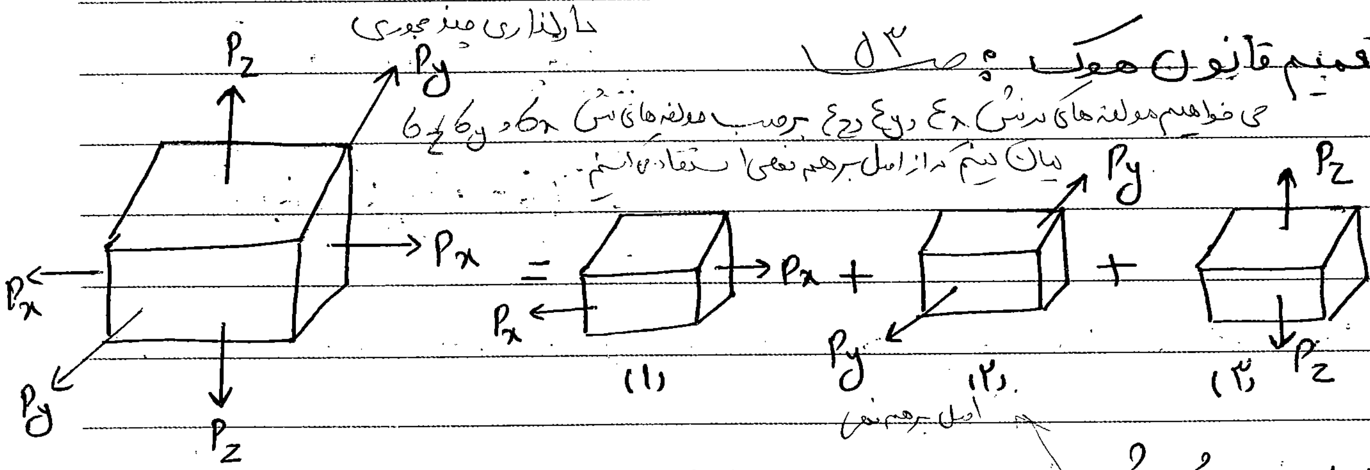
$\Longrightarrow \boxed{0 < \nu < 0.5}$

نتیجه: ν بین ۰ تا ۰/۵ است ν برابر صفر وجود ندارد اگر ۰/۵ = ν باشد امکان ندارد.

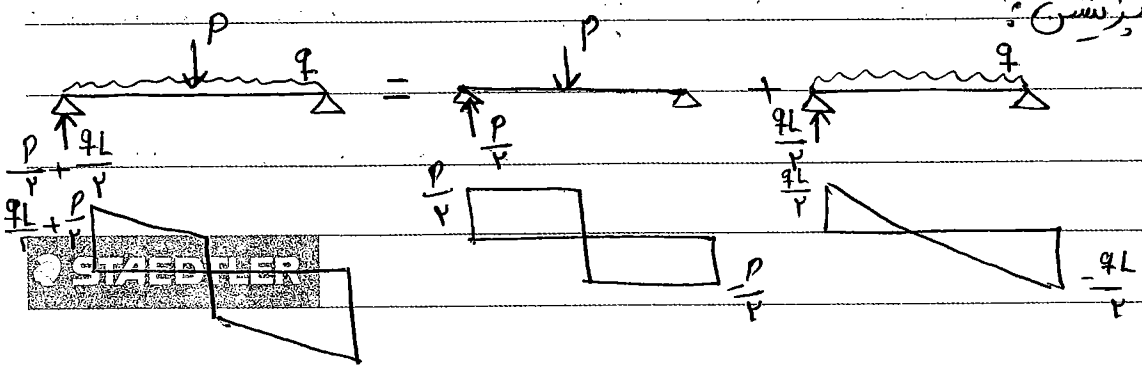
تعمیم قانون هوک: ص ۵۳

بارگذاری چند محوری

می خواهیم مولفه های کرنش ε_x و ε_y و ε_z را برحسب مولفه های تنش σ_x و σ_y و σ_z بیان کنیم. از اصل برهم نهی استفاده می کنیم.



اصل سوپرپوزیشن:

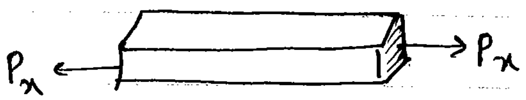


SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

هوک : $\sigma_x = E\varepsilon_x$

پواسون : $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$



$\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E}$ $\quad \varepsilon_y = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E}$

$\varepsilon_z = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E}$

تحت کشش

$$\begin{cases}
\varepsilon_x = +\dfrac{\sigma_x}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_y}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_z}{E} \\
\varepsilon_y = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} & +\dfrac{\sigma_y}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_z}{E} \\
\varepsilon_z = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_y}{E} & +\dfrac{\sigma_z}{E}
\end{cases}$$

بارگذاری در امتداد x (۱) — بارگذاری در امتداد y (۲) — بارگذاری در امتداد z (۳)

اگر از در راستای ۳ جهت نیرو وارد شود (کلاً اگر از تمام وجه ها تحت کشش باشد)

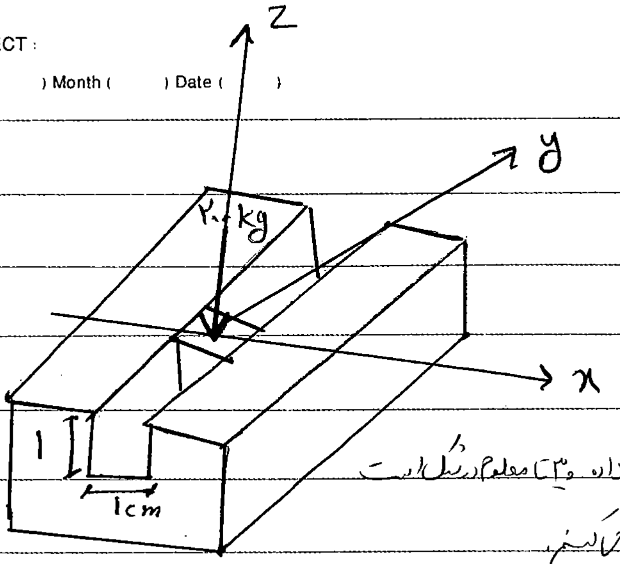
$$\begin{cases}
\varepsilon_x = +\dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E} - \nu\dfrac{\sigma_z}{E} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha\Delta T \\
\varepsilon_y = \text{———} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha\Delta T \\
\varepsilon_z = \text{———} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha\Delta T
\end{cases}$$

اگر علاوه بر اعمال نیرو در هر سه جهت دما را نیز تغییر دهیم

مثال: قطعه‌ی صلب فولادی که یک شیار به عمق و عرض ۱cm دارد و یک قطعه‌ی لاستیکی (صلب) به ابعاد ۱cm در داخل شیار کاملاً فیت شده است و یک فشار ۲۰۰kg به لاستیک اعمال شده به لاستیک را تحت فشار قرار داده و E و ν لاستیک معلوم می‌باشد.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



$\cancel{\varepsilon_x}$ $\quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z$

$\sigma_x \quad \cancel{\sigma_y} \quad \sigma_z \rightarrow -200\ \frac{kg}{cm^2}$ فشاری

نیروی وارد بر هر محور تنش آن وجه محسوب می‌شود

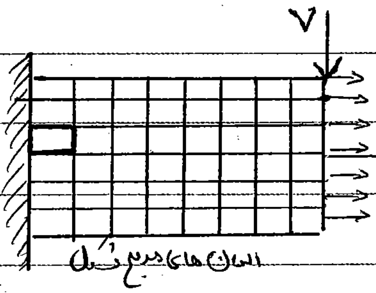
۳ تا مجهول داریم ۲ تا معلوم را مسئله داده و ۳ تا معلوم در شکل است

حال در ۳ معادله بالا قرار داده و حل می‌کنیم

ε_x صفر است چون دقیقاً داخل شیار است و ε نداریم، σ_y نداریم چون ε_y آن آزاد است و هیچ نیرویی به آن وارد نمی‌شود.

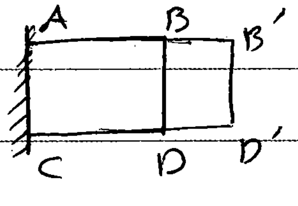
مگر $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$ ؟؟ پس پواسون جا [illegible] است

قانون هوک برای تنش‌ها و تنجش‌های (کرنش‌های) برشی :

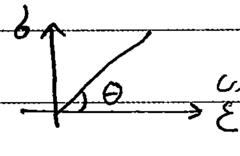


تحت کشش قرار می‌دهیم

در اثر کشش مربع مستطیل می‌شود
در اثر برش مربع متوازی الاضلاع می‌شود

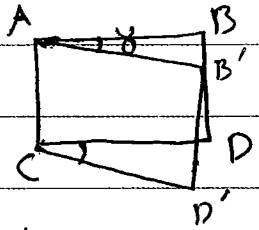


$\varepsilon = \frac{BB'}{AB}$ تنجش محوری



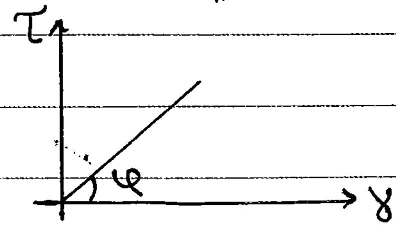
$\tan\theta = E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ تنش محوری / تنجش محوری

مدول الاستیسیته محوری



$\tan\gamma = \gamma = \frac{BB'}{AB}$

تنجش برشی



$\tan\varphi = G = \frac{\tau}{\gamma}$ تنش برشی / تنجش برشی

مدل الاستیسیته برشی

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$\begin{cases} \text{تنش محوری } \sigma = E \cdot \varepsilon \text{ تنجش محوری} \\ \text{تنش برشی } \tau = G \cdot \gamma \text{ تنجش برشی} \end{cases}$$

E: مدول الاستیسیته

G: مدول برشی

γ: زاویه با برش هم هست

اگر دو تا را داشته باشیم سومی بدست می‌آید.

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

مثال! $G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \frac{E}{G} = 2(1+\underset{0.5}{\overset{0}{\nu}}) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 < \frac{E}{G} < 3$

الف) $1 < \frac{E}{G} < 2$

ب) $2 < \frac{E}{G} < 3$ ✓

ج) $3 < \frac{E}{G} < 4$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

فصل سوم: پیچش:

پیچش مقاطع مدور:

در استاتیک ما P (نیروی محوری)، V (نیروی برشی)، T (گشتاور پیچشی) و M (گشتاور خمشی) را بدست می‌آوردیم.

در مقاومت می‌خواهیم ببینیم که P، V، T و M چه نتیجه‌ای می‌دهند (چه تنشی می‌دهند)

نیروی محوری P $\Rightarrow \sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$ تنش محوری نتیجه می‌دهد و $\delta = \frac{PL}{E\cdot A} \Leftarrow$ برای تغییر شکل (تغییر طول)

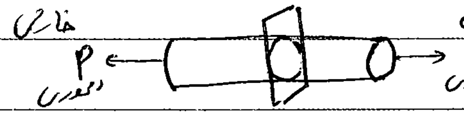
نیروی برشی V $\Rightarrow \tau_{Ave} = \frac{V}{A}$ تنش برشی نتیجه می‌دهد.

گشتاور پیچشی T $\Rightarrow \tau = ?$ و $\phi = ? \Leftarrow$ برای تغییر شکل (تغییر زاویه)

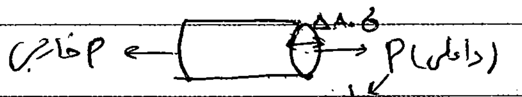
ما چوب را بپیچانیم تا کاری که از درون آن خارج شود ... شود و بنابراین تنش برشی ایجاد می‌کند

گشتاور خمشی M $\Rightarrow \sigma = ?$ در فصل چهارم خوانده می‌شود

ما تیر را خم می‌کنیم



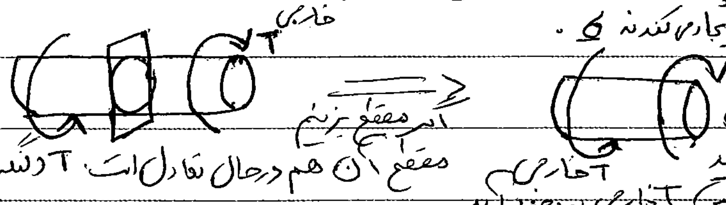
این میله در حال تعادل است پس هر مقطعی از آن هم باید تعادل داشته باشد.



این نیرو ناشی از سطح است.

$$P = \int \sigma \cdot dA$$

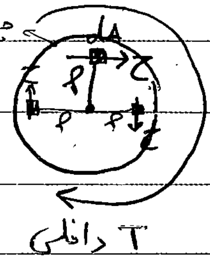
فرض: میله‌ی مدور داریم که تحت پیچش است (مانند شفت‌ها)



مقطع آن هم در حال تعادل است. T گشتاور پیچشی خارجی

چون مماس بر سطح است τ ایجاد کننده σ.

برای اینکه تعادل داشته باشد باید گشتاور پیچشی عکس T خارجی به وجود آید که گشتاور داخلی ناشی از تنش است اما گشتاور خارجی این موارد



تنش در تعامد متقاطب بر ρ عمود است

$$\tau dA \cdot \rho = T \Rightarrow$$

نیرو، فاصله، گشتاور

$P = \int \sigma dA \Leftarrow$ نیروی کل

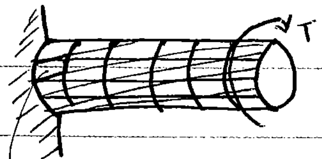
$P = \sigma \cdot A$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

$\boxed{T=\int_A \rho\,\tau\, dA}$ (این فرمول کاربردی است) گشتاوری که به مقطع وارد می‌شود

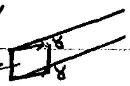
فرض: اگر این میله تحت گشتاور T قرار گیرد خطوط افقی مورب می‌شود و خطوط عمود بر افق دور محورش دوران دارند و شکل آن تغییر می‌کند:



نتیجه: طول تغییر نمی‌کند (پس تنش برشی است) و زاویه ایجاد می‌شود.

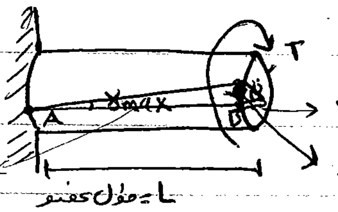
هر تغییر طول ناشی از کشش و فشار است $\sigma=E\cdot\varepsilon$

ما تغییر زاویه ناشی از پیچش است $\tau=G\gamma$



به شبه متوازی الاضلاع شد، پس برشی است.

* فرض:



وقتی میله تحت گشتاور پیچشی T قرار گیرد نقطه B تبدیل به B' می‌شود و زاویه γ ایجاد می‌شود که بی‌نهایت کوچک است (شعاع r)

(حفظ ϕ است در فصل قبلی) ϕ = زاویه پیچشی

می‌خواهیم رابطه‌ای بین γ و ϕ بنویسیم (هرچه γ بیشتر شود ϕ هم بیشتر می‌شود)

γ های که روی میله می‌بینیم max است، هرچه داخل‌تر برود γ کوچک‌تر می‌شود.

* برای این که بین γ و ϕ رابطه داشته باشیم باید فصل مشترک آن‌ها که قوس BB' است را در نظر بگیریم.

$$\begin{cases} \overset{\text{کمان}}{BB'} = r\phi \\ BB' = L\gamma_{max} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\gamma_{max} = r\frac{\phi}{L}}$$

از آنجایی که بی‌نهایت کوچک است کمان BB' مانند خط فرض شود

اگر یک پیچش شعاع r بدهیم ρ هم ... می‌شود

پس اگر میله‌ای فرض در داخل میله‌ی اصلی بگیریم ϕ تغییر نمی‌کند اما γ تغییر می‌کند. پس γ های که روی میله اتفاق می‌افتد:

$$\gamma_{max}=r\frac{\phi}{L}$$

شعاع میله کامل

ولی γ های که داخل‌تر اتفاق می‌افتد:

$$\gamma=\rho\frac{\phi}{L}$$

شعاع میله‌ی داخلی

بس

در نتیجه :

(۱) $\boxed{T=\int_A \rho \tau \, dA}$

(۲) $\boxed{\gamma = \rho \frac{\phi}{L}}$ که به صورت خطی برحسب ρ تغییر می‌کند.

(۳) $\boxed{\gamma_{max} = r \frac{\phi}{L}}$

(۴) $\boxed{\gamma = \frac{\rho}{r} \gamma_{max}}$

با توجه به قانون هوک $\tau = G\gamma$ اگر طرفین رابطه ۲ را در G ضرب کنیم تنش برشی ایجاد می‌شود.

$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{\phi}{L}$$

اگر طرفین رابطه ۳ را در G ضرب کنیم تنش برشی max ایجاد می‌شود.

$$\tau_{max} = G\gamma_{max} = G r \frac{\phi}{L}$$

پس τ_{max} در دورترین نقاط از مرکز ایجاد می‌شود.

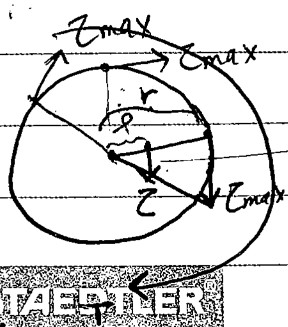
* بیشترین تنش در دورترین نقاط از مرکز ایجاد می‌شود *

$$\frac{\tau}{\tau_{max}} = \frac{\rho}{r} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{max}} \quad (5)$$

اگر طرفین رابطه (۴) را در G ضرب کنیم

$$G\gamma = \frac{\rho}{r} G\gamma_{max} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{max}} \quad (6)$$ کاربردی

مهم.



با توجه به شکل می‌فهمیم که رابطه بین τ_{max} و τ و r و ρ خطی است. یعنی:

$$\frac{\tau}{\tau_{max}} = \frac{\rho}{r}$$

معکوس گشتاور پیچشی قرار گرفته.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

نتیجه‌ی مهم: تنش خطی تغییر می‌کند و به فاصله بستگی دارد [دورترین فاصله از مرکز بیشترین تنش]

طبق رابطه‌ی ۵ و ۱ : ۵ را داخل ۱ می‌گذاریم.

$$①, ⑤ \Rightarrow T = \int_A \rho \left(\frac{\rho}{r} \tau_{max} \right) dA \Rightarrow$$

حل انتگرال در صفحه‌ی الف

$$T = \frac{\tau_{max}}{r} \underbrace{\int_A \rho^2 dA}_{J} \Rightarrow \boxed{T = \frac{\tau_{max} \cdot J}{r}} \ (۷) \Rightarrow \boxed{T_{مجاز} = \frac{\tau_{مجاز} \cdot J}{r}}$$

ممان اینرسی

ظرفیت باربری (حداکثر)

مهم‌ترین فرمول

کنترل $\boxed{\tau_{max} = \frac{T r}{J}}$ (۷) خیلی مهم کاربردی

موجود

فرمول کنترل — کنترل اعضای پیچشی

$$\boxed{\tau = \frac{T\rho}{J}} \ (۸)$$

خیلی مهم کاربردی

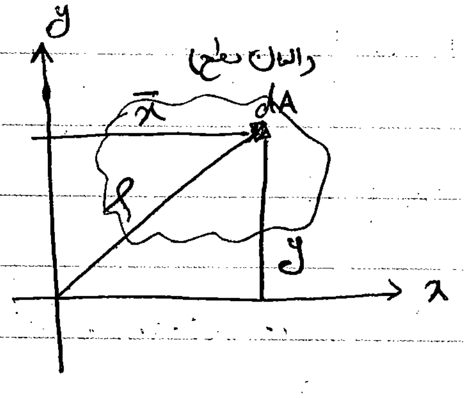
شعاع داخلی (فاصله از مرکز) نقطه‌ای که می‌خواهیم تنش را در آن به دست آوریم

* بار یعنی پیچش یا گشتاور خارجی وارد بر سازه

پس ظرفیت باربری در مقطع یعنی یک عضو

حداکثر پیچش را تحمل می‌کند (T) *

یادآوری استاتیک (ممان اینرسی):



فاصله x همان چیز = گشتاور هر چیز

ممان

نیرو

$$Q_x = \int y \, dA$$

(ممان استاتیک نسبت به محور x ها) (گشتاور اول سطح نسبت به محور x ها) یا گشتاور سطح

کاربردی

$$\boxed{\bar{y} = \frac{\int y dA}{A}}$$

مختصات y مرکز سطح

اگر این رابطه را بر A تقسیم کنیم $\bar{y}$ به دست آید یعنی.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}} \qquad \boxed{Q_y = \int x \, dA}$$

مختصات x مرکز سطح

کاربردی

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

مرکز جرم:
$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int x\,dm}{m} \quad (dm = \rho\,dv) \\ \bar{y} = \dfrac{\int y\,dm}{m} \end{cases}$$
ممان مرکز جرم

مرکز ثقل:
$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int x\,dw}{W} \quad (dw = g\,dm,\; W = mg) \\ \bar{y} = \dfrac{\int y\,dw}{W} \end{cases}$$
ممان مرکز ثقل

مرکز حجم:
$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int x\,dv}{V} \\ \bar{y} = \dfrac{\int y\,dv}{V} \end{cases}$$

در صورتی که جسم همگن باشد مرکز جرم همان مرکز حجم است

و در صورتی که g ثابت باشد مرکز ثقل و مرکز جرم برابر است

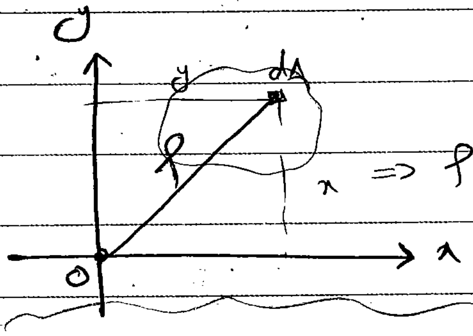
$$I_x = \int y^2\,dA$$ (ممان اینرسی نسبت به x (گشتاور دوم سطح نسبت به محور x ها))

$$I_y = \int x^2\,dA$$ (گشتاور دوم سطح نسبت به محور y ها)

ممان اینرسی قطبی

$$J = \int \underbrace{\rho^2}\,dA \xrightarrow[\rho^2 = x^2+y^2]{I_x + I_y = J}$$

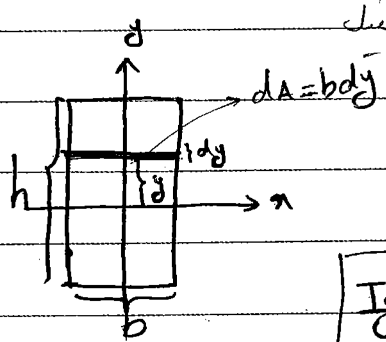
فاصله از محور z ها یعنی فاصله از محور x ها و y ها باشد یا فاصله از نقطه O



$\Rightarrow \rho^2 = x^2 + y^2$

نکته: برای مقاطع مدور بیشتر می‌خواهیم (دایره، نیم‌دایره) و مستطیل

مستطیل:



$$I_x = \int y^2\,dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 (b\,dy) = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$ حفظ شود.

$$\boxed{I_y = \frac{hb^3}{12}}$$ حفظ شود.

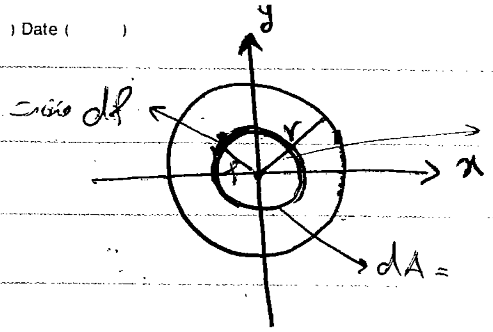
$$\boxed{J = I_x + I_y = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12}}$$ برای مستطیل

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

حالت الف

دایره :



مستطیل ⇐ تبدیل به مستطیل می‌شود

$$\frac{2\pi\rho}{\quad} \; d\rho$$

$$dA = 2\pi\rho\, d\rho$$

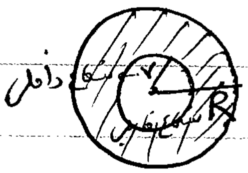
$$J = \int \rho^2 dA = \int_0^r \rho^2 (2\pi\rho\, d\rho) = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^r \Rightarrow \boxed{J = \frac{\pi r^4}{2}}$$

برای دایره

برای دایره $\Rightarrow$ $\boxed{I_x = I_y = \frac{J}{2} = \frac{\pi r^4}{4}}$

$$\begin{cases} I_x + I_y = J \\ \quad {\scriptstyle I_x = I_y} \\ I_x + I_x = J \Rightarrow I_x = I_y = \frac{J}{2} \end{cases}$$

سوال : $J = ?$



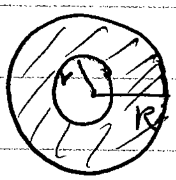
$$J = \left(\frac{\pi R^4}{2}\right) - \left(\frac{\pi r^4}{2}\right)$$

هاشورزده

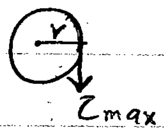
دایره خارجی — دایره داخل

لوله‌ی توخالی

حالا حالت : میله‌ی توخالی (لوله‌ی توخالی)



$$J = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - r^4\right)$$



$$J = \frac{\pi r^4}{2}$$

میله‌ی توپر :

برای میله‌ی توپر :

کنترل : $\tau_{max} = \frac{Tr}{J}$ $\xrightarrow[\text{برای توپر}]{J = \frac{\pi r^4}{2}}$ $\tau_{max} = \frac{2T_{\text{موجود}}}{\pi r^3} \leq \tau_{\text{مجاز}}$

در کنترل τ_{max} را داریم

ظرفیت باربری : $T_{\text{حداکثر مجاز}} = \frac{\tau_{\text{مجاز}} \cdot J}{r} = \tau_{\text{مجاز}} \times \frac{\pi r^3}{2}$

به سمت پایین رند شود

طراحی : $r_{\text{لازم حداقل}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times T_{\text{موجود}}}{\tau_{\text{مجاز}} \times \pi}}$

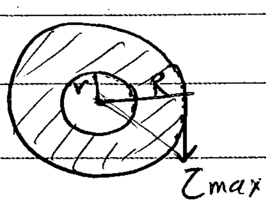
در رند کردن به سمت بالا رند شود

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

در میله توپر τ_{min} صفر است یعنی تنش در مرکز صفر است.

برای لوله ها



کنترل: $\tau_{max} = \frac{T_{موجود} \times R}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \le \tau_{مجاز}$

ظرفیت باربری: $T_{مجاز} = \frac{\tau_{مجاز} \times \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)}{R}$

حداکثر

به سمت پایین رند شود.

در طراحی چون بی نهایت جواب داریم یعنی ۱ معادله و ۲ مجهول می شود: طراحی (جواب های مشخصی داریم) که در طراحی یا r یا R مجهول است و یا نسبت $\frac{r}{R}$ یا $\frac{R}{r}$ را می دهند یا مثلاً می گویند لوله ای داریم به ضخامت ... یعنی اختلاف R و r ضخامت ورق را می دهد

---

(۷) => $\tau_{max} = \frac{Tr}{J}$

هوک: $\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G}$

$\boxed{\gamma_{max} = \frac{Tr}{Gj}}$ (۸) کاربردی است

(۳): $\gamma_{max} = r\frac{\phi}{L}$

(۹): $\gamma_{max} = \frac{Tr}{Gj}$

$\cancel{r}\frac{\phi}{L} = \frac{T\cancel{r}}{Gj} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{TL}{Gj}}$ (۱۰) خیلی مهم و کاربردی است.

در محوری داشتیم $\sigma = \frac{P}{A} \le \sigma$

$\tau_{max} = \frac{Tr}{J} \le \tau_{مجاز}$

STAEDTLER

$\delta = \frac{PL}{EA}$ دلتا

تغییر شکل محوری (تغییر طول)

صلبیت محوری - سختی

$\phi = \frac{TL}{Gj}$ زاویه پیچش (تغییر زاویه در پیچش)

صلبیت پیچشی

پیچیدن

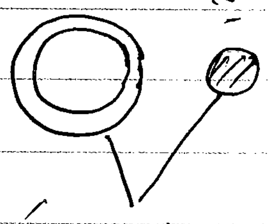
ادامه در صفحه بعد

در کشش فشار مساحت مهم است. اما در پیچش G مهم است.
در برش هم مساحت مهم است.

$$\delta^{mm} = \frac{P^{(N)} L^{(mm)}}{E_{(\frac{N}{mm^2})} A_{(mm^2)}}$$

$$\phi = \frac{T^{(N.mm)} L^{(mm)}}{G_{(\frac{N}{mm^2})} J_{(mm^4)}}$$ رادیان (بدون بعد)

چند درجه بپیچد $x^\circ = \frac{\pi}{180} \times x$



~~مقابل کشش ...~~

$P = \sigma_{مجاز} \times A$
معهود مجاز

جنس و مساحت یکسان

چون جنس و مساحت یکسان است
طبق رابطه $P = \sigma_{مجاز} \times A$
پس هر دو در مقابل کشش و فشار
گنجایش دارند.

مهم در دوم:
قوی‌ترین بودن $\tau_{مجاز}$ بیشتر (در مقابل کشش و فشار)
صلب‌تر بودن $\phi_{مجاز}$ کمتر

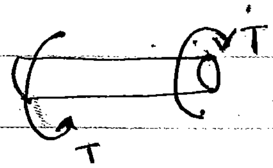
تغییر شکل ندهد
صلبیت پیچشی به G بستگی دارد.

صلبیت محوری به E و A بستگی دارد چون در این شکل
جنس و مساحت یکسان است پس صلبیت محوری یکسان است.

$$\varphi = \Phi = \frac{TL}{GJ}$$ کاربرد فرمول شماره ۱۰؟

الف) برای به کار بردن فرمول ۱۰ در تمام طول باید ۳ شرط زیر برقرار باشد:

شرط اول: گشتاور پیچشی (T) فقط در ۲ سر عضو اعمال شود (T ثابت باشد)



شرط دوم: همگن باشد (G ثابت باشد)

شرط سوم: مقطع یکنواخت باشد (J ثابت باشد)

همه جا ثابت است و ۲ گشتاور
اعمال شده است.

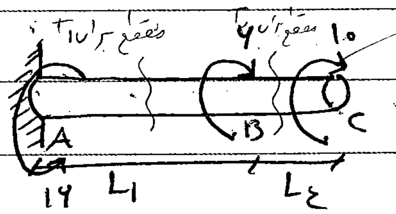
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

$x^{\circ} = \frac{\pi \times \pi}{180}$

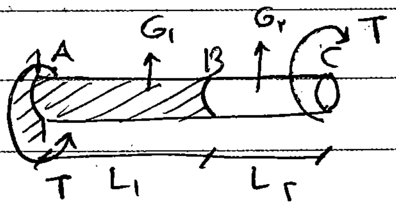
ب) اگر T ، G یا J در طول عضو به طور ناگهانی (غیر تدریجی) تغییر نماید زاویه‌ی پیچش کلی میله [یعنی در کل میله چقدر می‌پیچد] از مجموع زیر به دست می‌آید:

$$\varphi = \Phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$



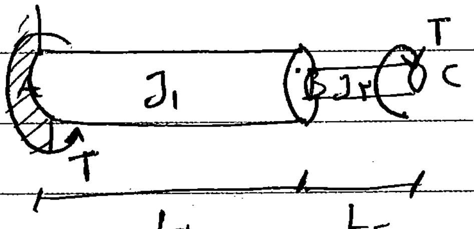
T تغییر کرد

$$\varphi = \frac{1}{GJ}\left(T_1 L_1 + T_2 L_2\right)$$



جنس تغییر کرد (G)

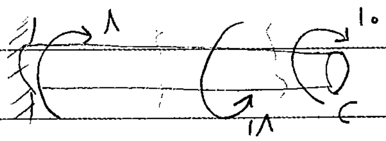
$$\varphi = \frac{T}{J}\left(\frac{L_1}{G_1} + \frac{L_2}{G_2}\right)$$



J تغییر کرد

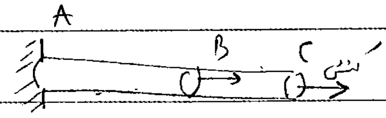
$$\varphi = \frac{T}{G}\left(\frac{L_1}{J_1} + \frac{L_2}{J_2}\right)$$

سؤال:



$$\varphi = \frac{1}{GJ}\left(T_1 L_1 + T_2 L_2\right)$$

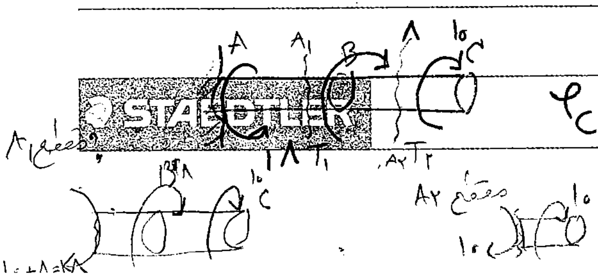
سؤال:



هر جای تغییر

$$\delta_C = \delta_{AC} = \delta_{AB} + \delta_{BC} = \delta_{CA} = \delta_{BA} + \delta_{CB}$$

اما در پیچش این خاصیت نیست: $\varphi_{AB} \neq \varphi_{BA}$



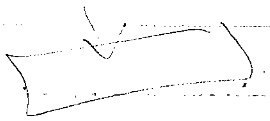
$$\varphi_C = \varphi_{AC} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} \neq \varphi_{AB} + \varphi_{CB}$$

$\varphi_{CB} \neq \varphi_{BC}$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

ج) اگر T، G و J در طول عضو به طور تدریجی تغییر کنند، از فرمول انتگرالی زیر زاویه φ را

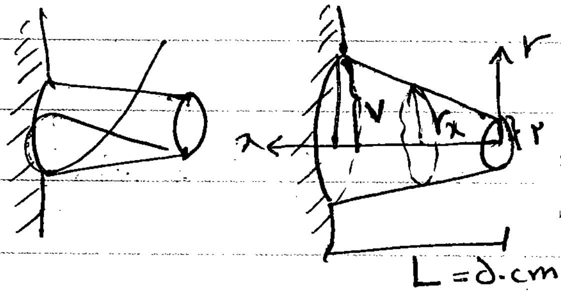


بدست می‌آوریم:

$$\varphi = \int_0^L \frac{T_x dx}{G_x J_x}$$

که این فرمول سه حالت دارد یعنی J تدریجی تغییر کند

تبدیل به مخروط ناقص می‌شود:



$$\varphi = \frac{T}{G}\int_0^L \frac{dx}{J_x} = \frac{T}{G}\int_0^L \frac{dx}{\frac{\pi}{2} r_x^4}$$

معادله‌ی خط است.

$$\boxed{r_x = 2 + 0.1x}$$

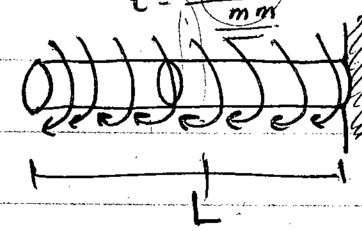
برای اینکه G تدریجی تغییر کند (چنین تدریجی تغییر کند نداریم)

$\underset{\text{(N.mm)}}{T} = t \cdot L$ ← کل گشتاور پیچشی

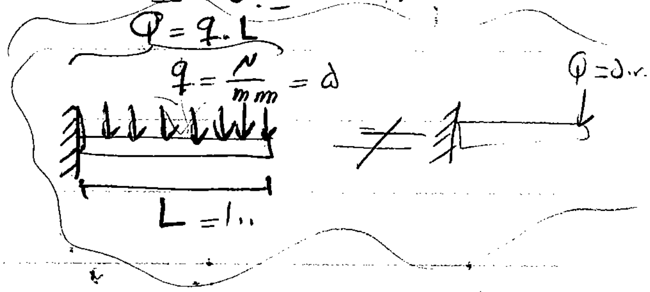
یعنی هر 1mm چقدر گشتاور تحمل می‌کند

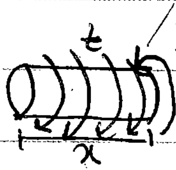
$t = \frac{N.mm}{mm}$

** ـ حالت سوم گشتاور تدریجی تغییر کند (از همه مهم‌تر است):



شبیه ⟸





$T_x = t \cdot x$

$$\varphi = \frac{1}{GJ}\int_0^L T_x dx = \frac{1}{GJ}\int_0^L t \cdot x\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{t}{GJ}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{tL^2}{2GJ} = \boxed{\frac{T \cdot L}{2GJ}}$$

(یعنی: اگر میله‌ای را به طور گسترده بپیچانیم زاویه پیچشی آن برابر است با نصف حالتی که یک گشتاور در وسط میله داشته باشیم و بپیچانیم) چون

مثلاً دو تا فرمول:

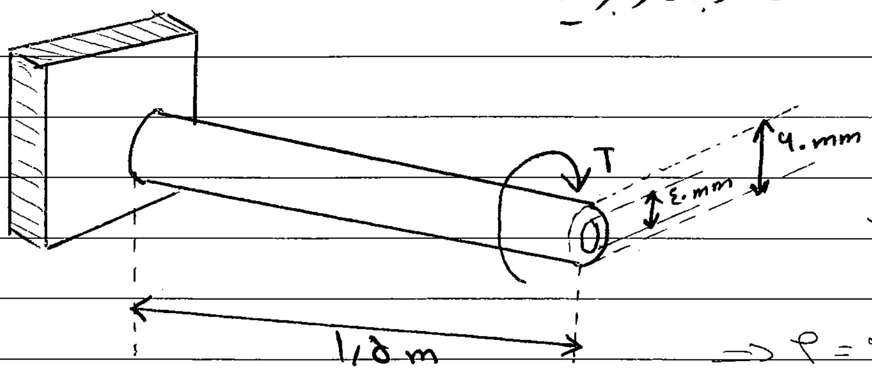
$$\left.\tau_{max} = \frac{Tr}{J} \quad \text{و} \quad \varphi = \frac{TL}{GJ}\right\}$$

که برای دایره هستند

مثال ۲.۳ ص ۹۲ :

چه گشتاوری باید بر انتهای میل گردان وارد کرد تا پیچشی برابر با °۲ ایجاد شود؟ برای مد

صلابت فولاد مقدار $G = 77 Gpa$ را به کار برید



$T = ?$

$\varphi = 2^\circ = \frac{\pi}{180} \times 2 = 0.03491 \Rightarrow \varphi = 34.9 \times 10^{-3} \ rad$

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} \Rightarrow T = \frac{\varphi G J}{L} = \frac{34.9 \times 10^{-3} \times 77 \times 10^{9} \times \frac{\pi}{2}\left((30 \times 10^{-3})^4 - (20 \times 10^{-3})^4\right)}{1.5} = 1.830 \ kN.m$$

* مثال ۳.۳ ص ۹۲ :

تنش برشی $70 Mpa$ بر سطح داخلی میل گردان های فولادی توخالی مثال قبل چه زاویه ی پیچشی را ایجاد می کند؟

چون تنش در سطح داخلی را داده، یعنی ما دیگر به سطح خارجی احتیاج نداریم. و همه جا سطح داخلی می گذاریم

$\varphi = ? \quad \tau = 70 \times 10^{6} pa \qquad \varphi = \frac{TL}{GJ} \Rightarrow \tau = \frac{TR}{J}$

$$T = \frac{\tau \cdot \frac{\pi}{2}(r^4)}{r} = \frac{70 \times 10^{6} \times \frac{\pi}{2}(20 \times 10^{-3})^4}{\underset{1319.468915}{20 \times 10^{-3}}} = 879.64 \ (N.m)$$

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{879.64 \times 1.5}{77 \times 10^{9} \times \frac{\pi}{2}(20 \times 10^{-3})^4} = 0.06818 = 68.18 \times 10^{-3} \ rad$$

$$\boxed{\varphi^\circ = 68.18 \times 10^{-3} \times \frac{180}{\pi} = 3.91^\circ}$$

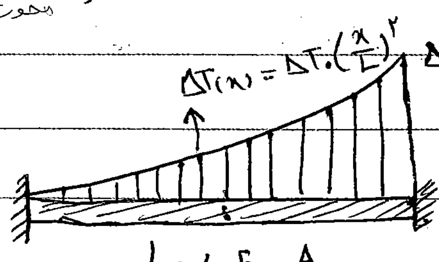
No.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

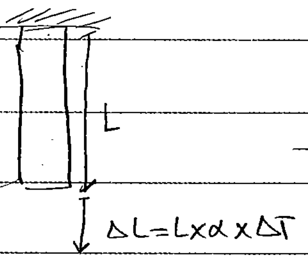
حل تمرین :   مقاومت ۱

$F_{محوری} = 0$



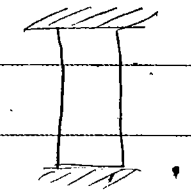
$\underbrace{\Delta L}_{تغییر طول} = L \alpha \Delta T$

تنش مقاومت در برابر تغییر شکل

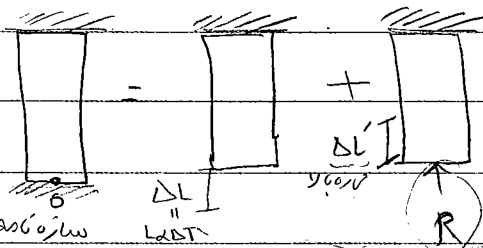


چون تکیه‌گاه سر آن بازاست پس $\sigma = 0$ تنش است چون هرچقدر دما به آن اعمال شود طول آن افزایش پیدا می‌کند ولی اگر آن را ببندیم در این صورت تنش داریم.

$\Delta L = L \times \alpha \times \Delta T$



تنش داریم.



سازه نامعین بود   ناشی از حرارت   تبدیل به سازه معین شد   چون نیرو فشاری است تنش منفی طول داریم

اصل برهم نهی

$\Delta L' = \frac{RL}{EA}$

چون کاهش طول است ⊖ می‌گیریم
چون افزایش طول است ⊕ می‌گیریم
طبق اصل سازگاری

$\Longrightarrow \Delta L + \Delta L' = 0$

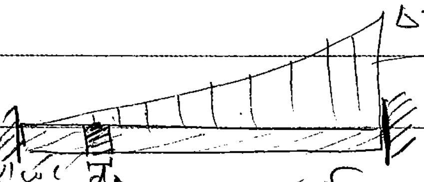
$L\alpha\Delta t - \frac{RL}{EA} = 0$

$\cancel{L}\alpha\Delta T = \frac{R\cancel{L}}{EA}$

$\Longrightarrow \boxed{R = E \cdot A \cdot \alpha \Delta T}$

$\sigma = \frac{E \cdot \cancel{A} \cdot \alpha \Delta T}{\cancel{A}} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \Longleftarrow \sigma = \frac{P}{A}$ اگر تنش را می‌خواست با توجه به اینکه

اگر نیروی داخلی را هم خواست هم همان R که بدست آوردیم می‌شد.



چون دما به صورت متغیر است تغییر طول به راحتی بدست نمی‌آید تا تغییر طول یک جزء dx آن را در نظر می‌گیریم که مثل مثال قبل است

یک المان از آن را

حل مسئله :

$\underbrace{\Delta_{dx}}_{تغییر طول المان} = \cancel{L}_{dx} \times \alpha \cdot \Delta T = dx \times \alpha \times \Delta T$ انتگرال می‌گیریم

$\underbrace{\Delta}_{تغییر طول کل میله ناشی از دما} = \int_0^L \alpha \Delta T dx = \int_0^L \alpha \left(\Delta T_0 \frac{(x)^2}{L^2}\right) dx = \frac{RL}{EA} \Longrightarrow \frac{\alpha \Delta T_0}{L^2} \int_0^L x^2 dx = \frac{RL}{E}$

$\Longrightarrow R = \frac{E \times \alpha \times A \times \Delta T_0}{3}$, $\sigma = \frac{E\alpha\Delta T_0}{3}$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

خیلی مهم (امتحانی)

** مثال: در شکل مقابل میله‌ی وسط را کشیده و به وسط قطعه‌ی (میله‌ی) صلب AB (نقطه‌ی C) متصل می‌کنیم سپس ۳ میله را به اندازه‌ی $\Delta T = 50^\circ C$ گرم می‌کنیم، تنش در ۳ میله را بدست آورید.

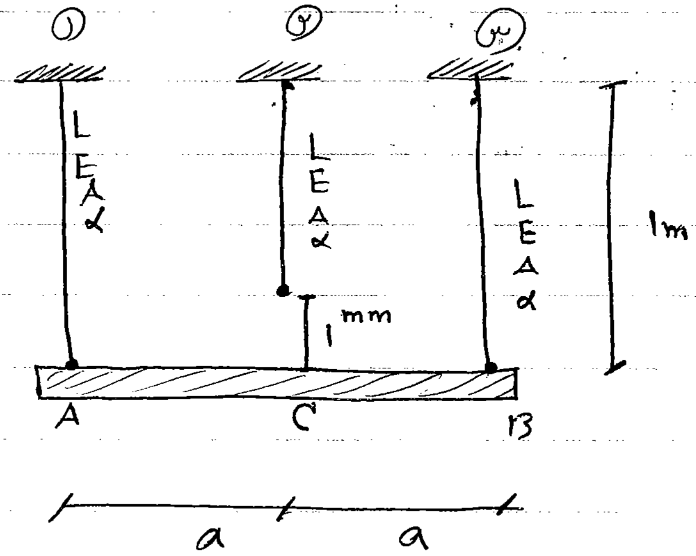
جدول الاستیسیته

$$E = 2\times10^{5}\ \left(\frac{N}{mm^2}\right)$$

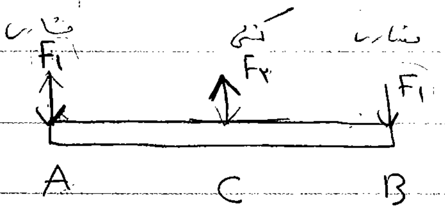
$$A = 300\ mm^2$$

$$\alpha = 1.2\times10^{-5}\ \frac{1}{C^\circ}$$

$$L = 1m$$



وقتی میله‌ی وسط کشیده می‌شود میله‌های کناری فشرده می‌شوند. یعنی در میله‌ی ۱ و ۳ تنش فشاری داریم و در میله‌ی ۲ تنش کششی داریم.



سه تا نیرو و سه تا مجهول داریم، و چون مطلق استاتیک می‌دانیم اگر از نقطه‌ی وسط (C) گشتاور بگیریم آنگاه $F_1 = F_3$ برابر می‌شوند که ما F_1 می‌نامیم، پس کلاً دو نیروی مجهول داریم.

افزایش طول میله‌ی میانی + کاهش طول میله‌های کناری $= 1^{mm}$

تعادل در راستای قائم: $F_2 - 2F_1 = 0 \Longrightarrow F_2 = 2F_1$

افزایش طول میله‌ی میانی $= L\alpha\Delta T + \dfrac{2F_1L}{EA}$

کاهش طول میله‌های کناری $= L\alpha\Delta T - \dfrac{F_1L}{EA}$ ← چون فشاری است برای میله‌ی کناری منفی

$$\Longrightarrow \left(L\alpha\Delta T + \frac{2F_1L}{EA}\right) + \left(L\alpha\Delta T - \frac{F_1L}{EA}\right) = 1$$

$$\Longrightarrow F_1 = \frac{\overset{2\times10^5}{E}\times \overset{300}{A}\times 1}{3\underset{1000\,mm}{L}} = \boxed{20000\ (N)} = 20\,kN$$

$$\boxed{F_2 = 40000} = 40\,kN$$

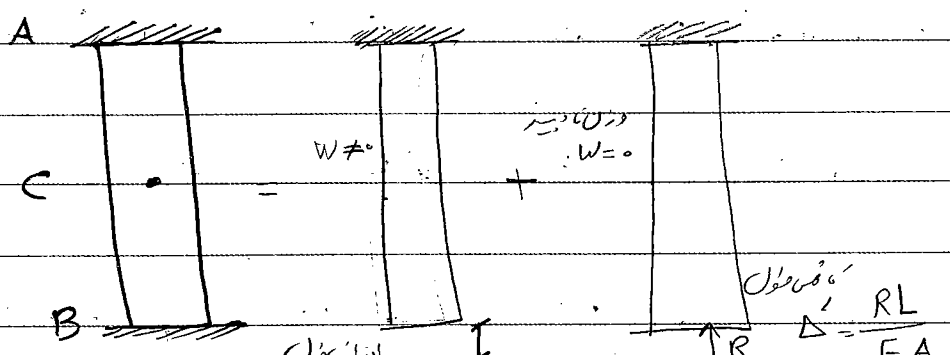
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$\sigma_{①} = \frac{F_1}{A} = \frac{۲۰۰۰}{۳۰۰}$$

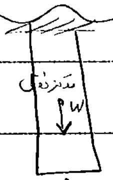
$$\sigma_{②} = \frac{۴۰۰۰}{۳۰۰} \qquad \sigma_{③} = \frac{۲۰۰۰۰}{۳۰۰}$$

مثال: میله‌ای با مشخصات داده شده (E و A و L و W «وزن میله») مطابق شکل به دو تکیه‌گاه صلب A و B متصل شده است. تنش را در نقاط A و B و C (C وسط میله) تعیین نمایید.



افزایش طول $\Delta = \dfrac{w(\frac{L}{2})}{EA}$ کاهش طول $\Delta' = \dfrac{RL}{EA}$

نکته:

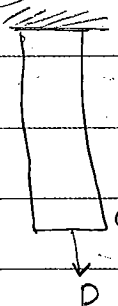


$$\Delta L = \frac{W \times \frac{L}{2}}{EA}$$

تغییر طول میله تحت تأثیر وزن

وقتی وزن ناچیز نباشد وزن را باید در مرکز ثقل آن قرار داد که در این صورت L تبدیل به $\frac{L}{2}$ می‌شود.

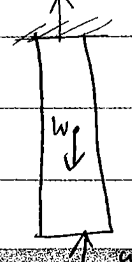
اما



$$\Delta L = \frac{PL}{EA}$$

تغییر طول میله تحت نیروی خارجی

معادله سازگاری: $|\Delta| = |\Delta'| \Longrightarrow \dfrac{wL}{2EA} = \dfrac{RL}{EA} \Longrightarrow \boxed{R = \dfrac{w}{2}}$



$R_A = \dfrac{w}{2} \longrightarrow \boxed{\sigma_A = \dfrac{w}{2A}}$

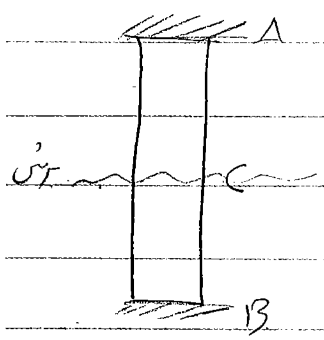
$R_B = \dfrac{w}{2} \longrightarrow \boxed{\sigma_B = \dfrac{w}{2A}}$

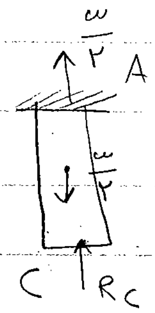
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

تنش در نقطه‌ی C :

در هر نقطه‌ای تنش می‌خواهیم باید برش بزنیم.

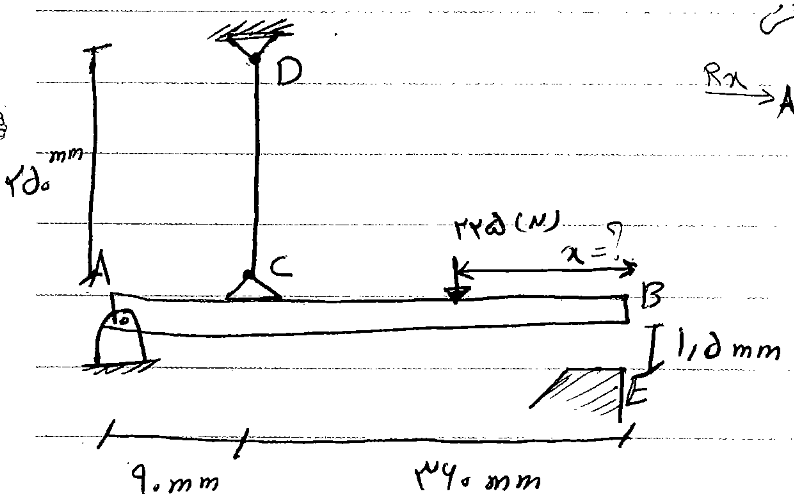


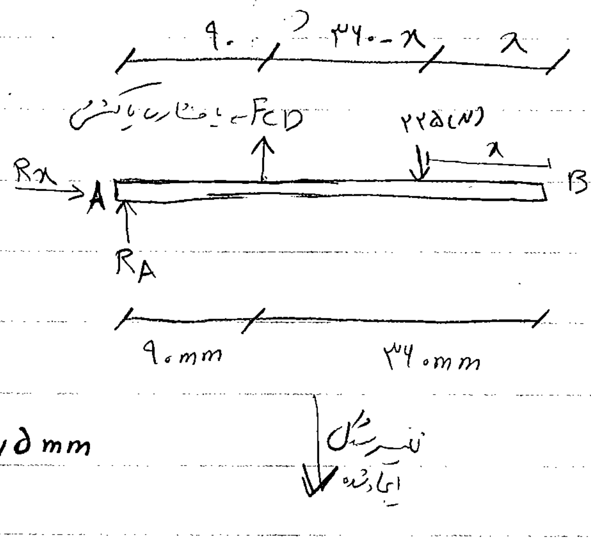


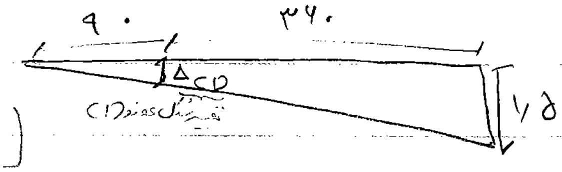
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{R_C = 0} \rightarrow \boxed{\sigma_C = 0}$

مثال: طول سیم فولادی CD به قطر 2mm طوری تنظیم شده است بدون اینکه باری بر آن وارد شود بین نقطه‌ی B (انتهای تیر صلب AB) و تکیه‌گاه E فاصله‌ی 1.5mm وجود داشته باشد. با دانستن E = 200 GPa برای سیم فولادی مشخص نمایید در چه نقطه‌ای بار 225(N) را باید بر تیر وارد کرد تا بین نقاط B و E تماس حاصل شود؟

در محل تماس B و E هم شروع عکس‌العمل نداریم چون فقط در حد تماس است







تشابه مثلث (تشابه دو مثلث): $\frac{\Delta}{1.5} = \frac{90}{360} \Rightarrow \boxed{\Delta = 0.3\,mm}$

$\Delta_{CD} = \frac{F_{CD}L}{EA} \Rightarrow 10^{-3}\times 0.3 = \frac{F_{CD}\times 250\times 10^{-3}}{200\times 10^{9}\times \pi (10^{-3})^2} \Rightarrow \boxed{F_{CD} = 754\,N}$

قطر = 2mm
شعاع = 1mm

جهت F_{CD} را درست فرض کردیم (+) درآمده.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

اگر حول نقطه A گشتاور بگیریم x بدست می‌آید:

$\sum M_A = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 148.4\,mm}$

مثال: صفحه‌ای آلومینیومی به ابعاد $300_{mm} \times 150_{mm} \times 20\,mm$ ~~20mm~~ مطابق شکل تحت تنش

$\sigma_x = 120\,MPa$ و $\sigma_y = -90\,MPa$ واقع شده است درصورتی که داشته باشیم

$E = 7\times10^4\,MPa$

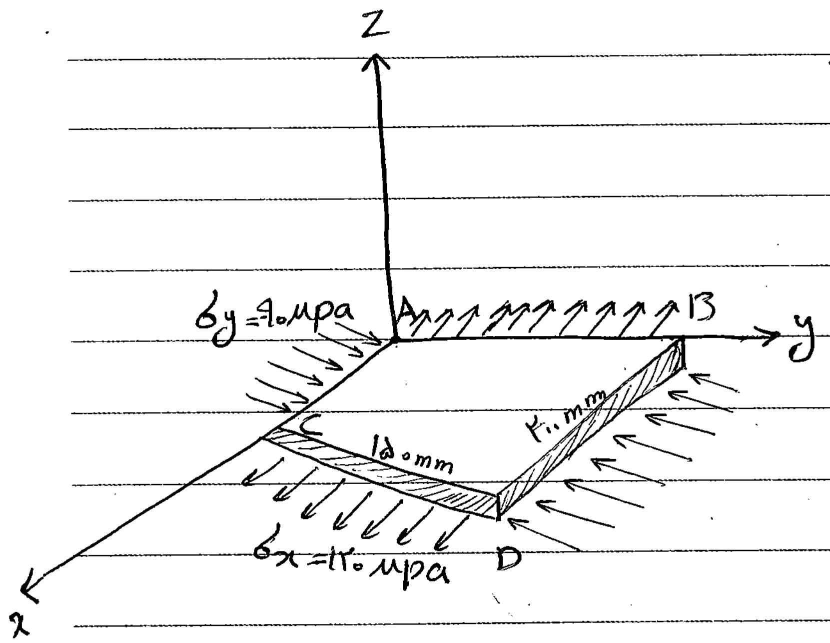
$\nu = \frac{1}{3}$ ضریب پواسون

پس از اعمال تنش‌های فوق مطلوب است:

الف) طول قطر AC

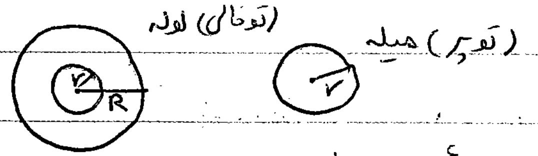
ب) ضخامت صفحه

ج) حجم صفحه



یادآوری: فقط برای مقاطع مدور:

$$\tau = \frac{Tr}{J} \quad و \quad \varphi = \frac{TL}{GJ}$$



$J = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$ $\quad$ $J = \frac{\pi}{2} r^4$ ← این فرمول ها چه جداره نازک باشد
چه نباشد کاربرد دارد

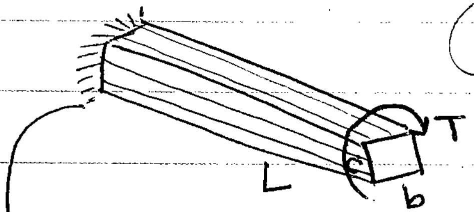
$$\tau_{max} = \frac{TR}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \qquad \tau_{max} = \frac{T}{\frac{\pi}{2} r^3}$$

$$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \qquad \varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2} r^4}$$

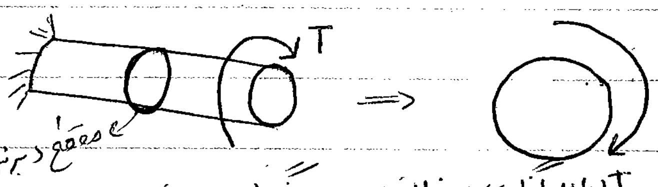
پیچش مقاطع مستطیلی توپر: (یعنی میله‌ای که مقطع آن مستطیل است)

* b>c حتما باید

b = طول مقطع مستطیلی شکل
c = عرض مقطع
L = طول میله

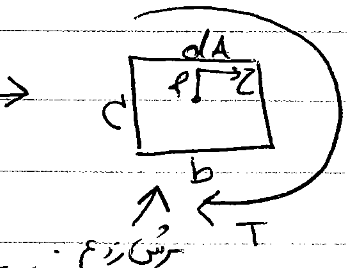


مثلا برای دایره:



$T = \int$

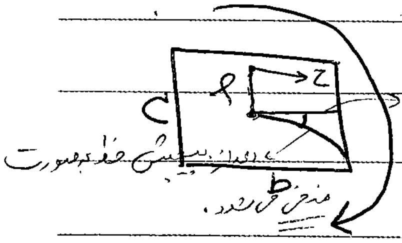
T باید گشتاوری در خلاف جهت گشتاور اصلی ایجاد کنیم

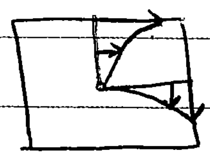


$$\boxed{T = \int \rho \tau dA}$$

* این قانون که ادعا می‌کند بعد از گشتاور خطوط موازی می‌مانند
فقط برای دایره صادق است *

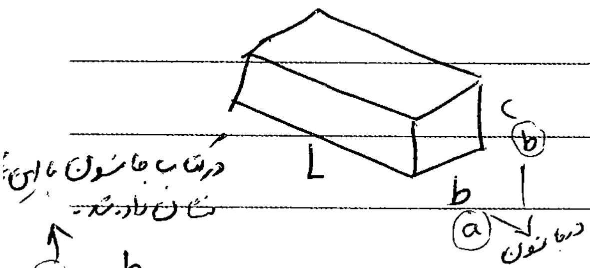
یعنی در این جا برای مستطیل خطوط موازی که روی مستطیل توپر کشیده شده اگر تحت گشتاور T قرار
بگیرد خطوط آن موازی نمی‌مانند





توزیع تنش به این صورت است.

در مقطع مستطیلی اگر فرض کنیم ابعاد مقطع b و c باشد و طول L باشد تحت پیچش قرار بگیرد در آن گاه:



$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2}$$ اثباتش گفته نمی‌شود

$$\varphi = \frac{TL}{G \beta b c^3}$$ اثباتش گفته نمی‌شود

$\frac{a}{b}$ یا $\frac{b}{c}$	۱	۲	۳	......	۱۰	>۱۰
C_1 α	۰/۲۰۸	۰/۲۱۹			0.۳۱۲	0.333
C_2 β	۰/۱۴۶				0.۳۱۲	0.333

ماکس تبدیل به ... شده

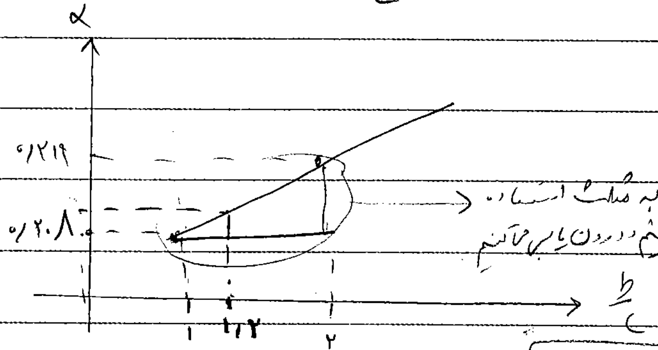
α و β را باید از جدول بیابید

باید دقت کنیم α و β به $\frac{b}{c}$ بستگی دارد.

(α و β داده می‌شود یا از طریق جدول داده می‌شود)

if $\frac{b}{c} = 1$ $\xrightarrow{\text{یعنی}}$ مقطع مربع است

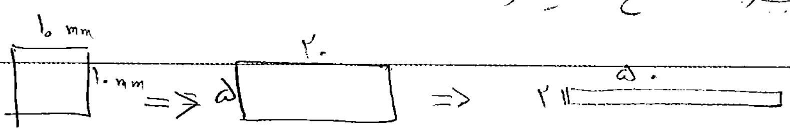
درون یابی:



از روش به مثلث استفاده می‌کنیم و درون یابی می‌کنیم

$\boxed{\text{بهترین مقطع مستطیلی مربع است. یعنی } \frac{b}{c} = 1}$ *

هر چه نسبت $\frac{b}{c}$ بیشتر باشد مقطع ضعیف‌تر است.



$\frac{b}{c} = 1$ مثلا

راحت‌تر از دومی پیچش می‌آید
$\frac{b}{c} = 4$

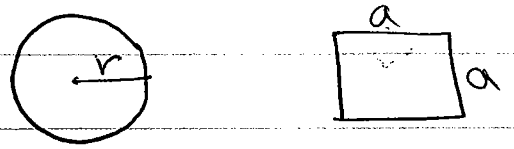
راحت‌تر از همه می‌پیچد.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

سؤال امتحانی: میله‌ی توپر به شعاع r (سؤال مفهومی)

مربع به اضلاع a



$$\tau_{max} = \frac{T}{\frac{\pi}{2} r^3} < \tau_{مجاز} \xrightarrow{مقایسه} \tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2} = \frac{T}{0.208 a^3} < \tau_{مجاز}$$

$$\varphi = \frac{TL}{G \frac{\pi}{2} r^4} \xrightarrow{مقایسه} \varphi = \frac{TL}{G \beta b c^3} = \frac{TL}{G (0.1406) a^4}$$

الف) درصورتیکه جنس و مساحت یکسان باشد ? باید نسبت گشتاور مجاز را پیدا کنیم

وقتی جنس‌ها برابرند یعنی G و وزن مخصوص و τ مجاز برابرند

$$\frac{T_{1\,مجاز}}{T_{2\,مجاز}} = ?$$ نسبت ظرفیت باربری

چون مساحت یکسان است پس داریم $\pi r^2 = a^2$ باید r^3 و a^3 را پیدا کنیم

ادامش را به توان $\frac{3}{2}$ می‌رسانیم $\pi\sqrt{\pi} r^3 = a^3$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\tau_{مجاز} \times \frac{\pi}{2} r^3}{\tau_{مجاز} \times (0.208) a^3} = \frac{\frac{\pi}{2} r^3}{(0.208)(\pi\sqrt{\pi} r^3)} = 1.356 > 1$$

دایره از مربع ۳۶٪ قوی‌تر است

یعنی یک میله‌ی دایره‌ای از میله‌ی مربع شکل گشتاور بیشتری تحمل می‌کند

ب) درصورتیکه طول یکسان باشد و گشتاور پیچشی یکسان تحمل کند (یعنی علاوه بر موارد فوق) میخواهیم ببینیم کدام φ کمتری دارد

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = ?$$ باید که نسبت را پیدا کنیم

مساحت یکسان: $(\pi r^2 = a^2)^2 \Rightarrow \pi^2 r^4 = a^4$

$$\frac{\varphi_{1\,دایره}}{\varphi_{2\,مربع}} = \frac{\frac{\cancel{TL}}{\cancel{G}\frac{\pi}{2} r^4}}{\frac{\cancel{TL}}{\cancel{G}(0.1406) a^4}} = 0.88 < 1$$

دایره از مربع ۱۲٪ کمتر می‌پیچد

یعنی دایره مناسب‌تر است (کمتر در اثر گشتاور می‌پیچد)

به طور کلی در n ضلعی هرچه تعداد n بیشتر باشد بهتر است پس با فرض جنس و مساحت یکسان بهترین دایره است (چون n=∞) و بدترین مثلث است

از نظر ظرفیت باربری

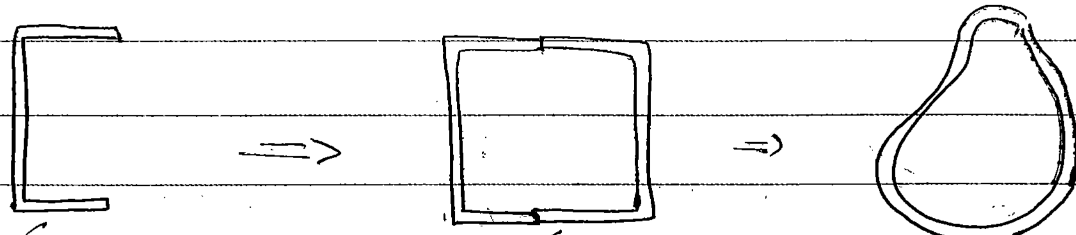
هرچه T بزرگتر و φ کمتر باشد مقطع بهتر است

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

بیچش مقاطع جدار نازک بسته [جدار نازک تو خالی]:

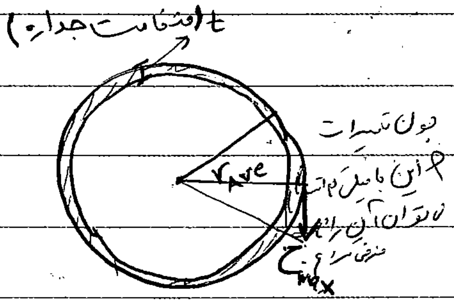
ضخامت جداره کم باشد.



جدار نازک باز ⇐ جدار نازک بسته ⇐ جدار نازک بسته

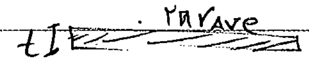
این نوع مقاطع به ۲ دسته تقسیم می‌شوند: مقاطع مدور _ مقاطع کلی

بیچش مقاطع مدور جدار نازک بسته:



$$J=\int \underbrace{\rho}_{r_{Ave}}{}^2 dA \simeq r_{Ave}^2 \times A = r_{Ave}^2\times(2\pi r_{Ave}\times t)=2\pi r_{Ave}^3 t$$

فرمول



چون را برابر است پس تنش برابر است $\Rightarrow \tau_{max}=\frac{T r_{Ave}}{J}=\frac{T r_{Ave}}{2\pi r_{Ave}^3\times t}=\frac{T}{2\pi r_{Ave}^3 t}\le \tau_{مجاز}$

کنترل:

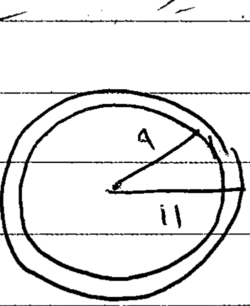
تنش

$$\boxed{\tau_{max}=\frac{T}{2\pi r_{Ave}^2\times t}}$$

برای جدار نازک

اگر مقاطع دایره‌ای و ... دارند نباید از این فرمول استفاده کرد. چون دیگر جدار نازک نیست

مثلاً:



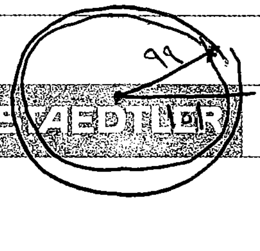
$J_{دقیق}=\frac{\pi}{2}(11^4-9^4)$

$J_{تقریبی}=2\pi(\underbrace{10}_{r_{Ave}})^3\times 2$

نکته مهم است:

پس: if $\frac{r_{Ave}}{t}\ge 10$ یا $\frac{t}{r_{Ave}}\le\frac{1}{10}$

آن گاه جداره نازک است



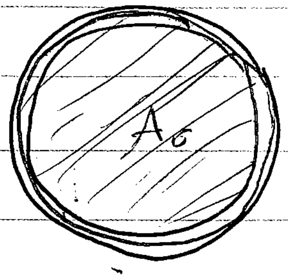
$J_{دقیق}=\frac{\pi}{2}(101^4-99^4)$

$J_{تقریبی}=2\pi(100)^3\times 2$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

پیچش مقاطع کلی جدار نازک بسته:

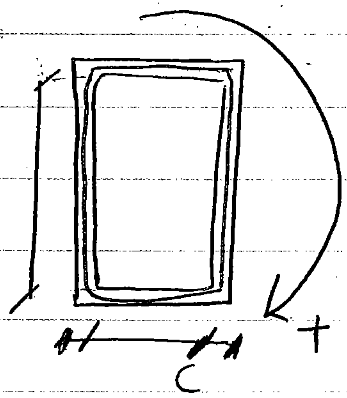


$$A_0 = \pi r_{Ave}^2$$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T}{2A_0 t_{min}}}$$ فرمول کلی

A_0 می‌تواند هر چیزی باشد

فرمول خیلی کاربردی است برای جدار نازک

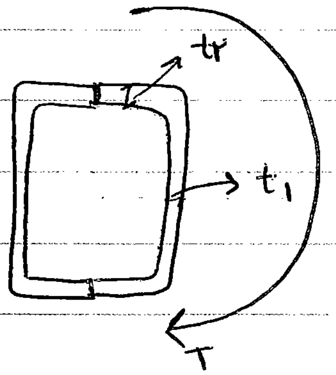


$$\tau_{max} = \frac{T}{2\underbrace{bc}_{A_0}t} < \tau_{مجاز}$$

$A_0 = b \times c$

$$\varphi = \frac{\tau_{max}\,[2(b+c)] \times L}{2bcG}$$

← با توجه به فرمول مخرج میده



برای مقاطع مدور:

می‌دانیم: $\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{\tau_{max} \times 2\pi r_{Ave}^2\, t \times L}{G \times 2\pi r_{Ave}^3\, t} =$

$$\Longrightarrow \boxed{\varphi = \frac{\tau_{max} \times L}{G \times r_{Ave}}}$$

برای مقاطع مدور جدار نازک

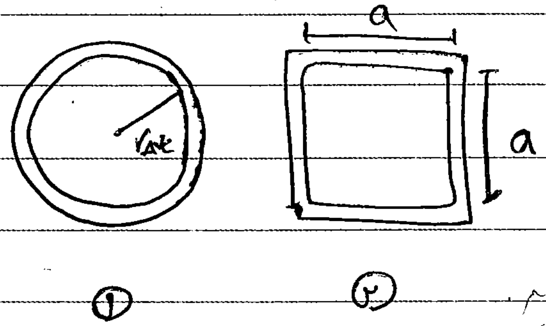
برای مقاطع کلی شد: $t \times L$ را از صورت و مخرج باهم ساده می‌کنیم.

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{\tau_{max} \times 2\pi r_{ave}^2 t \times L}{G \times 2\pi r_{ave}^3 t} =$$

$$= \frac{\overbrace{2\pi r_{ave}}^{S=\text{محیط}} \times \tau_{max} \times L}{\underbrace{2\pi r_{ave}^2}_{\text{مساحت}=A_0} \times G} \Longrightarrow \boxed{\varphi = \frac{\tau_{max} \cdot S \cdot L}{2A_0 \cdot G}}$$

فرمول برای مقاطع کلی جدار نازک

مثال: سؤال امتحانی:



الف) درصورتیکه مساحت (t, s) وضخامت یکسان باشد. یعنی A_0 ثابت [illegible]

$$\frac{T_1 \ \text{دایره}}{T_2 \ \text{مربع}} = ? = \frac{\tau \times 2\pi r_{ave}^2 t}{\tau \times 4a^2 \times t} = \frac{4}{\pi} = 1.27 > 1$$

محیط یکسان: $2\pi r = 4a$، $\pi r = 2a$، $\pi^2 r^2 = 4a^2$، پس $a^2 = \frac{\pi^2 r^2}{4}$

پس در حالت یکسان ظرفیت تحمل دایره از مربع بهتر است.

ب) درصورتیکه طول یکسان و ضخامت یکسان قرار گیرد.

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = ?$$

از رابطه $\frac{TL}{GJ}$ استفاده نکردیم

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\frac{\tau_1 S L}{2A_{01} G}}{\frac{\tau_2 S L}{2A_{02} G}} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \times \frac{(A_{02})}{(A_{01})} = \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16} = 0.61 < 1$$

$$\frac{(A_0)_2}{(A_0)_1} = \frac{a^2}{\pi r_{ave}^2} = \frac{\frac{\pi^2 r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{\pi}{4}$$

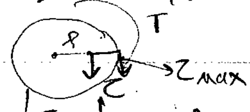
$$\frac{(\tau_1)_{max}}{(\tau_2)_{max}} = \frac{\frac{T}{2A_{01} t}}{\frac{T}{2A_{02} t}} = \frac{\pi}{4}$$

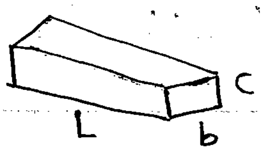
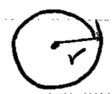
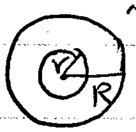
(دراین حالت هم برای [illegible] دایره از مربع بهتر است)

خلاصه :

در این حالت فرا نیستیم تنش را در یک نقطه دلخواه که در فاصله ρ از مرکز قرار دارد بدست آورید

$\tau = \frac{T\rho}{J}$ تنش در هر نقطه دلخواه

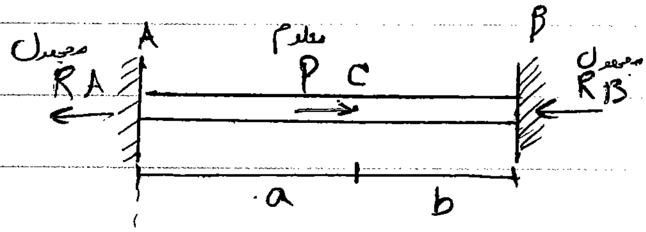


پیچش مقاطع مدور		پیچش مقاطع مستطیل توپر	پیچش مقاطع جدار نازک بسته (جدار نازک توخالی)	
			مدور	کلی
$\tau_{max} = \frac{Tr}{J}$ و $\varphi = \frac{TL}{GJ}$				
میله 	لوله 			
$J = \frac{\pi}{2} r^4$	$J = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$	$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2}$	$\tau_{max} = \frac{T}{2\pi r_{Ave}^2 t}$	$\tau_{max} = \frac{T}{2A_0 t_{min}}$
$\tau_{max} = \frac{T}{\frac{\pi}{2} r^3}$	$\tau_{max} = \frac{TR}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)}$	$\varphi = \frac{TL}{G\beta b c^3}$	$\varphi = \frac{\tau_{max} \times L}{G \times r_{Ave}}$	$\varphi = \frac{\tau_{max} \cdot s \cdot L}{2A_0 G}$
$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2} r^4}$	$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)}$			

حل مسائل نامعین : تعداد مجهولات > تعداد معادلات = نامعین از نظر استاتیکی

در میله‌ی دو سر گیردار :

یادآوری :



$$\begin{cases} R_A = P\frac{b}{L} \\ R_B = P\frac{a}{L} \end{cases}$$

اگر P در وسط وارد شود در حالت خاص $\Rightarrow R_A = R_B$

SUBJECT :

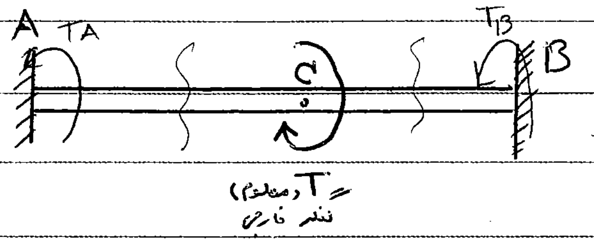
Year ( ) Month ( ) Date ( )

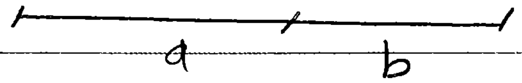
حل مسائل نامعین :

مثال : میله‌ی دو سر گیردار

جهت نگاه

$T_A = ? \quad T_B = ?$





وقتی T به آن وارد شود عکس‌العمل T_A و T_B به وجود می‌آیند که با آن مقاومت کنند.

معادله‌ی تعادل : $\sum M_x = 0 \Rightarrow \boxed{T_A + T_B = T_{\text{معلوم}}}$

معادله‌ی سازگاری تغییر شکل : $\varphi_{AB} = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_{AC} + \varphi_{CB} = 0}$ معادله‌ی سازگاری

$\varphi_{AC} = \frac{TL}{GJ} \qquad \varphi_{CB} = \frac{TL}{GJ}$

یعنی بین C و A مقطع بزنیم گشتاور برابر با T_A است. یعنی C تا B برش بزنیم

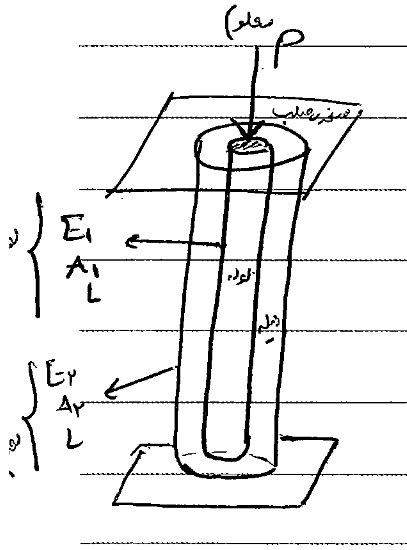
$$\frac{T_A\cdot a}{G\cdot J} + \frac{(T_A - T)\cdot b}{GJ} = 0$$

معادله‌ی یک مجهولی (T_A مجهول است) T معلوم است ،

$$T_A = T\frac{b}{L} \qquad T_B = T\frac{a}{L}$$

گشتاور به هر میله که نزدیک‌تر باشد سهم آن میله که از لحاظ درگیری و وابستگی بیشتر می‌شود.

مثال : برای ~~مقطع~~ ... داریم :



معادله‌ی تعادل : $P_1 + P_2 = P$

معادله‌ی سازگاری : $\delta_1 = \delta_2$

تغییر طول

صلبیت محوری

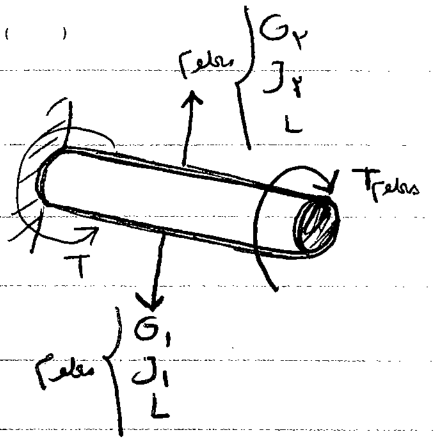
$$P_1 = P\frac{E_1\cdot A_1}{\sum EA}$$

$$P_2 = P\frac{E_2\cdot A_2}{\sum EA}$$

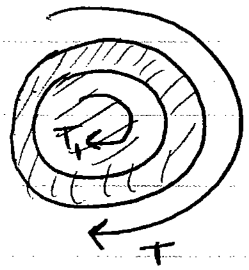
حال می‌خواهیم این میله و لوله را با هم بپیچانیم (یعنی میله و لوله با هم درگیر باشند) تغییر شکل صفحه بعد.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



مقطع مرکب است یعنی میله و لوله با هم ثابت هستند (روی هم لیپ هستند) فرض کنیم تحت پیچش قرار گیرد.



معادله‌ی تعادل : $T_1 + T_2 = \overset{\text{معلوم}}{T}$

معادله دو مجهول پس معادله‌ی سازگاری می‌خواهد،

معادله‌ی سازگاری : $\varphi_1 = \varphi_2$

$$\frac{T_1 \cancel{L}}{G_1 J_1} = \frac{T_2 \cancel{L}}{G_2 J_2} \Longrightarrow$$ از این رابطه T_1 برحسب T_2 بدست می‌آید یعنی ...

درصد از T است

و اگر T_1 را در معادله‌ی تعادل قرار دهیم از آن T_2 بدست می‌آید

$$\begin{cases} T_1 = T \dfrac{G_1 J_1}{\sum G J} \\ T_2 = T \dfrac{G_2 J_2}{\sum G J} \end{cases} \Longrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\overset{\text{صلبیت پیچشی}}{G_1 J_1}}{\underset{\text{صلبیت پیچشی}}{G_2 J_2}}$$

صلبیت پیچشی

نکته : σ ؟ ε ؟ ← طراحی

تحلیل <
- معین ← استاتیک ← معادلات تعادل
- نامعین ← مقاومت ← معادلات سازگاری

تعیین شده‌ها: دیگرها با ...

بارگذاری: تعیین شده‌های خارجی

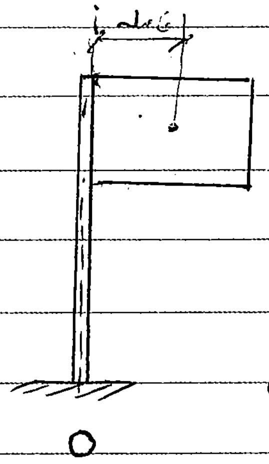
$$\begin{cases} (\overset{\text{تنش}}{\tau_1})_{max} = \dfrac{T_1 \overset{\text{شعاع میله}}{r_1}}{J_1} \leq \tau_{\text{مجاز}1} \qquad J_1 \Rightarrow \dfrac{\pi r^4}{2} \\ (\tau_2)_{max} = \dfrac{T_2 \overset{\text{شعاع خارجی}}{r_2}}{J_2} \leq \tau_{\text{مجاز}2} \qquad J_2 = \dfrac{\pi}{2}(R^4 - r^4) \end{cases}$$

نکته : هر مسئله‌ی نامعین را اول باید نامعینی‌اش را از بین ببریم یعنی معادله‌ی سازگاری را می‌خواهد

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

سؤال امتحان : یک تابلوی تبلیغاتی :



فشار باد داده شده است $\frac{N}{mm^2}$ یا $\frac{N}{km^2}$

مساحت تابلو $\times$ فشار باد = نیرو ← این نیرو باعث گشتاور پیچشی می‌شود.

این نیرو به ما کمک می‌کند که درس تابلو وارد می‌شود.

فاصله $\times$ نیرو = گشتاور پیچشی

طول محور لوله

استاتیک: مساحت تابلو $\times$ فشار باد = F نیرو

T گشتاور $= F \times e$ فاصله نیرو

اگر جدار نازک نبود

$$\tau_{max} = \frac{TR}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \leq \tau_{مجاز}$$

$$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{}} \leq \varphi_{مجاز}$$

تبدیل درجه به رادیان

$3^\circ = \frac{\pi}{180} \times 3$

**

در تابلو زاویه پیچش از حدی بیشتر نباید بپیچد یعنی آن φ مجاز را به ما داده

نکته: لوله‌ها دو تا مجهول دارد یا R و r و یا r_{Ave} و t

تمام مسائل کدام یکی از ۴ حالت زیر است:

① یک معادله یک مجهول ⟨ $r_{Ave} = ?$ و t معلوم ؛ $t = ?$ r_{Ave} = معلوم — در ۲ تا کدام

② دو معادله دو مجهول $t = ?$ و $r_{Ave} = ?$

τ = مقدار = فرمول

ϕ = مقدار = فرمول

۲ معادله { τ از τ مجاز بیشتر نشود ؛ ϕ از ϕ مجاز بیشتر نشود

③ یک معادله دو مجهول ⟹ بی‌نهایت جواب دارد (در امتحان نمی‌آید)

④ دو معادله یک مجهول ⟹ r_{Ave} = معلوم دو جواب بدست می‌آید که این دو به هم نزدیک است

را انتخاب می‌کنیم ولی اگر جدار نازک باشد ۲ تا t بدست می‌آید و یا ۲ تا r_{Ave} بدست می‌آید که ما بزرگتر را باید در اینجا انتخاب کنیم.

ولی اگر شعاع خارجی‌ها بدست آمده باشد ما باید بزرگتر را انتخاب کنیم. یعنی شعاع داخلی را اگر بخواهیم باید شعاع داخلی کوچکتر را انتخاب کنیم

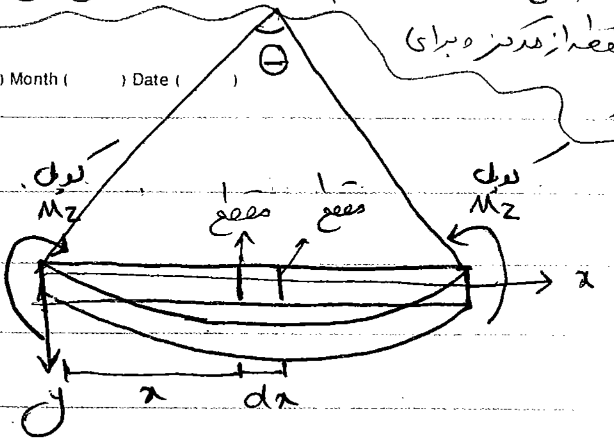
STAEDTLER

نکته: در بحث خمش بیشترین تنش در دورترین نقطه از تار خنثی اتفاق می افتد بطوری که روی تار خنثی تنش صفر است

اما در بحث پیچش برای مقاطع مدور بیشترین تنش در دورترین نقطه از مرکز و برای مقاطع مستطیلی در نزدیکترین نقطه به مرکز (بیشترین) اتفاق می افتد

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

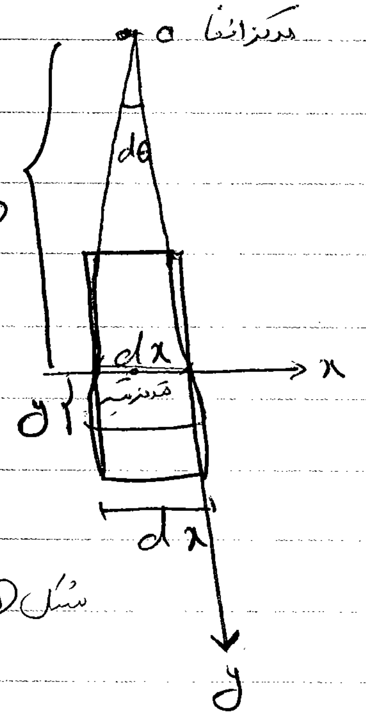


فصل ۶: خمش

وقتی تیر تغییر شکل می دهد انحنا پیدا می کند

در مرکز انحنا همه مقاطع را قطع می کنند

برای پیدا کردن مرکز انحنا به فاصله x یک مقطع می زنیم و مقطع دیگر به فاصله dx می زنیم این دو مقطع را امتداد می دهیم



شکل (1)

شعاع انحنا

ρ = فاصله مرکز انحنا تا مرکز تیر

$\Longrightarrow$ بعد از تغییر شکل طول در بالا از dx کمتر است و در پایین طول از dx بیشتر است و در واقع فقط وسط dx است.

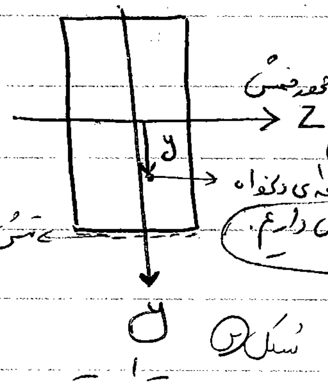
طبق شکل: $dx = \rho \, d\theta$

قبل از لنگر (شکل تیر خود کتابی)

بعد از لنگر (شکل تیر خود کار قمری)

با توجه به شکل (1)

مقطع تیر است (طول تیر نیست) که در این جا محور x دیده نمی شود: (برشی از طول تیر)



y زیر تار خنثی + است یعنی زیر تار خنثی افزایش طول داریم یعنی کشش است

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}} \quad (1)$$

← تنش در این جا max است

شکل (2)

مقطع تیر

یک نقطه ی دلخواه در این مقطع به فاصله ی y از محور ها در نظر می گیریم و هدف بدست آوردن تنش در این نقطه ی دلخواه است.

$\sigma = E\,\varepsilon$

تغییر طول نسبی (تغییر طول نسبی)

برای پیدا کردن تنش در این جا از قانون هوک استفاده می کنیم

جمع بندی

نکته: زیر تار خنثی ← $y > 0$ ← افزایش طول ← کشش ← کشیده شدن و ترک خوردن

بالای تار خنثی ← $y < 0$ ← کاهش طول ← فشار ← خطر کمانش خوردن

SUBJECT :

Year (　　) Month (　　) Date (　　)

طول اولیه تار $= dx = \rho\, d\theta$

$$\overset{dx}{}$$

طول ثانویه $= (\rho + y)\,d\theta = (1+\frac{y}{\rho})\,\rho\, d\theta = dx + \frac{y}{\rho}dx$

تغییر طول $= \delta = \frac{y}{\rho}dx$

تغییر طول نسبی $\varepsilon = \frac{\delta}{dx} = \frac{y}{\rho}$

نقطه‌ای که می‌خواهیم تنش در آن را بدست آوریم

فاصله‌ی عمودی دلخواه از تار خنثی

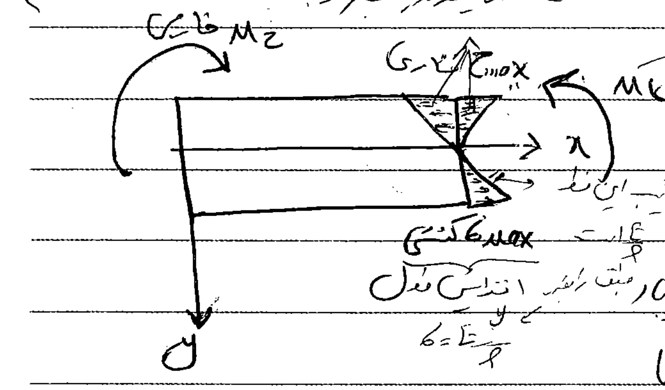
$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}$ پس: ① $\boxed{\varepsilon = \frac{y}{\rho}}$ و $\boxed{\sigma = E\frac{y}{\rho}}$ ②

ρ به سادگی از مسائل بدست می‌آید

علامت ε بستگی به y دارد (چون ρ همیشه + است) [زیر تار خنثی $y>0 \Rightarrow \varepsilon>0$ و برعکس]

در فرمول ① y و ε باهم به صورت خطی ارتباط دارند و (ε, σ) باهم رابطه‌ی خطی دارند

حالت ایجاد قوس با شکم رو به پایین (به صورت شکل می‌افتد)



(کوپل داخلی ناشی از تنش است) پس باید تنش وجود داشته باشد

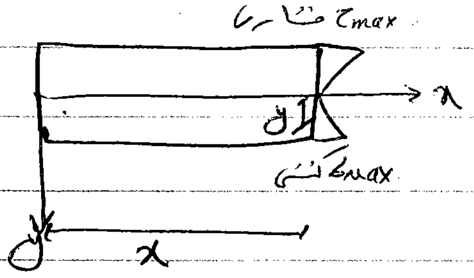
برآیند نیروهای کششی با برآیند نیروهای فشاری باید برابر شوند. نیروی فشاری بالا با هم یک کوپل ایجاد می‌کنند. حاصل $\frac{\sigma}{E}$ است، اندازه‌ی کوپل ساخته شده همان M داخلی است

(مقدار نیرویی که به سطح کششی وارد می‌شود باید با مقدار نیرویی که به سطح فشاری وارد می‌شود برابر باشد تا تعادل داشته باشد)

نکته: اگر شکل متقارن باشد تار خنثی از وسط شکل عبور می‌کند ولی اگر نامتقارن باشد باید مرکز سطح را بدست آوریم (مهم)

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



در معادله تعادل حل می‌کنیم.

اولین معادله تعادل $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$ یعنی نیروی خارجی در راستای x باید با نیروی داخلی در راستای x برابر شود
نیروی خارجی که نداریم یعنی صفر است
و برآیند نیروهای داخلی هم صفر می‌شود $\int \sigma . dA$

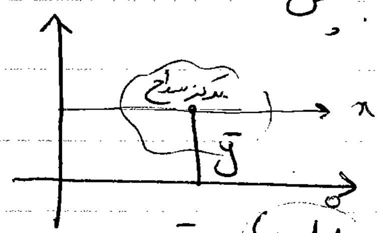
$$\Rightarrow 0 = \int_A \overbrace{\sigma dA}^{\text{نیرو}} = \int_A \frac{Ey}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \boxed{\int y dA = 0}$$

(4)

یعنی تار خنثی از مرکز سطح عبور می‌کند

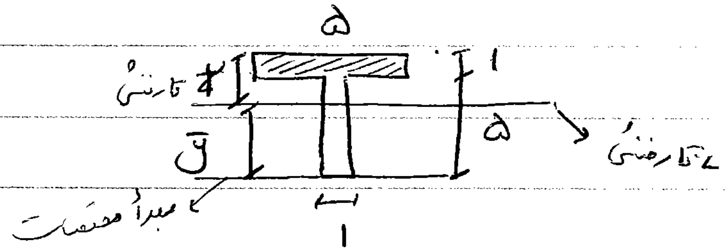
پس: $\boxed{\int y dA = 0}$

گشتاور اول سطح نسبت به محورها صفر است
یعنی مرکز سطح روی محورها قرار دارد.



$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} = 0$$

مثلاً: برای شکل زیر



$$\bar{y} = \frac{(5\times5.5)+(5\times2.5)}{10} = 4 \, cm$$

در مین معادله تعادل $\Sigma M_z = 0 \Rightarrow M_z = \int_A \underbrace{\underbrace{y}_{\text{فاصله}} \times \underbrace{\sigma dA}_{\text{نیرو}}}_{\text{گشتاور}} = \int_A y \left(E \frac{y}{\rho}\right) dA =$

گشتاور دوم نسبت به محورها که در این جا کوچ ها است (با توجه به تار خنثی)

$$\Rightarrow \boxed{M_z = \frac{E}{\rho} \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_z = \text{ممان اینرسی}}} \quad (5) \quad \text{یا} \quad \boxed{M_z = \frac{E I_z}{\rho}} \quad (5) \Rightarrow$$

STAEDTLER

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{\underbrace{EI}_{\text{صلبیت خمشی}}}} \quad (6)$$

SUBJECT :
Year ( ) Month ( ) Date ( )

فاصله نقطه مورد نظر از محور z ها (محور خنثی)

(۳) و (۴) $\Longrightarrow$ $\boxed{\sigma = \dfrac{M_z y}{I_z}}$ (۷)

تنش در هر نقطه ی دلخواه ناشی از خمش

مهمترین فرمول (که فرمول شماره ی 3 کاربرد ندارد چون ρ؟)

(۳): $\sigma = E\dfrac{y}{\rho}$

(۴): $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI}$

ممان اینرسی نسبت به محور خنثی می خواهد

تنش در هر نقطه ی دلخواه ناشی از پیچش $\tau = \dfrac{T\rho}{J}$

فاصله ی نقطه ی مورد نظر از مرکز (محور پیچشی)

ممان اینرسی نسبت به محور z ها (ممان اینرسی قطبی) (محور پیچشی)

$J = \int \rho^2 dA$

همان ρ_{max} است

$\tau_{max} = \dfrac{T_{max} \times r}{J}$

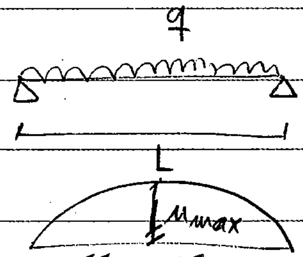
همان y_{max} است

$\sigma_{max} = \dfrac{M_{max} \cdot c}{I} < \sigma_{مجاز}$

این را min میخواهیم

صبر M_{max} را پیدا کنیم ؟؟

مثلا:



$M_{max} = \dfrac{qL^2}{8}$

** M_{max} را باید با رسم دیاگرام لنگر بدست آوریم **

صلبیت محوری EA $\Longrightarrow$ $\delta = \dfrac{PL}{EA}$ یادآوری:

صلبیت برشی GA

صلبیت پیچشی GJ $\Longrightarrow$ $\varphi = \dfrac{TL}{GJ}$

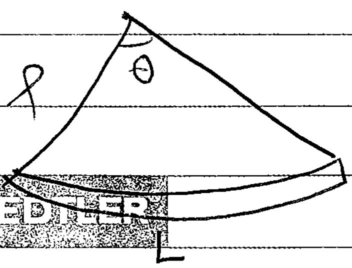
صلبیت خمشی EI $\Longrightarrow$ $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI}$

** آن چه که در این فرمول ها مهم است فاکتور هندسی آن هاست. اگر مقطع را بکشیم یا فشار دهیم یا برش بزنیم A (مساحت) مهم است و اگر مقطع را بپیچیم J مهم است و اگر خم شود I مهم است. **

از مقطعی که بخواهد در برابر خمش مقاوم شود باید I را زیاد کنیم که در این صورت ρ زیاد شود. هر چقدر I را زیاد کنیم تنش کمتر می شود.

$\sigma = \dfrac{Mc}{I}$ ، $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI}$

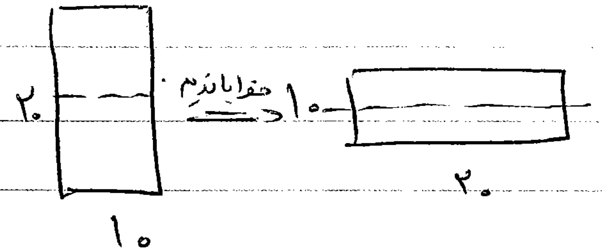
(هر چه قدر ρ بیشتر باشد یعنی کمتر خم شده است)



SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثلاً تیر چوبی با ابعاد ۱۰×۲۰ داریم می‌خواهیم آن را بخوابانیم.



$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{10(20)^3}{12} > I=\frac{20\times(10)^3}{12} \Rightarrow$$

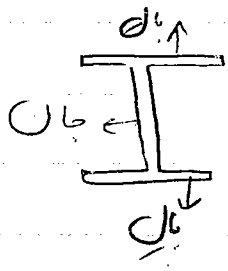
هر چه I بزرگتر باشد σ کمتر می‌شود و مقاوم‌تر می‌شود.

در خمش همیشه باید I را زیاد کنیم یعنی y را زیاد کنیم چون:

$$I=\int y^2\,dA$$

فاصله از محور خنثی

در تیر I شکل:



~~تا آنجا که می‌توانیم جان را نازک می‌گیریم~~ و

زیاد جان را نازک می‌گیریم و ارتفاع آن را هم افزایش می‌دهیم

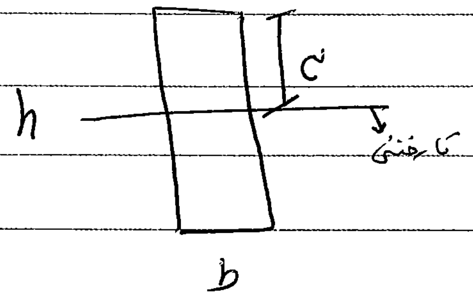
نکته: به نسبت $\frac{I}{c}$، S هم گفته می‌شود که مدول مقطع (اساس مقطع) نام دارد.

$$\frac{I}{c}=S \quad (cm^3 - mm^3)$$

مدول مقطع (اساس مقطع)

$$\boxed{\sigma_{max}=\frac{M_{max}\cdot c}{I}=\frac{M_{max}}{S}\le \sigma_{\text{مجاز}}}$$

۸ در واقع فرمول کلی‌تر است.



$$S=\frac{I}{c}=\frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}}=\frac{bh^2}{6}$$ حفظ شود

کنترل: $\sigma_{max\,موجود}=\dfrac{M_{max\,موجود}\times c}{I_{موجود}}=\dfrac{M_{max}}{S}\leq\sigma_{مجاز}$

اگر شکل متقارن بود باید $\sigma_{تنش}$ و $\sigma_{مجاز}$ را با هم نسبت بگیریم.

ظرفیت باری: $M_{مجاز}=\sigma_{مجاز}\times\dfrac{I_{موجود}}{c}=\sigma_{مجاز}\times S_{موجود}$

حداکثر (به سمت پایین)

در حقیقت برای طراحی ما I را می‌خواهیم

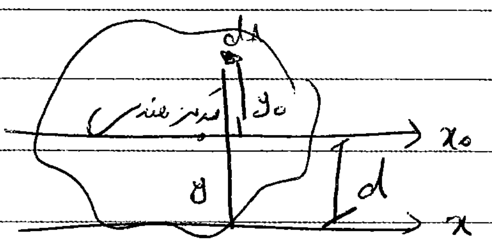
طراحی: $\cancel{I}$ $S_{لازم}=\dfrac{M_{max\,موجود}}{\sigma_{مجاز}}$

حداقل (به سمت بالا)

اما اگر I را می‌خواستیم آن گاه h هم مجهول بود پس در این جا در طراحی ما S را می‌خواهیم.

مقاطع ساده با بار مستطیل به $I=\dfrac{bh^3}{12}$ و $M_{max}=\dfrac{qL^2}{8}$ ، $S=\dfrac{bh^2}{6}$ است.

اما در مقاطع مرکب I را بیابید.



$I_{x_0}=$ معلوم $\quad I_x=$ مجهول

ممان اینرسی حول محور مرکزی سطح

$$\boxed{I_x=I_{x_0}+Ad^2}$$

اثبات:

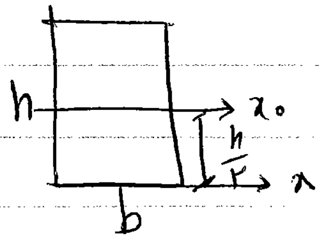
ممان استاتیک نسبت به سطح صفر

$$I_x=\int y^2\,dA=\int (y_0+d)^2\,dA=\underbrace{\int y_0^2\,dA}_{I_{x_0}}+\underbrace{d^2\int dA}_{Ad^2}+2d\cancel{\int y_0\,dA}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

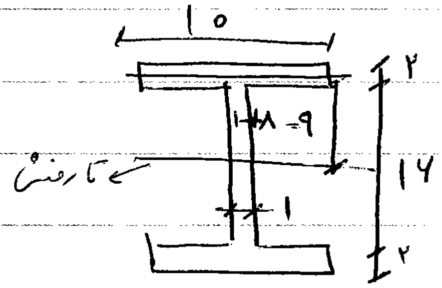
مثال:



$$I_x = \frac{bh^3}{12} + \overbrace{(bh)}^{A}\left(\frac{h}{2}\right)^{2} = \frac{bh^3}{3}$$

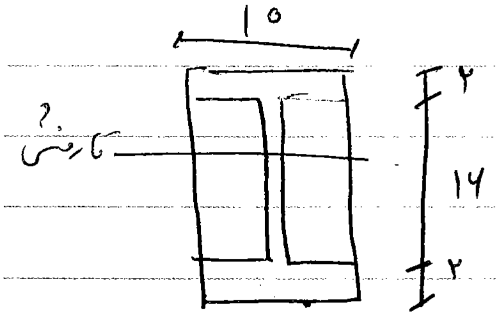
(دایره به درد پیچش می‌خورد اما مستطیل به درد خمش می‌خورد)

مثال ۲:

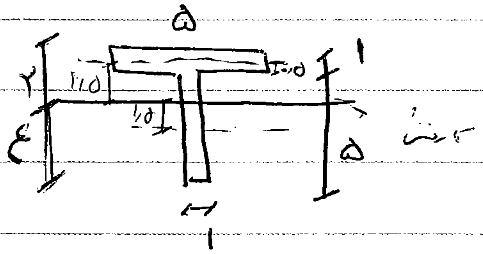


$$I_{\text{کل شکل}} = I_{\text{جان}} + 2I_{\text{بال}}$$

$$\left[\frac{1(14)^3}{12}\right] + 2\left[\frac{10(2)^3}{12} + (10\times 2)(9)^2\right]$$



$$I = \frac{10(20)^3}{12} - 2\left[\frac{4.5\,(14)^3}{12}\right] =$$

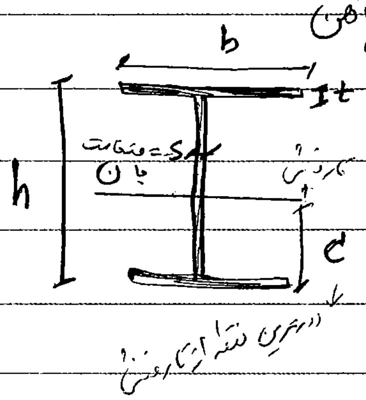


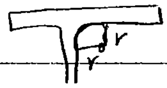
$$I = I_{\text{بال}} + I_{\text{جان}}$$

$$\left[\frac{5(2)^3}{12} + \underbrace{5(1.5)^2}_{Ad^2}\right] + \left[\frac{1(5)^3}{12} + 5(1.5)^2\right]$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



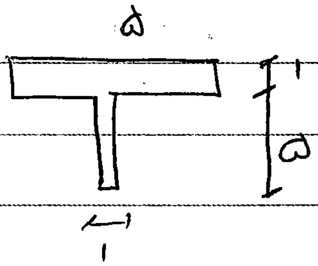


ارتفاع تیرآهن = نمره تیرآهن

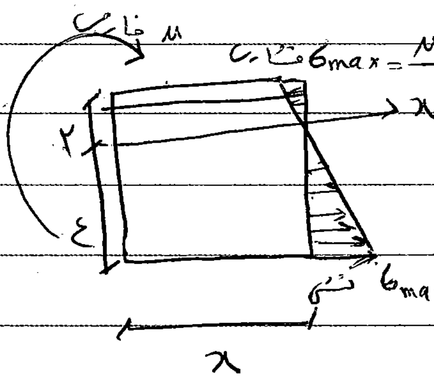
IPE	h	b	t	s	r	A	G	I	S		
۸۰											
۱۰۰											
۱۲۰											
۶۰۰											

(Column group labels: I, S — ممان اینرسی، اساس مقطع — under X; remaining columns under y.)

سومین مقطع، مقطع پروفیل های استاندارد (کارخانه‌ای)



مقطع نامتقارن

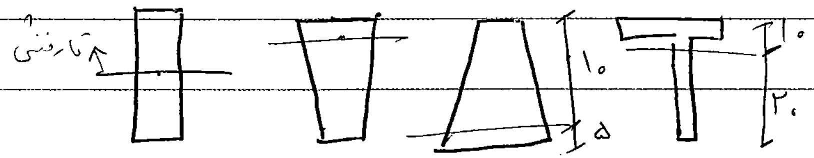


فشاری $\sigma_{max} = \frac{M\times 2}{I} = 30 \le \sigma$ مجاز فشاری مثلاً ۲۵

کششی $\sigma_{max} = \frac{M\times 4}{I} = 60 \le \sigma$ مجاز کششی مثلاً

سازه نامتقارن

مثال: مساحت‌ها مساوی [اگر]
برای خمش کدام مناسب است.



جان فشار را بیشتر تحمل می‌کند

الف   ب   ج ✓   د

برای متقارن‌ها مناسب است.

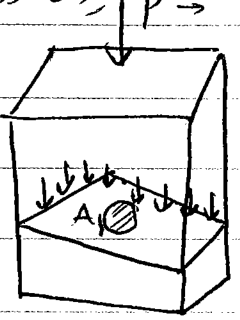
اگر کشش باشد (ج) درست است
ولی اگر کشش باشد ب و د درست است

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

نکته ۱: اگر عضوی تحت کشش باشد (منظور تحت نیروی محوری باشد) و نیروی کل سطح A باشد و ما بخواهیم ببینیم بخش از این سطح مثلاً سطح A_1 چقدر نیرو تحمل می‌کند

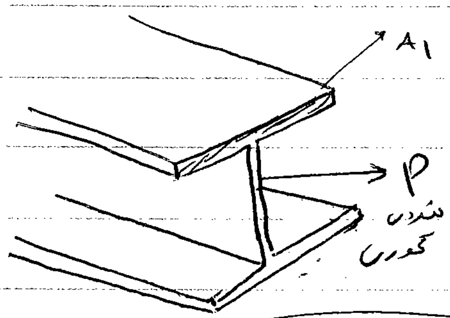
(P نیروی محوری = فشاری)



متمرکز نیست برآیند نیروهاست

با فرض این که تنش یکنواخت باشد (یعنی تنش ثابت است از انتگرال بیرون می‌آید) نیرو به نسبت مساحت توزیع برای یک بخش بدست می‌آید

سهم A_1 از کل نیروی محوری برابر است با:



$$P_1 = \int_{A_1} \sigma\, dA = \frac{P}{A} \underbrace{\int_{A_1} dA}_{A_1} = \boxed{P\frac{A_1}{A}}$$

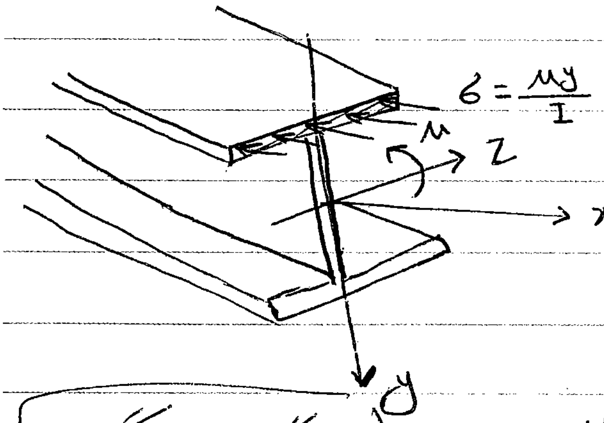
نتیجه بسیار مهم

می‌خواهیم ببینیم P_1 چند درصد P است

سهم نیرو ناشی از نیرو

نکته ی ۲:

چقدر از لنگر را سطح A_1 تحمل می‌کند؟



$$M_1 = \int_{A_1} y\,\sigma\, dA = \int_{A_1} y\left(\frac{My}{I}\right) dA =$$

$$= \frac{M}{I} \underbrace{\int_{A_1} y^2 dA}_{I_1} = \boxed{M\frac{I_1}{I}}$$

نتیجه بسیار مهم

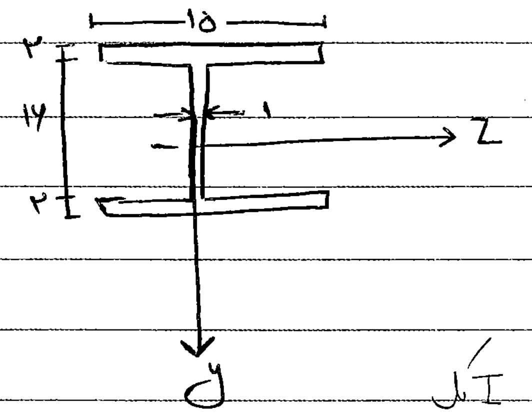
سهم لنگر ناشی از لنگر

اگر عضوی تحت خمش قرار بگیرد و بخشی از آن مثلاً سطح A_1 چند درصد لنگر را تحمل می‌کند به نسبت ممان اینرسی است ولی برای نیرو به نسبت مساحت است.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

مثال برای نکته ی ۲: تیر آهن



سؤال: چند درصد لنگر را بال و چند درصد را جان تحمل می‌کنند؟

وقتی می‌گوییم چند درصد یعنی نسبت $\frac{I_1}{I}$ را می‌خواهیم و

M را هم نداریم ما اشکال ندارد

I کل را باید با جمع ۳ مستطیل به دست آوریم

$I_{کل} = I_{جان} + 2 I_{بال}$

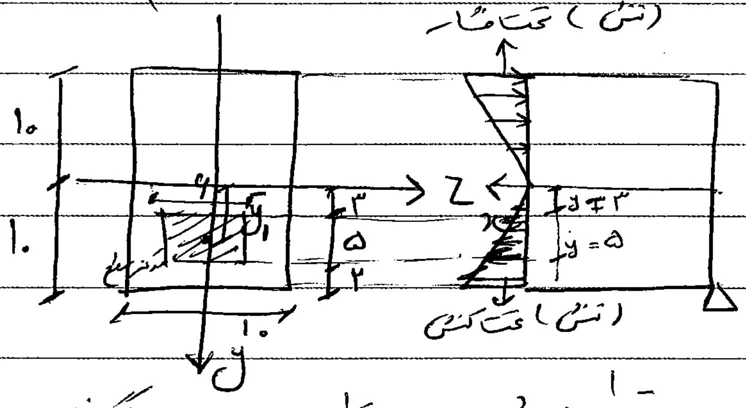
چند درصد را جان تحمل می‌کند $= \frac{I_{جان}}{I_{کل}}$

هر چه مساحت دورتر از تار خنثی باشد تأثیرش بیشتر است

چند درصد را بال‌ها تحمل می‌کنند $= \frac{2 I_{بال}}{I_{کل}}$

نکته ی ۳:

شکل (الف)



وقتی تحت لنگر قرار است نیروی به بال وارد شود چقدر است؟

$\sigma = \frac{My}{I}$

کشش در پایین بیشتر است.

چون نکته‌ی ۳ تکمیل نکته‌ی ۱ و ۲ است (در این جا نیرویی که در اثر لنگر ایجاد می‌شود)

مقطع ۱ (برش زدیم = مقطع سمت راست را گرفتیم)

بهترین روش ← روش اول

سهم نیرو ناشی از لنگر

لنگری که به مقطع وارد می‌شود

$$F_1 = \int_{A_1} \sigma \, dA = \int_{A_1} \left(\frac{My}{I}\right) dA = \frac{M}{I} \int_{A_1} y \, dA = \frac{MQ}{I}$$

نیرویی که به سطح‌ها وارد می‌شود را گویند.

ناشی از لنگر است یعنی در اثر لنگر به وجود آمده

Q = ممان استاتیک A_1 نسبت به تار خنثی

ممان اینرسی کل مقطع

ممان استاتیک سطح‌های جدا شده نسبت به سطح خاص آن به تار خنثی

اگر در مقطعی داریم ولی تحت لنگر است چه نیرویی به آن مقطع وارد می‌شود

باید از فرمول $\frac{MQ}{I}$ استفاده شود.

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

روش دیگر

$\bar{y}_1$: فاصله مرکز سطح سطح هاشور خورده از تار خنثی

$$F_1 = \frac{M}{I}\underbrace{(\bar{y}_1 A_1)}_{Q_1} = \underbrace{\left(\frac{M\bar{y}_1}{I}\right)}_{\text{تنش در مرکز سطح هاشور خورده}} . A_1$$

تنش مرکز سطح هاشور خورده

این تنش در یک نقطه است در یک مقطع

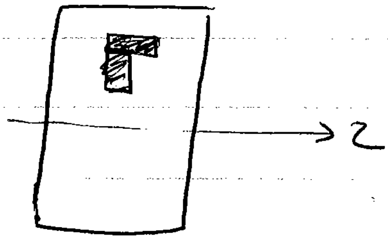
(با توجه به شکل الف $\bar{y}_1$ در شکل نشان داده شده)

(مثلاً برای مثلث این صورت) تنش ~~برای~~ مرکز سطح برای این مقطع به مستطیل شکل است نمی شود

روش سوم : $F_1 = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} . A_1$

← تنش ~~مرکز سطح~~ [تنش در بالای مقطع (σ_1) و تنش در پایین مقطع (σ_2) را بدست بیاوریم و تقسیم بر ۲ می کنیم]

مثال:



Q_s سطح هاشور خورده برابر است با جمع Q در مستطیل.

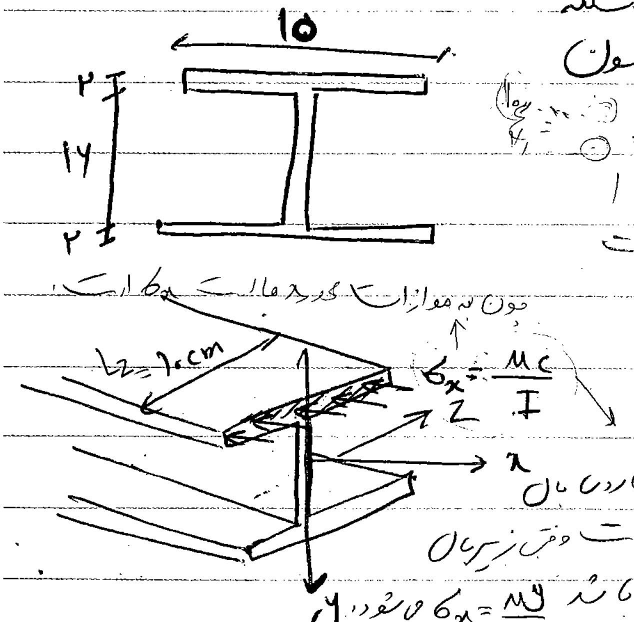
مثال: M و I و ابعاد مقطع و E، ν = معلومات مسئله

مدول الاستیسیته ی مثلاً فولاد

← ضریب پواسون

الف) عرض بال فوقانی = ؟ مجهول

بعد از اعمال لنگر



یعنی باید δ_z را بدست آوریم

تغییر طول در جهت z

← چون فشار بالاست باید منفی بذاریم $\frac{Mc}{I}$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\cancel{\sigma_z} - \nu(\sigma_x + \cancel{\sigma_y})\right] =$$

جواب + بدست می آید

یعنی انبساط پیدا می کند

$$\delta_z = \varepsilon_z . L_z$$

در اینجا ۱۰cm

چون به موازات محور z هاست و برای تمام بال

$\sigma_x = \frac{Mc}{I}$

برای روی بال است ولی زیر بال باشد

y می شود $\sigma_x = \frac{My}{I}$

ب) ضخامت بال فوقانی = ؟

یعنی اول باید δ_y را بدست آوریم

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\underset{0}{\sigma_y} - \nu(\sigma_x + \underset{0}{\sigma_z})\right]$$

جواب + است

پس ضخامت بال هم زیاد می شود

$$\delta_y = \varepsilon_y \times L_y = \varepsilon_y \times 2cm$$

منفی فشاری است

$$\sigma_x = -\frac{M \times 9}{I}$$

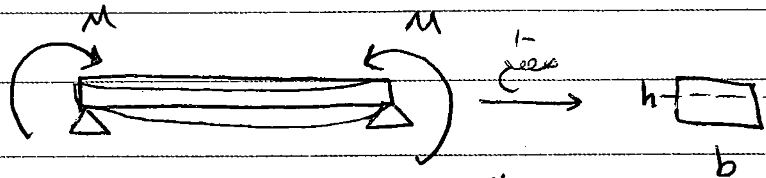
(پس در کل طول بال کم می شود ولی عرض بال و ضخامتش زیاد می شود)

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال: تیر چوبی :

حالت اول : یک تیر چوبی



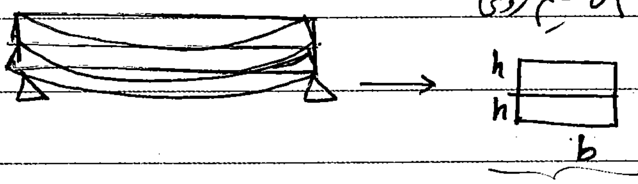
$M_{1\,مجاز} = \sigma_{مجاز\,چوب} \times S_{1\,موجود} = \sigma_{مجاز} \times \frac{bh^2}{6}$

یادآوری :

حالت دوم :

دو تیر چوبی شبیه هم را روی هم می‌گذاریم (بدون اتصال) (بدون جوش = بدون چسب)

وقتی آن‌ها را خم می‌کنیم روی هم می‌لغزند.



$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} < \sigma_{مجاز}$

$S_{موجود} \cdot \sigma_{مجاز} = M_{مجاز}$

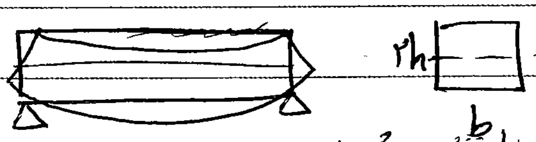
$S_{لازم} = \frac{M}{\sigma}$

$S_{مستطیل} = \frac{I}{c} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$

دو تار خنثی داریم چون شکل مرکب نیست و هر کدام از تیرها جداگانه در پایین افزایش طول و در بالا کاهش طول دارند.

$M = 2M_{مجاز} = 2\sigma_{مجاز} \times \frac{bh^2}{6}$

حالت سوم : دو تیر که آن‌ها را به هم بچسبانیم (در واقع یک تیر داریم):



چون با چسب به هم متصل کردیم دیگر روی هم نمی‌لغزند چون چسب جلوی این کار را می‌گیرد (تنش برشی)

به صرفه‌تر است از حالت قبلی است.

$M_{مجاز} = \sigma_{مجاز} \times S_{موجود} = \sigma_{مجاز} \times \frac{b(2h)^2}{6} = 4M_{1\,مجاز}$

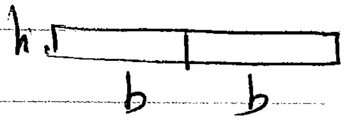
وقتی روی این تیر بار بیاید این یک پارچه تغییر شکل می‌دهد (چون در واقع این یک تیر است)

** نکته: در خمش ملاک اساس مقطع است (S) و یا I ممان اینرسی است)

SUBJECT :

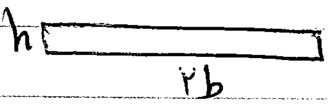
Year ( ) Month ( ) Date ( )

حالت چهارم :



کنار هم هستند
(بدون اتصال)

$M_{\text{مجاز}} = 2\, M_{1\,\text{مجاز}}$



کنار هم جوش کردیم

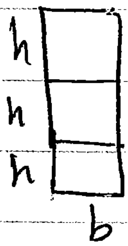
$M_{\text{مجاز}} = \sigma_{\text{مجاز}} \times S = \sigma_{\text{مجاز}} \times \frac{(2b)h^2}{6} = 2\, M_{1\,\text{مجاز}}$

پس اگر دو تسمه کنار هم باشند [چه جوش کنیم چه نکنیم مقاومت خمشی آن ها یکسان است]

ولی اگر روی هم بگذاریم [جوش کنیم (برای مستطیل) ۴ برابر می شود و اگر جوش نکنیم (برای مستطیل) ۲ برابر می شود]

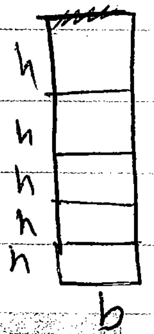
وقتی می گوییم وقتی روی هم بگذاریم جوش کردن مهم است با فرض این است که بار از بالا به آن وارد می شود (بار ثقلی وارد شود) وقتی اگر بار افقی وارد شود جای h و b عوض می شود : $S = \frac{hb^2}{6}$

تست کنکوری : سه تسمه می خواهیم آن ها را بچسبانیم
مقاومت چند برابر حالتی است که نچسبانیم



چسباندن $= \underbrace{9}_{\text{برابر کلی}} M_1$

نچسباندن $= \underbrace{3 \times M_1}_{\text{برابر کلی}}$



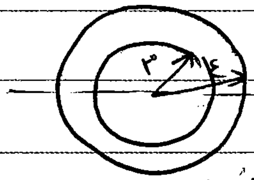
نچسبونیم $= 5M_1$

تیر دهم افقی بود.

مثال:

لوله‌ی فولادی به شعاع داخلی ۳ و شعاع خارجی ۴ و حول محور رنگ شده خم می‌شود.

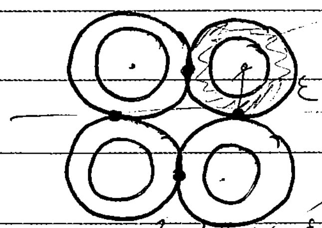
$\to \pi(4^2-3^2)$



حول این محور خم می‌شود.

اگر ۴ تا از این لوله‌ها را استفاده می‌کنیم

S_1 جای چسب برابر می‌شود:



تار خنثی

چون جوش داده‌ایم با هم واحد شده و یک تار خنثی دارد.

$$S_1 = \frac{I_1}{c} = \frac{\frac{\pi}{4}(4^4-3^4)}{4}$$

c دورترین نقطه از تار خنثی

الف) اگر این ۴ تا را جوش نکنیم ⟸ $4S_1$ جواب

ب) اگر جوش کنیم ⟸ باید که موجود را اطراف دایره‌ها باشیم یعنی باید $\frac{I}{c}$ را حساب کنیم (برای مستطیل فقط هستیم که $\frac{bh^2}{6}$ می‌شود)

برای ۴ تا لوله وصل شده

$$I = 4\left[I_1 + A_1 d^2\right] = 4\left[\frac{\pi}{4}(4^4-3^4) + \pi(4^2-3^2)(4)^2\right]$$

$$S = \frac{I}{c} = \frac{I}{8}$$

$$\boxed{\frac{S}{S_1} = ۷٫۲}$$

STAEDTLER

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

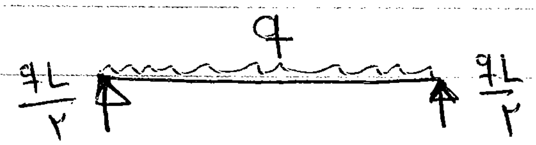
«فصل پنجم» «تنش برشی در تیرها»

در تیرها تنش برشی باید کنترل شود و دیگری تنش خمشی باید کنترل شود
یعنی باید کنترل کنیم تیر می‌بُرد یا نه

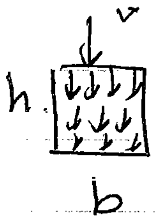
معمولاً در امتحان فصل ۶ و ۵ با هم می‌آید یعنی هم تنش برشی و هم تنش خمشی کنترل شود.

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{\text{مجاز}}$$

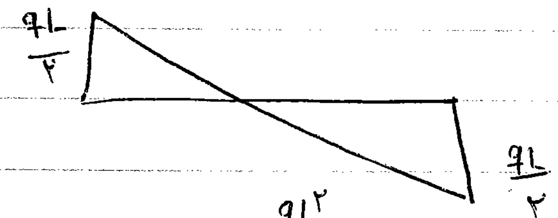
$$\tau = \frac{VQ}{It} < \tau_{\text{مجاز}}$$

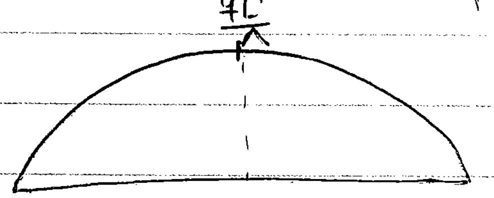


مقطع



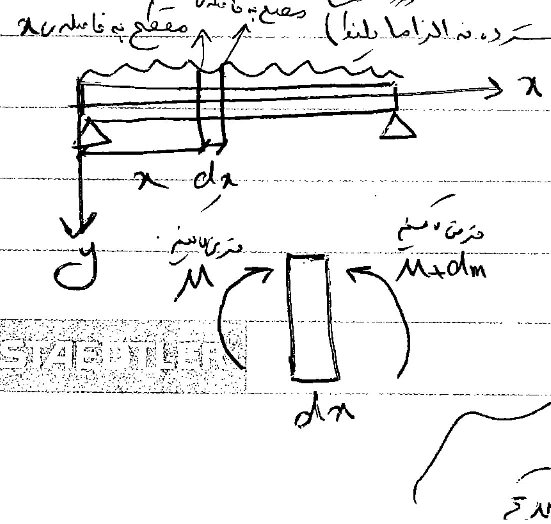
$\tau_{Ave} = \frac{V}{A} \leq \tau_{\text{مجاز}}$ اگر توزیع تنش یکنواخت باشد.



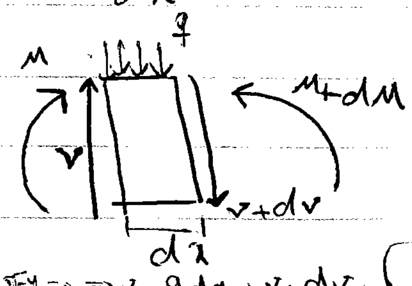


در فصل اول گفتیم $\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$ اگر این رابطه
کمتر از $\tau_{\text{مجاز}}$ باشد مقطعی گفتیم که تیر گسیخته می‌شود باید $\tau_{max} < \tau_{\text{مجاز}}$ باشد.

تیر را در نظر می‌گیریم که تحت بار است: (تحت بار گسترده، نه الزاماً یکنواخت)



یادآوری از استاتیک: $V = \frac{dM}{dx}$



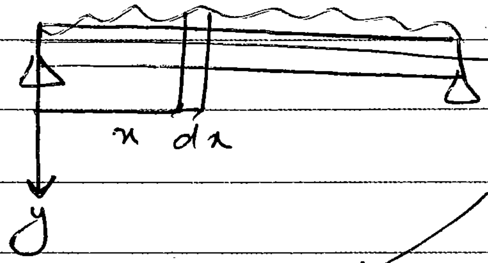
معادلات تعادل: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = q\,dx + V + dV \Rightarrow \boxed{q = -\frac{dV}{dx}}$

$\Sigma M = 0 \Rightarrow M + V\,dx = q\,dx\left(\frac{dx}{2}\right) + M + dM \Rightarrow \boxed{V = \frac{dM}{dx}}$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

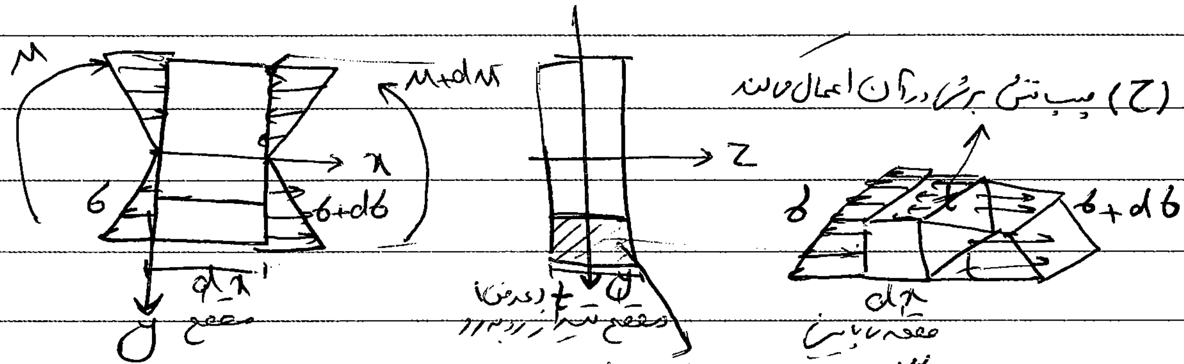
پس : $V = \dfrac{dM}{dx} \Longrightarrow M = \int V\,dx$



M باعث تنش نرمال در بالا و تنش کششی در پایین می شود.

چون تنش داخلی ناشی از تنش است

پس تنش به وجود می آید



مقطع

مقطع تیر از روبرو

سطح هاشور خورده $= A_1$

مقطع بالایی ۳ بعدی

$$\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow \underbrace{\int_{A_1} \sigma\, dA}_{\text{نیرو از راست به چپ}} + \tau t\, dx = \int_{A_1} (\sigma + d\sigma)\, dA$$

$$\int_{A_1} \frac{My}{I}\, dA + \tau t\, dx = \int_{A_1} \frac{(M+dM)y}{I}\, dA$$

$$\tau t\, dx = \frac{dM}{I} \underbrace{\int_{A_1} y\, dA}_{Q} \Longrightarrow$$

ممان استاتیک مقطع جدا شده نسبت به تار خنثی

(سطح هاشور خورده) سطحی که از مقطع تیر جدا می شود

نیروی برشی (Vmax در نقطه ماکزیمم است)

$$\Longrightarrow \tau = \underbrace{\frac{dM}{dx}}_{V} \cdot \frac{Q}{It} \Longrightarrow \boxed{\tau = \frac{VQ}{It}}$$

مهم

مهم ترین فرمول تمام مسائل با این فرمول حل می شود

(فرمول دقیق برشی)

فرمول تقریبی برشی : $\tau = \dfrac{V}{A}$

تنش برشی در هر نقطه از تیر

ضخامت مقطع مورد نظر

ممان اینرسی مقطع مورد نظر نسبت به تار خنثی

SUBJECT

Year ( ) Month ( ) Date ( )

لنگر خمشی در مقطع مورد نظر

(برای تیر)

تنش قائم در نقطه‌ی مورد نظر (ناشی از خمش) = $\sigma = \frac{My}{I}$

y ← فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از تار خنثی (خیلی مهم)

I ← ممان اینرسی مقطع مورد نظر (I کل مقطع)

نتیجه:

$\tau = \frac{VQ}{It}$

V: نیروی برشی در مقطع مورد نظر

Q ← ممان استاتیک مقطع جدا شده در نقطه‌ی مورد نظر

t ← ضخامت مقطع در نقطه‌ی مورد نظر

τ: تنش برشی در نقطه‌ی مورد نظر [در تیر]

I: ممان اینرسی مقطع مورد نظر

نقطه‌ی مورد نظر: مثلاً نقطه‌ای که حساب شود

نیرو و لنگر برای مقطع است = در استاتیک باید به دست آوریم

استرس/تنش برای نقطه است = در مقاومت مصالح

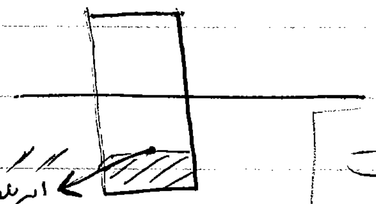
مهم

نکته: طبق فرمول $\tau = \frac{V \cdot Q_{max}}{I\, t_{min}}$ وقتی Q_{max} و t_{min} باشد بدترین نقطه‌ات یعنی بیشترین تنش

برای رسیدن به نقطه باید اول مقطع معلوم شود. پس مقدار M

(چه در خمش چه در برش ممان اینرسی مقطع مورد نظر را می‌خواهیم)

نکته:

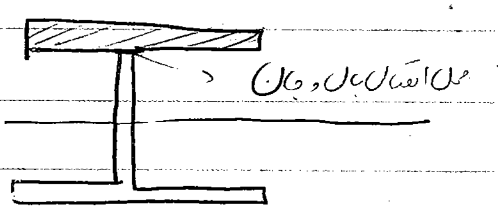


اگر بخواهیم تنش در این نقطه Q می‌شود سطح هاشور خورده

Q_{max} در تار خنثی اتفاق می‌افتد یعنی در تار خنثی τ ماکزیمم است

کلاً ممان استاتیک بخشی از مقطع با بقیه‌ی مقطع همیشه برابر است.

مثال: تنش برشی را در محل اتصال بال به جان پیدا کنیم



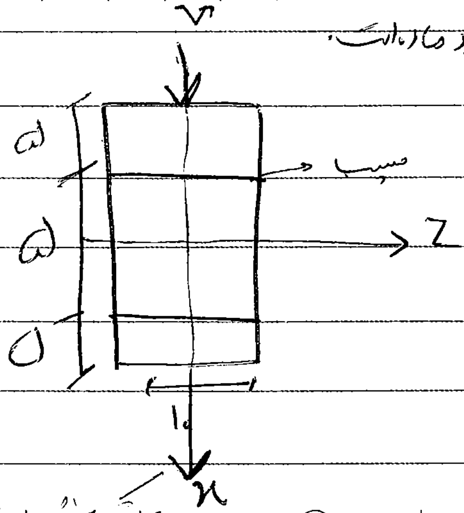
t = ضخامت جان می‌شود

ممان استاتیک کل سطح صفر است.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

فقط برای چسب تیپ برای خود ماده است.

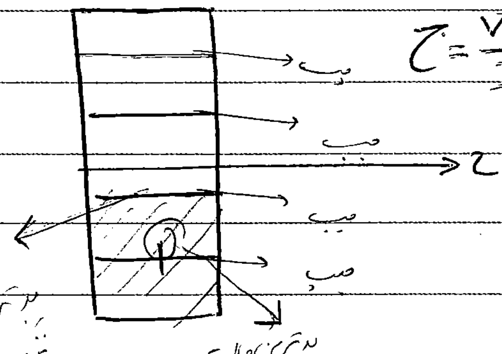


$$\tau=\frac{VQ}{It}\le\tau_{\text{مجاز چسب}}$$ چسب = جایی که چسب می‌خورد.

$$\tau=\frac{VQ}{It}\le\tau_{\text{مجاز چوب}}$$ چوب = تار خنثی

باید هر دو تا را کنترل کنیم (مثل صفحه)

در این فرمول V از روی دیاگرام برش بدست می‌آید، t = عرض چسب است، Q = ممان استاتیک بخشی از مقطع است نسبت به تار خنثی با ممان استاتیک بخش مقطع آن برابر است



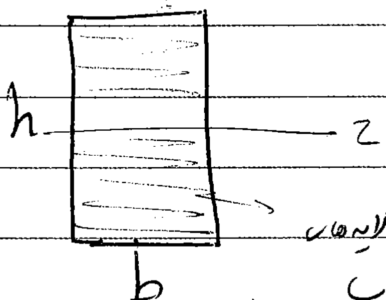
$$\tau=\frac{VQ}{It}\le\tau_{\text{مجاز چسب}}$$

هر چه چسب به تار خنثی نزدیکتر باشد Q بزرگتر است (وضعیت بحرانی است).

کنترل چسب اگر چند لایه بود

باید کدام را کنترل کنیم کدام به تار خنثی نزدیکتر است.

اگر تیر چوبی یکپارچه به عرض b و ارتفاع h داشتیم



تک تک لایه‌ها ممکن است روی لایه‌ی بالایی یا پایینی بلغزند.

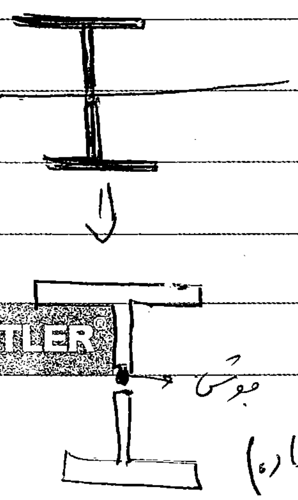
برای تیر چوبی که یکپارچه است فقط V باید $\tau\le\tau_{\text{مجاز چوب}}$ باشد.

اما برای تیری که واقعاً چسب خورده $\tau\le\tau_{\text{مجاز چسب}}$ در نزدیکترین نقطه‌ای که چسب خورده نزدیکترین به تار خنثی

برای مقاومت لایه‌های چوب $\tau\le\tau_{\text{مجاز چوب}}$

اگر تعداد چسب بیشتر به تعداد صفحه‌های زوج شوند آنگاه $\tau_{\text{چوب}}=\tau_{\text{چسب}}$

مثال: یک تیر فولادی داریم (جوش کنترل کنیم)



ضخامت جان mm

ضخامت جوش mm

mm = جوش بگذاریم

در فولاد mm = می‌گذاریم

$$\tau=\frac{VQ}{It}\le\tau_{\text{مجاز جوش}}$$ t: ضخامت جوش

$$\tau=\frac{VQ}{It}\le\tau_{\text{مجاز فولاد}}$$

باید Q مربوط به تار خنثی را بگذاریم (برای کنترل خود ماده)

(نیروی برشی در مقطع مورد نظر) تابعی از x است

ممان استاتیک مقطع جدا شده در نقطه‌ی مورد نظر نسبت به تار خنثی

τ تنش برشی در تیر با مقطع یا جوش $= \frac{VQ}{It}$ *

ضخامت مقطع در نقطه‌ی مورد نظر (در مستطیل ضخامت ثابت است ولی در همه جا ثابت نیست)

ممان اینرسی مقطع مورد نظر نسبت به تار خنثی

یادآوری: برای ضخامت، مقطع تیر به شکل زیر که نقطه دارد

گسترش داریم

گسترش داریم

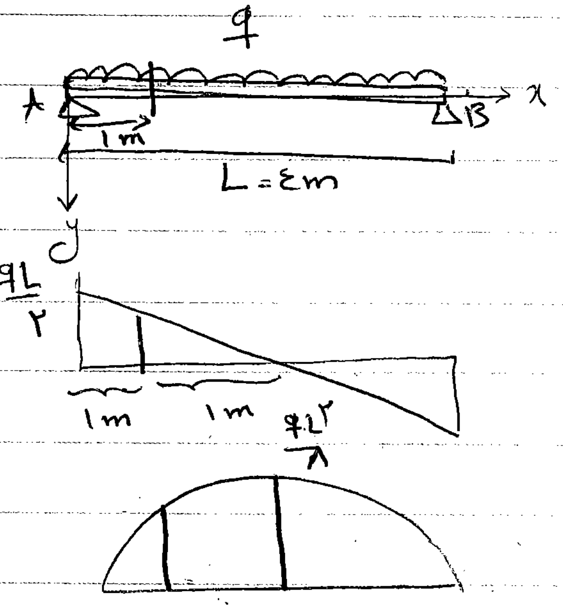
(لنگر خمشی در مقطع مورد نظر) تابعی از x است

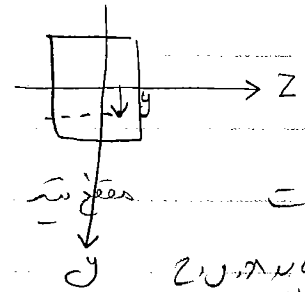
σ تنش قائم در تیر $= \frac{My}{I}$ *

فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از تار خنثی

ممان اینرسی مقطع مورد نظر نسبت به تار خنثی

مثال: (یعنی تیر را باید خمش و برشی کنترل کرد = فصل ۵ و ۶)





منظور از تنش قائم در تیر باید در یک نقطه‌ی مشخص باشد.

نقطه‌ی مشخص دارای مشخصاتی است که ما باید آن نقطه را بدانیم یعنی باید x و y آن نقطه را بسنجیم: این که x آن کجاست یعنی مقطع (یعنی وقتی گفتند در ابتدای ۸ باید در ابتدای مقطع هم بزنیم) تکیه‌گاه A

y = فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از تار خنثی (یعنی نقطه را باید در مقطعی که در ابتدای تکیه‌گاه A زدیم پیدا کنیم که x آن ابتدا است ولی y آن در مقطع تیر مشخص شد)

* تنش برشی به V ربط دارد که جای V بیشتر است (که V_{max} از روی دیاگرام برش بدست می‌آید به عبارتی تیرش)

* در مورد σ_{max} باید هم مقطع بحرانی و هم نقطه‌ی بحرانی را پیدا کنیم (M_{max} = از روی دیاگرام خمشی و y_{max})

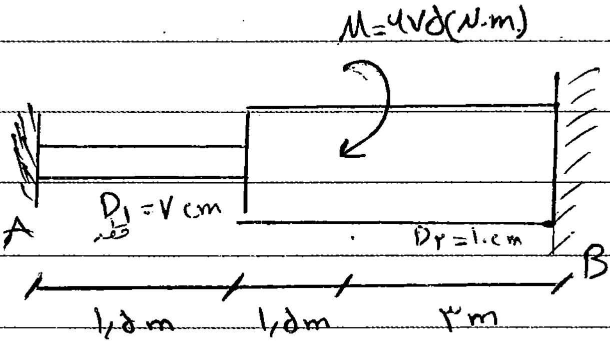
τ همیشه در تار خنثی max است و هر چه از تار خنثی دور شویم کمتر است و بیشترین مقطع روی تار خنثی است
بهتر؟؟

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

حل تمرین مقاومت

تمرین ۱) مثال: در شکل مقابل در صورتی که جنس میله AB یکنواخت باشد گشتاورهای پیچشی تکیه‌گاهی را در A و B بدست آورید.

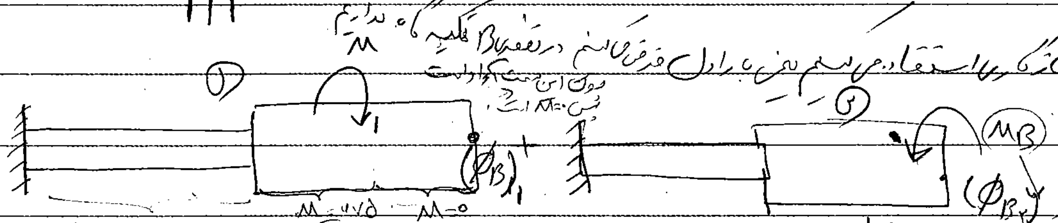


دو مقطع متفاوت داریم (پس نامعین است)

عکس‌العمل‌ها ناشی از M است از جنس چرخشی هستند یعنی گشتاور هستند

از اصل سازگاری استفاده می‌کنیم یعنی با روش جمع آثار فرض می‌کنیم در نقطه B تکیه‌گاه نداریم

چون این قسمت گشتاور ندارد پس M=0 است



$$\phi_{B_1} = \frac{475 \times 1.5}{G\left(\frac{\pi (0.035)^4}{2}\right)} + \frac{475 \times 1.5}{G\left(\frac{\pi (0.05)^4}{2}\right)} + 0$$

پس عکس‌العمل در نقطه B

$$\frac{(M_B)(1.5)}{G\left(\frac{\pi (0.035)^4}{2}\right)} + \frac{(M_B)(4.5)}{G\left(\frac{\pi (0.05)^4}{2}\right)}$$

چون می‌دانیم $\phi_B = 0$ است پس در B تکیه‌گاه گیردار است پس در دو شکل بالا باید برابر باشند (۱ و ۲) ϕ_B تیر

$$|\phi_{B_1}| = |\phi_{B_2}|$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \qquad J = \frac{\pi R^4}{2}$$

باید از این فرمول استفاده کنیم یعنی از روی جدول

در شکل ① ⟸ $T = M$ است (در شکل ① G ثابت است)

در شکل ② ⟸ $T = M_B$ است (در شکل ② G ثابت است)

$|(\phi_B)_1| = |(\phi_B)_2| \longrightarrow M_B = ?$ بدست می‌آید (حساب شود)

و M_A هم وقتی برآیند گشتاورها حول نقطه A بگیریم بدست می‌آید.

$M_A = 475 - M_B =$ بدست آید

اگر در صورت سؤال گفته بود ϕ_O را بدست آورید؟ باید در نقطه O برش بزنیم و تکیه‌گاه در نقطه B را حذف می‌کنیم و به جای آن M_B قرار دهیم ... $\tau_{max} = \frac{TR}{J}$ و نقطه O را هم نداریم (البته اول باید تکیه‌گاه و عکس‌العمل را در نقطه B بدست آوریم ...) باید از فرمول

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال مهم

یک نمونه مثال ۹: ستون بتنی به طول 1,2m توسط ۴ میله گرد به قطر 19mm تقویت شده است

مدول الاستیسیته فولاد

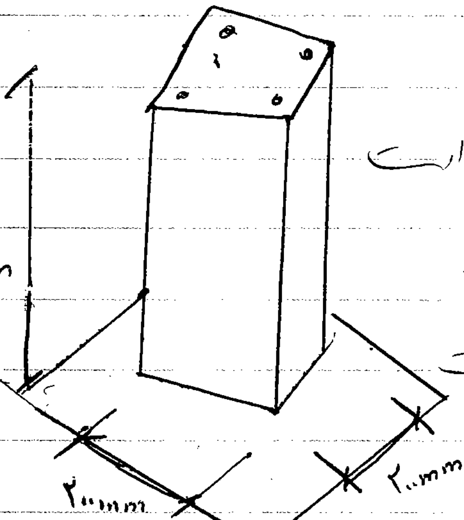
$E_s = 200\,Gpa$ و $\alpha_c = 9.9 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ C}$ و $\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ C}$ اگر داشته باشیم

$E_c = 25\,Gpa$ ضریب انبساط حرارتی بتن — ضریب انبساط فولاد حرارتی

وقتی ستون را به اندازه‌ی $45^\circ C$ حرارت می‌دهیم تنش را در فولاد و بتن بدست آورید.

تنش ناشی از افزایش حرارت که باعث افزایش طول می‌شود.

$\Delta\Theta = 45^\circ C \uparrow$ افزایش حرارت



فولاد و بتن را به صورت مجزا در نظر بگیریم طول اولیه هر دو یکسان است و ΔT ها و اولیه‌ی آن‌ها

$\Delta L = L.\alpha.\Delta T$ افزایش طول ناشی از افزایش حرارت

هم یکسان و فقط α آن‌ها فرق می‌کند

چون فولاد α بزرگتری دارد افزایش طول آن بیشتر است

وقتی در مصالح به صورت همگن داخل هم قرار گرفته‌اند.

پس شرط سازگاری را باید بنویسیم $\Delta L_{\text{فولاد}} = \Delta L_{\text{بتن}}$

چون میله‌گرد تمایل به افزایش طول بیشتری دارد و بتن تمایل دارد که فولاد را به سمت جلو بکشد (مقاومت می‌کند)

و فولاد تمایل دارد که جلو برود (عمل و عکس العمل). فولاد فشاری و در بتن کششی است. تنش در

عامل ایجاد تغییر طول در فولاد هم افزایش حرارت است و مکانیزم دیگر تغییر طول تنش فشاری ایجاد شده است

که تنش فشاری، نیروی فشاری هم می‌خواهد.

P_s = نیروی فشاری (کاهنده −) — P_c = نیروی کششی (افزاینده +)

$\Delta L_{\text{فولاد}} = \Delta L_{\text{بتن}}$

در راستای قائم نیروی کششی به بتن وارد می‌شود و نیروی فشاری که به فولاد وارد می‌شود

$$\underbrace{(L.\alpha_s.\Delta T)}_{\text{ناشی از حرارت}} - \frac{P_s L}{E_s} = (L.\alpha_c.\Delta T) + \frac{P_c.L}{E_c A_c} \qquad \Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_s = P_c = P$$

کاهنده — ناشی از تنش — افزاینده — مجهول

یک معادله‌ی دو مجهولی است (P_s و P_c) که ما P_s و P_c را از روابط استاتیکی $\Sigma F_y = 0$ بدست می‌آوریم که مقدار آن‌ها P است.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

حل: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_s = P_c = P \Rightarrow P = 14895\ N$

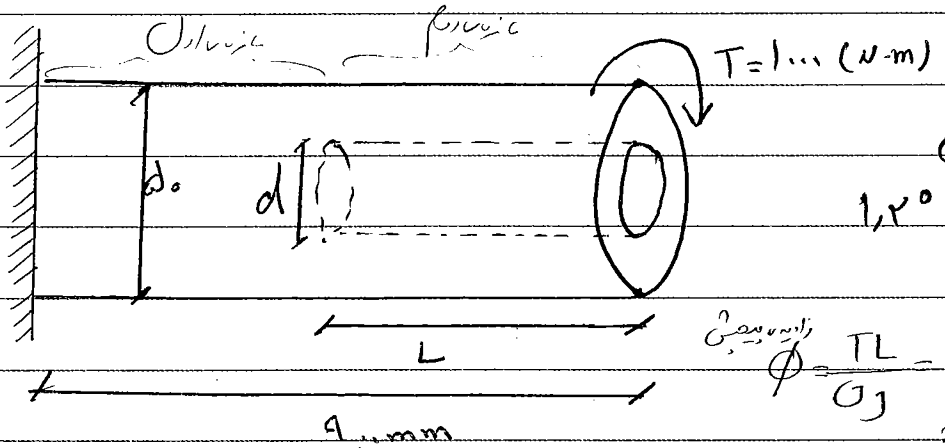
$\sigma_s = \frac{14895}{\pi (19)^2} = 13/13\ Mpa$ فشاری

$\sigma_c = \frac{14895}{\pi (20.2^2 - 19^2)} = 383\ Mpa$ کششی

مثال: یک محور استوانه‌ای به قطر ۵۰mm و طول ۹۰۰mm مطابق شکل تحت گشتاور پیچشی معادل ۱۰۰۰ N.m قرار دارد. در صورتیکه داشته باشیم $G = 0.84\times10^5\ \frac{N}{mm^2}$ ، مقدار d و

$T = 1000\ N.m$

طول L سوراخ ایجاد شده را چنان بیابید که اولاً تنش برشی حداکثر در محور داده شده از ۵۴Mpa تجاوز نکند. و ثانیاً حداکثر زاویه پیچش کل محور از 1.2° بیشتر نشود.



زاویه پیچش $\phi = \frac{TL}{GJ}$ = رادیان باید به درجه تبدیل شود.

$x^\circ \frac{\pi}{180}$

$\tau_{max} = 54\ Mpa$

فرمول کلی تنش برشی $\tau = \frac{T\rho}{J}$ در مقطع ما T ثابت است و ρ هم باید تبدیل به R شود (دورترین فاصله) که برای شکل T و R ثابت است پس تنش برشی فقط به J بستگی دارد و با کاهش J کسر τ ماکزیمم می‌شود.

ماکزیمم می‌شود $\tau = \frac{TR}{J}$ ثابت

$\tau_{max} = \frac{1000\times10^3\times25}{\frac{\pi}{2}(25^4 - r^4)} = 54 \longrightarrow r = 18mm$

$\boxed{D = 36mm}$

بیشترین ϕ در لبه‌ی بازه‌ی سوراخ رخ می‌دهد پس باید مجموع زاویه پیچش در دو قسمت انتهای را بنویسیم.

مجموع ϕ دو بازه

$\phi_{\text{انتهای میله}} = \Sigma\frac{TL}{GJ} = \frac{10^6 L}{0.84\times10^5\times\frac{\pi}{2}(25^4 - 18^4)} + \frac{10^6(900-L)}{0.84\times10^5\times\frac{\pi}{2}(25)^4} = 1.2\times\frac{\pi}{180} \Rightarrow \boxed{L = 488.6\ mm}$

تبدیل به رادیان

M = خمشی
T = پیچشی

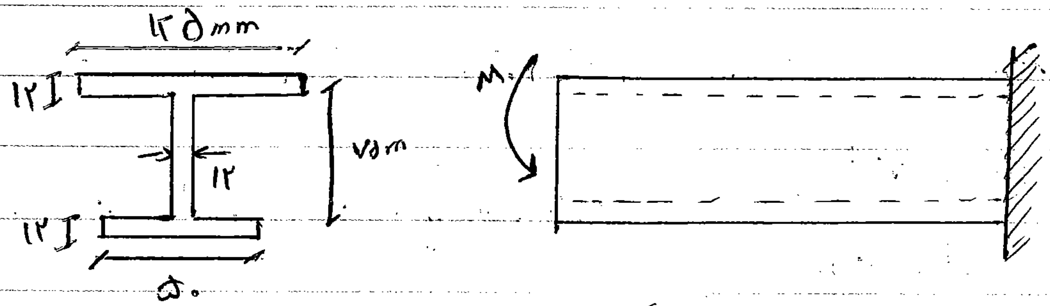
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

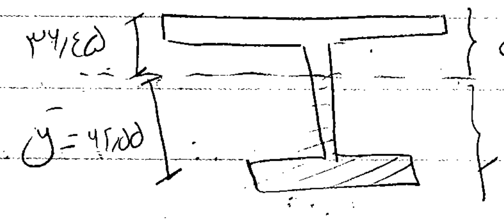
مثال: در تیر شکل مقابل در صورتی که داشته باشیم ، $\sigma_{\text{مجاز کششی}} = 40\,MPa$

$\sigma_{\text{مجاز فشاری}} = 105\,MPa$

تعیین کنید حداکثر مجاز کوپل M چقدر است؟



اول تار خنثی (محور خنثی) را بدست آوردیم (الاستیک)



$I = 3,91\times10^6\,(mm)^4$ نسبت به تار خنثی

در این مقطع ناحیه‌ی فشاری و ناحیه‌ی کششی داریم که (طبق شکل پایین تار خنثی تحت فشار و بالای تار خنثی تحت کشش است)

حداکثر فاصله از تار خنثی = 36/45

$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I}$$

$$\underbrace{\sigma_{max\,\text{کششی}}}_{\text{معلوم}} = \frac{M\overset{\uparrow}{C}}{\underset{\text{معلوم}}{(I)}} \Rightarrow M_1 = 4,29\times10^6\,(N.mm)$$

$$\sigma_{max\,\text{فشاری}} = \frac{MC}{I},\quad C \rightarrow 42/55 \Rightarrow M_2 = 6,56\times10^6\,(N.mm)$$

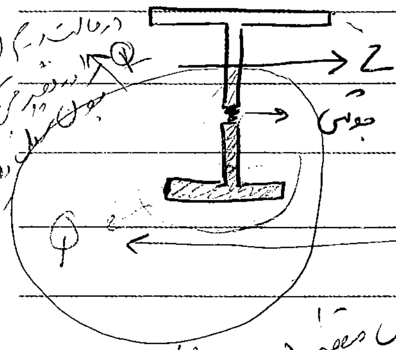
M ای قابل قبول است که هم در ناحیه‌ی کششی و هم در ناحیه‌ی فشاری جواب دهد یعنی M کمتر پس M کمتر قابل قبول است

$$M_{\text{مجاز}} = \min\{M_1 , M_2\} = M_1 = 4,29\times10^6\,(N.mm)$$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

کنترل جوش؟



تا جوش از صد در سطح شکل عبور می‌کند

$$\tau_{\text{جوش}} = \frac{VQ^{\text{معلوم}}}{It} < \tau_{\text{مجاز جوش}}$$

اگر جواب داد

همان اینرسی شکل مقطع (در این شکل مجبور به محاسبه است)

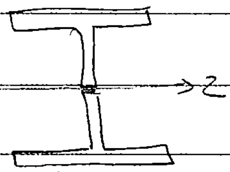
ضخامت جوش (بحرانی جوش)

یعنی تبدیل به یک شکل یکپارچه شد

حال باید Q تا جوش را حساب بکنیم

$$\tau_{\text{فولاد}} = \frac{VQ_{\text{فولاد}}}{It} < \tau_{\text{مجاز فولاد}}$$

اما اگر شکل $Q_{\text{فولاد}} > Q_{\text{جوش}} \Rightarrow$

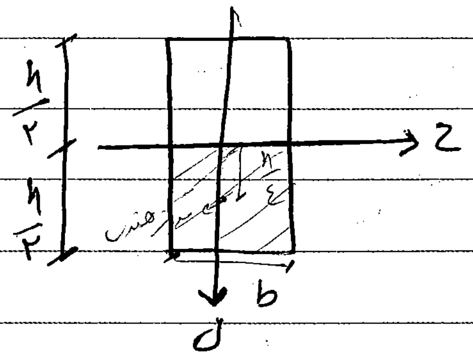


تا جوش روی جوش کار ماند. اگر $\tau_{\text{فولاد}} = \tau_{\text{جوش}}$ باید τ مجاز آن‌ها را بسنجیم و

هر کدام که بحرانی‌تر است را کنترل می‌کنیم

توضیح این که چطور $\frac{Q}{t}$، max شود؟

مثال: $\tau_{max} = ?$

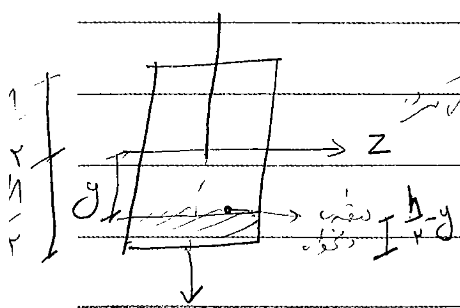


$$\tau_{max} = \frac{V_{max}\left[b\frac{h}{2} \times \frac{h}{4}\right]}{\frac{bh^3}{12} \times b} = \frac{3}{2} \times \underbrace{\frac{V}{A}}_{\tau_{Ave}}$$

پس برای مستطیل توپر:

$$\overset{\text{تنش در برش}}{\tau_{max}} = \frac{3}{2} \times \underbrace{\frac{V}{A}}_{\tau_{Ave}} \quad A \to b \times h$$

حال اگر بخواهیم در یک نقطه دلخواه یک فرمول کلی بدست آوریم:



مدل y^2 است سهمی است یعنی تنش برشی نقطه تغییر می‌کند اما خط تغییر نمی‌کند

$$\tau = \frac{V\left[\frac{b}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{2} + y\right)\right]}{\underbrace{\frac{bh^3}{12}}_{I} \times \underbrace{b}_{t}} = \frac{6V}{bh^3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]$$

فرمول کلی **

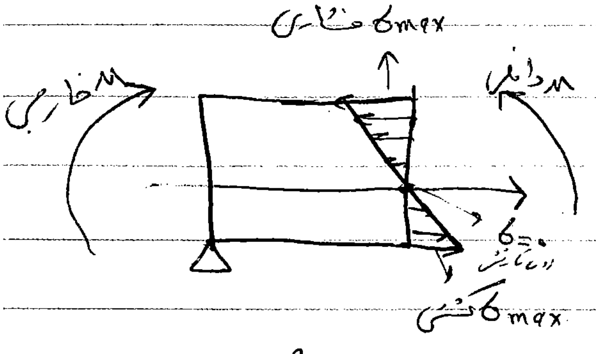
فاصله نقطه مورد نظر از تار خنثی

اگر $y = 0$ باشد $\tau_{max} = 1.5\frac{V}{A}$ می‌شود.

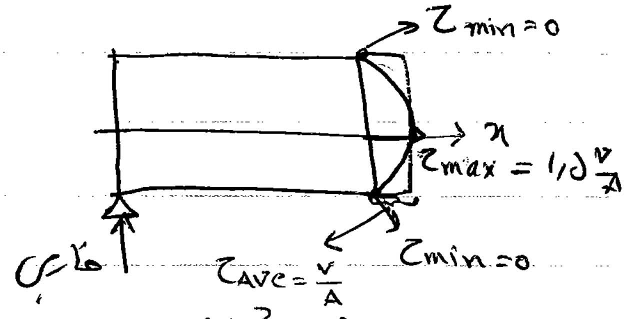
اگر $y = \pm\frac{h}{2}$ باشد $\tau_{min} = 0$ می‌شود **

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



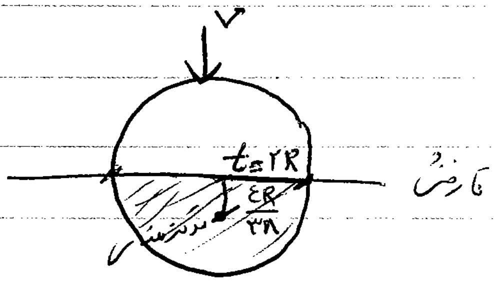
(خمشی)



(برشی)

(تنش در اثر خمش یا بالا یا پایین صفر می شود ولی اثر برش در وسط بیشتر است) نتیجه مهم

حال برای دایره ی توپر :



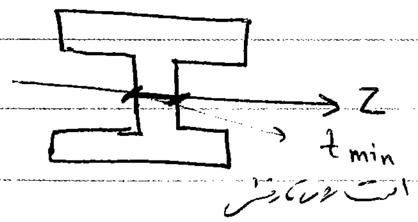
$$\tau_{max} = \frac{V\overbrace{\left[\frac{\pi R^2}{2}\cdot\frac{4R}{3\pi}\right]}^{\text{ممان}}}{\underbrace{\left(\frac{\pi R^4}{4}\right)}_{I}\underbrace{(2R)}_{t}} = \frac{4}{3}\underbrace{\frac{V}{A}}_{\tau_{ave}}$$

مرکز هندسی نیم دایره

پس در دایره توپر : $\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{V}{A}$

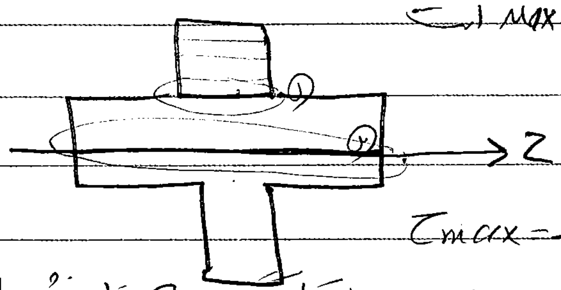
پس برای τ_{max} باید $\frac{Q}{t}$ max شود و V هم max شود

و برای شکل غیر مستطیل برای τ_{max} ، Q_{max} و t_{min} باید باشد:
یعنی در همان جایی که Q_{max} است ، t_{min} باشد



مثال: پس این دو تا رو هم می‌بینیم $\frac{Q}{t}$ max است

باید محاسبه کرد



ما τ_{max} را می‌خواهیم و می‌دانیم که $\tau_{max} = \frac{V_{max} \cdot Q_{max}}{I \cdot t_{min}}$

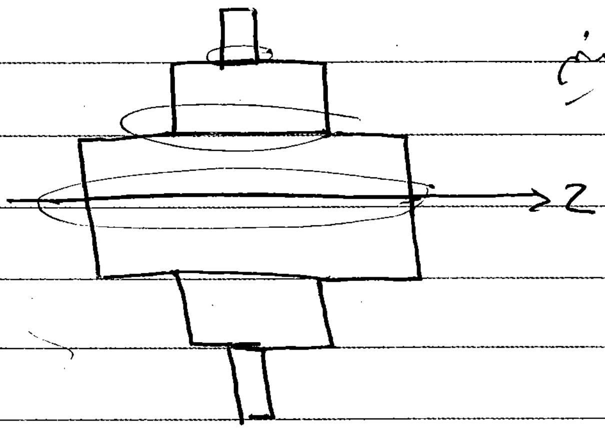
باید مقطعی را در نظر بگیریم که در آن نسبت $\frac{Q}{t}$ max است ابتدا می‌گوییم ① در تار خنثی Q max است اما

t در تار خنثی min نیست پس باید در ① و ② نسبت $\frac{Q}{t}$ را محاسبه کنیم هر جا که این نسبت max شد

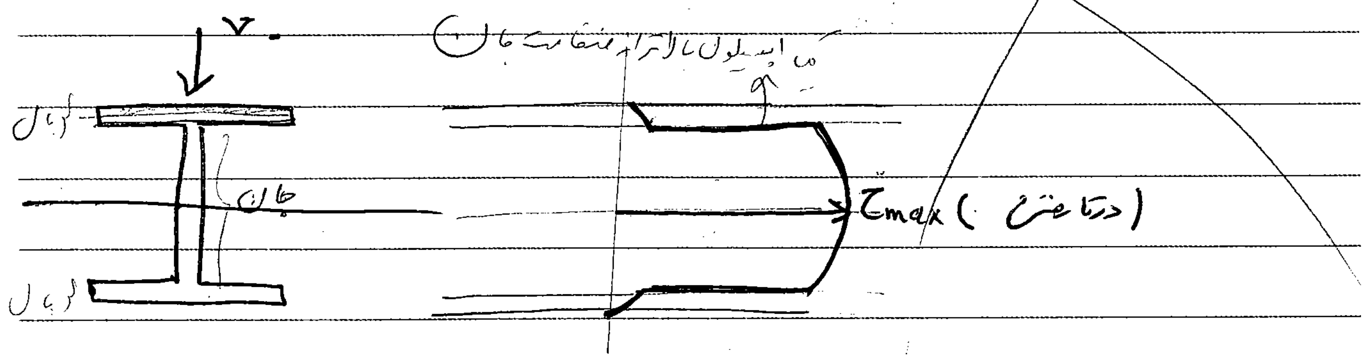
مقطع را در نظر بگیریم

مثال: پس این ۳ تا نقطه باید حساب کنیم

که کجا $\frac{Q}{t}$ max می‌شود.



مثال: تنش برشی را رسم کنید.



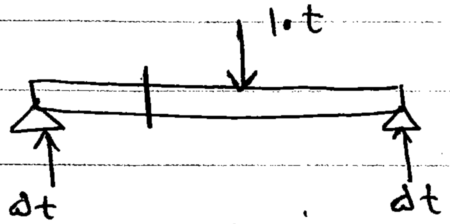
در مقطع خیلی عمده که تکیه به نسبت I ما است

یعنی برش را به جان می‌دهیم و خمش را به بال می‌دهیم

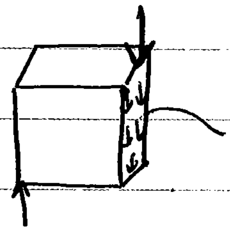
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

چه دانسته‌ای



$V = 5t$ داخلی



τ_{xy} = تقریبی

$\tau_{ave} = \frac{V}{A}$ ← تنش در صفحه قائم (تقریبی)

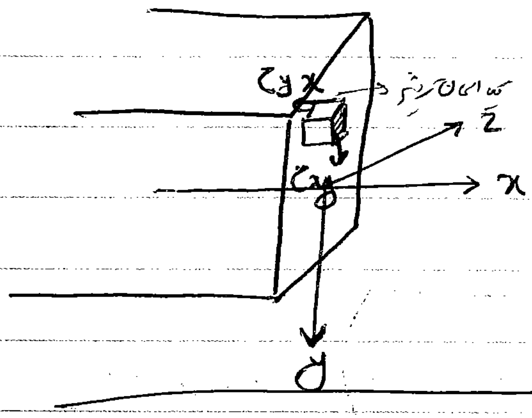
5t خارجی

$\tau = \frac{V \times Q}{It}$ ← تنش در صفحه افق (دقیق)

τ_{yx} = دقیق

حواسم: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

در صفحه x در جهت y

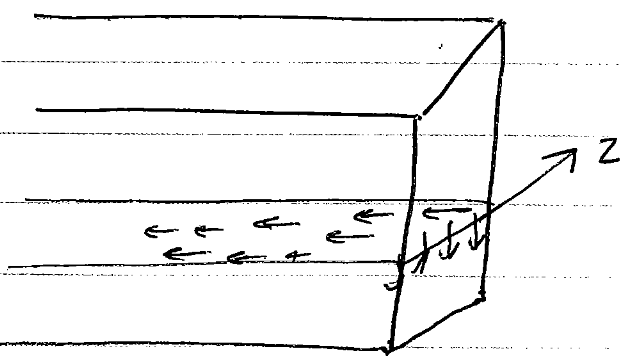


(یادآوری بیشترین تنش برشی [illegible])

بیشترین تنش خمشی در دورترین نقطه از تار خنثی

$Q = 0$

بنابراین در بالاترین و پایین‌ترین نقطه تنش برشی صفر است و در تار خنثی تنش برشی max است



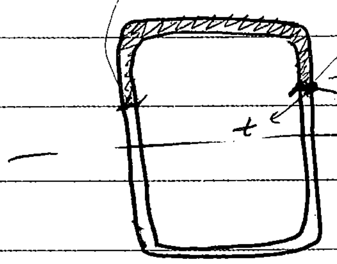
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مقطع توخالی

برای بدست آوردن

بدون تنش در این دو نقطه برابر است پس Q را نسبت به سطح هاشور خورده

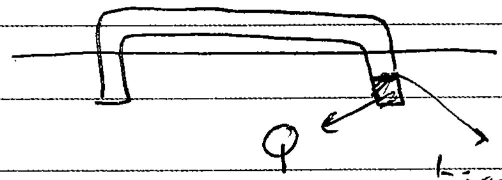


$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

سطح قائم - سطح داخل

تنش در این نقطه را می‌خواهیم

پس در این نقطه برش می‌زنیم



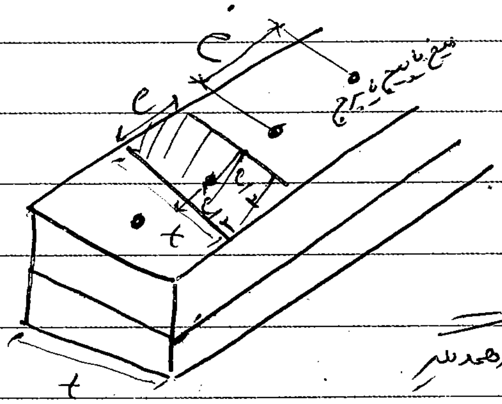
در این حالت

نقاطی که به یک فاصله هستند V هم تنش هستند

اما نقاطی که جدید هستند تنش صفر می‌شود.

تنش در این نقطه

دو قطعه را روی هم می‌گذاریم و سپس پیچ می‌زنیم.



فرمول

فاصله ۲ پیچ یا پرچ یا میخ متوالی از همدیگر

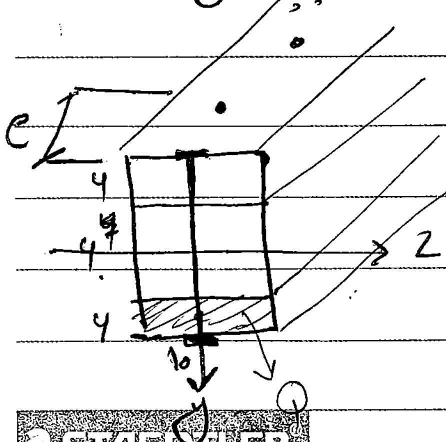
$$F = \tau \times A = \frac{VQ}{It} \cdot t \cdot e = \frac{VQ}{I} \cdot e < F$$

نیروی برشی در هر میخ یا پیچ یا پرچ

تنش برشی در چسب فرضی یا چسب معادل

مجاز هر میخ یا پیچ یا پرچ

دیفرانسیل چسب است ولی به جای چسب میخ آمده.



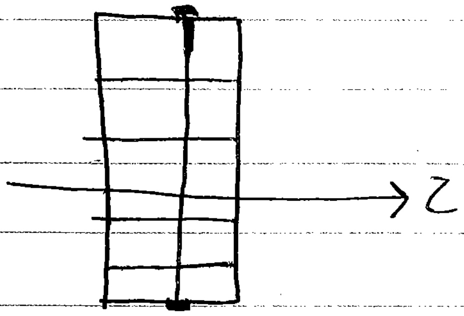
$$F_{6+6+6} = \frac{V\,[60 \times 6]}{\frac{10(18)^3}{12}} \cdot e < F$$

مجاز هر میخ

STAEDTLER

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

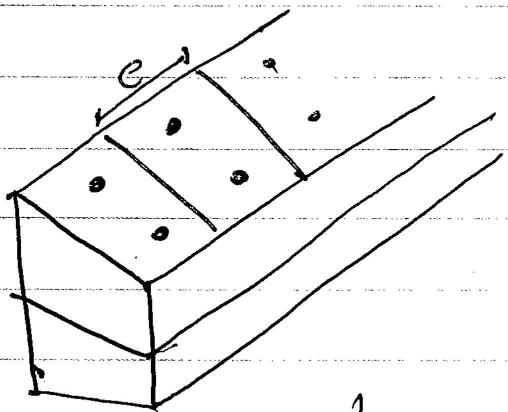


$$F = qe$$

$$\underset{\text{جریان برش}}{q} = \frac{VQ}{I}$$

پس در این جا هم وقتی جای میخ ها عوض شود برای کنترل هم باید مال میخ و هم مال قطعه ها را کنترل کرد

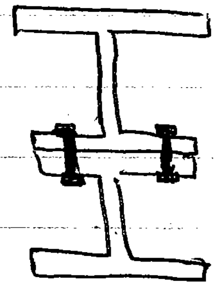
در برابر برش



$$\boxed{\underline{2F_1} = \tau \times A}$$

یا

امتحانی



$$\boxed{\underline{2F_1} = \tau \times A}$$

نکته مهم ***

در حالت دست بالا (تعداد پیچ به سمت بالا و فاصله بین پیچ ها به سمت پایین) و تعداد پیچ به سمت بالا

(پس یادمان باشد که e باید به سمت پایین رند شود)

جریان برش :

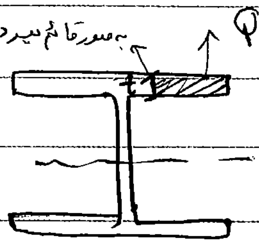
در مورد جریان برش تنش برشی به این شکل محاسبه می شود:

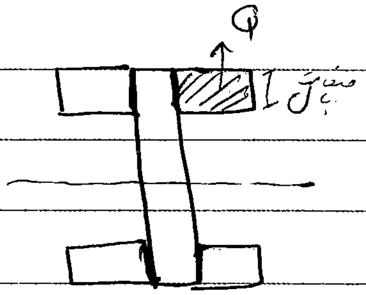
صـ (الف)

SUBJECT :

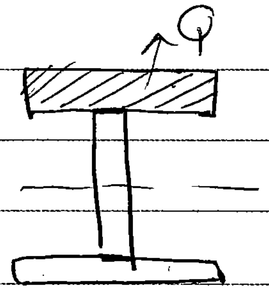
Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$





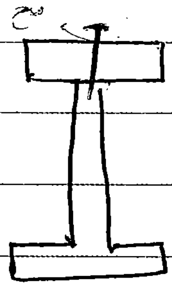
یا

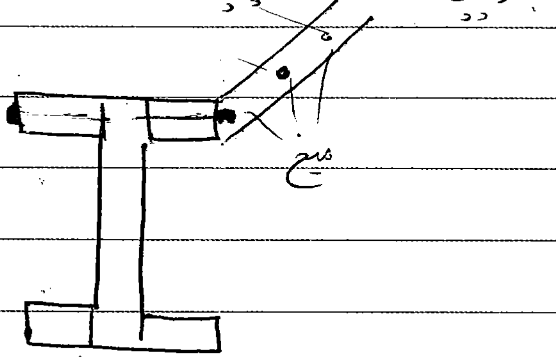


تیرها چسب هستند

$$\tau = \frac{VQ}{It} < \tau_{\text{مجاز}}$$

$$\tau_{\text{چسب}} = \frac{VQ}{It} < \tau_{\text{مجاز چسب}}$$





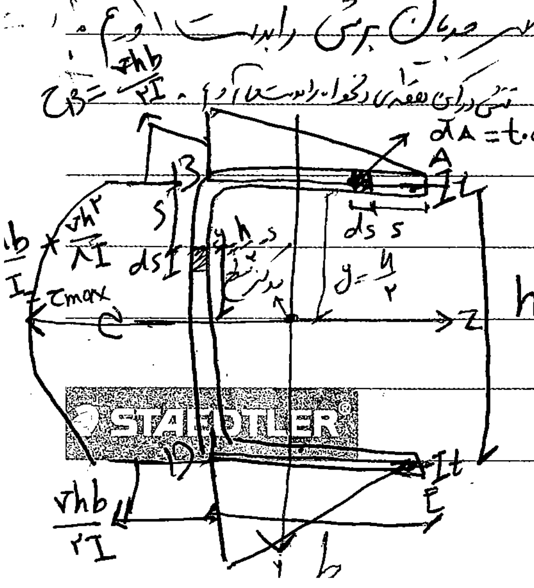
$$F = \frac{VQ}{I} \cdot e < F_{\text{مجاز}}$$

$$F = \frac{VQ}{I} \cdot e < F_{\text{مجاز هر میخ}}$$

اگر بخواهیم تنش را در تیر I شکل یا مقاطع دیگر و به عبارت دیگر جریان برشی را بدست آوریم

** (توزیع تنش برشی در مقاطع جدار نازک)

مثال: تیر ناودانی



حل در جلسه بعد

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\tau_{AB} = \frac{V}{It}\overbrace{\int y\,dA}^{Q} = \frac{V}{I\cancel{t}}\int \underbrace{\frac{h}{2}}_{y}\cdot\underbrace{\cancel{t}\,ds}_{dA} = \frac{Vh}{2I}s$$

(تنش در داخل بال)

$$\text{جان}\quad \tau_{BD} = \frac{V\overset{\text{بال}}{Q'}}{It} + \frac{V}{It}\int y\,dA = \tau_B + \frac{V}{I\cancel{t}}\int\left(\frac{h}{2}-s\right)\cancel{t}\,ds$$

$$\text{جان}\quad \tau_{BD} = \frac{Vhb}{2I} + \frac{Vh}{2I}s - \frac{Vh}{2I}\times\frac{s^2}{2}$$

!! درجه ۲ است

سهمی است (s^2)

$$\text{جان}\quad \tau_{max} = \tau_C = \frac{Vhb}{2I} + \frac{Vh^2}{8I}$$

مثال عددی :

برای شکل صفحه قبل

$$I = \overset{\text{جان}}{\frac{th^3}{12}} + 2\left[\underbrace{\overset{\text{بال}}{\frac{bt^3}{12}}}_{0} + \underbrace{(bt)\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^2}_{Ad^2=\text{استال}}\right] = \frac{th^2}{12}(h+6b)$$

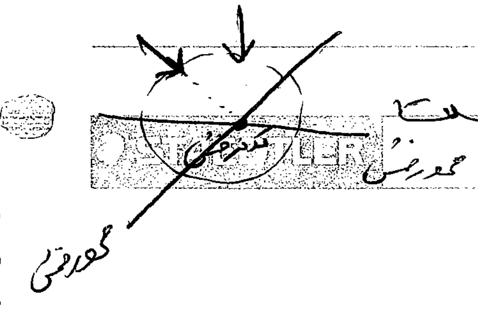
$$\text{if}\begin{cases} V = 8000\,N \\ b = 100\,mm \\ h = 150\,mm \\ t = 3\,mm \end{cases}\qquad \begin{aligned} \tau_B &= 14.22\,MPa \\ \tau_{max} &= 19.54\,MPa \end{aligned}$$

نکته : ما جریان برش را برای مرکز برشی بدست آوردیم

ما دو تا مرکز داریم : ۱ـ مرکز سطح (مرکز خمشی) : اگر نیرو از مرکز سطح عبور نکند تولید خمش می‌کند

۲ـ مرکز برش (مرکز پیچش)

نکته : محل برخورد دو محور خمشی (مرکز خمشی = مرکز سطح) هم هست



مرکز سطح نقطه ای است که اگر بخواهیم خمش نداشته باشیم باید نیرو از آن عبور کند
(خمش ناشی از نیروهای محوری و پیچش ناشی از نیروهای برشی است) ##

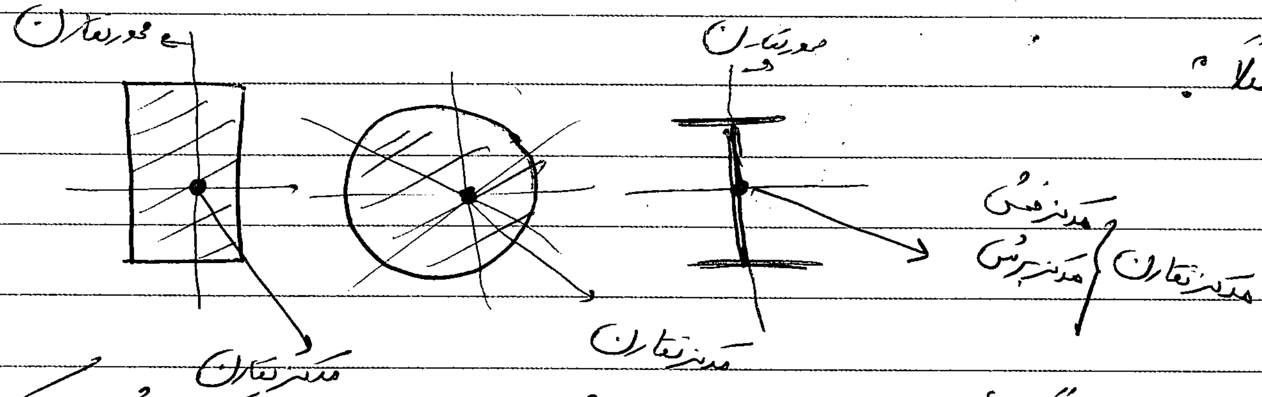
اگر بخواهیم پیچش ایجاد نشود باید نیروی برشی از مرکز برشی بگذرد.

مرکز برشی : نقطه ای است که اگر نیروی برشی از آن بگذرد پیچش به وجود نیاید

مرکز سطح : " " " " " " نیروی محوری " " " خمش " " "

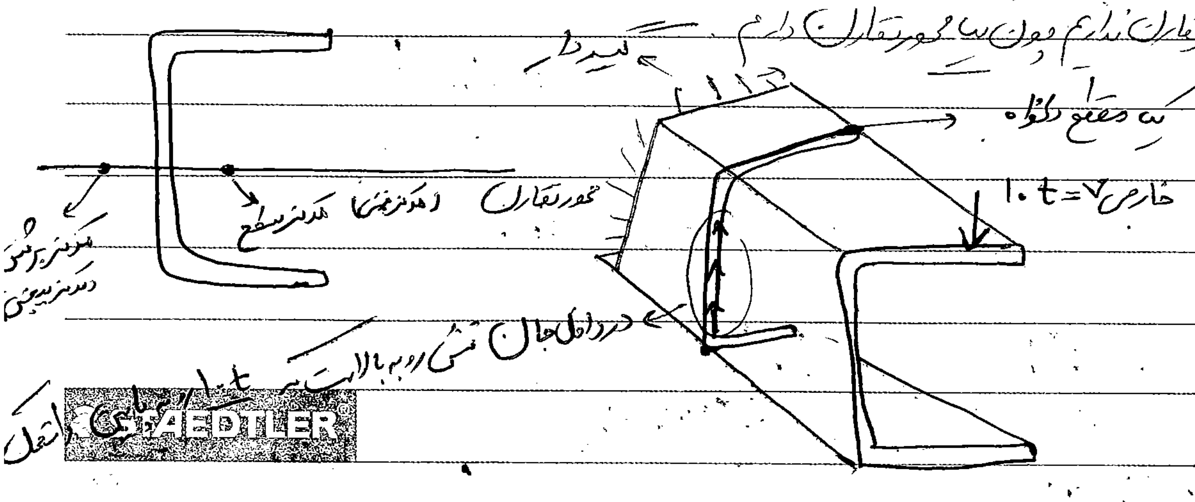
* اگر یک شکل مرکز تقارن داشته باشد آن گاه مرکز سطح و مرکز برشی بر هم منطبق هستند

مثلا :



* نیرو لزوما قائم نیست هم می تواند افقی باشد و هم مورب مهم این است که از مرکز برشی عبور کند #

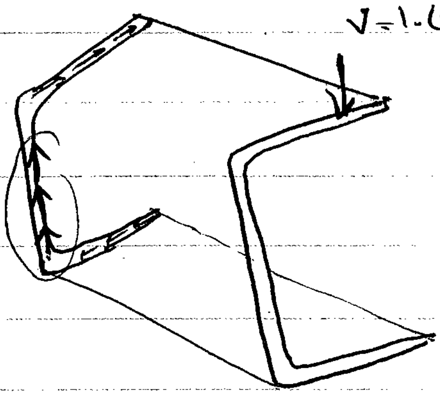
حال اگر شکلی دارای مرکز تقارن نشود باید مرکز برشی آن را بدست آوریم : (ناودانی)



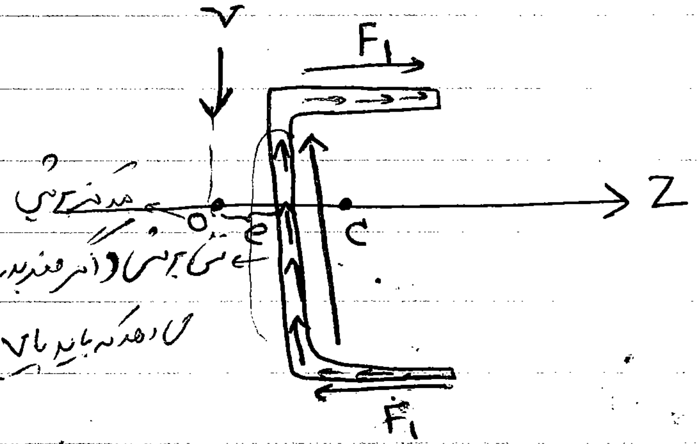
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

دیاگرام آزاد؟



نمای از روبه رو:



دو تا F_1 کوپل ایجاد کنند که باید V را خنثی کنند یعنی باید منتج به ساعتگرد شود

e = فاصله مرکز برشی تا مرکز جان

مرکز برش همیشه روی محور تقارن است

$F_1 =$ مساحت بال × تنش در بال — در صورتی که تنش یکنواخت باشد

بال τ_{Ave} تنش متوسط را می‌اندازیم

$$\overbrace{F_1 \cdot h}^{\text{کوپل}} = V \cdot e \Rightarrow \boxed{e = \frac{F_1 \cdot h}{V}}$$

$$F_1 = \tau^{\text{بال}}_{Ave} \times A_{\text{بال}} = \frac{Vhb}{4I} \times bt = \frac{Vthb^2}{4I}$$

(با توجه به شکل آخر صفحه‌ی صفحه‌ی الف)

$$e = \frac{Vth^2b^2}{V(4I)} = \frac{\cancel{V}\,\cancel{t}h^2b^2}{\cancel{4}\,\frac{th^2(6b+h)}{3}} \Rightarrow \boxed{e = \frac{3b^2}{h+6b} = \frac{b}{2+\frac{h}{3b}}}$$

$$I = \frac{th^2}{12}(h+6b)$$

SUBJECT :

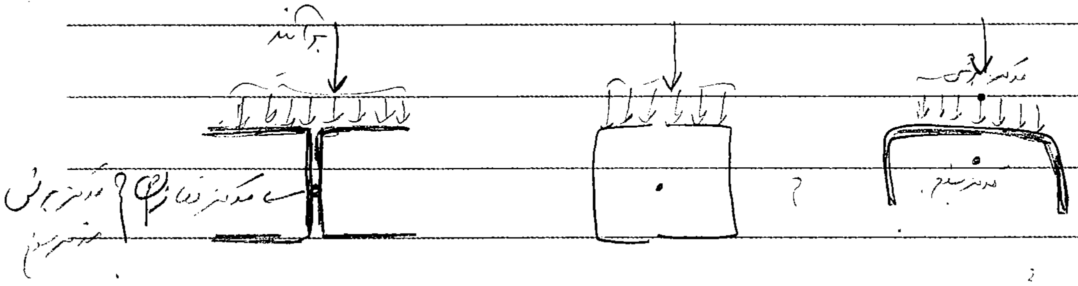
Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$\text{if}\begin{cases} V = 8000\,N \\ b = 100\,mm \\ h = 150\,mm \\ t = 3\,mm \end{cases} \Longrightarrow \boxed{e = 40\,mm}$$

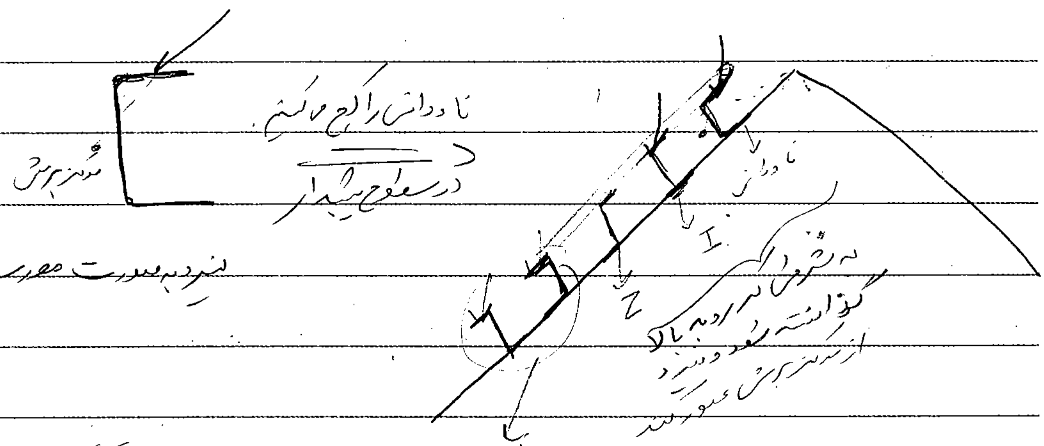
پس نتیجه: اگر یک مقطع ناودانی داشتیم باید نیرو را به آن وارد کنیم در ۴۰mm به سمت بیرون ناودانی باشد.

سؤال: در ناودانی چه جوری نیرو وارد شود؟ چون این جوری که در شکل نشان داده شده نیرو در بیرون ناودانی است نمی‌ایستد

راه‌حل: ناودانی را دوبل می‌کنیم (در صورتی که بخواهیم به عنوان تیر استفاده کنیم که نپیچد) باید به شکل زیر در بیاوریم.



بهترین حالت:



نیرو به صورت عمود وارد شود

مثال بد است این مدل (چون رو به پایین گذاشته شده) دچار پیچش می‌شود

مثال ۵.۶ و ۶.۶ ص ۲۴۰ ص ۲۴۱

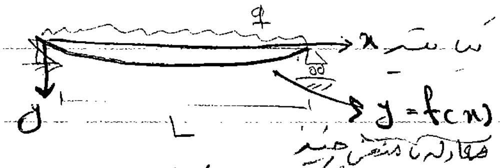
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

فصل ۹: تغییر شکل تیرها

اصلاً بحث تنش و مقاومت نیست
در این فصل

می‌خواهیم بررسی کنیم مثلاً یک تیر چه مقدار تغییر شکل می‌دهد (هر تیر با بار هر شکلی)



تکیه‌گاه‌ها و بارگذاری چه جوری تیر را تغییر شکل می‌دهد (یعنی معادله‌ی $y = f(x)$ را می‌خواهیم بدست آوریم) = هدف این فصل

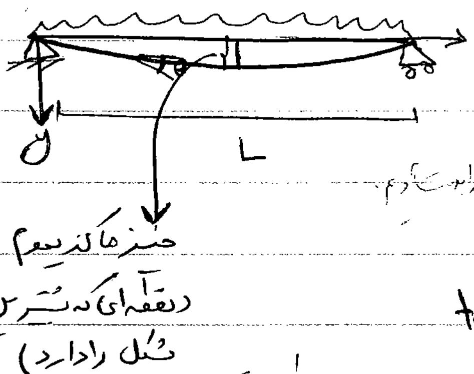
درجه ۳ یا ۴ ...

که به $y = f(x)$ معادله‌ی منحنی الاستیک تیر گفته می‌شود

حال چه اطلاعاتی را می‌خواهیم؟

وقتی معادله‌ی منحنی را پیدا کردیم y هر نقطه را به راحتی می‌توان بدست آورد.

(شکل الف)



برای بدست آوردن خیز ماکزیمم از منحنی $y = f(x)$ مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم و xهایی که بدست می‌آید را در معادله‌ی y قرار می‌دهیم تا نقطه‌ی ماکزیمم بدست آید

* بیشترین شیب در تکیه‌گاه‌هاست *

$\tan\theta = y' =$ شیب

از نقاط دیگری که برای ما مهم است شیب است. از شیب استفاده می‌کنیم که باید $y' = 0$ قرار دهیم

هدف دیگر از این مبحث تحلیل تیرهای نامعین است (مثلاً تیری که ۳ تا تکیه‌گاه دارد باید معادله‌ی سازگاری تغییر شکل‌ها را بنویسیم)

تغییر شکل تیرها:

(در صفحه‌ی بعد)

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

در فصل خمش
فرمول شماره ۱ : $\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{dx}$

چون θ زاویه ناچیز است
میل کوچک است $\Rightarrow \theta=\tan\theta=\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'=\text{شیب}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

در فصل خمش فرمول
شماره ۵ : $\frac{1}{\rho}=\boxed{\frac{M}{EI}}$

$$\frac{M}{EI}=\overset{\text{منفی}}{-}\frac{d^2y}{dx^2}$$

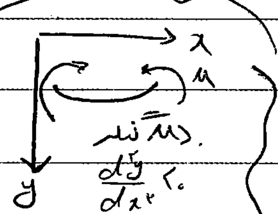
معادله دیفرانسیل منحنی الاستیک

$EIy''=-M_x \longrightarrow$ ادامه در پایین صفحه

تابعی بر حسب x است

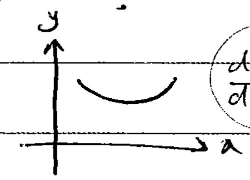
دوبار انتگرال بگیریم تا y بدست آید.

M را هم باید مقطع بزنیم و بر حسب x بدست آوریم.



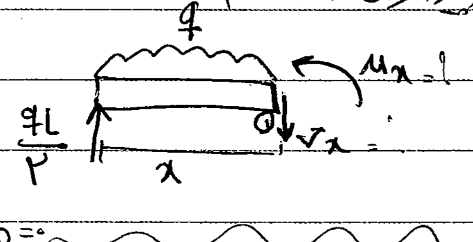
M ها مثبت $\frac{d^2y}{dx^2}>0$

هرچند تقعر به سمت بالاست اما چون جهت محور y به سمت پایین است پس y منفی میشود



$\frac{d^2y}{dx^2}>0$

با تقسیم به شکل الف صفحه قبل یک مقطع به فاصله x می‌زنیم (پیدا کردن Mx = هدف)



نکته: همیشه با هر بارگذاری و هر نوع تکیه گاهی باید دوبار انتگرال بگیریم تا y را بدست آوریم.

و ثابت ها را c1 و c2 و ... را هم باید با بارگذاری نقاط مرزی
$x=0 \leftarrow y=0$ و $x=L \leftarrow y=0$

$\sum M_O=0$

$$\underbrace{M_x+qx\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{qL}{2}x}_{\text{معادله Mx بدست آمد}}$$

ادامه حل معادله ۳

$$EIy''=\frac{qx^2}{2}-\frac{qL}{2}x \xrightarrow{\text{انتگرال}} EIy'=\frac{qx^3}{6}-\frac{qLx^2}{4}+C_1 \xrightarrow{\text{انتگرال}}$$

$$EIy=\frac{qx^4}{24}-\frac{qLx^3}{12}+C_1x+\cancel{C_2} \Rightarrow$$ (در صفحه بعد)

شرایط مرزی $x=0,\ y=0 \Rightarrow \boxed{C_2=0}$

شرایط مرزی $\left.\begin{matrix}x=L\\ y=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow 0=\frac{qL^4}{24}-\frac{qL^4}{12}+C_1L \Rightarrow \boxed{C_1=\frac{qL^3}{24}}$

$$\cancel{EIy' = \frac{qx^3}{6} - \frac{qLx^2}{4} +}$$

پس: $y'' = \dfrac{1}{EI}\left[\dfrac{qx^2}{2} - \dfrac{qL}{2}x\right]$

$$y' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^3}{6} - \frac{qLx^2}{4} + \frac{qL^3}{24}\right]$$

$$\cancel{y = f(x)}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^4}{24} - \frac{qLx^3}{12} + \frac{qL^3x}{24}\right]}$$

حال اگر خیز ماکزیمم را بخواهند [که در این مسئله تیر شکل الف، به علت تقارن

داریم خیز در وسط است]

برای بدست آوردن خیز $y'=0$ قرار میدهیم

$$y' = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}$$

$x = \frac{L}{2}$ را در $y = f(x)$ قرار میدهیم:

$$y_{max} = \frac{5\overset{\text{شدت بار}}{q}L^4}{384EI}$$

طول تیر

اگر شیب تیر در تکیه گاه را بخواهند (شیب حداکثر = شیب تکیه گاه)

شیب حداکثر یعنی $y' = max$ شود پس باید $y'' = 0$ قرار دهیم

$$y'' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = L \end{cases} \xrightarrow{x=0} y'_{max} = \underbrace{\theta_{max}}_{\theta = \tan\theta} = \frac{qL^3}{24EI}$$

x ها را در y' قرار دهیم

$$x = L \Rightarrow y'_{min} = \theta_{min} = -\frac{qL^3}{24EI}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

اگر جواب ندهد … را بزرگ

بار اکس ممان Q را چک کنیم – کنترل برش – کنترل تنش برشی ✓ $\tau_{max} = \frac{V_{max}\cdot Q}{It} \le \tau_{مجاز}$ فصل ۵

اگر جواب ندهد ابعاد را … بزرگ می کنند

در کنترل تیر برشی و خمشی – کنترل تنش قائم ✓ $\sigma_{max} = \frac{M_{max}\cdot C}{I} \le \sigma_{مجاز}$ فصل ۴

باید کنترل برش و خمش

خیز مجاز ≥ خیز بوجود آمده کنترل خیز ⇐ خیز مجاز ≥ $\frac{5qL^4}{384EI}$ ✓

خیز مجاز را به صورت $\frac{L}{عدد}$ می دهند

اگر جواب ندهد به خاطر این که خیز زیاد شود، مصالح دیگر یا ممان … را افزایش می دهند

دلیل … سازه های … (سازه های …)

اگر در زیر سقفی باشیم خیز داشته باشد از نظر … مشکل دارد.

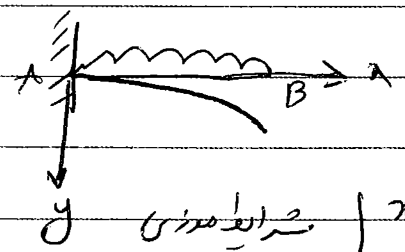
هر وقت خیز وجود داشت دلیل بر این است که تنش وجود دارد.

برای تیرهای کوتاه برش مطرح است (τ_{max} بحرانی است)

… σ_{max} بحرانی است

… خیز بحرانی است (اگر … بحرانی باشد)

نکته: اگر شرایط تکیه گاهی به صورت زیر باشد



معادله این تیر با شرایط این است که معادله M … است

شرایط مرزی $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=0 \\ y'=0 \end{cases}$ $\Rightarrow C_1=?\ C_2=?$

شرایط در تکیه گاه

هر تکیه گاه مفصلی یک شرط مرزی دارد که $y=0$ است.

هر تکیه گاه گیردار دو شرط مرزی دارد که $y=0$ و $y'=0$ است

تکیه گاه آزاد شرط مرزی ندارد.

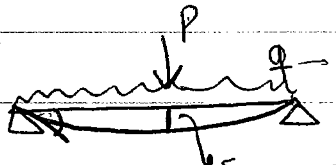
STAEDTLER (تمام سوال ها … مخصوص …) … می شود

از این جا به بعد کاربردی است. (برای حل مسئله های این مبحث جدول به ما می دهند)
تغییر شکل

خیلی مهم
* تحلیل تیرهای نامعین : (جدول ص ۴۶۸ جانسون بهویت د)

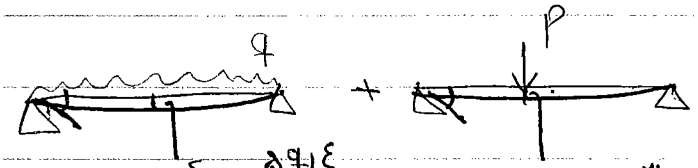
مقدمه : مثال برای کاربرد جدول

مثال ۱ :



$\delta_{max} = \delta_1 + \delta_2$
خیز ماکزیمم

خیز ماکزیمم و شیب ماکزیمم؟
کاربرد اصل برهم نهش (جمع آثار قوا)

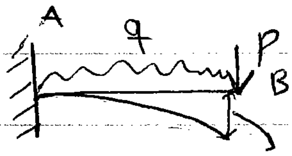


$\delta_1 = \frac{5qL^4}{384EI}$ از جدول بدست می آید.

$\delta_2 = \frac{PL^3}{48EI}$ از جدول بدست می آید.

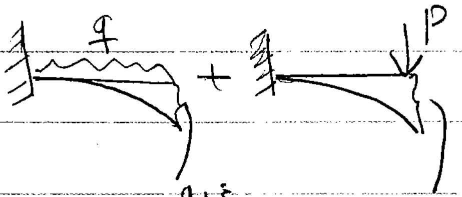
تمام مشخصات تیر مجموع این دو تیر می شود. حتی تغییر شکل تیر اصلی در ($y=f(x)$) هم مجموع تغییر شکل این دو تیر است. یعنی دو معادله را با هم جمع می کنیم (خیز ماکزیمم (δ_{max}) هم از جمع δ_1 و δ_2 بدست می آید.

مثال ۲ : تیر کنسول



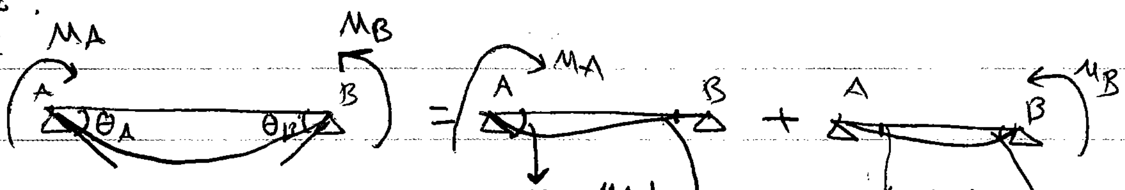
$\delta_{max} = \delta_B = \delta_1 + \delta_2$

اگر یکی از بار متمرکز از پایین به تیر وارد شود، و یا گسترده در بالا باشد. آن گاه $\delta_{max} = \delta_1 - \delta_2$ می شود.



$\delta_1 = \frac{qL^4}{8EI}$ $\delta_2 = \frac{PL^3}{3EI}$

مثال ۳ :
گشتاور در طول MA و MB گسترده



زاویه A $= \frac{M_A \cdot L}{3EI}$

زاویه A $= \frac{M_B \cdot L}{6EI}$

پس $\theta_A = \frac{M_A \cdot L}{3EI} + \frac{M_B \cdot L}{6EI}$

$\theta_B = \frac{M_A \cdot L}{6EI} + \frac{M_B \cdot L}{3EA}$

زاویه B $= \frac{M_A \cdot L}{\underset{2\times 3}{6EI}}$

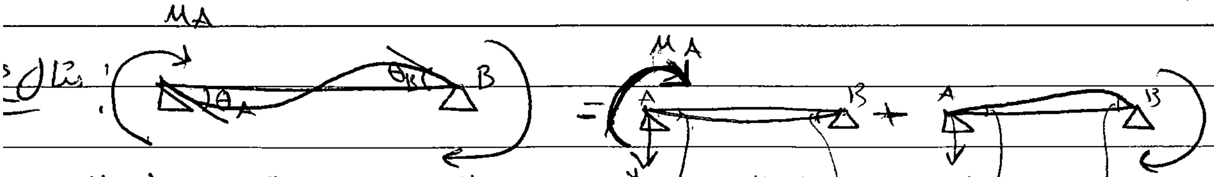
زاویه B $= \frac{M_B \cdot L}{3EA}$

نصف زاویه A است

No...............

(حالت دوم)

مثال ۱:



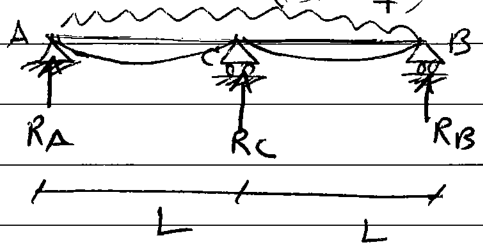
$\theta_A = \frac{M_A \cdot L}{3EI} - \frac{M_B \cdot L}{6EI}$, A زاویه $= \frac{+M_A \cdot L}{3EI}$, A زاویه $= \frac{-M_B \cdot L}{6EI}$

در این حالت جمع می‌کنیم

$\theta_B = \frac{-M_A \cdot L}{6EI} + \frac{ML}{3EI}$, B زاویه $= \frac{-M_A \cdot L}{6EI}$, B زاویه: $\frac{ML}{3EI}$

حالت اول

تیر نامعین: (عامل هندسی زاویه را به عنوان بار حذف می‌کنیم و سوپرپوزیشن می‌کنیم)



دو معادله تعادل داریم $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M = 0$ است

و برای ΣM هم تنها یک معادله تعادل در راستای ... داریم

با توجه به شکل آخر صفحه

معادله سازگاری تغییر شکل: $\delta_C = (\delta_C)_1 + (\delta_C)_2 = 0 \Rightarrow \frac{5q(2L)^4}{384EI} + \left(-\frac{R_C(2L)^3}{48EI}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{R_C = \frac{5}{4} qL}$

در این فصل اول به سراغ معادله تعادل نمی‌رویم چون مجهولات زیاد است پس اول معادله سازگاری را حل می‌کنیم و بعد به سراغ معادله تعادل می‌رویم.

معادلات تعادل:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{R_A + R_B + R_C = 2qL}$

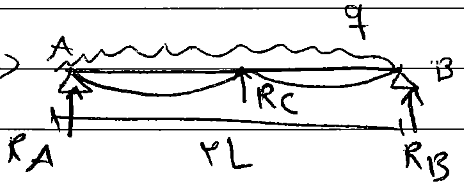
$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow \boxed{R_A = R_B} = \frac{3}{8} qL$

۲ معادله و ۳ مجهول پس نامعین است

وقتی R_C برابر $\frac{5}{4} qL$ است پس $\frac{3}{4}$ باقی مانده پس R_A و R_B را تقسیم می‌کنیم $(2qL - \frac{5}{4}qL = \frac{3}{4}qL)$ و به هر کدام $\frac{3}{8}qL$

در این شکل اگر ۲ تا تکیه‌گاه داشت حالت معین بود (استاتیکی)

اگر تکیه‌گاه C نبود $\Rightarrow$

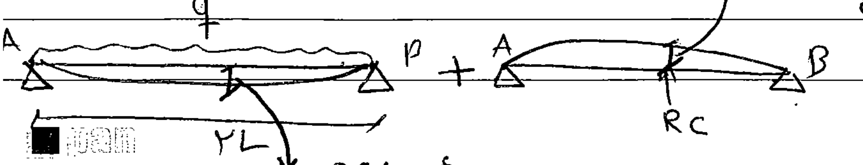


ولی برای اینکه این شکل با شکل اصلی برابر باشد باید R_C را به عنوان عکس‌العمل در نظر بگیریم به عنوان عمل در نظر می‌گیریم

حال این شکل را سوپرپوزیشن می‌کنیم

||

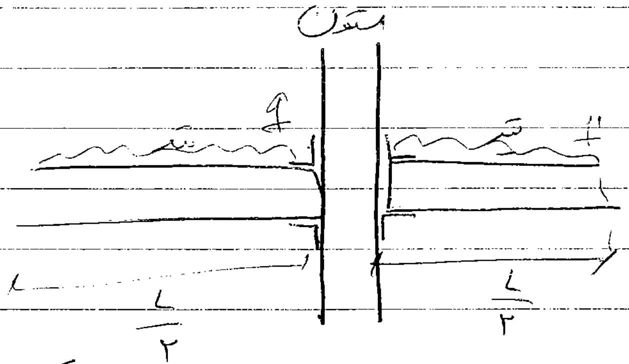
$(\delta_C)_2 = \frac{-R_C(2L)^3}{48EI}$



$(\delta_C)_1 = \frac{5q(2L)^4}{384EI}$

سوپرپوزیشن = بارها [illegible] + بار گسترده

نتیجه: عکس العمل تکیه‌گاه وسط دو برابر تکیه‌گاه‌های کناری نشد بلکه از آن‌ها بیشتر شده است



در این جا تیر قطع شده، که ستون qL و تیرهای کناری $\frac{qL}{2}$ بار می‌گیرد
نیمی qL

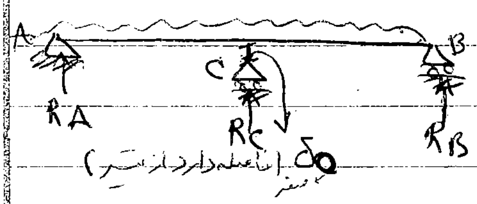
اما در شکل صفحه‌ی قبل تیر قطع نشده و به صورت سراسری است که R_C که همان نقش ستون را بازی می‌کند $\frac{5}{4}$ بار می‌گیرد و دو برابر کناری‌ها نیست
qL

در این جا ۳ تیپ مسئله مطرح می‌شود:

حالت دوم:

عکس العمل‌ها = ?

معادلات تعادل آن مثل حالت اول است
اما: δ_0 صفر نیست

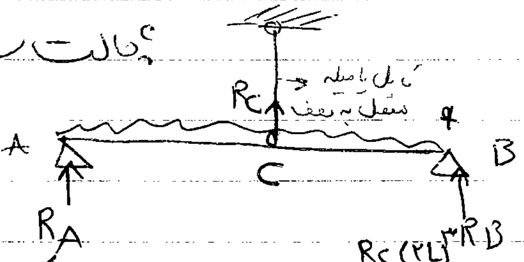


معادله‌ی سازگاری:

$$\delta_C = \delta_1 + \delta_2 = \delta_0$$

$\Rightarrow$ $R_C =$ محاسبه می‌شود
مثل حالت اول

حالت سوم:



کابل قطع نشده می‌شود.

سازگاری:

$$\frac{R_C(2L)^3}{48EI}$$

$$\delta_C = \delta_1 + \delta_2 = \frac{R_C \cdot L}{EA} = \frac{R_C}{\frac{EA}{L}}$$

$\frac{5q(2L)^4}{384EI}$ بار تیر

$\frac{PL}{EA} \rightarrow$ کابل
A کابل

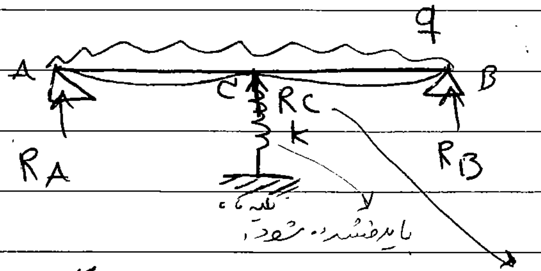
همان k در فنر است

No……………

در این یا معادله سازگاری یا فنر است یا ...

R تکیه‌گاه باعث فشردگی فنر، کند باعث دوران و ... می‌شود.

فنر به سقف و حالت ... متصل شود یا فنر به زمین وصل شود



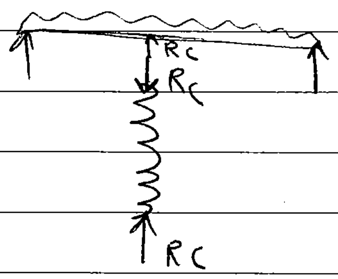
تغییر طول فنر

$$F = k.\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{k}$$

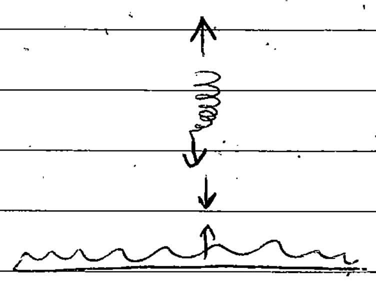
سازگاری:

$$\delta c = \delta_1 + \delta_2 = \frac{R_C}{k}$$

نیرویی که از فنر به تیر وارد می‌شود.

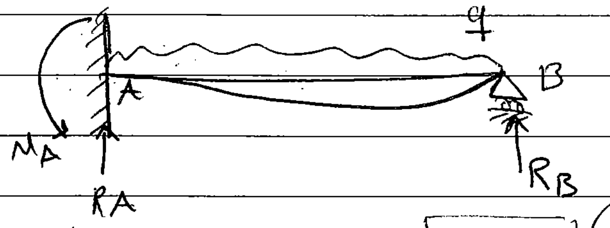


دیاگرام فنر:



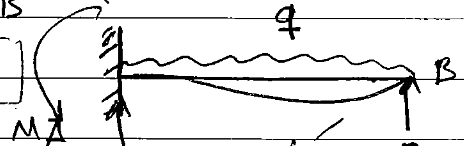
اگر فنر بالا باشد.

یا R_B اضافه است و یا M_B لازم است



حالت اول: R_B لازم است.

معادل هم هستند



معادلات تعادل

$$\Sigma F_y = R_A + R_B = qL \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{5}{8} qL}$$

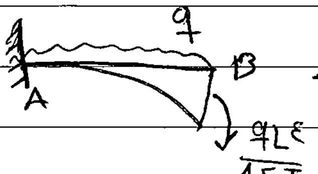
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A + R_B \cdot L = \frac{qL^2}{2}$$

$$\boxed{M_A = \frac{qL^2}{8}}$$

$$qL - \frac{3}{8} qL = \frac{5}{8} qL = R_A$$

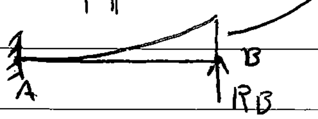
همین یعنی $R_B = \frac{3}{8} qL$

R_B تکیه‌گاه ثابت و ...



$$\frac{qL^4}{8EI}$$

+



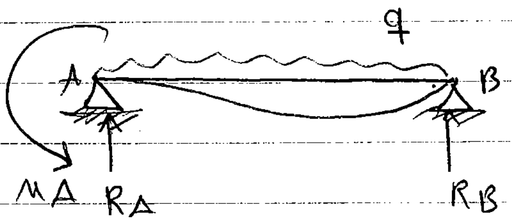
$$\frac{-R_B L^3}{3EI}$$

معادله سازگاری

$$; \delta_B = \delta_1 + \delta_2 = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = \frac{3}{8} qL}$$

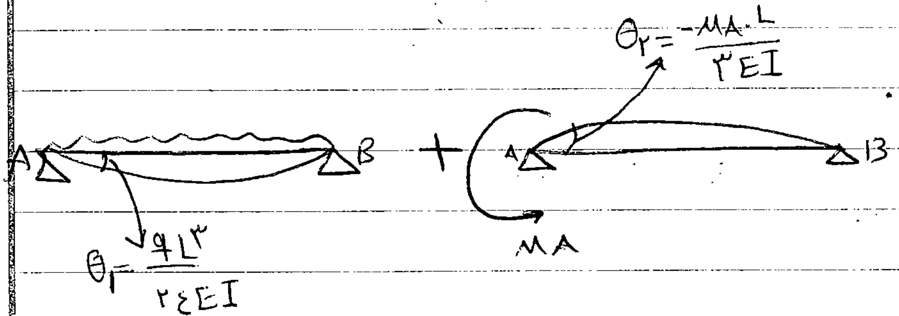
طبق شکل تغییر مکان B صفر است

حالت دوم = M_A مجهول است:



اگر ما M_A را صفر کنیم یعنی تکیه‌گاه گیردار مفصلی شود

(یعنی M_A را از حالت تکیه‌گاه (علی‌الحال) خارج می‌کنیم)



معادله‌ی سازگاری:

چون یک عامل مجهول M_A پس معادله سازگاری یک باید بنویسیم

$$\theta_A = \theta_1 + \theta_2 = 0 \Longrightarrow \boxed{M_A = \frac{qL^2}{8}}$$

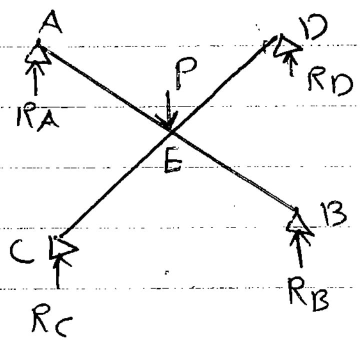
معادلات تعادل:

$$\Sigma M_A = 0 \Longrightarrow \frac{qL^2}{8} + R_B \cdot L = \frac{qL^2}{2} \Longrightarrow \boxed{R_B = \frac{3}{8}qL}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow R_A + R_B = qL \Longrightarrow \boxed{R_A = \frac{5}{8}qL}$$

چند مسأله:

مثال ۱: (امتحانی)



(وسط تیر AB روی وسط تیر CD تکیه کرده)

تیر AB از روی تیر CD عبور کرده و با آن تماس دارد

بار P مستقیم روی AB است

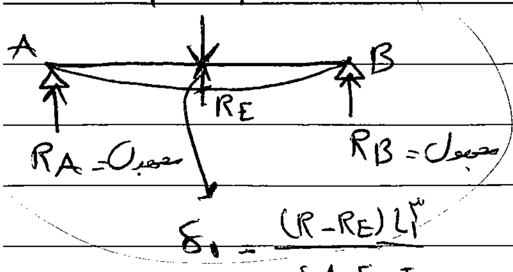
و CD به طور غیرمستقیم بار P را تحمل می‌کند

فرض کنیم مشخصات AB، 1 باشد و مشخصات CD، 2 باشد.

برای محاسبه تعداد معادلات تعادل تیرها را

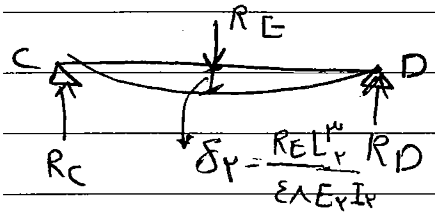
از هم جدا می‌کنیم (در صفحه بعد)

No. ($P - R_E$ ، E دراصل باید سوپرپوزیشن کنیم (اما در این جا می‌شود در



$$\delta_1 = \frac{(P - R_E) L_1^3}{48 E_1 I_1}$$

تیر پایینی برای تیر بالایی به منزله تکیه‌گاه است
اما تیر بالایی به منزله قرار گرفتن بار روی تیر پایینی است



$$\delta_2 = \frac{R_E L_2^3}{48 E_2 I_2}$$

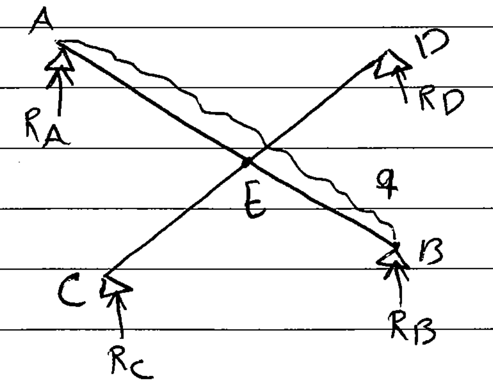
پس در کل ۵ تا مجهول داریم و برای هر تیر دو
معادله تعادل داریم : ۲ تا در هر تا تیر } ۴ معادله ۵ مجهول

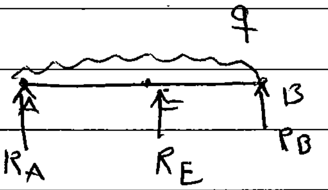
در نقطه E باید هم برابرند $\Longrightarrow$ CD خیز = AB خیز

معادله سازگاری : $\delta_1 = \delta_2 \Longrightarrow R_E =$ بدست می‌آید

نکته : اگر یک تیر بدون بار به ما دادند باید وزن تیر را آن را بدست آورده ... در نقطه تلاقی هیچ وقت
در مقاومت ... را با وزن تیر در نقطه تلاقی آن معادل نمی‌کنیم

مثال ۱ : با تقارن

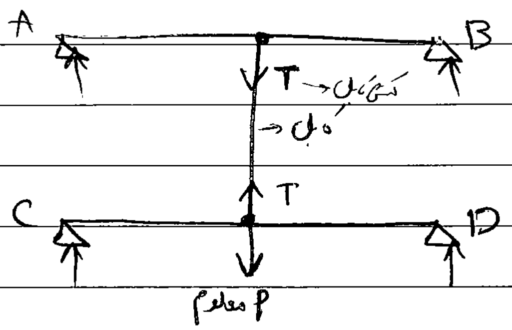




باید سوپرپوزیشن شود

اما باز هم $\delta_1 = \delta_2$ برابر است

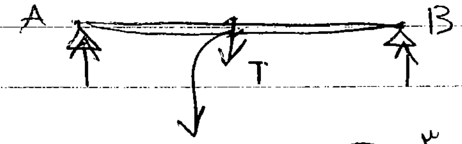
مثال ۲ : نکته : نیروهایی که به کابل وارد می‌شوند کشش است



و در انتها به تیر پایینی وصل کرده‌ایم.

۵ مجهول

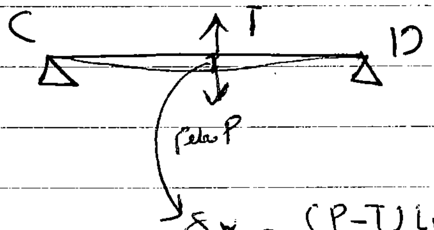
دیگر کدام آزاد شد



$$\delta_1 = \frac{TL_1^3}{48E_1I_1}$$

سازگاری: $\delta_2 - \delta_1 = \delta_{\text{کابل}}$

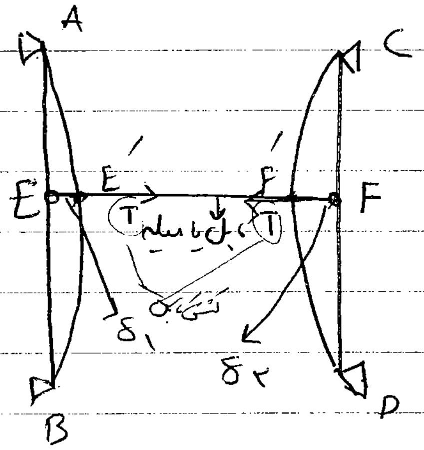
$$\frac{(P-T)L_2^3}{48E_2I_2} - \frac{TL_1^3}{48E_1I_1} = \frac{TL_3}{E_3A_3}$$



$$\delta_2 = \frac{(P-T)L_2^3}{48E_2I_2}$$

مثال ۳:

کابل را سرد کنیم نیروی کششی را حساب کنید



سازگاری: $|\delta_1| + |\delta_2| = |\delta_{\text{کابل}}|$

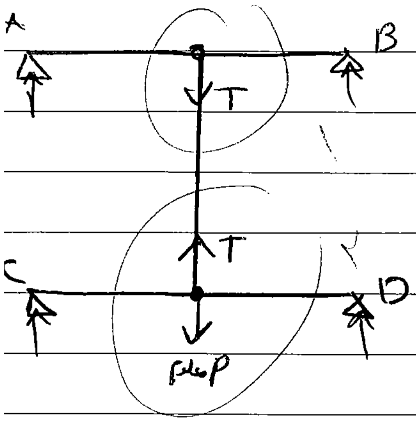
$$\frac{TL_1^3}{48E_1I_1} + \frac{TL_2^3}{48E_2I_2} = |\alpha \cdot L\Delta T| - \frac{TL}{EA} \Rightarrow \boxed{T = \text{بدست می‌آید}}$$

چون کابل را سرد کردیم

اگر کابل در یک سرش یا هر دو سرش آزاد بود فقط تغییر طول ناشی از دما بود اما چون دو سرش ثابت است بخشی از آن کشش است پس تغییر طول ناشی از کشش را هم باید لحاظ کنیم

No...............

مثال:



$$\frac{TL_1^3}{48E_1I_1}+\frac{(T-P)L_2^3}{48E_2I_2}=\left|\alpha L \Delta T\right|-\frac{TL}{EA}$$

$$\delta_2 - \delta_1 = \delta$$

$$\frac{(P-T)L_2^3}{48E_2I_2}-\frac{TL_1^3}{48E_1I_1}=\frac{TL}{EA}+\alpha L \underbrace{\Delta T}_{-20}$$

No.