▽▽ محاسبات عددی

کتاب: آنالیز عددی ؛ تألیف Kandel Atkinson ترجمه ~~[illegible]~~ طباطبایی / تألیف: ریچارد بوردن

میان ترم: ندارد   پایان ترم: ۱۸ نمره   TA: ۲ نمره   ▽ ماشین حساب مهندسی

حل تمرین: فصل ۱: ۱۰ تا / فصل ۲: ۱۰ تا / فصل ۳: ۱۰ تا / فصل ۴: ۵ تا / فصل ۵: ۵ تا ← جمع ۴۰

← آنالیز خطا Error Analysis

ارزیابی دقت محاسبات یکی از مهم مباحث آنالیز عددی می باشد

به عنوان مثال از دیدگاه محاسباتی نتیجه ریشه های از معادلات $x^2 - 5 = 0$ و $(x^2-5)^5 = 0$ تفاوت خواهد بود

← منابع خطا

۱- خطای مدل: ناشی از ساده سازی ها در مدل سازی پدیده هاست

۲- خطای اندازه گیری: ناشی از کارکردن با ابزارهای اندازه گیری پدیده های کلی است

۳- خطای نمایش اعداد

۴- خطای اعمال حسابی

۵- خطای الگوریتم

← انواع خطا

۱- خطای داده های ورودی (IDE = (Input Data Error   ▽ IDE خارج از دسترس محاسبات است

۲- خطای روند (RE = (Roundoff Error   ▽ ناشی از کار با اعداد ماشین و محاسبات ماشین است

۳- خطای تقریب (AE = (Approximation Error

▽ در بسیاری از مسائل حل مسئله مفروض P جایگزین مسئله جایگزین مانند $\hat{P}$ انجام می شود

← نمایش اعداد

* نمایش علمی اعداد را می توان از دو دیدگاه زیر بررسی نمود:

1) Analog Device Representation (Fixed point Rep.) ← نمایش نقطه ثابت

2) Digital Device Representation (Floating point Rep.) ← نمایش نقطه شناور

▽ می توان هر عدد حقیقی x را بصورت زیر نمایش داد:

$$x = a \cdot B^{e}$$

نما

پایه

مانتیس یا مفسر

$|a| < 1$

معمولاً: $B = 2, 4, 10, 16, 32, 64, \ldots$

تعریف: اگر $\frac{1}{B} \le |a| < 1$ باشد نمایش فوق را نرمال گوییم که در آن B پایه نمایش اعداد a و e است

← بررسی نحوه ذخیره شدن $x = a\beta^e$ در یک کامپیوتر

* بعد از انتخاب پایه مناسب (β) برای نشان دادن عدد در سلول های حافظه ماشین ناچار هستیم یک نمایش صفر ـ یکی به عدد اطلاق کنیم

$$(a)_\beta = (0.\alpha_1\alpha_2\dots)_\beta$$

$$(e)_\beta = (0.e_1 e_2 \dots)_\beta$$

* فرض کنید $e = (0.e_1\dots e_k)$ باشد نمایش عدد a از نقطه نظر آنالوگ و دیجیتالی به نحو زیر است (t رقم اعشار)

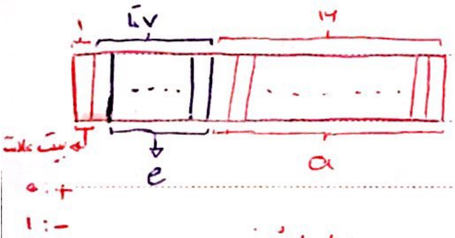
1) Fixed point $\quad \alpha = 0.\alpha_1\alpha_2\dots$

(قطع کردن) $\quad \tilde\alpha = 0.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t$

2) Floating point (گرد کردن)

$$\tilde\alpha = \begin{cases} 0.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t & \alpha_{t+1} < \frac{\beta}{2} \\ 0.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t + \beta^{-t} & \alpha_{t+1} > \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

← نتیجه: If $x = a.\beta^e \xrightarrow{\text{اعمال محدودیت}} x \rightsquigarrow rd(x) = fl(x) = \tilde a.\beta^e$



* فرض کنید می خواهیم نحوه ذخیره شدن یک عدد در یک ماشین را بررسی کنیم

(سلول های حافظه ماشین را 24 بیتی در نظر بگیرید ـ IBM 370 ـ)

$N = 2^{24}$ = تعداد کل اعداد قابل نمایش

$\tilde x = (\tilde a)_2\, \beta^{(e)_2}$ $\qquad M = (0.11\dots1)_2 \cdot 24^{(11\dots1)_2}$

$\beta = 24$ $\qquad m = (0.100\dots0)_2 \cdot 24^{(0\dots0)_2} = ./5$

اعداد ماشینی

$m \le x \le M$

← معیار های سنجش خطا

I) خطای قدر مطلق $\qquad$ II) خطای نسبی

تعریف: فرض کنید $\tilde x$ مقدار تقریبی یک کمیت عددی و x مقدار واقعی آن باشد:

خطای قدر مطلق: $e(x) = |x - \tilde x|$ $\qquad$ خطای نسبی: $\delta(x) = \frac{|x-\tilde x|}{|x|}$

قضیه: فرض کنید $x = a.\beta^e$ که a و e در پایه β باشد در این صورت با محاسبات t رقم اعشار از نقطه نظر نقطه شناور:

$$\delta(x) \le \frac{\beta}{2}\cdot\beta^{-t}$$

قرارداد: $\frac{\beta}{2}\cdot\beta^{-t}$ را eps یا دقت دستگاه می نامیم

قدر مطلق: $\tilde{x} = x + \varepsilon$

نسبی: $\tilde{x} = x(1+\varepsilon_1) \rightarrow \frac{|x-\tilde{x}|}{|x|} \leqslant \underbrace{\frac{\beta}{2}\beta^{-t}}_{\varepsilon_1}$

← خطای اعمال حسابی:

فرض کنید A و B مقدار عددی دو کمیت مثبت و a, b تقریب ماشینی آن ها باشند

در این صورت می خواهیم خطای اعمال حسابی ماشینی +، −، ×، ÷ را بررسی کنیم

! قضیه 8

$$\oplus \begin{cases} e(A+B) \leqslant e(A) + e(B) \\ \delta(A+B) \leqslant \underbrace{Max\{\delta(A), \delta(B)\}}_{M} \end{cases}$$

اثبات:

$$\delta(A+B) = \frac{|A+B-(a+b)|}{|A+B|} \leqslant \frac{|A-a|+|B-b|}{|A+B|} = \frac{|A-a|}{|A|}\cdot\frac{|A|}{|A+B|} + \frac{|B-b|}{|B|}\cdot\frac{|B|}{|A+B|}$$

$$= \frac{A}{A+B}\delta(A) + \frac{B}{A+B}\delta(B) \leqslant M\cdot\frac{A}{A+B} + M\frac{B}{A+B} = M$$

مثال: در محاسبات عبارت $z = \sqrt{3}+\sqrt{5}$ با محاسبات 5 رقم اعشار حداکثر خطای نسبی محاسبه z چقدر است؟ ۳۰

$\beta = 10 \qquad eps = 5\times 10^{-t} \qquad \begin{cases}\delta(\sqrt{3}) = 5\times 10^{-5} \\ \delta(\sqrt{5}) = 5\times 10^{-5}\end{cases} \rightarrow \delta(\sqrt{3}+\sqrt{5}) \leqslant 5\times 10^{-5}$

$$\otimes \begin{cases} e(AB) \leqslant Ae(B) + Be(A) \\ \delta(AB) \leqslant \delta(A) + \delta(B) \end{cases}$$

A, B کوچک

A, B بزرگ

$$\oslash \begin{cases} e(A\div B) \leqslant \frac{Ae(B) - Be(A)}{B^2} \\ \delta(A\div B) \leqslant \delta(A) + \delta(B) \end{cases}$$

! در تفاضل دو عدد احتمال حذف ارقام با معنی وجود دارد

$$\ominus \begin{cases} e(A-B) \leqslant e(A) + e(B) \\ \delta(A-B) \leqslant \frac{e(A)+e(B)}{|A-B|} \end{cases}$$

Year : ...... Month : ...... Day : ...... Subject : ......

ــــه خطای محاسبات توابع تک متغیره

می خواهیم قدر تابع $y=f(x)$ را در نقطه مفروض x محاسبه کنیم

$$e(f)=|f(x)-\tilde{f}(\tilde{x})| \leq |f(x)-f(\tilde{x})| + \underbrace{|f(\tilde{x})-\tilde{f}(\tilde{x})|}_{*}$$

* می خواهیم انتشار خطا توسط ضابطه f را بررسی کنیم:

← فرض کنید $x=\tilde{x}+\varepsilon$ در این صورت اگر f تابعی هموار باشد

بسط تیلور:

$$f(x)=f(\tilde{x}+\varepsilon)=f(\tilde{x})+\varepsilon f'(\tilde{x})+\underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon^2 f''(\tilde{x})+\dots}_{A}$$

اگر از جملات A صرف نظر کنیم:

$$f(x)-f(\tilde{x}) \simeq \varepsilon f'(\tilde{x}) \rightsquigarrow \underbrace{|f(x)-f(\tilde{x})|}_{e(f)} \lesssim \underbrace{|\varepsilon|}_{e(x)}|f'(\tilde{x})|$$

$$e(f) \lesssim e(x) \cdot |f'(\tilde{x})|$$ ضریب بزرگنمایی

← از دیدگاه خطای نسبی

$$\frac{e(f)\,|f(x)|}{|f(x)|} \lesssim \frac{e(x)\,|x|}{|x|} \cdot |f'(\tilde{x})|$$

$$\delta(f) \lesssim \delta(x) \cdot \left(\frac{|\tilde{x}|\,|f'(\tilde{x})|}{|f(\tilde{x})|}\right)$$ ضریب بزرگنمایی نسبی

مثال: مقدار $f(x)=\sqrt{x}$ را به ازای یک x ماشینی محاسبه کنید؟ $(x>0)$

ضریب بزرگنمایی نسبی: $\left(\frac{|\tilde{x}|\,|f'(\tilde{x})|}{|f(\tilde{x})|}\right)=\left|\frac{\tilde{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\tilde{x}}}}{\sqrt{\tilde{x}}}\right|=\frac{1}{2}$

ضریب بزرگنمایی قدرمطلق: $|f'(\tilde{x})|=\frac{1}{2\sqrt{\tilde{x}}}$

ــــه انتشار خطای توابع چند متغیره

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(hD_x+kD_y)^j f\Big|_{x_0,y_0}$$

← فرض کنید می خواهیم مقدار $z=f(x,y)$ را در نقطه (x,y) ماشینی محاسبه کنیم

$$\left.\begin{aligned} x&=\tilde{x}+\varepsilon_x\\ y&=\tilde{y}+\varepsilon_y\end{aligned}\right\} \rightsquigarrow z=f(\tilde{x}+\varepsilon_x,\ \tilde{y}+\varepsilon_y)$$

$$z=f(\tilde{x},\tilde{y})+\varepsilon_x f_x(\tilde{x},\tilde{y})+\varepsilon_y f_y(\tilde{x},\tilde{y})+\underbrace{\dots}_{\text{شامل خطاهای درجه ۲}} \rightsquigarrow e(f)=|f(x,y)-f(\tilde{x},\tilde{y})|$$

$$|f(x,y)-f(\tilde{x},\tilde{y})| \leq e(x)\,|f_x(\tilde{x},\tilde{y})|+e(y)\,|f_y(\tilde{x},\tilde{y})|$$

ضرایب بزرگنمایی

← دیدگاه خطای نسبی:

$$\frac{e(f)\,|f(x,y)|}{|f(x,y)|} \leq \frac{e(x)\,|x|}{x}\,|f_x(\tilde{x},\tilde{y})| + \frac{e(y)\,|y|}{|y|}\,|f_y(\tilde{x},\tilde{y})|$$

$$\delta(f) \leq \delta(x)\cdot\left|\frac{\tilde{x}\cdot f_x(\tilde{x},\tilde{y})}{f(\tilde{x},\tilde{y})}\right| + \delta(y)\left|\frac{\tilde{y}\cdot f_y(\tilde{x},\tilde{y})}{f(\tilde{x},\tilde{y})}\right|$$

مجموعه ضرایب بزرگنمایی: $F = \left\{ \left|\frac{x f_x}{f}\right|, \left|\frac{y f_y}{f}\right| \right\}\Big|_{(\tilde{x},\tilde{y})}$

نتیجه: "اگر توابع، ضرایب بزرگ نمای محاسبه تابع مفروض f، اعداد بزرگی باشند (؟) آن گاه می گوییم محاسبه f خوش وضع نیست (بد وضع Ill - condition) به بیان دیگر اگر خطای کوچک در ورودی های یک الگوریتم (تابع) خطای بزرگی را در خروجی باعث شود می گوییم محاسبه مقدار تابع مفروض پایدار (stable) است!

مثال: خطای عمل تفاضل را بررسی کنید

$\varphi(a,b) = (a-b)$

$$F_{\text{نسبی}} = \left\{ \left|\frac{a\,\varphi_a}{\varphi}\right|, \left|\frac{b\,\varphi_b}{\varphi}\right| \right\} = \left\{ \left|\frac{a}{a-b}\right|, \left|\frac{b}{a-b}\right| \right\}$$

imp. مثال: در محاسبه حجم یک استوانه به شعاع ۲ که با ارتفاع ۳ که حداکثر خطای ایجاد شده با محاسبات ۴ رقم اعشار را بدست آورید

$V = \pi r^2 h \qquad V(x,y,z) = x y^2 z$

$$F_{\text{نسبی}} = \left\{ \left|\frac{x V_x}{V}\right|, \left|\frac{y V_y}{V}\right|, \left|\frac{z V_z}{V}\right| \right\} = \left\{ \left|\frac{x y^2 z}{x y^2 z}\right|, \left|\frac{y\cdot 2xy^2}{xy^2z}\right|, \left|\frac{z\cdot xy^2}{xy^2z}\right| \right\}$$

$$F_{\text{نسبی}} = \{1,2,1\} \rightsquigarrow \delta(V) \leq \delta(x) + 2\delta(y) + \delta(z) \rightsquigarrow \delta(V) \leq 4\times 5\times 10^{-4} = 2\times 10^{-3}$$

$\delta(x), \delta(y), \delta(z) \leq eps = 5\times 10^{-4}$

فصل دوم: رشد بالا

← مرتبه همگرایی: فرض کنید (a_n) یک دنباله باشد که به α همگرا است $(a_n \longrightarrow \alpha)$ گوییم a_n به α با از مرتبه (order) دنباله (β_n) همگرا است هرگاه:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n-\alpha}{\beta_n}\right| \leq k \neq 0,\infty \iff a_n = \alpha + O(\beta_n)$$

← گوییم تابع $f(x)$ زمانی که $x\to x_0$ به حد l با مرتبه تابع $g(x)$ میل می کند هرگاه:

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-l}{g(x)}\right| \leq k \neq 0,\infty \iff f(x) = l + O(g(x))$$

تعریف: معمولاً در مبحث توابع $x=0$ و $\beta_n = \left(\frac{1}{n}\right)^p$ و $g(x) = x^p$ که p را سرعت یا نرخ یا مرتبه همگرایی می‌نامیم

مثال: سرعت همگرایی دنباله $a_n = \frac{n^2+3}{3n^2+2}$ را تعیین کنید

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = 1/3$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n - \frac{1}{3}}{(\frac{1}{n})^p} \right| \leqslant k \neq 0,\infty \rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{7}{3(3n^2+2)}}{\frac{1}{n^p}} \right| = k \neq 0,\infty \rightarrow \lim \frac{\frac{7}{3} n^p}{3n^2+2} = k \rightarrow p=2$$

هدف فصل ۲: در این فصل هدف ارائهٔ راهکارهای محاسباتی مناسب برای یافتن ریشه‌های معادلات به فرم $f(x)=0$ است

روش‌های حل ← روش‌های کلاسیک
روش‌های حل ← روش‌های ترسیمی
روش‌های حل ← روش‌های عددی

▽ توجه: قبل از ارائه‌ی راهکار برای تعیین ریشه می‌بایست وجود و یکتایی ریشه را ثابت نمود (برای این کار روش ترسیمی ممکن است بسیار موثر باشد)

▽ هم‌چنین قضایایی مانند مقدار میانی و مقدار میانگین و قضیه رل در تعیین وجود ریشه بسیار سودمند است

▽▽ روش‌های عددی

۱- روش تنصیف یا دوبخشی:

فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته در $[a,b]$ باشد به طوری که $f(a).f(b)<0$ به بیان دیگر فرض کنید f تابعی پیوسته در $[a,b]$ است و در این بازه دارای یک و فقط یک ریشه به صورت x^* دارد

* اگر $f(a)<0$, $f(b)>0$

← الگوریتم روش:

با معیار دقت ε و ورودی‌های a و b با لحاظ شرط مختلف‌العلامه بودن f در a و b:

۱- $a_0 = a$, $b_0 = b$ ۲- $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ ۳.۱- $f(x_n)>0 \leftarrow b_n = x_n$

۳.۲- $f(x_n)<0 \leftarrow a_n = x_n$ ۴- اگر $|x_n - x_{n-1}|<\varepsilon$ ؛ x_n را به عنوان ریشه ارائه دهید در غیر این صورت برو به ۲

مثال: $f = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$, $x>0$ ← ریشه حقیقی f الزاماً معوری ← $f' = 3x^2 + 8x \xrightarrow{x>0}$

$f(0) = -10$ و $f(2) = 14$ ← $f(1) = -5$ و $f(2) = 14$ ← $\exists x^* \in (1,2) : f(x^*) = 0$

n	a_n	b_n	$x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$	$f(x_n)$
۰	1	2	1.5	۲,۳۷۵
1	1	1.5	1.25	-۱,۷۹۶۸۷
2	1.25	1.5	1.375	۰/۱۶۲۱۰۹
3	1.25	1.375	1.3125	-۰,۸۴۸۳۹
4	1.3125	1.375	1.34375	-۰/۳۵۰۹۸
5	1.34375	1.375	1.359375	-۰/۰۹۶۴۱
6	1.359375	1.375	1.367187	۰/۰۳۲۳۴
7	1.35938	1.367187	1.863211	-۰/۰۳۲۱۵
⋮				
11			1.364746	
12	1.364746	1.365234	1.3649902	-۰/۰۰346

* آنالیز همگرایی روش دوبخشی

قضیه مهم: دنباله ایجاد شده در روش دوبخشی به ریشه واقعی معادله همگرا است

$$\lim_{n\to\infty}|x^*-x_n| \leqslant \lim \frac{b-a}{2^n}=0 \rightsquigarrow x_n\to x^*$$

۷. تعیین سرعت همگرایی روش دوبخشی خطی است

تعریف: فرض کنید ε_n خطای یک روش عددی ریشه‌یابی برای محاسبه x^* باشد ($\varepsilon_n=x_n-x^*$) گوییم روش
با سرعت همگرایی یا از مرتبه همگرایی p است هرگاه ($|\varepsilon_{n+1}|\leqslant k|\varepsilon_n|^p$)

اثبات: در هر مرحله از روش تنصیف خطا به صورت تقریبی عبارت است از $|\varepsilon_n|\leqslant \frac{b-a}{2^n}$

$$\rightsquigarrow \left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right| \simeq \frac{\frac{b-a}{2^{n+1}}}{\frac{b-a}{2^n}}=\frac{1}{2} \rightsquigarrow |\varepsilon_{n+1}| \simeq \frac{1}{2}|\varepsilon_n|^1 \rightsquigarrow p=1$$

نکته تعداد مراحل: تعداد مراحل لازم برای تعیین ریشه با داشتن ε می‌توان تخمین زد

$$|x^*-x_n| \leqslant \frac{b-a}{2^n} \leqslant \varepsilon \rightsquigarrow 2^n \geqslant \frac{b-a}{\varepsilon} \rightsquigarrow n\ln 2 \geqslant \ln(b-a)-\ln\varepsilon$$

$$\rightsquigarrow n \geqslant \frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2}$$

روش تکرار نقطه ثابت

تعریف: گوییم x نقطه ثابت تابع $f(x)$ است هرگاه: $f(x) = x$

← اگر بخواهیم $f(x)=0$ را حل کنیم می‌توانیم آن را به فرم $g(x)=x$ تغییر آرایش دهیم اگر تابع g در بازه مورد نظر دارای نقطه ثابت باشد آن گاه وجود ریشه معادله $f(x)=0$ تضمین می‌شود

قضیه نقطه ثابت (باناخ): اگر $g:[a,b]\to[a,b]$ تابعی مشتق‌پذیر باشد با این شرط که $|g'(x)|\leq k<1$ در این صورت g در بازه $[a,b]$ دارای یک و تنها یک نقطه ثابت است (و غیر ثابت)

اثبات: فرض کنید: $h(x)=g(x)-x$

$$\left.\begin{array}{l} h(a)=g(a)-a \\ h(b)=g(b)-b \end{array}\right\} \to h(a)h(b)<0 \to \exists x^*\in(a,b): h(x^*)=0 \to g(x^*)=x^* \to x^* \text{ نقطه ثابت}$$

اثبات یکتایی: فرض کنید x_1 و x_2 دو نقطه ثابت g باشند

$$\left.\begin{array}{l} x_1=g(x_1) \\ x_2=g(x_2) \end{array}\right\} \to |x_1-x_2| = |g(x_1)-g(x_2)| = g'(t)(x_1-x_2) \leq k|x_1-x_2| \times$$

* حال فرض کنید دنباله (x_n) به صورت زیر شناخته شود

$$(+)\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) \\ x_0\in[a,b] : \text{دلخواه} \end{cases}$$

می‌توان نشان داد با برقراری شرایط قضیه فوق $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$

دنباله $(+)$ به الگوریتم روش تکرار نقطه ثابت معروف است

مثال: ریشه مثبت معادله $3xe^{x}=1$ را به روش تکرار نقطه ثابت تعیین کنید

$$x=\left(\frac{x}{3}e^{-x}\right)^{1/2} \qquad x=3xe^{x}-1+x \qquad \vdots$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)<0 \\ f(1)>0 \end{array}\right\} \to (0,1)$$

$$g(x)\begin{cases} x=\frac{1}{3}e^{-x} \\ x=3x^2e^{x} \\ x=\ln\frac{1}{3x^2} \end{cases}$$

در بازه $(0,1)$ به ازای $g(x)=\frac{1}{3}e^{-x}$ می‌خواهیم شرایط قضیه نقطه ثابت را بررسی کنیم

g نزولی است → $g(x)\in[\frac{1}{3e},\frac{1}{3}]$ → $g:[0,1]\to[0,1]$ ✓

$x\in[0,1]: |g'(x)|=|\frac{1}{3}e^{-x}|<1$ ✓

$$\to\begin{cases} x_{n+1}=\frac{1}{3}e^{-x_n} \\ x_0 \quad \text{دلخواه} \end{cases}$$

$\varepsilon = 5\times10^{-4}$

n	x_n
0	0.5
1	0.20217
2	0.27231
3	0.25387
4	0.25737
5	0.25769

$\varepsilon_{n+1}\leq k\varepsilon_n^2 \qquad p<2$

۳ـ روش نیوتن ـ رافسون (N-R):

می خواهیم تقریبی از ریشه معادله $f(x)=0$ بیابیم. فرض کنید f دوبار مشتق پذیر در بازه $[a,b]$ باشد که ریشه داخل این بازه است. اگر x^* ریشه معادله و $\hat{x}$ تقریب دلخواهی از x^* باشد

$$\varepsilon = x^* - \hat{x} \rightsquigarrow f(x^*)=0 \rightsquigarrow f(\hat{x}+\varepsilon)=0 \rightsquigarrow f(\hat{x}) + \varepsilon f'(\hat{x}) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(t) = 0$$

$$\rightsquigarrow f(\hat{x}) + (x^* - \hat{x}) f'(\hat{x}) \simeq 0 \Rightarrow x^* \simeq \hat{x} - \frac{f(\hat{x})}{f'(\hat{x})}$$

← با الگوی حاصل از بخش فوق می توان دنباله زیر را معرفی کرد که به روش N-R معروف است

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0 : \text{دلخواه} \end{cases}$$

مثال: معادله $3xe^x = 1$ را به روش N-R حل کنید

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{3x_n e^{x_n} - 1}{3(x_n+1)e^{x_n}} \\ x_0 : \text{دلخواه} \end{cases}$$

n	x_n
0	0.5
1	0.30145
2	0.25929
3	0.25763
4	0.257627

$\varepsilon = 5\times 10^{-4}$

۳ـ شرط همگرایی روش

نتیجه: اگر $|g'(x)|<1$ که در آن $g = x - \frac{f}{f'}$ آنگاه روش N-R همگراست

$$g' = \left|1 - \frac{f'^2 - ff''}{(f')^2}\right| < 1$$

قضیه: فرض کنید x^* ریشه غیر تکراری معادله $f(x)=0$ باشد در این صورت مرتبه همگرایی N-R برای تعیین x^* دو $(p=2)$ است. imp

اثبات: فرض کنید $\varepsilon_n = x^* - x_n$ ؛

$$x^* = x_{n+1} + \varepsilon_{n+1} \qquad f(x^*)=0 \rightsquigarrow f(x_{n+1} + \varepsilon_{n+1}) = 0$$

$$f(x_n + \varepsilon_n) = 0$$

$$\rightsquigarrow f(x_n) + \varepsilon_n f'(x_n) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(x_n) + \dots = 0 \rightsquigarrow f(x_n) + (x^* - x_n) f'(x_n) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(t) = 0$$

$$\underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x^* - x_n)} + \frac{\varepsilon_n^2}{2} \frac{f''(t)}{f'(x_n)} = 0 \rightsquigarrow \underbrace{x^* - x_{n+1}}_{\varepsilon_{n+1}} = -\frac{\varepsilon_n^2}{2} \frac{f''(t)}{f'(x_n)}$$

$$|\varepsilon_{n+1}| \le k|\varepsilon_n|^2 \rightsquigarrow p = 2$$

مثال: مطلوب است ارائه الگوریتم برای محاسبه ریشه k ام عدد مثبت a و به کمک آن ریشه هفتم عدد 5 را محاسبه کنید (4 رقم دقت)

$\sqrt[k]{a} = x \rightarrow x^k - a = 0 = f(x)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{k x_n^{k-1}} \qquad \sqrt[7]{5} = x \rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^7 - 5}{7 x_n^6}$$

n	x_n
0	1,2
1	1,26778
2	1,25870
3	1,25849

قضیه: فرض کنید α ریشه معادله $f(x)=0$ باشد در این صورت اگر روند تکراری $x_{n+1} = g(x_n)$ برای معادله پیشنهاد شود و $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(p)}(\alpha) = 0$ آنگاه روش حداقل از مرتبه $p+1$ است و اگر $g^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$ روش دقیقاً از مرتبه $p+1$ است

مثال: ثابت کنید مرتبه همگرایی روش N-R برای ریشه های غیرتکراری ۲ و برای ریشه های تکراری ۱ است

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \rightarrow g(x) = x - \frac{f}{f'}$$

I) α ریشه غیرتکراری: $f(x) = (x-\alpha)q(x)$, $q(\alpha) \neq 0$ $\qquad g = x - \dfrac{(x-\alpha)q}{q + (x-\alpha)q'}$

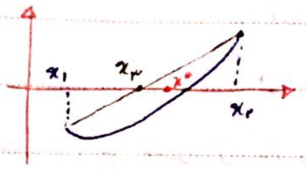
$$g'(x) = 1 - \frac{(q+(x-\alpha)q')^2 - (q'+q'+(x-\alpha)q'')(x-\alpha)q}{(q+(x-\alpha)q')^2}\Bigg|_{x=\alpha} = 1-1 = 0 \rightarrow \text{روش حداقل مرتبه ۲}$$

$g''(\alpha) \neq 0 \rightarrow$ روش دقیقاً از مرتبه ۲ است

II) α ریشه تکراری: $f(x) = (x-\alpha)^m q(x)$, $q(\alpha) \neq 0$ $\qquad g(x) = x - \dfrac{(x-\alpha)^m q}{m(x-\alpha)^{m-1} + (x-\alpha)^m q'} = x - \dfrac{(x-\alpha)q}{mq + (x-\alpha)q'}$

$$g'(\alpha) = 1 - \frac{(q+(x-\alpha)q')(mq+(x-\alpha)q') - (mq'+q'' \dots)(x-\alpha)q}{(mq+(x-\alpha)q')^2} = 1 - \frac{1}{m} \neq 0 \rightarrow \text{روش مرتبه ۱}$$

سه روش های نابجایی و وتری



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= x_1 - \frac{1}{m} y_1 \\ x_3 &= x_2 - \frac{1}{m} y_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)} (x_2 - x_1)$$

* تکرار روش فوق یک روند تکراری را به نام روش وتری نتیجه می دهد

$$\begin{cases} x_0 , x_1 \text{ دلخواه} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} (x_n - x_{n-1}) \end{cases}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

مثال: به روش وتری با دقت ۴ رقم اعشار مقدار ریشه معادله زیر را در بازه [۰,۱] را بدست آورید

$$f(x) = 1 - x - \sin x = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(1 - x_n - \sin x_n)(x_n - x_{n-1})}{(x_{n-1} - x_n) + (\sin x_{n-1} - \sin x_n)}$$

n	x_n	x_{n+1}
1	•	·15
2	·15	·151·5·3
3	·157·5·3	·157·97 *
4	—	—

روش نابجایی

اگر براساس روش فوق وابه قضیه مقدار میانی تقریبات ریشه را نابسازی کنیم به روش حاصل روش نابجایی می‌گوییم و می توان الگوریتم آن را به صورت زیر بیان نمود

$$a < x^* < b$$

$$x_0 = a_0 = a \qquad x_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

$$x_1 = b_0 = b$$

مثال: $f(x) = x^3 + 4x - 10$ با روش نابجایی با دقت 4×10^{-5} ریشه مثبت معادله در صورت وجود را تعیین کنید

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= -5 < 0 \\ f(2) &= 6 > 0 \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow x^* \in (1,2)$$

$f' = 3x^2 + 4 > 0 \rightsquigarrow$ ریشه یکتا

n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$
0	0	2	1.25	-1·	6	-3,•4
1	1,25	2	1,5025	-3,•4	6	-·15980
⋮						
5	1,5565	2	$1,5567^*$			

تضمین مرتبه همگرایی روش وتری عبارت است از $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,61$

▽ فصل سوم : درون‌یابی و تقریب

سوال اصلی فصل : فرض کنید از یک تابع مانند $f(x)$ اطلاعات جدولی زیر موجود است می‌خواهیم برای f ضابطه‌ای مشخص کنیم نحوه این کار و شدنی بودن یا نبودن آن سوال این مبحث است

x	x_0	$\cdots$	x_n
$f(x)$	f_0		f_n

قضیه (استون - وایرشتراس) اگر $f(x)$ تابعی پیوسته در بازه مفروض $[a,b]$ باشد ($f\in C[a,b]$) آنگاه وجود دارد دنباله‌ای از چند جمله‌ای ها که به f همگرا است

$$\exists (P_n(x))_{n=0}^{\infty} : P_n \xrightarrow{U} f$$

به بیان دیگر : $f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

نتیجه : $f(x)$ تقریباً با یک چند جمله‌ای برابر است

تعریف : براساس اطلاعات جدولی در نقاط $x_0,\dots,x_n$ ، $P_n(x)$ را یک چند جمله‌ای درون‌یاب f گوییم هرگاه : $P_n(x_j)=f_j$

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

در اصل :

$$f(x)=\underbrace{P_n(x)}_{\text{چند جمله‌ای درون‌یاب}}+\underbrace{E_n(x)}_{\text{خطای درون‌یاب}}$$

قضیه : چند جمله‌ای درون‌یاب تابع f در نقاط $x_0,\dots,x_n$ یکتاست

اثبات : فرض کنید p و q دو چند جمله‌ای درون‌یاب f باشند $p(x_j)=f_j$ ، $q(x_j)=f_j$

$$Q=p-q$$

در این صورت Q حداکثر از درجه n است که در $n+1$ نقطه مقدار آن صفر است

$$Q(x_j)=p(x_j)-q(x_j)=f_j-f_j=0 \qquad j=0,\dots,n \quad \times$$

روش لاگرانژ : فرض کنید

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)f_k$$

که در آن :

$$l_k=\gamma_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})\cdots(x-x_n)$$

[عامل $(x-x_k)$ را ندارد]

برای آن که P_n خاصیت درون‌یاب بودن را داشته باشد باید :

$$P_n(x_j)=f_j \qquad j=0,1,\dots,n$$

$$j=0 \quad P_n(x_0)=f_0 \rightsquigarrow \sum l_k(x_0)f_k=\gamma_0(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)f_0+\cdots+0=f_0$$

$$\gamma_0=\frac{1}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)} \rightsquigarrow \gamma_j=\frac{1}{\prod_{k=0,k\neq j}^{n}(x_j-x_k)}$$

در نهایت چند جمله‌ای درون‌یاب f عبارت است از $\quad P_n = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f_k$

* که در آن $l_k(x)$ به توابع پایه‌ای لاگرانژ معروفند به صورت زیر قابل نمایش هستند

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \left(\frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)} \right)$$

مثال: چند جمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی زیر را بیابید و مقدار $f(1.75)$ را توسط آن درون‌یابی کنید. درجه ۳

x	0	1	3	4
f	2	3	2	1
	x_0	x_1	x_2	x_3

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} = -\frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-4)$$

$l_1(x) = \frac{1}{6} x(x-3)(x-4) \qquad l_2(x) = -\frac{1}{6} x(x-1)(x-4) \qquad l_3(x) = \frac{1}{12} x(x-1)(x-3)$

$P_3(x) = l_0(x) f_0 + l_1(x) f_1 + l_2(x) f_2 + l_3(x) f_3 \qquad p(1.75) \simeq f(1.75)$

تعمیم: خطای درون‌یابی تابع مفروض f در نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ با فرض اینکه $f \in C^{(n+1)}(x_0, x_n)$ (f حداقل $n+1$ بار مشتق‌پذیر است) عبارت است از

$$E_n(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \quad , \; t \in (x_0, x_n)$$

نتیجه: اگر بدانیم $M = \max|f^{(n+1)}(x)|$ آنگاه کران بالای خطا: $\quad |E_n(x)| \le \max\left|\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\right| \frac{M}{(n+1)!}$

مثال: فرض کنید $f \in C^2[a,b]$ حداکثر خطای درون‌یابی خطی f در بازه (a,b) چقدر است $\qquad x_0 = a$

در درون‌یابی خطی با نقاط x_0 و x_1 جمله خطا عبارت است از $\qquad x_1 = b$

$$E_1(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2!} f''(t) \le \max|(x-a)(x-b)| \cdot \frac{M}{2} \qquad M = \max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

$g(x) = (x-a)(x-b) \qquad g' = x-a+x-b = 0$ نقطه اکسترمم $\Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$

$g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)$ اگر $|a-b| = h$ باشد

$\max|g(x)| = \left|g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| = \frac{|-(b-a)^2|}{4} \qquad |E_1(x)| \le \frac{1}{8} M h^2$

تمرین: اگر در بازه (a,b) با نقاط a، $\frac{a+b}{2}$ و b درون‌یابی کنیم حداکثر خطا چقدر است

* مشکل این روش: قابلیت آپدیت شدن ندارد

فرض کنید چند جمله‌ای درون‌یاب به صورت زیر باشد

$$P_n^*(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$x=x_0$ ؛ $P_n(x_0) = a_0 = f_0 \rightsquigarrow a_0 = f_0$

$x=x_1$ ؛ $P_n(x_1) = f_0 + a_1(x_1-x_0) \rightsquigarrow a_1 = \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$

به همین ترتیب با جایگذاری x_j ها تا x_n می‌توان a_j ها را محاسبه کرد

تعریف: با اطلاعات جدول (†) تفاضلات تقسیم شده نیوتن مراتب مختلف برای تابع f به صورت زیر تعریف می‌کنیم

تفاضل تقسیم شده مرتبه صفرم (اول) $f[x_j] = f_j$ یا $[f_j]$

مرتبه دوم $f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f_{j+1}-f_j}{x_{j+1}-x_j}$

مرتبه سوم $f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{f[x_{j+2}, x_{j+1}] - f[x_{j+1}, x_j]}{x_{j+2}-x_j}$

نتیجه: در روند درون‌یابی معرفی شده در این قسمت به صورت $P_n^*(x)$ ضرائب مجهول عبارت اند از

$a_0 = f[x_0] = f_0$ $a_1 = f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$ .... $a_n = f[x_0, \ldots, x_n]$

در عمل کافی است جدول زیر را تکمیل کنیم

x_j	f_j	$f[x_j, x_{j+1}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]$
x_0	f_0		
		$\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} = S_0$	
x_1	f_1		$\frac{S_1-S_0}{x_1-x_0} = t_0$
		$\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1} = S_1$	
x_2	f_2		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_n	f_n		

مثال. چند جمله‌ای درون‌یاب داده‌های زیر را به دست آورید

x	-1	0	2	3	4
f	1	2	1	3	2

x	f				
-1	1				
		1			
0	2		$-\frac{1}{2}$		
		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	
2	1		$5/4$		$\frac{19}{120}$
		-2		$-\frac{11}{24}$	
3	3		$-3/2$		
		-1			
4	2				

$$P_4(x) = 1 + (x+1) - \frac{1}{2}(x+1)x + \frac{1}{3}x(x+1)(x-2)$$
$$+ \frac{19}{120}x(x+1)(x-2)(x-3)$$

* درون یابی با داده های متساوی الفاصله

فرض کنید با نقاط $x_0, \dots, x_n$ می خواهیم چند جمله ای درون یاب تابع معروف f با مقادیر مشخص $f_0, \dots, f_n$ را تعیین کنیم با این شرط که x_j ها متساوی الفاصله باشند $x_j = x_0 + jh$

معرفی چند اپراتور مهم:

۱- اپراتور انتقال (E)

$$Ef_j = f_{j+1} \qquad E^2 = EE \rightsquigarrow E^2 f_j = f_{j+2}$$

$$E^{-1} f_j = f_{j-1} \qquad E^{\alpha} f_j = f_{j+\alpha} = f(x_j + \alpha h) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

۲- عملگر دلتا (Δ)

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j \qquad \Delta = E - 1$$

$$\Delta^2 = \Delta(\Delta f_j) = \Delta(f_{j+1} - f_j) = \Delta f_{j+1} - \Delta f_j = f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j$$

$$\Delta^2 = (E-1)^2 = E^2 - 2E + 1 = f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j$$

$$\Delta^n = (E-1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j E^{n-j}$$

۳- عملگر نابلا (∇)

$$\nabla f_j = f_j - f_{j-1} \qquad \nabla = 1 - E^{-1}$$

$$\nabla^2 = (1 - E^{-1})^2 = f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2}$$

* درون یابی پیشرو و پسرو نیوتن

I) درون یابی پیشرو:

فرض کنید x_j ها نقاط شبکه ای متساوی الفاصله باشند (با طول گام h)

$$x_j = x_0 + jh$$

$$\forall x \in (x_0, x_n) : \exists s > 0 : x = x_0 + sh$$

$$f(x) = f(x_0 + sh) = E^s f_0 \qquad \Delta = E - 1 \rightsquigarrow E = \Delta + 1$$

$$\rightsquigarrow f(x) = (\Delta+1)^s f_0 = \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} \Delta^j f_0$$

$$f(x) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \dots$$

← چند جمله ای پیشرو نیوتن به صورت زیر قابل بیان است

$$f(x) \simeq p(x) = f_0 + s\Delta f_0 + \dots + \frac{s(s-1)\cdots(s-(n-1))}{n!} \Delta^n f_0$$

$$p(x) = f_0 + \frac{1}{h}(x - x_0)\Delta f_0 + \frac{1}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)\Delta^2 f_0 + \dots$$

II) روش پسرو نیوتن

$x = x_n + sh \ , \ s<0 \rightsquigarrow s = \dfrac{x - x_n}{h}$

$f(x) = f(x_n + sh) = E^s f_n$

$\nabla = 1 - E^{-1} \rightsquigarrow E = (1-\nabla)^{-1}$

$\rightsquigarrow f(x) = (1-\nabla)^{-s} f_n = \sum_{j=0}^{-s} \binom{-s}{j} (-\nabla)^j f_n$

← چند جمله‌ای پسرو نیوتن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P_n(x) = f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f_n + \dots + \frac{s(s+1)\cdots(s+(n-1))}{n!}\nabla^n f_n$$

مثال: چند جمله‌ای پسرو و پیشرو نیوتن را به دست آورید و $f(0,75)$ ، $f(0,25)$

x	-1	0	1	2	3
f	2	1	2	3	5

f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
۲				
۱	1-2=-1			
۲	2-1=1	2		
۳	3-2=1	0	-2	
۵	۵-۳=۲	1	1	3

$P_4 = 2 - s + s(s-1) - \dfrac{s(s-1)(s-2)}{3} + \dfrac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{8}$

پیشرو $(s = x+1)$

نکته: جدول پسرو و پیشرو کاملاً یکسان است

$f(0,25) \rightsquigarrow$ پیشرو : $s = 1,25$

$f(0,25) \simeq P_4 \ (s = 1,25)$

f	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	$\nabla^4 f$
۲				
۱	-۱			
۲	1	۲		
۳	1	0	-۲	
۵	۲	1	1	۳

پسرو

$P_4 = 5 + 2s + \dfrac{s(s-1)}{2} + \dfrac{1}{6}s(s+1)(s+2)$

$+ \dfrac{1}{6}s(s+1)(s+2)(s+3) \qquad (s = x-3)$

نظریه تقریب

* روش کمترین مربعات خطا (Least square method)

x	x_0	...	x_n
f	f_0		f_n

فرض کنید از $f(x)$ داده‌های جدولی متناظر در دست باشد

می‌خواهیم $f(x)$ را براساس توابع پایه φ_1 ، φ_2 ... φ_m بازسازی کنیم به بیان دیگر می‌خواهیم بهترین ترکیب خطی از φ_i ها را بیابیم که f را معرفی کنیم

باید c_i ها طوری تعیین شوند که بهترین تقریب f حاصل شود

$f(x) \simeq c_1\varphi_1(x) + \dots + c_m\varphi_m(x)$

C_j ها باید طوری تعیین شوند که

$$\Big| f(x) - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x)}_{\text{(خطا)}} \Big| \longrightarrow Min$$

به جای عبارت فوق از توان دوم جمله خطا بهره می‌گیریم $J(c_1,\dots,c_m)$ کم

$$\sum_{i=0}^{n} \Big(f(x_i) - \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x_i) \Big)^2 \longrightarrow Min$$

فرض کنید $J(c_1,\dots,c_m)$ باشد برای تعیین C_j ها باید دستگاه معادلات زیر حل شود

$$\frac{\partial J}{\partial c_j} = 0 \qquad j = 0,1,\dots,m$$

$$\frac{\partial J}{\partial c_1} = 0 \rightsquigarrow -2\varphi_1(x_j) \sum_{j=0}^{n} \Big(f_j - \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x_j) \Big) = 0$$

$$c_1 \sum_{j=0}^{n} \varphi_1(x_j)\varphi(x_j) + c_2 \sum_{j=0}^{n} \varphi_1(x_j)\varphi_2(x_j) + \dots + c_m \sum_{j=0}^{n} \varphi_1(x_j)\varphi_m(x_j) = \sum_{j=0}^{n} f_j \varphi_1(x_j)$$

با ادامه این روند به دستگاه $AC=b$ می‌رسیم که در آن

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \sum f_j \varphi_1(x_j) \\ \vdots \\ \sum f_j \varphi_m(x_j) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} \sum_{j=0}^{n} \varphi_1(x_j)\varphi_1(x_j) & \dots & \sum_{j=0}^{n} \varphi_1(x_j)\varphi_m(x_j) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=0}^{n} \varphi_m(x_j)\varphi_1(x_j) & \dots & \sum_{j=0}^{n} \varphi_m(x_j)\varphi_m(x_j) \end{vmatrix}$$

تذکر: برای تقریب تابع $f(x)$ (تکه‌ای پیوسته) در بازه مفروض (a,b) به کمک توابع $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ نهایتاً باید دستگاه زیر حل شود تا داشته باشیم:

$$f(x) \simeq c_1\varphi_1(x) + \dots + c_m\varphi_m(x)$$

$$\begin{pmatrix} \int_a^b \varphi_1^2(x)\,dx & \dots & \int_a^b \varphi_1\varphi_m\,dx \\ \vdots & & \vdots \\ \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_m(x)\,dx & \dots & \int_a^b \varphi_m^2\,dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b f\varphi_1\,dx \\ \vdots \\ \int_a^b f\varphi_m\,dx \end{pmatrix}$$

دستگاه فوق از min کردن عبارت خطا به صورت زیر حاصل شده است

$$J(c_1,\dots,c_m) = \int_a^b \big(f(x) - (c_1\varphi_1 + \dots + c_m\varphi_m) \big)^2\,dx$$

Subject
Date

مثال: به کمک داده های جدول، ترتیب کمترین مربعات خطا را برای تابع جدولی ذکر شده برحسب توابع $\varphi_1(x) = \sin x$ و $\varphi_2(x) = \ln x$ بدست آورید.

x	2	2.5	3	3.5	4
f	3	4	3	2	5

x	2	2.5	3	3.5	4
f	3	4	3	2	5
φ_1	۰/۹۱	۰/۶۰	۰/۱۴	-۰/۳۵	-۰/۷۶
φ_2	۰/۶۹	۰/۹۲	۱/۱۰	۱/۲۵	۱/۳۹
φ_1^2	۰/۸۲	۰/۳۶	۰/۰۱	۰/۱۲	۰/۵۷
φ_2^2	۰/۴۸	۰/۸۳	۱/۲	۱/۵۶	۱/۹۲

x	2	2.5	3	3.5	4
$\varphi_1\varphi_2$	۰/۶۳	۰/۵۵	۰/۱۴	-۰/۴۴	-۱/۰۵
$f\varphi_1$	۲/۷۳	۲/۴۰	۰/۴۲	-۰/۷۰	-۳/۸
$f\varphi_2$	۲/۰۷	۳/۶۸	۳/۳۰	۲/۵۰	۶/۹۵

$\sum \varphi_1^2 = ۱/۸۸$ $\quad \sum \varphi_1\varphi_2 = -۰/۱۵$ $\quad \sum \varphi_2^2 = ۵/۹۹$ $\quad \sum f\varphi_1 = ۱/۰۵$ $\quad \sum f\varphi_2 = ۱۸/۴۸$

$$\begin{pmatrix} ۱/۸۸ & -۰/۱۵ \\ -۰/۱۵ & ۵/۹۹ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱/۰۵ \\ ۱۸/۴۸ \end{pmatrix}$$

مشتق و انتگرال گیری عددی

* مسئله هدف: ارائه الگوریتم های محاسباتی برای تعیین مقدار انتگرال تابع معروف f در یک بازه مشخص و در ادامه نحوه محاسباتی کردن محاسبه مشتق توابع

I) روش ذوزنقه ای (T)

ایده اصلی خیلی از روش های صوری انتگرال گیری این است که ابتدا تابع تحت انتگرال گیری را برحسب توابع مشخص مانند چند جمله ای درون یاب آن معرفی کنیم، سپس به جای f از ترتیب آن انتگرال بگیریم. در روش ذوزنقه به جای f چند جمله ای درون یاب مرتبه اول آن لحاظ می شود

* روش ذوزنقه ای ساده: $h = b - a \quad x = x_0 + sh \qquad x_1 = b \quad x_0 = a \qquad a \leq x \leq b$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = h\int_0^1 (f_0 + s\Delta f_0)\,ds = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) \qquad E_n(x) = \frac{\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \qquad n=1: E_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(t)$$

$$\rightsquigarrow \int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b P_1(x)\,dx}_{\text{الگوریتم حاصل شده}} + \underbrace{\int_a^b E_1(x)\,dx}_{\text{خطای روش T ساده}}$$

Subject
Date

$$R_1 = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2!} f''(t)\, dx =$$

R_1 را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد

$$\left(\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2!} dx\right) f''(t) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(t)$$

جمله خطای روش T ساده

اگر $M = \max|f''(x)|$ آن گاه کران بالای خطا:

$$|R_1| \leq \frac{M(b-a)^3}{12}$$

روش انتگرال گیری ذوزنقه‌ای

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

روش T مرکب: برای بالا بردن دقت کافی است در این روش ابتدا بازه (a,b) را به n قسمت تقسیم کنیم (برای سادگی متساوی الفاصله) سپس در هر کدام از این زیربازه‌ها روند روش T ساده را اعمال می‌کنیم

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$x_0 = a \quad x_1 = x_0 + h \quad \dots \quad x_n = b$

$$I = \int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\, dx \simeq \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \dots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)$$

الگوریتم روش ذوزنقه‌ای مرکب: $I \simeq \frac{h}{2}\left[f_0 + 2(f_1 + \dots + f_{n-1}) + f_n\right]$

قضیه: خطای روش ذوزنقه‌ای مرکب عبارت است از:

$$R_T(h) = \frac{-h^3}{12} \cdot n f''(t) \qquad t \in (a,b)$$

$$R_T(h) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(t) \qquad R_T(h) \equiv O(h^2)$$

تعریف: گوییم یک روش انتگرال گیری عددی از مرتبه p است اگر خطای آن تا چند جمله‌ای های مرتبه p صفر باشد

نتیجه: روش T از مرتبه یک است

مثال: مقدار انتگرال زیر را به روش T طوری محاسبه کنید که حداکثر خطای آن $\varepsilon = 10^{-2}$ باشد

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

ابتدا باید طول گام h را طوری تعیین کنیم که $|R_T(h)| < 10^{-2}$

$$|R_T(h)| = \left|\frac{(1-0)h^2}{12} f''(t)\right| \leq \frac{Mh^2}{12} \; ; \; M = \max|f''(t)|$$

$f(x) = e^{-x^2}$

h را طوری تعیین می‌کنیم که $\frac{Mh^2}{12} < 10^{-2}$

$$f''(x) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2} \rightsquigarrow M = \max|(4x^2-2)e^{-x^2}| \leq \max|4x^2-2| \cdot \max|e^{-x^2}| = 2$$

$$\frac{Mh^2}{12} \xrightarrow[h=\frac{1}{n}]{} \frac{2(1/n^2)}{12} < 10^{-2} \rightsquigarrow n \geq \sqrt{\frac{100}{6}} \rightsquigarrow n = 5 \rightsquigarrow h = 1/5$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject

Date

x	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
f	1	۰/۹۶۰۷	۰/۸۵۲۱	۰/۶۹۷۶	۰/۵۲۷۲	۰/۳۶۷۸
		a	b	c	d	e

$$I = T(h=\tfrac{1}{5}) = \frac{1/5}{2}\left[1+2(a+b+c+d)+e\right] = ۰/۷۴۴۳$$

سه روش سیمپسون یا روش S :

$$f = P_n(x) + E_n(x) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_n(x)\,dx + \left(R \equiv \int_a^b E_n\right)$$

الگوی کلی روش نیوتن -

فرض کنید $n=2$ (a,b) مشخص $f(x)$ معلوم $f(x) \cong p(x)$ $P_n = ?$

برای نوشتن چند جمله‌ای درون یاب درجه ۲ به سه نقطه نیاز داریم $x_0 = a$ $x_1 = \frac{a+b}{2}$ $x_2 = b$

$$P_2 = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2} \qquad x = x_0 + sh \qquad s = \frac{x-x_0}{h}$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = h\int_0^2 P_2\,ds = h\int_0^2 \left(f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0\right) ds$$

روش S ساده : $\frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right]$

مانند روش T برای افزایش دقت در این روش ، این روش را در زیر بازه های داخل بازه مورد نظر تکرار می کنیم

▽ تعداد بازه های تولید شده h باید حتماً زوج باشند $h = \frac{b-a}{2n}$

الگوریتم: $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4(f_1+f_3+\dots+f_{2n-1}) + 2(f_2+\dots+f_{2n-2}) + f_{2n}\right)$

نتیجه: خطای روش S با طول گام h عبارت است از

$$R_S(h) = \frac{-(b-a)\,h^4}{180} f^{(4)}(t) \qquad t \in (a,b)$$

نتیجه. اگر $M = \max|f^{(4)}(t)|$ آنگاه:

کران بالای خطا: $|R_S| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M$

← روش از مرتبه ۳ است

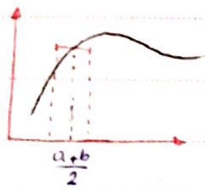
مثال: مقدار $I = \int_0^1 e^{-\cos x}\,dx$ را با طول گام $h=0{,}125$ با روش S محاسبه کنید

x	0	0.125	0.15	0.175	1
f	۰/۳۶۷۸۸	۰/۳۷۹۴	۰/۴۱۵۷	۰/۴۸۱۰	۰/۵۸۲۵
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4

$$I \simeq \frac{0.125}{3}\left[f_0 + 4(f_1+f_3) + 2(f_2) + f_4\right] = 0{,}4352$$

III) روش نقطه میانی:

مثال: می خواهیم مقدار $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ را محاسبه کنیم



برای ارائه یک الگوریتم عددی می توان از مقادیر $f(x)$ در نقاط وسط بازه ها بهره گرفت به عنوان مثال

$$I=\int f(x)\,dx = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

و اگر ابتدا بازه مورد نظر را به n قسمت مساوی با طول h تقسیم کنیم آنگاه در هر بازه می توان از روش فوق استفاده کرد که در نهایت داریم

$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b \qquad h=\frac{b-a}{n}$

الگوریتم روش نقطه میانی:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+\dots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right)$$

قضیه: خطای روش نقطه میانی عبارت است از

$$R_m=-\frac{(b-a)h^2}{24}f''(t)\ ,\quad t\in(a,b)$$

نتیجه: اگر $M\geq \max|f''(t)|$

$$|R_m|\leq \frac{b-a}{24}h^2M$$

سه روش برونیابی رامبرگ

قضیه (بسط مجانبی خطا): در روش ذوزنقه ای می توان ثابت های $c_1, c_2, c_3, \dots$ (مستقل از طول h) را طوری پیدا کرد که

$$R(h)=c_1h^2+c_2h^4+c_3h^6+\dots$$ خطای روش ذوزنقه ای با طول h

می خواهیم براساس قضیه فوق مرتبه دقت روش ذوزنقه ای را افزایش دهیم

طول h: $$I=\int_a^b f(x)\,dx = T(h)+c_1h^2+\dots \qquad (1)$$

طول $h/2$: $$I = T(h/2)+c_1\left(\frac{h}{2}\right)^2+c_2\left(\frac{h}{2}\right)^4+\dots \qquad (2)$$

طول $h/4$: $$I = T(h/4)+c_1\left(\frac{h}{4}\right)^2+\dots \qquad (3)$$

با حذف c_1 بین روابط (۱) و (۲) داریم

$$I=\frac{\overbrace{4T(h/2)-T(h/2)}^{T^{(1)}(h)}}{4-1}+\left(-\frac{1}{4}c_2h^2\right)+\dots \qquad (4)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - (a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\right) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - (a_{n1}x_1 + \cdots + a_{n\,n-1}x_{n-1})\right) \end{cases}$$

حال روند تکراری زیر را براساس فرم فوق پیشنهاد می دهیم

$X^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$: مفروض

* الگوریتم روش ژاکوبی :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)})\right) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + \cdots + a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k)})\right) \end{cases}$$

* اگر روش ژاکوبی را براساس متغیرهای بدست آمده در هر گام به روز رسانی کنیم روش گاوس سایدل حاصل می شود

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)})\right) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + \cdots + a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})\right) \end{cases}$$

قضیه: اگر ماتریس A اکیدا غالب قطری باشد روش ژاکوبی و گاوس سایدل همگرا هستند و جواب آنها $x^* = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$

تعریف: گوییم (a_{ij}) A اکیدا غالب قطری است هرگاه $|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$

تعریف: گوییم A غالب قطری است هرگاه

یا
$$\begin{cases} \text{ستونی:} & |a_{ii}| \geq \max\{|a_{ij}|\} \\ \text{سطری:} & |a_{ii}| \geq \max\{|a_{ji}|\} \end{cases}$$

تذکر: برای استفاده از این روش ها حتما باید ماتریس ضرایب اکیدا غالب قطری باشند، اگر چنین نباشد باید با عمل محورگیری که مجموعه ای از عملیات های سطری مقدماتی است A را به یک ماتریس اکیدا غالب قطری تبدیل نمود

مثال:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow[R_2 \to R_3]{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

روش رانگ-کوتا مرتبه دوم

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + c_2 h, k_1 + y_n) \\ y_{n+1} = y_n + (\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2) \end{cases}$$

* اگر $c_2 = \frac{1}{2}$ ، $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ یک روش رانگ کوتای مرتبه دوم به نام روش هیون به دست می آید

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h/2, k_1 + y_n) \\ y_{n+1} = y_n + 1/2 (k_1 + k_2) \end{cases}$$

$c_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_{n+1}, y_n + k_n) \\ y_{n+1} = y_n + 1/2 (k_1 + k_2) \end{cases}$$

مثال: تعیین $y(0/2)$ در مسئله زیر

$$\begin{cases} y' = x^2 + y + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad h = 0/1$$

$k_1 = 0/1 (0^2 + 1 + 1) = 0/2$

$k_2 = 0/1 ((0/1)^2 + (1 + 0/2) + 1)$

$y(x_1) \simeq y_1 = 1 + 1/2 (0/2 + 0/22) = 1,2105$

$k_1 = 0/1 ((0/1)^2 + 1,2105 + 1) = 0/22210$

$k_2 = 0/1 ((0/2)^2 + (1,2105 + 0/22210) + 1) = 0/24472$

$y_2 = y_1 + \frac{1}{2} (k_1 + k_2) = 1,4451$

تضمین: روش رانگ-کوتا از مرتبه همگرای ۲ است

▽ فصل ششم: حل دستگاه های خطی

می خواهیم روش های محاسباتی برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ ارائه کنیم

If $\det(A) \neq 0 \Rightarrow x = A^{-1} b$

روش حل ← روش های مستقیم

روش حل ← روش های تکراری

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

روش های تکراری

I) روش ژاکوبی

$f'_j = \frac{1}{h}(\Delta f_j - \frac{1}{2}\Delta^2 f_j)$ ② فرمول سه نقطه ای مشتق

سه فصل ۵ :

* حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

می خواهیم یک روش عددی برای حل مسأله $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ارائه کنیم

* منظور از حل عددی مسأله مقدار اولیه فوق تعیین مقدار تابع مجهول $y(x)$ در نقاط گره ای $x_0, \dots, x_n$ است که توسط ما به مسأله داده می شود

فرض کنید $y(x_j)$ مقدار دقیقی از تابع در x_j و y_j تقریبی از $y(x_j)$ باشد برای ساختن یک روش عددی باید به نحوی مشتق را در مسأله محاسباتی ارائه دهیم $y'(x_j) = f(x_j, y(x_j))$

← روش اویلر

اگر به جای $y'(x_j)$ از تقریب دو نقطه ای مشتق بهره بگیریم $y'(x_j) = \frac{y_{j+1} - y_j}{h}$
آن گاه روش زیر به دست می آید

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = f(x_j, y_j) \rightsquigarrow y_{j+1} = y_j + h f(x_j, y_j)$$

مثال: مطلوب است تعیین $y(0,2)$ در مسأله زیر

$$\begin{cases} y' = x^2 + y + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad h = 0,1$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \\ y_0 : \text{معلوم} \end{cases}$$

$y_0 = 1 \rightsquigarrow y_1 = 1 + h(0^2 + 1^2 + 1) = 1,2$

$y_2 \simeq y(x_2) = 1,2 + 0/1(1^2 + 1,2 + 1) = 1,42$

تنبیه: روش اویلر از مرتبه همگرایی یک است یعنی $y_n = y(t_n) + O(h)$

سه روش رانگ کوتا. این روش ها مبتنی بر انتگرال گیری عددی ساخته می شوند

$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y' \, dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) \, dx \qquad y_{n+1} - y_n = \Sigma(?)$$

Subject
Date

آخرین روابط (۲) و (۳) هم c_1 را حذف کنیم

$$I = \frac{\overbrace{4T(h/4) - T(h/2)}^{T^{(1)}(h/2)}}{4-1} + \underbrace{(\quad)c_2 h^4 + \dots}_{O(h^4)} \qquad (5)$$

می‌توان بین روابط (۴) و (۵) هم c_2 را حذف کرد و مقدار جدیدی برای I با دقت $O(h^6)$ به دست آورد و این روند را می‌توان تا هر مرتبه دلخواه پیش برد

← می‌توان از لحاظ محاسباتی الگوریتم زیر را ارائه داد

۱- ابتدا با طول گام‌های h، $h/2$، ... مقدار انتگرال را با روش ذوزنقه‌ای محاسبه کنید

۲- با فرض $T^{(0)}(h) = T(h)$ (به ازای h های مختلف از جمله h، $h/2$، ...)

$$T^{(k+1)}(h) = \frac{4^k\, T^{(k)}(\tfrac{h}{2}) - T^{(k)}(h)}{4^k - 1}$$

قرار دهید.

۳- تا مرتبه دلخواه روش را ادامه دهید

$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$
$T(h)$	$T^{(1)}(h) = S_1 = \frac{4T(h/2) - T(h)}{4-1}$	
$T(\frac{h}{2})$		$T^{(2)}(h) = \frac{4^2 S_2 - S_1}{4^2 - 1}$
$T(h/4)$	$T^{(1)}(\frac{h}{2}) = S_2 = \frac{4T(h/4) - T(h/2)}{4-1}$	

مشتق‌گیری عددی

فرض کنید از تابع $f(x)$ اطلاعات زیر در دست است $j = 0, 1, \dots, n$ $\quad f(x_j) = y_j = f_j$

برای این کار می‌توان از رویکرد های مانند بسط تیلور یا استفاده از چند جمله ای های درون یاب بهره گرفت

به عنوان مثال اگر x_j ها متساوی الفاصله باشند آن گاه

$$p_n = f_j + s\Delta f_j + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_j + \dots \qquad s = \frac{x - x_j}{h} \qquad p_n \simeq f$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{ds}\cdot\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h}\left(\frac{df}{ds}\right) \simeq \frac{1}{h}\left(\frac{dp_n(s)}{ds}\right) \rightsquigarrow f' = \frac{1}{h}\left[\Delta f_j + \frac{1}{2}(2s+1)\Delta^2 f_j + \dots\right]$$

① فرمول دو نقطه‌ای مشتق

$$f'_j = \frac{\Delta f_j}{h} = \frac{f_{j+1} - f_j}{h} \quad \text{یا} \quad f'_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h}$$

$$x^{(0)} = (1,1,1) \rightsquigarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(3 - (2x_2^{(k)} + x_3^{(k)})\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(1 - (x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)})\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0 \\ x_2^{(1)} = -\frac{1}{3} \\ x_3^{(1)} = \frac{7}{9} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)} = 0/7222 \\ x_2^{(2)} = 0/6111 \\ x_3^{(2)} = 0/2222 \end{cases}$$