دانشگاه علم و صنعت ایران
انجمن علمی دانشکده مکانیک

دانشکده مکانیک

دینامیک

شاهرخ حسینی هاشمی

اهداف

فراگیری مفاهیم بنیادی دینامیک مهندسی و فرموله کردن ریاضی پدیده های فیزیکی با ماهیت سینماتیکی و سینتیکی، ایجاد توانایی جهت تحلیل دینامیکی ذره، ذرات مادی و اجسام صلب، واعمال قوانین حاکم، همراه با پرورش دید کاربردی.

فهرست مطالب

بخش اول سینماتیک ذره مادی

۲- حرکت نسبی

۳- حرکت منحنی الخط در فضا

بخش دوم سینتیک ذرات مادی

۴- معادلات دینامیکی حرکت

۵- کار و انرژی

۶-اندازه حرکت وضربه

۷- حرکت تحت تاثیر نیروی مرکزی

بخش سوم حرکت جسم صلب

۸- سینماتیک جسم صلب

بخش چهارم سینتیک جسم صلب

۹- سینتیک و دینامیک

۱- حرکات راست خط، زاویه ای و منحنی الخط صفحه ای

سینماتیک ذره مادی Kinematics of particle

در سینماتیک انتقالی ذره مادی چهارکمیت اساسی داریم:

۱) جابجایی $\underline{S}$ ۲) سرعت $\underline{V}$ ۳) شتاب $\underline{a}$ ۴) زمان t

به هر معادله ای که بتوان میان این چهارکمیت نوشت معادله سینماتیکی می گویند.

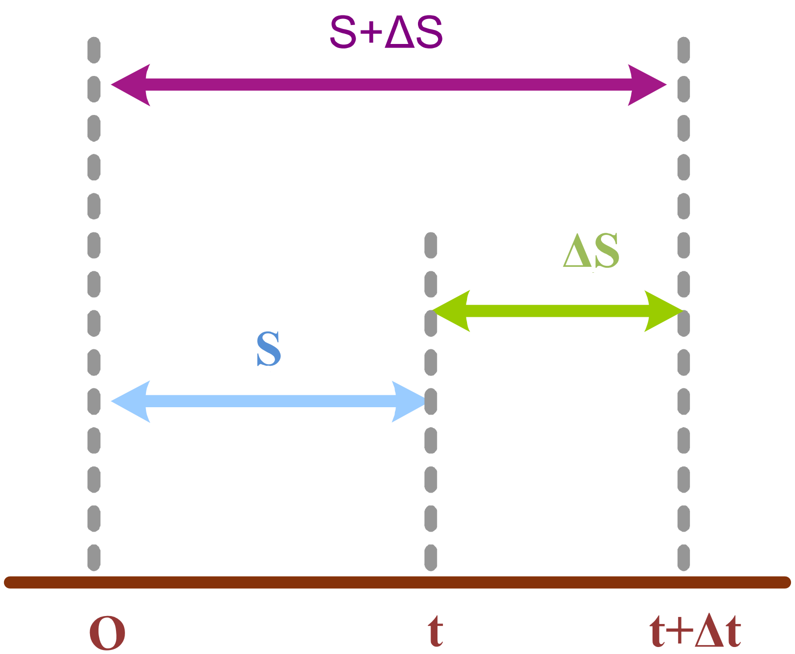
۱-۱ حرکت راست خط ذره مادی Rectlinear motion of particle

مسیر حرکت یک خط مستقیم می باشد.

نکته

وقتی حرکت صورت می گیرد؛ زمان سپری می شود و از مبدا فاصله می گیریم.

تندی متوسط $V = \Delta S/\Delta t$



سرعت (برداری) Velocity

تندی (اسکالر) speed

تندی لحظه ای

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta S/\Delta t = dS/dt = \dot{S}$$

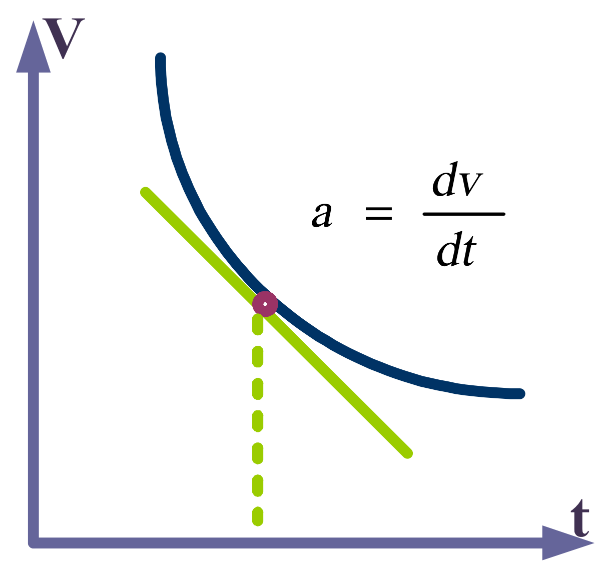
شتاب متوسط

$$a = \Delta V / \Delta t$$

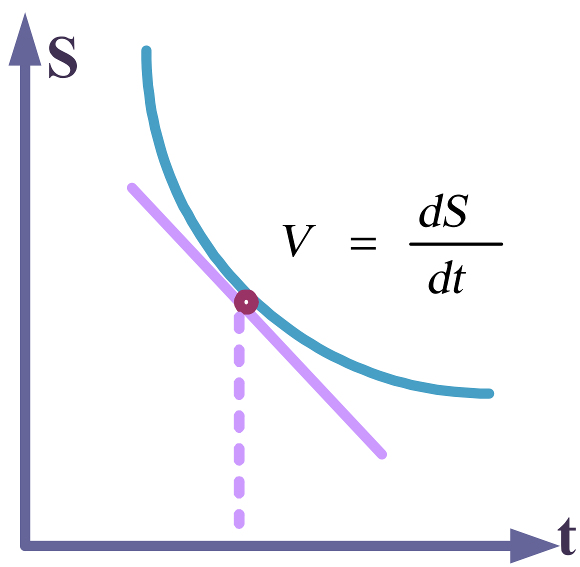
شتاب لحظه ای

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta V / \Delta t = dV/dt = \dot{V} = \ddot{S}$$

تعبیر هندسی شتاب لحظه ای



تعبیر هندسی سرعت لحظه ای



معادلات دیفرانسیلی حاکم برسینماتیک ذره مادی:

$$\begin{cases} V = \dfrac{ds}{dt} = \dot{S} & (I) \\ a = \dfrac{dv}{dt} = \dot{V} = \ddot{S} & (II) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt = \dfrac{ds}{V} \\ dt = \dfrac{dv}{a} \end{cases} \rightarrow \frac{ds}{V} = \frac{dV}{a}$$

رابطه مستقل از زمان :

$$\boxed{VdV = adS}$$

$$\dot{S}d\dot{S} = \ddot{S}dS$$

حالت های مختلفی که برای شتاب داریم:

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = cte \\ a = \text{متغیر} \rightarrow t, V, S \quad \text{برحسب متغیرهای} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = f(t) \\ a = f(V) \\ a = f(s) \end{cases}$$

$$I)\ a = 0$$

$$a = \frac{dV}{dt} = 0 \rightarrow dV = 0 \rightarrow V = cte$$

$$V = \frac{ds}{dt} = cte \rightarrow ds = vdt \xrightarrow{\int} \int_{s_0}^{s} ds = V\int_0^t dt$$

شرایط اولیه کلی $\begin{cases} t = 0 \\ S = S_\circ \\ V = V_\circ \end{cases} \rightarrow$ $\boxed{S = Vt + S_\circ}$

$II)\ a = cte$

$$a = \frac{dv}{dt} = cte = a \rightarrow dv = a\,dt \rightarrow \int_{V_\circ}^{V} dv = a\int_0^t dt$$

$$V - V_\circ = at \rightarrow \boxed{V = at + V_0}$$

$$V = \frac{ds}{dt} = at + V_o \rightarrow ds = (at + V_o)dt \xrightarrow{\int}$$

$$\int_{S_o}^{S} ds = \int_0^t (at + V_0)\,dt \rightarrow \boxed{S = \tfrac{1}{2}at^2 + V_o t + S_o}$$

$III)\ a = f(t)$

$$a = f(t) = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = f(t)dt \xrightarrow{\int} \int_{V_0}^{V} dv = \int_0^t f(t)dt$$

$$\boxed{V = \int_0^t f(t)dt + V_o}$$

$$V = g(t) = \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = g(t)dt \xrightarrow{\int} \int_{S_o}^{S} ds = \int_0^t g(t)dt$$

$$\boxed{S = S_o + \int_0^t g(t)dt}$$

$IV)\ a = f(v)$

$$a = f(v) = \frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \frac{dv}{f(v)} = dt \quad \xrightarrow{\int} \int_{V_0}^{V} \frac{dv}{f(v)} = \int_0^t dt$$

$$\boxed{t = \int_{V_0}^{V} \frac{dv}{f(v)}} \qquad \rightarrow V = g(t)$$

مثال:

$$a = \frac{dv}{dt} = f(v) = -Kv \quad \rightarrow \frac{dv}{v} = -kdt \qquad \int_{V_o}^{V} \frac{dv}{V} = \ln\frac{V}{V_0} = -kt$$

$$\frac{V}{V_o} = e^{-Kt} \quad \rightarrow \quad V = V_o e^{-Kt}$$

$$V = g(t) = \frac{ds}{dt} \quad \rightarrow \quad ds = g(t)dt \quad \rightarrow \int_{S_o}^{S} ds = \int_0^t g(t)dt$$

$$\boxed{S = S_0 + \int_0^t g(t)dt}$$

$V)\ a = f(s)$

روش اول:

$$a = f(s) \quad \rightarrow \quad V\,dV = a\,ds = f(s)\,ds \xrightarrow{\int}$$

$$\int_{V_0}^{V} V\,dV = \int_{S_o}^{S} f(s)\,ds \rightarrow \tfrac{1}{2}\left(V^2 - V_0^2\right) = \int_{S_o}^{S} f(s)\,ds$$

$$\boxed{\rightarrow V^2 = V_0^2 + 2\int_{S_o}^{S} f(s)\,ds} \quad \rightarrow V = g(s)$$

$$V = \frac{ds}{dt} = g(s) \quad \rightarrow \frac{ds}{g(s)} = dt \rightarrow \int_{S_o}^{S} \frac{ds}{g(s)} = \int_0^t dt$$

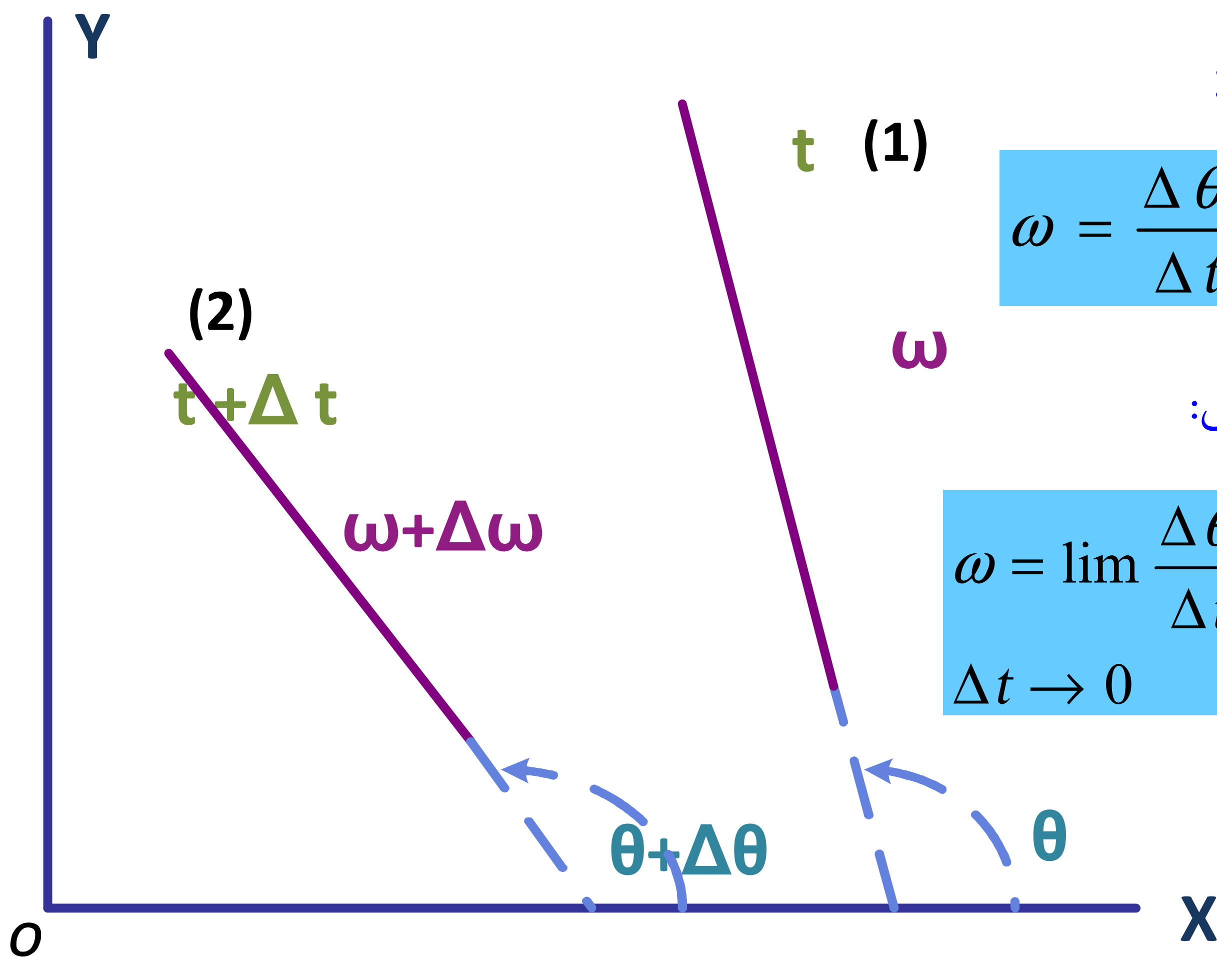
$$t = \int_{S_0}^{S} \frac{ds}{g(s)} \rightarrow \quad \boxed{S = p(t)} \quad , \quad \boxed{V = \dot{S} = \frac{d}{dt}\,p(t)}$$

روش دوم:

$$a = \ddot{S} = f(s) \rightarrow \ddot{S} - f(s) = 0$$

نکته این معادله باید خطی باشد.

۲-۱ حرکت زاویه ای خط Angular Motion

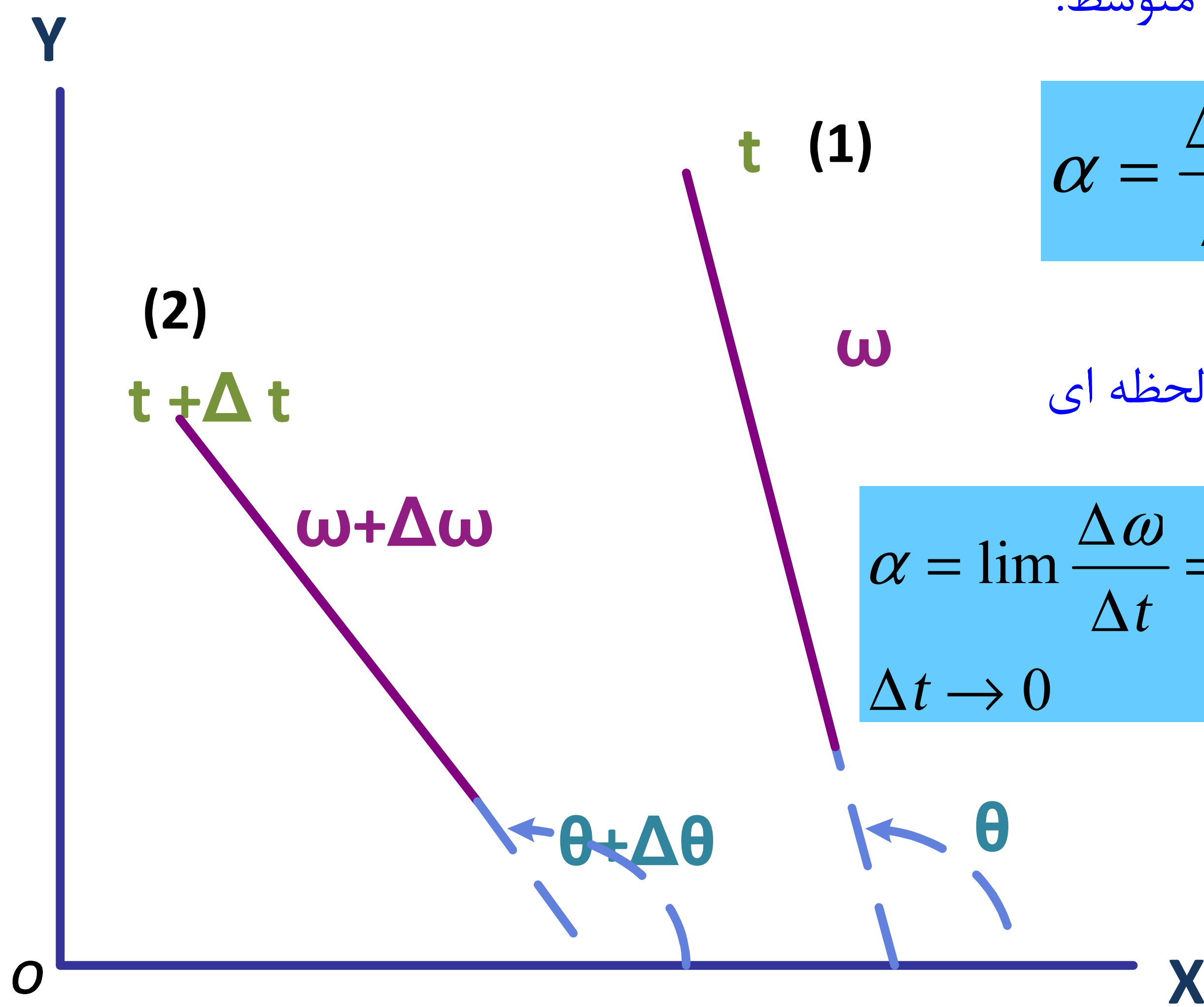


تندی زاویه ای متوسط:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

تندی زاویه ای لحظه ای:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$



شتاب زاویه ای متوسط:

$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

شتاب زاویه ای لحظه ای

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

$$
\begin{cases}
\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} & (I) \\
\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \omega = \ddot{\theta} & (II)
\end{cases}
$$

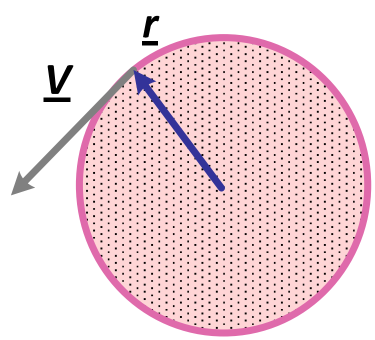
با حذف پارامتر زمان بین این دو رابطه داریم:

$$\boxed{\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta}$$

$$\boxed{\dot{\theta} d\dot{\theta} = \ddot{\theta} d\theta}$$

θ: جابجایی زاویه ای   ω: سرعت زاویه ای   α: شتاب زاویه ای

نکته: بردار سرعت زاویه ای برصفحه دوران عمود است و تغییرات سرعت زاویه ای علامت α را تعیین می کند.



$$\underline{V} = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

حالات مختلف برای α:

$I)\alpha = 0$

$II)\alpha = cte$

$III)\alpha =$ متغیر $\rightarrow \begin{cases} \alpha = f(t) \\ \alpha = f(\omega) \\ \alpha = f(\theta) \end{cases}$

شرایط اولیه

$$t = 0 \begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \dot{\theta} = \omega_o \end{cases}$$

$$I)\alpha = 0 = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow d\omega = 0 \rightarrow \omega = cte$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = cte \rightarrow d\theta = \omega dt \xrightarrow{\int} \int_{\theta_o}^{\theta} d\theta = \omega \int_0^t dt$$

$$\boxed{\rightarrow \theta = \omega t + \theta_o}$$

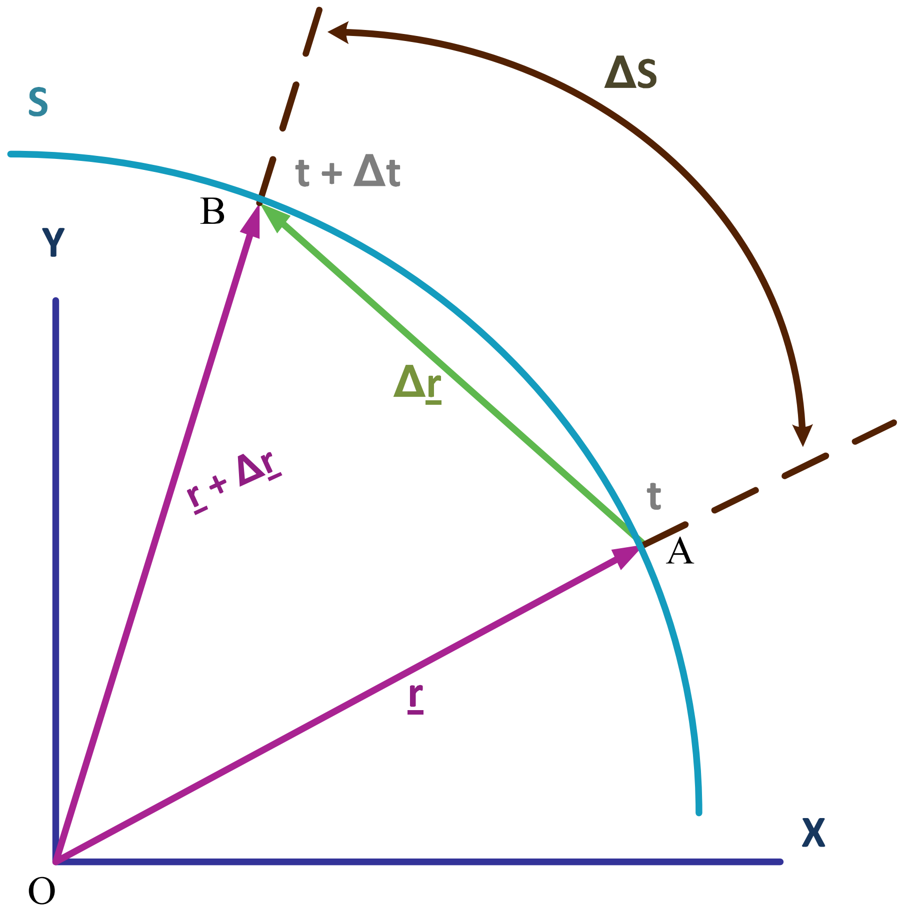
$$s = vt + s_0$$ مشابه رابطه

۳-۱ حرکت منحنی الخط در صفحه Curvilinear Motion

کلیات:

مسیر حرکت منحنی است

اگر منحنی مسیر در صفحه باشد، حرکت دو بعدی و اگر در فضا باشد، حرکت سه بعدی است .



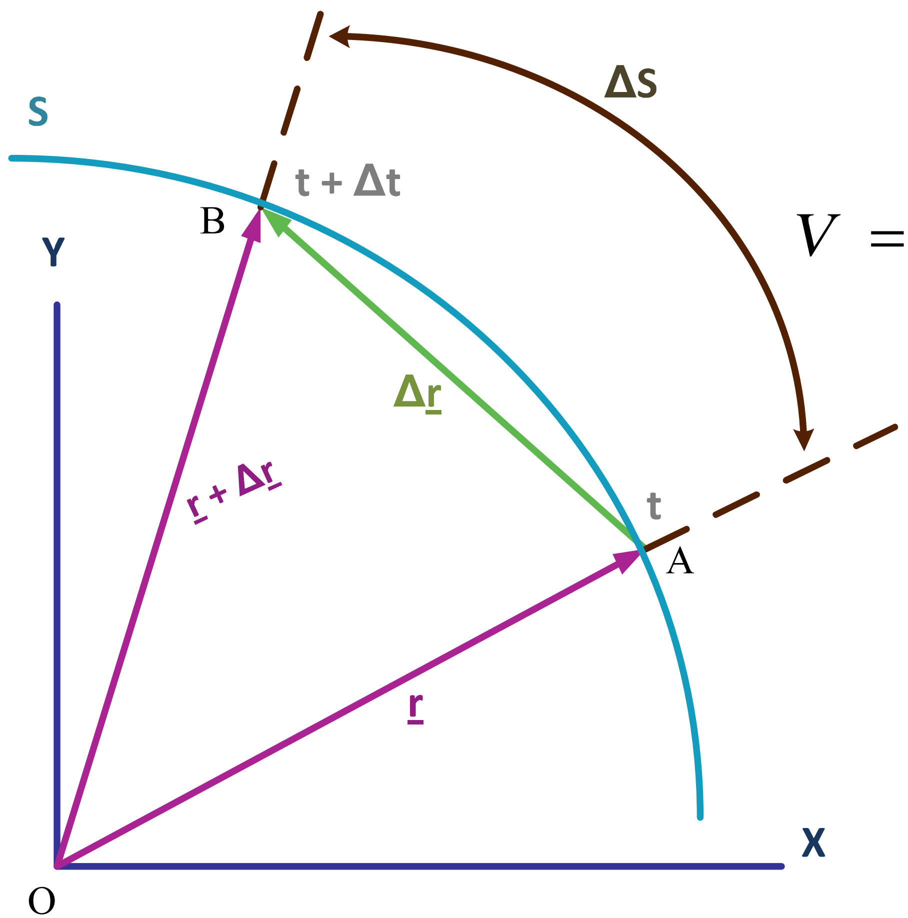
$\underline{r}$: بردار وضعیت در زمان t

تندی متوسط:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (\Delta S \neq \Delta r)$$

تندی لحظه ای:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \xrightarrow{dr\, =\, ds} = \frac{dr}{dt}$$



بردار سرعت لحظه ای:

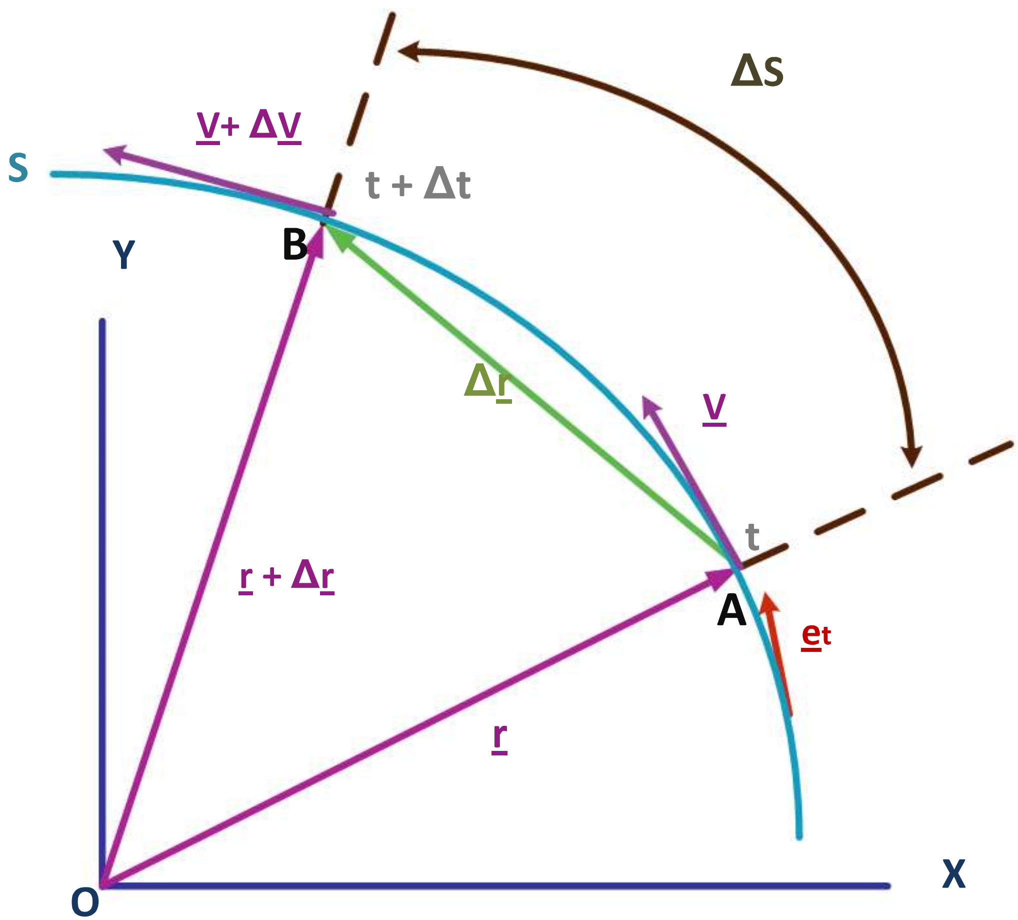
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \frac{d\,\underline{r}}{dt} = \underline{V}$$

بردار سرعت در حرکت منحنی الخط همواره مماس برمسیر حرکت می باشد.

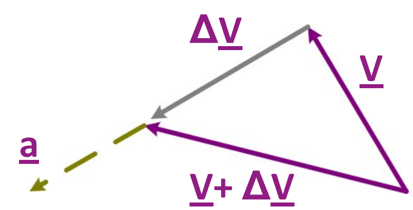
$\underline{e}_t$ بردار یکه مماس برمسیر حرکت

$$\boxed{\underline{V} = V\underline{e}_t}$$

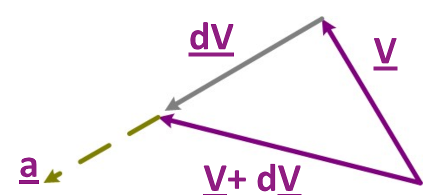
بردار شتاب



$$\underline{a} = \frac{\Delta \underline{V}}{\Delta t}$$



$$\boxed{\underline{a} = \frac{d\underline{V}}{dt}}$$



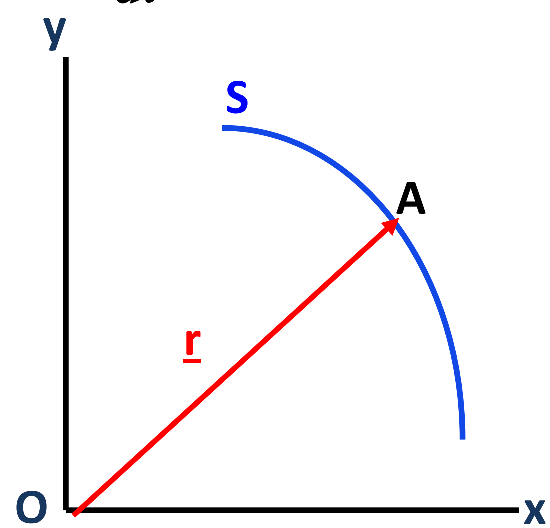
بردار شتاب در حرکت منحنی الخط همواره بطرف داخل منحنی مسیر متوجه میباشد

نکات مهم

- بردار سرعت در حرکت منحنی الخط همواره مماس برمسیر حرکت می باشد.
- هیچ حرکت منحنی الخط بدون شتابی وجود ندارد . (شتاب به مفهوم کلی نمی تواند صفر باشد.)
- شتاب در حرکت منحنی الخط در جهت بردار تغییرات سرعت است.

۱-۴ تشریح حرکت منحنی الخط در دستگاه مختصات دکارتی

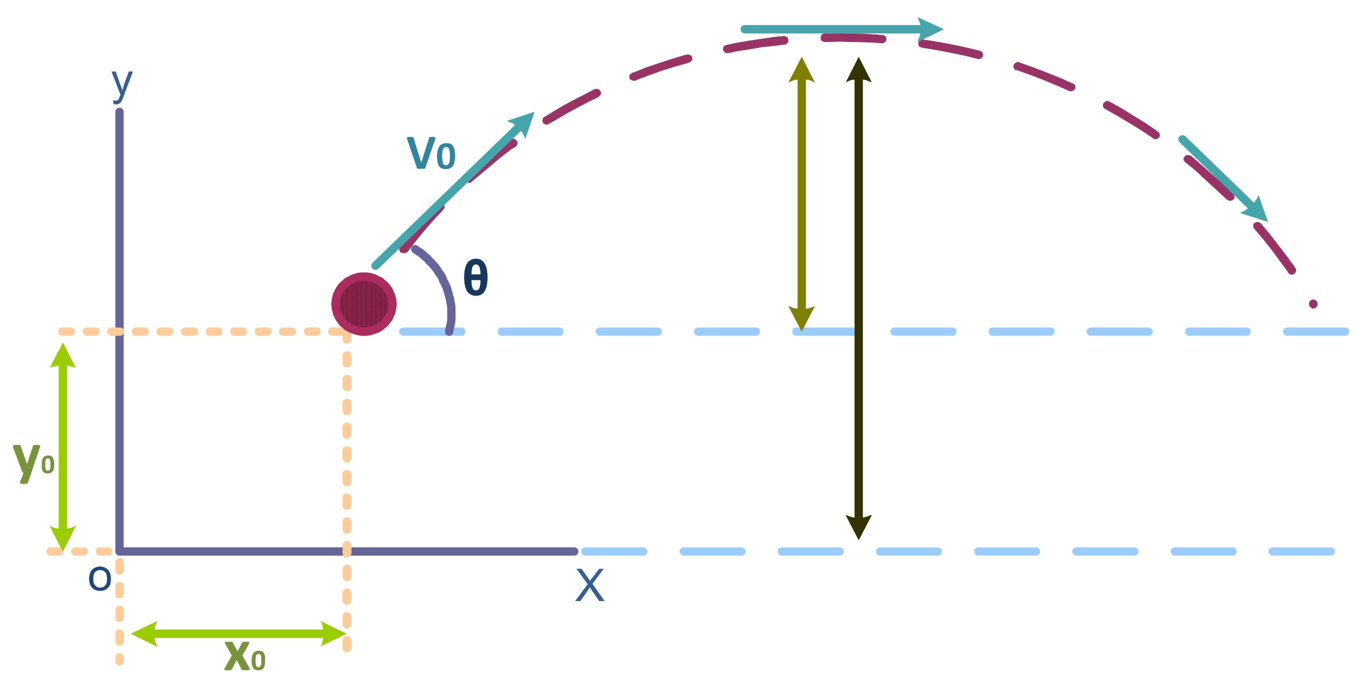
$$\mapsto \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} \qquad \mapsto \underline{V} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j} = V_x\underline{i} + V_y\underline{j} \longrightarrow \begin{array}{l} V_x = \dot{x} \\ V_y = \dot{y} \end{array}$$



$$\mapsto \underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j} = a_x\underline{i} + a_y\underline{j} \longrightarrow \begin{array}{l} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \end{array}$$

تعیین معادلات اساسی در حرکت پرتابی

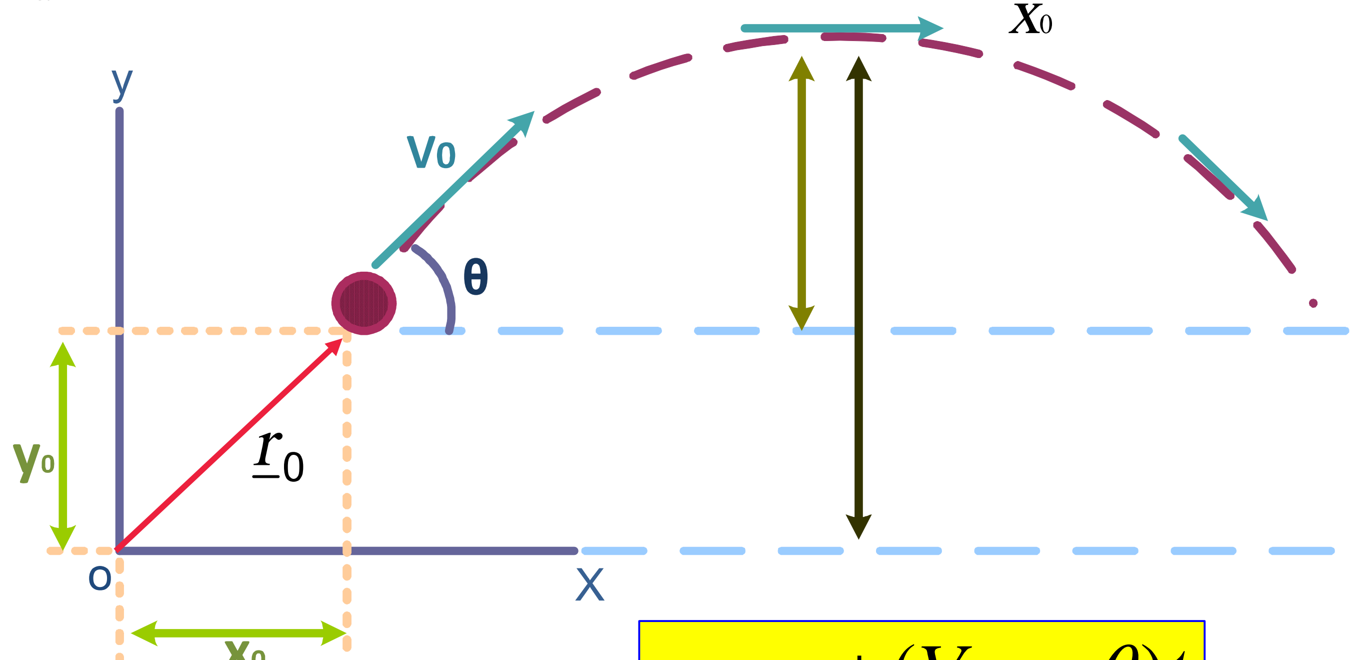
(یک حرکت منحنی الخط دو بعدی در دستگاه مختصات دکارتی داریم)



$$\underline{r}_0 = x_0\,\underline{i} + y_0\,\underline{j}$$

$$(I)\,a_x = 0 \qquad \frac{dV_x}{dt} = 0 \Rightarrow dV_x = 0 \Rightarrow \boxed{V_x = V_0 \cos\theta}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = V_0 \cos\theta \Rightarrow dx = (V_0\cos\theta)\,dt \qquad \int_{x_0}^{x} dx = V_0\cos\theta \int_0^t dt$$

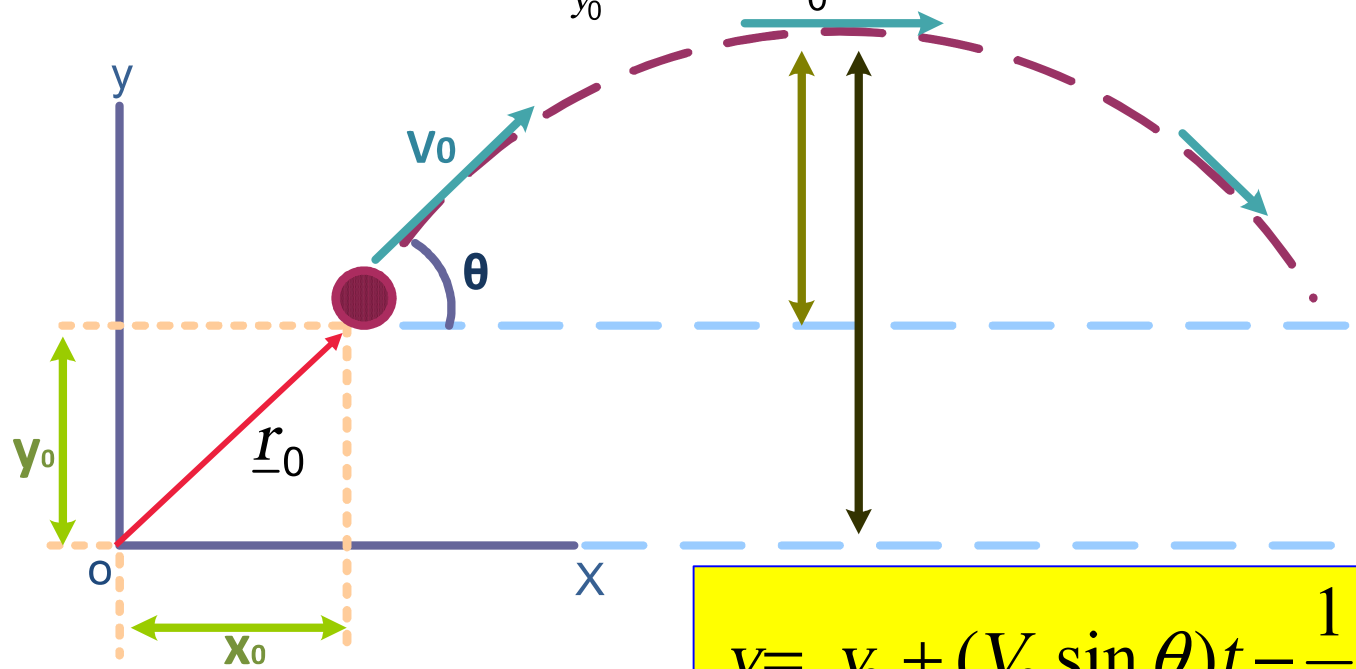


$$\boxed{x = x_0 + (V_0\cos\theta)\,t}$$

$$(II)\, a_y = -g = cte \qquad \frac{dV_y}{dt} = -g \qquad \int_{V_0 \sin\theta}^{V_y} dV_y = -g\int_0^t dt$$

$$\boxed{V_y = -gt + V_0 \sin\theta} \qquad V_y = \frac{dy}{dt} = -gt + V_0 \sin\theta$$

$$dy = (-gt + V_0 \sin\theta)\, dt \qquad \int_{y_0}^{y} dy = -\int_0^t (gt - V_0 \sin\theta)\, dt$$

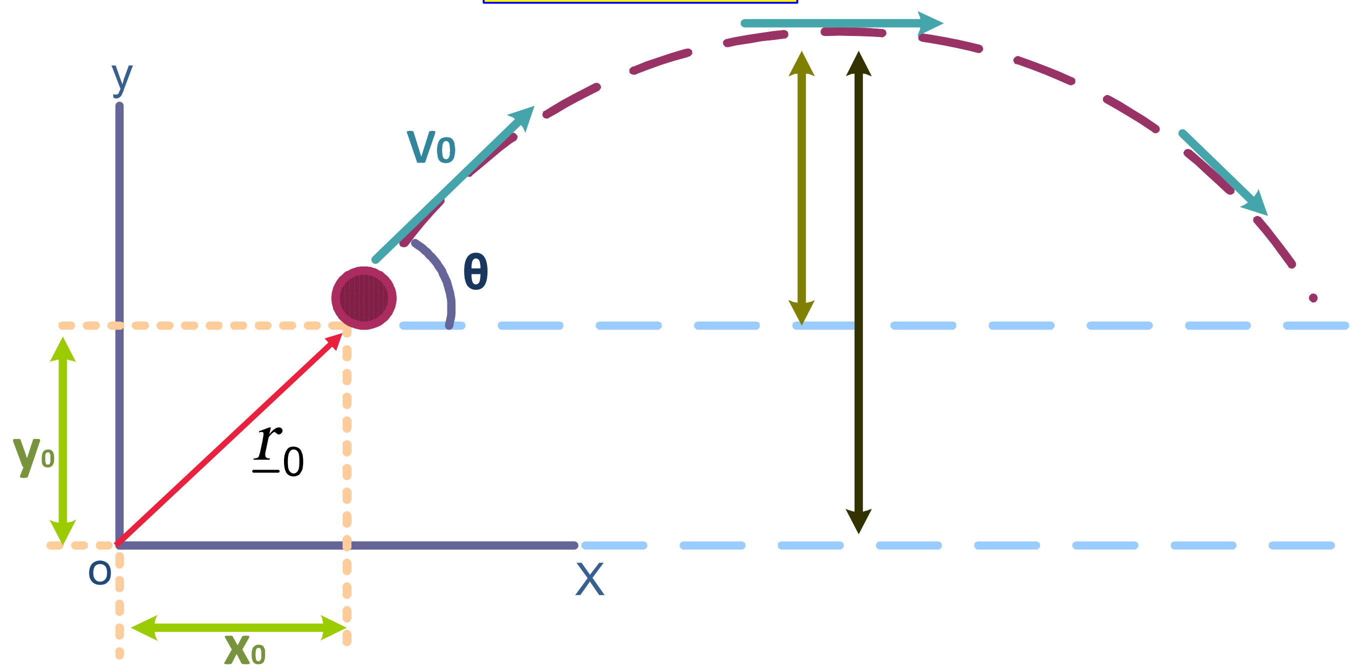


$$\boxed{y = y_0 + (V_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2} g t^2}$$

مدت زمان رسیدن به نقطه اوج

$$V_y = -gt + V_0 \sin\theta \Rightarrow 0 = -gt + V_0 \sin\theta$$

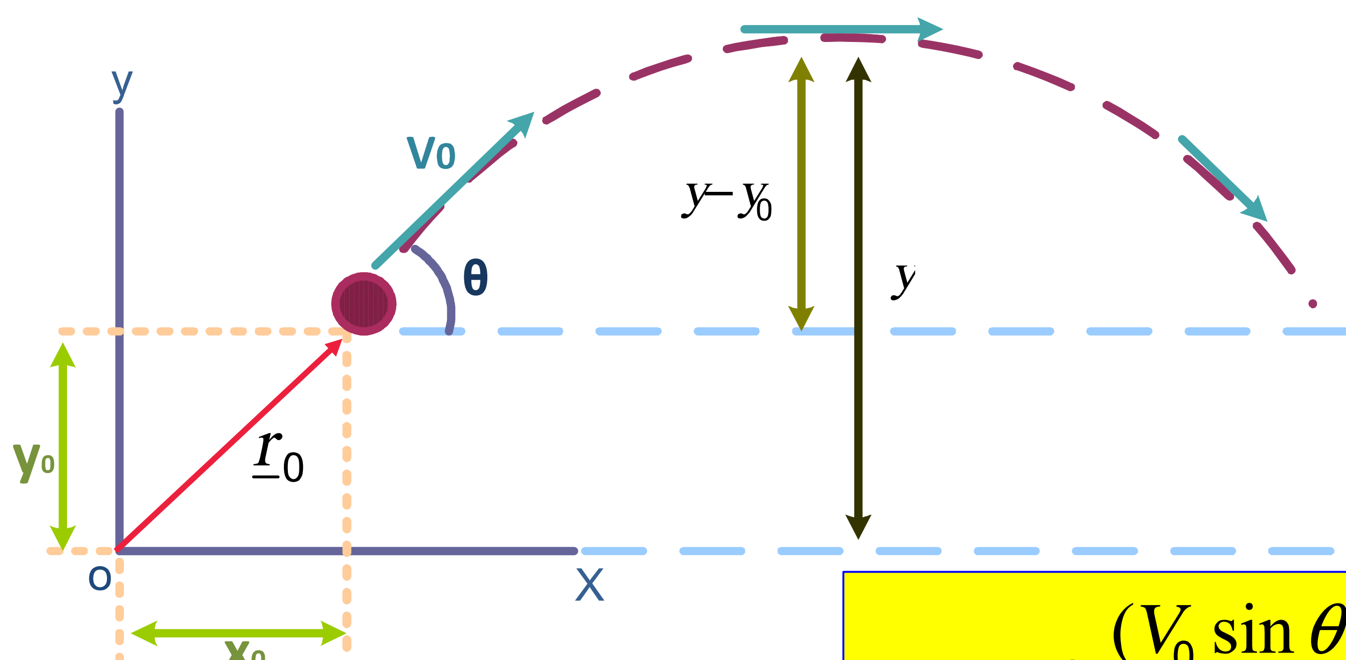
$$\boxed{t = \frac{V_0 \sin\theta}{g}}$$



مختصات نقطه اوج

$$y = y_0 + (V_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad t = \frac{V_0 \sin\theta}{g}$$

$$y = y_0 + (V_0 \sin\theta)\left(\frac{V_0 \sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{V_0 \sin\theta}{g}\right)^2$$



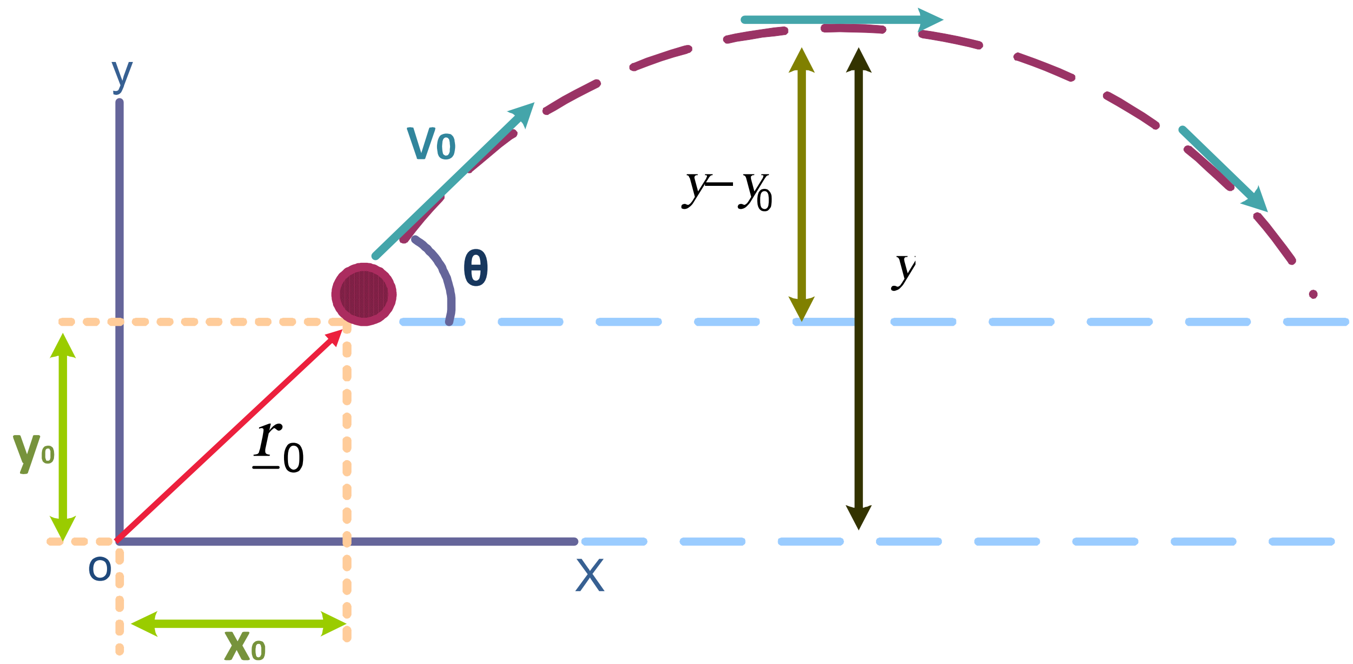
$$\boxed{y = y_0 + \frac{(V_0 \sin\theta)^2}{2g}}$$

معادله مسیر

$$x = x_0 + (V_0 \cos\theta)t \qquad y = y_0 + (V_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

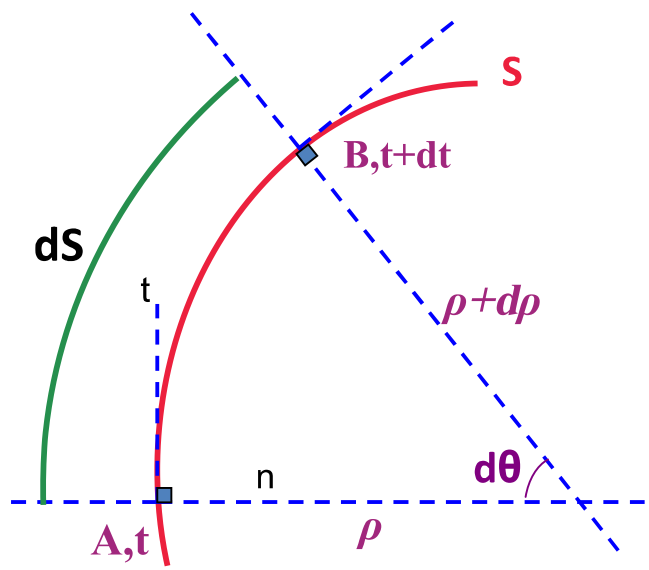
$$t = \frac{x - x_0}{V_0 \cos\theta}$$

$$\boxed{y = y_0 + (x - x_0)\tan\theta - \frac{1}{2}g\left(\frac{x - x_0}{V_0 \cos\theta}\right)^2}$$



۱-۵ تشریح حرکت منحنی الخط در دستگاه قائم و مماسی

ρ : شعاع انحنای مسیر



$$ds = \rho \; d\theta$$

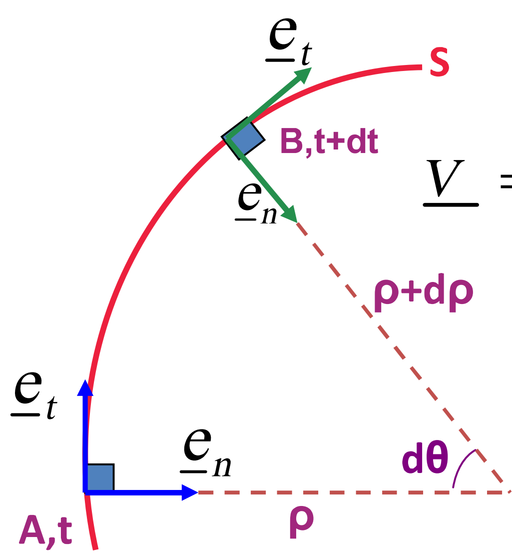
$$ds = (\rho + d\rho)d\theta = \rho d\theta + d\rho d\theta = \rho d\theta$$

$$V = \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\theta}{dt} = \rho\dot{\theta} = \rho\omega$$

$\underline{e}_t$ بردار یَکه مماس بر مسیر

$\underline{e}_n$ بردار یَکه قایم بر مسیر

$$\boxed{\underline{V} = V\underline{e}_t = \rho\dot{\theta}\underline{e}_t = \rho\omega\underline{e}_t}$$

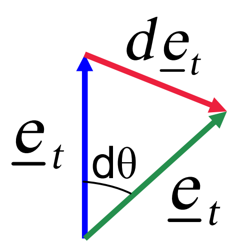


$$\underline{V} = V\,\underline{e}_t \Rightarrow \underline{a} = \frac{d\,\underline{V}}{dt} = \dot{V}\,\underline{e}_t + V\,\dot{\underline{e}}_t$$

$\dot{\underline{e}}_t$ مشتق بردار یکه $\underline{e}_t$ بر حسب زمان

$$\dot{\underline{e}}_t = \frac{d\underline{e}_t}{dt}$$

$\dot{\underline{e}}_t$ در جهت $d\underline{e}_t$ است



مثلث متساوی الساقین

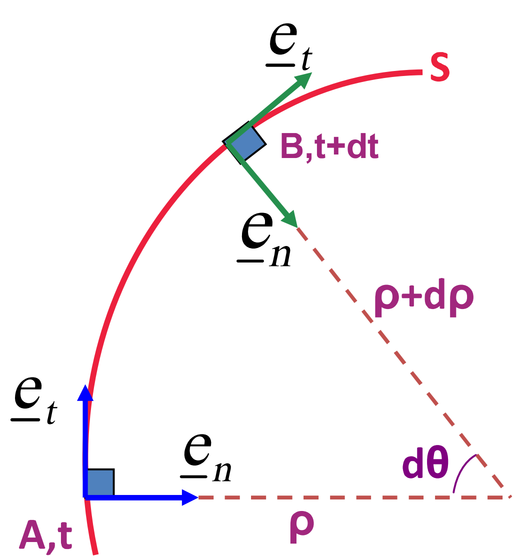
$$de_t = e_t d\theta = (1)d\theta = d\theta \qquad d\underline{e}_t = de_t.\underline{e}_n = d\theta\underline{e}_n$$

$$\dot{\underline{e}}_t = \frac{d\underline{e}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\underline{e}_n = \dot{\theta}\underline{e}_n = \omega\underline{e}_n$$

حسینی هاشمی

$$\underline{a} = \dot{V}\underline{e}_t + V\dot{\underline{e}}_t \qquad V = \rho\dot{\theta} = \rho\omega \qquad \dot{\underline{e}}_t = \dot{\theta}\underline{e}_n = \omega\underline{e}_n$$

$$\boxed{\underline{a} = \dot{V}\underline{e}_t + V\dot{\theta}\,\underline{e}_n = \dot{V}\underline{e}_t + V\omega\underline{e}_n}$$



$$\underline{a} = a_t\underline{e}_t + a_n\underline{e}_n$$

$$\begin{cases} a_t = \dot{V} = \dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = \dot{\rho}\omega + \rho\alpha \\ a_n = V\dot{\theta} = \rho\dot{\theta}^2 = \rho\omega^2 = \dfrac{V^2}{\rho} \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

نکات مهم

$$\begin{cases} a_t = \dot{V} = \dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = \dot{\rho}\omega + \rho\alpha \\ a_n = V\dot{\theta} = \rho\dot{\theta}^2 = \rho\omega^2 = \dfrac{V^2}{\rho} \end{cases}$$

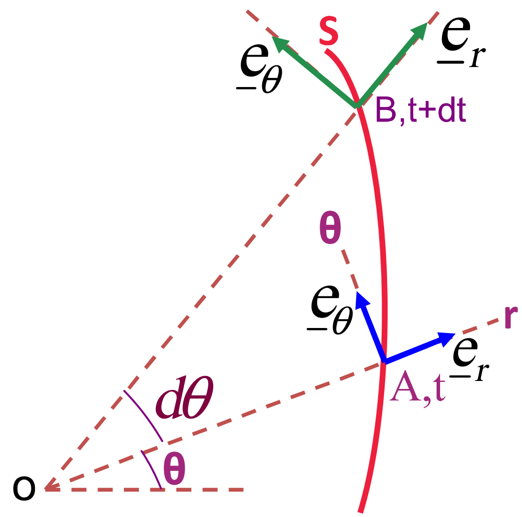
- در صورتی که در حرکت منحنی الخط تندی یعنی اندازه بردار سرعت ثابت باشد داریم:

$$V = cte \rightarrow \dot{V} = 0 \Rightarrow a_t = 0 \; But \; : a_n \neq 0 \rightarrow a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = a_n$$

- و در صورتی که مسیر دایره باشد:

$$\rho = R = cte \rightarrow \dot{\rho} = 0 \rightarrow \begin{cases} a_t = \rho\alpha = \rho\ddot{\theta} = R\alpha \\ a_n = \dfrac{V^2}{\rho} = \dfrac{V^2}{R} \end{cases}$$

۶-۱ تشریح حرکت منحنی الخط در دستگاه مختصات قطبی



$\underline{e}_r$ بردار یکه در امتداد r

$\underline{e}_\theta$ بردار یکه در امتداد θ

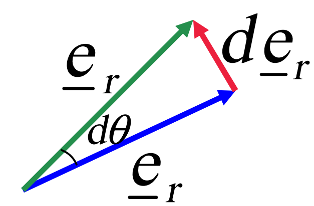
$$\underline{r} = r\,\underline{e}_r$$

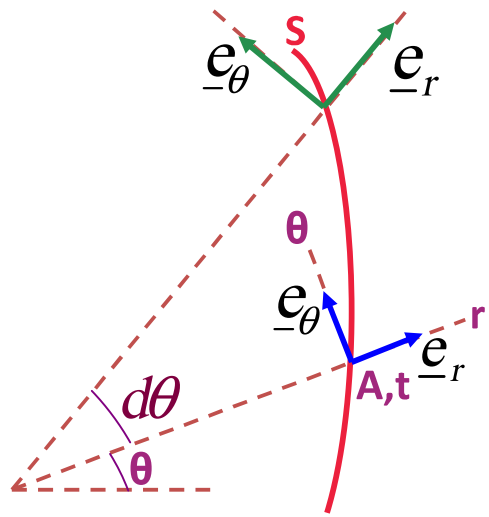
$$\underline{V} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\underline{e}}_r \qquad \dot{\underline{e}}_r = \frac{d\underline{e}_r}{dt} = ?$$

$$de_r = e_r\,d\theta = (1)\,d\theta = d\theta$$

$$d\underline{e}_r = de_r\,\underline{e}_\theta = d\theta\,\underline{e}_\theta$$

$$\dot{\underline{e}}_r = \frac{d\underline{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\underline{e}_\theta = \dot{\theta}\underline{e}_\theta = \omega\underline{e}_\theta$$





$$\underline{V} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\underline{e}}_r \qquad \dot{\underline{e}}_r = \dot{\theta}\underline{e}_\theta = \omega\underline{e}_\theta$$

$$\boxed{\underline{V} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta}$$

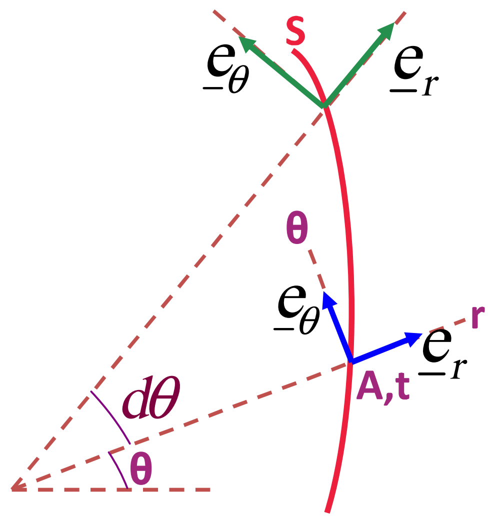
$$\underline{V} = V_r\underline{e}_r + V_\theta\underline{e}_\theta$$

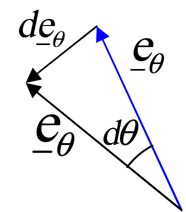
$$\begin{cases} V_r = \dot{r} \\ V_\theta = r\dot{\theta} = r\omega \end{cases}$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{V}}{dt} = \ddot{r}\underline{e}_r + \dot{r}\dot{\underline{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\underline{e}_\theta + r\ddot{\theta}\underline{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\underline{e}}_\theta$$

$$\underline{a} = \ddot{r}\underline{e}_r + \dot{r}\dot{\underline{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\underline{e}_\theta + r\ddot{\theta}\underline{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\underline{e}}_\theta \qquad \dot{\underline{e}}_r = \dot{\theta}\underline{e}_\theta = \omega\underline{e}_\theta$$

$$\dot{\underline{e}}_\theta = ?$$





$$de_\theta = e_\theta d\theta = (1)d\theta = d\theta$$

$$d\underline{e}_\theta = -de_\theta \underline{e}_r = -d\theta\underline{e}_r$$

$$\dot{\underline{e}}_\theta = \frac{d\underline{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\underline{e}_r = -\dot{\theta}\underline{e}_r$$

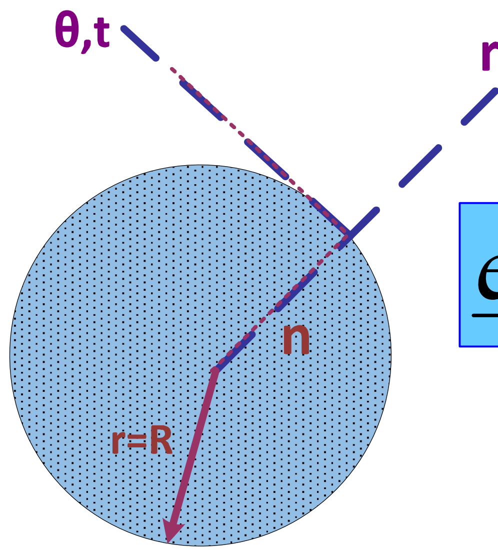
$$\underline{a} = \ddot{r}\underline{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\underline{e}_\theta + r\ddot{\theta}\underline{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\underline{e}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\underline{e}_\theta$$

$$\boxed{\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\underline{e}_\theta}$$

$$\underline{a} = a_r\underline{e}_r + a_\theta\underline{e}_\theta \rightarrow \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

حالت خاص: اگر مسیر حرکت دایره باشد

امتداد r, θ همان امتداد n, t است.



$$\underline{e}_\theta = \underline{e}_t \qquad \underline{e}_r = -\underline{e}_n$$

$$r = R = cte \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\underline{V} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta$$

$$\underline{V} = r\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta = R\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta = R\omega\,\underline{e}_\theta = R\omega\,\underline{e}_t = R\dot{\theta}\,\underline{e}_t$$

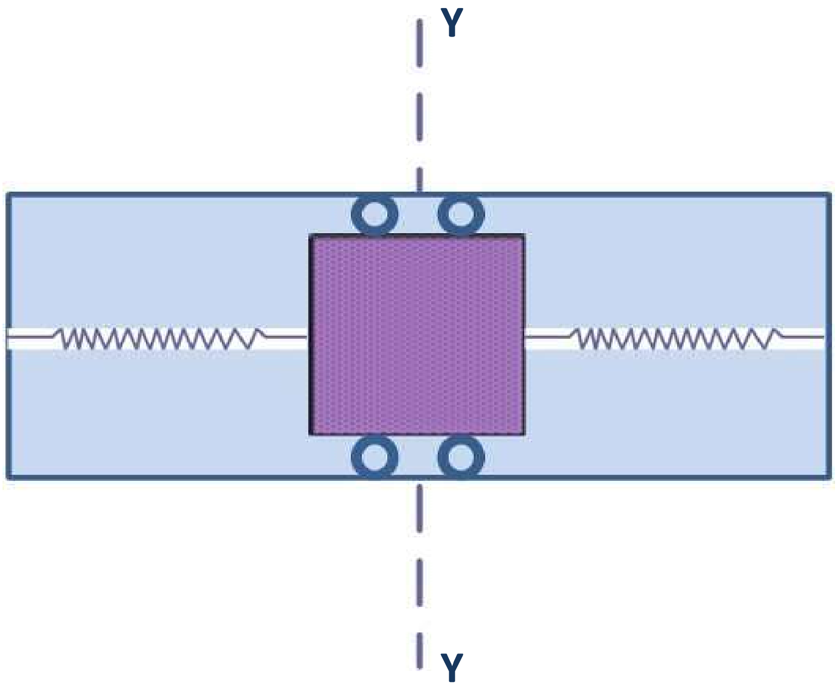
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$a_r = -r\dot{\theta}^2 = -R\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} = R\alpha$$

$$\underline{a} = a_r\,\underline{e}_r + a_\theta\,\underline{e}_\theta = -R\dot{\theta}^2\,\underline{e}_r + R\alpha\,\underline{e}_\theta = R\dot{\theta}^2\,\underline{e}_n + R\alpha\,\underline{e}_t$$

مسایل

مثال: یک لغزنده مطابق شکل به وسیله دو فنر مهار شده است می تواند حول محور yy نوسان کند. به هنگام عبور از حالت تعادل s, t برابر صفر و $V=V_0$ می باشد .مطلوب است تعیین روابطی برای جابجایی S و سرعت V بر حسب زمان . و همچنین دوره تناوب لغزنده در صورتی که شتاب حرکت به صورت $a=-K^2S$ داده شود (K مقدار ثابت است)



روش اول: روش معادله دیفرانسیل

$$\ddot{S} + K^2 S = 0$$

معادله همگن خطی مرتبه دوم

$$S = e^{\lambda t} \quad \rightarrow \qquad \dot{S} = \lambda e^{\lambda t} \qquad \ddot{S} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + K^2 e^{\lambda t} = 0 \rightarrow \left(\lambda^2 + K^2\right) e^{\lambda t} = 0$$

$$e^{\lambda t} \neq 0 \rightarrow \lambda^2 = -k^2 \qquad \lambda = \pm ik$$

$$S = A e^{ikt} + B e^{-ikt}$$

$$S = A(\cos kt + i \sin Kt) + B(\cos kt - i \sin Kt)$$

$$S = (A + B)\cos kt + i(A - B)\sin k$$

$$\boxed{S = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \qquad \dot{S} = -C_1 K_1 \sin kt + C_2 K \cos Kt}$$

با اعمال شرایط اولیه

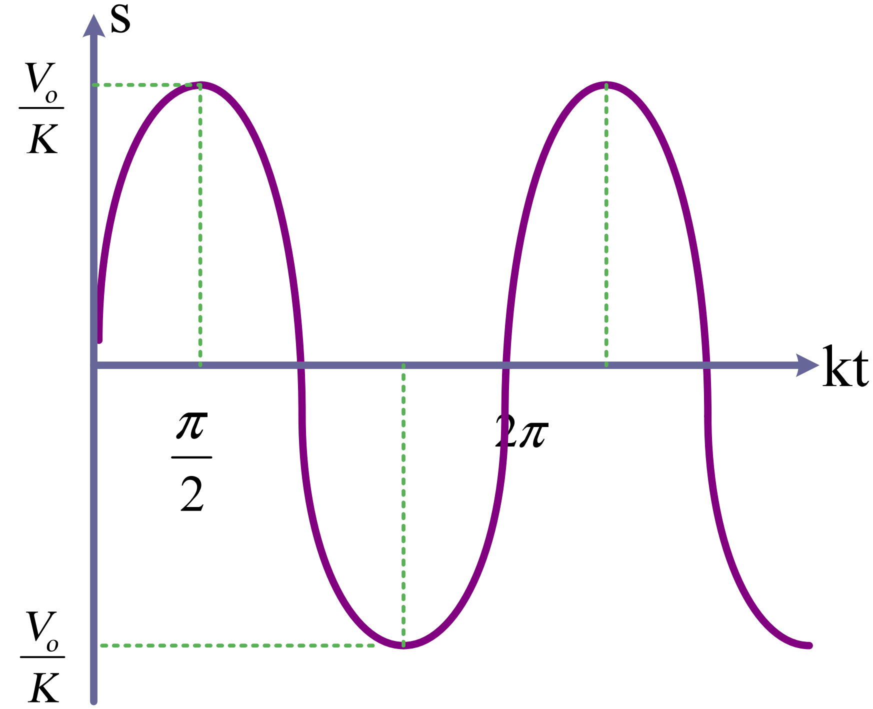
$$\begin{cases} t=0 \\ S=0 \\ V=V_o \end{cases} \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$V_o = C_2 K \rightarrow C_2 = \frac{V_0}{K}$$

$$\boxed{\rightarrow \quad S = \frac{V_o}{K} Sinkt}$$

$$K t = 2\pi$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{K}}$$



روش دوم: روش انتگرالی

$$V=\frac{ds}{dt}=\dot{S} \quad , \quad a=\frac{dv}{dt}=\dot{V}=\ddot{S}$$

$$Vdv = ads = -K^2 Sds$$

$$\xrightarrow{\int} \int_{V_o}^{V} VdV = -K^2\int_0^S Sds \quad \frac{1}{2}\left(V^2-V_0^2\right)=-\frac{1}{2}K^2S^2 \rightarrow V^2-V_0^2=-K^2S^2$$

$$V^2 = V_0^2\left(1-\frac{k^2S^2}{V_0^2}\right) \rightarrow \boxed{V = V_0\sqrt{1-\frac{k^2S^2}{V_0^2}}}$$

$$V=\frac{ds}{dt}=V_0\sqrt{1-\frac{k^2S^2}{V_0^2}} \rightarrow \frac{ds}{\sqrt{1-\frac{k^2S^2}{V_0^2}}}=V_0\,dt$$

$$V_0\int_0^t dt=\int_0^S \frac{ds}{\sqrt{1-\frac{k^2 S^2}{V_0^2}}} = V_o\, t \qquad S=\frac{V_o}{K}\, sin\alpha \qquad \frac{Ks}{V_o}=sin\alpha$$

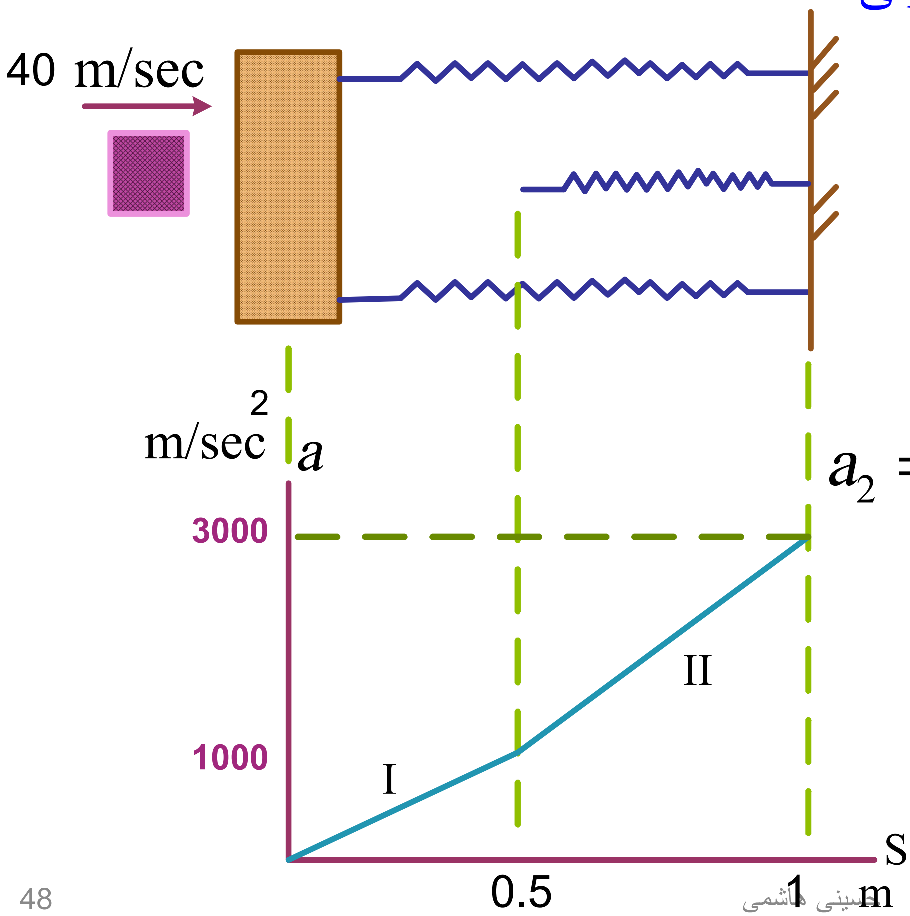
$$ds=\frac{V_o}{K}cos\alpha d\alpha \qquad \rightarrow \frac{ds}{\sqrt{1-\frac{k^2 S^2}{V_0^2}}}=\frac{V_o\, cos\alpha\, d\alpha}{K\;\; cos\alpha}=\frac{V_o}{K}\,d\alpha$$

$$\begin{cases} S=0 & \alpha=0 \\ S=S & \alpha=sin^{-1}\frac{KS}{V_0} \end{cases} \qquad \int_0^S \frac{ds}{\sqrt{1-\frac{k^2 S^2}{V_0^2}}}=\frac{V_o}{K}\int_0^{sin^{-1}\frac{ks}{V_0}} d\alpha$$

$$=\frac{V_o}{K}\,sin^{-1}\frac{Ks}{V_o}=V_o\, t \rightarrow \frac{Ks}{V_o}= sinKt$$

$$\boxed{S=\frac{V_o}{K}\,sinKt}$$

مثال: دستگاهی متشکل از سه فنر برای جلوگیری از حرکت افقی جرم بزرگی مطابق شکل به کار می رود.در هنگام تماس جرم با دستگاه سرعت جرم برابر با 40 m/s می باشد. دو فنر بیرونی یک شتاب منفی متناسب با فشردگی فنر به وجود می آورند. فنر وسطی موجب افزایش این شتاب منفی به هنگامی که فشردگی فنر بیشتر از 0.5m است، می شود. مطلوب است تعیین حداکثر فشردگی فنرهای بیرونی؟



$$a_1 = 2000\,S \qquad 0 \le S \le 0.5$$

$$a_2 = 4000S - 1000 \qquad 0.5 \le S \le 1$$

روش انتگرالی:

$$VdV = ads = -2000\, Sds$$

هر دو شتاب ها کاهنده هستند، پس علامت منفی دارند.

$$\int_{40}^{V} VdV = -2000\int_{0}^{0.5} Sds$$

$$\tfrac{1}{2}\left(V^2 - 1600\right) = -1000(0.25) \qquad V = 10\sqrt{11}\ m/s$$

$$VdV = ads = \left(-4000\, S + 1000\right)ds$$

$$\int_{10\sqrt{11}}^{0} VdV = -4000\int_{0.5}^{S} Sds + 1000\int_{0.5}^{S} ds$$

$$200S^2 - 100S - 55 = 0$$

$$\boxed{S = 0.83m}$$

مثال: ذره ای که روی یک خط راست حرکت می کند، تحت تاثیر نیرویی متناسب با زمان و نیروی کاهنده متناسب با جابجایی قرار گرفته است. شتاب ذره به وسیله رابطه $a=\overline{K}t-K^2S$ داده می شود؛ که در آن $\overline{K}, K$ مقادیر ثابت اند. مطلوب است تعیین S به صورت تابعی از t در صورتی که $\dot{S}, S$ در لحظه ی $t=0$ برابر صفر باشند.

حل معادله دیفرانسیل تنها راه حل می باشد.

$$\ddot{S}=\overline{K}t-K^2S \qquad \ddot{S}+K^2S=\overline{K}t \qquad S=S_h+S_p$$

$$\ddot{S}+K^2S=0 \qquad S_h = C_1 SinKt + C_2 CosKt \qquad S_p = C_3 t$$

$$S = C_1 Sinkt + C_2 Coskt + C_3 t$$

$$\dot{S} = C_1 KCosKt - C_2 k SinKt + C_3$$

$$\ddot{S} = -C_1 K^2 SinKt - C_2 K^2 Coskt$$

$$S = 0 \xrightarrow{t=0} \quad 0 = C_2 \rightarrow S = C_1 Sinkt + C_3 t$$

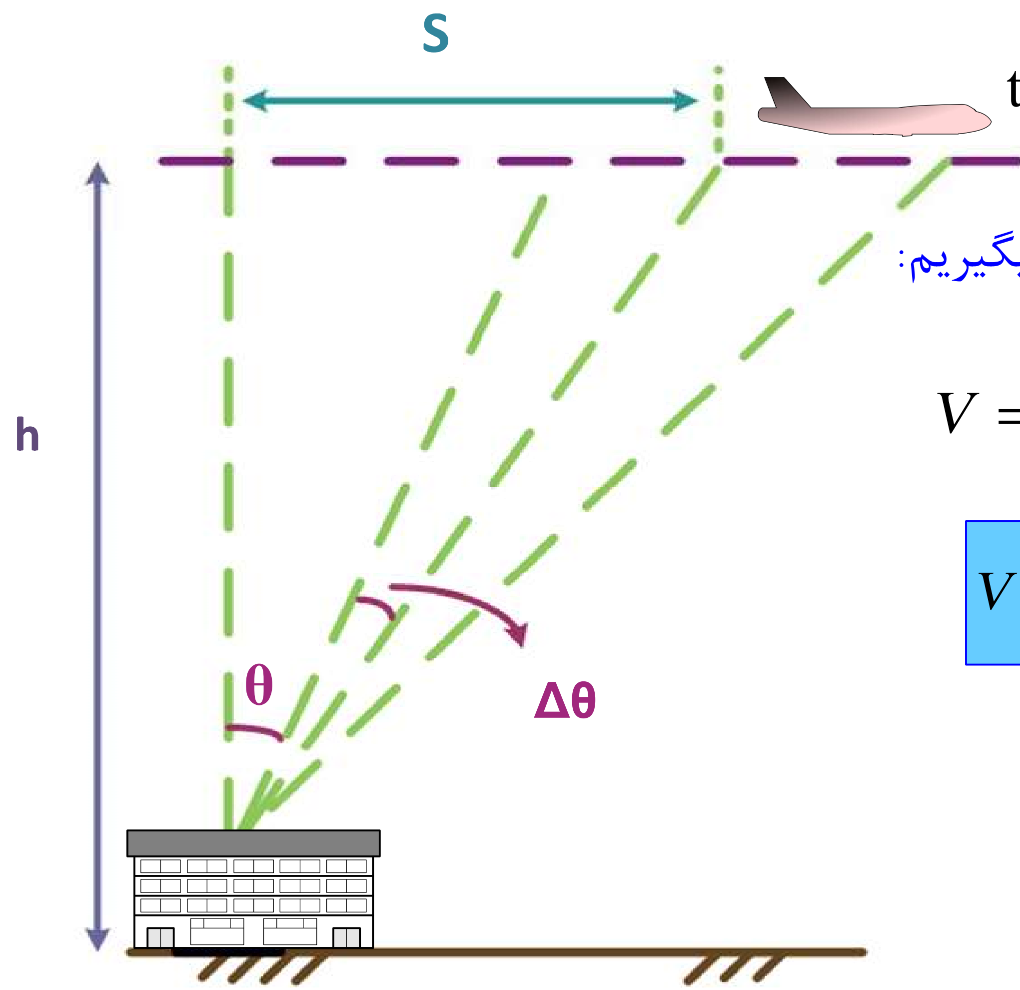
$$\dot{S} = 0 \xrightarrow{t=0} \quad 0 = C_1 K + C_3 \qquad C_3 = -C_1 K \quad \rightarrow S = C_1 (Sinkt - kt)$$

با جاگذاری $S = C_1(Sinkt - kt)$ در معادله غیر همگن:

$$\ddot{S} + K^2 S = \overline{K}t \quad \rightarrow C_1 = -\frac{\overline{K}}{K^3}$$

$$\boxed{S = \frac{\overline{K}}{K^3}\left(Kt - Sinkt\right)}$$

مثال: هواپیمایی که در ارتفاع h از زمین در حال حرکت است از ایستگاهی زمینی مشاهده می شود. مطلوبست سرعت و شتاب خطی هواپیما؟



$$\tan\theta = \frac{S}{h} \rightarrow S = h\tan\theta$$

از طرفین نسبت به زمان مشتق میگیریم:

$$V = \frac{ds}{dt} = h\dot{\theta}\left(1+\tan^2\theta\right)$$

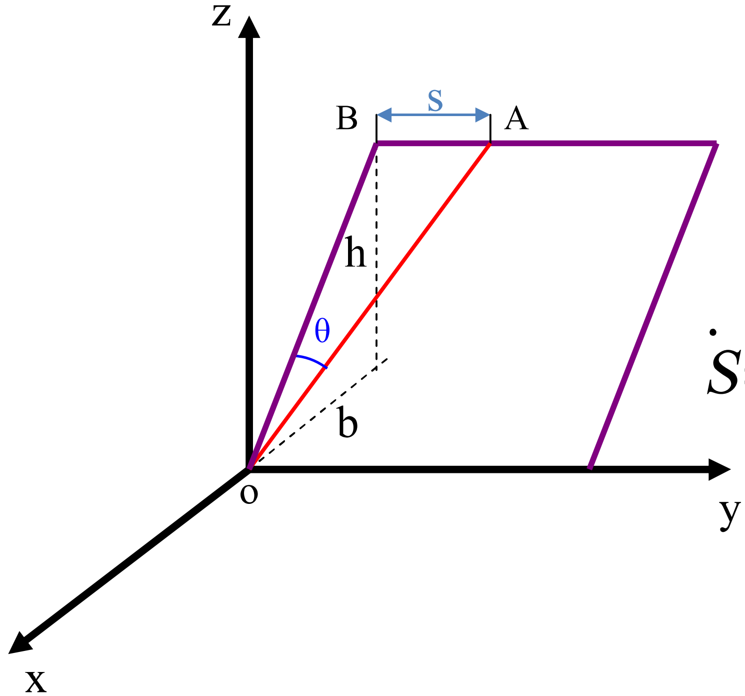
$$\boxed{V = \frac{h}{\cos^2\theta}\omega}$$

$$\boxed{V = \frac{h}{\cos^2\theta}\omega}$$

$$\dot{V} = a = h\left(\frac{\dot{\omega}Cos^2\theta + 2\dot{\theta}\omega Cos\,\theta Sin\,\theta}{Cos^4\theta}\right)$$

$$\boxed{a = h\left(\frac{\alpha Cos^2\theta + \omega^2 Sin2\theta}{Cos^4\theta}\right)}$$

مثال: هواپیمایی که با سرعت V در جهت افقی در پرواز است از ایستگاه زمینی O ردیابی می شود. شعاع OA در صفحه ای که با خط پرواز و نقطه O مشخص می شود، می چرخد. با استفاده از دستگاه مختصات (xyz) سرعت زاویه ای شعاع OA را به صورت برداری بر حسب θ بدست آورید. (محور y موازی با جهت پرواز انتخاب شده و از O می گذرد. محور Z نیز قائم است.)



$$\tan\theta = \frac{S}{\sqrt{b^2+h^2}}$$

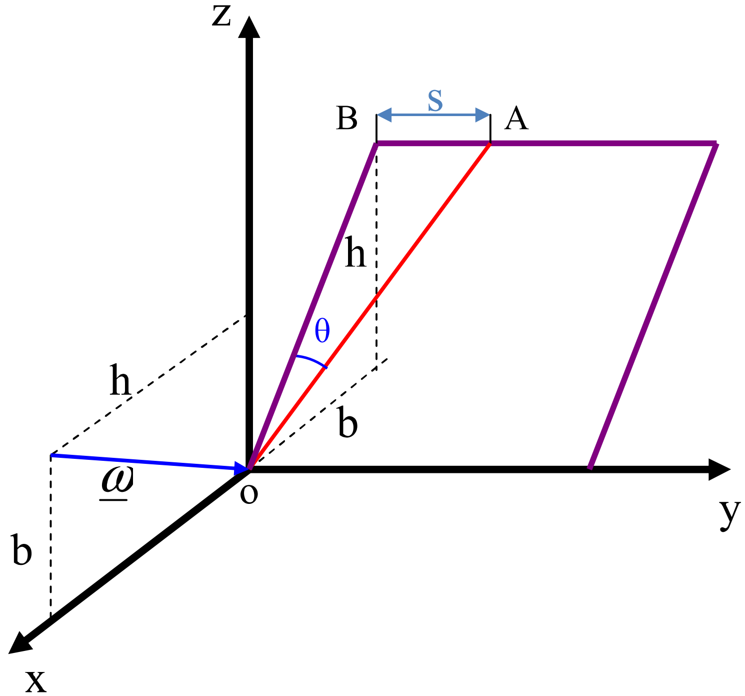
$$\rightarrow S = \tan\theta\sqrt{b^2+h^2}$$

$$\dot{S} = V = \dot{\theta}\sqrt{b^2+h^2}\,(1+\tan^2\theta) = \frac{\dot{\theta}\sqrt{b^2+h^2}}{\cos^2\theta}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \omega = \frac{V\cos^2\theta}{\sqrt{b^2+h^2}}}$$

$$\underline{\omega} = -(\omega_x \underline{i} + \omega_z \underline{k})$$

$$\frac{\omega_x}{\omega_z} = \frac{h}{b}$$



$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_z^2 = (\frac{h^2}{b^2} + 1)\omega_z^2$$

$$\omega_z = \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}}\omega$$

$$\omega_z = \frac{Vb\cos^2\theta}{b^2 + h^2} \qquad \omega_x = \frac{Vh\cos^2\theta}{b^2 + h^2}$$

$$\underline{\omega} = -\frac{V\cos^2\theta}{b^2 + h^2}(h\underline{i} + b\underline{k})$$

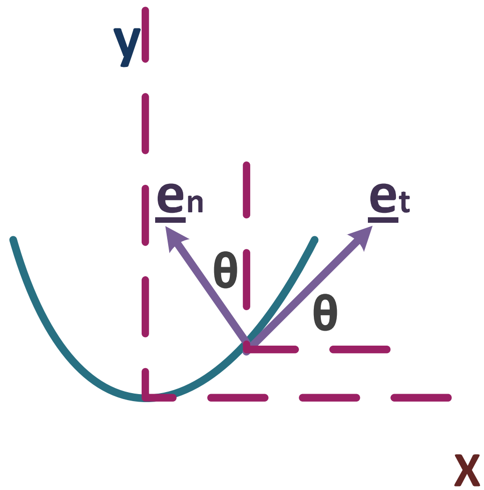
مثال: ذره ای با تندی ثابت **V** در روی یک مسیر منحنی به معادله $y=3x^2$ حرکت می کند. بردار شتاب ذره را در دستگاه قائم و مماس بر حسب **V** و **X** ارائه کرده و با استفاده از آن بردار شتاب را در دستگاه مختصات دکارتی بیابید.

$$\underline{a} = a_t \underline{e}_t + a_n \underline{e}_n = \dot{v}\underline{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\underline{e}_n \qquad v = cte \longrightarrow \dot{v} = 0$$

$$\underline{a} = \frac{v^2}{\rho}\underline{e}_n \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}} \qquad \frac{dy}{dx} = 6x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 6$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{6}{(1+36x^2)^{3/2}} \qquad \rightarrow \rho = \frac{(1+36x^2)^{3/2}}{6}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{6v^2}{(1+36x^2)^{3/2}} \qquad \boxed{\underline{a} = \frac{6v^2}{(1+36x^2)^{3/2}}\underline{e}_n}$$



$$\underline{e}_n = \cos\ \theta\ \underline{j} - \sin\ \theta\ \underline{i}$$

$$\underline{a} = \frac{6v^2}{(1+36x^2)^{3/2}}(\cos\theta\,\underline{j} - \sin\theta\,\underline{i})$$

$$\tan\ \theta = \frac{dy}{dx} = 6\ x$$

$$1 + tg^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{1+36x^2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+36x^2}} \qquad \sin\theta = \frac{6x}{\sqrt{1+36x^2}}$$

$$\boxed{\underline{a} = \frac{6v^2}{(1+36x^2)^2}(\underline{i} + 6x\,\underline{j})}$$

مثال ذره ای بترتیبی حرکت می کند که مولفه Y سرعت آن برحسب متر برثانیه توسط رابطه $V_y = 8\,t$ و شتاب آن در جهت X برحسب متر برمجذور ثانیه با رابطه $a_x = 4t$ داده شده است. بهنگامیکه t=0 هست Y=2m و X=0 و $V_x = 0$ می باشد. معادله مسیر ذره را پیدا کرده و اندازه بردار سرعت ذره را برای لحظه ای که مختص X آن به 18 متر برسد محاسبه کنید.

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = 8t \qquad dy = 8t\,dt$$

$$\int_2^y dy = 8\int_0^t t\,dt \qquad \boxed{y - 2 = 4t^2}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 4t \quad \Rightarrow dv_x = 4t\,dt \qquad t = 0 \quad V_x = 0$$

$$\int_0^{V_x} dv_x = 4\int_0^t t\,dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_x = 2t^2}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 2t^2 \quad \Rightarrow \; dx = 2t^2\,dt \qquad t=0,\; x=0$$

$$\int_0^x dx = 2\int_0^t t^2\;dt \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{x = \frac{2}{3}t^3} \qquad y-2 = 4t^2$$

با حذف t بین y,x داریم:

$$t^2 = \frac{y-2}{4} \Rightarrow t = \frac{(y-2)^{1/2}}{2} \qquad x = \frac{2}{3}\frac{(y-2)^{3/2}}{8} = \frac{(y-2)^{3/2}}{12}$$

$$\boxed{(y-2)^3 = 144\;x^2}$$

از رابطه:

$$x=\frac{2}{3}t^3 \Rightarrow 18=\frac{2}{3}t^3 \qquad t^3=27 \Rightarrow t=3Sec$$

$$V_x=2t^2 \Rightarrow V_x=18m/s$$

$$V_y=8t \Rightarrow V_y=24m/s$$

$$V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}=30\,{}^{m}\!/_{\sec}$$

مثال) بردار جابجایی ذره ای در روی یک مسیر منحنی الخط واقع در صفحه xy بوسیله رابطه

$$\underline{r} = (4t+2)\ \underline{i} + \left(4t^2 - 16t + 15\right)\underline{j}$$

داده شده است مطلوبست:

a) بردارهای سرعت و شتاب ذره

b) زمانی که بردار سرعت بر بردار جابجایی عمود است

c) معادله مسیر ذره

$$\underline{r} = (4t+2)\ \underline{i} + \left(4t^2 - 16t + 15\right)\underline{j}$$

$$\underline{V} = \dot{\underline{r}} = 4\underline{i} + (8t-16)\ \underline{j} = \frac{d\underline{r}}{dt}$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{\underline{V}} = \ddot{\underline{r}} = 8\,\underline{j}$$

$$\underline{V}.\underline{r} = 4(4t+2)+(8t-16)\ (4t-16t+15)=0$$

$$4t^3-24t^2+69t-29=(t-1)\ (4t^2-20t+29)=0$$

t=1 sec		تنها ریشه حقیقی

$$\underline{r} = (4t+2)\underline{i}+(4t^2-16t+15)\underline{j}$$

$$x = 4t+2 \qquad y=4t^2-16t+15 \qquad t=\frac{x-2}{4}$$

$$y=\frac{1}{4}(x-2)^2-4(x-2)+15=\frac{1}{4}x^2-5x+24$$

مسیر حرکت یک سهمی است.

مثال نشان دهید که شعاع انحنای مسیر در یک حرکت منحنی الخط بوسیله رابطه زیر داده می شود

$$\rho = \frac{V^3}{|\underline{V} \times \underline{a}|}$$

همچنین در صورتیکه بردار وضعیت ذره ای بوسیله رابطه

$$\underline{r} = b(t + \sin\ t)\underline{i} + b(1 - \cos\ t)\,\underline{j}$$

داده شود شعاع انحنای مسیر و بردار یکه مماس بر مسیر را محاسبه کنید.

$$\boxed{\underline{V} = V\underline{e}_t}$$

$$\boxed{\underline{a} = \dot{V}\,\underline{e}_t + \frac{V^2}{\rho}\underline{e}_n}$$

$$\underline{V} \times \underline{a} = \left(V\underline{e}_t\right) \times \left(\dot{V}\underline{e}_t + \frac{V^2}{\rho}\underline{e}_n\right) = \frac{V^3}{\rho}\underline{e}_p$$

$$|\underline{V} \times \underline{a}| = \frac{V^3}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^3}{|\underline{V} \times \underline{a}|}$$

$$\rho = \frac{V^3}{\left|\underline{V} \times \underline{a}\right|}$$

$$\underline{r} = b(t + \sin t)\ \underline{i} + b(1 - \cos t)\ \underline{j}$$

$$\underline{V} = \underline{\dot{r}} = b(1 + \cos t)\ \underline{i} + b \sin t\ \underline{j} \qquad \underline{a} = \underline{\dot{V}} = \underline{\ddot{r}} = -b \sin t\, \underline{i} + b \cos t\ \underline{j}$$

$$\underline{V} \times \underline{a} = b^2 (1 + \cos t) \cos t\, \underline{k} + b^2 \sin^2 t\, \underline{k} = b^2 (1 + \cos t)\underline{k}$$

$$\left|\underline{V} \times \underline{a}\right| = b^2 (1 + \cos t)$$

$$V = \left[b^2 (1 + \cos t)^2 + b^2 \sin^2 t \right]^{1/2} = b\sqrt{2(1 + \cos t)} = 2\,b \cos \frac{t}{2}$$

$$\rho = \frac{8b^3 \cos^3 \frac{t}{2}}{2b^2 \cos^2 \frac{t}{2}} = 4b \cos \frac{t}{2}$$

$$\rho = 4b \cos \frac{t}{2}$$

$$\underline{e}_t = \frac{\underline{V}}{V} = \frac{b(1+\cos t)}{2b\cos\frac{t}{2}}\underline{i} + \frac{b\sin t}{2b\cos\frac{t}{2}}\underline{j} = \cos\frac{t}{2}\underline{i} + \sin\frac{t}{2}\underline{j}$$

$$\boxed{\underline{e}_t = \cos\frac{t}{2}\underline{i} + \sin\frac{t}{2}\underline{j}}$$

مثال) نشان دهید که شعاع انحنای مسیر در یک حرکت منحنی الخط بوسیله رابطه

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{V^2}\sqrt{a^2-\left(\frac{dV}{dt}\right)^2}$$

داده می شود که در آن a, V بترتیب بزرگی های بردار سرعت و شتاب هستند همچنین نشان دهید:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d^2y/dx^2}{\left[1+\left(dy/dx\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\underline{a} = a_n \underline{e_n} + a_t \underline{e_t}$$

$$a^2 = a_n^2 + a_t^2 = \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2 + \dot{V}^2$$

$$\frac{V^2}{\rho} = \sqrt{a^2 - \dot{V}^2} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{1}{V^2}\sqrt{a^2 - \dot{V}^2} = \frac{1}{V^2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{dV}{dt}\right)^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{1}{V^2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{dV}{dt}\right)^2}}$$

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} \qquad \underline{\dot{r}} = \underline{V} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j} \qquad \underline{\ddot{r}} = \underline{a} = \underline{\dot{V}} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j}$$

$$\underline{V} \times \underline{a} = \dot{x}\ddot{y}\underline{k} - \dot{y}\ddot{x}\underline{k} \quad \Rightarrow \left|\underline{V} \times \underline{a}\right| = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}$$

$$V = \left(\dot{x} + \dot{y}\right)^{1/2} \qquad But \ \ \rho = \frac{V^3}{\left|\underline{V} \times \underline{a}\right|}$$

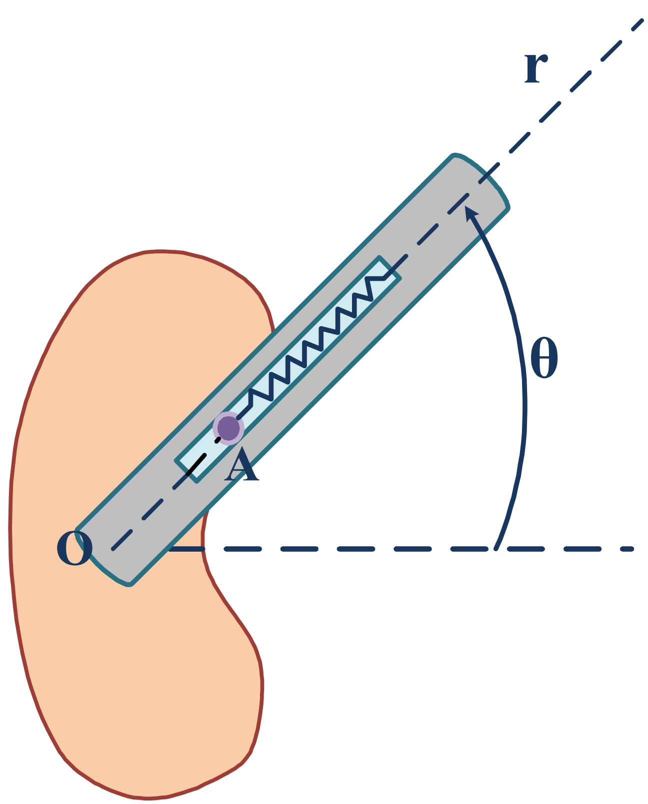
$$\frac{1}{\rho}=\frac{\left|\underline{V}\times\underline{a}\right|}{V^3}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}} \qquad But:\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)=\frac{1}{\dot{x}}\left(\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}\right)=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{x}^2+\dot{x}^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\dot{x}^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}}=\frac{\dot{x}^3\,d^2y/dx^2}{\dot{x}^3\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad \boxed{\frac{1}{\rho}=\frac{d^2y/dx^2}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}}$$

مثال) یک بادامک مطابق شکل سبب می شود سا چمه A روی یک منحنی بنام لیماسون حرکت کند معادله منحنی بصورت $r = b - c\ cos\theta$ است که در آن b>c می باشد. اگر بازوی شیار دار با سرعت زاویه ای ثابت $\dot{\theta} = \omega$ دوران کند ولی بادامک نچرخد a شتاب ساچمه را بر حسب θ تعیین کنید.



$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\underline{e_\theta}$$

$$\dot{\theta} = \omega = cte \rightarrow \ddot{\theta} = 0 \qquad r = b - c\cos\theta$$

$$\dot{r} = c\dot{\theta}\sin\theta \qquad \ddot{r} = c\ddot{\theta}\sin\theta + c\dot{\theta}^2\cos\theta$$

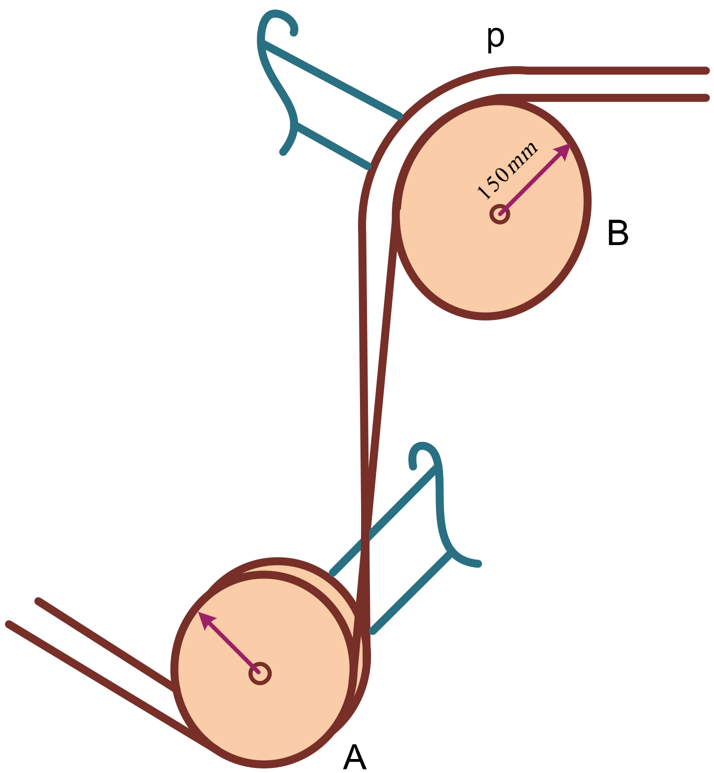
$$\underline{a} = \left(c\dot{\theta}^2\cos\theta - b\dot{\theta}^2 + c\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\underline{e_r} + 2c\dot{\theta}^2\sin\theta\underline{e_\theta}$$

$$\underline{a} = \left(2c\cos\theta - b\right)\dot{\theta}^2\underline{e_r} + 2c\sin\theta\,\dot{\theta}^2\underline{e_\theta}$$

$$a = \dot{\theta}^2\sqrt{4c^2\cos^2\theta + b^2 - 4bc\cos\theta + 4c^2\sin^2\theta}$$

$$\boxed{a = \omega^2\sqrt{4c^2 - 4bc\cos\theta + b^2}}$$

مثال) جهت حرکت یک نوار پهن در دستگاه کنترل عددی بوسیله دو قرقره B,A مطابق شکل تغییر می کند اگر سرعت نوار بطور یکنواخت با زمان از $2m/s$ به $18m/s$ مادامیکه $8m$ از نوار از روی قرقره ها عبور می کند افزایش یابد بزرگی شتاب را در نقطه P یعنی نقطه تماس قرقره B و نوار در لحظه ای که سرعت نوار برابر $3m/s$ هست پیدا کنید.



از رابطه VdV=adS می توانیم شتاب مماسی یعنی a_t را محاسبه کنیم پس

$$VdV = a_t\,dS \Rightarrow \int_2^{18} VdV = a_t \int_0^8 dS \qquad \left[\frac{1}{2}V^2\right]_2^{18} = a_t\left[S\right]_0^8$$

$$\frac{1}{2}(324-4) = 8a_t \qquad 160 = 8a_t \qquad \boxed{a_t = 20\,m/\sec^2}$$

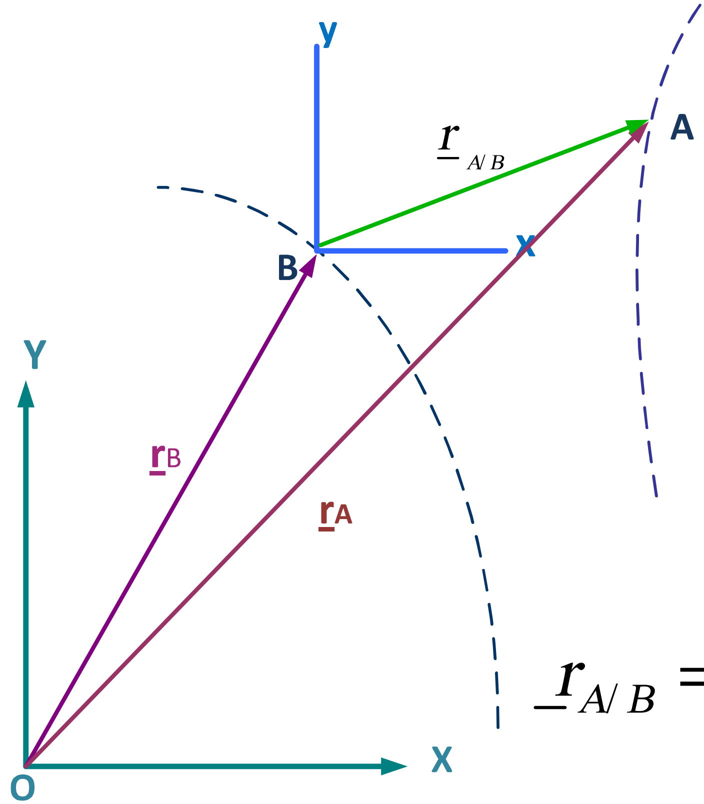
$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{9\times1000}{150} = 60\,{}^{m}\!/_{\sec^2} \qquad \boxed{a_n = 60\,{}^{m}\!/_{\sec^2}}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{3600+400} = \sqrt{4000} = 63.02\,{}^{m}\!/_{\sec^2}$$

$$\boxed{a = 63.02\,{}^{m}\!/_{\sec^2}}$$

۲- حرکت نسبی

۲-۱حرکت نسبی محورهای مقایسه انتقالی



بردارهای وضعیت مطلق ذرات $\underline{r}_A, \underline{r}_B$

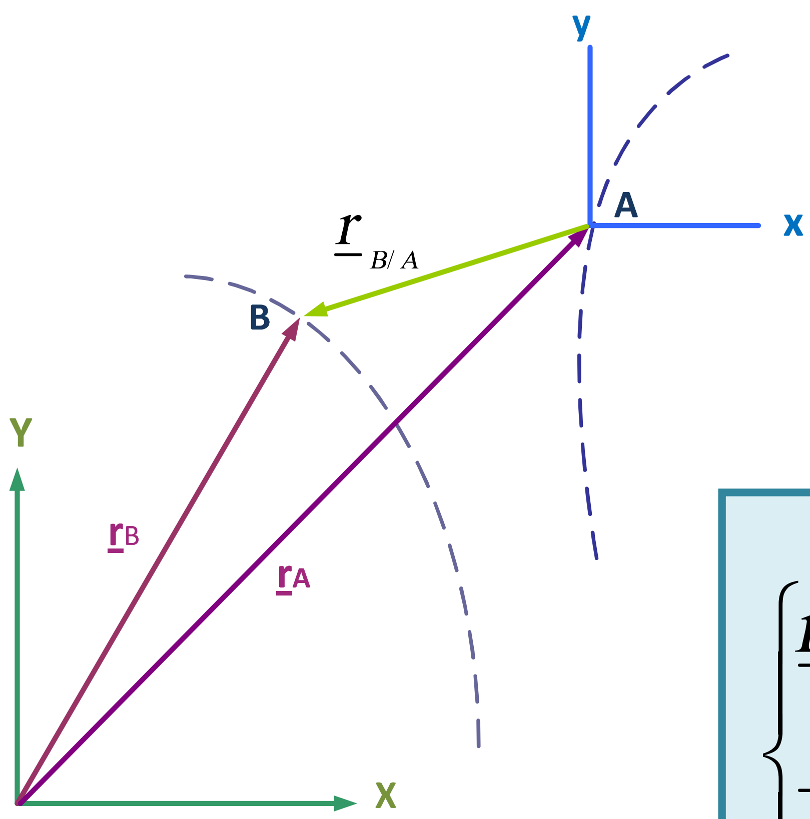
$$\underline{r}_A = \underline{r}_B + \underline{r}_{A/B}$$

$$\dot{\underline{r}}_A = \dot{\underline{r}}_B + \dot{\underline{r}}_{A/B} \rightarrow \underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{V}_{A/B}$$

$$\dot{\underline{V}}_A = \dot{\underline{V}}_B + \dot{\underline{V}}_{A/B} \rightarrow \underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{A/B}$$

$$\underline{r}_{A/B} = x\underline{i} + y\underline{j} \Rightarrow \dot{\underline{r}}_{A/B} = \underline{V}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j}$$

$$\ddot{\underline{r}}_{A/B} = \underline{a}_{A/B} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j}$$



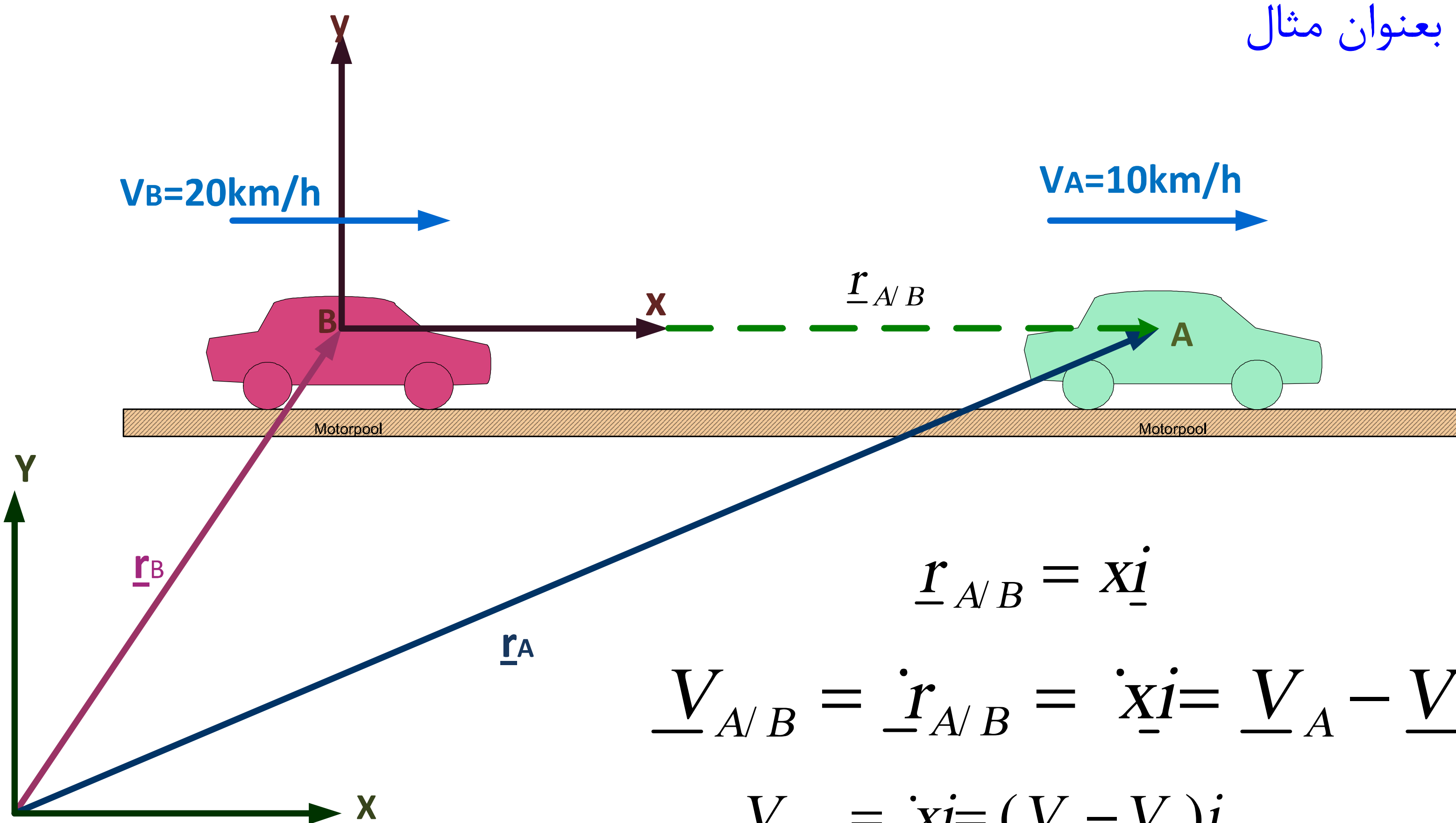
$$\underline{r}_B = \underline{r}_A + \underline{r}_{B/A} \quad \rightarrow \dot{\underline{r}}_B = \dot{\underline{r}}_A + \dot{\underline{r}}_{B/A}$$

$$\underline{V}_B = \underline{V}_A + \underline{V}_{B/A} \rightarrow \dot{\underline{V}}_B = \dot{\underline{V}}_A + \dot{\underline{V}}_{B/A}$$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{a}_{B/A}$$

$$\begin{cases} \underline{r}_{A/B} = -\underline{r}_{B/A} \\ \underline{V}_{A/B} = -\underline{V}_{B/A} \\ \underline{a}_{A/B} = -\underline{a}_{B/A} \end{cases}$$

بعنوان مثال



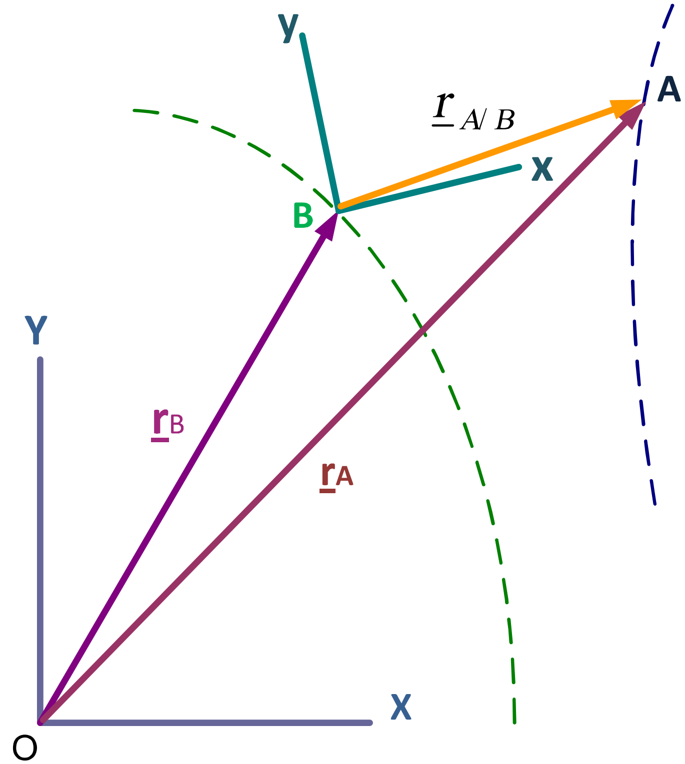
$$\underline{r}_{A/B} = x\underline{i}$$

$$\underline{V}_{A/B} = \dot{\underline{r}}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} = \underline{V}_A - \underline{V}_B$$

$$\underline{V}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} = (V_A - V_B)\underline{i}$$

$$\dot{x} = V_{A/B} = V_A - V_B = 10 - 20 = -10\frac{km}{h}$$

۲-۲حرکت نسبی محورهای مقایسه چرخان



$$\underline{r}_A = \underline{r}_B + \underline{r}_{A/B}$$

$$\underline{\dot{r}}_A = \underline{\dot{r}}_B + \underline{\dot{r}}_{A/B} \rightarrow \underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{v}_{A/B}$$

$$\underline{\ddot{r}}_A = \underline{\ddot{r}}_B + \underline{\ddot{r}}_{A/B} \rightarrow \underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{A/B}$$

$$\underline{r}_{A/B} = x\underline{i} + y\underline{j}$$

$$\rightarrow \underline{v}_{A/B} = \underline{\dot{r}}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} + x\underline{\dot{i}} + \dot{y}\underline{j} + y\underline{\dot{j}}$$

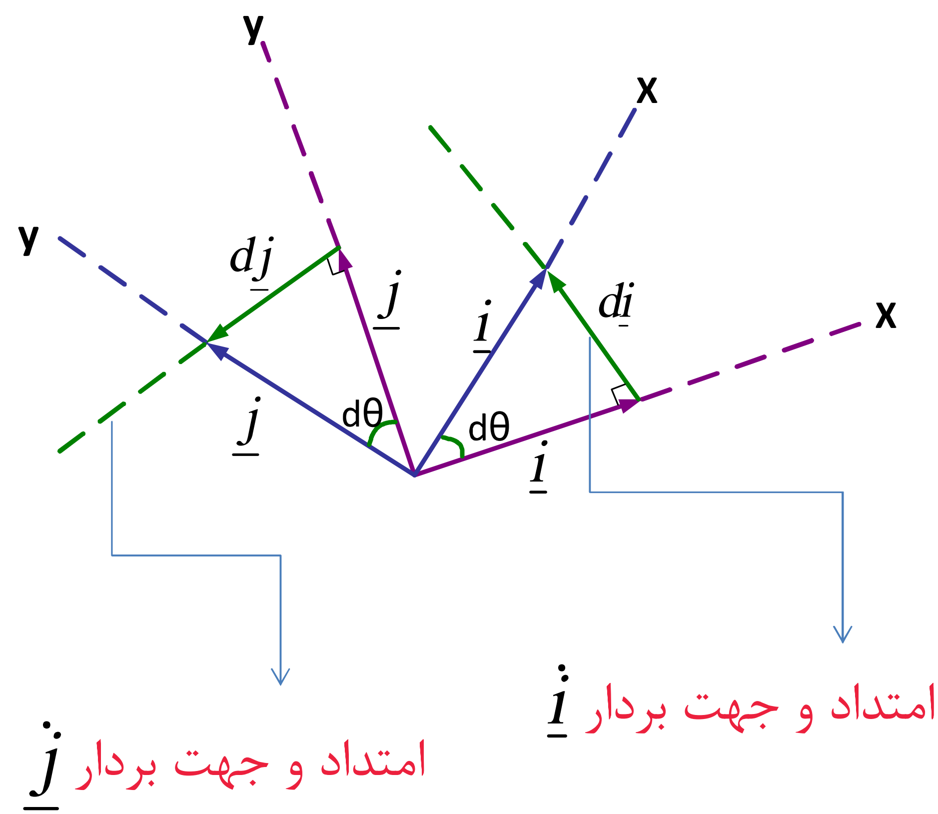
$$\underline{di} = (1)\,d\theta = d\theta$$

$$\underline{dj} = (1)\,d\theta = d\theta$$

$$\dot{\underline{i}} = \frac{d\underline{i}}{dt} = \dot{\theta}\,\underline{j}$$

$$\dot{\underline{j}} = \frac{d\,\underline{j}}{dt} = -\dot{\theta}\underline{i}$$

$$\underline{\omega} = \omega\underline{k} = \dot{\theta}\underline{k}$$



$$\underline{\omega}\times\underline{i} = (\dot{\theta}\underline{k})\times\underline{i} = \dot{\theta}(\underline{k}\times\underline{i}) = \dot{\theta}\,\underline{j} = \dot{\underline{i}}$$

$$\underline{\omega}\times\underline{j} = (\dot{\theta}\underline{k})\times\underline{j} = \dot{\theta}(\underline{k}\times\underline{j}) = -\dot{\theta}\underline{i} = \dot{\underline{j}}$$

$$\underline{v}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j} + x\dot{\underline{i}} + y\dot{\underline{j}} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j} + x(\underline{\omega}\times\underline{i}) + y(\underline{\omega}\times\underline{j})$$

$$= \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j} + \underline{\omega}\times(x\underline{i} + y\underline{j})$$

$$\underline{v}_{Rel} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j}$$

مفهوم: سرعتی است که ناظر متصل به B می توانست برای A اندازه گیری کند اگر محورها چرخان نبودند!

$$\underline{v}_{A/B} = \dot{\underline{r}}_{A/B} = \underline{v}_{Rel} + \underline{\omega}\times\underline{r}_{A/B}$$

$$\underline{a}_{A/B} = \dot{\underline{v}}_{Rel} + \dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}_{A/B} + \underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}_{A/B}$$

$$\dot{\underline{v}}_{Rel} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j} + \dot{x}\dot{\underline{i}} + \dot{y}\dot{\underline{j}} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j} + \underline{\omega}\times(\dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j})$$

$$\underline{a}_{Rel} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j}$$

مفهوم: شتابی که ناظر متصل به B می توانست برای A اندازه گیری کند در صورتیکه محور ها چرخان بودند.

$$\dot{\underline{v}}_{Rel} = \underline{a}_{Rel} + \underline{\omega}\times\underline{v}_{Rel}$$

$$\underline{a}_{A/B} = \underline{\dot{v}}_{Rel} + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}_{A/B} + \omega \times \underline{\dot{r}}_{A/B} \qquad \underline{\dot{v}}_{Rel} = \underline{a}_{Rel} + \underline{\omega} \times \underline{v}_{Rel}$$

$$\underline{v}_{A/B} = \underline{\dot{r}}_{A/B} = \underline{v}_{Rel} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{A/B}$$

$$\underline{a}_{A/B} = \underline{a}_{Rel} + \underline{\omega} \times \underline{v}_{Rel} + \dot{\omega} \times \underline{r}_{A/B} + \underline{\omega} \times (\underline{v}_{Rel} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{A/B})$$

$$= \underline{a}_{Rel} + 2\underline{\omega} \times \underline{v}_{Rel} + \dot{\omega} \times \underline{r}_{A/B} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{A/B})$$

$$\underline{a}_{A} = \underline{a}_{B} + \underline{a}_{A/B}$$

$$\boxed{\underline{a}_{A} = \underline{a}_{B} + \underline{a}_{Rel} + 2\underline{\omega} \times \underline{v}_{Rel} + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}_{A/B} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{A/B})}$$

شتاب کریولیس: $2\underline{\omega} \times \underline{v}_{Rel}$

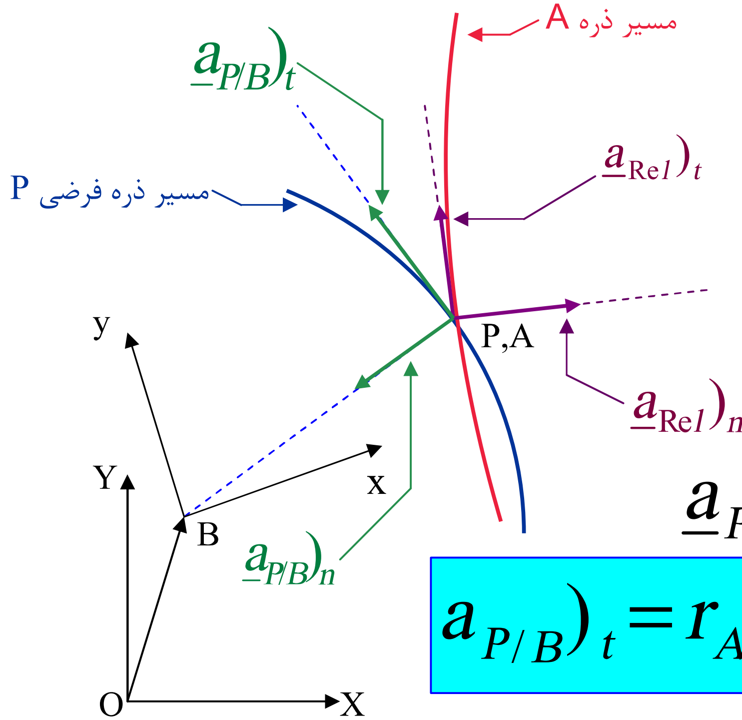
۲-۳ تشریح شتاب ها

$$\underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{Rel} + 2\underline{\omega}\times\underline{V}_{Rel} + \underline{\dot{\omega}}\times\underline{r}_{A/B} + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}_{A/B})$$

$$\underline{a}_{Rel} = \underline{a}_{Rel})_t + \underline{a}_{Rel})_n$$

$$\boxed{a_{Rel})_t = \ddot{s}}$$

$$\boxed{a_{Rel})_n = v_{Rel}^2/\rho}$$



$$\underline{a}_{P/B} = \underline{a}_{P/B})_t + \underline{a}_{P/B})_n$$

$$\underline{a}_{P/B})_t = \underline{\dot{\omega}}\times\underline{r}_{A/B}$$

$$\underline{a}_{P/B})_n = \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}_{A/B})$$

$$\boxed{a_{P/B})_t = r_{A/B}\,\dot{\omega}}$$

$$\boxed{a_{P/B})_n = r_{A/B}\,\omega^2}$$

$$\underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{Rel} + 2\underline{\omega}\times\underline{V}_{Rel} + \underline{a}_{P/B}$$

$$= \underline{a}_B + \underline{a}_{Rel} + 2\underline{\omega}\times\underline{V}_{Rel} + \underline{a}_P - \underline{a}_B = \underline{a}_{Rel} + 2\underline{\omega}\times\underline{V}_{Rel} + \underline{a}_P$$

$$\underline{a}_A = \underline{a}_{Rel} + 2\underline{\omega}\times\underline{V}_{Rel} + \underline{a}_P$$

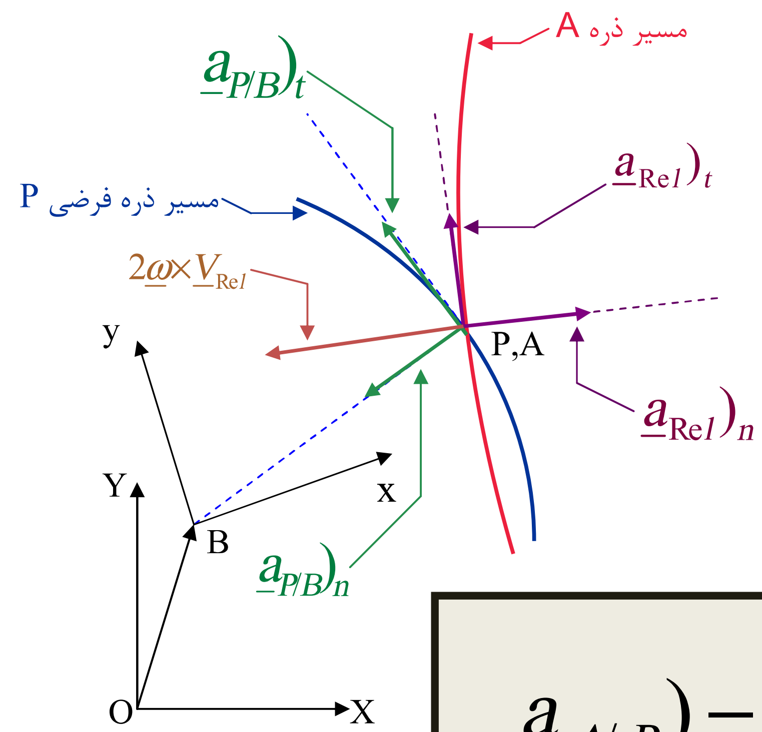
$$\underline{a}_{A/P} = \underline{a}_{Rel} + 2\underline{\omega}\times\underline{V}_{Rel}$$

$$\underline{a}_{A/P} = \underline{a}_{Rel} + 2\underline{\omega}\times\underline{V}_{Rel}$$

برای محورهای چرخان:

$$\underline{a}_{A/P} = \underline{a}_{Rel}$$

برای محورهای غیر چرخان:

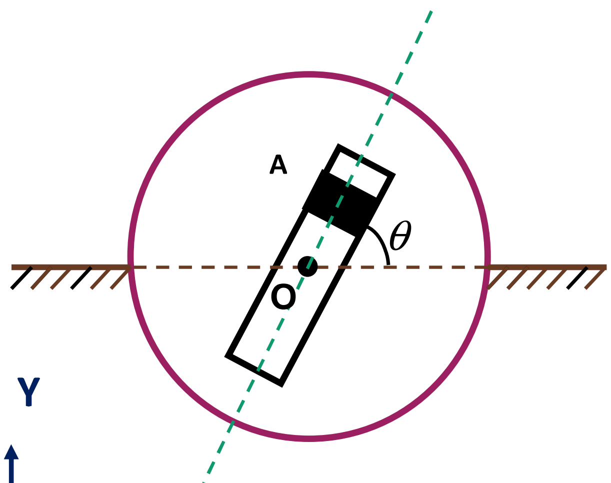


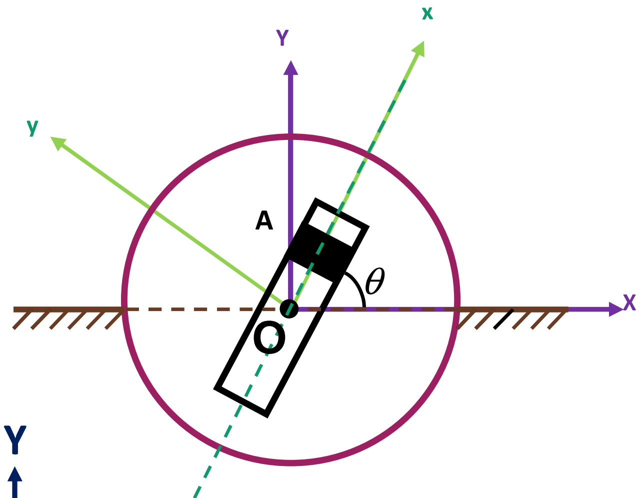
$$\left.\underline{a}_{A/P}\right)_{\text{چرخان}} - \left.\underline{a}_{A/P}\right)_{\text{غیر چرخان}} = 2\underline{\omega}\times\underline{V}_{Rel}$$

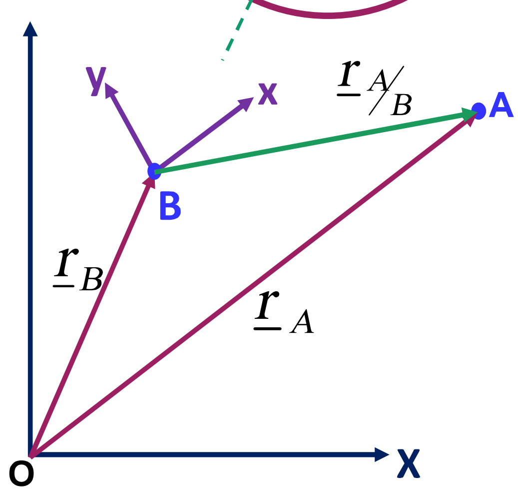
شتاب کریولیس عبارتست از اختلاف شتاب ذره A نسبت به ذره تصوری P به هنگامی که از محورهای چرخان و غیر چرخان اندازه گیری می شود.

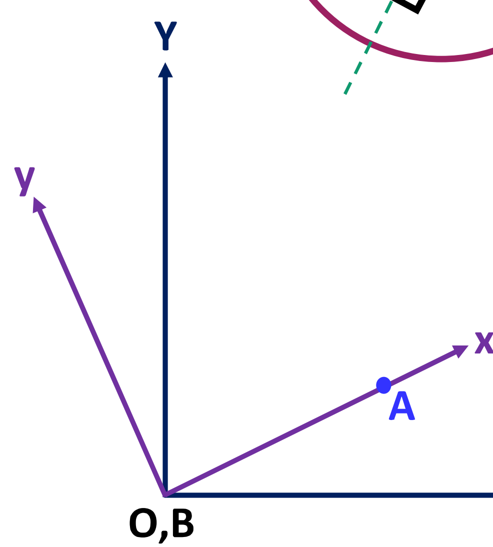
مسایل

مثال: لغزنده A در یک شیار حول نقطه ی ساکن O نوسان می کند در صورتی که جا به جایی زاویه ای دیسکی که این شیار بر روی آن تعبیه شده است θ باشد، شتاب لغزنده را پیدا کنید.





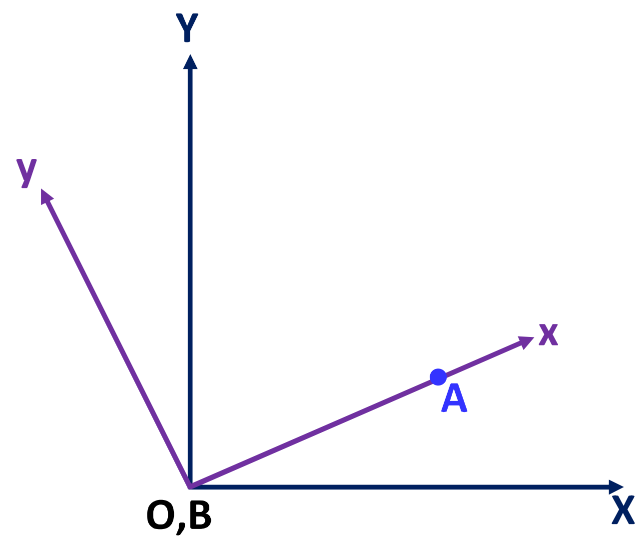




$$\underline{r}_A = \underline{r}_B + \underline{r}_{A/B}$$

$$\underline{r}_B = 0$$

$$\underline{r}_A = \underline{r}_{A/B} = x\,\underline{i}$$



$$\underline{r}_A = \underline{r}_{A/B} = x\,\underline{i}$$

$$\frac{d}{dt}\underline{r}_A = \underline{V}_A = \dot{\underline{r}}_{A/B}$$

$$\underline{V}_A = \dot{x}\underline{i} + x\dot{\underline{i}} \qquad \dot{\underline{i}} = \underline{\omega}\times\underline{i}$$

$$\underline{V}_A = \dot{x}\underline{i} + \underline{\omega}\times(x\underline{i}) \qquad \underline{\omega} = \omega\underline{k}$$

$$\boxed{\underline{V}_A = \dot{x}\underline{i} + \omega x(\underline{k}\times\underline{i}) = \dot{x}\underline{i} + \omega x\underline{j}}$$

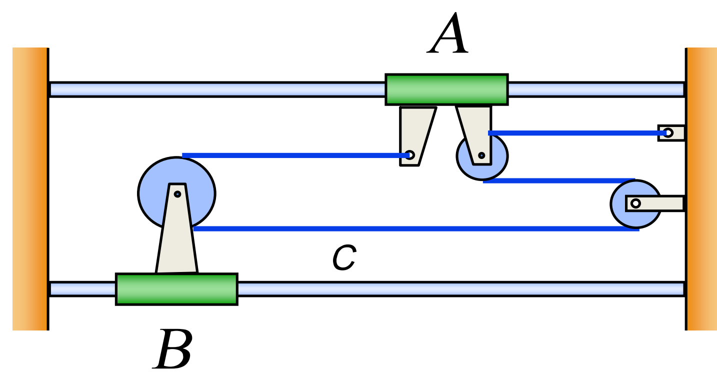
$$\frac{d}{dt}\underline{V}_A = \underline{a}_A = \ddot{x}\underline{i} + \dot{x}\dot{\underline{i}} + \dot{\omega}x\underline{j} + \omega\dot{x}\underline{j} + \omega x\dot{\underline{j}} \qquad \dot{\underline{j}} = \underline{\omega}\times\underline{j}$$

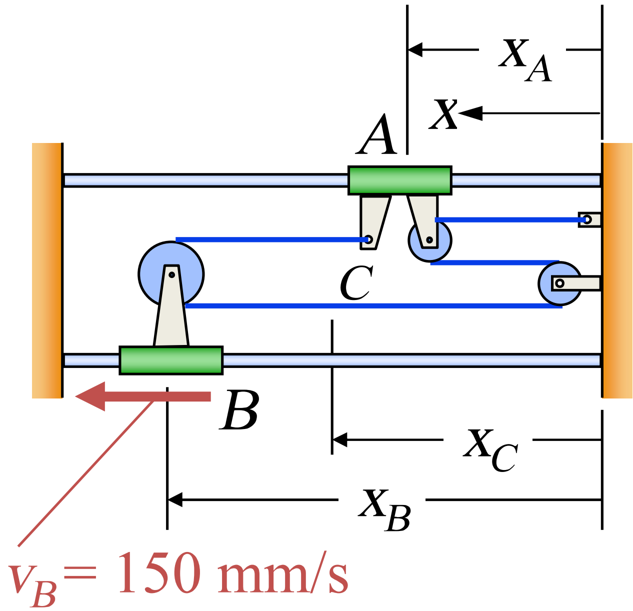
$$\underline{a}_A = \ddot{x}\underline{i} + \omega\dot{x}\underline{j} + \dot{\omega}x\underline{j} + \omega\dot{x}\underline{j} - \omega^2 x\underline{i} = (\ddot{x} - \omega^2 x)\underline{i} + (2\omega\dot{x} + \dot{\omega}x)\underline{j}$$

$$\boxed{\underline{a}_A = (\ddot{x} - x\dot{\theta}^2)\underline{i} + (2\dot{x}\dot{\theta} + \ddot{\theta}x)\underline{j}}$$

شتاب کریولیس $2\dot{x}\dot{\theta}$

مثال: در موقعیت نشانداده شده در شکل لغزنده B با سرعت 150 mm/s بطرف چپ حرکت میکند مطلوبست ۱- سرعت لغزنده A ۲- سرعت قسمت C از کابل ۳- سرعت قسمت C از کابل نسبت به لغزنده B





طول ریسمان ثابت است بنابراین میتوانیم بنویسیم:

$$2x_A + x_B + (x_B - x_A) = cte \qquad x_A + 2x_B = cte$$

$$\dot{x}_A + 2\dot{x}_B = 0 \qquad v_A + 2v_B = 0$$

$$v_B = 150\ mm/s \qquad v_A = -2\ v_B$$

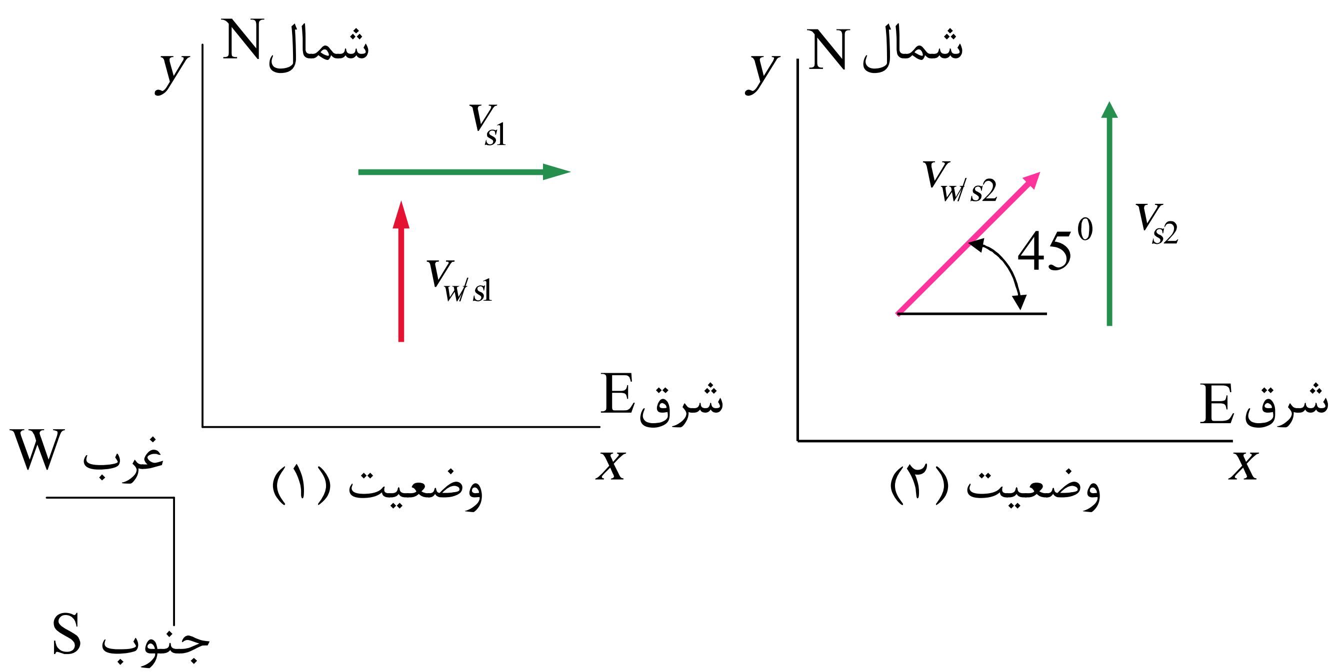
$$v_A = -300\ mm/s \qquad v_A = 300\ mm/s$$ بطرف راست

$$2x_A + x_C = cte \Rightarrow 2\dot{x}_A + \dot{x}_C = 0 \Rightarrow v_C = -2\ v_A = 600\ mm/s$$ بطرف چپ

$$\underline{v}_C = \underline{v}_B + \underline{v}_{C/B} \Rightarrow 600\ \underline{i} = 150\ \underline{i} + \underline{V}_{C/B} \Rightarrow \underline{V}_{C/B} = 450\,\underline{i}$$

$$V_{C/B} = 450\,mm/s$$ بطرف چپ

مثال: برای کشتی که با سرعت 8km/h بطرف شرق حرکت میکند بنظر میرسد که باد از طرف جنوب میوزد. بعد از اینکه کشتی مسیر خود را تغیر داده وبا سرعت 8km/h بطرف شمال رهسپارمشود بنظر میرسد که باد از طرف جنوب غربی میوزد.فرض کنید که سرعت باد در مدت زمان مشاهده ثابت باشد در این صورت بزرگی وجهت سرعت واقعی باد را تعیین کنید.



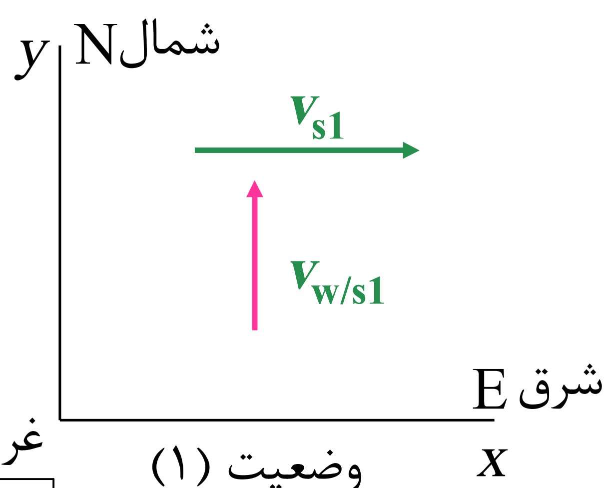
$\underline{V}_{s1}$ سرعت مطلق کشتی در وضعیت (۱) $\qquad$ $\underline{V}_{s2}$ سرعت مطلق کشتی در وضعیت (۲)

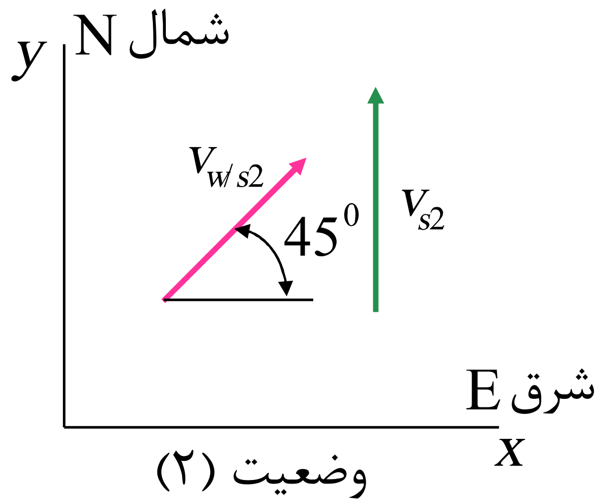
$\underline{V}_{w/s1}$ سرعت باد نسبت به کشتی در وضعیت (۱) $\qquad$ $\underline{V}_{w/s2}$ سرعت باد نسبت به کشتی در وضعیت (۲)

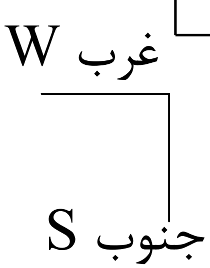
$$\underline{V}_w = \underline{V}_{s1} + \underline{V}_{w/s1} \qquad \underline{V}_{s1} = 8\underline{i} \qquad \underline{V}_{w/s1} = V_{w/s1}\,\underline{j} \qquad \boxed{\underline{V}_w = 8\underline{i} + V_{w/s1}\,\underline{j}}$$

$$\underline{V}_w = \underline{V}_{s2} + \underline{V}_{w/s2} \qquad \underline{V}_{s2} = 8\underline{j} \qquad \underline{V}_{w/s2} = V_{w/s2}(\cos 45\,\underline{i} + \sin 45\,\underline{j})$$

$$\underline{V}_w = 8\underline{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{i} + \underline{j})V_{w/s2} \qquad \boxed{\underline{V}_w = \frac{\sqrt{2}}{2}V_{w/s2}\,\underline{i} + \left(8 + \frac{\sqrt{2}}{2}V_{w/s2}\right)\underline{j}}$$







$$\underline{V}_W = 8\underline{i} + V_{W/s1}\underline{j} \qquad \underline{V}_W = \frac{\sqrt{2}}{2} V_{W/s2}\underline{i} + \left(8 + \frac{\sqrt{2}}{2} V_{W/s2}\right)\underline{j}$$

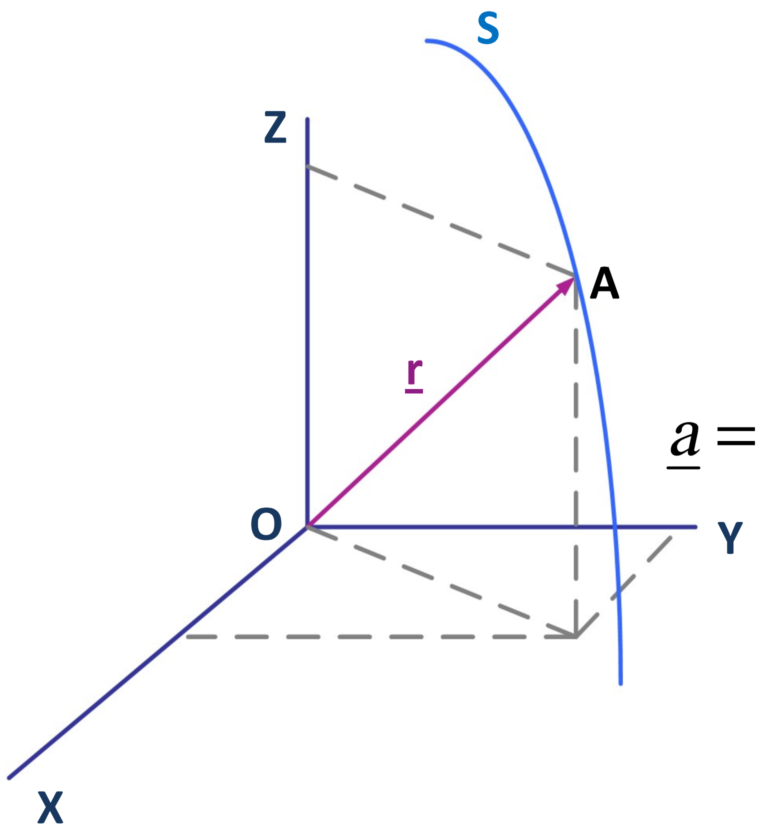
$$\left.\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} V_{W/s2} &= 8 \\ V_{W/s1} &= 8 + \frac{\sqrt{2}}{2} V_{W/s2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} V_{W/s1} &= 16 \\ V_{W/s2} &= 8\sqrt{2} \end{aligned}\right.$$

$$\underline{V}_W = 8\underline{i} + 16\underline{j} \qquad V_W = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5}$$

$$\tan\theta = 2 \quad \Rightarrow \quad \theta = 63.44^o$$

۳-حرکت منحنی الخط در فضا

۳-۱ تشریح حرکت منحنی الخط در دستگاه مختصات کارتزین



$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j} + \dot{z}\underline{k} = v_x\underline{i} + v_y\underline{j} + v_z\underline{k}$$

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j} + \ddot{z}\underline{k} = a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k}$$

$$a_x = \ddot{x} \quad a_y = \ddot{y} \quad a_z = \ddot{z}$$

۲-۳ تعیین مشتقات زمانی بردارهای یکه

$$\underline{r}_{A/B} = x\underline{i} + y\underline{j} \qquad \frac{d}{dt}\underline{r}_{A/B} = \dot{\underline{r}}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j} + x\dot{\underline{i}} + y\dot{\underline{j}}$$

$$\begin{cases} \dot{\underline{i}} = \underline{\omega} \times \underline{i} \\ \dot{\underline{j}} = \underline{\omega} \times \underline{j} \end{cases} \rightarrow \dot{\underline{r}}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{A/B}$$

این رابطه می تواند برای هر بردار دلخواهی مثل $\underline{A}$ برقرار باشد.

$$\left.\dot{\underline{A}}\right)_{XY} = \left.\dot{\underline{A}}\right)_{xy} + \underline{\omega} \times \underline{A}$$

مشتق زمانی بردار $\underline{A}$ نسبت به دستگاه مختصات مرجع ثابت

مشتق زمانی بردار $\underline{A}$ نسبت به دستگاه مختصات مرجع چرخان

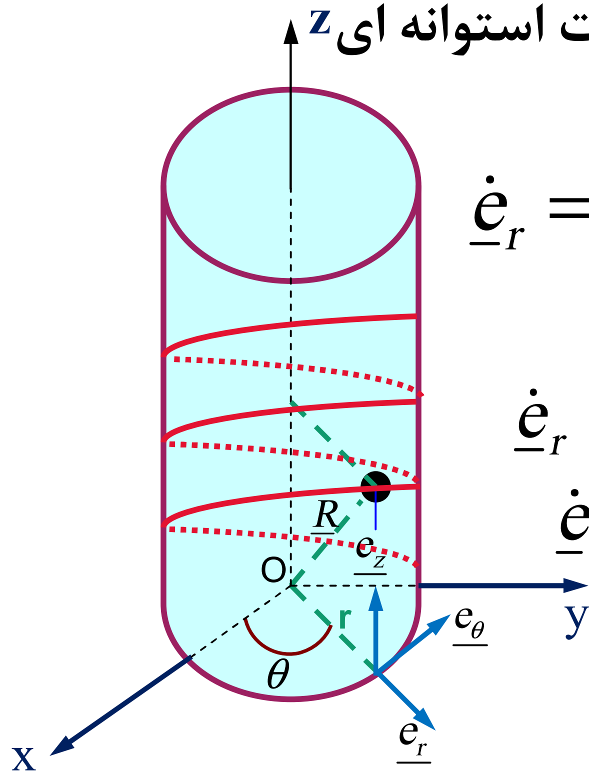
$$\dot{\underline{A}}\Big)_{XYZ} = \dot{\underline{A}}\Big)_{xyz} + \underline{\omega} \times \underline{A}$$

اگر بردار $\underline{A}$ یک بردار یکه باشد در این صورت:

$$\boxed{\dot{\underline{A}} = \underline{\omega} \times \underline{A}}$$

از این رابطه میتوان جهت تعیین مشتقات زمانی بردارهای یکه استفاده کرد.

۳-۳ تشریح حرکت منحنی الخط در دستگاه مختصات استوانه ای



$$\dot{\underline{A}} = \underline{\omega} \times \underline{A}$$

$$\dot{\underline{e}}_r = \underline{\omega} \times \underline{e}_r \qquad \dot{\underline{e}}_\theta = \underline{\omega} \times \underline{e}_\theta \qquad \dot{\underline{e}}_z = \underline{\omega} \times \underline{e}_z$$

$$\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z = \dot{\theta} \underline{e}_z$$

$$\dot{\underline{e}}_r = \dot{\theta} \underline{e}_z \times \underline{e}_r = \dot{\theta} \underline{e}_\theta \qquad \boxed{\dot{\underline{e}}_r = \dot{\theta} \underline{e}_\theta}$$

$$\dot{\underline{e}}_\theta = \dot{\theta} \underline{e}_z \times \underline{e}_\theta = -\dot{\theta} \underline{e}_r \qquad \boxed{\dot{\underline{e}}_\theta = -\dot{\theta} \underline{e}_r}$$

$$\dot{\underline{e}}_z = \dot{\theta} \underline{e}_z \times \underline{e}_z = 0 \qquad \boxed{\dot{\underline{e}}_z = 0}$$

$$\underline{R} = r\underline{e}_r + z\underline{e}_z$$ بردار وضعیت

$$\underline{v} = \dot{\underline{R}} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\underline{e}}_r + \dot{z}\underline{e}_z + z\dot{\underline{e}}_z$$

$$\boxed{\underline{v} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta + \dot{z}\,\underline{e}_z}$$

$$\underline{v} = v_r\,\underline{e}_r + v_\theta\,\underline{e}_\theta + v_z\,\underline{e}_z \qquad v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \qquad v_z = \dot{z}$$

$$\boxed{\underline{v} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta + \dot{z}\,\underline{e}_z}$$

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{r}\underline{e}_r + \dot{r}\dot{\underline{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\underline{e}_\theta + r\ddot{\theta}\underline{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\underline{e}}_\theta + \ddot{z}\underline{e}_z + \dot{z}\dot{\underline{e}}_z$$

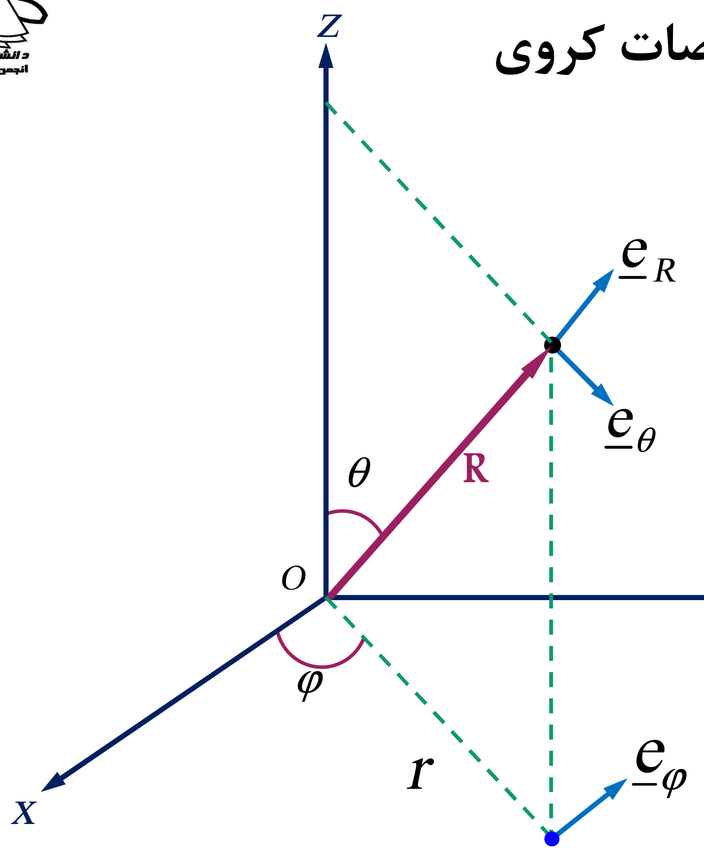
$$= \ddot{r}\underline{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\underline{e}_\theta + r\ddot{\theta}\underline{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\underline{e}_r + \ddot{z}\underline{e}_z$$

$$\boxed{\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\underline{e}_\theta + \ddot{z}\underline{e}_z}$$

$$\underline{a} = a_r\underline{e}_r + a_\theta\underline{e}_\theta + a_z\underline{e}_z$$

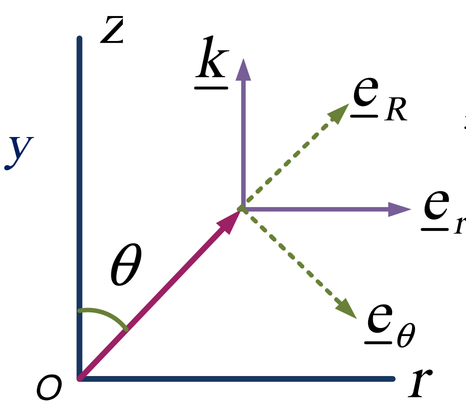
$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}$$

۴-۳ تشریح حرکت منحنی الخط در دستگاه مختصات کروی



$$\dot{\underline{e}}_R = \underline{\omega} \times \underline{e}_R \qquad \dot{\underline{e}}_\theta = \underline{\omega} \times \underline{e}_\theta$$

$$\dot{\underline{e}}_\varphi = \underline{\omega} \times \underline{e}_\varphi \qquad \underline{\omega} = \dot{\theta}\,\underline{e}_\varphi + \dot{\varphi}\,\underline{k}$$



$$\underline{k} = \cos\theta\,\underline{e}_R - \sin\theta\,\underline{e}_\theta$$

$$\boxed{\underline{\omega} = \dot{\phi}\cos\theta\,\underline{e}_R - \dot{\phi}\sin\theta\,\underline{e}_\theta + \dot{\theta}\,\underline{e}_\phi}$$

$$\dot{\underline{e}}_R = \underline{\omega} \times \underline{e}_R = \begin{vmatrix} \underline{e}_r & \underline{e}_\theta & \underline{e}_\varphi \\ \dot{\varphi}\cos\theta & -\dot{\varphi}\sin\theta & \dot{\theta} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{\theta}\underline{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\underline{e}_\varphi$$

$$\dot{\underline{e}}_\theta = \underline{\omega} \times \underline{e}_\theta = \begin{vmatrix} \underline{e}_R & \underline{e}_\theta & \underline{e}_\varphi \\ \dot{\varphi}\cos\theta & -\dot{\varphi}\sin\theta & \dot{\theta} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\dot{\theta}\underline{e}_R + \dot{\varphi}\cos\theta\,\underline{e}_\varphi$$

$$\dot{\underline{e}}_\varphi = \underline{\omega} \times \underline{e}_\varphi = \begin{vmatrix} \underline{e}_R & \underline{e}_\theta & \underline{e}_\varphi \\ \dot{\varphi}\cos\theta & -\dot{\varphi}\sin\theta & \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\underline{e}_R - \dot{\varphi}\cos\theta\,\underline{e}_\theta$$

$$\boxed{\dot{\underline{e}}_R = \dot{\theta}\underline{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\underline{e}_\varphi}$$

$$\boxed{\dot{\underline{e}}_\theta = -\dot{\theta}\underline{e}_R + \dot{\varphi}\cos\theta\,\underline{e}_\varphi}$$

$$\boxed{\dot{\underline{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\underline{e}_R - \dot{\varphi}\cos\theta\,\underline{e}_\theta}$$

$$\underline{R} = R\underline{e}_R \qquad \underline{v} = \dot{\underline{R}} = \dot{R}\underline{e}_R + R\dot{\underline{e}}_R = \dot{R}\,\underline{e}_R + R(\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta + \phi\sin\,\underline{e}_\phi)$$

$$\boxed{\underline{v} = \dot{R}\,\underline{e}_R + R\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta + R\dot{\varphi}\sin\theta\,\underline{e}_\varphi}$$

$$\underline{v} = \underline{v}_R\,\underline{e}_R + \underline{v}_\theta\,\underline{e}_\theta + \underline{v}_\varphi\,\underline{e}_\varphi$$

$$\boxed{v_R = \dot{R}} \qquad \boxed{v_\theta = R\dot{\theta}} \qquad \boxed{v_\varphi = R\dot{\phi}\sin\theta}$$

$$\boxed{\underline{v} = \dot{R}\underline{e}_R + R\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta + R\dot{\varphi}\sin\theta\,\underline{e}_\varphi}$$

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{R}\underline{e}_R + \dot{R}\dot{\underline{e}}_R + \dot{R}\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta + R\ddot{\theta}\,\underline{e}_\theta + R\dot{\theta}\dot{\underline{e}}_\theta$$
$$+ \dot{R}\dot{\varphi}\sin\theta\,\underline{e}_\varphi + R\ddot{\varphi}\sin\theta\,\underline{e}_\varphi + R\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\underline{e}_\varphi + R\dot{\varphi}\sin\theta\,\dot{\underline{e}}_\varphi$$

$$\underline{a} = \ddot{R}\underline{e}_R + 2\dot{R}\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta + 2\dot{R}\dot{\varphi}\sin\theta\,\underline{e}_\varphi + R\ddot{\theta}\,\underline{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\underline{e}_R$$
$$+ R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\,\underline{e}_\varphi + R\ddot{\varphi}\sin\theta\,\underline{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\,\underline{e}_R - R\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\,\underline{e}_\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{a} &= (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\underline{e}_R + (2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta} - R\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\underline{e}_\theta \\ &+ (2\dot{R}\dot{\varphi}\sin\theta + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + R\ddot{\varphi}\sin\theta)\underline{e}_\varphi\end{aligned}}$$

$$\underline{a} = a_R\underline{e}_R + a_\theta\underline{e}_\theta + a_\varphi\underline{e}_\varphi$$

$$\boxed{a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta}$$

$$\boxed{a_\theta = 2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta} - R\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta}$$

$$\boxed{a_\varphi = 2\dot{R}\dot{\varphi}\sin\theta + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + R\ddot{\varphi}\sin\theta}$$

۴- معادلات دینامیکی حرکت

۱-۴ رابطه ما بین نیرو، جرم و شتاب

اینرسی: مقاومت در مقابل تغییر حرکت

$$\frac{F_1}{a_1} = c \qquad \frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots\dots\dots = c$$

اندازه کمی لختی یااینرسی ذره

$$m = c$$

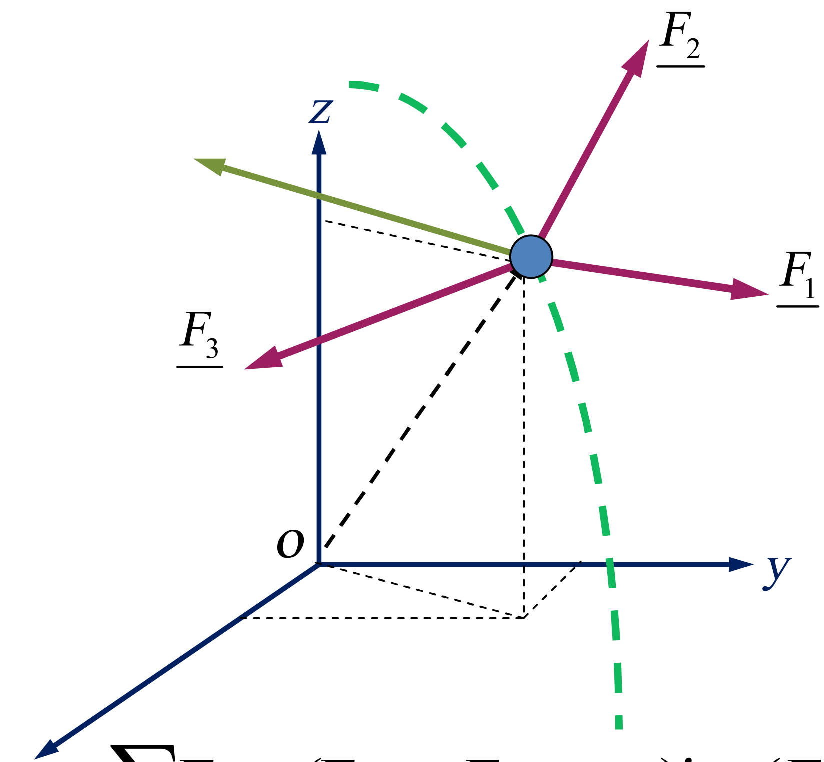
رابطه دینامیک برای حرکت انتقالی:

$$\frac{F}{a} = m \rightarrow F = ma \rightarrow \sum \underline{F} = m\underline{a}$$

واحد $F = kg\,m/s^2 = N \quad (mks)$

واحد $F = gr.cm/s^2 = dyne \quad (cgs)$

۴-۲معادلات دینامیکی حرکت در دستگاه مختصات کارتزین و دکارتی



$$\underline{F}_1 = F_{1x}\underline{i} + F_{1y}\underline{j} + F_{1z}\underline{k}$$

$$\underline{F}_2 = F_{2x}\underline{i} + F_{2y}\underline{j} + F_{2z}\underline{k}$$

$$\cdot = \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot = \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot = \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\sum \underline{F} = (F_{1x} + F_{2x} + \ldots)\underline{i} + (F_{1y} + F_{2y} + \ldots)\underline{j} + (F_{1z} + F_{2z} + \ldots)\underline{k}$$

$$\sum \underline{F} = \sum F_x \underline{i} + \sum F_y \underline{j} + \sum F_z \underline{k}$$

$\underline{a} = a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k}$ $\underline{a}$: بردار شتاب حاصل از عملکرد نیروها

$$\sum \underline{F} = m\underline{a} \rightarrow \sum F_x\underline{i} + \sum F_y\underline{j} + \sum F_z\underline{k} = m(a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k})$$

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z$$

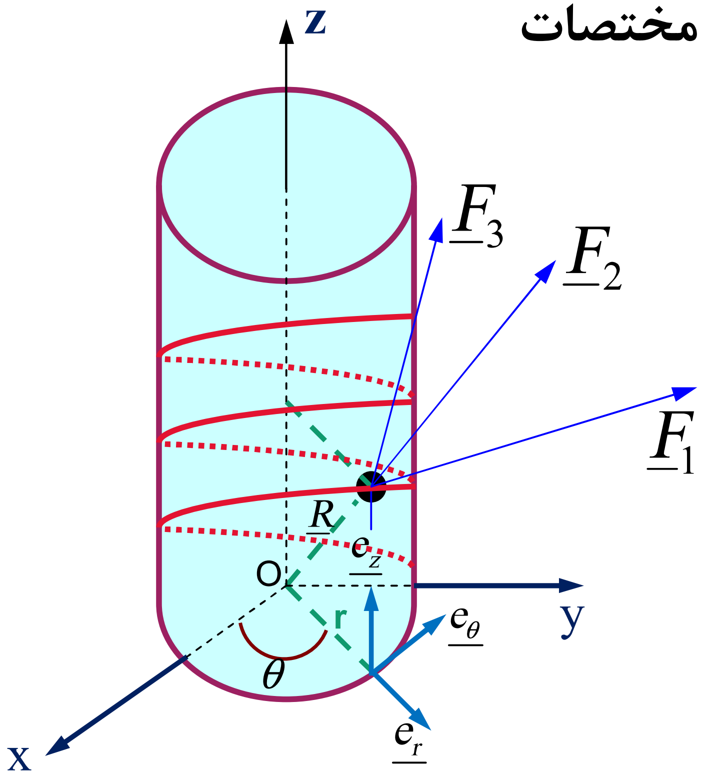
$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} \qquad \underline{v} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j} + \dot{z}\underline{k} \qquad \underline{a} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j} + \ddot{z}\underline{k}$$

$$\boxed{\sum F_x = ma_x = m\ddot{x} \qquad \sum F_y = ma_y = m\ddot{y} \qquad \sum F_z = ma_z = m\ddot{z}}$$

معادلات دینامیکی حرکت ذره مادی در دستگاه مختصات دکارتی (x,y)

$$\boxed{\sum F_x = ma_x = m\ddot{x}} \qquad \boxed{\sum F_y = ma_y = m\ddot{y}}$$

۳-۴ معادلات دینامیکی حرکت در دستگاه مختصات استوانه ای و قطبی



$$\underline{F}_1 = F_{1r}\underline{e}_r + F_{1\theta}\underline{e}_\theta + F_{1z}\underline{e}_z$$

$$\underline{F}_2 = F_{2r}\underline{e}_r + F_{2\theta}\underline{e}_\theta + F_{2z}\underline{e}_z$$

$$\cdot \quad = \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad = \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad = \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\sum \underline{F} = (F_{1r} + F_{2r} + \ldots)\underline{e}_r + (F_{1\theta} + F_{2\theta} + \ldots)\underline{e}_\theta + (F_{1z} + F_{2z} + \ldots)\underline{e}_z$$

$$\sum \underline{F} = \sum F_r \underline{e}_r + \sum F_\theta \underline{e}_\theta + \sum F_z \underline{e}_z$$

$\underline{a}$: بردار شتاب حاصل از عملکرد نیروها $\quad \underline{a} = a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z$

$$\sum \underline{F} = m\underline{a} \rightarrow \sum F_r \underline{e}_r + \sum F_\theta \underline{e}_\theta + \sum F_z \underline{e}_z = m(a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z)$$

$$\sum F_r = ma_r \qquad \sum F_\theta = ma_\theta \qquad \sum F_z = ma_z$$

$$\boxed{\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\underline{e}_\theta + \ddot{z}\underline{e}_z}$$

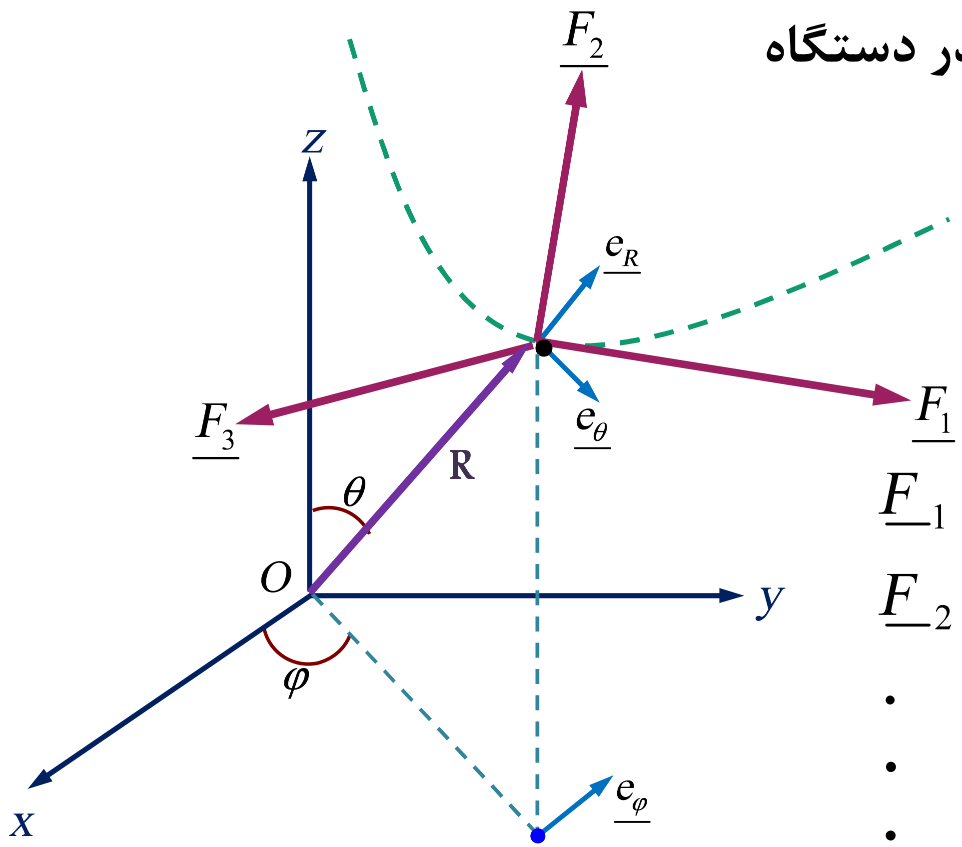
$$\boxed{\sum F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)} \qquad \boxed{\sum F_\theta = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}$$

$$\boxed{\sum F_z = ma_z = m\ddot{z}}$$

معادلات دینامیکی حرکت ذره مادی در دستگاه قطبی:

$$\boxed{\sum F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)} \qquad \boxed{\sum F_\theta = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}$$

۴-۴ معادلات دینامیکی حرکت در دستگاه مختصات کروی



$$\underline{F}_1 = F_{1R}\underline{e}_R + F_{1\theta}\underline{e}_\theta + F_{1\varphi}\underline{e}_\varphi$$

$$\underline{F}_2 = F_{2R}\underline{e}_R + F_{2\theta}\underline{e}_\theta + F_{2\varphi}\underline{e}_\varphi$$

$$\begin{array}{ccccc} . & = & . & . & . \\ . & = & . & . & . \\ . & = & . & . & . \end{array}$$

$$\sum \underline{F} = (F_{1R} + F_{2R} + \ldots)\underline{e}_R + (F_{1\theta} + F_{2\theta} + \ldots)\underline{e}_\theta + (F_{1\varphi} + F_{2\varphi} + \ldots)\underline{e}_\varphi$$

$$\sum \underline{F} = \sum F_R \underline{e}_R + \sum F_\theta \underline{e}_\theta + \sum F_\varphi \underline{e}_\varphi$$

a: بردار شتاب حاصل از عملکرد نیروها

$$\underline{a} = a_R \underline{e}_R + a_\theta \underline{e}_\theta + a_\varphi \underline{e}_\varphi$$

$$\sum \underline{F} = m\underline{a} \rightarrow \sum F_R \underline{e}_r + \sum F_\theta \underline{e}_\theta + \sum F_\varphi \underline{e}_\varphi = m(a_r \underline{e}_R + a_\theta \underline{e}_\theta + a_\varphi \underline{e}_\varphi)$$

$$\sum F_R = ma_R \qquad \sum F_\theta = ma_\theta \qquad \sum F_\varphi = ma_\varphi$$

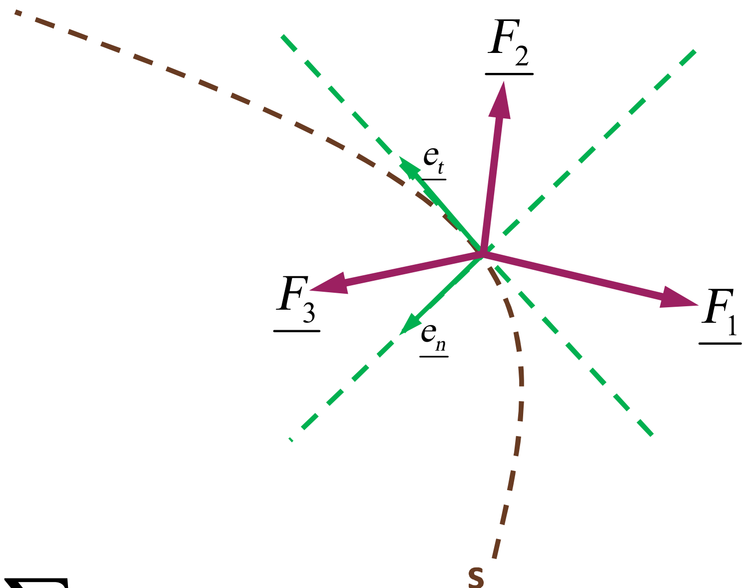
$$\underline{a} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)\underline{e}_R + (2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta} - R\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta)\underline{e}_\theta + (2\dot{R}\dot{\varphi}\sin\theta + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + R\ddot{\varphi}\sin\theta)\underline{e}_\varphi$$

$$\sum F_R = m(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)$$

$$\sum F_\theta = m(2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta} - R\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta)$$

$$\sum F_\phi = m(2\dot{R}\dot{\phi}\sin\theta + 2R\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + R\ddot{\phi}\sin\theta)$$

۴-۵ معادلات دینامیکی حرکت در دستگاه قائم و مماسی



$$\underline{F}_1 = F_{1t}\underline{e}_t + F_{1n}\underline{e}_n$$
$$\underline{F}_2 = F_{2t}\underline{e}_t + F_{2n}\underline{e}_n$$
$$\begin{matrix} \cdot & = & \cdot & \cdot \\ \cdot & = & \cdot & \cdot \\ \cdot & = & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

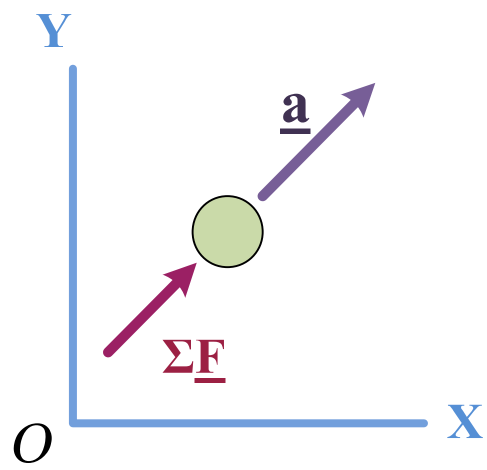
$$\sum \underline{F} = (F_{1t} + F_{2t} + \ldots)\underline{e}_t + (F_{1n} + F_{2n} + \ldots)\underline{e}_n = \sum F_t \underline{e}_t + \sum F_n \underline{e}_n$$

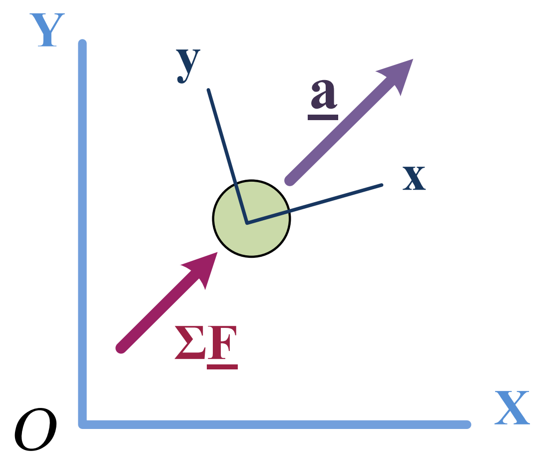
$$\sum \underline{F} = m\underline{a} \rightarrow \sum F_t \underline{e}_t + \sum F_n \underline{e}_n = m(a_t \underline{e}_t + a_n \underline{e}_n)$$

$$\boxed{\sum F_t = ma_t = m\dot{v} = m\ddot{s}}$$

$$\boxed{\sum F_n = ma_n = mv^2/\rho}$$

۴-۶ اصل دالامبر



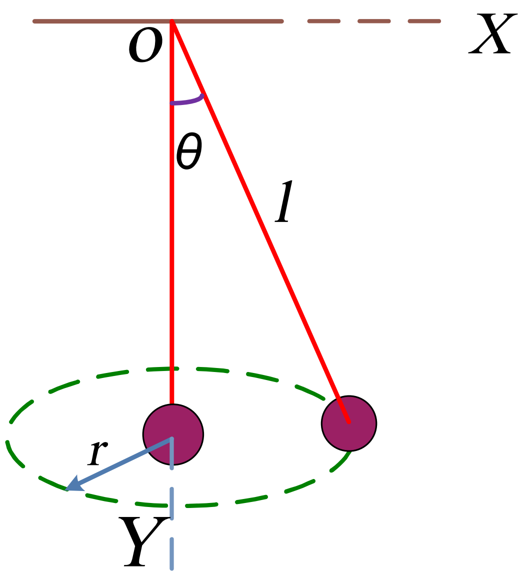


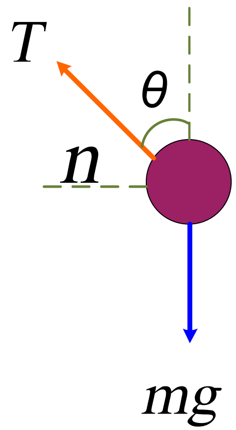
$$\sum \underline{F} = m\underline{a}$$

تحلیل استاتیکی:

$$\sum \underline{F} - m\underline{a} = 0$$

برای مثال:



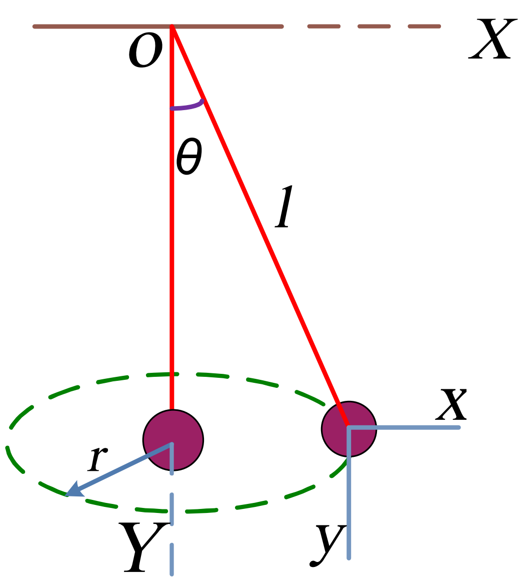


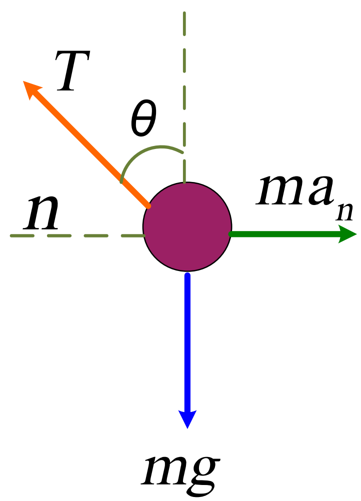
$$T\cos\theta - mg = 0$$

$$\sum F_n = ma_n$$

$$T\sin\theta = ma_n = m\frac{v^2}{r}$$

با استفاده از اصل دالامبر :





$$T\cos\theta - mg = 0$$

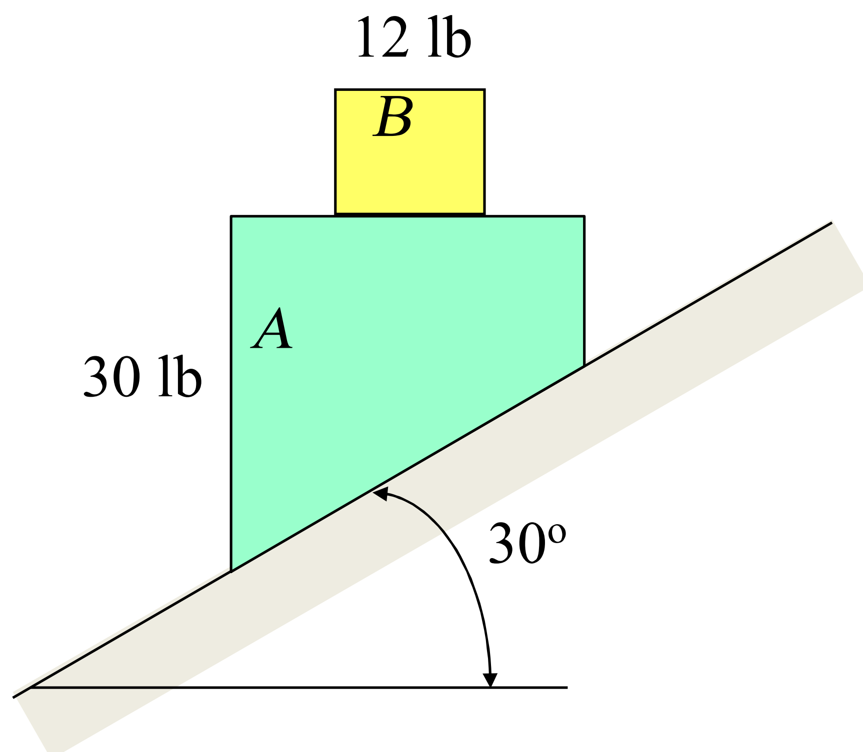
$$\sum F_n - ma_n = 0$$

$$T\sin\theta - ma_n = 0$$

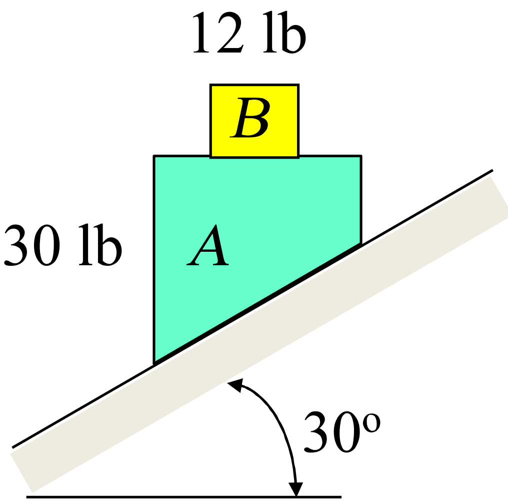
$$T\sin\theta - m\frac{V^2}{r} = 0$$

مسایل

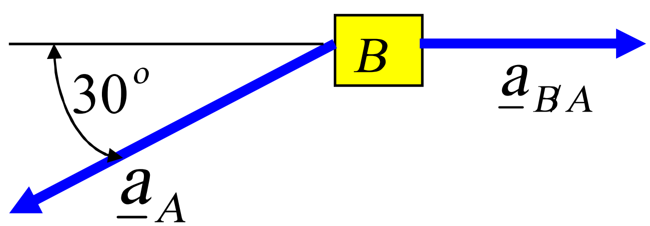
مثال: جسم B به جرم 12-Ib مطابق شکل بروی گوه A به جرم 30-Ib قرار دارد.چنانچه از اصطکاک صرفنظر شود مطلوبست: (a) شتاب B نسبت به A (b) شتاب مطلق A بلافاصله بعد از اینکه سیستم از حالت سکون رها گردد.

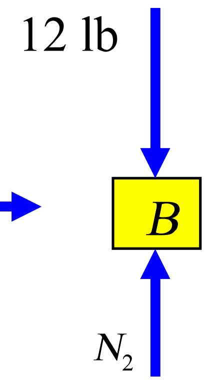


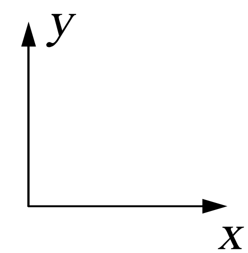
بهنگامیکه قطعه A روی سطح شیبدار پایین میآید
قطعه B نسبت به قطعه A شتاب $\underline{a}_{B/A}$ را پیدا میکند
در اینصورت داریم:



$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{a}_{B/A}$$

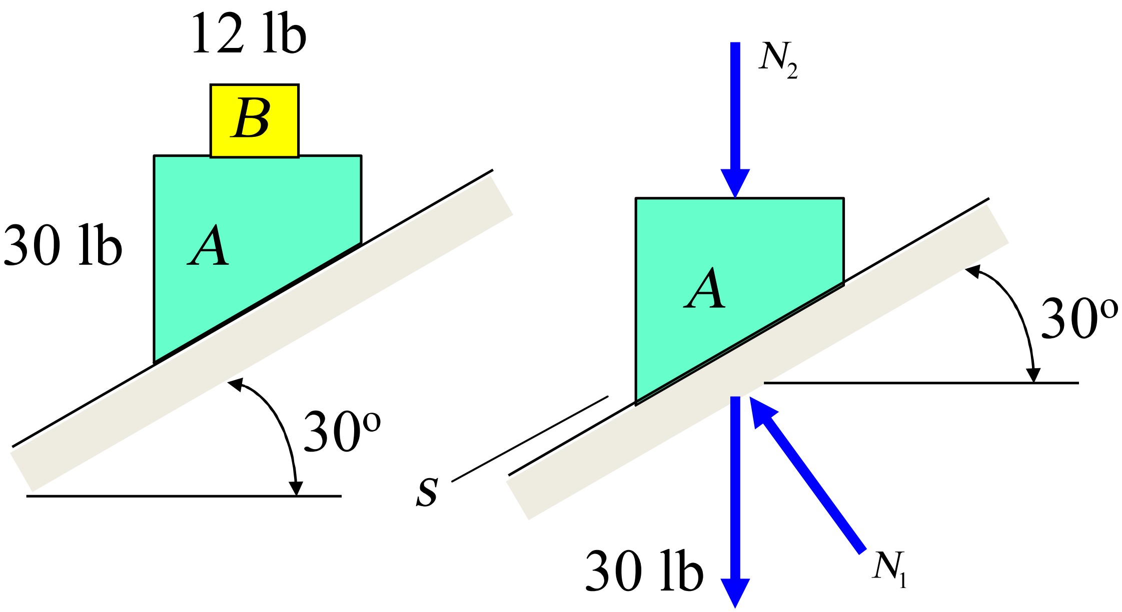






$$\sum F_x = m_B(a_{B/A} - a_A \cos 30^o) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{B/A} = a_A \cos 30^o \quad (۱)$$

$$\sum F_y = m_B a_A \sin 30^o = 12 - N_2 \quad \Rightarrow \quad 12 - N_2 = \frac{12}{32.2} a_A \sin 30^o \quad (۲)$$

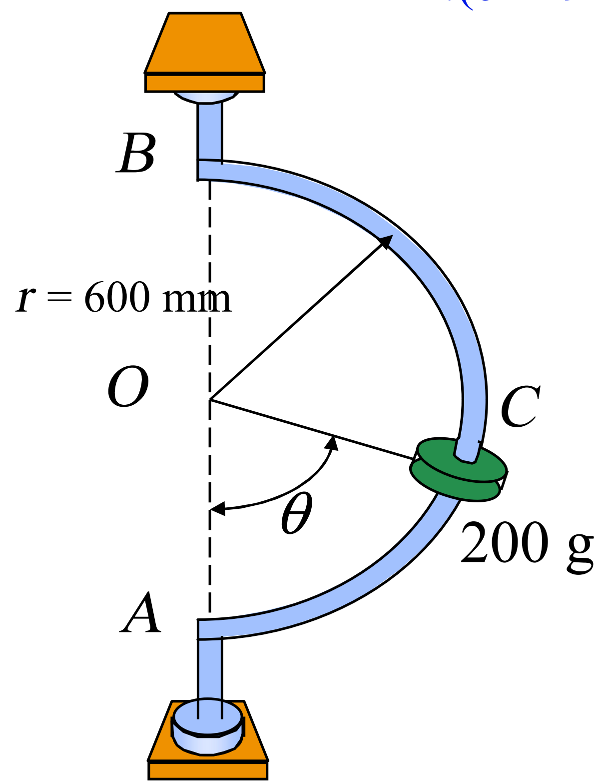


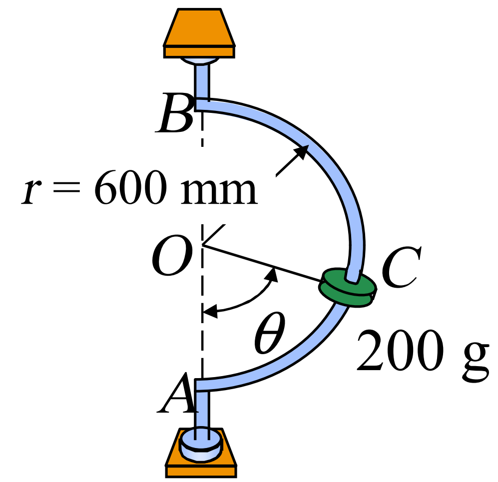
$$\sum F_s = m_A a_A \quad \Longrightarrow \quad (N_2 + 30)\sin 30^o = \frac{30}{32.2} a_A \quad (۳)$$

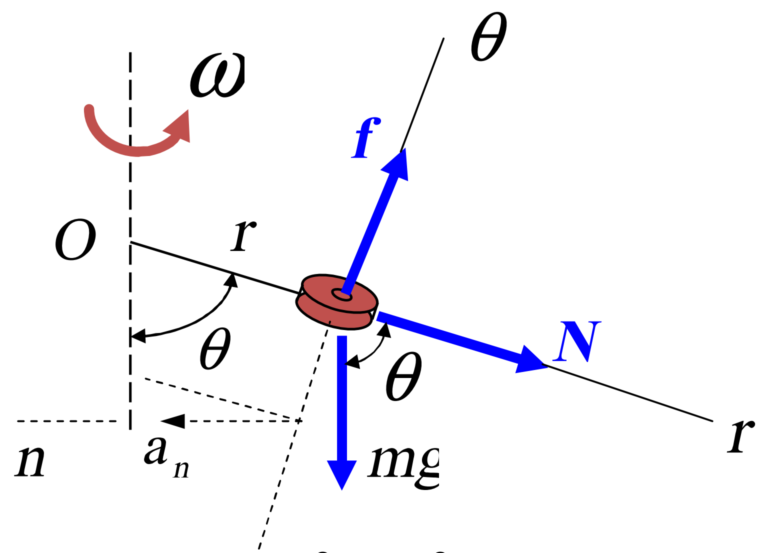
از حل معادلات (۱) و(۲) و (۳)

$$a_A = 20.5\ ft/s^2 \qquad a_{B/A} = 17.75\ ft/s^2$$

مثال: قطعه 200 گرمی C روی یک میله نیمدایره ای که با سرعت ثابت 6 rad/s حول قایم AB می چرخد میتواند بلغزد. مطلوبست تعیین کمترین ضریب اصطکاک استاتیکی مابین قطعه C و میله نیمدایره ای جهت عدم لغزش قطعه برای حالات $(\theta = 90^0, \theta = 75^0, \theta = 45^0)$.







$$a_n = (r\sin\theta)\omega^2 \quad a_r = a_n \sin\theta = r\omega^2 \sin^2\theta$$

$$a_\theta = a_n \cos\theta = r\omega^2 \sin\theta\cos\theta$$

$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow -N - mg\cos\theta = mr\omega^2 \sin^2\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{N = -m(g\cos\theta + r\omega^2 \sin^2\theta)}$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta \Rightarrow mg\sin\theta - f = mr\omega^2 \sin\theta\cos\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{f = m(g - r\omega^2\cos\theta)\sin\theta}$$

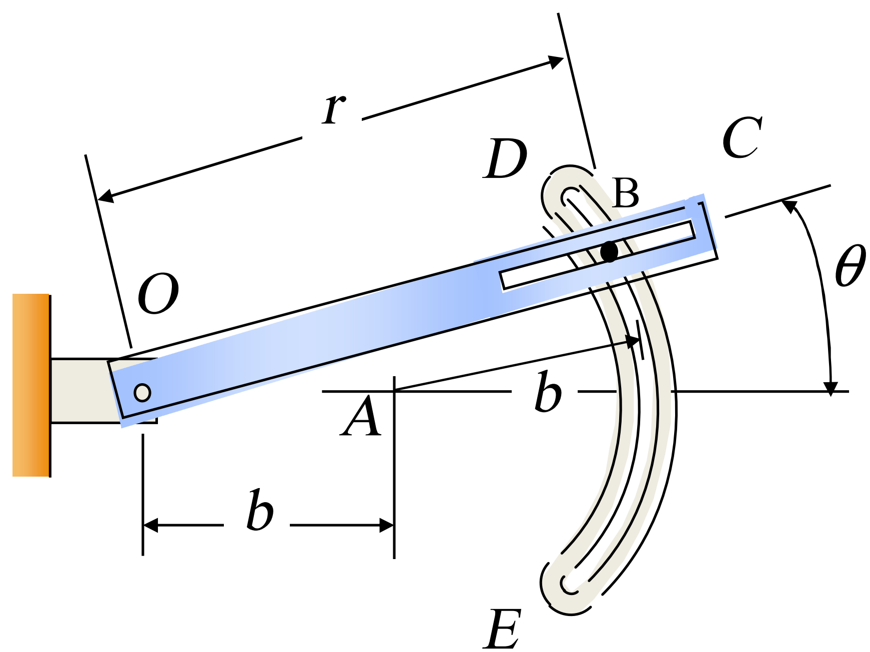
$$\mu = f / N$$

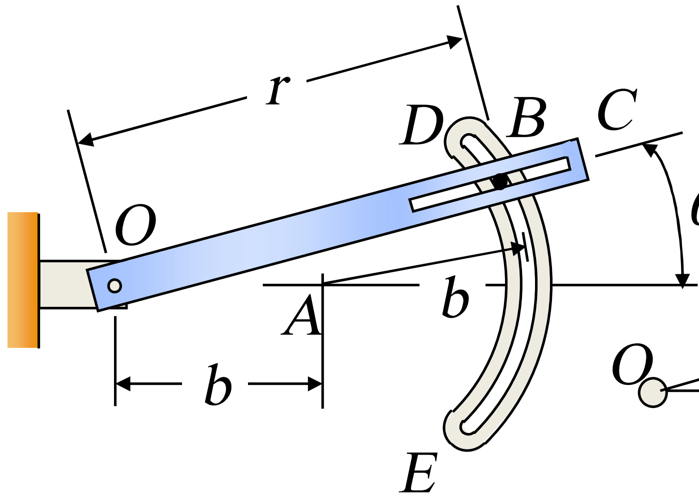
$$\theta = 90^{o} \quad f = 1.962\,N \quad N = -4.32\,N \quad \mu = 0.454$$

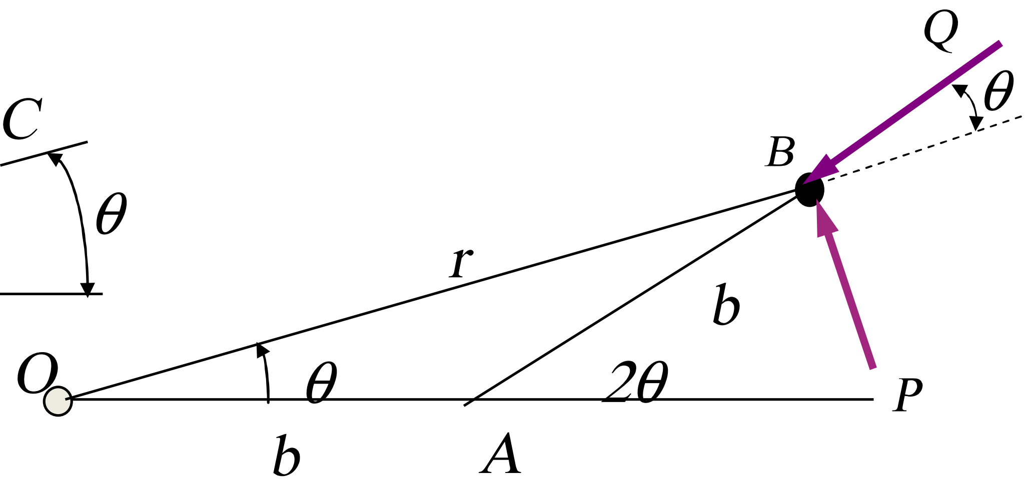
$$\theta = 75^{o} \quad f = 0.815\,N \quad N = -4.54\,N \quad \mu = 0.1796$$

$$\theta = 45^{o} \quad f = -0.773\,N \quad N = -3.55\,N \quad \mu = 0.218$$

مثال: پین B بجرم m میتواند در صفحه افقی بطور آزاد در امتداد بازوی گردنده OC و امتداد کشوی دایره ای DE بشعاع b بلغزد. مطلوبست تعیین مولفه های نیروهای وارده بر پین از طرف بازوی OC وکشوی دایره ای DE در امتداد شعاع b و جهت θ.







$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow -Q\cos\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad r = 2b\cos\theta$$

$$\dot{r} = -2b\dot{\theta}\sin\theta \qquad \ddot{r} = -2b\ddot{\theta}\sin\theta - 2b\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$\boxed{\sum F_r = Q\cos\theta = 2mb(\ddot{\theta}\sin\theta + 2\dot{\theta}^2\cos\theta)}$$

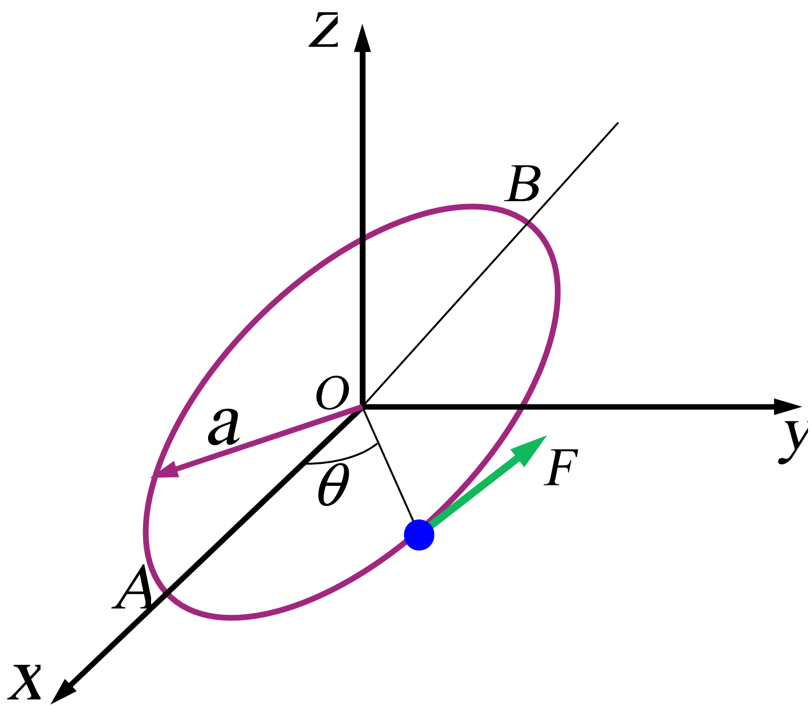
$$\sum F_\theta = ma_\theta \Rightarrow P - Q\sin\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

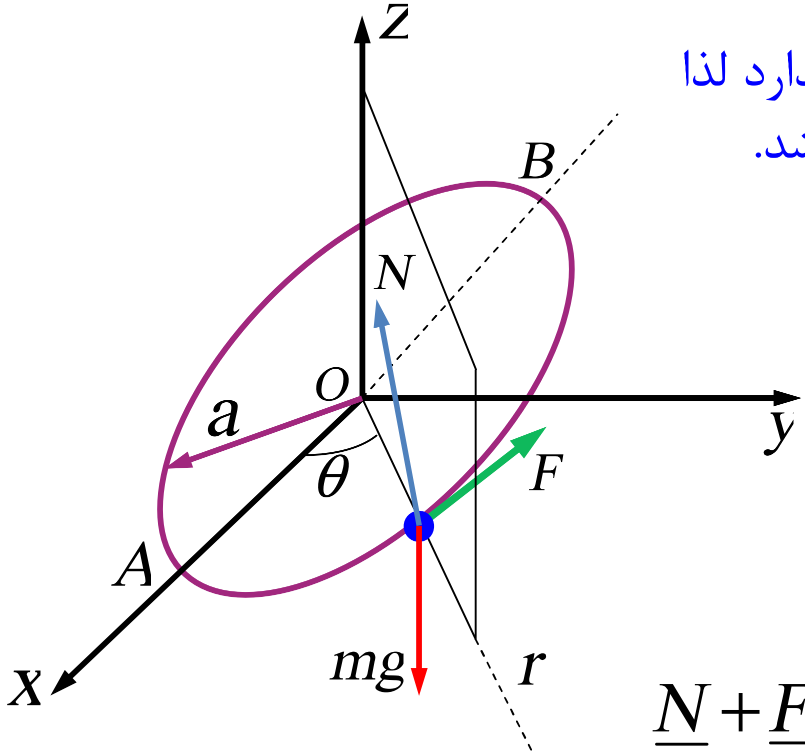
$$\boxed{\sum F_\theta = P - Q\sin\theta = 2mb(\ddot{\theta}\cos\theta - 2\dot{\theta}^2\sin\theta)}$$

$$\boxed{Q = 2mb(\ddot{\theta}\tan\theta + 2\dot{\theta}^2)}$$

$$\boxed{P = 2mb\ddot{\theta} / \cos\theta}$$

مثال: مهره ای به جرم m روی مفتول دایره ای شکل و بدون اصطکاک به شعاع a که در صفحه افقی قرار دارد از حالت سکون و از نقطه ی A تحت تأثیر نیروی مماسی ثابت F شروع به حرکت می کند. مطلوبست تعیین نیروی عکس العمل بین مهره و مفتول در نقطه B .





از آنجاییکه درامتداد θ اصطکاک وجود ندارد لذا نیروی عکس العمل در صفحه (r,z) میباشد.

$$\underline{N} = N_r \underline{e}_r + N_z \underline{e}_z$$

$$\underline{F} = F \underline{e}_\theta \qquad \underline{w} = -mg\, \underline{e}_z$$

$$\sum \underline{F} = m\underline{a}$$

$$\underline{a} = a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z$$

$$\underline{N} + \underline{F} + \underline{w} = m(a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z)$$

$$N_r \underline{e}_r + F\, \underline{e}_\theta + (N_z - mg)\underline{e}_z = m(a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z)$$

$$\begin{cases} N_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -ma\dot{\theta}^2 & (I) \\ F = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = ma\ddot{\theta} & (II) \\ N_z - mg = ma_z = m(\ddot{z}) & (III) \end{cases} \qquad \begin{cases} r = a \\ \dot{r} = 0 \\ \ddot{r} = 0 \end{cases}$$