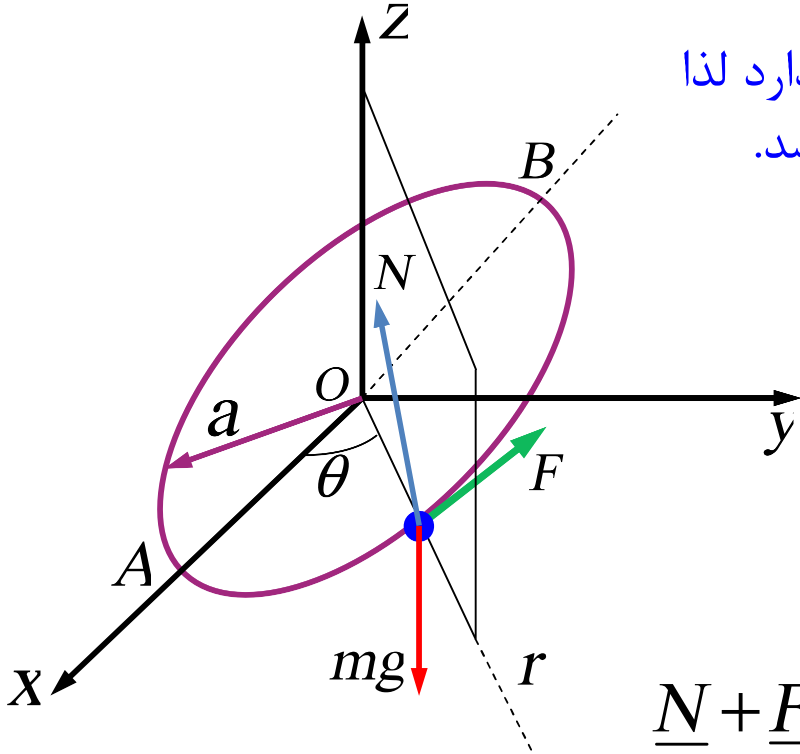


از آنجاییکه درامتداد θ اصطکاک وجود ندارد لذا نیروی عکس العمل در صفحه (r,z) میباشد.

$$\underline{N} = N_r \underline{e}_r + N_z \underline{e}_z$$

$$\underline{F} = F\underline{e}_\theta \qquad \underline{w} = -mg\,\underline{e}_z$$

$$\sum \underline{F} = m\underline{a}$$

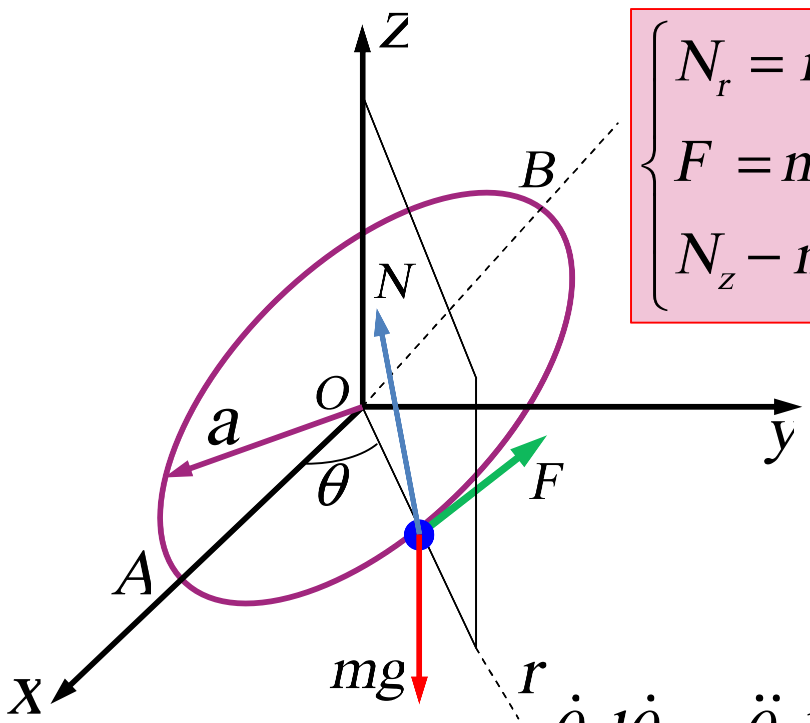
$$\underline{a} = a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z$$

$$\underline{N} + \underline{F} + \underline{w} = m(a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z)$$

$$N_r \underline{e}_r + F\,\underline{e}_\theta + (N_z - mg)\,\underline{e}_z = m(a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z)$$

$$\begin{cases} N_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -ma\dot{\theta}^2 & (I) \\ F = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = ma\ddot{\theta} & (II) \\ N_z - mg = ma_z = m(\ddot{z}) & (III) \end{cases} \qquad \begin{cases} r = a \\ \dot{r} = 0 \\ \ddot{r} = 0 \end{cases}$$

حسینی هاشمی



$$\begin{cases} N_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -ma\dot{\theta}^2 & (I) \\ F = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = ma\ddot{\theta} & (II) \\ N_z - mg = ma_z = m(\ddot{z}) & (III) \end{cases}$$

$$\ddot{z} = 0 \rightarrow N_z = mg$$

$$I) \rightarrow N_r = -ma\dot{\theta}^2$$

$$II) \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{F}{ma}$$

$$\dot{\theta}d\dot{\theta} = \ddot{\theta}d\theta = \frac{F}{ma}d\theta$$

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}d\dot{\theta} = \frac{F}{ma}\int_0^{\theta} d\theta \qquad \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{F}{ma}\theta \rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2F}{ma}\theta \qquad N_r = -2F\theta$$

$$\boxed{\underline{N} = -2F\theta\underline{e}_r + mg\underline{e}_z}$$

B در نقطه $\theta = \pi$

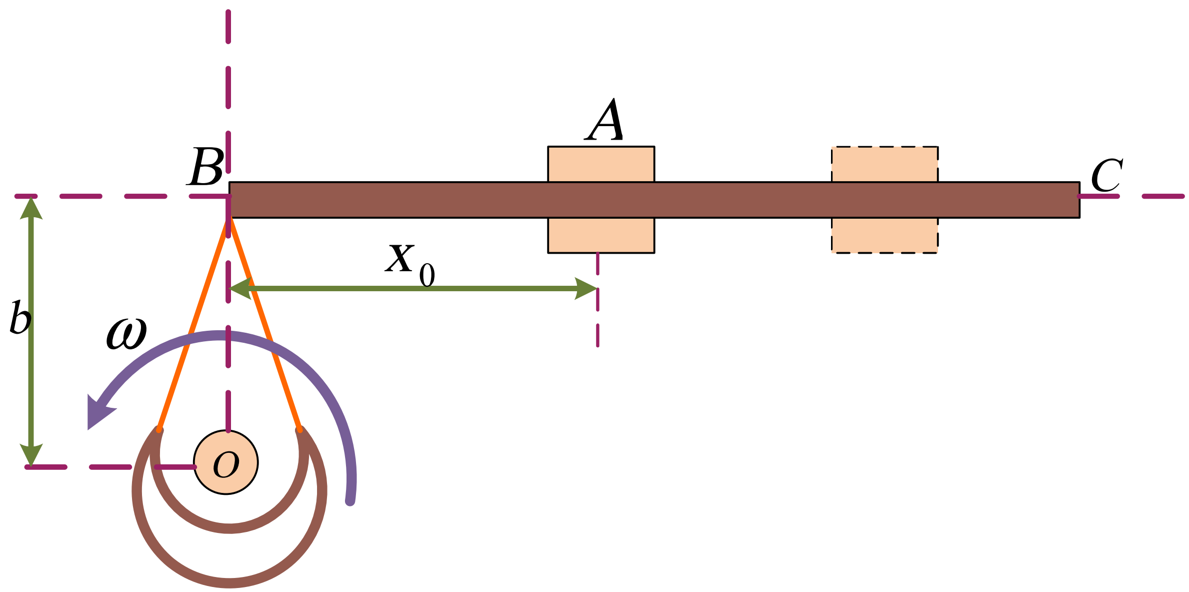
$$\boxed{\underline{N} = -2\pi F\ \underline{e}_r + mg\underline{e}_z}$$

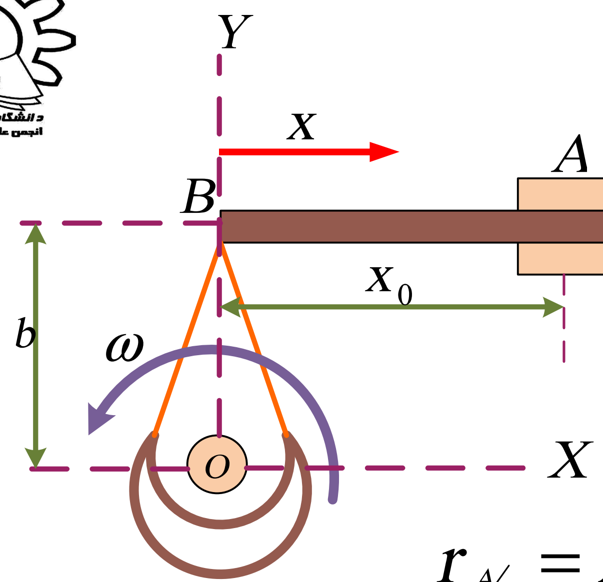
$$\boxed{N = \sqrt{4\pi^2 F^2 + m^2 g^2}}$$

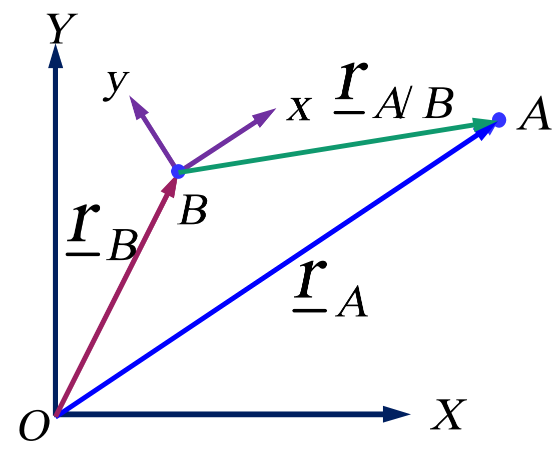
مثال: لغزنده A از حالت سکون از وضعیت $x = x_0$ در طول میله BC شروع به حرکت می کند. بازوی OB در نقطه B به میله BC متصل بوده و با سرعت زاویه ای ثابت ω حول محور قائمی که از یاتاقان ثابتی در O می گذرد دوران می کند. حرکت را در صفحه افقی فرض کرده و از اصطکاک مابین میله و لغزنده صرف نظر می کنیم. مطلوب است

الف) نیروی اعمال شده توسط میله بر لغزنده

ب) مسافت x به صورت تابعی از زمان.







$$\underline{r}_A = \underline{r}_B + \underline{r}_{A/B}$$

$$\underline{r}_{A/B} = x\underline{i} \qquad \Rightarrow \dot{\underline{r}}_{A/B} = \underline{V}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} + x\dot{\underline{i}} \qquad \underline{\omega} = \omega \underline{k}$$

$$\dot{\underline{i}} = \underline{\omega} \times \underline{i} = \omega(\underline{k} \times \underline{i}) = \omega \underline{j} \qquad \underline{V}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} + x\dot{\underline{i}} = \dot{x}\underline{i} + x\omega\underline{j}$$

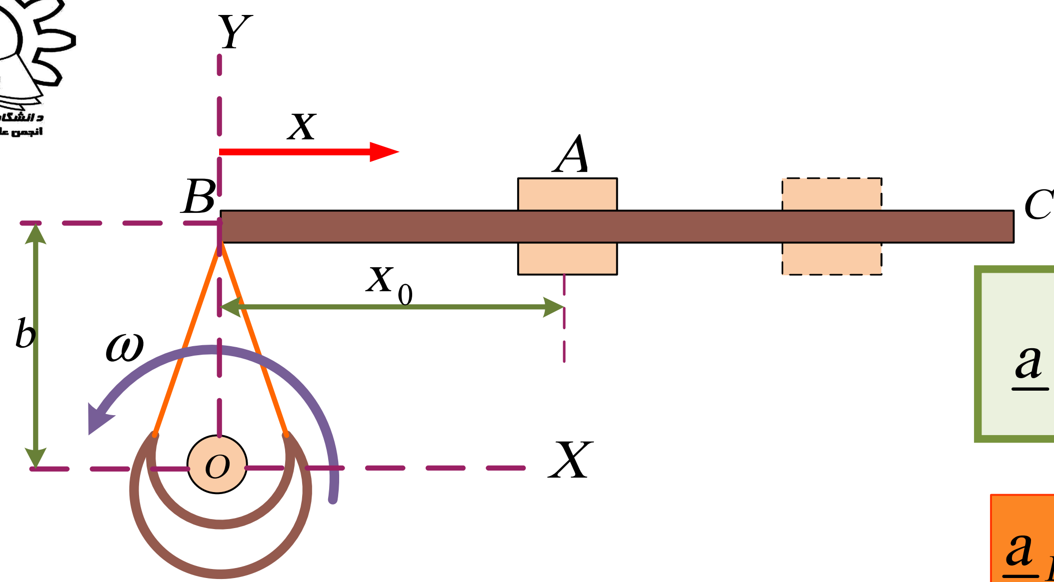
$$\underline{a}_{A/B} = \dot{\underline{V}}_{A/B} = \ddot{x}\underline{i} + \dot{x}\dot{\underline{i}} + \dot{x}\omega\underline{j} + x\dot{\omega}\underline{j} + x\omega\dot{\underline{j}}$$

$$\boxed{\underline{a}_{A/B} = \left(\ddot{x} - x\omega^2\right)\underline{i} + 2\dot{x}\omega\underline{j}}$$

$$\underline{r}_B = b\underline{j} \qquad \Rightarrow \underline{V}_B = \dot{\underline{r}}_B = b\dot{\underline{j}} = -b\omega\underline{i}$$

$$\underline{a}_B = \dot{\underline{V}}_B = -b\dot{\omega}\underline{i} - b\omega\dot{\underline{i}} = -b\omega^2\underline{j}$$

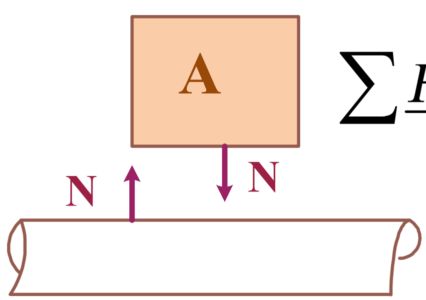
$$\boxed{\underline{a}_B = -b\omega^2\underline{j}}$$



$$\underline{a}_{A/B} = \left(\ddot{x} - x\omega^2\right)\underline{i} + 2\dot{x}\omega\,\underline{j}$$

$$\underline{a}_B = -b\omega^2\,\underline{j}$$

$$\underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{A/B} \Rightarrow \boxed{\underline{a}_A = \left(\ddot{x} - x\omega^2\right)\underline{i} + \left(2\dot{x}\omega - b\omega^2\right)\underline{j}}$$



$$\sum \underline{F} = m\underline{a}_A \rightarrow -N\underline{j} = m\left(\ddot{x} - x\omega^2\right)\underline{i} + m\left(2\dot{x}\omega - b\omega^2\right)\underline{j}$$

$$\begin{cases} 0 = \ddot{x} - x\omega^2 \\ -N = m\left(2\dot{x}\omega - b\omega^2\right) \end{cases} \qquad x = A\sinh\omega t + B\cosh\omega t$$

$$x = A\sinh\omega t + B\cosh\omega t$$

$$\dot{x} = A\omega\cosh\omega t + B\omega\sinh\omega t$$

$$t=0 \qquad (x = x_0 \quad , \quad \dot{x} = 0) \qquad \Rightarrow \quad A=0 \quad , \quad B = x_0$$

$$\boxed{x = x_0 \cosh\omega t}$$

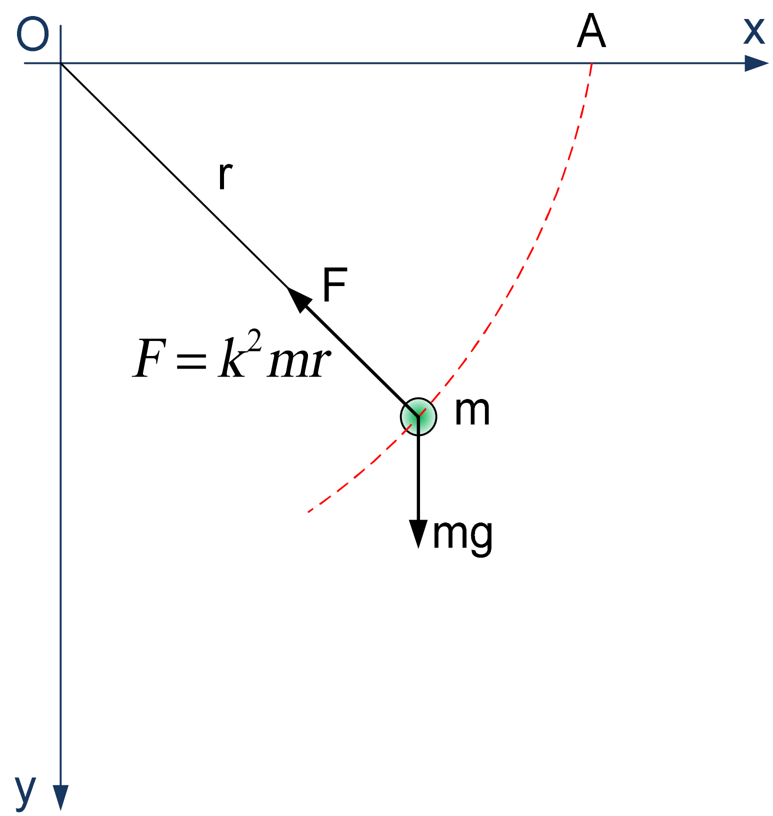
$$-N = m\left(2\dot{x}\omega - b\omega^2\right)$$

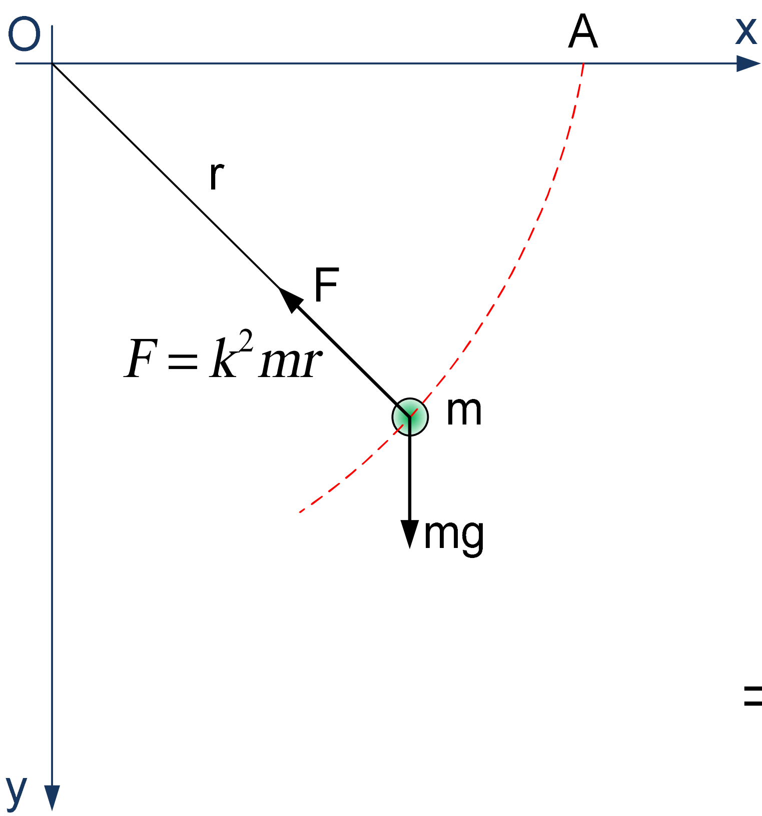
$$N = -m\left(2x_0\omega^2\sinh\omega t - b\omega^2\right) = -m\omega^2\left(2x_0\sinh\omega t - b\right)$$

$$\cosh\omega t = \frac{x}{x_0} \qquad \cosh^2\omega t - \sinh^2\omega t = 1 \qquad \sinh\omega t = \sqrt{\left(-1+\frac{x^2}{x_0^{\,2}}\right)}$$

$$\boxed{N = -m\omega^2\left[\left(2\sqrt{x^2 - x_0^2}\right) - b\right]}$$

مثال: ذره‌ای به جرم m از موقعیت A به فاصله‌ی OA=b از حالت سکون در صفحه قائم تحت تاثیر نیروی مرکزی با بزرگی $F=K^2mr$ و نیروی وزنش یک حرکت سقوطی انجام می‌دهد، معادله مسیر ذره را تعین کنید.





$$\sum \underline{F} = -F\underline{e}_r + mg\underline{j}$$

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} = r\underline{e}_r$$

$$\sum \underline{F} = -k^2 mr\underline{e}_r + mg\underline{j}$$

$$= -k^2 m(x\underline{i} + y\underline{j}) + mg\underline{j}$$

$$= -k^2 mx\underline{i} + (mg\underline{j} - k^2 my\underline{j})$$

$$\underline{a} = \ddot{\underline{r}} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j}$$

$$\sum \underline{F} = m\underline{a} \Rightarrow -k^2 mx\underline{i} + (mg\underline{j} - k^2 my\underline{j}) = m(\ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j})$$

$$\ddot{x} = -k^2 x \qquad \ddot{y} = g - k^2 y$$

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \qquad x = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt$$

$$\ddot{y} + k^2 y = g \qquad y = c_3 \sin kt + c_4 \cos kt + \frac{g}{k^2}$$

$$t = 0 \ ; \quad \begin{cases} x = b & \dot{x} = 0 \\ y = 0 & \dot{y} = 0 \end{cases}$$

$$\dot{x} = c_1 k \cos kt - c_2 k \sin kt \qquad b = c_2 \qquad 0 = c_1 k \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\Rightarrow x = b \cos kt$$

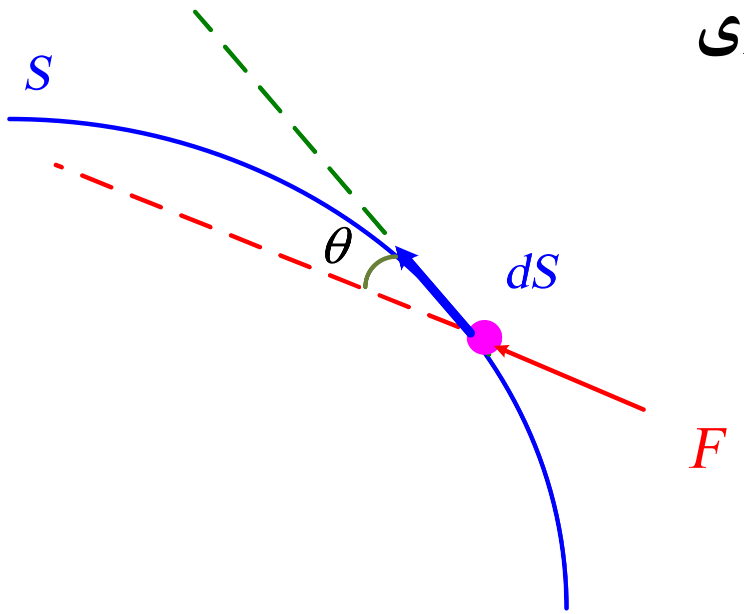
$$\dot{y} = c_3 k \cos kt - c_4 k \sin kt \qquad 0 = c_4 + \frac{g}{k^2} \Rightarrow c_4 = -\frac{g}{k^2}$$

$$0 = c_3 k \Rightarrow c_3 = 0 \qquad \Rightarrow y = \frac{g}{k^2}(1 - \frac{x}{b})$$

$$\Rightarrow y = \frac{g}{k^2}(1 - \cos kt)$$

۵-کار و انرژی

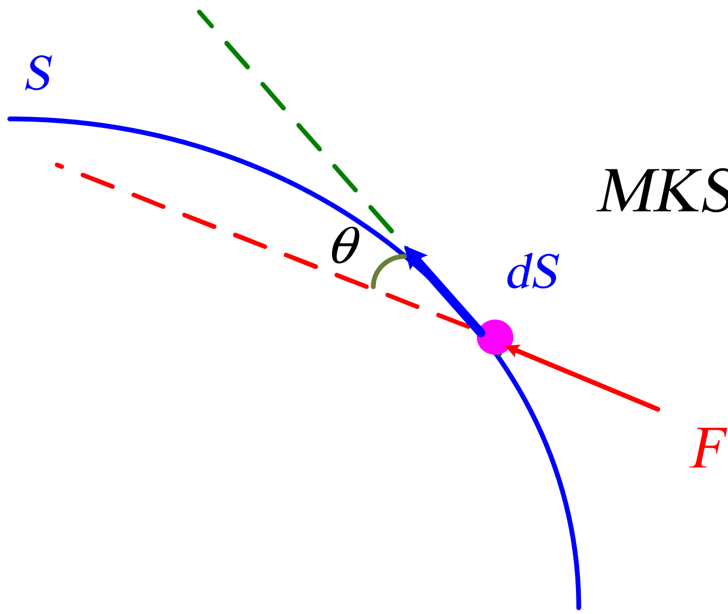
۵-۱ مقدمه



کار انجام شده برابر است با حاصلضرب نیرو در تصویر جابجایی در راستای نیرو

$$dW = \underline{F}.d\underline{s} = Fds\cos\theta = F(ds\cos\theta) = (F\cos\theta)ds$$

کار انجام شده برابر است با حاصلضرب جابجایی در تصویر نیرو در راستای جابجایی



واحدها:

$$MKS \rightarrow \begin{cases} F : N \\ dS : m \\ N.m = J \end{cases} \qquad CGS \rightarrow \begin{cases} F : dyne \\ dS : cm \\ dyne.cm = erg \end{cases}$$

$$dW = \underline{F}.d\underline{s}$$

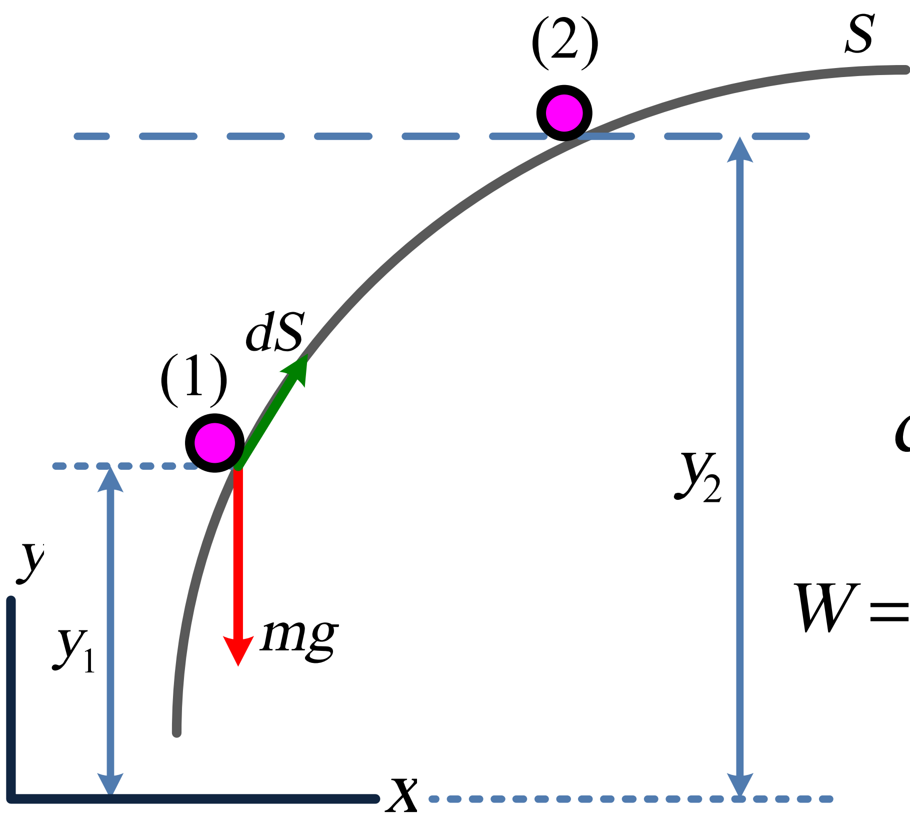
$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}$$

$$d\underline{s} = dx\underline{i} + dy\underline{j} + dz\underline{k}$$

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \underline{F}.d\underline{s}$$

$$\boxed{W = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz}$$

۲-۵ کار نیروی ثقلی ثابت



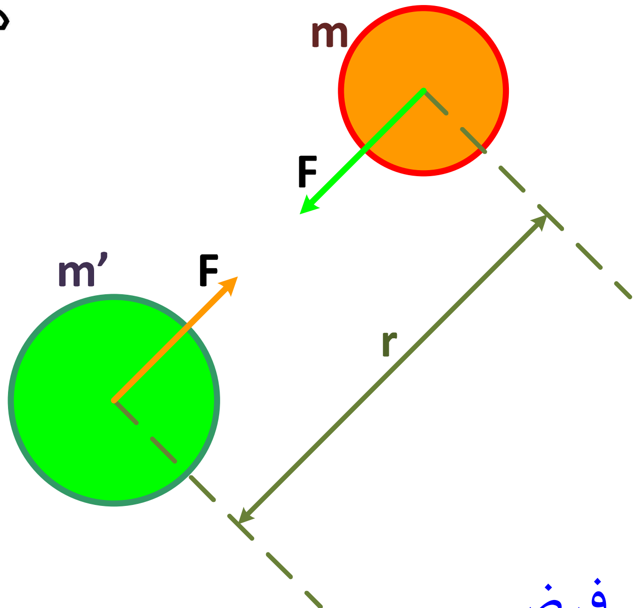
$$\underline{F} = -mg\,\underline{j}$$

$$d\underline{s} = dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j}$$

$$dW = \underline{F}.d\underline{s} = -mgdy$$

$$W = -mg\int_{y_1}^{y_2} dy = -mg(y_2 - y_1)$$

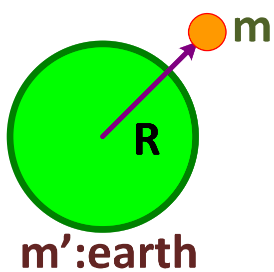
۵-۳ نیروی ثقلی متغیر



$$F = K\frac{mm'}{r^2}$$

K: ثابت جاذبه عمومی نیوتون

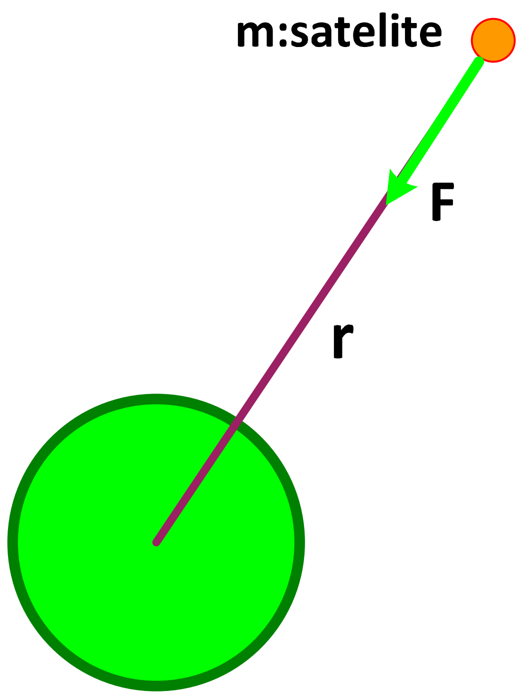
اگر m' را زمین و m را جرمی در نزدیکی سطح آن فرض کنیم، به علت زیاد بودن شعاع زمین می توان از فاصله جسم نسبت به زمین صرف نظر کرد.



$$F = k\frac{mm'}{R^2} = mg \qquad g = 9.8 \approx 10\, {}^{m}\!/_{\sec^2}$$

$$\boxed{km' = gR^2}$$

حسینی هاشمی



$$F = K\frac{mm'}{r^2} = mg_r$$

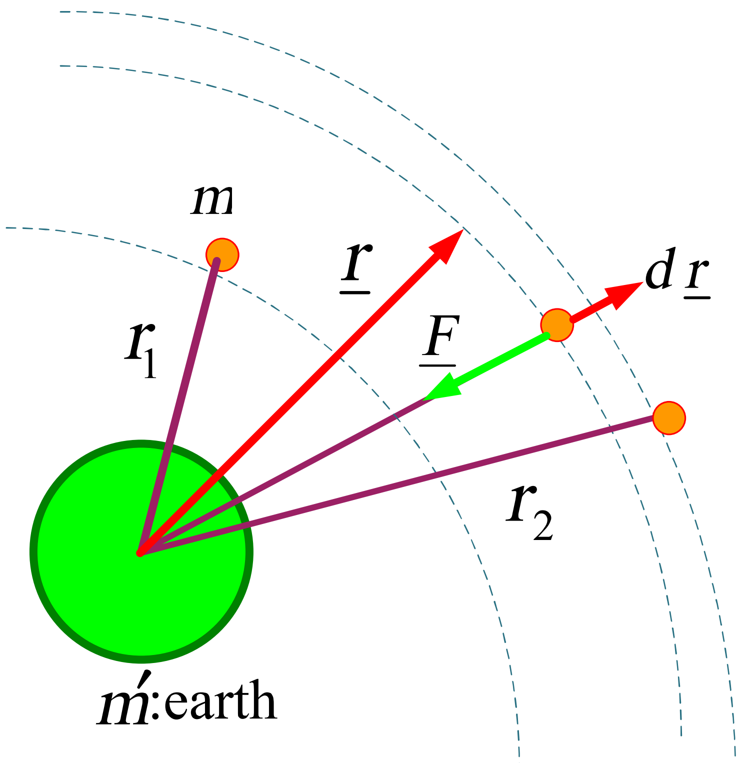
$$g_r = \frac{km'}{r^2} = \frac{gR^2}{r^2} \qquad g_r = f(r)$$

$$F = mg_r = \frac{mgR^2}{r^2}$$

نیروی ثقلی متغیر

$$\boxed{\underline{F} = -mg\frac{R^2}{r^2}\underline{e}_r}$$

۴-۵ کار نیروی ثقلی متغیر



$$\underline{F} = -mg\,\frac{R^2}{r^2}\,\underline{e}_r$$

$$d\,\underline{r} = dr\,\underline{e}_r$$

$$dW = \underline{F}.d\,\underline{r} = -mg\frac{R^2}{r^2}\,dr$$

$$W = -mgR^2\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -mgR^2\left[\frac{-1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = mgR^2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

۵-۵ سیستم های ابقایی و غیر ابقایی

چنانچه کار نیرویی مستقل از مسیر بوده و فقط تابع وضعیت ابتدایی و انتهایی مسیر باشد، آن نیرو را ابقایی یا conservative می نامند. (مثل نیروی ثقل ثابت و متغیر) . همچنین واژه ی پایستار نیز به کار گرفته می شود..

بالعکس، چنانچه کار نیرویی تابع مسیر باشد آن نیرو را نیروی غیر ابقایی و یا غیر پایستار می خوانند. (non-conservative) مثل نیروی اصطکاک که کارش مستقل از مسیر نیست.

نیروهای پایستار، نیروهای ذخیره کننده ی انرژی هستند و در هر سیستمی که موجود باشند انرژی را ذخیره می کنند. اگر نیروهای وارده بر سیستمی همه از نوع ذخیره کننده انرژی باشند آن سیستم را ابقایی یا conservative میخوانند.

بالعکس نیروهای غیر پایستار مثل نیروی اصطکاک تلف کننده انرژی هستند و در هر سیستمی که باشند انرژی را تلف می کنند. نتیجتاً چنانچه در سیستمی یک یا چند از این نیروها موجود باشد، آن سیستم یک سیستم غیر ابقایی خواهد بود.

۵-۶ انرژی پتانسیل

برای کار نیروهای ابقایی می توان تابع پتانسیل تعریف کرد. بدین معنا که کار نیروی ابقایی را می توان برابر با تغییرات یک تابع پتانسیل مثل U با علامت منفی اختیار کرد.

$W)_{\text{ابقایی}} = -\Delta U$

کار نیروی ثقلی ثابت: $W = -mg(y_2 - y_1)$

$$W = -mg(y_2 - y_1) = -\Delta U = -(U_2 - U_1)$$

$$mgy_2 - mgy_1 = U_2 - U_1 \rightarrow \begin{cases} U_2 = mgy_2 \\ U_1 = mgy_1 \end{cases} \rightarrow \boxed{U = mgy}$$

کار نیروی ثقلی متغیر: $W = mgR^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$

$$mgR^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = -\Delta U = -(U_2 - U_1)$$

$$mg\frac{R^2}{r_2} - mg\frac{R^2}{r_1} = -U_2 + U_1 \rightarrow U_1 = -mg\frac{R^2}{r_1} \qquad U_2 = -mg\frac{R^2}{r_2} \qquad \boxed{U = -mg\frac{R^2}{r}}$$

علامت منفی در تابع پتانسیل نیروی ثقلی متغیر با توجه بانتخاب سطح مبنا در بی نهایت قابل توجیه است.

$$r \rightarrow \infty \qquad U \rightarrow 0$$

$$dW = -dU$$ به صورت دیفرانسیلی

$$U = f(x, y, z)$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \qquad dW = \underline{F}.d\underline{s} \qquad \underline{F} = F_x\underline{i} + F_y\underline{j} + F_z\underline{k}$$

$$d\underline{s} = dx\underline{i} + dy\underline{j} + dz\underline{k} \qquad dW = \underline{F}.d\underline{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$dW = -dU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right)$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

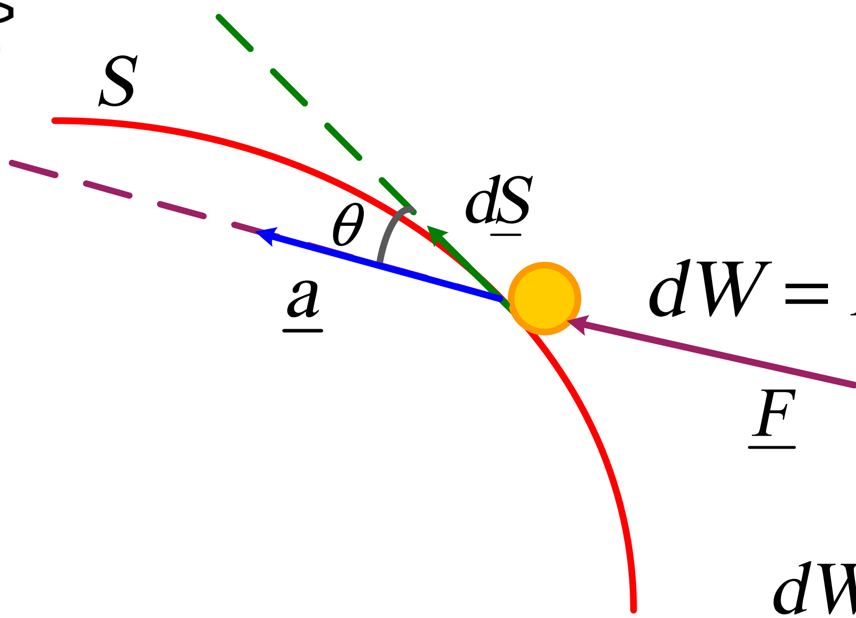
$$\boxed{\underline{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\underline{k}\right) = -\underline{\nabla}U}$$

(grad U) U گرادیان $\underline{\nabla}U$

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}$$

labella (Del)بردار $\underline{\nabla}$

۷-۵ انرژی جنبشی



$$dW = \underline{F}.d\underline{s} = m\underline{a}.d\underline{s}$$

$$dW = mads\cos\theta = m(a\cos\theta)ds$$

مؤلفه شتاب در راستای مماسی

$$dW = ma_t\,ds = mvdv$$

$$W = m\int_{v_1}^{v_2} vdv = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = T$$ انرژی جنبشی

$$\boxed{W = T_2 - T_1 = \Delta T}$$ معادله ی کار و انرژی

۸-۵ اصل بقای انرژی کل مکانیکی

برای سیستم ابقایی همواره داریم $W = -\Delta U$

برای سیستم خواه ابقایی و خواه غیر ابقایی $W = \Delta T$

پس اگر سیستم ابقایی باشد $W = -\Delta U = \Delta T$

در این سیستم انرژی تلف نمی شود

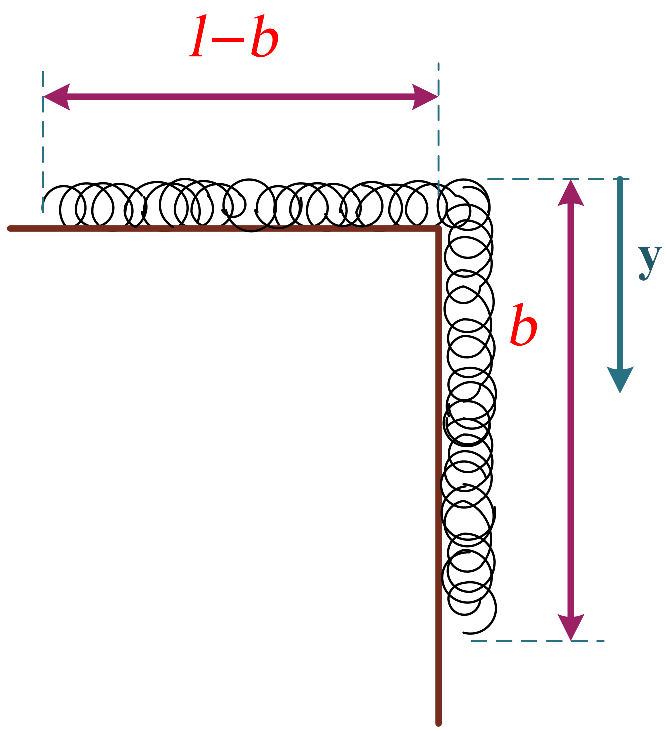
$$W = -(U_2 - U_1) = (T_2 - T_1) \rightarrow T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \rightarrow T + U = cte$$

انرژی کل مکانیکی

$$\boxed{E_M = T + U}$$

مسایل

مثال: زنجیری در حالت نشان داده شده در شکل از حالت سکون رها می شود. سرعت زنجیر را در لحظه ای که آخرین حلقه لبه را ترک می کند بدست آورید.



جرم کل زنجیر $= m$

جرم واحد طول زنجیر $= m/l$

طول آویز زنجیر در هر لحظه $= y$

جرم طول آویز زنجیر $= ym/l$

وزن طول آویز زنجیر (یعنی نیرو) $= y\frac{m}{l}g$

روش اول: معادله ی کار و انرژی

$$dw = \underline{F}.d\underline{s} = (y\frac{m}{l}g\,\underline{j}).(dy\,\underline{j}) = \frac{m}{l}gydy$$

$$w = \frac{m}{l}g\int_b^l ydy = \frac{m}{2l}g(l^2 - b^2)$$

$$w = \Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{m}{2l}g(l^2 - b^2)$$

$$V^2 = \frac{g}{l}(l^2 - b^2) \rightarrow V = \sqrt{\frac{g}{l}(l^2 - b^2)}$$

روش دوم: روش سینماتیکی

$$\sum F = ma \rightarrow \frac{m}{l} gy = ma$$

$$a = \frac{g}{l} y$$

$$VdV = ads = \frac{g}{l} ydy \rightarrow \int_0^V VdV = \frac{g}{l}\int_b^l yd.$$

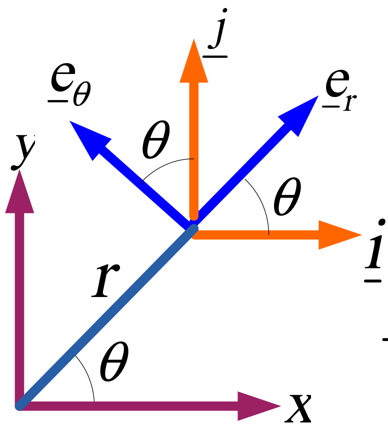
$$\frac{1}{2}V^2 = \frac{g}{2l}(l^2 - b^2) \rightarrow V = \sqrt{\frac{g}{l}(l^2 - b^2)}$$

مثال: انرژی پتانسیل متناظر با یک میدان نیروی دو بعدی از رابطه $U(x,y)=\frac{k(x^2+y^2)}{2}$ بدست می آید. که در آن k مقدار ثابت است.

الف) مؤلفه های نیرو را در امتداد y,x بدست آورده آن را به صورت برداری ارائه کنید.

ب) مؤلفه های نیرو را در دستگاه مختصات قطبی تعیین کنید.

$$\underline{F}=-\underline{\nabla}u=-(\frac{\partial U}{\partial x}\underline{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\underline{j})=-k(x\underline{i}+y\underline{j})\rightarrow F_x=-kx,\ F_y=-ky$$



$$\begin{cases}\underline{i}=\cos\theta\,\underline{e}_r-\sin\theta\,\underline{e}_\theta\\ \underline{j}=\cos\theta\,\underline{e}_\theta+\sin\theta\,\underline{e}_r\end{cases}$$

$$\underline{F}=-kx(\cos\theta\,\underline{e}_r-\sin\theta\,\underline{e}_\theta)-ky(\cos\theta\,\underline{e}_\theta+\sin\theta\,\underline{e}_r)$$

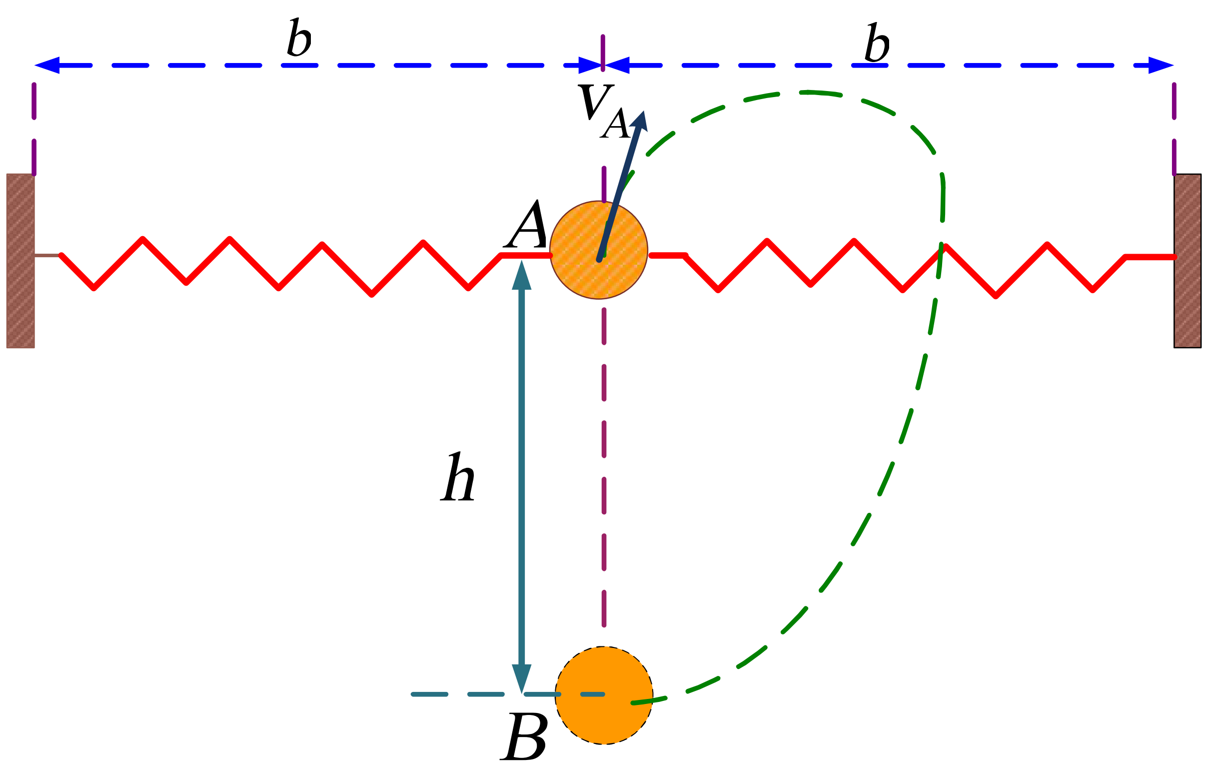
$$\underline{F}=-k[(x\cos\theta+y\sin\theta)\underline{e}_r+(-x\sin\theta+y\cos\theta)\underline{e}_\theta]$$

$$\begin{cases}F_r=-k(x\cos\theta+y\sin\theta)\\ F_\theta=-k(y\cos\theta-x\sin\theta)\end{cases}$$

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

$$\boxed{\begin{matrix}F_r=-kr\\ F_\theta=0\end{matrix}}$$

مثال: گلوله ای به جرم 1.5kg مطابق شکل به دو فنر هر یک با ضریب الاستیکی (سفتی) 150 N/m متصل هست در وضعیت نشان داده شده در شکل فنرها فاقد کشش بوده و به صورت افقی قرار دارند. در صورتی که گلوله در این وضعیت تحت سرعت اولیه 2.5 m/s قرار گرفته و تحت تأثیر این سرعت اولیه مسیر خط چین مطابق شکل را طی کند، مطلوبست تعیین سرعت گلوله در نقطه B که به فاصله 125 mm در زیر نقطه A قرار دارد.

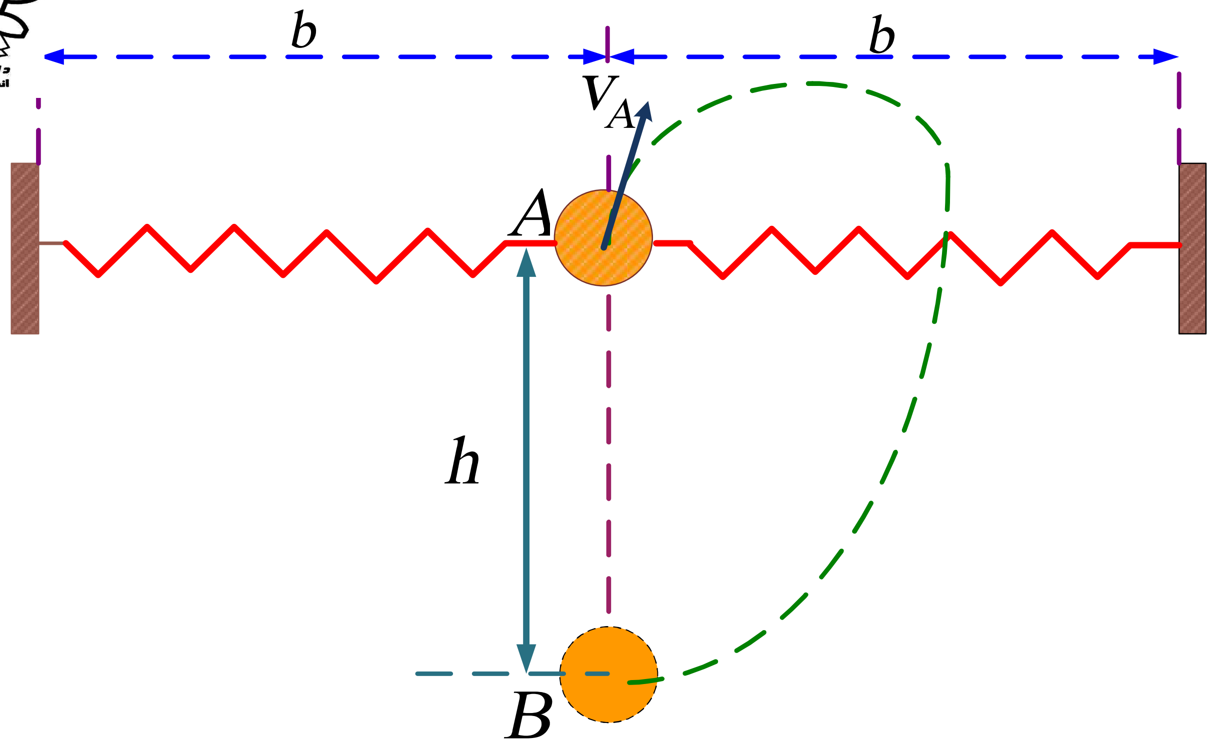


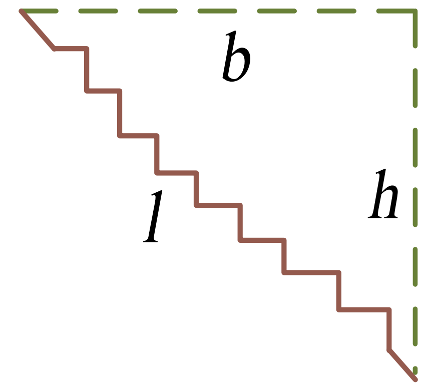
$k = 150\ N/m$

$v_A = 2.5\ m/s$

$h = 125 mm$

$b = 300 mm$



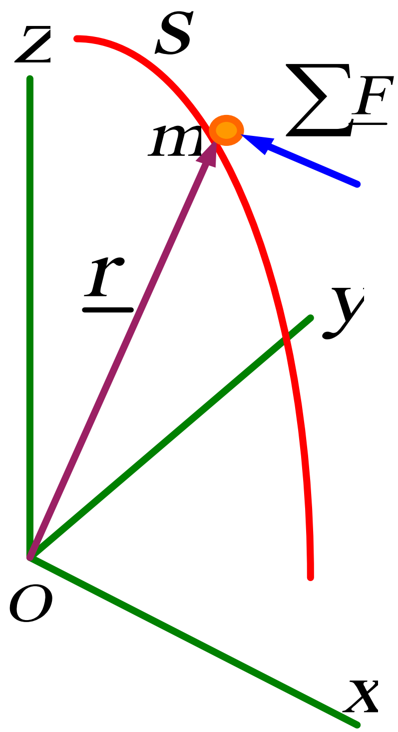


$T+U=cte \rightarrow T_A+U_A=T_B+U_B$ سیستم ابقایی است

$$\frac{1}{2}mv_A^2+mgh=\frac{1}{2}mv_B^2+mg(0)+\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}kx^2$$

$$v_B=\sqrt{v_A^2+2gh+kx^2/m} \qquad x=l-b=\sqrt{300^2+125^2}-300=25mm$$

۶-اندازه حرکت و ضربه



۶-۱ اندازه حرکت خطی

$$\sum \underline{F} = m\underline{a} = m\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\underline{v})$$

$\underline{G} = m\underline{v}$ بردار اندازه حرکت خطی

واحدها:

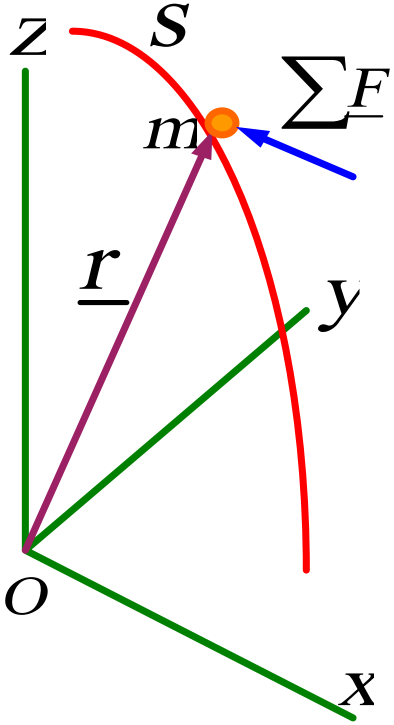
واحد $G = kg\dfrac{m}{s} = kg.\dfrac{m}{s^2}.s = N.s$ MKS

واحد $G = g\dfrac{cm}{s} = g\dfrac{cm}{s^2}.s = dyne.s$ CGS

$$\sum \underline{F} = \frac{d}{dt}(m\underline{v}) = \frac{d}{dt}\underline{G} = \underline{\dot{G}} \qquad \sum \underline{F} = \sum F_x\underline{i} + \sum F_y\underline{j} + \sum F_z\underline{k}$$

$$\underline{v} = v_x\underline{i} + v_y\underline{j} + v_z\underline{k} \qquad \underline{G} = G_x\underline{i} + G_y\underline{j} + G_z\underline{k}$$

$$\boxed{\sum F_x = m\dot{v}_x = \dot{G}_x} \qquad \boxed{\sum F_y = m\dot{v}_y = \dot{G}_y} \qquad \boxed{\sum F_z = m\dot{v}_z = \dot{G}_z}$$



۲-۶ اصل ضربه و اندازه حرکت خطی

$$\sum \underline{F} = \frac{d}{dt}(m\underline{v}) = \frac{d}{dt}\underline{G} \Rightarrow \sum \underline{F}dt = d(m\underline{v}) = d\underline{G}$$

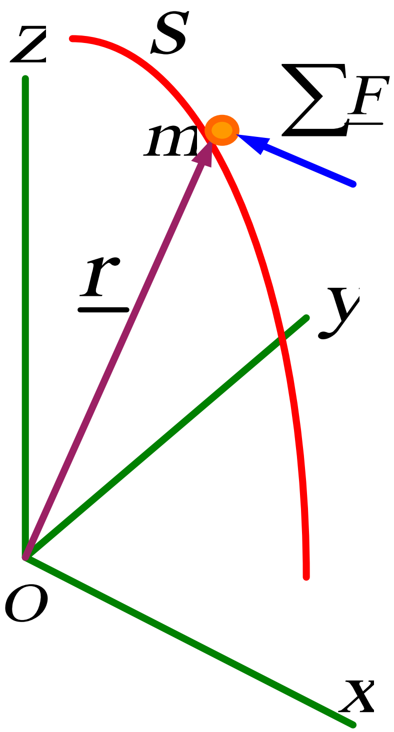
$$\int_0^t \sum \underline{F}dt = m\int_{\underline{v}_1}^{\underline{v}_2} d\underline{v} = \int_{\underline{G}_1}^{\underline{G}_2} d\underline{G}$$

$$\boxed{\int_0^t \sum \underline{F}dt = m(\underline{v}_2 - \underline{v}_1) = \underline{G}_2 - \underline{G}_1}$$

$\boxed{\int_0^t \sum \underline{F}\,dt}$ ضربه خطی نیروی F در فاصله زمانی 0 تا t

$\boxed{m(\underline{v}_2 - \underline{v}_1) = \underline{G}_2 - \underline{G}_1}$ تغییرات اندازه حرکت خطی

۶-۳ اندازه حرکت زاویه ای



$$\sum \underline{M} = \underline{r} \times \sum \underline{F} = \underline{r} \times (m\underline{a}) = \underline{r} \times (m\frac{d\underline{v}}{dt}) = m\underline{r} \times \frac{d\underline{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[\underline{r} \times (m\underline{v})] = (\frac{d\underline{r}}{dt}) \times (m\underline{v}) + \underline{r} \times \frac{d}{dt}(m\underline{v})$$

$$\frac{d}{dt}[\underline{r} \times (m\underline{v})] = \underline{v} \times m\underline{v} + m\underline{r} \times \frac{d}{dt}\underline{v} = m\underline{r} \times \frac{d}{dt}\underline{v}$$

$$\sum \underline{M} = m\underline{r} \times \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\underline{r} \times (m\underline{v})] = \frac{d}{dt}[\underline{r} \times \underline{G}]$$

$$\boxed{\underline{H} = \underline{r} \times (m\underline{v}) = \underline{r} \times \underline{G}}$$

بردار اندازه حرکت زاویه ای

واحدها:

واحد $H = N.s.m = J.s \quad MKS$

واحد $H = dyne.s.cm = erg.s \quad CGS$

$$\sum \underline{M} = \frac{d}{dt}\underline{r}\times(m\underline{v}) = \frac{d}{dt}\underline{r}\times\underline{G} = \frac{d}{dt}\underline{H}$$

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} \qquad \underline{v} = v_x\underline{i} + v_y\underline{j} + v_z\underline{k}$$

$$\underline{H} = \underline{r}\times(m\underline{v}) = \underline{r}\times\underline{G} = (m)\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$$

$$m(yv_z - zv_y)\underline{i} + m(xv_z - zv_x)\underline{j} + (xv_y - yv_x)\underline{k} = H_x\underline{i} + H_y\underline{j} + H_z\underline{k}$$

$$\begin{cases} H_x = m(yv_z - zv_y) \\ H_y = m(zv_x - xv_z) \\ H_z = m(xv_y - yv_x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum M_x = \dot{H}_x \\ \sum M_y = \dot{H}_y \\ \sum M_z = \dot{H}_z \end{cases}$$

۴-۶ اصل ضربه و اندازه حرکت زاویه ای

$$\sum \underline{M} = \frac{d}{dt}\underline{H} \rightarrow \sum \underline{M}dt = d\underline{H} \rightarrow$$

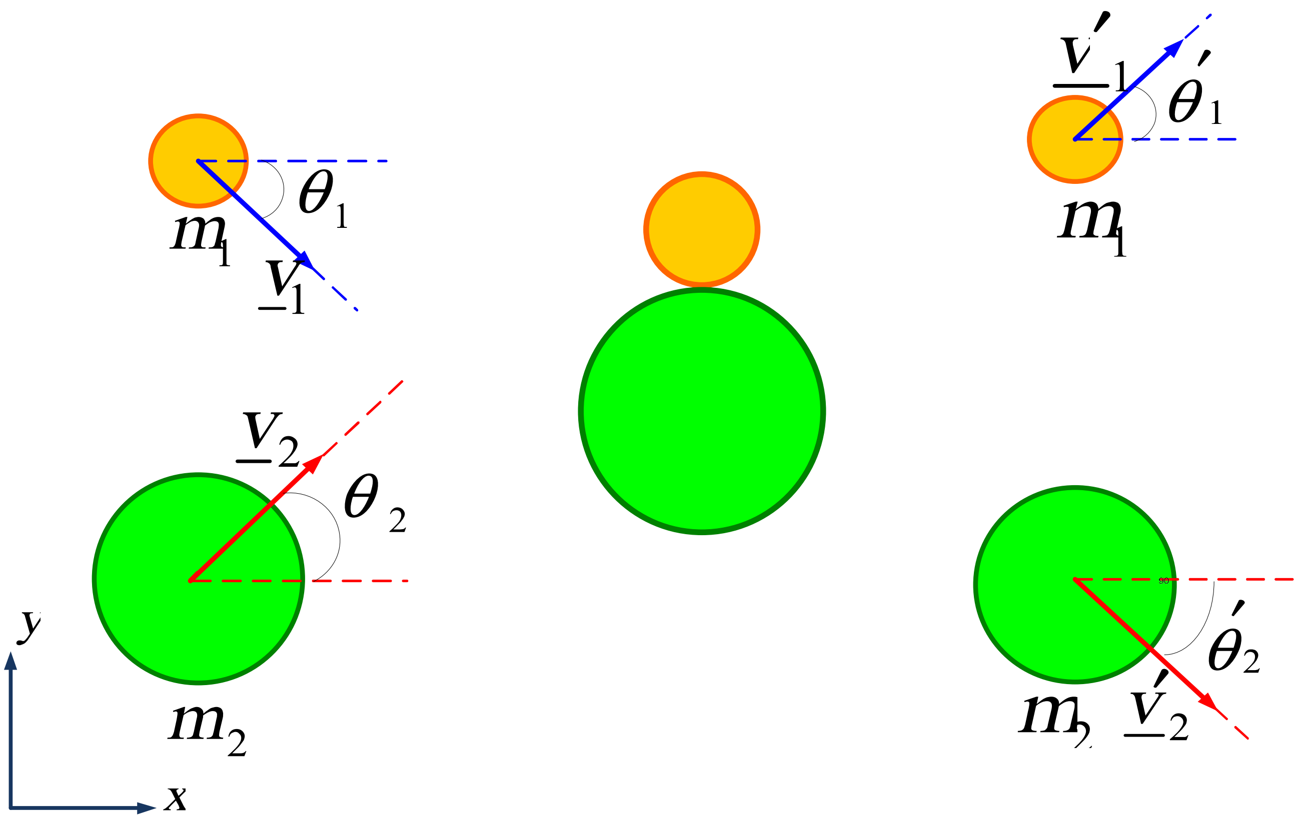
$$\boxed{\int_0^t \sum \underline{M}dt = \int_{\underline{H}_1}^{\underline{H}_2} d\underline{H} = \underline{H}_2 - \underline{H}_1}$$

$\boxed{\int_0^t \sum \underline{M}dt}$ ضربه زاویه ای گشتاور برآیند نیروهای وارد بر جسم در فاصله زمانی صفر تا t

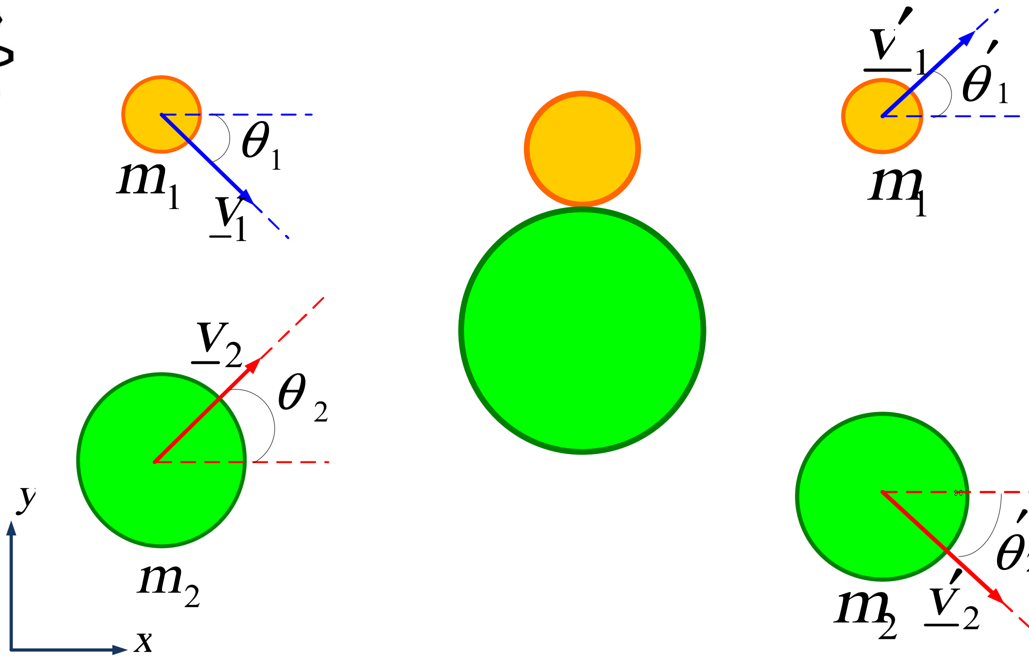
$\boxed{\underline{H}_2 - \underline{H}_1}$ تغییر اندازه حرکت زاویه ای

۶-۵ برخورد

دو جرم m_1 و m_2 با بردارهای سرعت $\underline{V}_1$ و $\underline{V}_2$ به طرف هم حرکت می کنند در نقطه ای برخورد صورت می گیرد و سپس جرم m_1 با سرعت $\underline{V}_1'$ و جرم m_2 با سرعت $\underline{V}_2'$ از هم دور می شوند.



حسینی هاشمی



$$\underline{v}_1 = v_1 \cos\theta_1\, \underline{i} - v_1 \sin\theta_1\, \underline{j}$$

$$\underline{v}_2 = v_2 \cos\theta_2\, \underline{i} + v_2 \sin\theta_2\, \underline{j}$$

$$\underline{v}'_1 = v'_1 \cos\theta'_1\, \underline{i} + v'_1 \sin\theta'_1\, \underline{j}$$

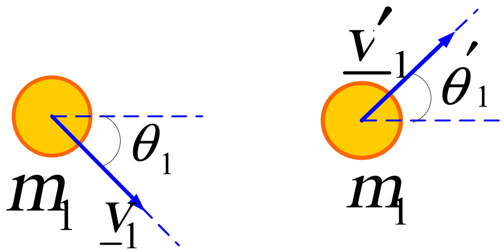
$$\underline{v}'_2 = v'_2 \cos\theta'_2\, \underline{i} - v'_2 \sin\theta'_2\, \underline{j}$$

اصل بقای اندازه حرکت:

اندازه حرکت سیستم بعد از برخورد = اندازه حرکت سیستم قبل از برخورد

$$m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2 = m_1\underline{v}'_1 + m_2\underline{v}'_2$$

$$\rightarrow \begin{cases} m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2 = m_1 v'_1 \cos\theta'_1 + m_2 v'_2 \cos\theta'_2 \\ -m_1 v_1 \sin\theta_1 + m_2 v_2 \sin\theta_2 = m_1 v'_1 \sin\theta'_1 - m_2 v'_2 \sin\theta'_2 \end{cases}$$



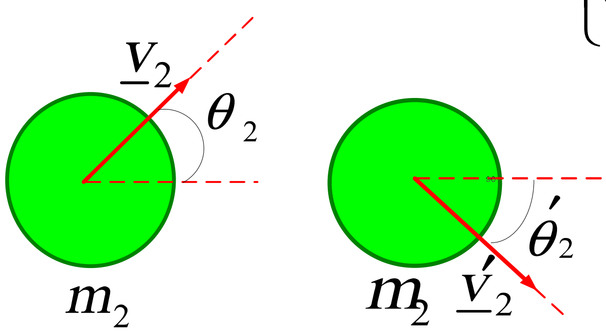
برای جرم m_1

$$\underline{v}'_1 = v'_1\cos\theta'_1\,\underline{i} + v'_1\sin\theta'_1\,\underline{j}$$

$$\underline{v}_1 = v_1\cos\theta_1\,\underline{i} - v_1\sin\theta_1\,\underline{j}$$

$$\int_0^t \underline{F}\,dt = m_1(\underline{v}'_1 - \underline{v}_1)$$

$$\begin{cases} \int_0^t F_x\,dt = m_1(v'_1\cos\theta'_1 - v_1\cos\theta_1) \\ \int_0^t F_y\,dt = m_1(v'_1\sin\theta'_1 + v_1\sin\theta_1) \end{cases}$$



برای جرم m_2

$$\underline{v}'_2 = v'_2\cos\theta'_2\,\underline{i} - v'_2\sin\theta'_2\,\underline{j}$$

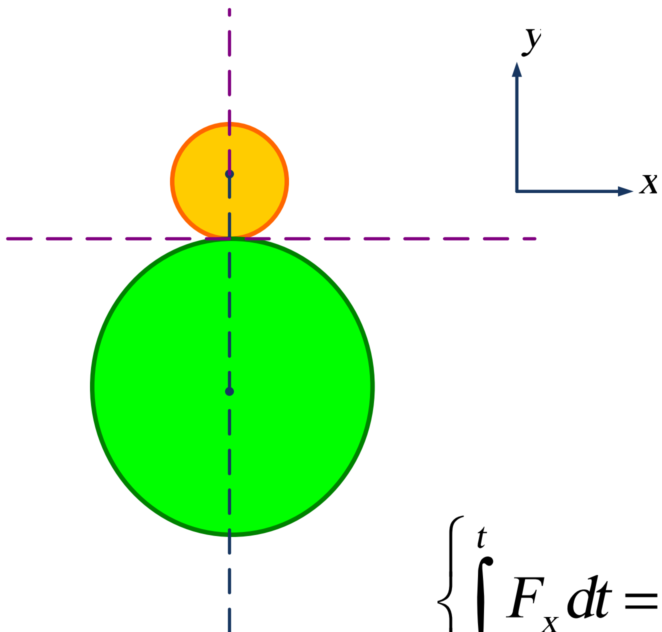
$$\underline{v}_2 = v_2\cos\theta_2\,\underline{i} + v_2\sin\theta_2\,\underline{j}$$

$$\int_0^t \underline{F}\,dt = m_2(\underline{v}'_2 - \underline{v}_2)$$

$$\begin{cases} \int_0^t F_x\,dt = m_2(v'_2\cos\theta'_2 - v_2\cos\theta_2) \\ \int_0^t F_y\,dt = -m_2(v'_2\sin\theta'_2 + v_2\sin\theta_2) \end{cases}$$

نکته: معمولاً برای سادگی کار دستگاه مختصات را به گونه ای انتخاب می کنیم که یک راستای آن در راستای ضربه و دیگری در امتداد راستایی است که ضربه نداریم.

اگر به عنوان مثال ضربه در امتداد محور y اتفاق بیفتد یعنی در امتداد x ضربه نداریم.



برای جرم m_1

$$\left\{\int_0^t F_x\,dt = 0 \rightarrow v_1' \cos\theta_1' - v_1 \cos\theta_1 = 0\right.$$

برای جرم m_2

$$\left\{\int_0^t F_x\,dt = 0 \rightarrow v_2' \cos\theta_2' - v_2 \cos\theta_2 = 0\right.$$

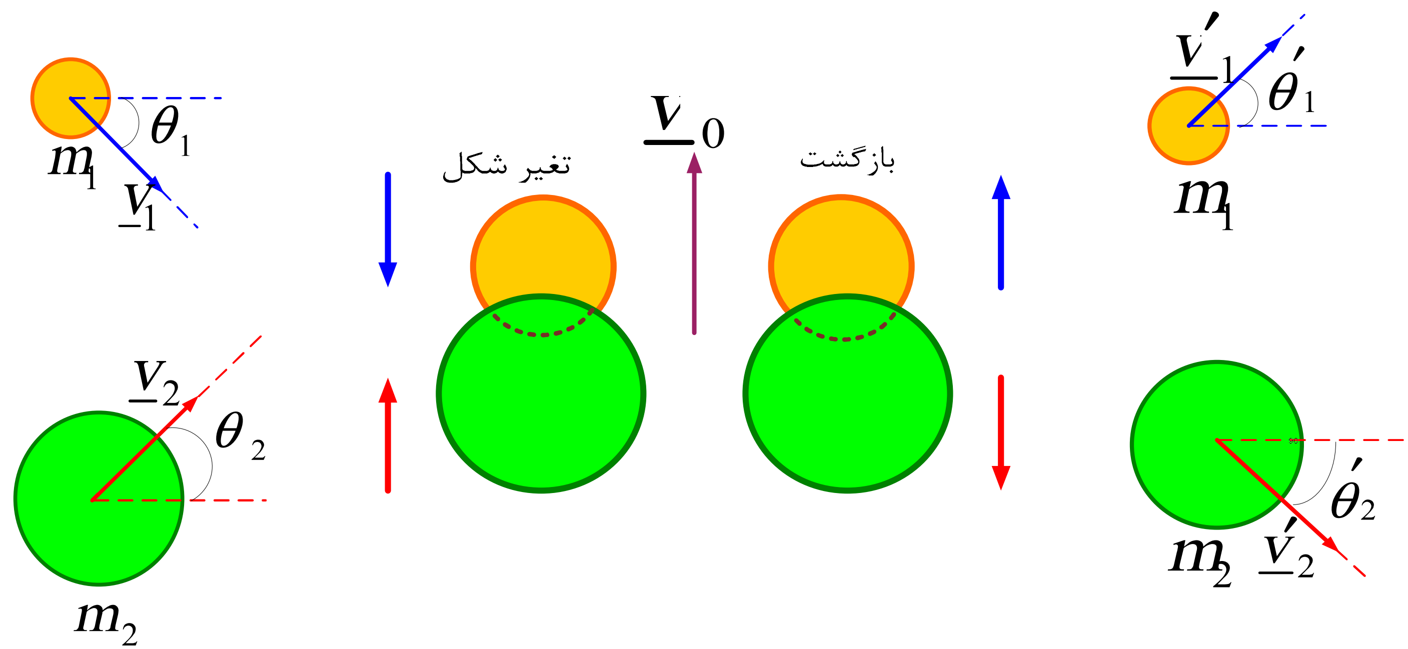
۶-۶ ضریب بازگشت

نسبت ضربه در مدت زمان بازگشت به ضربه در مدت زمان تغیرشکل در راستای ضربه

$$e = \frac{\int F_r\,dt}{\int F_d\,dt}$$

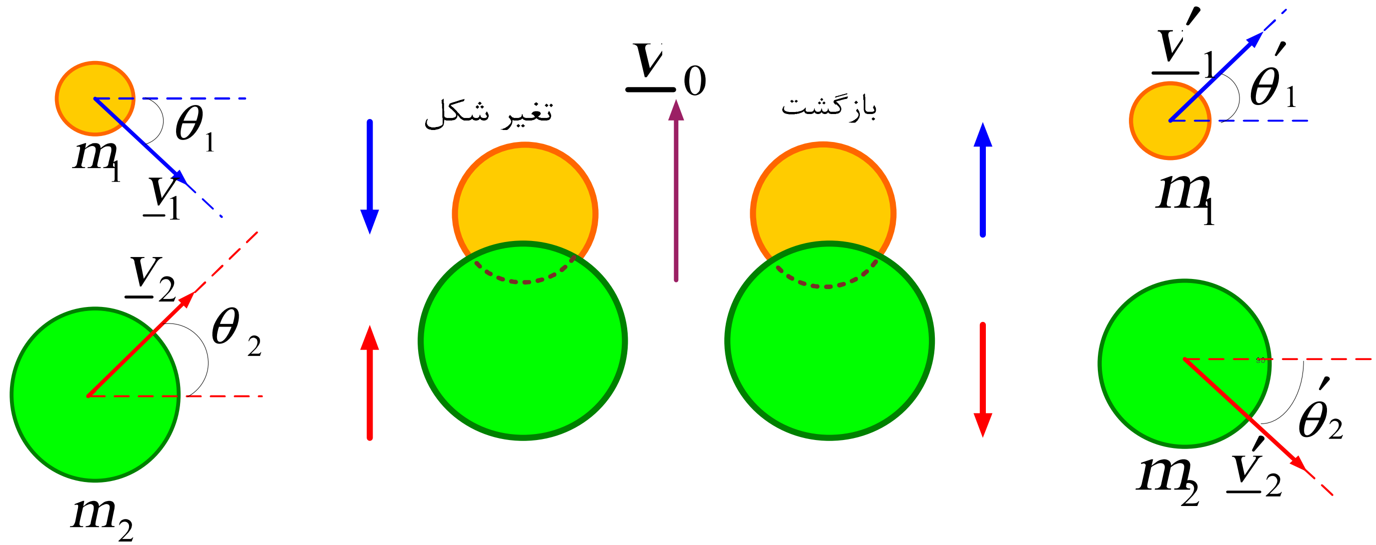
تغییر اندازه حرکت در مدت زمان بازگشت $\int F_r\,dt$

تغییر اندازه حرکت در مدت زمان تغییر شکل $\int F_d\,dt$



حسینی هاشمی

:



$$m_1 \ : \quad e = \frac{\int F_r\,dt}{\int F_d\,dt} = \frac{m_1(v_1' \sin\theta_1' - v_0)}{m_1(v_0 + v_1 \sin\theta_1)}$$

$$m_2 \ : \quad e = \frac{\int F_r\,dt}{\int F_d\,dt} = \frac{m_2(-v_2' \sin\theta_2' - v_0)}{m_2(v_0 - v_2 \sin\theta_2)}$$

v_0 را بین این دو رابطه حذف می کنیم.

دانشگاه علم و صنعت ایران
انجمن علمی دانشکده مکانیک

$$e=\frac{v_1'\sin\theta_1'+v_2'\sin\theta_2')}{v_1\sin\theta_1+v_2\sin\theta_2}=\frac{\text{سرعت نسبی مجموعه بعد از برخورد در امتداد ضربه}}{\text{سرعت نسبی مجموعه قبل از برخورد در امتداد ضربه}}$$

مقادیر واقعی $0 \langle \; e \; \langle 1$

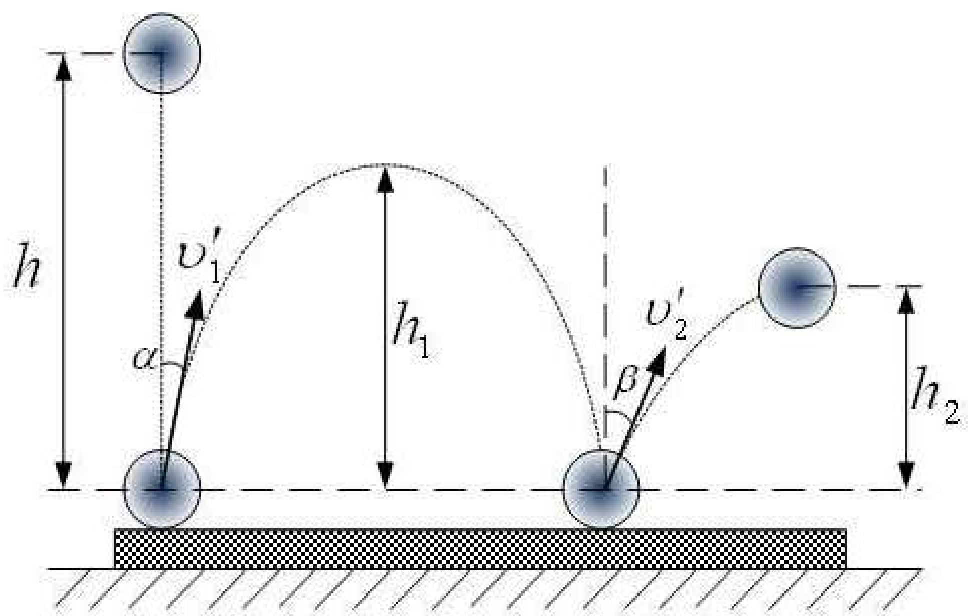
مقادیر ایده آل $e=1$, $e=0$

برخورد کاملا الاستیک (کشسان)

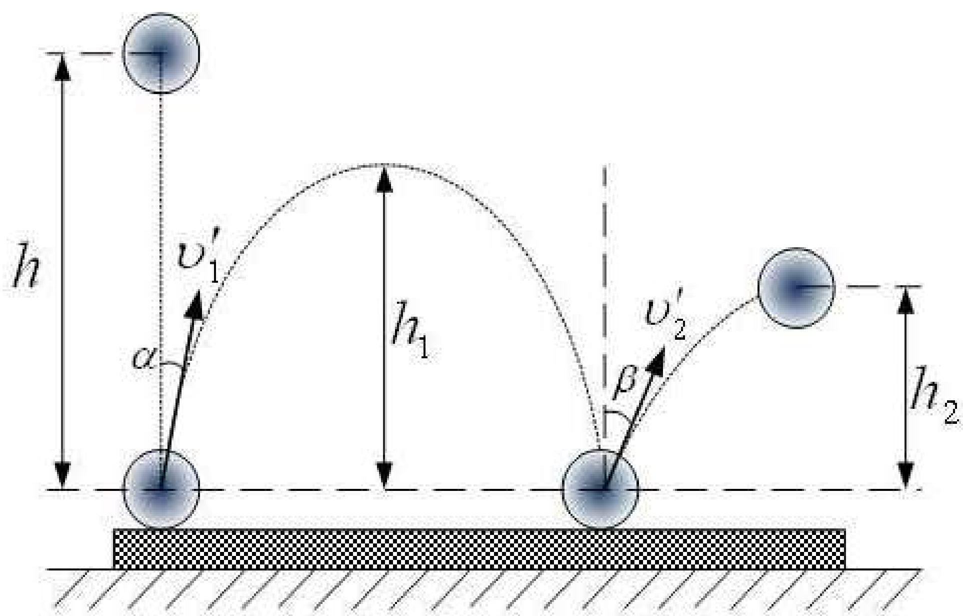
برخورد کاملا پلاستیک (خمیری)

مسایل

مثال: مطلوب است تعیین ضریب برگشت برای یک توپ فولادی که از حالت سکون از ارتفاع h بالای یک صفحه سنگین فولادی می‌افتد و ارتفاع دومین بازگشت آن h_2 است.



$$e = \underline{\hspace{10cm}}$$



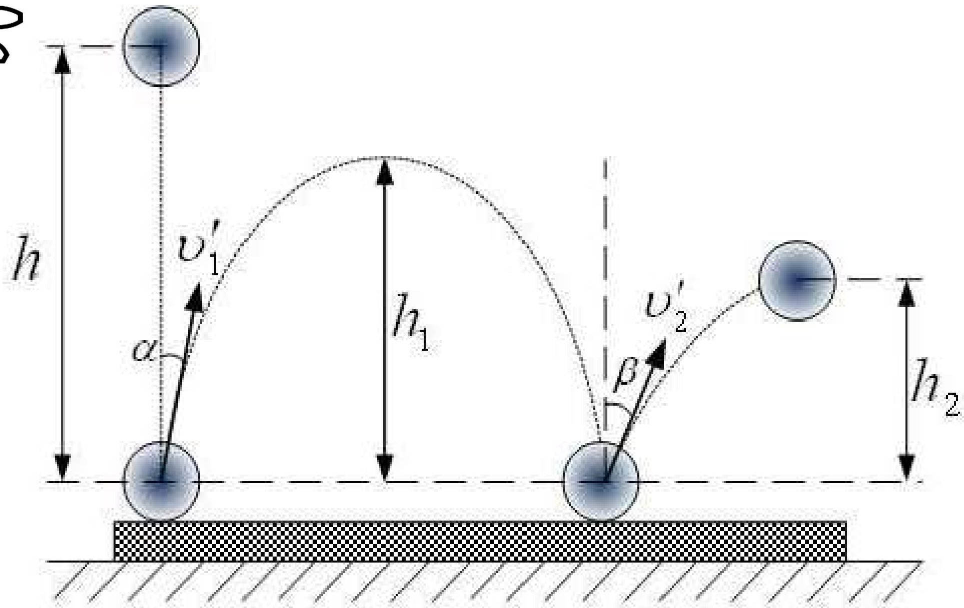
$$e = \frac{v_1' \cos\alpha}{v_1} \qquad v_1 = \sqrt{2gh}$$

$$e = \frac{v_1' \cos\alpha}{\sqrt{2gh}}$$

حال اگر گلوله با سرعت اولیه v_1' بعد از برخورد اول به ارتفاع h_1 برگردد می بایست سرعت گلوله در امتداد قائم از $v_1' \cos\alpha$ بعد از طی مسافت قائم h_1 به صفر برسد در نتیجه:

$$v_1' \cos\alpha = \sqrt{2gh_1}$$

$$e = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh}} \qquad e^2 2gh = 2gh_1 \qquad \Rightarrow h_1 = e^2 h$$



حال اگر گلوله از ارتفاع h_1 سقوط کند سرعت آن قبل از برخورد در امتداد قائم برابر است با:

$$\bar{\upsilon} = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2ge^2h}$$

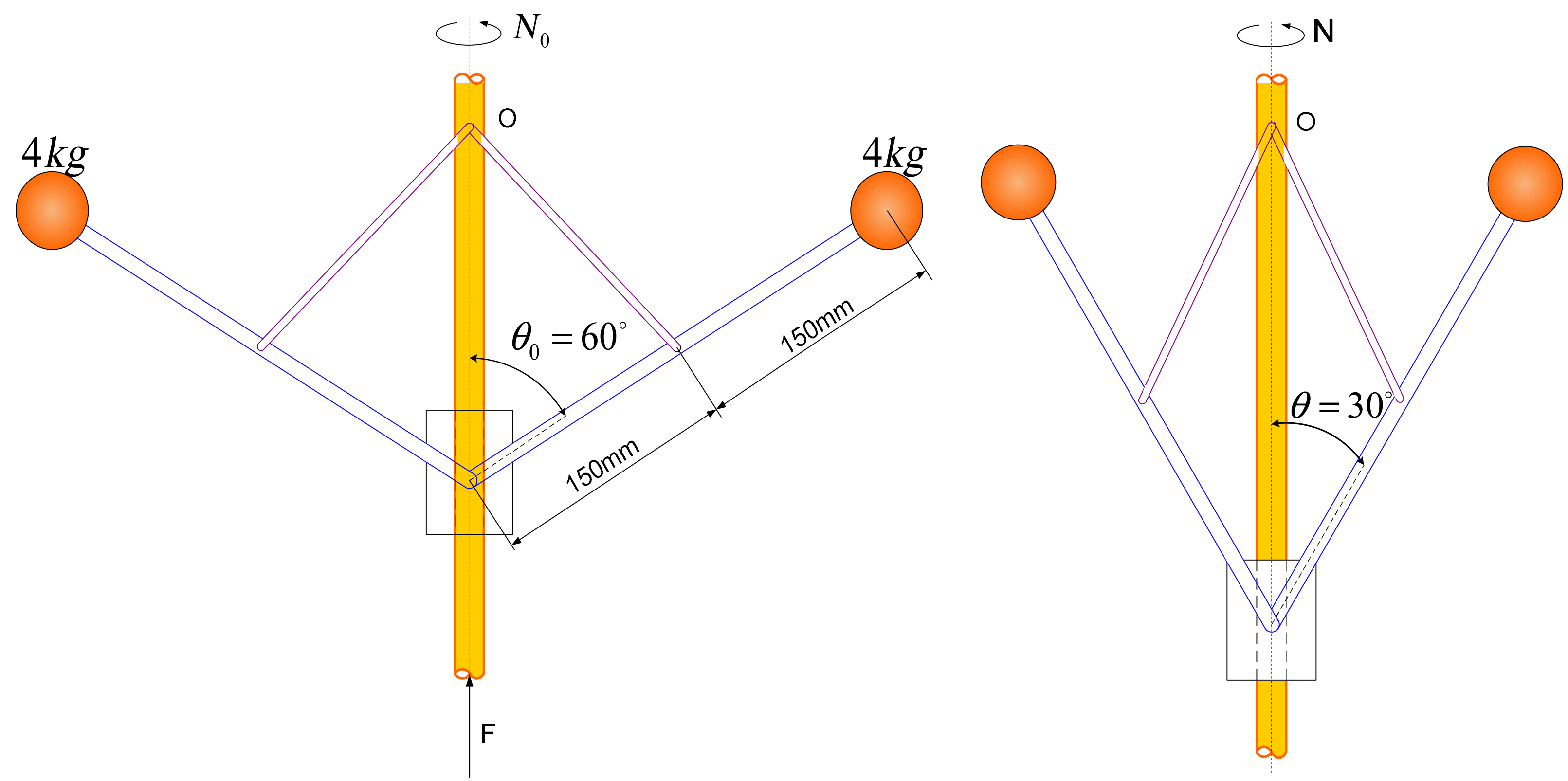
$$e = \frac{\upsilon_2' \cos\beta}{\bar{\upsilon}} = \frac{\upsilon_2' \cos\beta}{\sqrt{2ge^2h}}$$

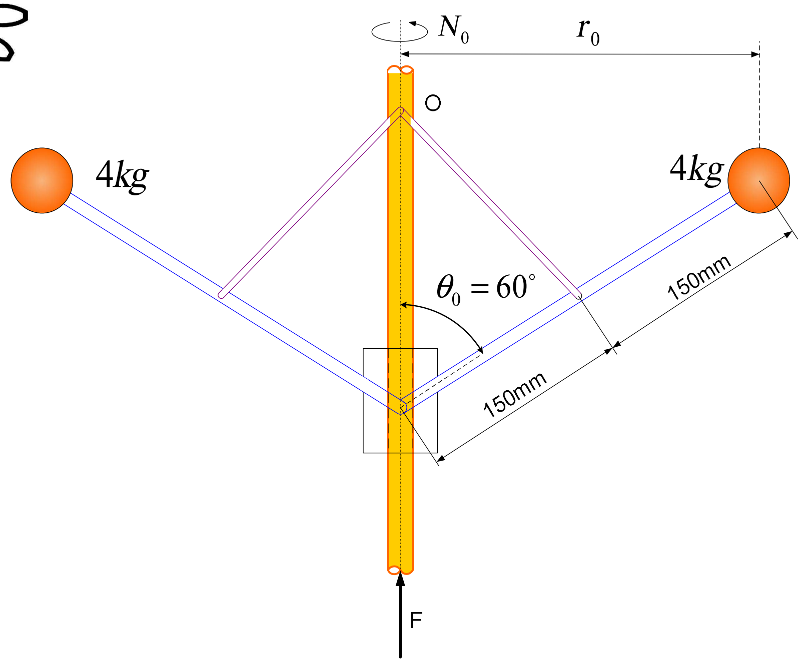
اما سرعت $\upsilon_2' \cos\beta$ می‌بایست گلوله را به ارتفاع h_2 بازگرداند، در نتیجه

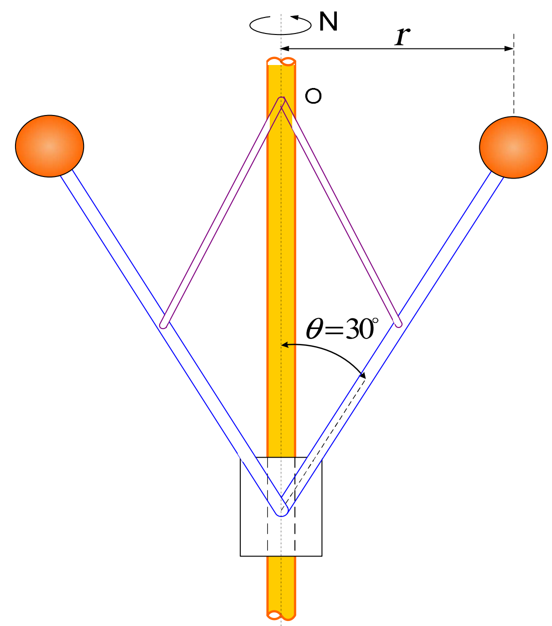
$$\upsilon_2' \cos\beta = \sqrt{2gh_2}$$

$$e = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2ge^2h}} \Rightarrow 2ge^4h = 2gh_2 \qquad e = \left(\frac{h_2}{h}\right)^{\frac{1}{4}}$$

مثال: هر یک از گلوله‌های ۴ کیلو گرمی روی چهار چوبی که جرم ناچیزی دارد نصب شده‌اند و آزادانه با سرعت $90 rev/Min$ حول امتداد قائم با زاویه $\theta_0=60°$ می‌چرخند. اگر F نیروی وارد بر میله کنترل قائم زیاد شود، بطوری که چهار چوب با زاویه $\theta_0=30°$ بچرخد، N سرعت چرخشی و تغیرات انرژی جنبشی را معین کنید. (نقطه O روی گیره در حال دوران ثابت است.)





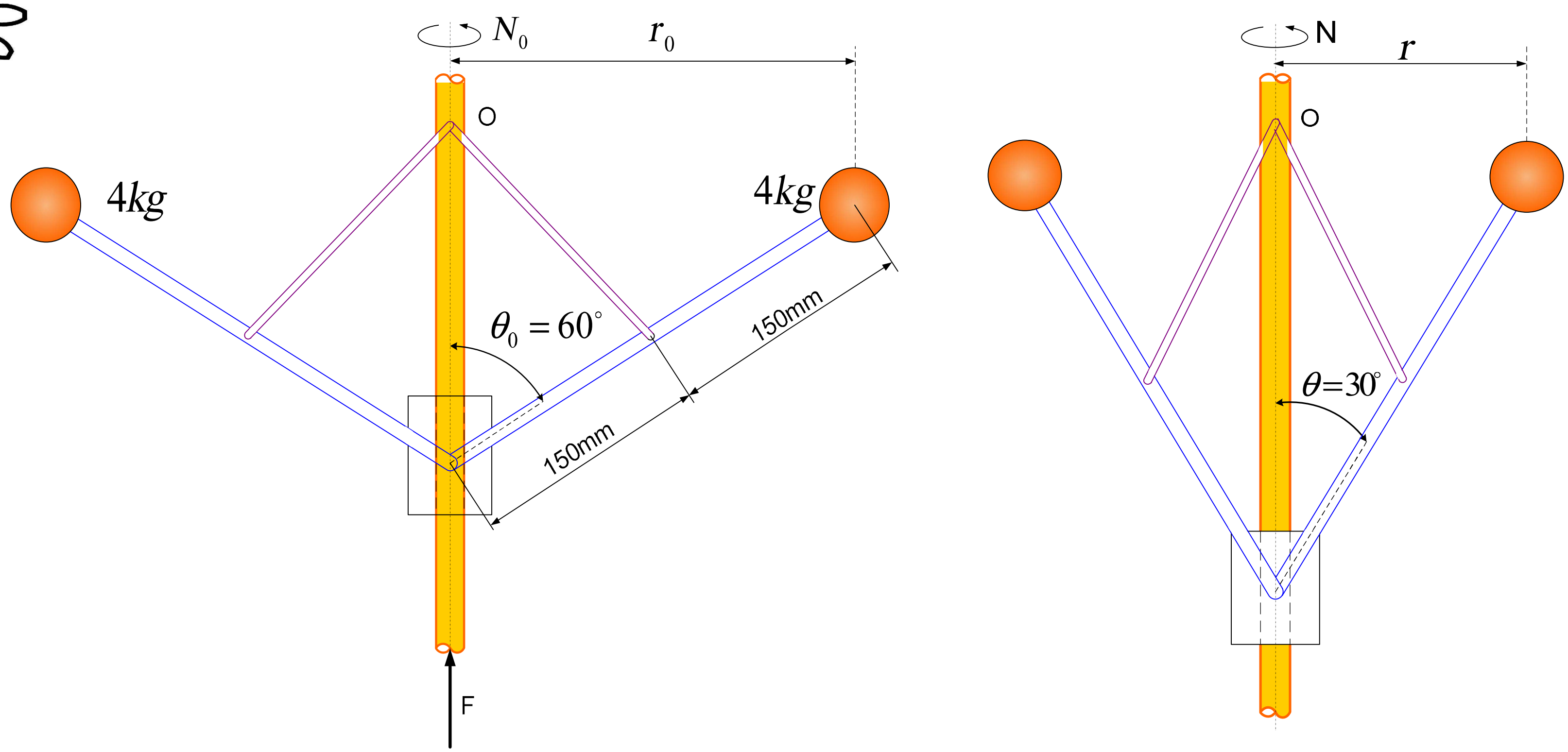


اندازه حرکت زاویه‌ای انتهایی = اندازه حرکت زاویه‌ای ابتدایی

$$mr_0\upsilon_0 + mr_0\upsilon_0 = mr\upsilon + mr\upsilon \qquad \Rightarrow r_0\upsilon_0 = r\upsilon$$

$$v_0 = r_0\omega_0 \qquad v = r\omega \quad \Rightarrow r_0^{\,2}\omega_0 = r^{\,2}\omega \qquad \omega_0 = 2\pi N_0 \qquad \omega = 2\pi N$$

$$\Rightarrow r_0^2 \times 2\pi N_0 = r^2 \times 2\pi N \quad \Rightarrow N = \frac{r_0^2 N_0}{r^2} \qquad N = \frac{(300\sin 60^\circ)^2}{(300\sin 30^\circ)^2} \times 90 = 270\frac{rev}{Min}$$

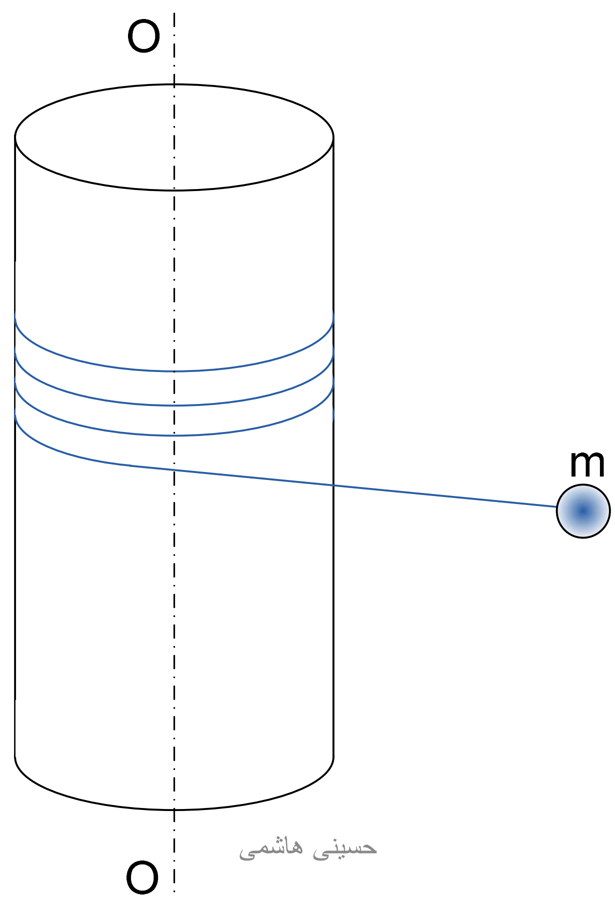


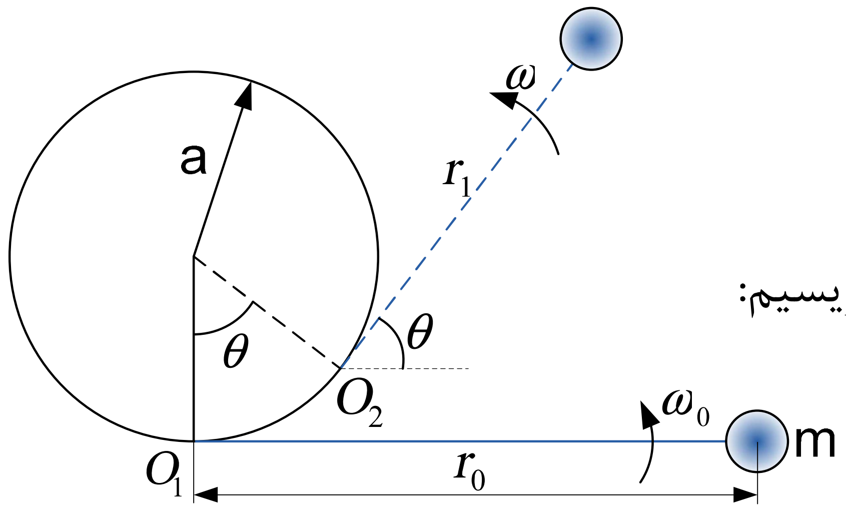
انرژی جنبشی زاویه‌ای اولیه $=\frac{1}{2}I\omega_0^2+\frac{1}{2}I\omega_0^2=I\omega_0^2=mr_0^2\omega_0^2=mr_0^2\times 4\pi^2 N_0^2$

انرژی جنبشی زاویه‌ای ثانویه $=\frac{1}{2}\tilde{I}\omega^2+\frac{1}{2}\tilde{I}\omega^2=\tilde{I}\omega^2=mr^2\omega^2=mr^2\times 4\pi^2 N^2$

$$\Delta T = 4m\pi^2(r^2N^2 - r_0^2N_0^2) = 47.92 \ \ J$$

مثال به ذره کوچکی به جرم m سرعت اولیه زیادی در صفحه افقی داده میشود و نخ متصل به آن دور محور قائم و ثابتی به شعاع a میپیچد. تمام حرکات در صفحه افقی صورت میگیرد. در صورتی که به هنگامی که فاصله ذره از نقطه تماس r_0 است سرعت زاویه ای نخ برابر ω_0 باشد، ω سرعت زاویه ای و T کشش نخ را پس از آنکه به اندازه زاویه θ بچرخد معین کنید.





در صورتی که r_1 فاصله ذره از نقطه تماس در وضعیت θ باشد از روی دیاگرام داریم

$$r_1 = r_0 - a\theta$$

حال با استفاده از اصل بقای انرژی می‌توانیم بنویسیم:

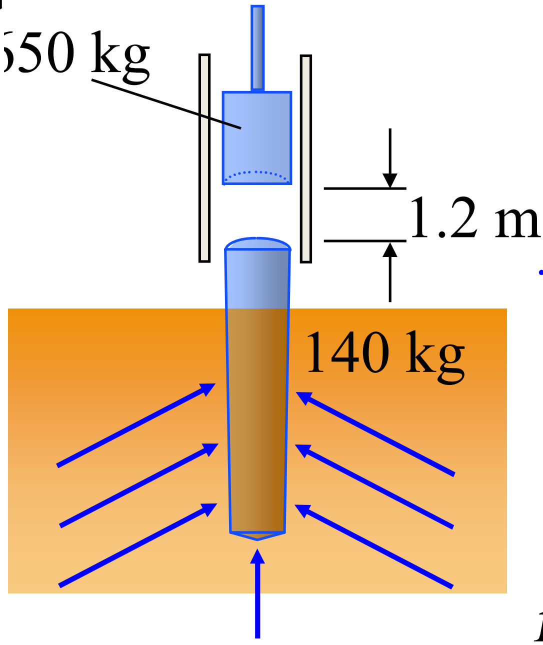
$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v_0 = v$$

$$v = r_1 \omega \qquad v_0 = r_0 \omega_0 \qquad r_1 \omega = r_0 \omega_0 \Rightarrow \omega = \frac{r_0 \omega_0}{r_1}$$

$$\omega = \frac{r_0 \omega_0}{r_0 - a\theta} \qquad T = m a_n = m \frac{v^2}{r_1} = m \frac{r_1^2 \omega^2}{r_1} = m\omega^2 r_1$$

$$T = m\omega^2 (r_0 - a\theta) = \frac{m\omega_0^2 r_0^2}{r_0 - a\theta}$$

مثال: یک ضربه زن 650 kg از ارتفاع 1.2 m برروی یک قطعه 140 kg سقوط میکند میزان فرو رفتگی قطعه در زمین بر اثر این سقوط 110 mm است. مطلوبست متوسط مقاومت زمین در مقابل این نفوذ. برخورد را کاملا پلاستیک فرض کنید.



m_h جرم ضربه زن m_p جرم قطعه y میزان نفوذ

$$v_h = \sqrt{2gh}$$ سرعت ضربه زن قبل از برخورد

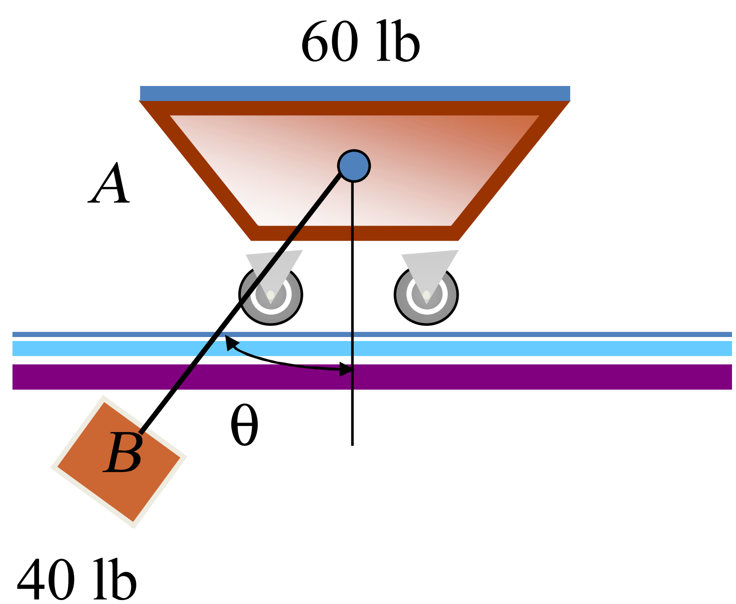
$$m_h v_h + m_p v_p = (m_h + m_p)\,v' \qquad v_p = 0$$

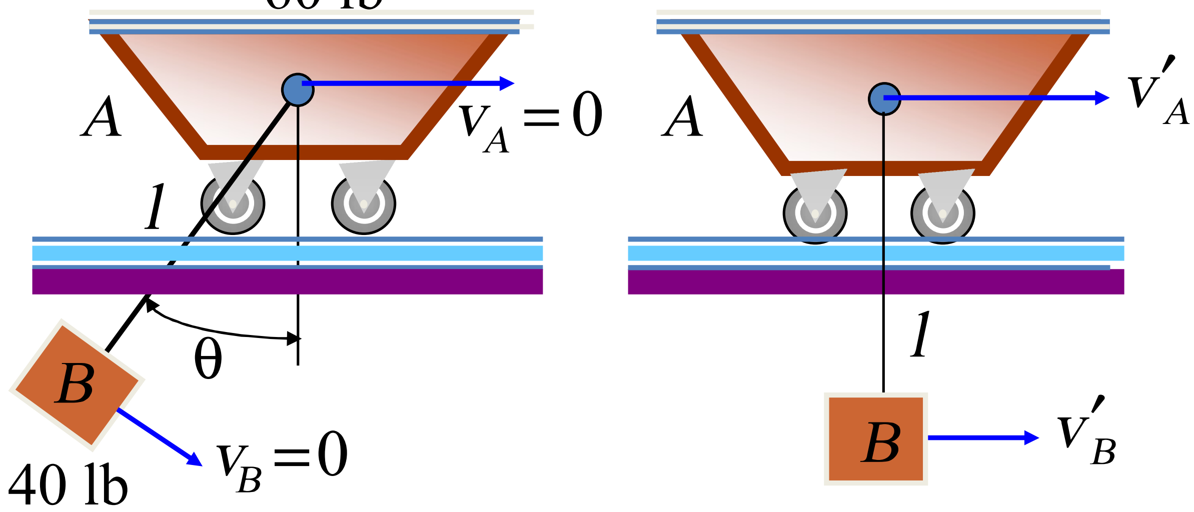
$$v' = \frac{m_h v_h}{(m_h + m_p)} = \frac{m_h}{(m_h + m_p)}\sqrt{2gh}$$ سرعت مجموعه بعد از برخورد

$$\Delta T = W \Rightarrow T_2 - T_1 = \left[(m_h + m_p)\,g - R\right] y \qquad T_2 = 0$$

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_h + m_p)\,v'^2 \qquad R = \frac{(m_h + m_p)(v'^2 + 2gy)}{2y} = 66243\,N$$

مثال: یک وزنه 40-lb مطابق شکل از نخی بطول 6-ft که به ارابه 60-lb متصل است آویزان شده است. چنانچه وزنه از وضعیت $\theta = 35^o$ از حالت سکون رها شود سرعت ارابه و وزنه را در موقعیت $\theta = 0$ پیدا کنید.





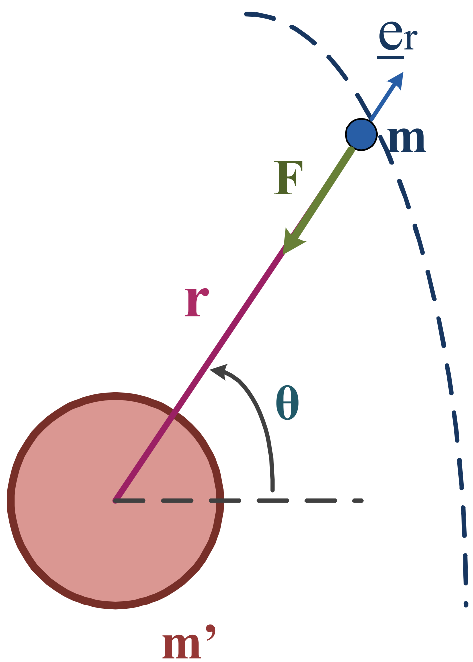
$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B = 0 \qquad v'_B = -\frac{m_A}{m_B} v'_A$$

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \qquad T_1 = 0 \qquad U_2 = 0 \qquad \Rightarrow U_1 = T_2$$

$$m_B g l(1-\cos\theta) = \frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B v'^2_B = \frac{1}{2} m_A \left(1+\frac{m_A}{m_B}\right) v'^2_A$$

$$v'^2_A = \frac{2 m_B g l(1-\cos\theta)}{m_A\left(1+\frac{m_A}{m_B}\right)} \qquad v'_A = 4.32\ ft/s \qquad v'_B = 6.48\ ft/s$$

۷- حرکت تحت تاثیر نیروی مرکزی



۷-۱ معادله مسیر

$$F = k\frac{mm'}{r^2}$$

$$\underline{F} = -F\underline{e}_r = -k\frac{mm'}{r^2}\underline{e}_r$$

$$\sum \underline{F} = m\underline{a} \rightarrow \quad \sum F_r \underline{e}_r + \sum F_\theta \underline{e}_\theta = m(a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta)$$

در امتداد θ هیچ نیرویی به ذره وارد نمی شود.

$$F_\theta = 0$$

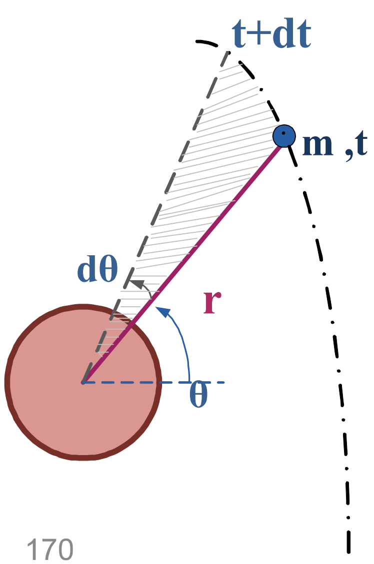
$$-k\frac{mm'}{r^2}\underline{e}_r + 0 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\underline{e}_\theta$$

$$\begin{cases} -\dfrac{kmm'}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \rightarrow \\ 0 = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \rightarrow \end{cases} \begin{cases} -\dfrac{km'}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 0 = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \rightarrow r^2\dot{\theta} = cte = h$$

نتیجه: در حرکت تحت تأثیر نیروی مرکزی همواره حاصلضرب $r^2\dot{\theta}$ مقدار ثابتی است .



$$dA = \frac{1}{2} r(rd\theta) = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2\dot{\theta} = cte = \frac{1}{2} h$$

$\dot{A} =$ سرعت سطحی یا سرعتی که با آن سرعت سطح جاروب می شود. (نرخ زمانی جاروب شدن سطح به وسیله ی بردار شعاعی)

نتیجه: در حرکت تحت تأثیر نیروی مرکزی نرخ زمانی جاروب شدن سطح به وسیله ی بردار شعاعی (یعنی سرعتی که با آن سرعت بردار شعاعی سطح را جاروب می کند) همواره ثابت است.

$$-\frac{km'}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$r = \frac{1}{u} \rightarrow \dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} \qquad (r^2\dot{\theta} = h \rightarrow \frac{\dot{\theta}}{u^2} = h)$$

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{h\dot{u}}{\dot{\theta}} = -h\frac{du/dt}{d\theta/dt} = -h\frac{du}{d\theta}$$

$$\boxed{\dot{r} = -h\frac{du}{d\theta}}$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\dot{r} = -h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right) = -h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\times\frac{d\theta}{d\theta} = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -h\dot{\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$\boxed{\ddot{r} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}}$$

$$-\frac{km'}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad r = \frac{1}{u} \qquad \ddot{r} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$-km'u^2 = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u}h^2u^4 \quad \rightarrow km' = h^2\frac{d^2u}{d\theta^2} + h^2u$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{km'}{h^2} \qquad u = c\cos(\theta+\delta) + \frac{km'}{h^2}$$

به هنگامی که $\theta=0$ فرض می کنیم r کمترین مقدار خود را داشته باشد.

$$r_{\min} \rightarrow u_{\max} \rightarrow \cos(\theta+\delta)\big|_{\theta=0} = 1$$

$$\cos\delta = 1 \rightarrow \delta = 0$$

$$\boxed{u = \frac{1}{r} = c\cos\theta + \frac{km'}{h^2}}$$

معادله مسیر ماهواره به هنگامی که تحت تأثیر نیروی مرکزی قرار گرفته است در دستگاه مختصات قطبی (r,θ)

$$\boxed{u=\frac{1}{r}=c\cos\theta+\frac{km'}{h^2}}$$

$$e=\frac{ch^2}{km'}=\frac{ch^2}{gR^2} \qquad d=\frac{1}{c}$$

$$\frac{km'}{h^2}=\frac{1}{ed}$$

$$\boxed{u=\frac{1}{r}=\frac{\cos\theta}{d}+\frac{1}{ed}}$$

If e=0 مسیر دایره

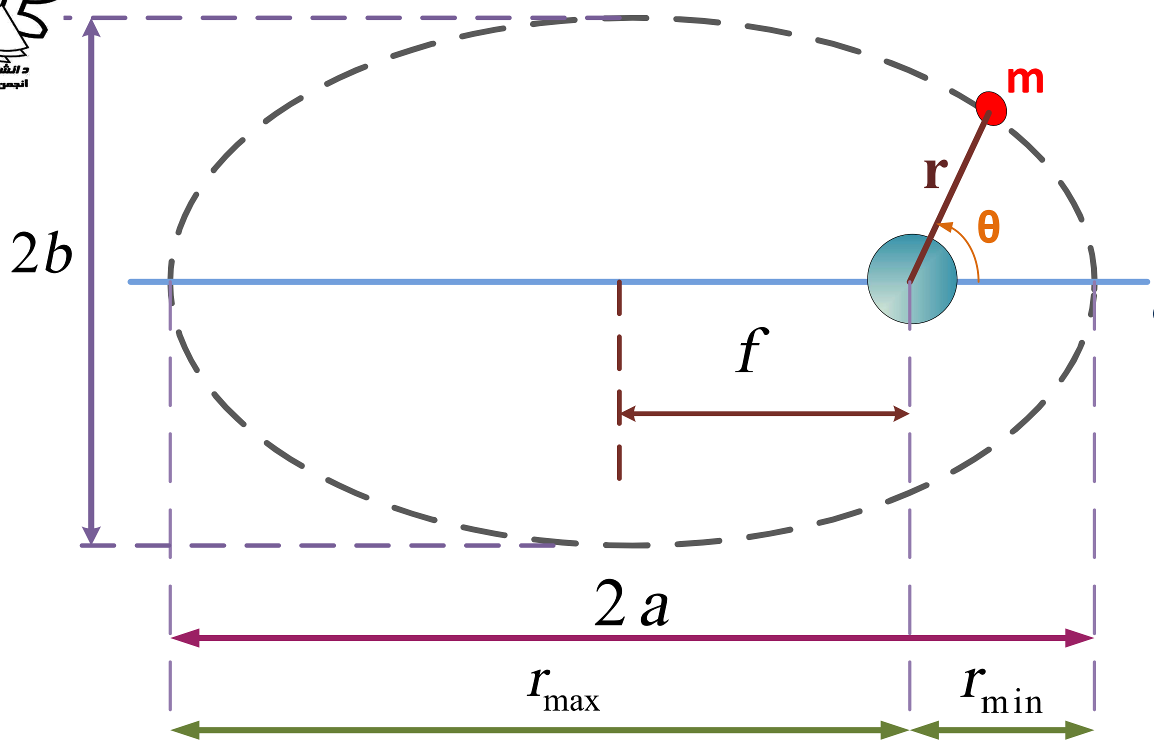
e<1 مسیر بیضی

e=1 مسیر سهمی

e>1 مسیر هذلولی

$$If\ e=0 \quad \rightarrow \quad c=0 \quad \rightarrow \quad u=\frac{1}{r}=\frac{km'}{h^2} \quad \rightarrow \quad r=cte$$

۷-۲ مدار بیضی



a: نصف قطر بزرگتر مدار بیضی

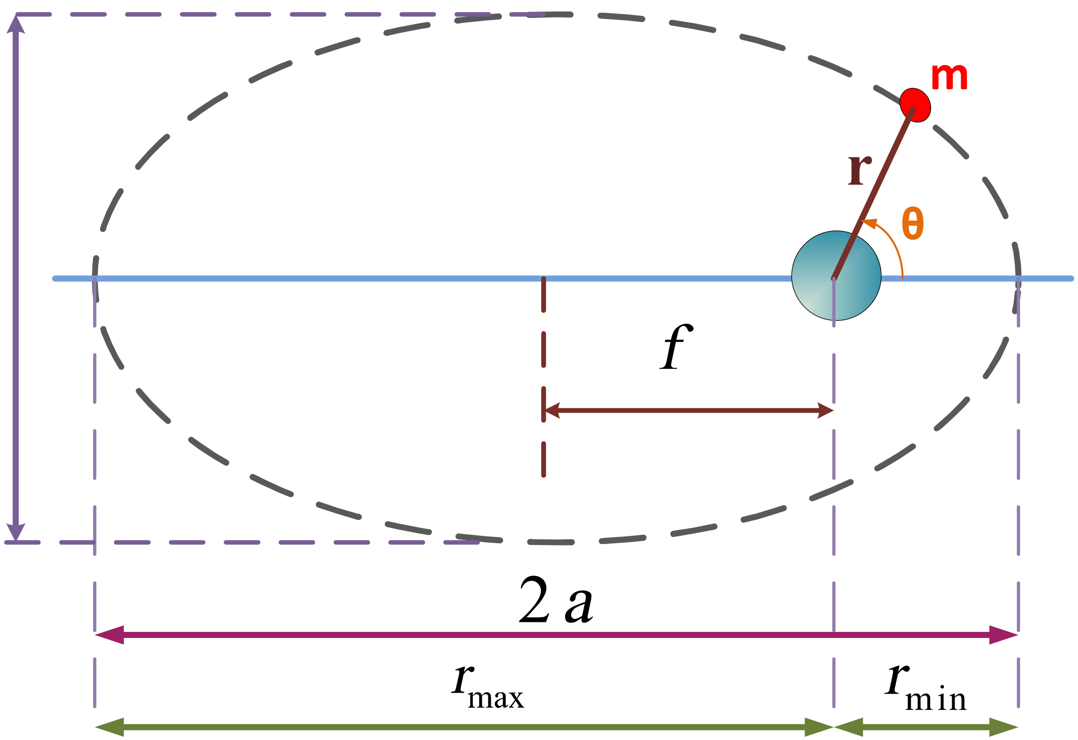
b: نصف قطر کوچکتر مدار بیضی

$$e = \frac{f}{a} < 1$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{d} + \frac{1}{ed}$$

$$\theta = 0 \rightarrow \frac{1}{r_{min}} = \frac{1}{d} + \frac{1}{ed} = \frac{1+e}{ed} \rightarrow r_{min} = \frac{ed}{1+e}$$

$$\theta = \pi \rightarrow \frac{1}{r_{max}} = -\frac{1}{d} + \frac{1}{ed} = \frac{1-e}{ed} \rightarrow r_{max} = \frac{ed}{1-e}$$

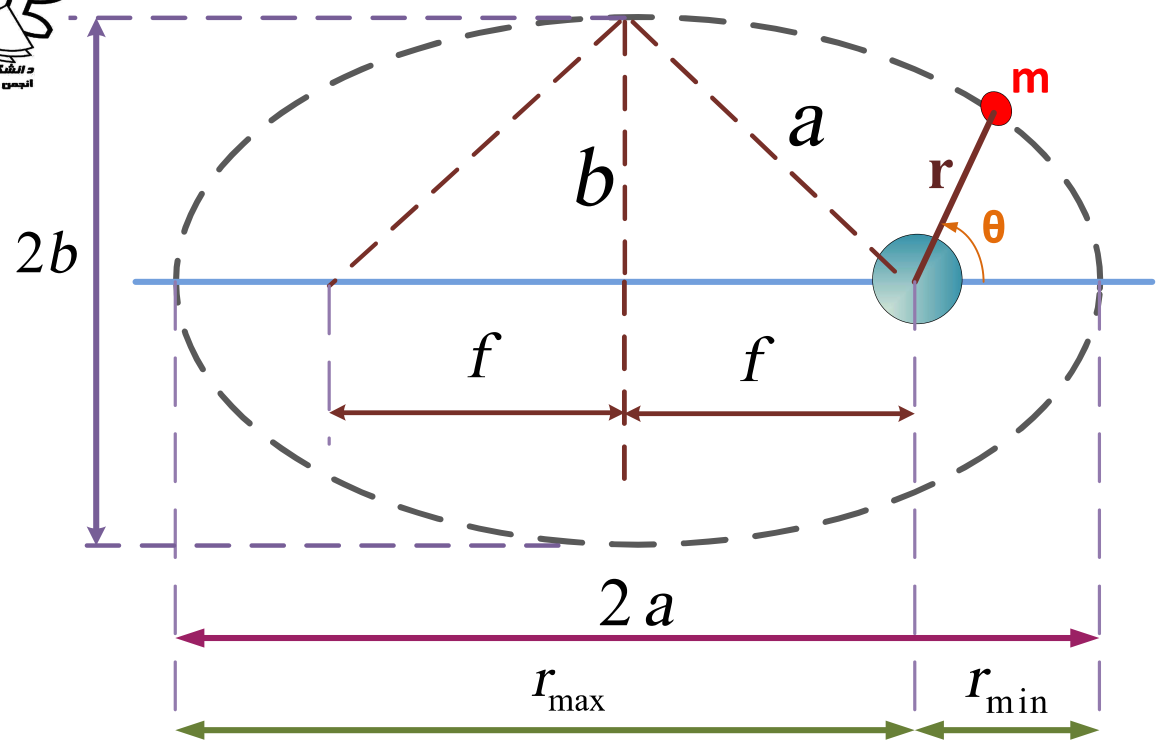


$$r_{min} = \frac{ed}{1+e}$$

$$r_{max} = \frac{ed}{1-e}$$

$$2a = r_{min} + r_{max} = \frac{ed}{1+e} + \frac{ed}{1-e} = \frac{2ed}{1-e^2} \qquad a = \frac{ed}{1-e^2}$$

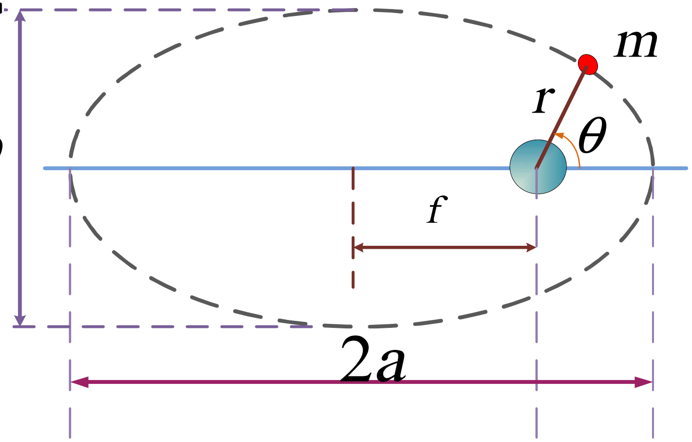
$$a = \frac{ed}{1-e^2} = \frac{ed}{(1-e)(1+e)} \rightarrow \begin{cases} r_{min} = a(1-e) \\ r_{max} = a(1+e) \end{cases}$$



$$e = \frac{f}{a}$$

$$a^2 = b^2 + f^2 = b^2 + a^2 e^2 \quad \rightarrow b = a\sqrt{1 - e^2}$$

۷-۳ دوره تناوب درمدار بیضی



$$\tau = \frac{\pi ab}{\dot{A}} \qquad \dot{A} = \frac{1}{2}h \qquad \tau = \frac{2\pi ab}{h}$$

$$a = \frac{ed}{1-e^2} \qquad b = a\sqrt{1-e^2} \qquad e = \frac{ch^2}{km'} = \frac{ch^2}{gR^2}$$

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2} = \frac{4\pi^2 a^4 (1-e^2)}{h^2} = \frac{4\pi^2 a^4 c(1-e^2)}{egR^2} \qquad c = \frac{1}{d}$$

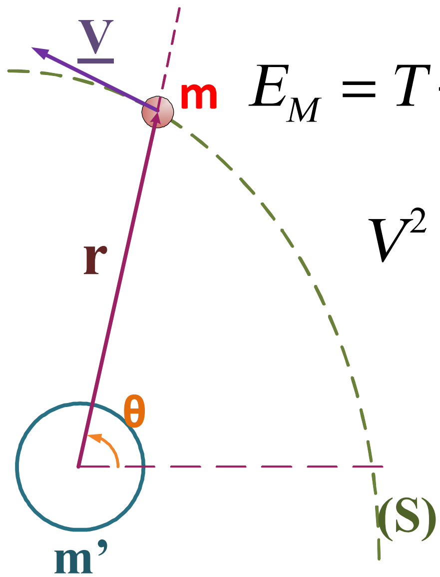
$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1-e^2)}{edgR^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{gR^2} \rightarrow \qquad \boxed{\tau = \frac{2\pi a}{R}\sqrt{\frac{a}{g}}}$$

در حرکت تحت تأثیر نیروی مرکزی به هنگامی که مدار بیضی است مجذور دوره تناوب مدار با توان سوم نصف قطر بزرگ تر بیضی متناسب است.

حسینی هاشمی

مسایل

مثال: رابطه ای برای انرژی کل مکانیکی بر حسب خروج از مرکز بیابید.



$$E_M = T + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mgR^2}{r} \qquad \underline{V} = V_r\underline{e}_r + V_\theta\underline{e}_\theta = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta$$

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \qquad E_M = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{mgR^2}{r} \rightarrow$$

$$\frac{2E_M}{m} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - \frac{2gR^2}{r} = cte$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{d} + \frac{1}{ed} = \frac{e\cos\theta + 1}{ed} \rightarrow r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

$$\dot{r} = \frac{-(-\dot{\theta}e\sin\theta)ed}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{ed(e\sin\theta)\dot{\theta}}{(1+e\cos\theta)^2}$$

انرژی کل مکانیکی بازای هر مقداردلخواه θ ثابت است

$$\theta = 0 \qquad \dot{r} = 0 \quad , \quad r = \frac{ed}{1+e} \qquad \frac{2E_M}{m} = r^2\dot{\theta}^2 - \frac{2gR^2}{r}$$

$$\frac{2E_M}{m} = r^2\dot{\theta}^2 - \frac{2gR^2}{r} \qquad r^2\dot{\theta} = cte = h$$

$$\frac{2E_M}{m} = r^2\frac{h^2}{r^4} - \frac{2gR^2}{r} = \frac{h^2}{r^2} - \frac{2gR^2}{r} \qquad e = \frac{ch^2}{gR^2} = \frac{h^2}{dgR^2}$$

$$\frac{2E_M}{m} = \frac{edgR^2}{r^2} - \frac{2gR^2}{r} \qquad r = \frac{ed}{1+e}$$

$$\frac{2E_M}{m} = \frac{gR^2(1+e)^2}{ed} - \frac{2gR^2(1+e)}{ed} = \frac{gR^2(e^2-1)}{ed}$$

$$\frac{2E_M}{m} = \frac{g^2R^4(e^2-1)}{h^2} \rightarrow \boxed{E_M = \frac{mg^2R^4(e^2-1)}{2h^2}}$$

$a = \dfrac{ed}{1-e^2}$ برای مدار بیضی $E_M = -\dfrac{mg^2R^4ed}{2ah^2} = -\dfrac{mg^2R^4ed}{2aedgR^2} \rightarrow$

$$\boxed{E_M = -\frac{mgR^2}{2a}}$$

علامت منفی نشان دهنده این است که مقدار انرژی پتانسیل در مدار بیضی از مقدار انرژی جنبشی بزرگتر است.

$$E_M = \frac{mg^2 R^4 (e^2 - 1)}{2h^2}$$

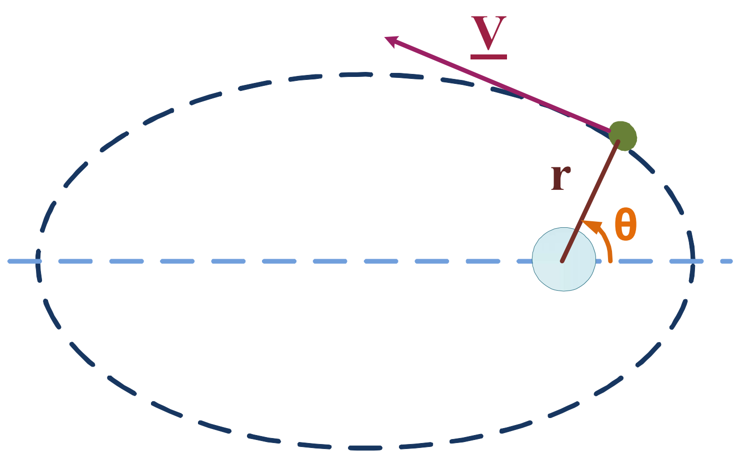
$e = 0 \quad \rightarrow E_M < 0$ مدار دایره

$e < 1 \quad \rightarrow E_M < 0$ مدار بیضی

$e = 1 \quad \rightarrow E_M = 0$ مدار سهمی

$e > 1 \quad \rightarrow E_M > 0$ مدار هذلولی

مثال: رابطه ای برای سرعت ماهواره در مدار بیضی تعیین کرده مقادیر سرعت ماهواره را در r_{max}, r_{min} بیابید.



$$E_M = T + U = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{mgR^2}{r}$$

$$\frac{1}{2} m V^2 - mg\frac{R^2}{r} = -\frac{mgR^2}{2a}$$

$$V^2 = \frac{2gR^2}{r} - \frac{gR^2}{a} = gR^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = 2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)$$

$$V^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right) \qquad r_{\min} = a(1-e) \qquad r_{\max} = a(1+e)$$

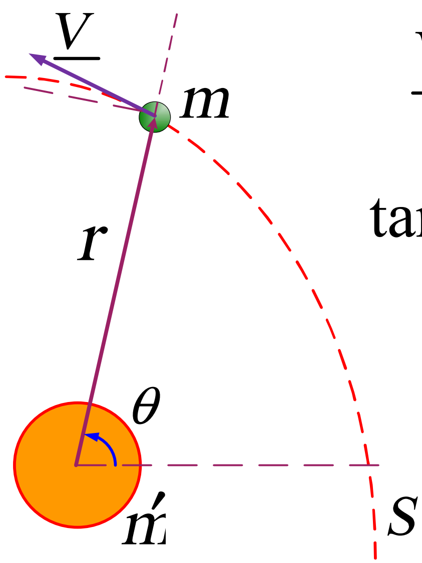
$$V^2\Big|_{r=r_{\min}} = 2gR^2\left[\frac{1}{a(1-e)}-\frac{1}{2a}\right] = \frac{2gR^2}{a}\times\frac{1+e}{2(1-e)} = \frac{gR^2}{a}\times\frac{1+e}{1-e}$$

$$V\Big|_{r=r_{\min}} = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{r_{\max}}{r_{\min}}}$$

$$V^2\Big|_{r=r_{\max}} = 2gR^2\left[\frac{1}{a(1+e)}-\frac{1}{2a}\right] = \frac{2gR^2}{a}\times\frac{1-e}{2(1+e)} = \frac{gR^2}{a}\times\frac{1-e}{1+e}$$

$$V\Big|_{r=r_{\max}} = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{r_{\min}}{r_{\max}}}$$

مثال: برای یک ماهواره که روی مداری با خروج از مرکز e حرکت می کند زاویه بـردار سرعت را نسبت به جهت θ بدست آورید.



$$\underline{V} = V_r \underline{e}_r + V_\theta \underline{e}_\theta \qquad V_r = \dot{r} \qquad V_\theta = r\dot{\theta}$$

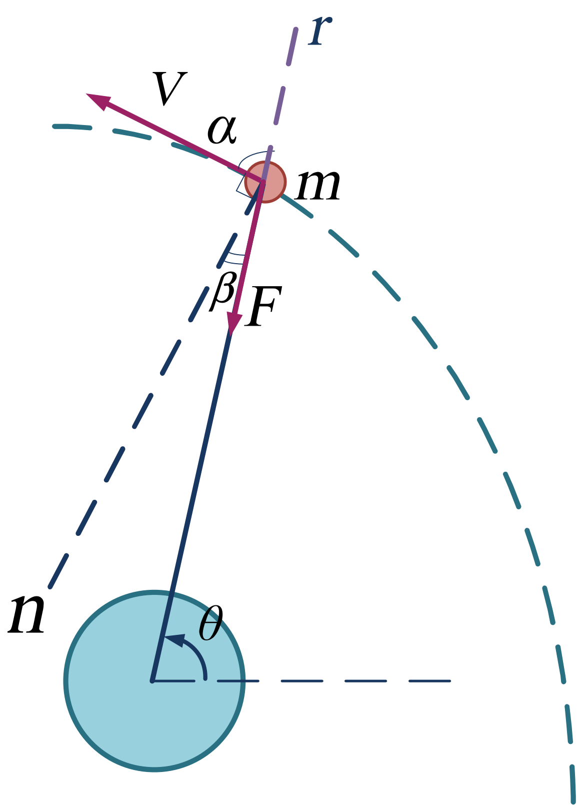
$$\tan\beta = \frac{V_r}{V_\theta} = \frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}} \qquad \frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{d} + \frac{1}{ed} = \frac{e\cos\theta + 1}{ed}$$

$$r = \frac{ed}{e\cos\theta + 1} \qquad \dot{r} = \frac{e\dot{\theta}\sin\theta \times ed}{\left(e\cos\theta + 1\right)^2}$$

$$\tan\beta = \frac{e\dot{\theta}\sin\theta\left(ed\right)}{\left(1 + e\cos\theta\right)^2} \times \frac{\left(1 + e\cos\theta\right)}{ed \times \dot{\theta}} = \frac{e\sin\theta}{1 + e\cos\theta}$$

$$\boxed{\beta = \tan^{-1}\left(\frac{e\sin\theta}{1 + e\cos\theta}\right)}$$

مثال: بردار سرعت ماهواره ای که به دور زمین در مداری در حال گردش است در یک لحظه معین با جهت بردار شعاعی r زاویه ی α می سازد مطلوبست شعاع انحنای مسیر برای این موقعیت ماهواره.



$$\beta = \pi / 2 - \alpha$$

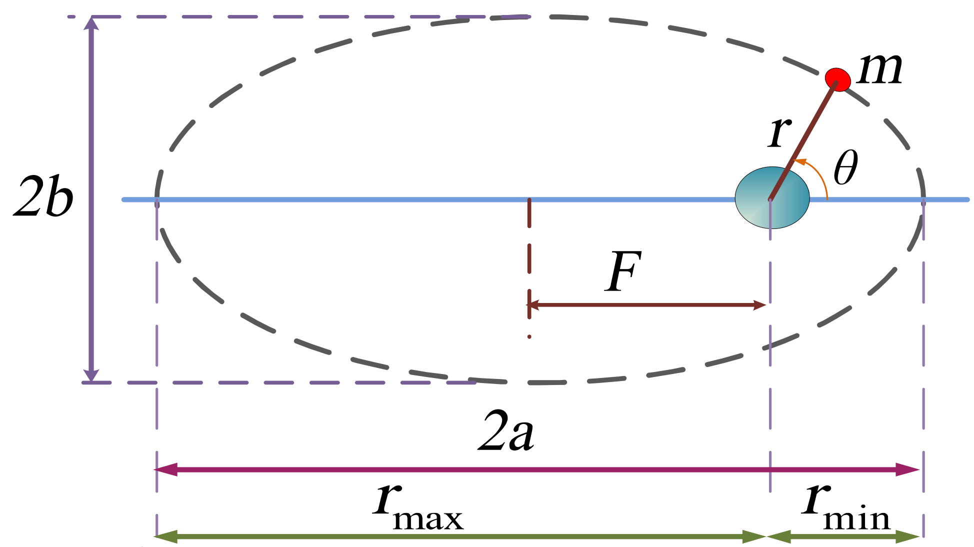
$$F = \frac{mgR^2}{r^2}$$

$$\sum F_n = F\cos\beta = \frac{mgR^2}{r^2}\sin\alpha$$

$$\sum F_n = ma_n \quad \Rightarrow \quad \frac{mgR^2}{r^2}\sin\alpha = m\frac{V^2}{\rho}$$

$$\boxed{\rho = \frac{V^2 R^2}{gR^2 \sin\alpha}}$$

مثال: برای یک ماهواره که در مدار بیضی شکل حرکت می کند فاصله ی شعاعی r را (فاصله ی مرکز زمین تا ماهواره) برای وقتی که جابجایی زاویه ای برابر 90درجه است بر حسب r_{min} ،r_{max} و نصف قطر بزرگتر مدار بیضی ارائه کنید



$$\frac{1}{r}=\frac{\cos\theta}{d}+\frac{1}{ed}$$

$$\theta=\pi/2 \rightarrow \left.\frac{1}{r}\right|_{\theta=\pi/2}=\frac{1}{ed}$$

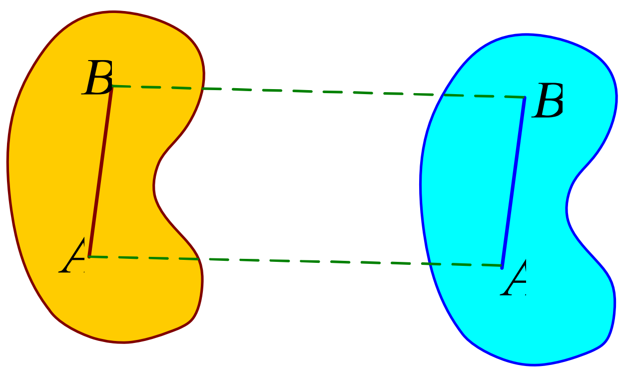
$$a=\frac{ed}{1-e^2} \rightarrow ed=a\left(1-e^2\right)$$

$$\left.r\right|_{\theta=\pi/2}=a\left(1-e^2\right) \quad r_{max}=a\left(1+e\right) \quad r_{min}=a\left(1-e\right)$$

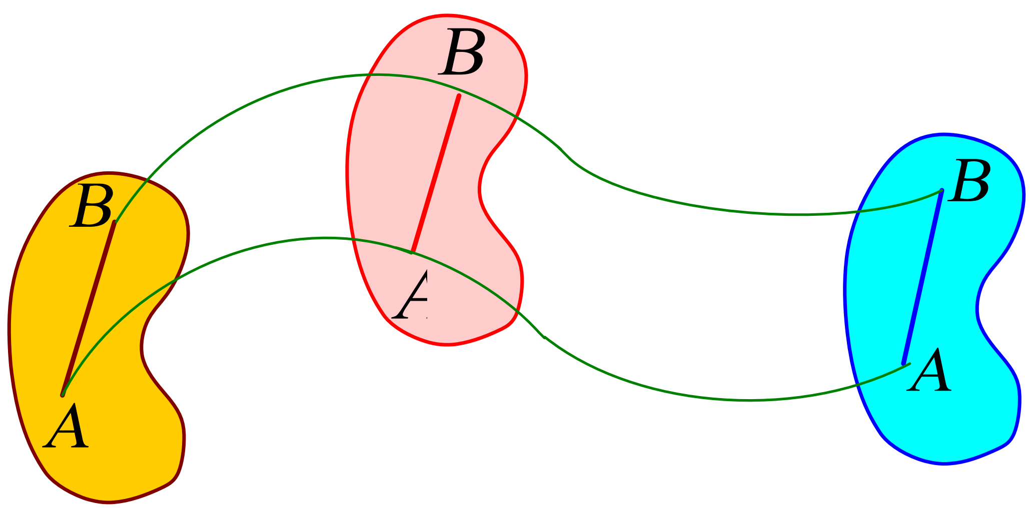
$$\boxed{r=\frac{r_{min}\times r_{max}}{a}}$$

۸- سینماتیک جسم صلب

۸-۱ حرکت انتقالی، دورانی و ترکیبی

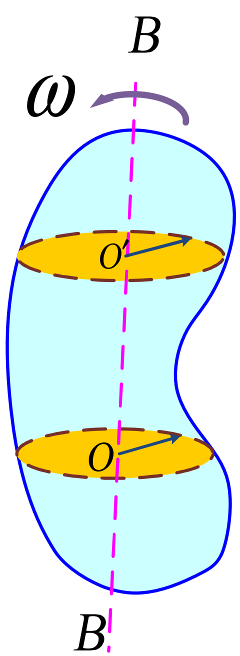


انتقالی مستقیم الخط



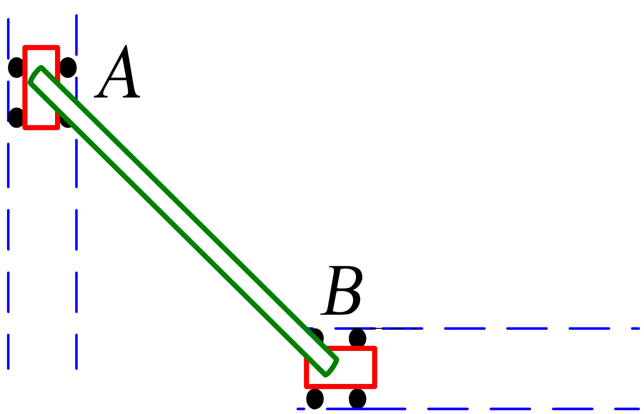
انتقالی منحنی الخط

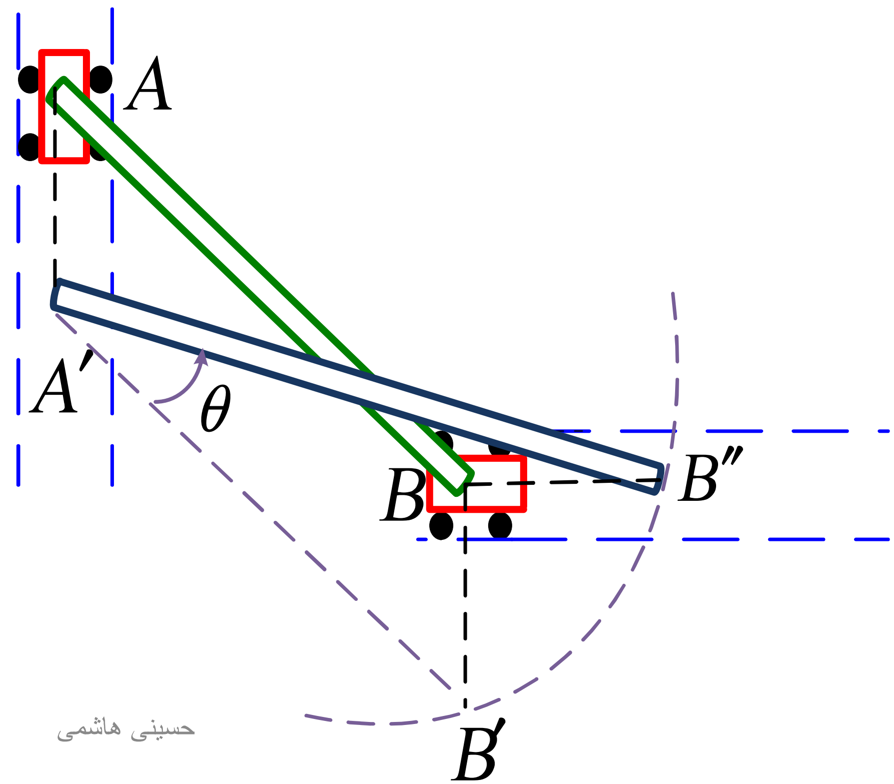
۲- حرکت دورانی حول محور ثابت



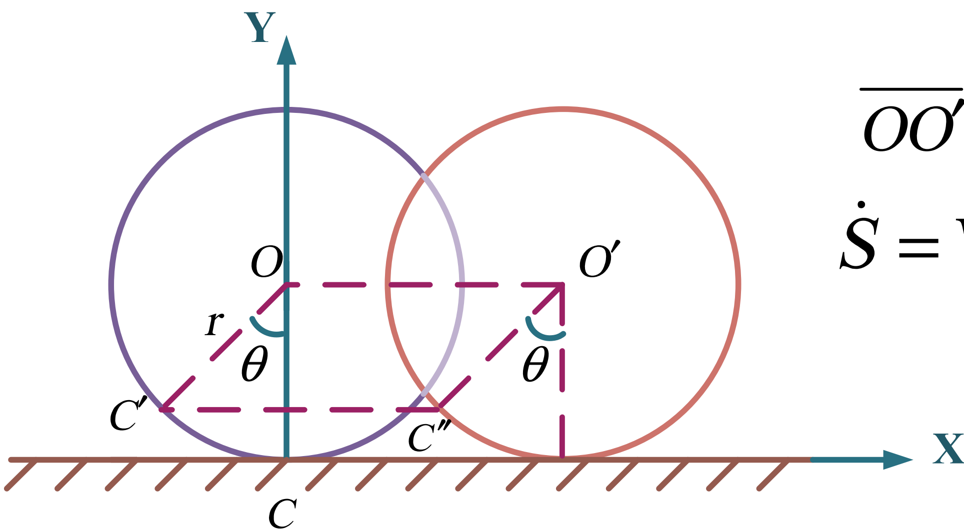
نقاطی از جسم که روی صفحات موازی قرار دارند دوایر هم محور با محور ثابت ایجاد می کنند.

۳- حرکت توام (انتقالی و دورانی) یا حرکت ترکیبی





دیسکی را به شعاع r در نظر می گیریم که حرکت غلتش بدون لغزش دارد.



$$\overline{OO'} = S = r\theta$$

$$\dot{S} = V = r\dot{\theta} = r\omega$$

$$\ddot{S} = \dot{V} = a = r\ddot{\theta} = r\dot{\omega} = r\alpha$$

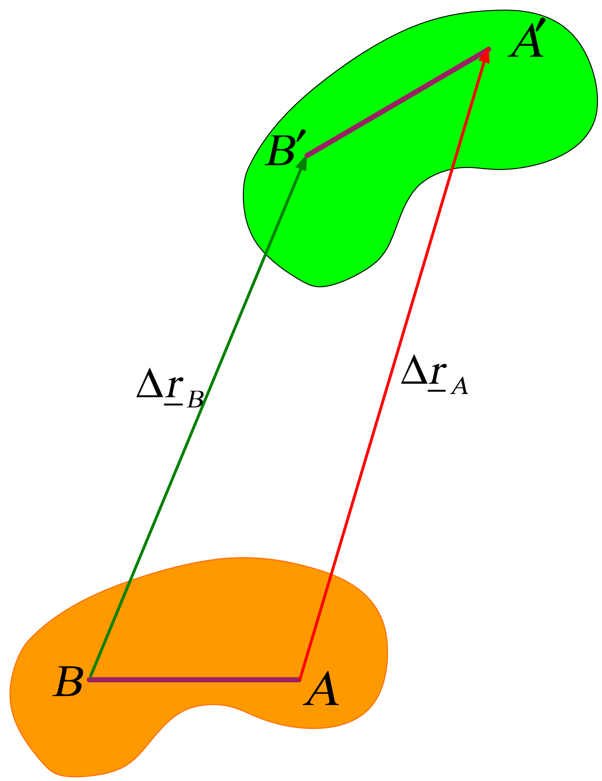
$$x = S - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta) \qquad y = r(1-\cos\theta)$$

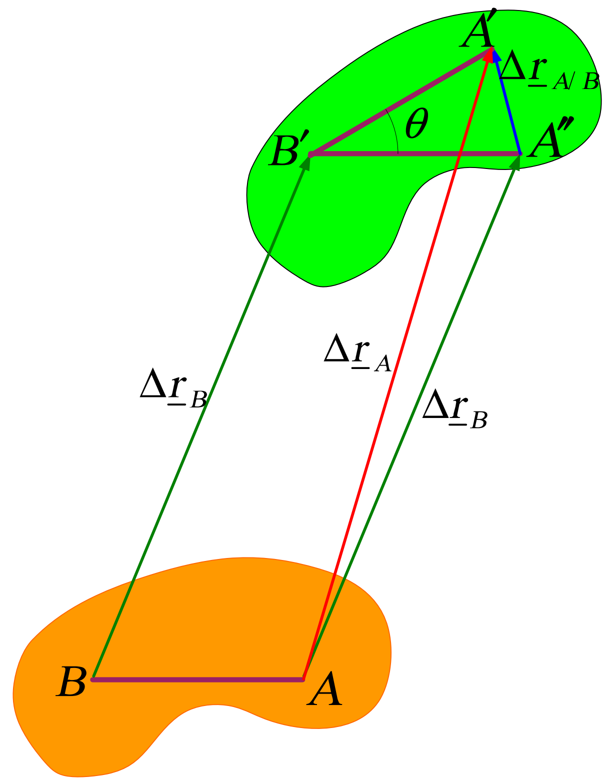
$$\dot{x} = r\left(\dot{\theta} - \dot{\theta}\cos\theta\right) = r\dot{\theta}\left(1-\cos\theta\right) = r\omega\left(1-\cos\theta\right)$$

$$\dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta = r\omega\sin\theta$$

$$\underline{V} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j} = r\omega\left(1-\cos\theta\right)\underline{i} + r\omega\sin\theta\,\underline{j}$$

۲-۸ حرکت نسبی محورهای مقایسه انتقالی

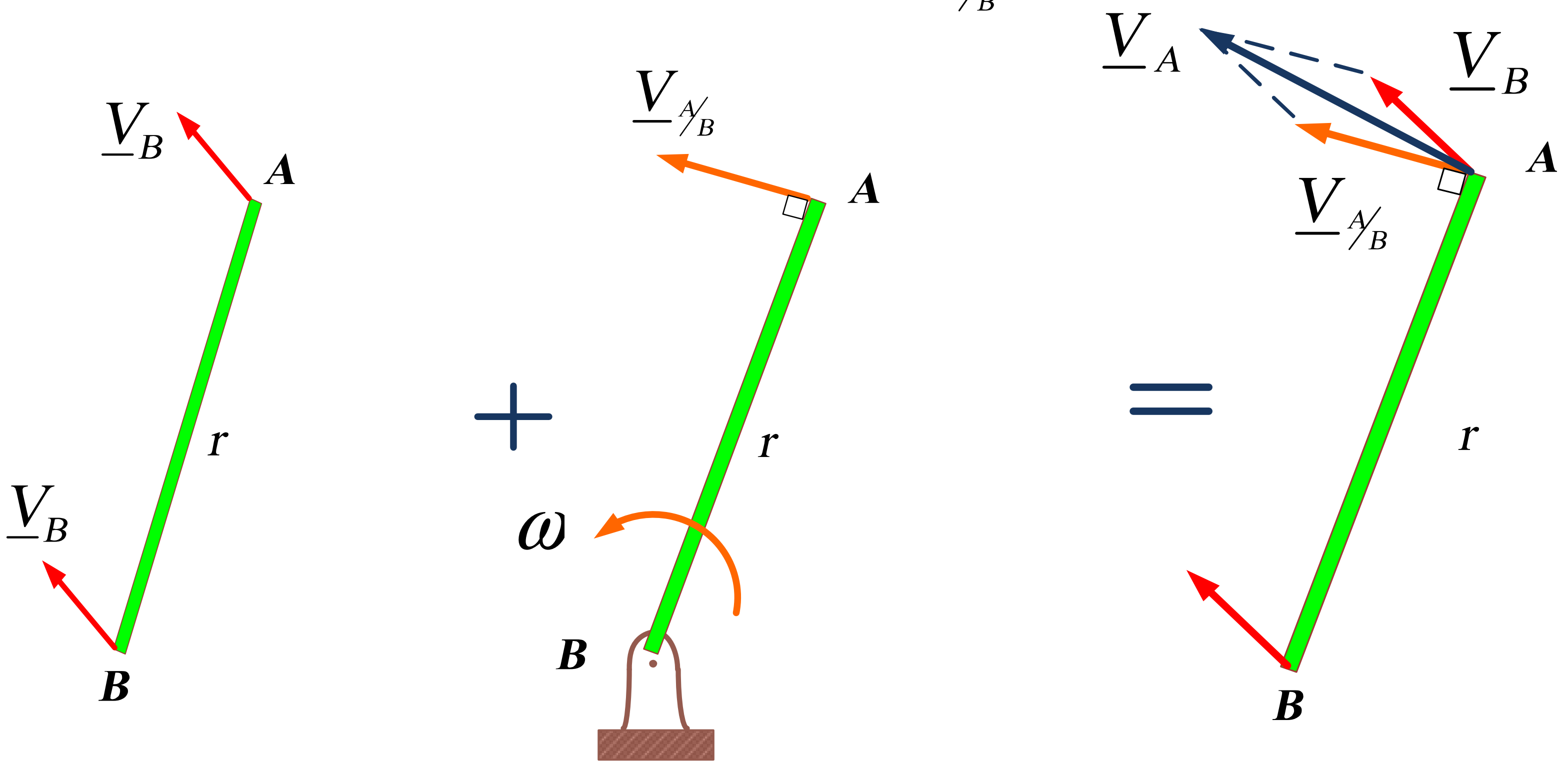




$$\Delta \underline{r}_A = \Delta \underline{r}_B + \Delta \underline{r}_{A/B}$$

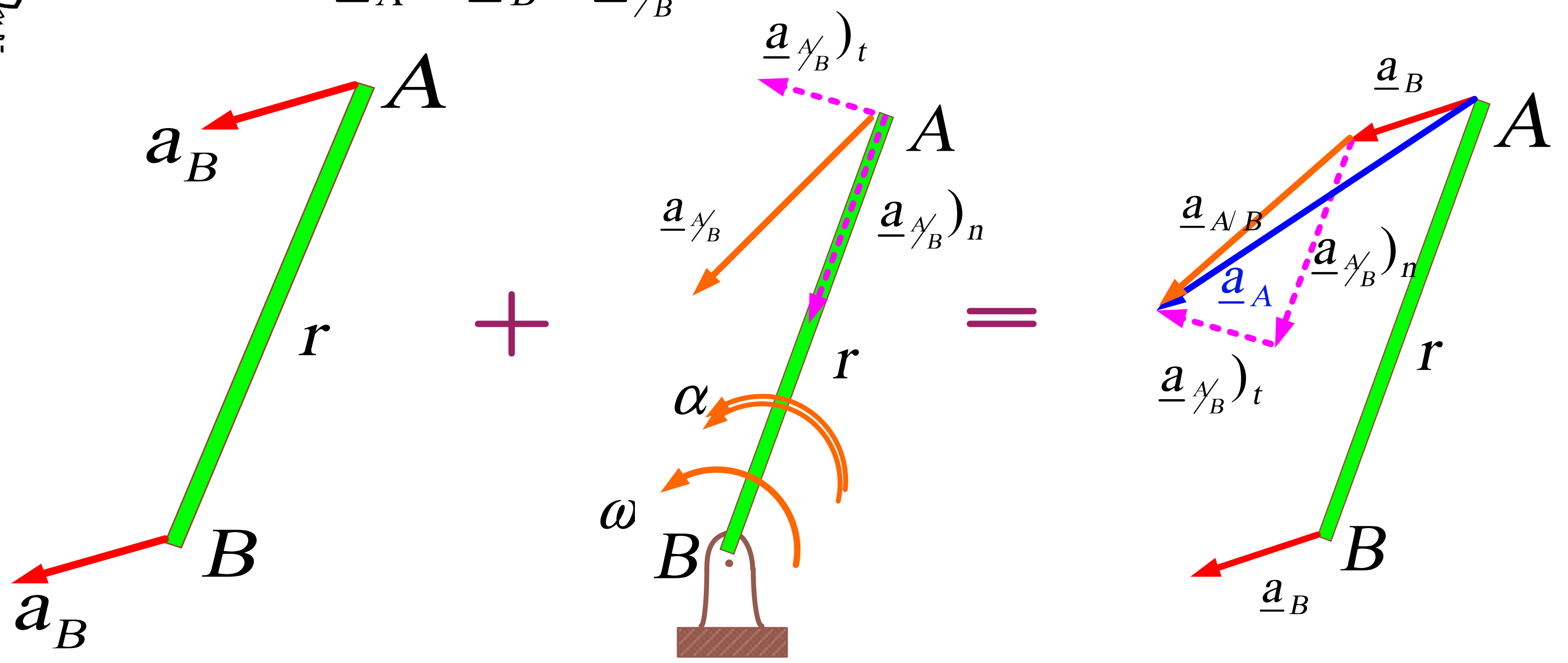
$$\frac{\Delta \underline{r}_A}{\Delta t} = \frac{\Delta \underline{r}_B}{\Delta t} + \frac{\Delta \underline{r}_{A/B}}{\Delta t} \qquad \underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{V}_{A/B} \qquad \frac{d\underline{V}_A}{dt} = \frac{d\underline{V}_B}{dt} + \frac{d\underline{V}_{A/B}}{dt}$$

$$\underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{A/B} \qquad \underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{V}_{A/B}$$



$$V_{A/B} = r\omega \qquad \underline{V}_{A/B} = \underline{\omega}\times\underline{r} \qquad \underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{V}_{A/B} = \underline{V}_B + \underline{\omega}\times$$

$$\underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{A/B}$$



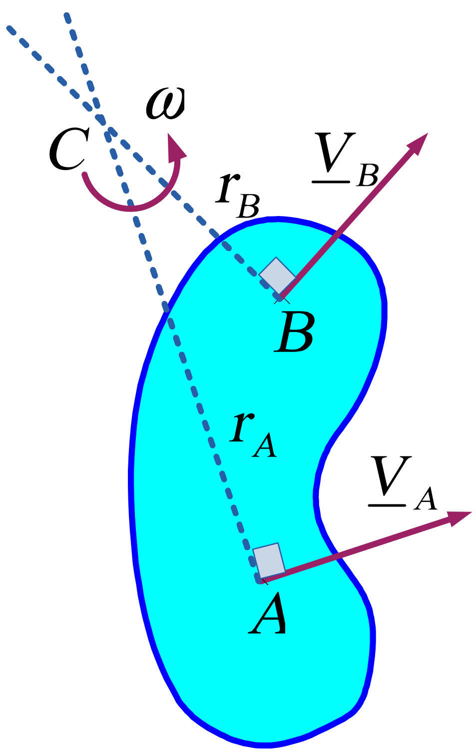
$$\underline{a}_{A/B} = \underline{a}_{A/B}\big)_n + \underline{a}_{A/B}\big)_t \qquad a_{A/B}\big)_t = r\alpha \qquad \underline{a}_{A/B}\big)_t = \underline{\alpha}\times\underline{r}$$

$$a_{A/B}\big)_n = r\omega^2 \qquad \underline{a}_{A/B}\big)_n = \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) \qquad \underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{A/B} = \underline{a}_B + \underline{a}_{A/B}\big)_n + \underline{a}_{A/B}\big)_t$$

$$\underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) + \underline{\alpha}\times\underline{r}$$

۸-۳ مرکز آنی دوران

یک نقطه آنی که جسم در هر لحظه حول آن دوران می کند به نام مرکز آنی دوران نامیده می شود.



نقطه C مرکز آنی دوران است

$$V_A = r_A\omega \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{V_A}{r_A}$$

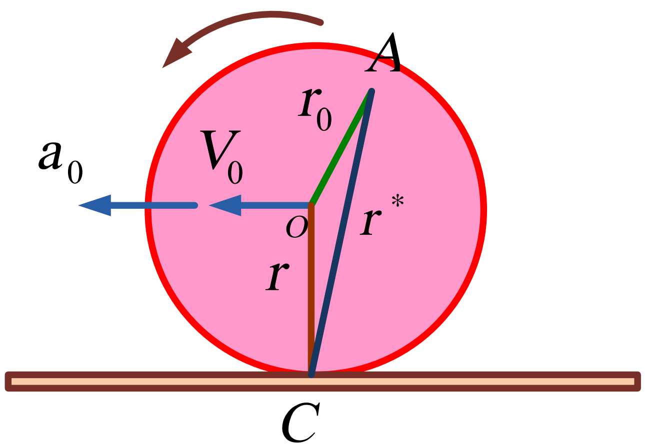
$$V_B = r_B\omega \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{V_B}{r_B}$$

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{r_A}{r_B}$$

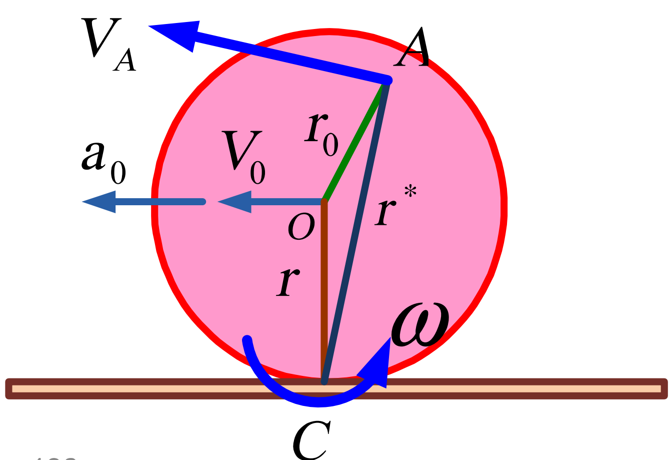
سرعت خطی مرکز آنی دوران همواره برابر صفر است.

$$V_C = 0$$

دیسکی را در نظر بگیرید که روی سطح صافی غلتش بدون لغزش داشته باشد.
دو نقطه A,C را روی محیط و پیشانی دیسک در نظر می گیریم. می خواهیم سرعت و شتاب این نقاط را به دست آوریم.



نقطه C در این لحظه نقطه ایست که جسم می خواهد حول آن بچرخد پس مرکز آنی دوران است



$$V_C = 0$$

$$V_0 = r\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{V_0}{r}$$

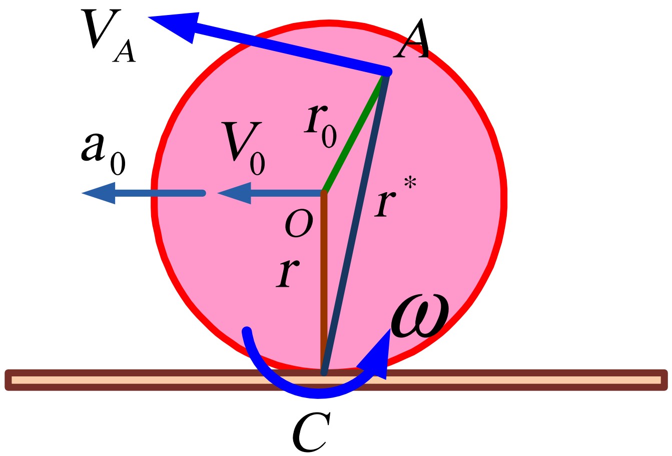
$$V_A = r^*\omega = r^*\frac{V_0}{r}$$

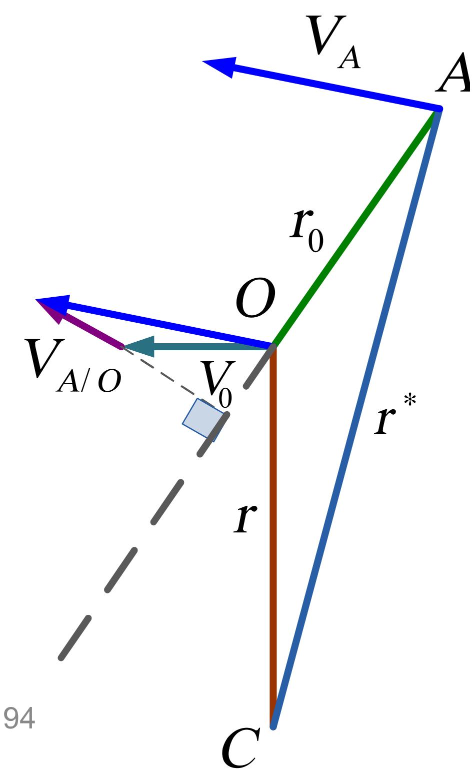
روش ترسیمی: (Oرا مرجع قرار می دهیم)

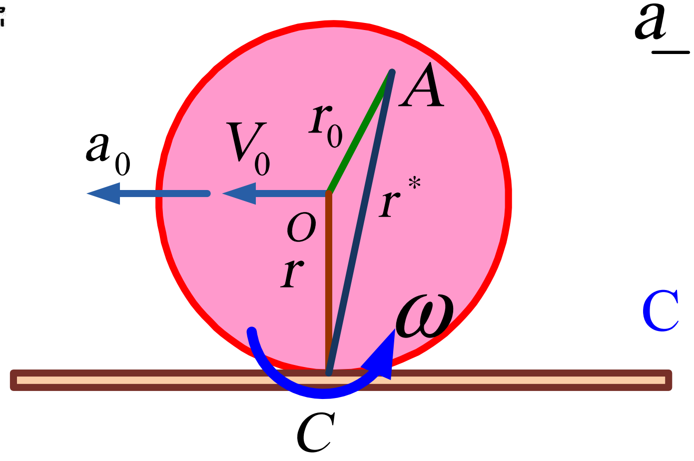
$$\underline{V}_A = \underline{V}_0 + \underline{V}_{A/O}$$

$$\underline{V}_{A/O} = \underline{\omega} \times \underline{r}_0 \qquad V_{A/O} = r_0 \omega$$

$$\underline{V}_A = \underline{V}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}_0$$



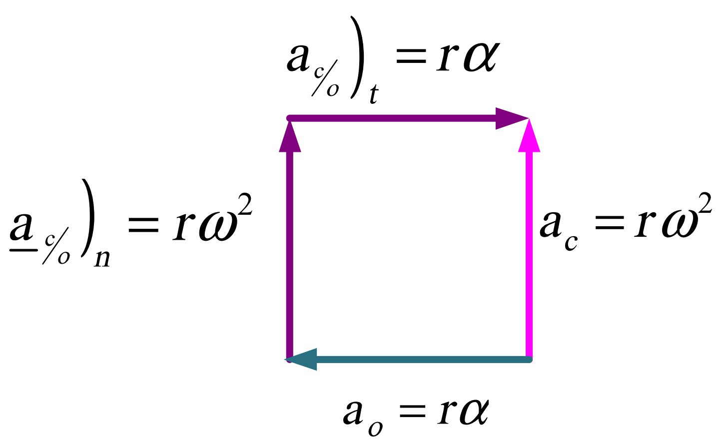




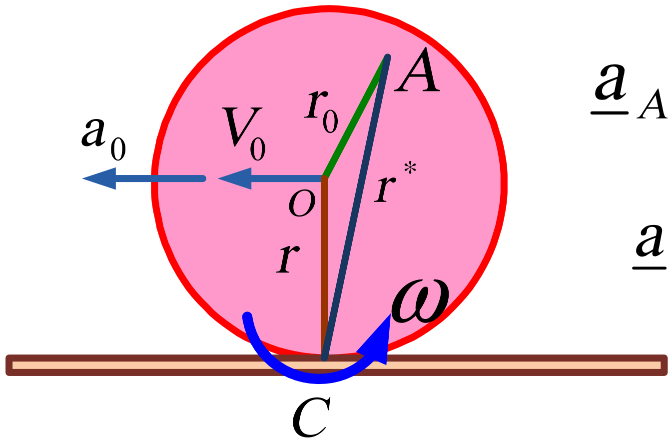
$$\underline{a}_C = \underline{a}_o + \underline{a}_{C/O} = \underline{a}_o + \underline{a}_{C/O}\big)_n + \underline{a}_{C/O}\big)_t$$

$$a_O = r\alpha \qquad a_{C/O}\big)_n = r\omega^2$$

مسیر نقطه C یک دایره است به شعاع r . تمایل حرکت C نیز به سمت راست است.



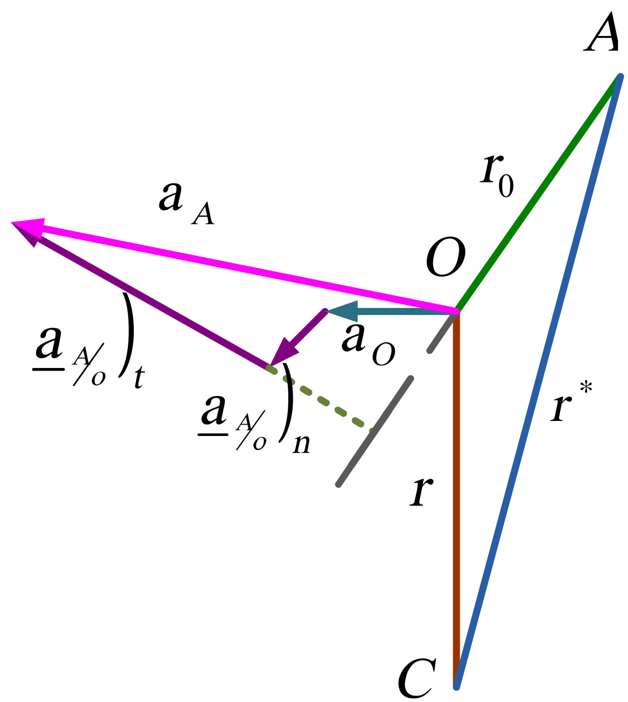
$$\boxed{a_C = r\omega^2}$$



$$\underline{a}_A = \underline{a}_o + \underline{a}_{A/O} = \underline{a}_o + \left.\underline{a}_{A/o}\right)_t + \left.\underline{a}_{A/o}\right)_n$$

$$\left.\underline{a}_{A/o}\right)_n = \underline{\omega}\times\left(\underline{\omega}\times\underline{r}_o\right) \qquad \left.\underline{a}_{A/o}\right)_t = \underline{\alpha}\times\underline{r}_o$$

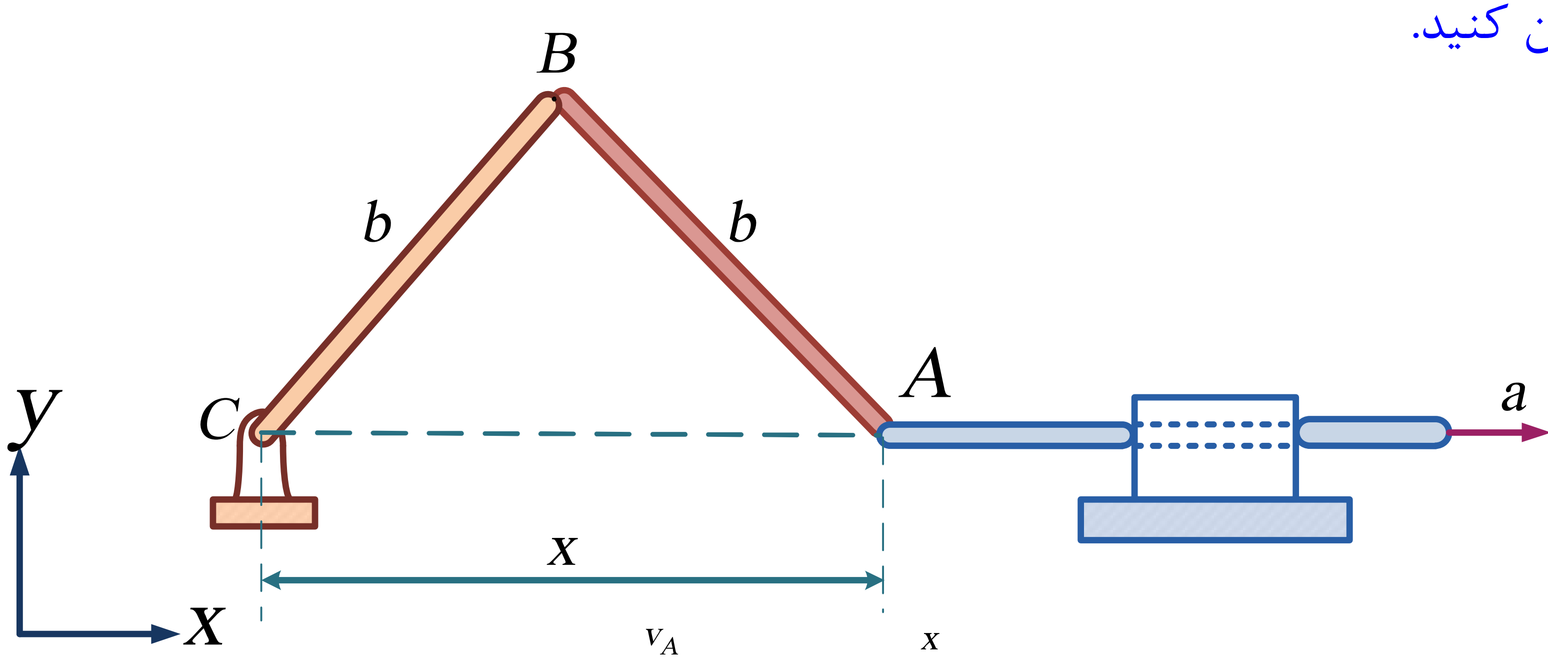
$$\left.a_{A/o}\right)_n = r_o\omega^2 \qquad \left.a_{A/o}\right)_t = r_o\alpha$$



حسینی هاشمی

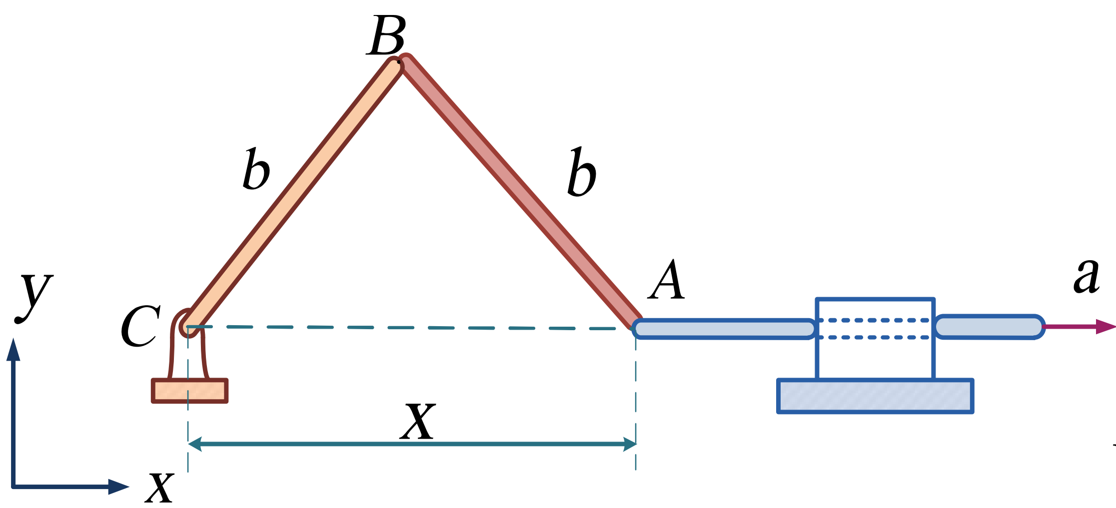
مسایل

مثال: به نقطه A شتابی ثابت برابر a به سمت راست داده می شود این نقطه از حالت سکون در S=0 به راه می افتد سرعت زاویه ای ω مربوط به میله AB را بر حسب a , x تعیین کنید.



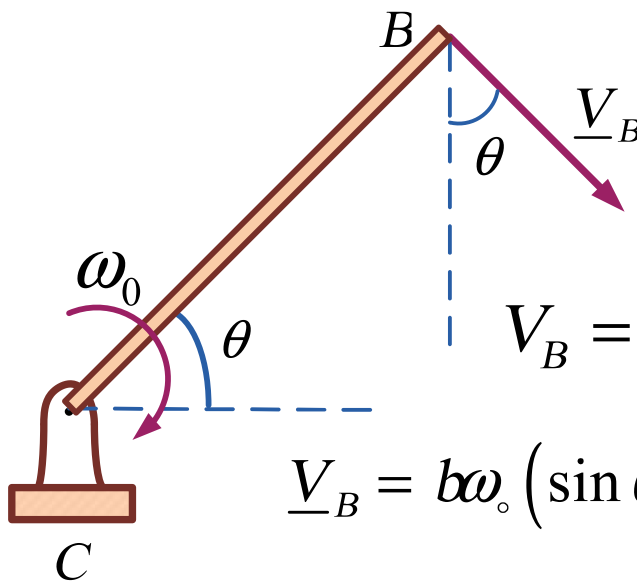
$$VdV = adS \Rightarrow \int_0^{V_A} VdV = a\int_0^{x} dS$$

$$\frac{1}{2}V_A^2 = ax \rightarrow V_A = \sqrt{2\,ax} \rightarrow \underline{V}_A = \sqrt{2\,ax}\,\underline{i}$$



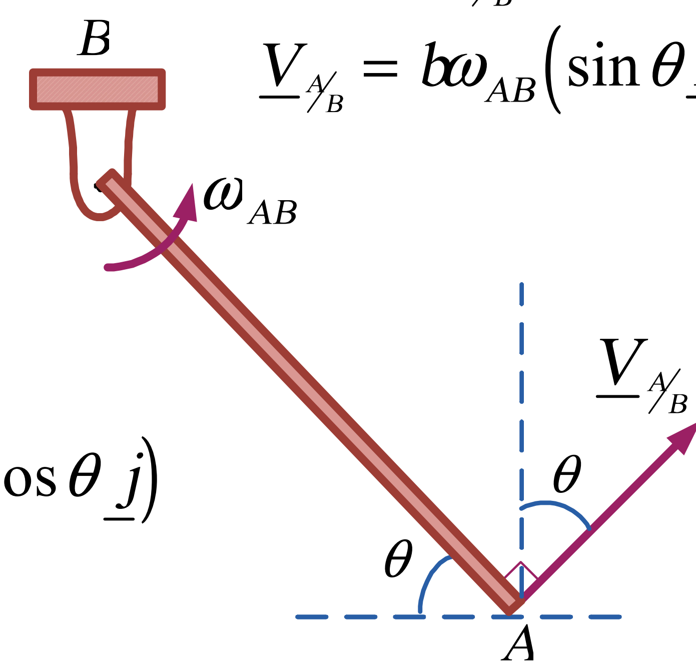
$$V_{A/B} = b\omega_{AB}$$

$$\underline{V}_{A/B} = b\omega_{AB}\left(\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j}\right)$$



$$V_B = b\omega_\circ$$

$$\underline{V}_B = b\omega_\circ\left(\sin\theta\,\underline{i} - \cos\theta\,\underline{j}\right)$$



$$\underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{V}_{A/B}$$

$$\underline{V}_A = \sqrt{2ax}\ \underline{i} \qquad \underline{V}_B = b\omega_\circ \left(\sin\theta\,\underline{i} - \cos\theta\,\underline{j}\right)$$

$$\underline{V}_{A/B} = b\omega_{AB}\left(\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j}\right) \qquad \underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{V}_{A/B}$$

$$\sqrt{2ax}\ \underline{i} = \left(b\omega_\circ + b\omega_{AB}\right)\sin\theta\,\underline{i} + \left(-b\omega_\circ + b\omega_{AB}\right)\cos\theta\,\underline{j}$$

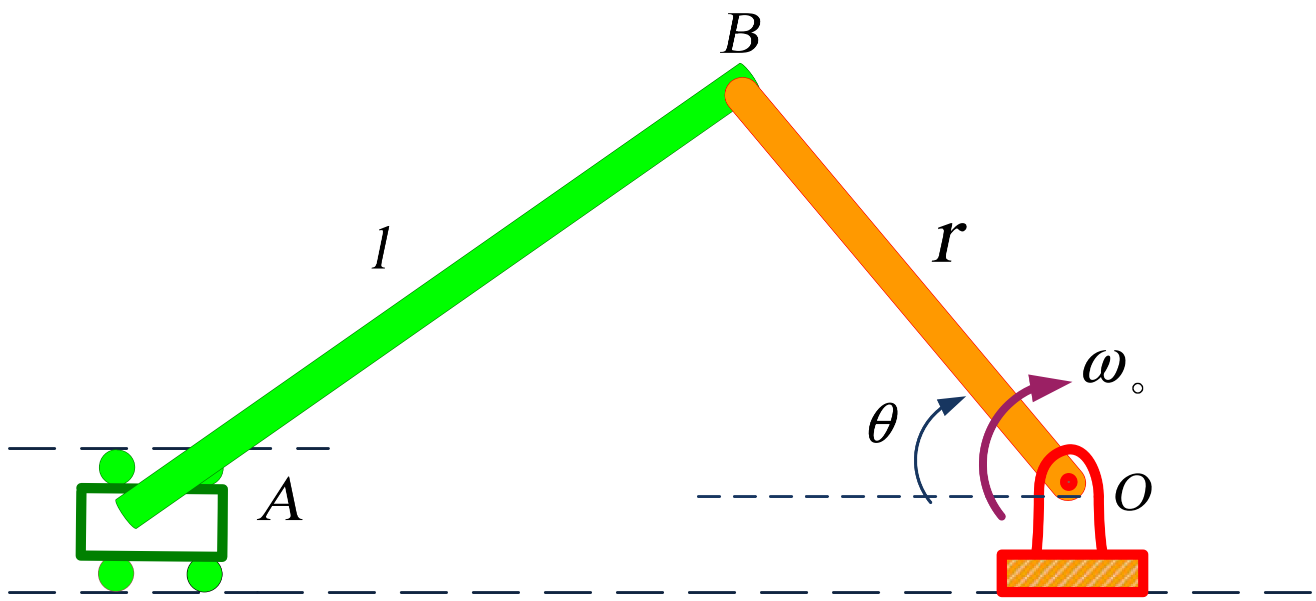
$$\begin{cases} \sqrt{2ax} = b\left(\omega_\circ + \omega_{AB}\right)\sin\theta \\ 0 = b\left(\omega_{AB} - \omega_\circ\right) \Rightarrow \omega_{AB} = \omega_\circ \end{cases}$$

$$\sqrt{2ax} = 2b\omega_{AB}\sin\theta \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{b^2 - x^2/4}}{b}$$

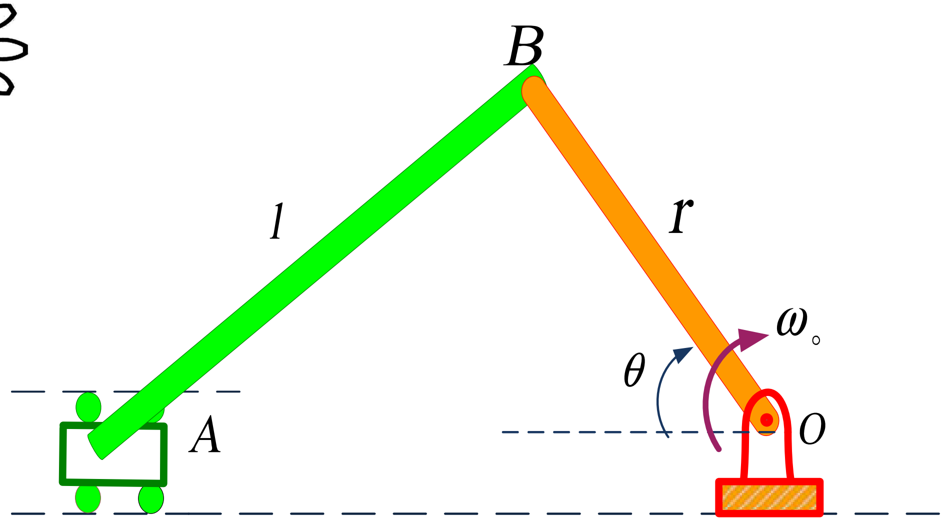
$$\sqrt{2ax} = 2b\omega_{AB} \times \frac{\sqrt{4b^2 - x^2}}{2b}$$

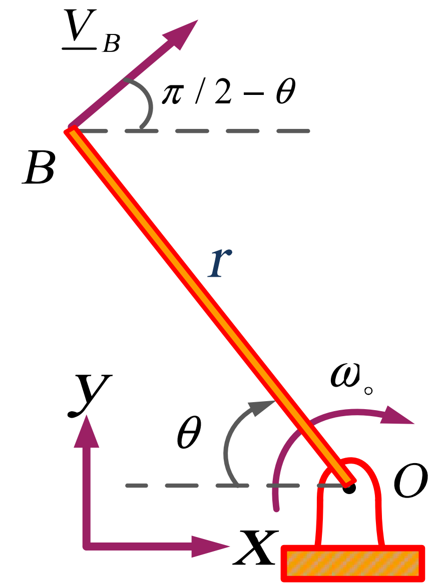
$$\boxed{\omega_{AB} = \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{4b^2 - x^2}}}$$

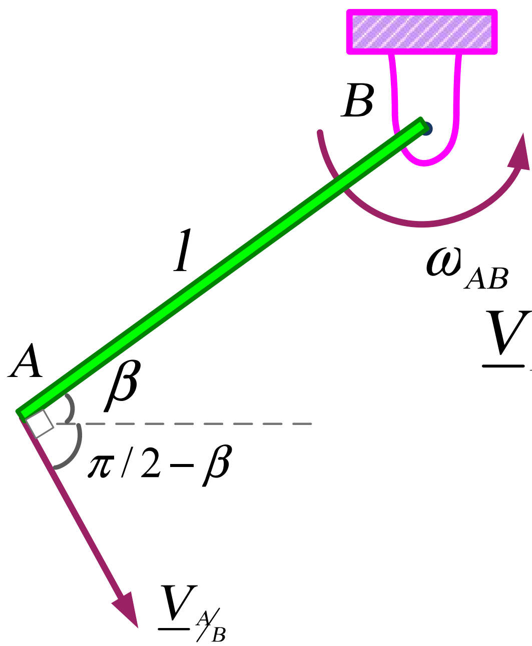
مثال) برای سیستم نشان داده شده در شکل سرعت زاویه ای ω و شتاب زاویه ای α مربوط به میله ی AB را بر حسب θ (زاویه میل لنگ) پیدا کنید سرعت ثابت میل لنگ برابر $\omega_\circ$ است.



میله OB چون مفصل شده فقط دوران می کند اما AB هم حرکت دورانی دارد هم حرکت انتقالی







$$V_B = r\omega_\circ$$

$$\underline{V}_B = V_B \sin\theta\,\underline{i} + V_B \cos\theta\,\underline{j} = r\omega_\circ\left(\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j}\right)$$

$$V_{A/B} = l\omega_{AB}$$

$$\underline{V}_{A/B} = l\omega_{AB}(\sin\beta\,\underline{i} - \cos\beta\,\underline{j}) \qquad \underline{V}_A = V_A\,\underline{i}$$

$$\underline{V}_A = V_A \underline{i} \qquad \underline{V}_B = r\omega_\circ \left(\sin\theta\, \underline{i} + \cos\theta\, \underline{j}\right)$$

$$\underline{V}_{A/B} = l\omega_{AB}(\sin\beta\, \underline{i} - \cos\beta\, \underline{j}) \qquad \underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{V}_{A/B}$$

$$V_A \underline{i} = r\omega_\circ \left(\sin\theta\, \underline{i} + \cos\theta\, \underline{j}\right) + l\omega_{AB}\left(\sin\beta\, \underline{i} - \cos\beta\, \underline{j}\right)$$

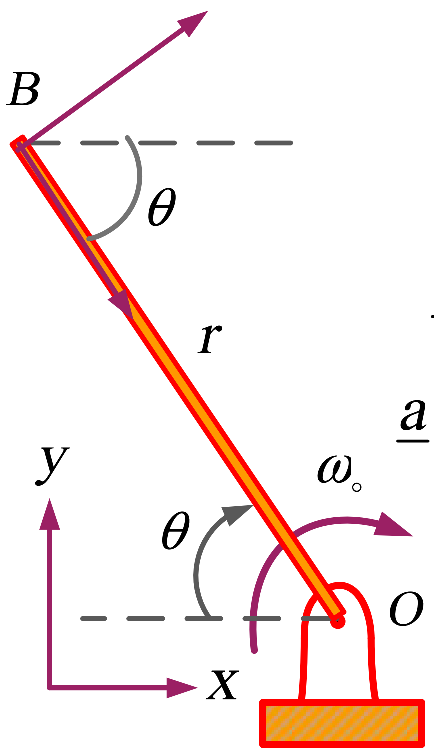
$$= \left(r\omega_\circ \sin\theta + l\omega_{AB}\sin\beta\right)\underline{i} + \left(r\omega_\circ \cos\theta - l\omega_{AB}\cos\beta\right)\underline{j}$$

$$V_A = r\omega_0 \sin\theta + l\omega_{AB}\sin\beta \qquad 0 = r\omega_0 \cos\theta - l\omega_{AB}\cos\beta$$

$$\frac{l}{\sin\theta} = \frac{r}{\sin\beta}$$ قضیه سینوسها: $$\sin\beta = \frac{r}{l}\sin\theta \qquad \cos\beta = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\theta}$$

$$\boxed{\omega_{AB} = \frac{r\omega_\circ \cos\theta}{l\cos\beta} = \frac{r\omega_\circ \cos\theta}{l\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\theta}}}$$

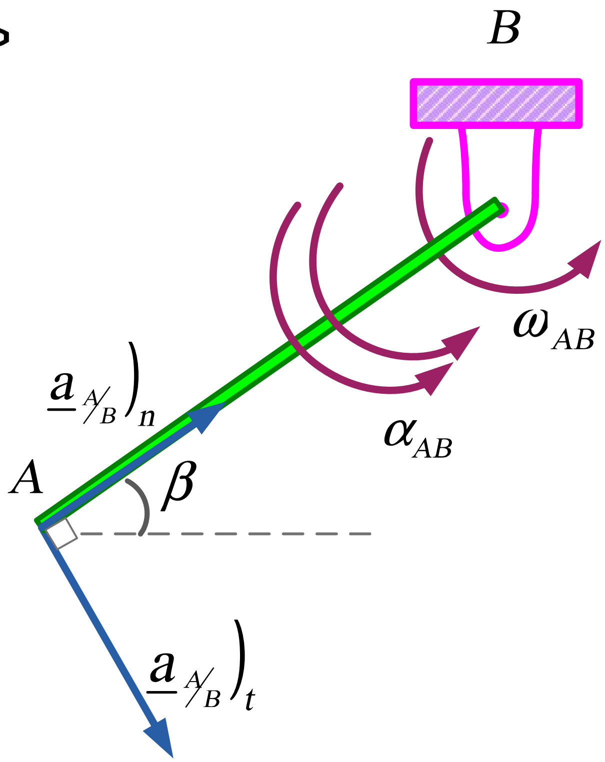
$$V_A = r\omega_\circ \sin\theta + \frac{r\omega_\circ \cos\theta}{\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\theta}}\left(\frac{r}{l}\sin\theta\right)$$



$$\underline{a}_B = \underline{a}_B)_n + \underline{a}_B)_t \qquad a_B)_t = r\alpha = r\dot{\omega}_0 = 0$$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_B)_n = \underline{\omega}_\circ \times \left(\underline{\omega}_\circ \times \underline{r}\right) \qquad a_B = r\omega_\circ^2$$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_B)_n \cos\theta \underline{i} - \underline{a}_B)_n \sin\theta \underline{j} = r\omega_\circ^2\left(\cos\theta \underline{i} - \sin\theta \underline{j}\right)$$



$$\underline{a}_{A/B} = \underline{a}_{A/B})_n + \underline{a}_{A/B})_t$$

$$a_{A/B})_n = l(\omega_{AB})^2 \qquad a_{A/B})_t = l\alpha_{AB}$$

$$\underline{a}_{A/B})_n = l\omega_{AB}^2(\cos\beta\,\underline{i} + \sin\beta\,\underline{j})$$

$$\underline{a}_{A/B})_t = l\alpha_{AB}(\sin\beta - \cos\beta)\,\underline{j}$$

$$\underline{a}_{A/B} = (l\omega_{AB}^2\cos\beta + l\alpha_{AB}\sin\beta)\,\underline{i} + (l\omega_{AB}^2\sin\beta - l\alpha_{AB}\cos\beta)\,\underline{j}$$

$$\underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{A/B} \qquad \underline{a}_A = a_A \underline{i} \qquad \underline{a}_B = r\omega_\circ^2\left(\cos\theta \underline{i} - \sin\theta \underline{j}\right)$$

$$\underline{a}_{A/B} = \left(l\omega_{AB}^2\cos\beta + l\alpha_{AB}\sin\beta\right)\underline{i} + \left(l\omega_{AB}^2\sin\beta - l\alpha_{AB}\cos\beta\right)\underline{j}$$

$$a_A\underline{i} = r\omega_\circ^2\left(\cos\theta \underline{i} - \sin\theta \underline{j}\right) + \left(l\omega_{AB}^2\cos\beta + l\alpha_{AB}\sin\beta\right)\underline{i} +$$

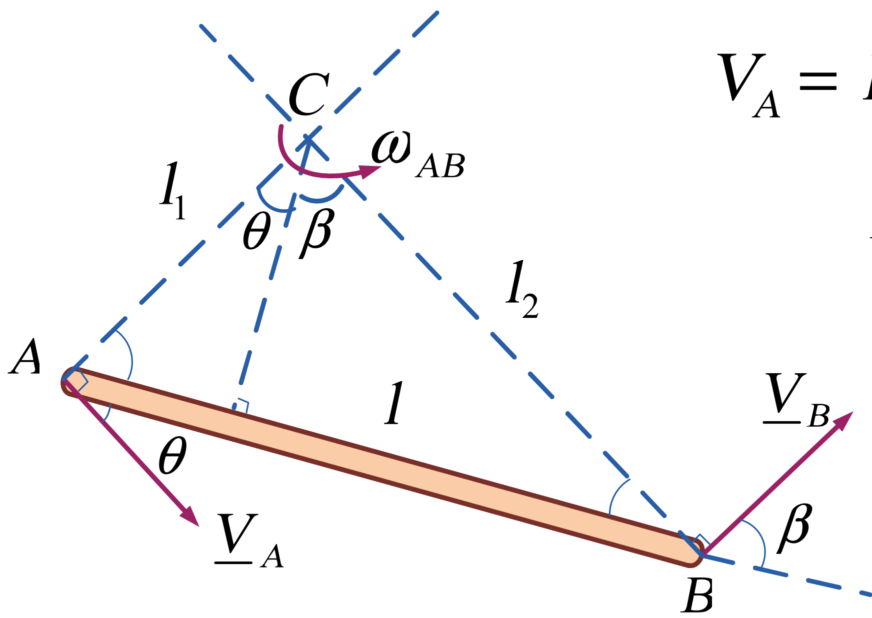
$$\left(l\omega_{AB}^2\sin\beta - l\alpha_{AB}\cos\beta\right)\underline{j} = \left(r\omega_\circ^2\cos\theta + l\omega_{AB}^2\cos\beta + l\alpha_{AB}\sin\beta\right)\underline{i}$$

$$-\left(r\omega_\circ^2\sin\theta - l\omega_{AB}^2\sin\beta + l\alpha_{AB}\cos\beta\right)\underline{j}$$

$$\begin{cases} a_A = r\omega_\circ^2\cos\theta + l\omega_{AB}^2\cos\beta + l\alpha_{AB}\sin\beta \\ 0 = r\omega_\circ^2\sin\theta - l\omega_{AB}^2\sin\beta + l\alpha_{AB}\cos\beta \end{cases}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{l\omega_{AB}^2\sin\beta - r\omega_\circ^2\sin\theta}{l\cos\beta} = \frac{r\omega_\circ^2}{l}\sin\theta\frac{\frac{r^2}{l^2}-1}{\left(1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}$$

مثال: اگر سرعت های دو انتهای A , B یک میله صلب رابط برابر V_B ، V_A باشند سرعت زاویه ای میله رابط را تعیین کنید.



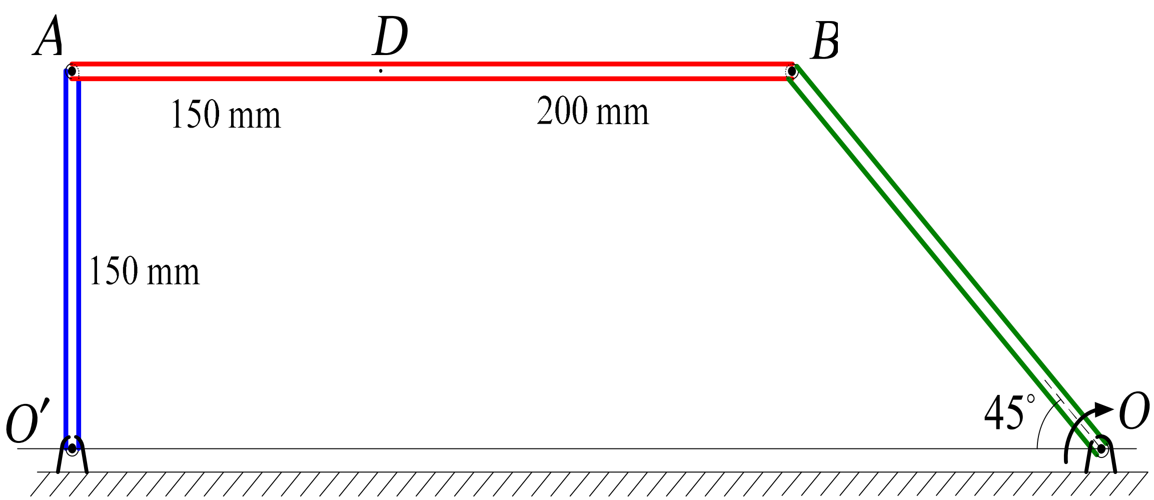
$$V_A = l_1\omega_{AB} \qquad V_B = l_2\omega_{AB}$$

$$l_1 \sin\theta + l_2 \sin\beta = l$$

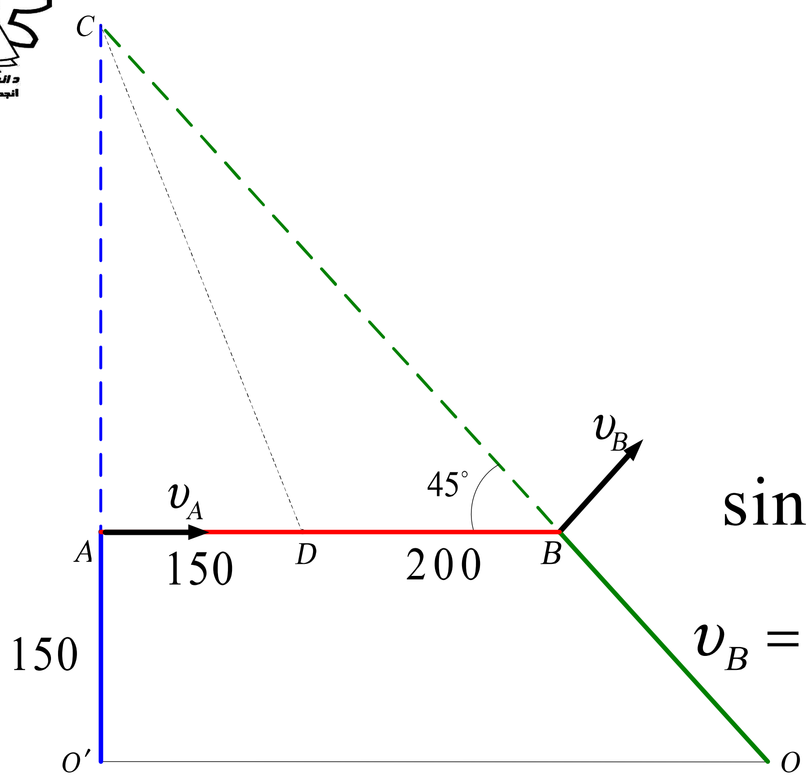
$$\frac{V_A}{\omega_{AB}}\sin\theta + \frac{V_B}{\omega_{AB}}\sin\beta = l$$

$$\boxed{\omega_{AB} = \frac{V_A \sin\theta + V_B \sin\beta}{l}}$$

مثال: بازوی OB از سیستم نشان‌داده شده در شکل با سرعت زاویه‌ای 10 rad/sec در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد. مطلوب است سرعت نقاط A و D و سرعت زاویه‌ای میله اتصال AB برای وضعیت نشان‌داده شده در شکل.



از آنجائی که جهات سرعت‌های نقاط A و B مشخص‌اند می‌توانیم مرکز آنی دوران را با رسم بردارهای شعاعی که بر امتداد سرعت‌های v_A و v_B در نقاط A و B عمودند بدست آوریم.



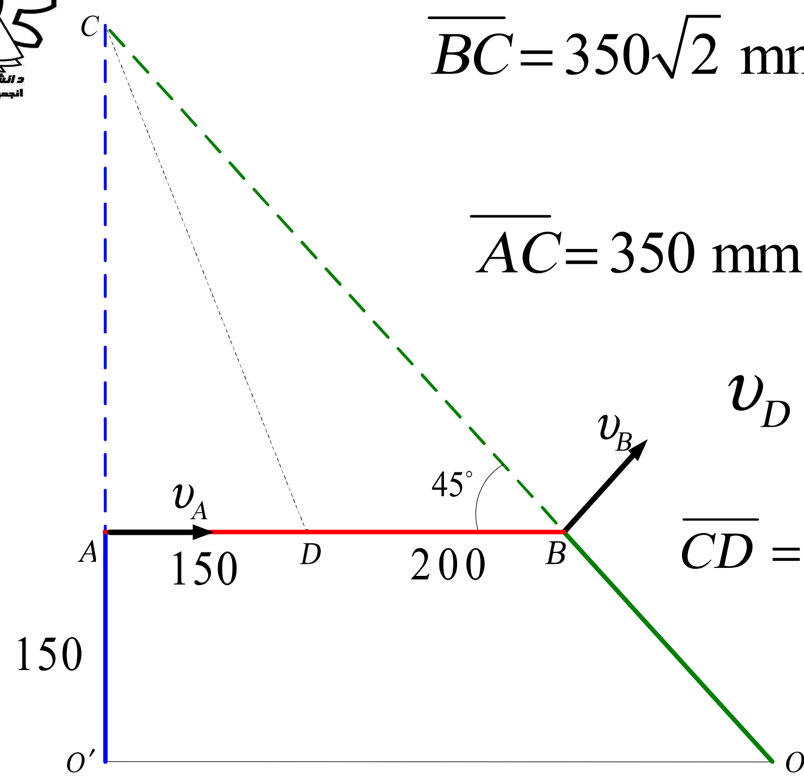
$$\sin 45^\circ = \frac{150}{\overline{OB}} \Rightarrow \overline{OB} = 150\sqrt{2}\ \text{mm}$$

$$v_B = \overline{OB}\ \omega_{OB} = 150\sqrt{2}\times 10 = 1500\sqrt{2}\ \text{mm/s}$$

از طرف دیگر اگر سرعت زاویه‌ای مرکز آنی دوران را ω فرض کنیم داریم:

$$v_B = \overline{BC}\,\omega \qquad \cos 45^\circ = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{350}{\overline{BC}} \qquad \Rightarrow \overline{BC} = 350\sqrt{2}\ \text{mm}$$

$$1500\sqrt{2} = 350\sqrt{2}\ \omega \qquad \omega = \frac{150}{35}\ \text{rad/s}$$



$$\overline{BC} = 350\sqrt{2}\ \text{mm} \qquad \omega = \frac{150}{35}\ \text{rad/s}$$

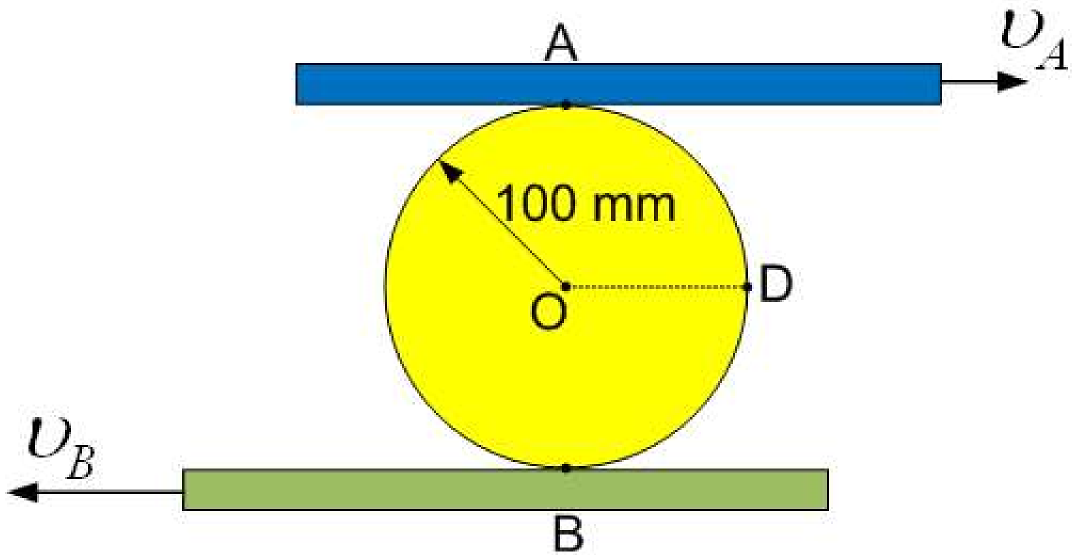
$$\overline{AC} = 350\ \text{mm} \quad \upsilon_A = \overline{AC}\,\omega = 350 \times \frac{150}{35} = 1500\ \text{mm/s}$$

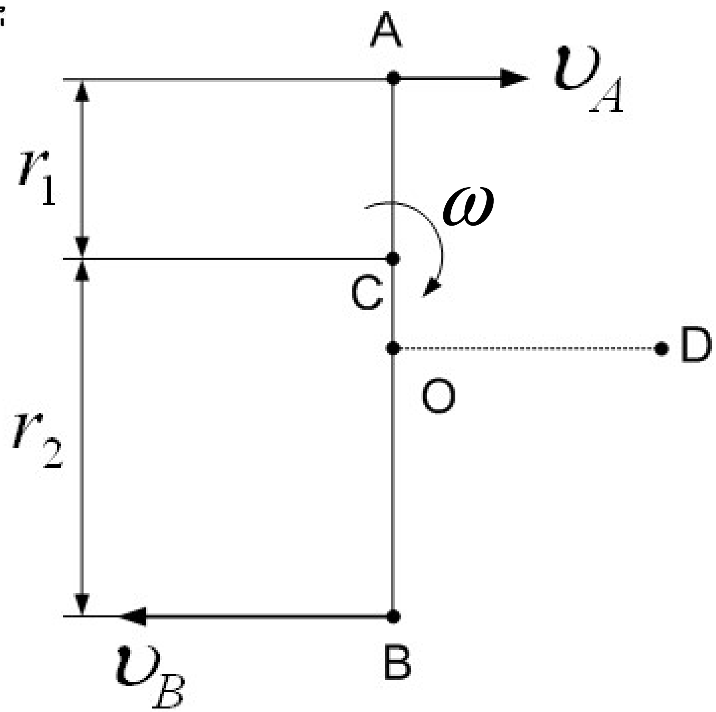
$$\upsilon_D = \overline{CD}\ \omega$$

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{350^2 + 150^2} = 380.8\ \text{mm}$$

$$\upsilon_D = 380.8 \times \frac{150}{35} = 1632\ \text{mm/s}$$

مثال:دو صفحه B و A بموازات یکدیگر و در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند و صفحه مدور
بدون لغزش بین آنها می‌چرخد اگر $\upsilon_A = 2\ \mathrm{m/s}$ و $\upsilon_B = 4\ \mathrm{m/s}$ باشد،مرکزآنی
دوران را برای صفحه مشخص کنید و سرعت نقطه D را در لحظه نشان داده شده بدست آورید.





برای پیدا کردن مرکز آنی دوران بردارهای شعاعی را که عمود بر امتدادهای سرعت‌های v_A و v_B در نقاط A و B هستند رسم می‌کنیم، واضح است که مرکز آنی دوران روی خط AB قرار دارد. اگر نقطه C مرکز آنی دوران باشد و فواصل آن از نقاط A و B بترتیب برابر r_1 و r_2 فرض شود داریم:

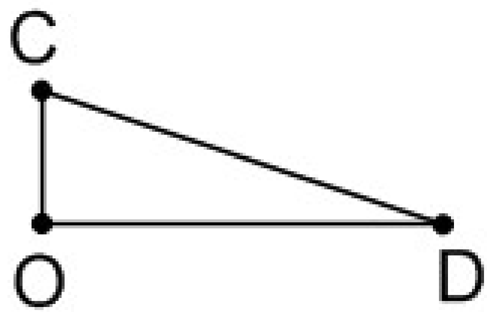
$$v_A = r_1\omega \qquad v_B = r_2\omega$$

$$v_A + v_B = (r_1 + r_2)\omega$$

$$\omega = \frac{v_A + v_B}{r_1 + r_2} = \frac{6}{0.2} = 30 \text{ rad/s} \qquad r_1 = \frac{v_A}{\omega} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \text{ m}$$

$$r_2 = \frac{v_B}{\omega} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \text{ m} \qquad OC = 0.1 - r_1 = \frac{1}{30} m$$

حال برای پیدا کردن سرعت در نقطه D از مثلث OCD داریم:



$$CD = \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{1}{900}} = 0.105 \text{ m}$$

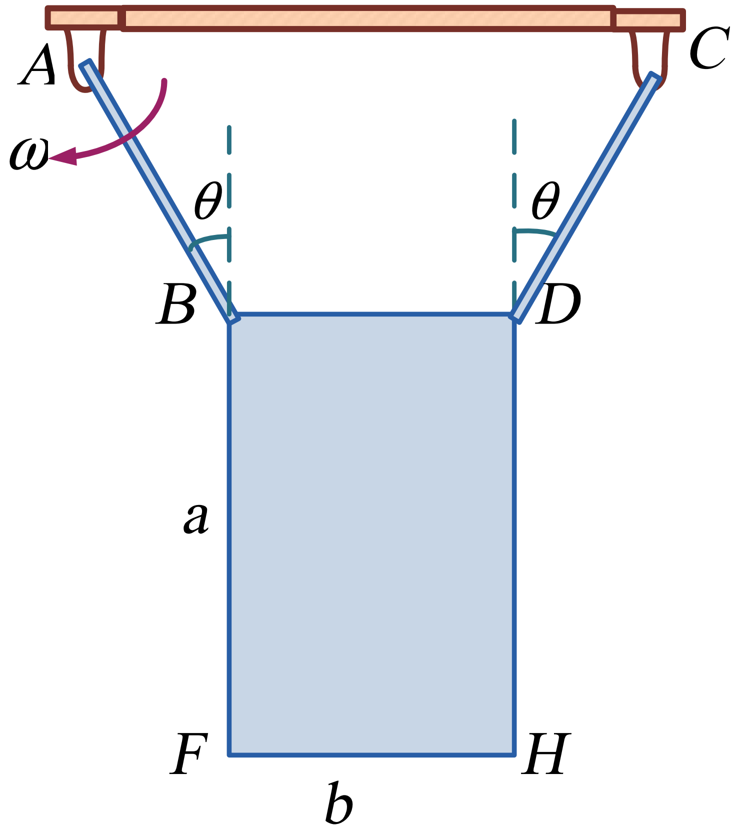
$$\upsilon_D = CD \times \omega = 0.105 \times 30 = 3.15 \text{ m/s}$$

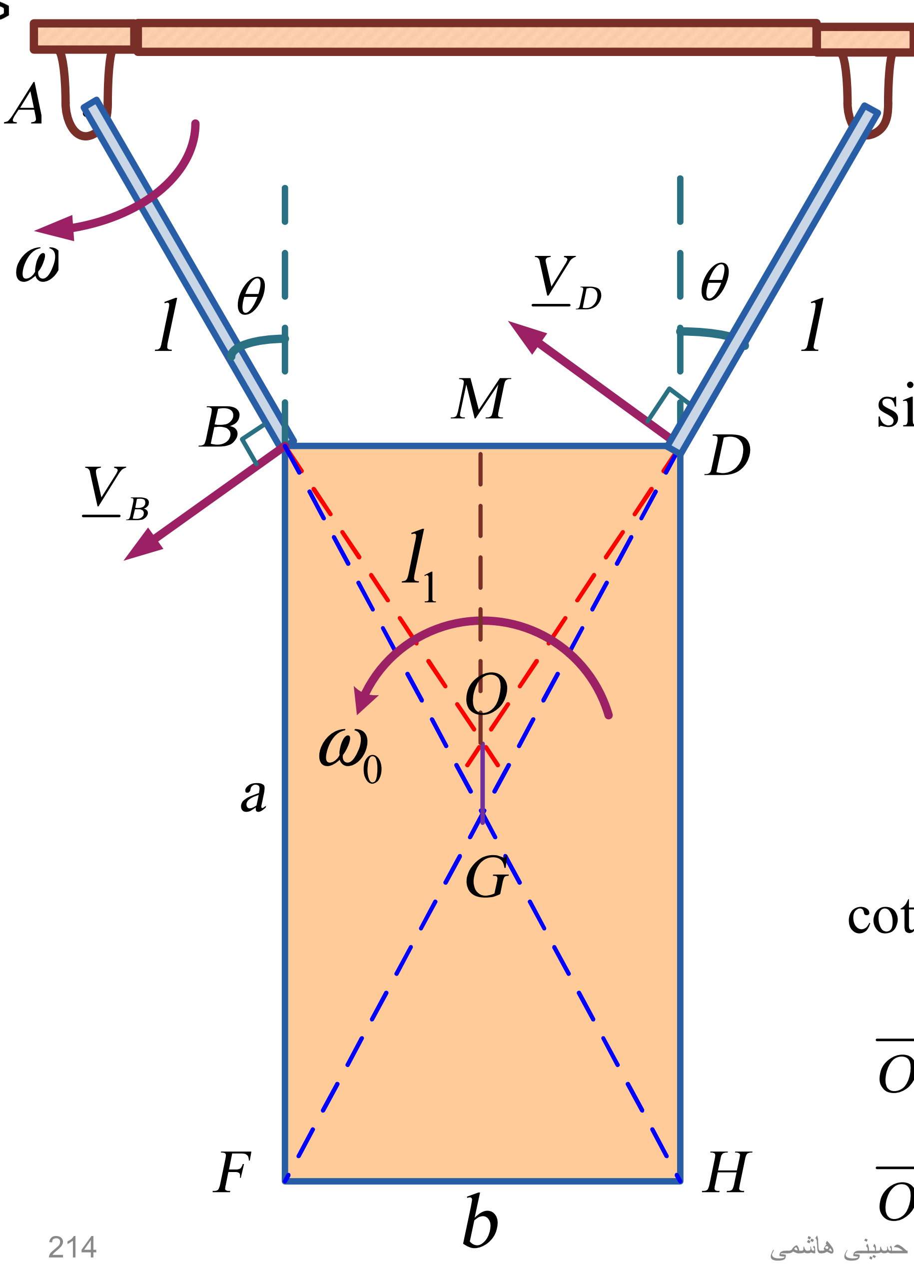
مثال: صفحه مستطیلی شکل را بوسیله دو میله به طول l مطابق شکل آویزان کرده ایم در صورتیکه سرعت زاویه ای میله ی AB در لحظه نشان داده شده در شکل ω و در جهت حرکت عقربه های ساعت باشد. مطلوبست:

a) سرعت زاویه ای صفحه

b) سرعت نقطه ی G مرکز صفحه

c) سرعت نقطه ی F





O: مرکز آنی دوران است.

$$V_B = l\omega$$

$$\sin\theta = \frac{b}{2l_1} \quad \Rightarrow \quad l_1 = \frac{b}{2\sin\theta}$$

$$V_B = l_1\omega_0$$

$$\omega_o = \frac{l\omega}{l_1} = \frac{2l\omega\sin\theta}{b}$$

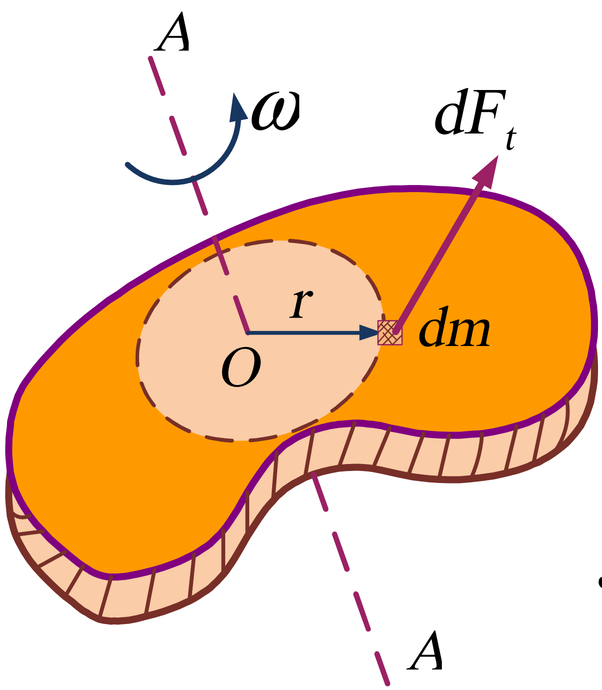
$$\cot\theta = \frac{\overline{OM}}{b/2} \quad \Rightarrow \quad \overline{OM} = \frac{b\cot\theta}{2}$$

$$\overline{OG} = \overline{MG} - \overline{OM} = \frac{a - b\cot\theta}{2}$$

$$\overline{OP} = a/2 + \overline{OG} = a - \frac{b\cot\theta}{2}$$

۹- سینتیک و دینامیک

۹-۱ گشتاور لختی



$$a_t = r\alpha = r\dot{\omega} \qquad dF_t = a_t dm = r\dot{\omega} dm$$

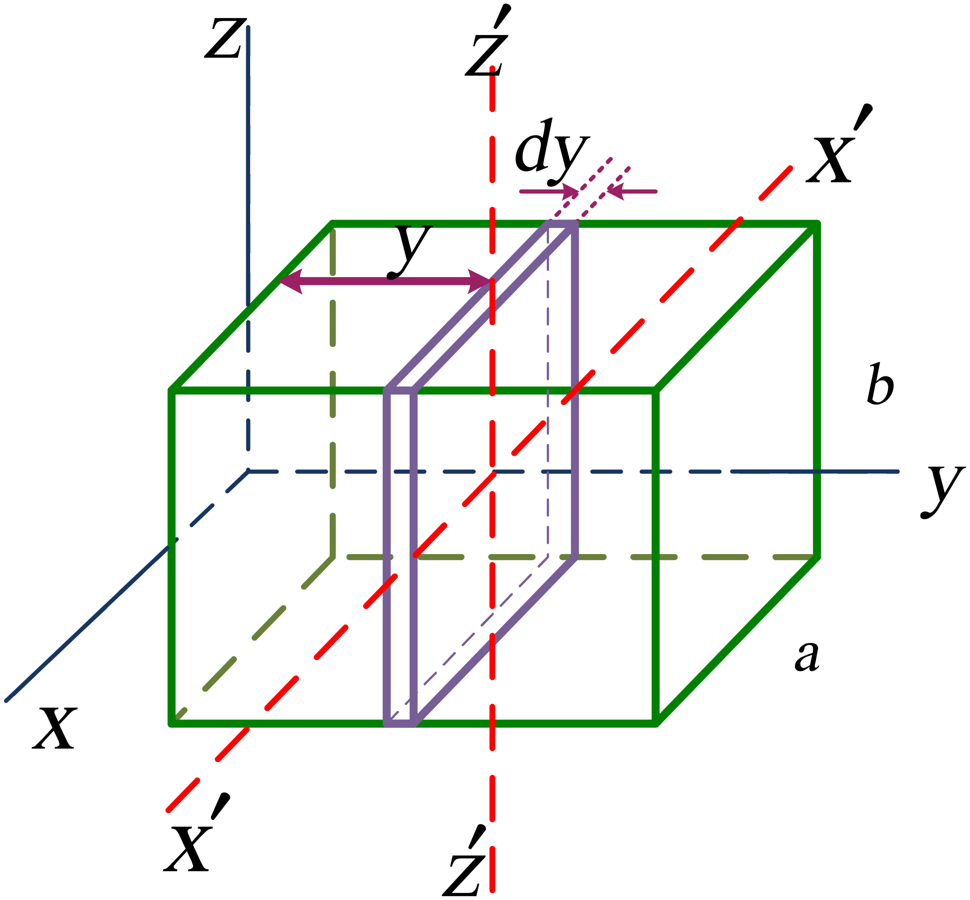
$$dM = r dF_t = r^2 \dot{\omega} dm$$

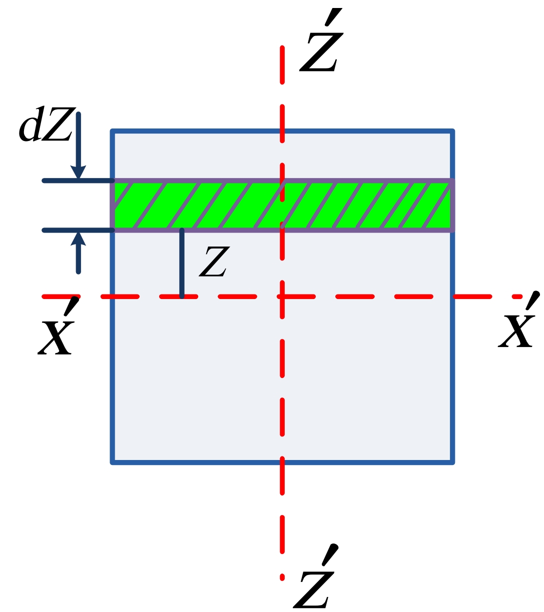
$$\int dM = \dot{\omega}\int r^2 dm \qquad M = \dot{\omega}\int r^2 dm$$

$$I = \int r^2 dm$$

m در دینامیک انتقالی به منزله مقاوت در برابر شتاب خطی یعنی a است

I در دینامیک دورانی به منزله مقاوت در برابر شتاب زاویه ای α است.



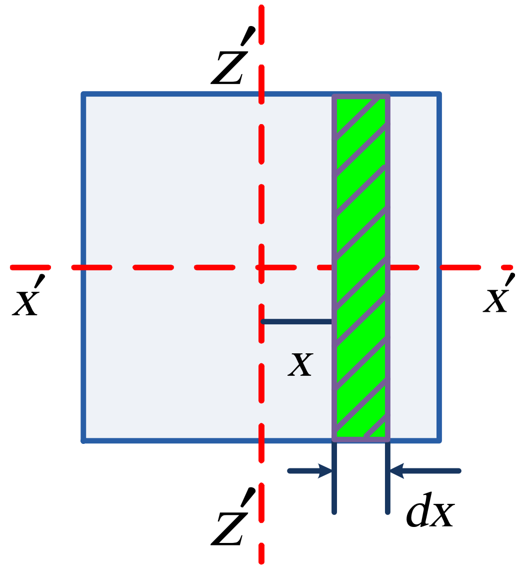


$$dm = \rho\, dV = \rho\, a\, dy\, dz$$

$$I_{x'x'} = \int z^2\, dm = \int z^2 \rho\, a\, dy\, dz = \rho\, a\, dy \int_{-b/2}^{b/2} z^2\, dz$$

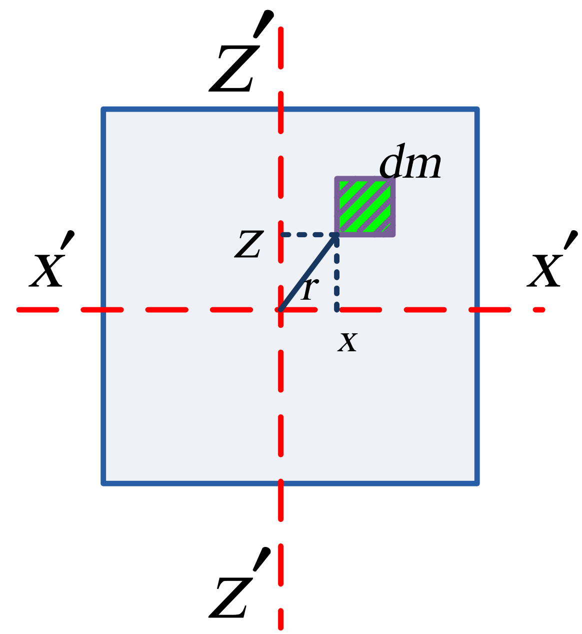
$$= \rho \frac{a}{3} dy \left[z^3 \right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{\rho a}{12} b^3\, dy$$

حسینی هاشمی



$$I_{z'z'} = \int x^2\, dm \quad dm = \rho\, dV = \rho\, b\,dy\,dx$$

$$I_{z'z'} = \int x^2\, dm = \rho\, b\,dy \int_{-a/2}^{a/2} x^2\, dx = \frac{\rho b a^3}{12}\, dy$$



قطعه از مکعب به ضخامت dy

$$I_{yy} = \int r^2\, dm \qquad r^2 = x^2 + z^2$$

$$I_{yy} = \int \left(x^2 + z^2 \right) dm = \int x^2\, dm + \int z^2\, dm$$

$$= I_{x'x'} + I_{z'z'}$$

$$I_{yy} = \frac{\rho a b}{12}\left(a^2 + b^2\right) dy$$

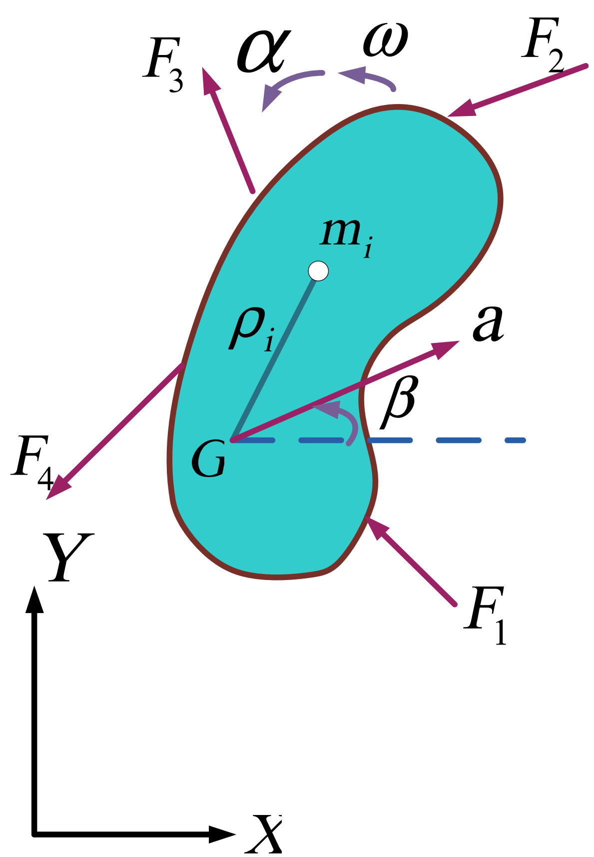
مکعب

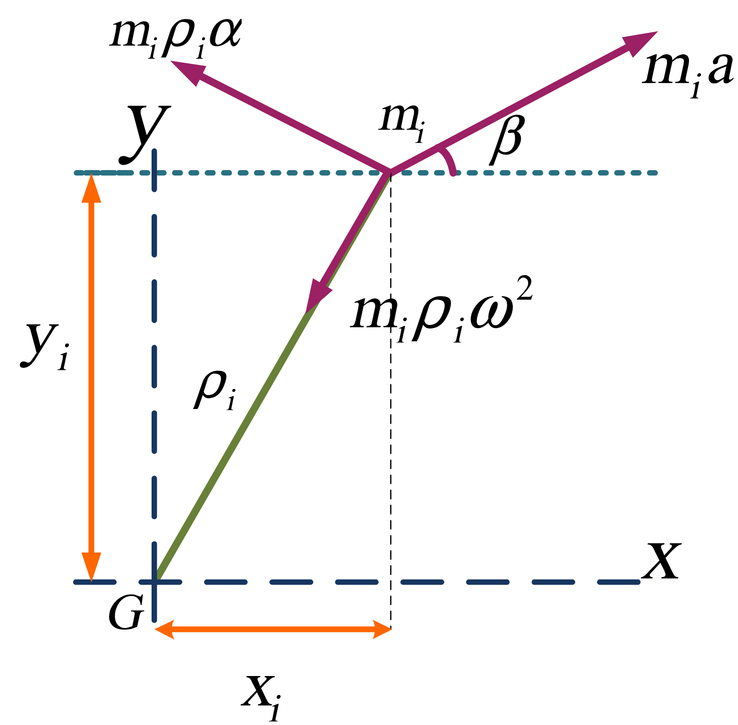
$$I_{yy} = \frac{\rho ab}{12}\left(a^2 + b^2\right)\int_{\circ}^{l} dy$$

$$I_{yy} = \frac{\rho abl}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

$$\boxed{I_{yy} = \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2\right)}$$

۹-۲معادلات دینامیکی حرکت جسم صلب در صفحه





$$M_i = m_i\rho_i\alpha(\rho_i) - m_i a\cos\beta(y_i) + m_i a\sin\beta(x_i)$$

$$M_i = m_i\rho_i\alpha(\rho_i) - m_i a\cos\beta(y_i) + m_i a\sin\beta(x_i)$$

گشتاور کل جسم صلب حول نقطه G (مرکز جرم) جسم صلب

$$\sum M_i = \sum M = \alpha\sum m_i\rho_i^2 - a\cos\beta\sum m_i y_i + a\sin\beta\sum m_i x_i$$

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = 0 \qquad \bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = 0$$

$$\sum m_i x_i = 0 \quad , \quad \sum m_i y_i = 0$$

$$\sum M = \alpha\sum m_i\rho_i^2 = \alpha\int \rho^2\, dm = I\alpha$$

سه معادله دینامیکی

$$\sum F_y = ma_y$$

$$\sum F_x = ma_x$$

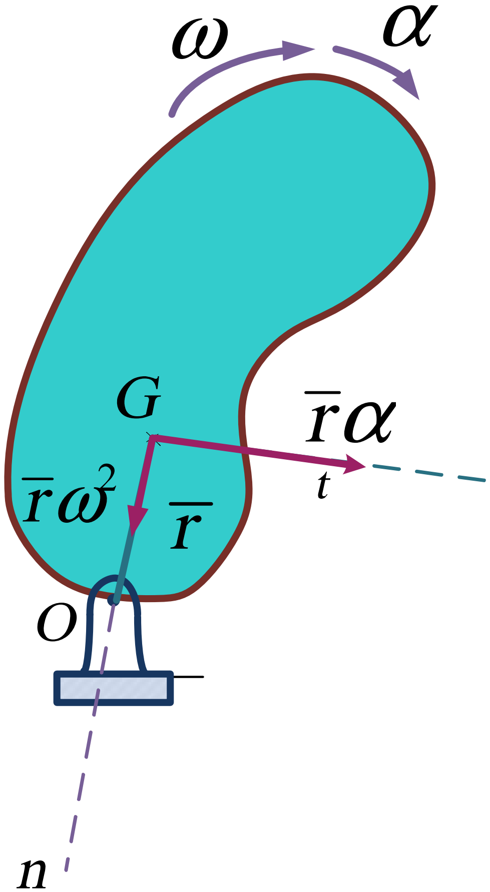
ناشی از انتقال

$$\sum \mathrm{M} = \mathrm{I}\alpha$$

ناشی از دوران

۹-۳ مرکز تصادم

جسم صلب دوران خالص دارد حول نقطه ای مانند O که بر مرکز جرم جسم صلب منطبق نیست.



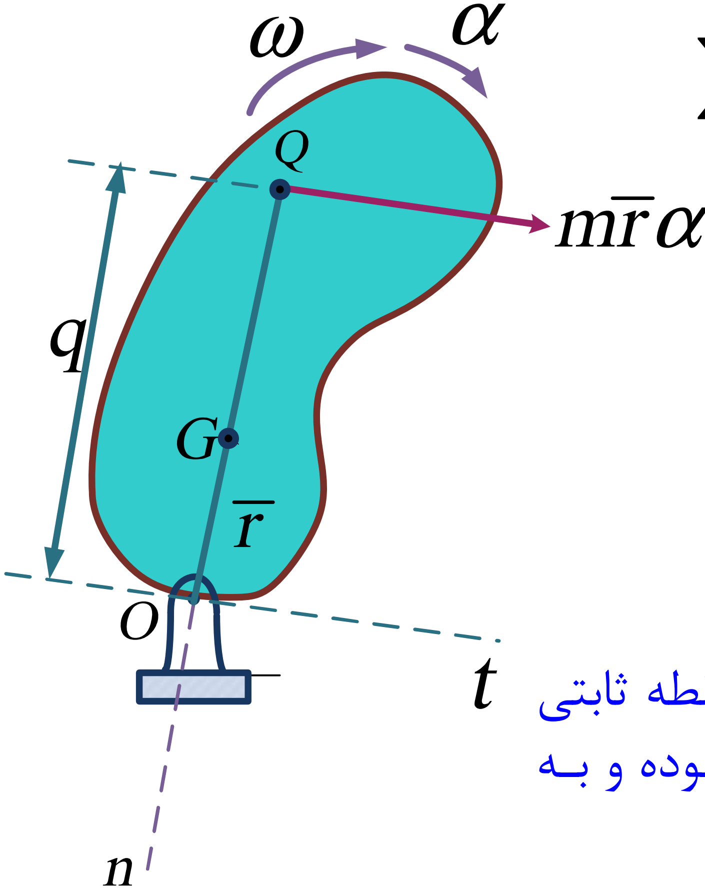
$$\sum F_t = ma_t = m\bar{r}\alpha$$

$$\sum F_n = ma_n = m\bar{r}\omega^2$$

$$\sum M = I_O\alpha = \left(I_G + m\bar{r}^2\right)\alpha$$

$I_G = mk^2$ k شعاع ژیراسیون

$$\sum M = m\left(k^2 + \bar{r}^2\right)\alpha$$

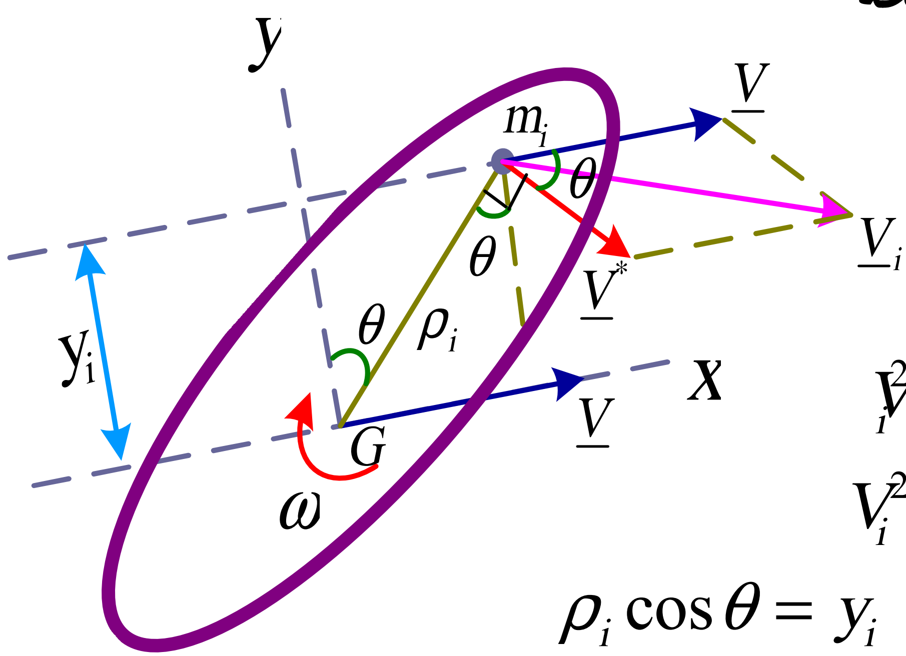


$$\sum M = m\bar{r}\alpha q = m\left(k^2 + \bar{r}^2 \right)\alpha$$

$$\boxed{q = \frac{k^2 + \bar{r}^2}{\bar{r}}}$$

Q : این نقطه برای هر جسم مفروضی که حول نقطه ثابتی مثل O دوران می کند نقطه ی منحصر به فرد بوده و به نام مرکز تصادم نامیده می شود.

۹-۴ انرژی جنبشی جسم صلب در صفحه



$$\underline{V}^* = \underline{\omega} \times \underline{\rho}_i \qquad V^* = \rho_i \omega$$

$$\underline{V}_i = \underline{V} + \underline{V}^* = \underline{V} + \underline{\omega} \times \underline{\rho}_i$$

$$V_i^2 = V^{*2} + V^2 + 2VV^* \cos\theta$$

$$V_i^2 = V^2 + \rho_i^2 \omega^2 + 2\rho_i \omega V \cos\theta$$

$$\rho_i \cos\theta = y_i \qquad V_i^2 = V^2 + \omega^2 \rho_i^2 + 2\omega V y_i$$

$$T_i = \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \frac{1}{2} m_i V^2 + \frac{1}{2} m_i \omega^2 \rho_i^2 + \omega V m_i y_i$$

$$\sum T_i = T = \frac{1}{2} V^2 \sum m_i + \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i \rho_i^2 + V\omega \sum m_i y_i$$

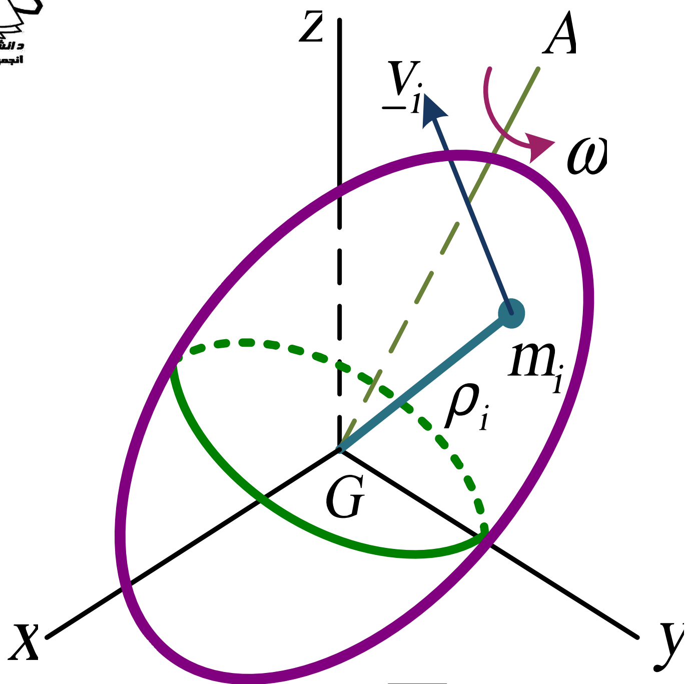
$$\bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = 0 \rightarrow \sum m_i y_i = 0 \qquad \sum m_i \rho_i^2 = \int \rho^2 dm = I$$

$$T=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

انرژی جنبشی دورانی

انرژی جنبشی انتقالی

۹-۵ اندازه حرکت زاویه ای جسم صلب در فضا



$$\underline{H}_i)_G = \underline{\rho}_i \times (m_i \underline{V}_i)$$

$$\underline{V}_i = \underline{\omega} \times \underline{\rho}_i$$

$$\underline{H}_i)_G = m_i \underline{\rho}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}_i)$$

$$\sum \underline{H}_i)_G = \underline{H})_G = \sum m_i \underline{\rho}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}_i) = \int \underline{\rho} \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}) dm$$

$$\underline{H})_G = \int \underline{\rho} \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho})\,dm$$

$$\underline{\rho} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} \qquad \underline{\omega} = \omega_x \underline{i} + \omega_y \underline{j} + \omega_z \underline{k}$$

$$\underline{\omega} \times \underline{\rho} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$(z\omega_y - y\omega_z)\underline{i} - (z\omega_x - x\omega_z)\underline{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\underline{k} = \alpha\underline{i} + \beta\underline{j} + \gamma\underline{k}$$

$$\alpha = z\omega_y - y\omega_z \qquad \beta = x\omega_z - z\omega_x \qquad \gamma = y\omega_x - x\omega_y$$

$$\underline{\omega} \times \underline{\rho} = \alpha\underline{i} + \beta\underline{j} + \gamma\underline{k}$$

$$\alpha = z\omega_y - y\omega_z \qquad \beta = x\omega_z - z\omega_x \qquad \gamma = y\omega_x - x\omega_y$$

$$\underline{\omega} \times \underline{\rho} = \alpha \underline{i} + \beta \underline{j} + \gamma \underline{k}$$

$$\underline{\rho} \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} =$$

$$(y\gamma - \beta z)\underline{i} - (\gamma x - \alpha z)\underline{j} + (\beta x - \alpha y)\underline{k} =$$

$$\left[(y\omega_x - x\omega_y)y - (x\omega_z - z\omega_x)z\right]\underline{i} + \left[(z\omega_y - y\omega_z)z - (y\omega_x - x\omega_y)x\right]\underline{j}$$

$$+\left[(x\omega_z - z\omega_x)x - (z\omega_y - \omega_z y)y\right]\underline{k} =$$

$$\left[(y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z\right]\underline{i} +$$

$$\left[-\omega_x yx + (x^2 + z^2)\omega_y - yz\omega_z\right]\underline{j} + \left[-zx\omega_x - zy\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z\right]\underline{k}$$

$$\underline{H})_G = \int \underline{\rho} \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho})\, dm =$$

$$\left[\omega_x \int (y^2 + z^2)\, dm - \omega_y \int xy\, dm - \omega_z \int xz\, dm\right] \underline{i}$$

$$+ \left[-\omega_x \int yx\, dm + \omega_y \int (x^2 + z^2)\, dm - \omega_z \int yz\, dm\right] \underline{j} +$$

$$\left[-\omega_x \int zx\, dm - \omega_y \int zy\, dm + \omega_z \int (x^2 + y^2)\, dm\right] \underline{k}$$

$$\underline{H})_G = (I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z)\underline{i} + (-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z)\underline{j}$$

$$+ (-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\underline{k} = H_x \underline{i} + H_y \underline{j} + H_z \underline{k}$$

$$\begin{cases} H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y = -I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y = -I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \qquad \begin{cases} I_{xy} = I_{yx} \\ I_{xz} = I_{zx} \\ I_{yz} = I_{zy} \end{cases}$$

به ماتریس های ستونی، vectorمی گویند.

با دانستن ۶ مؤلفه می توان تمام مؤلفه های ماتریس اینرسی را به دست آورد.

$$\boxed{\{H\} = [I]\{\omega\}}$$

اگر هندسه جسم متقارن باشد، مشروط بر این که دستگاه مختصات بر مرکزجرم جسم یعنی نقطه G منطبق باشد

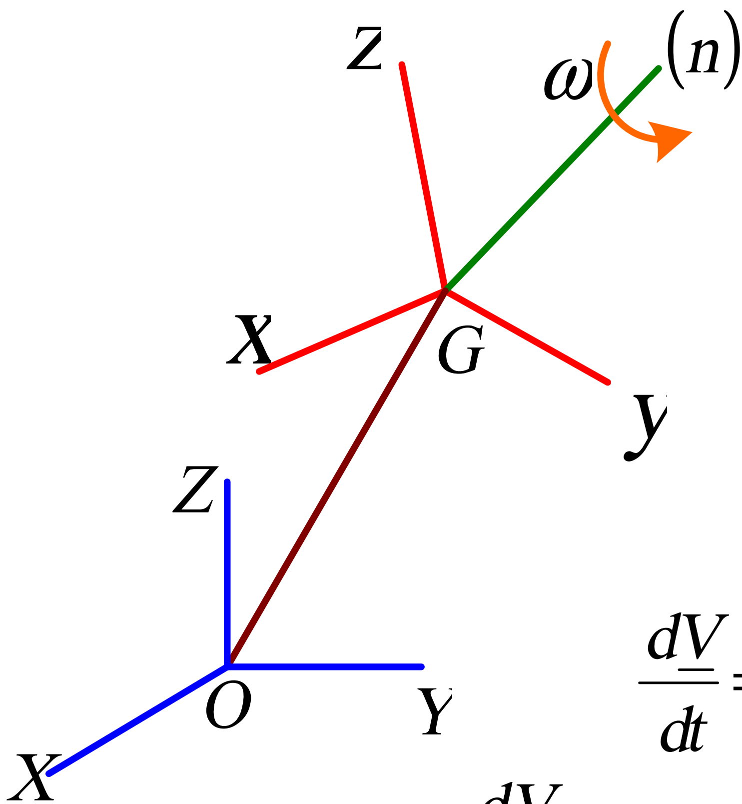
$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

در چنین حالتی تانسور اینرسی به صورت قطری درخواهد آمد.

$$\underline{H} = H_x \underline{i} + H_y \underline{j} + H_z \underline{k} = I_{xx}\omega_x \underline{i} + I_{yy}\omega_y \underline{j} + I_{zz}\omega_z \underline{k}$$

$$H_x = I_{xx}\omega_x \qquad H_y = I_{yy}\omega_y \qquad H_z = I_{zz}\omega_z$$

۹-۶ معادلات اویلر



$$\dot{\underline{i}} = \underline{\omega} \times \underline{i}$$

$$\dot{\underline{j}} = \underline{\omega} \times \underline{j}$$

$$\dot{\underline{k}} = \underline{\omega} \times \underline{k}$$

$$\underline{V} = V_x \underline{i} + V_y \underline{j} + V_z \underline{k}$$

$$\frac{d\underline{V}}{dt} = \dot{V}_x \underline{i} + \dot{V}_y \underline{j} + \dot{V}_z \underline{k} + V_x \dot{\underline{i}} + V_y \dot{\underline{j}} + V_z \dot{\underline{k}}$$

$$\frac{d\underline{V}}{dt} = \dot{V}_x \underline{i} + \dot{V}_y \underline{j} + \dot{V}_z \underline{k} + \underline{\omega} \times (V_x \underline{i} + V_y \underline{j} + V_z \underline{k})$$

$$\frac{d\underline{V}}{dt} = \dot{V}_x \underline{i} + \dot{V}_y \underline{j} + \dot{V}_z \underline{k} + \underline{\omega} \times \underline{V}$$

$$\underline{H} = H_x\underline{i} + H_y\underline{j} + H_z\underline{k} \qquad \frac{d\underline{H}}{dt} = \dot{H}_x\underline{i} + \dot{H}_y\underline{j} + \dot{H}_z\underline{k} + \underline{\omega}\times\underline{H}$$

$$\underline{\omega}\times\underline{H} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} =$$

$$(\omega_y H_z - \omega_z H_y)\underline{i} - (\omega_x H_z - \omega_z H_x)\underline{j} + (\omega_x H_y - \omega_y H_x)\underline{k}$$

$$\frac{d\underline{H}}{dt} = \dot{H}_x\underline{i} + \dot{H}_y\underline{j} + \dot{H}_z\underline{k} + (\omega_y H_z - \omega_z H_y)\underline{i} + (\omega_z H_x - \omega_x H_z)\underline{j}$$

$$+(\omega_x H_y - \omega_y H_x)\underline{k} \quad = (\dot{H}_x + \omega_y H_z - \omega_z H_y)\underline{i} + (\dot{H}_y + \omega_z H_x - \omega_x H_z)\underline{j}$$

$$+(\dot{H}_z + \omega_x H_y - \omega_y H_x)\underline{k}$$

$$\frac{d\underline{H}}{dt}=(\dot{H}_x+\omega_y H_z-\omega_z H_y)\underline{i}+(\dot{H}_y+\omega_z H_x-\omega_x H_z)\underline{j}$$
$$+(\dot{H}_z+\omega_x H_y-\omega_y H_x)\underline{k}$$

$$\sum \underline{M}=\sum M_x\underline{i}+\sum M_y\underline{j}+\sum M_z\underline{k}=\frac{d\underline{H}}{dt}$$

$$\sum \underline{M}=(\dot{H}_x+\omega_y H_z-\omega_z H_y)\underline{i}+(\dot{H}_y+\omega_z H_x-\omega_x H_z)\underline{j}$$
$$+(\dot{H}_z+\omega_x H_y-\omega_y H_x)\underline{k}$$

$$\boxed{\begin{cases}\sum M_x=\dot{H}_x+\omega_y H_z-\omega_z H_y\\ \sum M_y=\dot{H}_y+\omega_z H_x-\omega_x H_z\\ \sum M_z=\dot{H}_z+\omega_x H_y-\omega_y H_x\end{cases}}$$

$$\{H\}=[I]\{\omega\}$$

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y = -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{H}_x = I_{xx}\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y - I_{xz}\dot{\omega}_z \\ \dot{H}_y = -I_{yx}\dot{\omega}_x + I_{yy}\dot{\omega}_y - I_{yz}\dot{\omega}_z \\ \dot{H}_z = -I_{zx}\dot{\omega}_x - I_{zy}\dot{\omega}_y + I_{zz}\dot{\omega}_z \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \sum M_x = \dot{H}_x + \omega_y H_z - \omega_z H_y \\ \sum M_y = \dot{H}_y + \omega_z H_x - \omega_x H_z \\ \sum M_z = \dot{H}_z + \omega_x H_y - \omega_y H_x \end{cases}}$$

$$\sum M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y - I_{xz}\dot{\omega}_z + \omega_y(-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z)$$
$$-\omega_z(-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z)$$

معادلات اویلر

$$\sum M_y = \ldots \qquad \sum M_z = \ldots.$$

اگر هندسه جسم متقارن باشد ودستگاه مختصات بر مرکز جرم
جسم منطبق باشد

$$H_x = I_{xx}\omega_x \quad H_y = I_{yy}\omega_y \quad H_z = I_{zz}\omega_z$$

$$\dot{H}_x = I_{xx}\dot{\omega}_x \;,\; \dot{H}_y = I_{yy}\dot{\omega}_y \;,\; \dot{H}_z = I_{zz}\dot{\omega}_z$$

$$\boxed{\begin{cases} \sum M_x = \dot{H}_x + \omega_y H_z - \omega_z H_y \\ \sum M_y = \dot{H}_y + \omega_z H_x - \omega_x H_z \\ \sum M_z = \dot{H}_z + \omega_x H_y - \omega_y H_x \end{cases}}$$

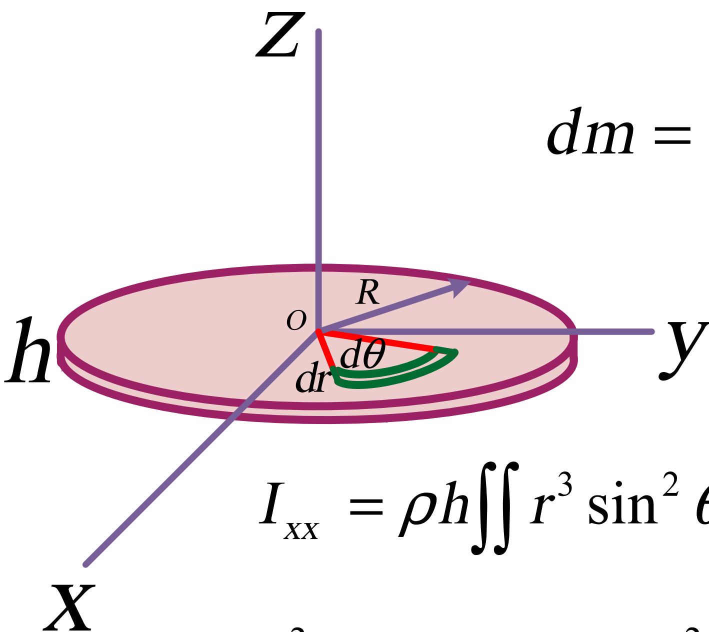
$$\sum M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y I_{zz}\omega_z - \omega_z I_{yy}\omega_y = I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_z\omega_y$$

$$\sum M_y = I_{yy}\dot{\omega}_y + \omega_z I_{xx}\omega_x - \omega_x I_{zz}\omega_z = I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_z\omega_x$$

$$\sum M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x I_{yy}\omega_y - \omega_y I_{xx}\omega_x = I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_x$$

مسایل

مثال: ممان اینرسی جرمی دیسکی به شعاع R و جرم m را نسبت به محورهای xx, yy, zz تعیین کنید.



$$dm = \rho\, dV \qquad dV = hrd\theta\, dr$$

$$dm = \rho hrdrd\,\theta \qquad I_{xx} = \int r^2 \sin^2\theta dm$$

$$I_{xx} = \rho h \iint r^3 \sin^2\theta drd\theta = \rho h \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \frac{\rho h \pi}{4} R^4$$

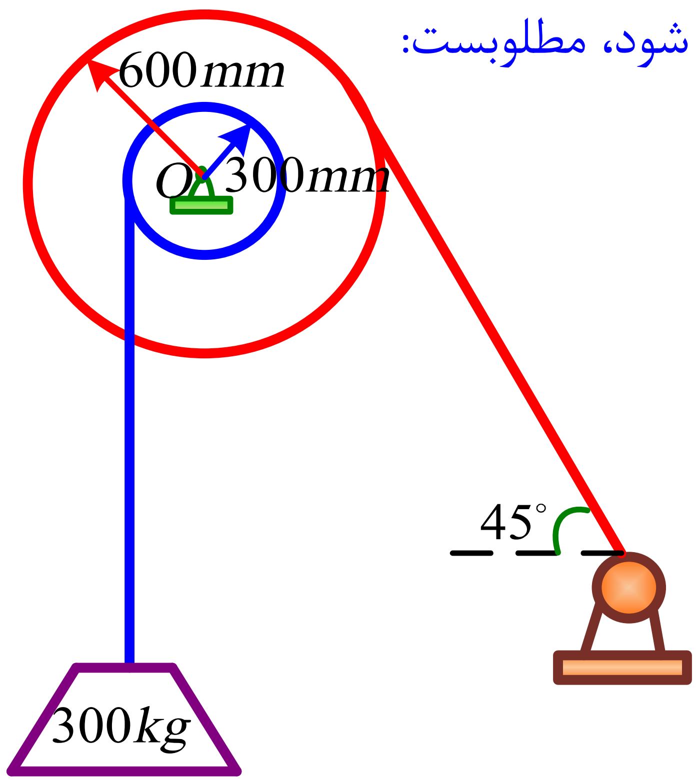
$$V = \pi R^2 h \Rightarrow m = \rho \pi h R^2 \rightarrow I_{xx} = \frac{mR^2}{4}$$

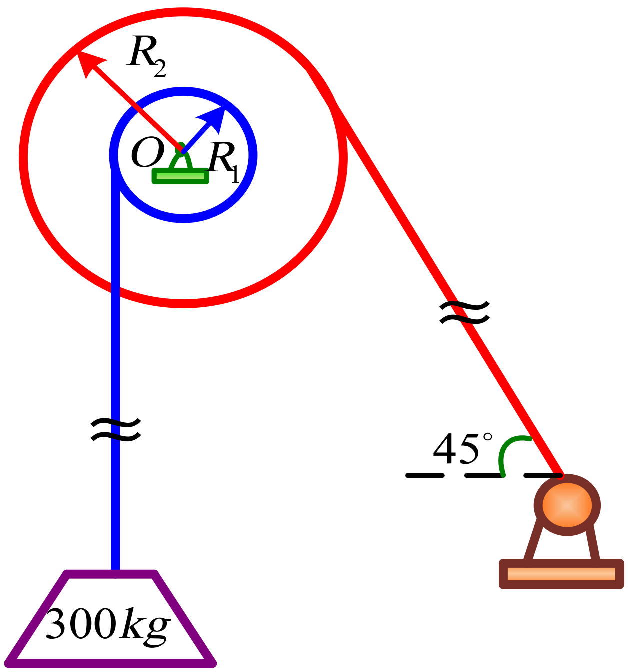
$$I_{yy} = \int r^2 \cos^2\theta dm = \rho h \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{\rho h \pi}{4} R^4 = \frac{mR^2}{4}$$

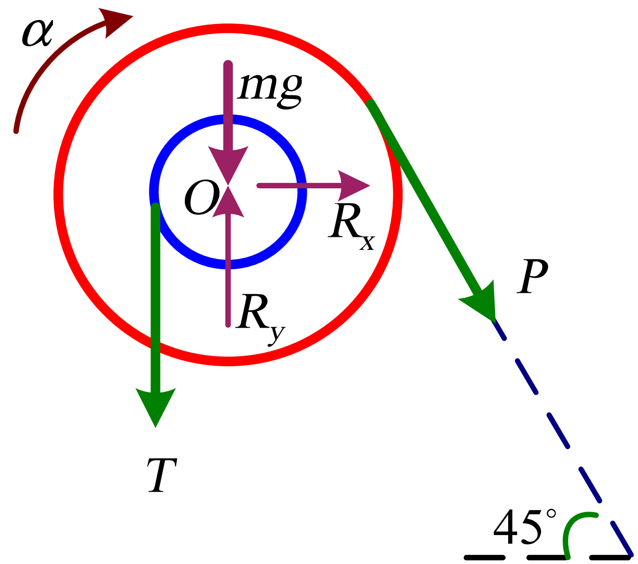
$$I_{zz} = \int r^2 dm = \int \left(x^2 + y^2 \right) dm = I_{xx} + I_{yy} = \frac{mR^2}{2}$$

مثال: برای بالا کشیدن یک جسم 300 kg از مکانیزم نشان داده شده استفاده می شود. قرقره ها به هم چسبیده مانند جسم یکپارچه حول مرکز جرمشان (O) می چرخند.
مجموع وزن قرقره ها 150 kg است.
و شعاع چرخش حول O، 450 mm می باشد.
اگر کشش ثابت 1.8KN به وسیله موتور اعمال شود، مطلوبست:

- شتاب قائم جرم 300 kg؟
- نیرو های عکس العمل در O؟

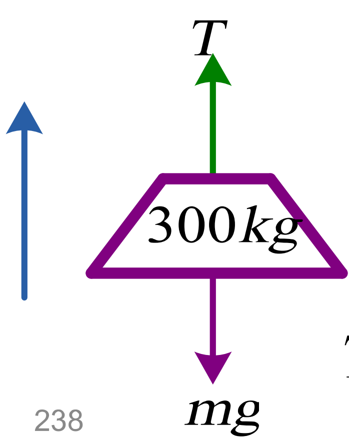






$$\sum M_0 = I_0\alpha \qquad I_0 = m k^2$$

$$PR_2 - TR_1 = I_o\alpha = m k^2\alpha \qquad 0.6(1800) - 0.3T = 150(0.45)^2\alpha$$

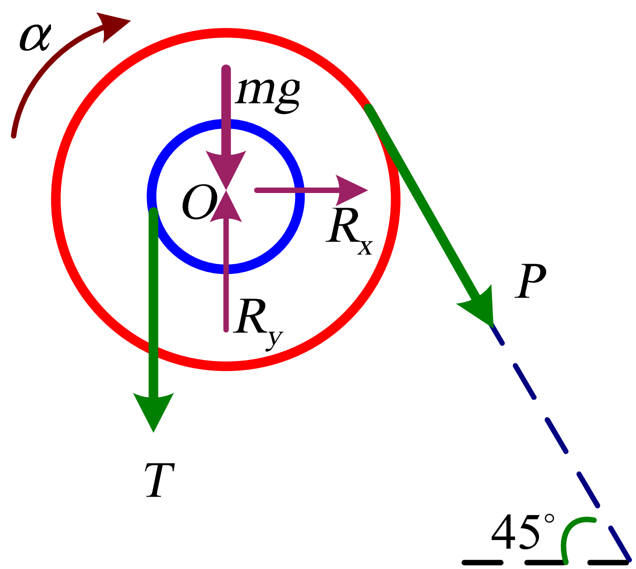


$$\sum F_y = ma_y \rightarrow T - mg = ma_y \quad T - 300(10) = 300a_y$$

$$a_y = R_1\alpha \rightarrow a_y = 0.3\alpha$$

$$T - 3000 = 300(0.3\alpha) \rightarrow T - 3000 = 90\alpha$$

$$T = 3282.3 \quad N \qquad a_y = 0.94 \quad m/s^2 \quad \alpha = 3.14 rad/s^2$$



$$\sum F_x = 0 \rightarrow \quad R_x + P\cos 45^\circ = 0$$

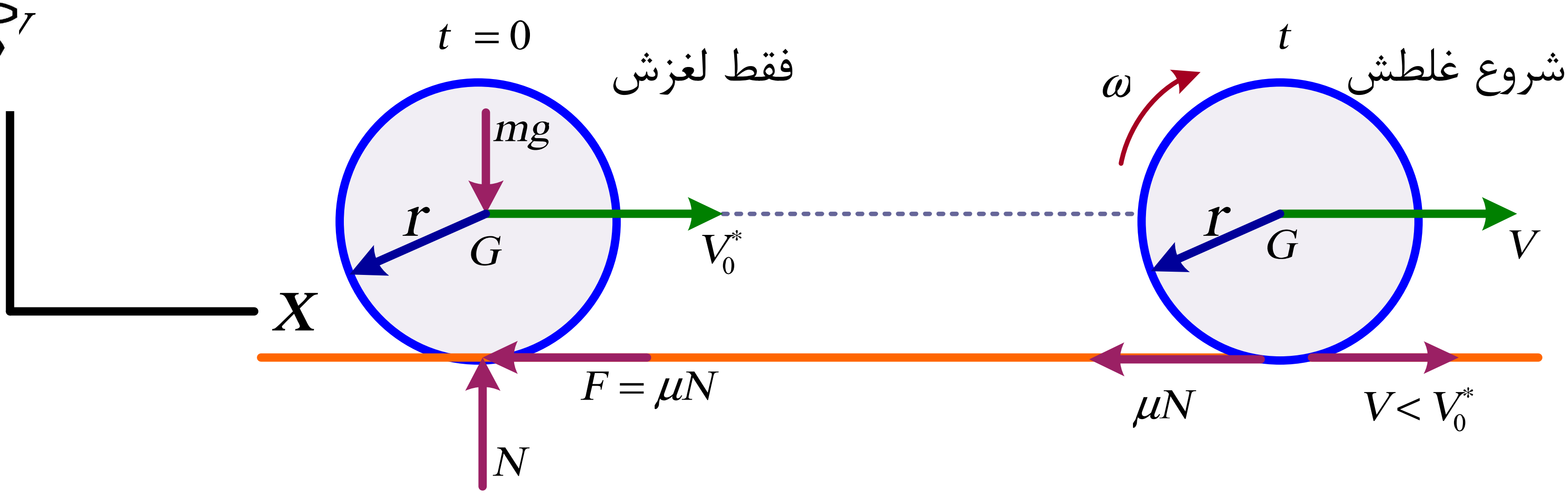
$$R_x = -900\sqrt{2} = -1272.8$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \quad R_y - T - mg - P\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$R_y = 3282.3 + 1500 + 1800\frac{\sqrt{2}}{2} = 6055\,N$$

مثال: کره ای به جرم m و شعاع r روی یک سطح افقی با ضریب اصطکاک μ پرتاب می شود. در صورتی که سرعت خطی پرتاب برای مرکز کره برابر V_0^* و سرعت زاویه ای پرتاب $\omega_0=0$ باشد و کره ابتدا شتاب کند شونده به خود گرفته و سپس به حرکت یکنواخت برسد، مطلوب است:

- شتاب خطی و زاویه ای کره؟
- زمان لازم برای آن که به حرکت یکنواخت برسد؟
- فاصله ای که قبل از حرکت یکنواخت طی می کند؟



$$\sum F_y = 0 \rightarrow N - mg = 0 \rightarrow N = mg \qquad \sum F_x = ma_x \rightarrow -\mu N = ma_x$$

$$\boxed{a_x = -\mu g} \qquad \sum M = I_G \alpha \qquad \mu N r = \frac{2}{5} m r^2 \alpha = \mu m g r \qquad \boxed{\alpha = \frac{5}{2} \mu \frac{g}{r}}$$

$$V = V_0 + a_x t \qquad V = V_0^* - \mu g t \qquad \omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \omega_0 = 0$$

$$V = r\omega = r\alpha t \rightarrow \qquad V = r\alpha t = \frac{5}{2} \mu g t \qquad V_0^* = \frac{7}{2} \mu g t$$

$$\boxed{t = \frac{2}{7} \frac{V_0^*}{\mu g}}$$

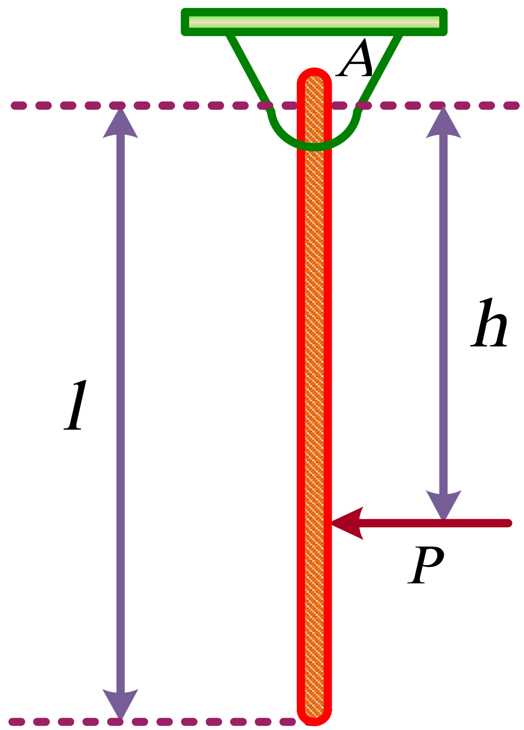
$$\boxed{t = \frac{2}{7}\frac{V_0^*}{\mu g}} \qquad \boxed{a_x = -\mu g} \qquad x = \frac{1}{2}a_x t^2 + V_0^* t$$

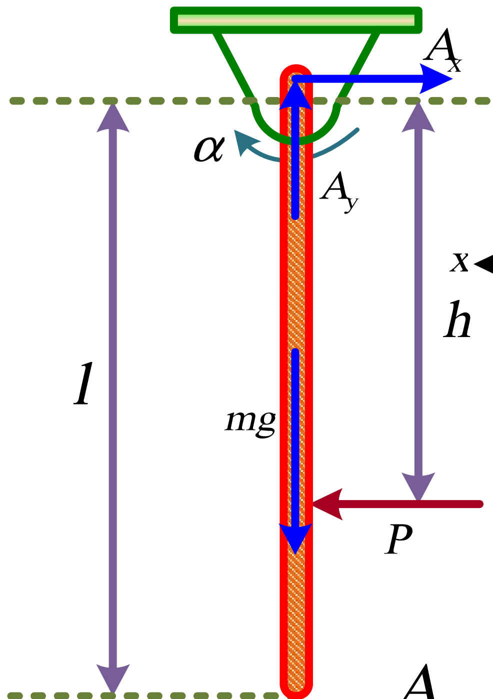
$$x = \frac{-1}{2}\mu g\left(\frac{4}{49}\frac{V_0^{*2}}{\mu^2 g^2}\right) + V_0^*\left(\frac{2}{7}\frac{V_0^*}{\mu g}\right)$$

$$\boxed{x = \frac{12}{49}\frac{V_0^{*2}}{\mu g}}$$

مثال: میله ای نازک به طول l و وزن w به طور آزاد از نقطه A آویزان شده است. هرگاه نیروی افقی p مطابق شکل بر آن اعمال شود معین کنید:

- فاصله ی h را برای آنکه مؤلفه ی افقی عکس العمل در نقطه A برابر صفر شود.
- شتاب زاویه ای در این حالت.
- موقعیت مرکز تصادم.





$$\sum M_A = I_A\alpha \rightarrow \quad ph = I_A\alpha$$

$$I_A = I_G + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

$$ph = \frac{1}{3}ml^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3ph}{ml^2}$$

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow p - A_x = ma_x = m\frac{l}{2}\alpha = \frac{3}{2}\frac{ph}{l}$$

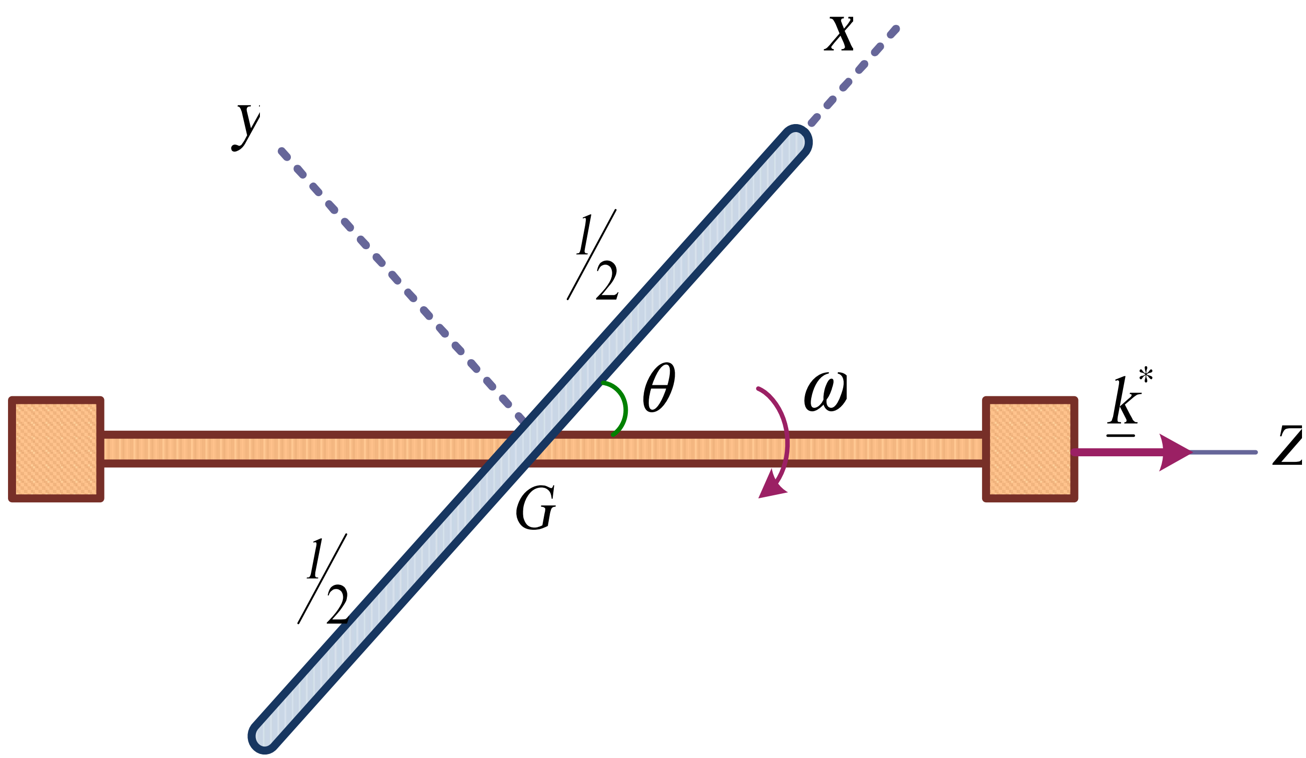
$$A_x = 0 \quad h = \frac{2}{3}l \quad \alpha = \frac{3ph}{ml^2} = \frac{3p}{ml^2}(\frac{2}{3}l) = \frac{2p}{ml}$$

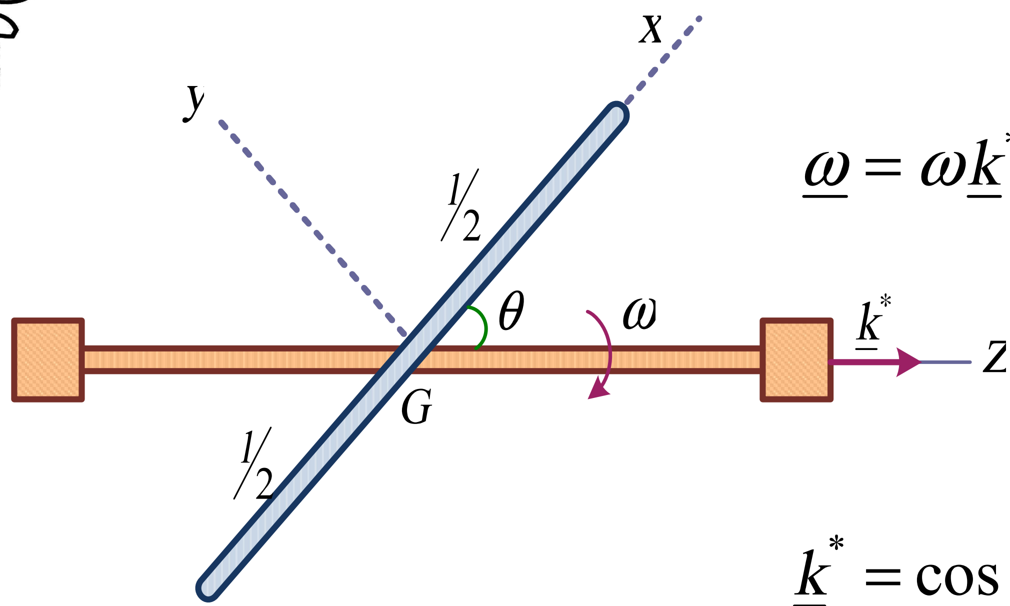
$$q = \frac{k_G^2 + \bar{r}^2}{\bar{r}} \quad I_G = \frac{1}{12}ml^2 \rightarrow mk_G^2 = \frac{1}{12}ml^2 \quad k_G = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

$$\bar{r} = \frac{l}{2} \qquad q = \frac{\frac{1}{12}l^2 + \frac{l^2}{4}}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{3}l$$

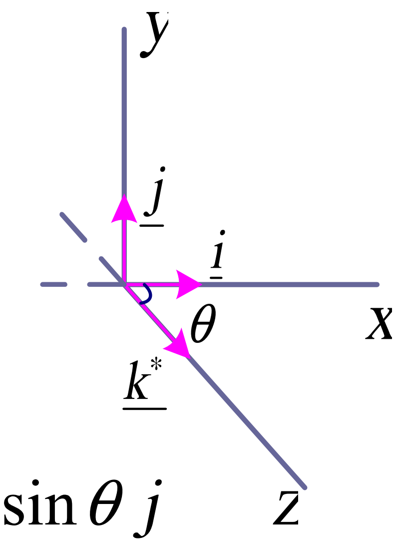
حسینی هاشمی

مثال: میله ای به جرم m و طول l مطابق شکل روی محوری نصب شده است. در صورتیکه سرعت زاویه ای محور ω و ثابت و در جهت موافق عقربه های ساعت باشد بردار اندازه حرکت زاویه ای حول نقطه G وبردار گشتاور راتعیین کنید (محور z بر محور Z عمود است)





$$\underline{\omega} = \omega \underline{k}^*$$



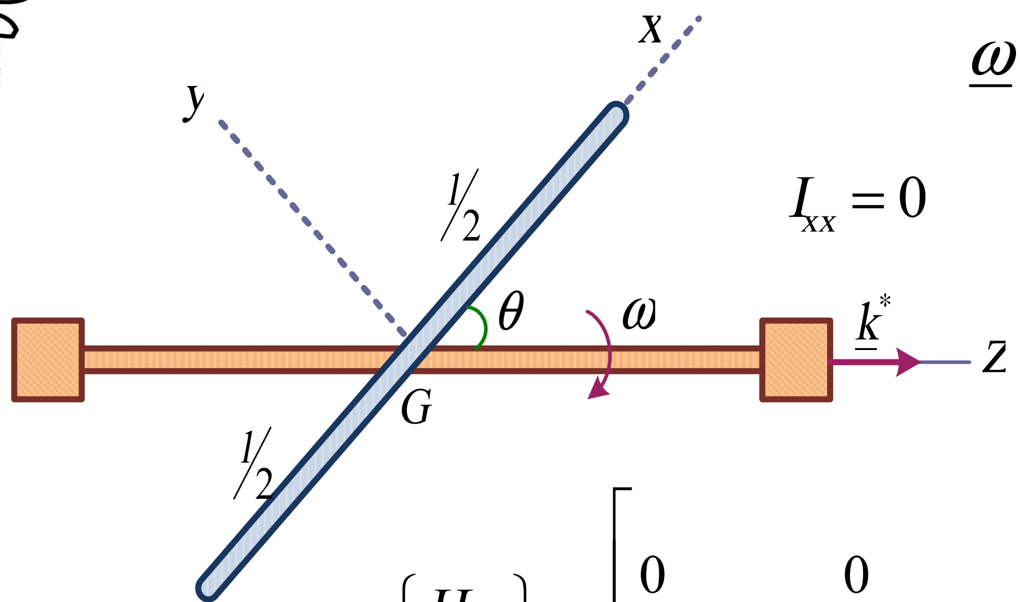
$$\underline{k}^* = \cos\theta\,\underline{i} - \sin\theta\,\underline{j}$$

$$\underline{\omega} = \omega\cos\theta\,\underline{i} - \omega\sin\theta\,\underline{j}$$

$$\{H\} = [I]\{\omega\}$$

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

هندسه جسم متقارن ودستگاه مختصات
هم بر مر کز جرم جسم منطبق است



$$\underline{\omega} = \omega\cos\theta\,\underline{i} - \omega\sin\theta\,\underline{j}$$

$$I_{xx} = 0 \qquad I_{yy} = \frac{1}{12}mL^2 \qquad I_{zz} = \frac{1}{12}mL^2$$

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega\cos\theta \\ -\omega\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} H_x = 0 \\ H_y = -\frac{1}{12}ml^2\omega\sin\theta \\ H_z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\underline{H} = H_x\underline{i} + H_y\underline{j} + H_z\underline{k} = -\frac{1}{12}ml^2\omega\sin\theta\,\underline{j}}$$

$$\boxed{\underline{H} = H_x \underline{i} + H_y \underline{j} + H_z \underline{k} = -\frac{1}{12} ml^2 \omega \sin\theta \, \underline{j}}$$

$$\underline{\omega} = \omega \cos\theta \, \underline{i} - \omega \sin\theta \, \underline{j}$$

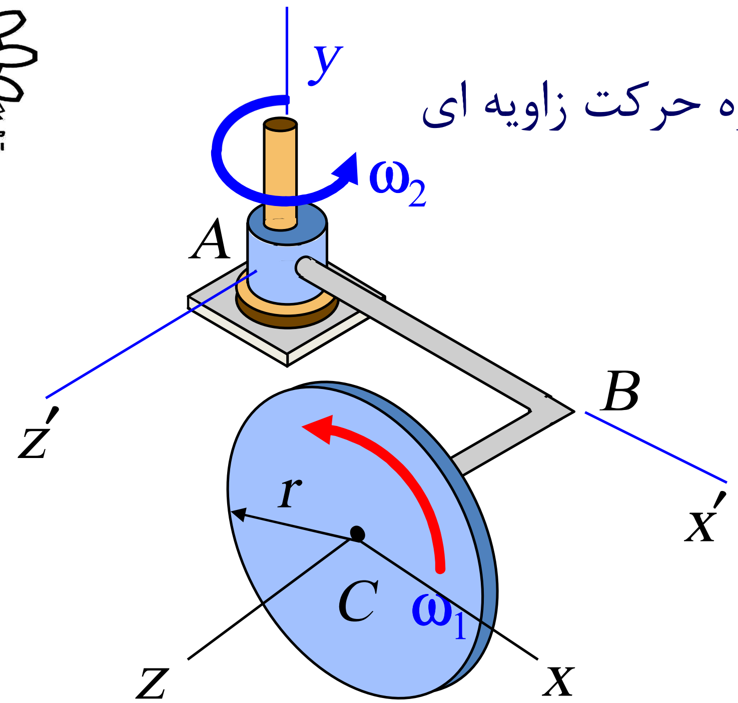
$$\sum \underline{M} = \frac{d\underline{H}}{dt} = -\frac{1}{12} ml^2 \dot{\omega} \sin\theta \, \underline{j} - \frac{1}{12} ml^2 \omega \dot{\theta} \cos\theta \, \underline{j} - \frac{1}{12} ml^2 \omega \sin\theta \, \dot{\underline{j}}$$

$$\sum \underline{M} = -\frac{1}{12} ml^2 \omega (\dot{\theta} \cos\theta \, \underline{j} + \sin\theta \, \dot{\underline{j}})$$

$$\dot{\underline{j}} = \underline{\omega} \times \underline{j} = (\omega \cos\theta \, \underline{i} - \omega \sin\theta \, \underline{j}) \times \underline{j} = \omega \cos\theta \, \underline{k}$$

$$\boxed{\sum \underline{M} = -\frac{1}{12} ml^2 \omega \cos\theta (\dot{\theta} \, \underline{j} + \omega \sin\theta \, \underline{k})}$$

مثال: برای سیستم نشانداده شده در شکل بردار اندازه حرکت زاویه ای دیسک را حول مرکز جرمش بدست آورید.



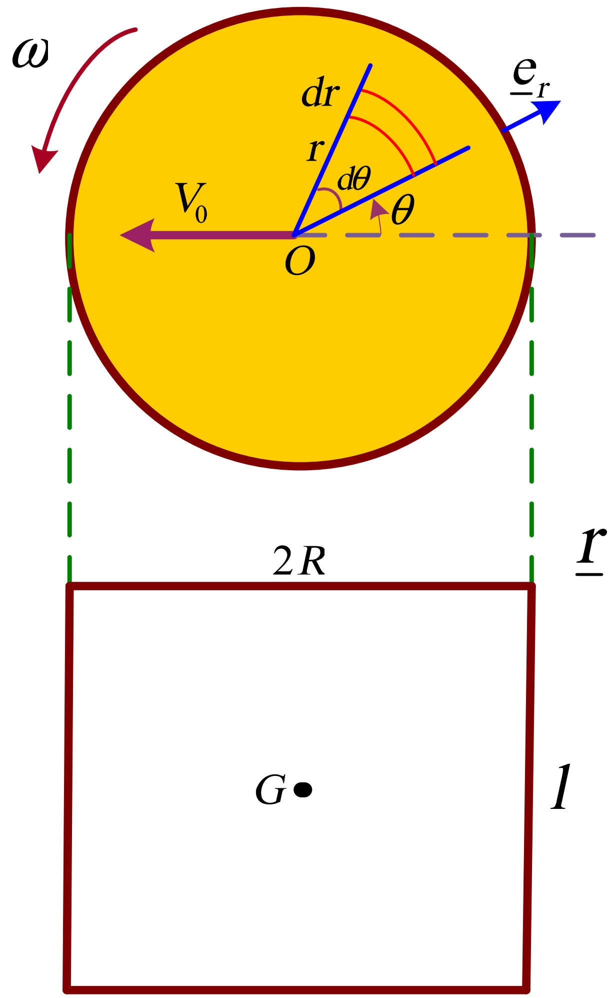
$$\underline{\omega} = \omega_2 \underline{j} + \omega_1 \underline{k}$$

$$\boxed{\{H\} = [I]\{\omega\}}$$

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mr^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ \omega_1 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{H} = H_x \underline{i} + H_y \underline{j} + H_z \underline{k} = \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{1}{2}\omega_2 \underline{j} + \omega_1 \underline{k}\right)$$

مثال: استوانه ای به طول l و شعاع R و جرم مخصوص ρ مطابق شکل به سمت چپ می غلتد. به ترتیبی که سرعت مرکز جرم آن برابر V_0 است. بردار اندازه حرکت زاویه ای استوانه را حول مرکز جرمش تعیین کنید.



$$dm = \rho\, dv$$

$$dm = \rho\, l r\, dr\, d\theta$$

$$d\underline{H}_0 = \underline{r} \times (\underline{V}\, dm)$$

$$\underline{r} = r\underline{e}_r \qquad \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{V} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\underline{e}}_r = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta$$

$$\underline{r} \times \underline{V} = (r\underline{e}_r) \times (\dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta) = r^2\dot{\theta}\underline{e}_z$$

$$d\underline{H}_0 = r^2\dot{\theta}\, dm\, \underline{e}_z = \rho\, l r^3 \dot{\theta}\, dr\, d\theta\, \underline{e}_z$$

$$d\underline{H}_0 = \rho l r^3 \dot{\theta}\, dr\, d\theta\, \underline{e}_z$$

$$\underline{H}_0 = \rho l \dot{\theta}\, \underline{e}_z \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\rho l \dot{\theta}\, \underline{e}_z \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho l R^4 \dot{\theta}\, \underline{e}_z$$

$$m = \pi\rho l R^2$$

$$\underline{H}_0 = \frac{1}{2}\pi\rho l R^4 \dot{\theta}\, \underline{e}_z = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}\, \underline{e}_z = I\omega\, \underline{e}_z$$

مراجع

1-Engineering Mechanics: Dynamics, SI 6th Edition
by J. L. Meriam, L. G. Kraige
April 2008, Wiley

2-Vector Mechanics for Engineers: Dynamics,
by Ferdinand Beer, Jr., E. Russell Johnston,
Elliot Eisenberg and Phillip Cornwell
(Jan 26, 2009), Amazon

3-Engineering Mechanics: Dynamics
by Irving N. Shames.