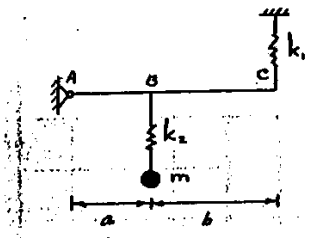
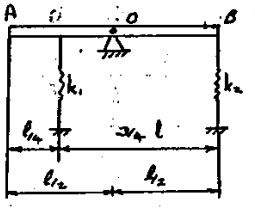
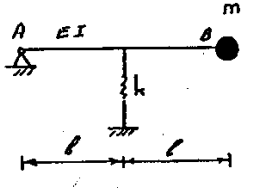
۱-۱ تیر AC صلب و بدون وزن فرض می‌شود. سیستم دو درجه آزاد ارتعاش تمام جرم m را بدست آورده و فرکانس ارتعاش را تعیین کنید.



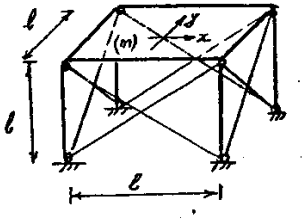
۱-۲ تیر AB صلب و جرم کل آن m می‌باشد ارتعاش در راستای قائم حول نقطه O بررسی کند و فرکانس ارتعاش را بدست آورده. زاویه دوران را کوچک فرض کنید.



۱-۳ تیر AB بدون وزن و الاستیک فرض می‌شود فرکانس ارتعاش جرم m را تعیین کنید.



۱-۴ ساختمان صلبی طبقه‌ی بر روی ۴ ستون دارای ۳ درجه آزادی می‌باشد. فرکانس ساختمان را در ارتعاش در امتداد (x) محاسبه کنید. از سختی تیرها در مقابل ستون‌ها صرفنظر کنید. سطح مقطع ستون‌ها A و جرم هر طبقه m می‌باشد.



جواب ۱-۱-

- $F_1 = K_1\Delta_1 = K_1 l\theta$
  $F_2 = K_2\Delta_2 = K_2(x - a\theta)$
  $\frac{F_1}{F_2} = \frac{a}{l} \rightarrow F_1 \cdot l = F_2 \cdot a$
  $\rightarrow K_1 l^2\theta = K_2 a x - K_2 a^2\theta$
  $\rightarrow \theta = \frac{aK_2}{l^2K_1 + a^2K_2}x$

- تعادل دینامیکی m : $m\ddot{x} + F_2 = mg$
  $F_2 = \frac{l}{a}F_1 = K_1\frac{l^2}{a}\theta$
  $\rightarrow m\ddot{x} + \underbrace{\frac{K_1K_2l^2}{l^2K_1 + a^2K_2}}_{\bar{K}}x = mg$

$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\bar{K}}{m}}$ ...

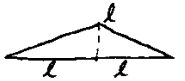
جواب ۱-۲-

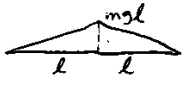
- تعادل دینامیکی : $I_{mo}\ddot{\theta} + F_1\frac{l}{4} + F_2\frac{l}{2} = 0$
  $F_1 = K_1\Delta_1 = K_1\frac{l}{4}\theta$
  $F_2 = K_2\Delta_2 = K_2\frac{l}{2}\theta$
  $I_{mo} = 2\int_0^{l/2}\frac{m}{l}x^2dx = \frac{ml^2}{12}$
  $\rightarrow \frac{ml^2}{12}\ddot{\theta} + \left(\frac{2K_2 + K_1}{4}\right)\frac{l^2}{4}\theta = 0$
  $\rightarrow m\ddot{\theta} + \underbrace{2\left(\frac{2K_2 + K_1}{4}\right)}_{\bar{K}}\theta = 0$

$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\bar{K}}{m}}$ ...

جواب ۱-۳-

- $\sum M_A = 0 \rightarrow F_K = 2mg$
  $F_K = k\Delta_K$, $\Delta_1 = 2\Delta_K$
  $\rightarrow \Delta_1 = \frac{4mg}{K}$

- m:  : تغییر واحد

M:  : mg تغییر

$\rightarrow$ روش کار مجازی : $\Delta_2 = \frac{1}{EI}\left(\frac{mgl^2}{2} \times \frac{2l}{3}\right)$

$\rightarrow \Delta_2 = \frac{2mgl^3}{3EI}$

$\rightarrow \Delta_{st} = \frac{4mg}{K} + \frac{2mgl^3}{3EI} = \frac{mg}{\bar{K}} \rightarrow \bar{K} = \frac{1}{\frac{4}{K} + \frac{2l^3}{3EI}} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\bar{K}}{m}}$ ...

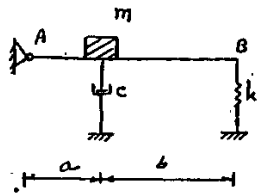
جواب ۱-۴-

- $\bar{K} = 4K$: دو میله فنر دو میله کشش

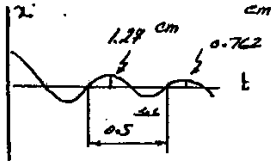
- $K = \frac{AE}{L}\cos^2\theta$, $L = \sqrt{2}l$, $\theta = 45^\circ \rightarrow K = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{AE}{l}$

$\rightarrow \bar{K} = 2\sqrt{2}\frac{AE}{l} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\bar{K}}{m}}$ ...

۲-۱ جرم m روی تیر صلب و بدون وزن نامبرده AB قرار دارد. معادله دیفرانسیل ارتعاش قائم سیستم را بدون میرایی بنویسید.



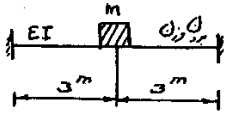
۲-۲ شکل جواب یک سیستم جرم-فنر (بدون میرایی) بدون نیروی خارجی مطابق شکل میباشد. اگر سختی فنر $k=1450 \frac{N}{cm}$ باشد جرم سیستم را محاسبه کنید.



۲-۳ بر روی تیر الاکلنگ AB، جرم m واقع شده است. اگر سرعت و جابجایی اولیه:

$x_0 = 10\ cm$ ، $\dot{x}_0 = 3\ cm/s$

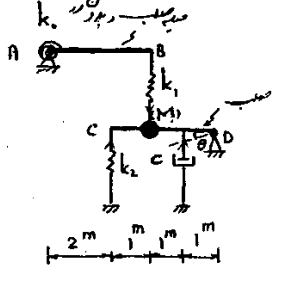
وقتی الاکلنگ از حالت افقی رها شود، کمترین زمان لازم تا رسیدن به حالت افقی را محاسبه کنید.



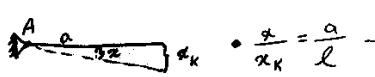
$m = 270\ kg$

$\xi = \%10$

۲-۴ با فرض کوچک بودن θ، معادله دیفرانسیل حرکت سیستم نشان داده شده را بنویسید. میله AB بدون وزن و میله CD دارای جرم یکنواخت m میباشد.



پاسخ ۲-۱



$$\frac{x}{x_K} = \frac{a}{\ell} \rightarrow x_K = \frac{\ell}{a}x \rightarrow F_K = Kx_K = K\frac{\ell}{a}x$$

$$\sum M_A = 0 \xrightarrow{\text{دینامیکی}} m\ddot{x}a + c\dot{x}a + F_K \cdot \ell - mg = 0$$

$$\rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + K\left(\frac{\ell}{a}\right)^2 x = mg$$

تغییر متغیر: $x = \bar{x} + x_s$ ، $mg = K\left(\frac{\ell}{a}\right)^2 x_s$ $\xrightarrow{\text{ساده}}$ $m\ddot{\bar{x}} + c\dot{\bar{x}} + K\left(\frac{\ell}{a}\right)^2 \bar{x} = 0$

$$C_{cr} = 2m\omega = 2m\sqrt{\frac{K}{m}} = 2\frac{\ell}{a}\sqrt{Km} \rightarrow \xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{ac}{2\ell\sqrt{Km}}$$

$$\rightarrow \omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\ell}{a}\right)^2 K}{m}} \times \frac{4\ell^2 Km - a^2c^2}{4\ell^2 Km} = \frac{1}{2m}\sqrt{4Km\frac{\ell^2}{a^2} - c^2}$$

پاسخ ۲-۲

$$\xi = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1.27}{0.762} = 0.081$$

$$T = 0.5 = \frac{2\pi}{\omega_D} \rightarrow \omega_D = 12.57\ rad/s$$

$$\rightarrow \omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} \rightarrow 12.57 = \sqrt{\frac{1450}{m}}\sqrt{1-0.081^2} \rightarrow m = 912\ kg$$

پاسخ ۲-۳

δ_{st} محاسبه: $\delta_{st} = \frac{mg \cdot \ell^3}{192EI} = \frac{22.05}{EI}$

δ_{dy} محاسبه: $K = \frac{192EI}{\ell^3} = 0.189EI \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 0.021\sqrt{EI} \rightarrow \omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 0.021\sqrt{E}$

$$\rightarrow x = e^{-\xi\omega t}\left(\frac{\dot{x}_0 + x_0\xi\omega}{\omega_D}\sin\omega_D t + x_0\cos\omega_D t\right) = \delta_{dy}$$

$$\rightarrow \Delta = \delta_{st} + \delta_{dy} \rightarrow M = \frac{4EI}{\ell^2}\Delta = 70\ N.m$$

پاسخ ۲-۴

$$\sum M_O = 0 \xrightarrow{\text{دینامیکی}} I_{mo}\cdot\ddot{\theta} + M\ddot{\theta}\times 2 + c\dot{x}_1 - K_1x_1\times 2 + K_2x_2\times 2 = 0$$

$$I_{mo} = \frac{m\ell^2}{3} = 4m$$

$$x = 1\times\theta \rightarrow \dot{x} = \dot{\theta}$$

$$x_2 = 2\theta$$

$$x_M = x_1 + 2\theta_0 = 2\theta$$

$$\sum M_A = 0 \xrightarrow{\text{استاتیکی}} k_0\theta_0 = 2K_1x_1 \rightarrow \theta_0 = \frac{2K_1x_1}{K_0}$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{2K_0}{9K_1+K_0}\theta$$

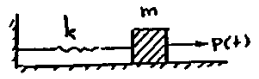
$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} 4m\ddot{\theta} + 2M\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + \left(9K_2 - \frac{4K_1K_0}{9K_1+K_0}\right)\theta = 0$$

دینامیک پایه ۴۰ | استاد اجباری - نیروی هازدنیل - دولت نکته‌گاهی | سال ۱۴۰۳

۳-۱ جواب سیستم تعادل را برای دو حالت زیر پیدا کرده و:

(a) میرایی را درنظر نگیرید.

(b) $\zeta = 1/20$ فرض کنید.



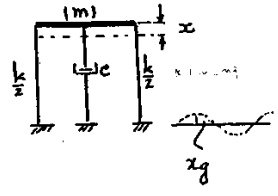
$P(t) = 10 \cos 10t$

$k = 70$ N/cm

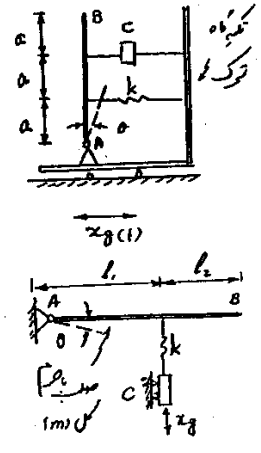
$W = 172$ N

$x_0 = \dot{x}_0 = 0$

۳-۲ جسم‌ای به طبق حرکت x_g حرکت تابع زمان با معادله $x_g = a \sin \bar{\omega} t$ دارد. معادله دیفرانسیل ارتعاش جرم m را بنویسید. سختی فنری شده‌ی k =



۳-۳ میله AB صلب با جرم واحد طول (m) به‌صورت مطابق حرکت آزاد برحسب (θ) نوسان می‌کند. حرکت نکیه‌گاهی برابر $x_g(t)$ بوده و θ را کوچک فرض کنید.



۳-۴ اگر جابجایی سیستم در لحظه t برابر:

$x_g = x_0 \sin \bar{\omega} t$

انجام شود. نیروی وسایل دیفرانسیل حرکت را بنویسید.

جواب ۳-۱-

(a) • $x_0 = \dot{x}_0 = 0 \longrightarrow x_c = x_t = 0$

• $m = \frac{W}{g} = 17.5^{kg} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 20\ rad/s$, $\bar{\omega} = 10\ rad/s$ $\Big\} \longrightarrow \beta = 1/20$, $P_0 = 10\ N \longrightarrow$

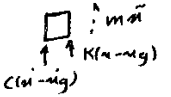
$\longrightarrow f = \frac{1}{V_{00}} \left[(1-1/0)^2 + 0 \right]^{-\frac{1}{2}} = 2.14 \times 10^{-2}$, $\theta = 0 \longrightarrow x_s = x_p =$

$\longrightarrow x_s = x_p = f \sin(10t) \longrightarrow x = x_s + x_t = 2.14 \times 10^{-2} \sin 10t$

(b) (a) مثل $\xrightarrow{\text{تغییر}}$ $\zeta = 1/20$

جواب ۳-۲-

• x: جابجایی کل , $x - x_g$: جابجایی نسبی



$\longrightarrow m\ddot{x} + (\dot{x} - \dot{x}_g)c + (x - x_g)K = 0$

$\longrightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = c\dot{x}_g + Kx_g = ca\bar{\omega}\cos\bar{\omega}t + Ka\sin\bar{\omega}t$

جواب ۳-۳-

• $\sum M_A = 0 \xrightarrow{\text{(دینامیکی)}} I_{Mo} \cdot \ddot{\theta} + c\dot{x}_c \times 2a + Kx_k \times a = -M\ddot{x}_g \times \frac{3}{2}a$

$I_{Mo} = \int r^2 dM = \frac{Ml^2}{3} = \frac{m \times 2a \times 9a^2}{3} = 9ma^2$

$x_c = 2a\theta \longrightarrow \dot{x}_c = 2a\dot{\theta}$, $x_K = a\theta$, $M = 2a \times m$

$\longrightarrow 9ma^2\ddot{\theta} + 4ca^2\dot{\theta} + Ka^2\theta = -\frac{9}{2}am\ddot{x}_g$

$\longrightarrow 9ma\ddot{\theta} + 4c\dot{\theta} + K\theta = -4.5\, m\ddot{x}_g$

جواب ۳-۴-

• $\sum M_A = 0 \xrightarrow{\text{(دینامیکی)}} I_{Mo} \cdot \ddot{\theta} + K(x - x_g) = 0$

$x = l_1\theta$, $I_{Mo} = \frac{ml^2}{3}$, $x_g = x_0 \sin\bar{\omega}t$

$\longrightarrow \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + Kl_1^2\theta = x_0 l_1 K \sin\bar{\omega}t$: معادله حرکت

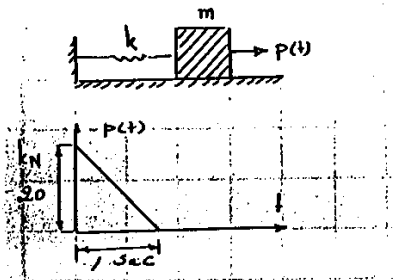
$\longrightarrow m\ddot{\theta} + \underbrace{\left[\frac{3Kl_1^2}{l^2}\right]}_{\bar{K}}\theta = \dots \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{\bar{K}}{m}} = \frac{l_1}{l}\sqrt{\frac{3K}{m}}$

۴-۱ سیستم نشان داده شده بر روی نیروهای داخلی زیر وارد می‌شود. مقدار تغییر مکان جرم m را در زمان‌های زیر بدست آورید

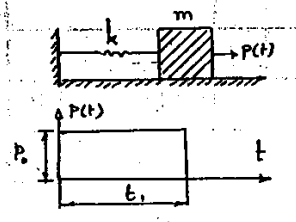
(a) $t = 0.3$ sec

(b) $t = 2$ sec

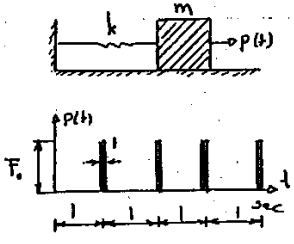
$k = 2$ kN/cm , $m = 50$ tons



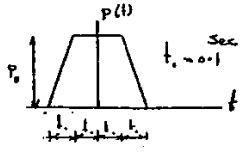
۴-۲ جابجایی سیستم نشان داده شده در $t > t_1$ را بدست آورید.



۴-۳ جرم m در زمان $t = 0$ تحت اثر جابجایی و سرعت اولیه به ارتعاش درمی‌آید. سپس نیروهای هارمونیک زیر تأثیر می‌کنند. در هر یک از حالات جابجایی و سرعت جرم پس از اثر نیروی هارمونیک با جابجایی و سرعت اولیه (در زمان $t = 0$) برابر خواهد بود. m ، k و F_0 را بدست آورید.



۴-۴ سیستم جرم (m) و فنر (k) شکل (۴-۳) تحت اثر نیروی ذوزنقه‌ای شکل قرار می‌گیرد. آیا این نیرو را می‌توان برای دقت قابل قبول، نیروی ضربه‌ای در نظر گرفت؟ جابجایی جرم را بدست آورید.



جواب ۴-۲- برای $t < t_1$ سیستم تحت اثر ارتعاش اجباری تحت بار $P(t)$ است. پس از اتمام t_1، جسم به حالت ارتعاش آزاد در می‌آید که از رابطه SDOF بدون میرایی با حرکت آزادانه می‌کند. x_0 و $\dot{x}_0$ جابجایی و سرعت در لحظه t_1 است:

- $t < t_1$: ارتعاش اجباری $\rightarrow x = \frac{1}{m\omega}\int_0^{t_1} P_0 \sin\omega(t-\tau)d\tau = \frac{P_0}{K}(1-\cos\omega t_1)$
- $t > t_1$: حرکت آزاد $\rightarrow x = x_0\cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t$

$x_0 = \frac{P_0}{K}(1-\cos\omega t_1) \rightarrow \dot{x}_0 = \frac{P_0\omega}{K}\sin\omega t_1$, $t = t - t_1$

$\rightarrow x = \frac{P_0}{K}(1-\cos\omega t_1)\cos\omega(t-t_1) + \frac{P_0\omega}{K}\sin\omega t_1 \sin\omega(t-t_1)$

ساده $\rightarrow x = \frac{P_0}{K}(1-\cos\omega t) - \frac{P_0}{K}(1-\cos\omega(t-t_1))$

جواب ۴-۴- نیروی ضربه‌ای + بدون میرایی است پس:

$$x = \frac{P(t)\Delta t}{m\omega}\sin\omega t = \frac{\frac{1}{2}(1.12+1.14)P_0}{m\omega} = 1.13\frac{P_0}{m\omega} \rightarrow F_{max} = kx_{max} = 1.13\frac{P_0 K}{m\omega}$$

جواب ۴-۱- روندرشد ۴-۲ :

a) $t < 1$ s : ارتعاش اجباری

$P(t) = -2000(t-1)$, $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2\times10^5}{5\times10^4}} = 2$ rad/s $= \omega_D$

$\rightarrow x = \frac{1}{2\times5\times10^4}\int_0^t (-2000(t-1))\sin 2(t-\tau)\,d\tau = -\frac{1}{10}(t-1)(1-\cos 2t)$

$\rightarrow x(0.2) = 0.012$ m

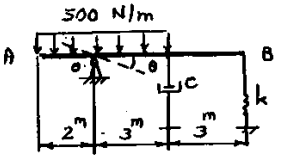
b) $x = -\frac{1}{10}(t-1)(1-\cos 2t) \rightarrow \dot{x} = -\frac{1}{10}(1-\cos 2t) - \frac{2}{10}(t-1)\sin 2t$

$\rightarrow x(1) = 0 = x_0$, $\dot{x}(1) = -0.14 = \dot{x}_0$

$\rightarrow x = x_0\cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t = -\frac{0.14}{2}\sin 2(t-1)$

$\rightarrow x(2) = -0.064$ m

۵-۱ تیر صلب AB تحت اثر بار گسترده‌ی یکنواخت به ارتفاع ۵ در حالت تعادل در وضعیت افقی قرار دارد. معادله‌ی نوسانات آزاد سیستم را در حالت زاویه‌ی θ بنویسید. زاویه‌ی θ را کوچک فرض کنید.

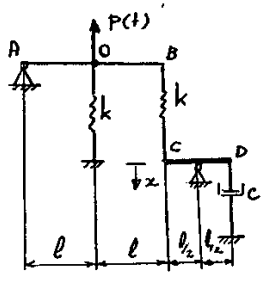


$k = 5000$ N/cm

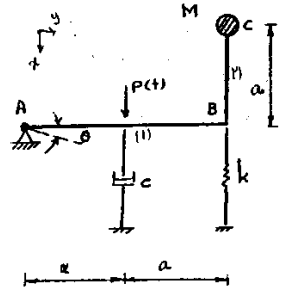
$c = 1000$ N.sec/cm

W (وزن کل تیر) $= 800$ N

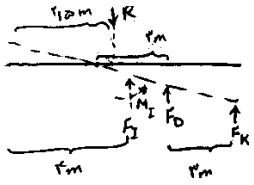
۵-۲ هر تیر AB و CD صلب و متحد جرم کل سیستم m و واحد جرم میله AB هر متر $\frac{m}{4}$ می‌شود. رابطه‌ی نوسانات سیستم را برحسب x بنویسید و ماتریس‌های M^*، C^*، K^* و P^* را مشخص کنید. جای سیستم را کوچک فرض کنید.



۵-۳ قطعه‌ی صلب ABC به شکل مثلث قائم‌الزاویه و جرم واحد طول آن m است. با فرض کوچک بودن θ، معادله‌ی نوسانات حرکت سیستم را برحسب θ بنویسید.



جواب ۵-۱



$$\begin{cases} K = 2-\chi_2 = 10-N & , \delta_R = 1\delta_\theta \\ F_I = m\ddot{x}_I = 2m\ddot{\theta} & , \delta_I = 2\delta_\theta \\ M_I = \frac{m\ell^2}{12}\ddot{\theta} & , \delta_\theta \\ F_K = K\chi_K = 4K\theta & , \delta_K = 4\delta_\theta \\ F_D = c\dot{x}_c = 2c\dot{\theta} & , \delta_D = 2\delta_\theta \end{cases}$$

جابجایی مجازی → $V4K\ddot{\theta} + 9\ldots\ldots\dot{\theta} + 18\ldots\ldots\theta = 1250$

جواب ۵-۲

$$\begin{cases} P(t) & , \delta_P = \frac{1}{2}\delta_{KB} \\ F_I = 0 \quad (m=0 \text{ چون}) & \\ M_I = 0 \quad (m=0 \text{ چون}) & \\ F_{KO} = K\chi_O & , \delta_{KO} = \frac{1}{2}\delta_{KB} \\ F_{KB} = K(\chi - \chi_B) & , \delta_{KB} \end{cases}$$

$\chi_O = \frac{1}{2}\chi_B$ →

$$K(\tfrac{1}{2}\chi_B)\tfrac{1}{2}\delta_{KB} - K(\chi-\chi_B)\delta_{KB} + P(t)\tfrac{1}{2}$$

→

$$\chi_B = \frac{4}{5}\chi - \frac{2}{5}\frac{P(t)}{K}$$

$$\begin{cases} F_I = 0 \quad (\chi = 0 \text{ چون}) & , \delta_I = 0 \\ M_I = \frac{m\ell^2}{12}\ddot{\theta} & , \delta_\theta \\ F_K = K(\chi - \chi_B) = 1/2K\chi - 1/4P(t) & , \delta_K = \frac{\ell}{2}\delta_\theta \\ F_D = c\dot{\chi} & , \delta_D = \frac{\ell}{2}\delta_\theta \end{cases}$$

→

$$\underbrace{\frac{m}{4}}_{m^*}\ddot{\chi} + \underbrace{\frac{c}{2}}_{c^*}\dot{\chi} + \underbrace{\frac{K}{10}}_{K^*}\chi = \underbrace{-\frac{1}{5}P(t)}_{P^*(t)}$$

جواب ۵-۳

$F_{1I} = 2ma\ddot{x}_1 = 2ma(a\ddot{\theta}) = 2ma^2\ddot{\theta}$, $\delta_{1I} = a\delta_\theta$ → $2ma^2\ddot{\theta}$

$F_{2I} = ma(\ddot{x}_2, \ddot{y}_2) = ma(2a\ddot{\theta}, -1/2a\ddot{\theta}) = \begin{cases} 2ma^2\ddot{\theta} \\ -1/2ma^2\ddot{\theta} \end{cases}$, $\begin{cases} \delta_{2Ix} = 2a\delta_\theta \\ \delta_{2Iy} = 1/2a\delta_\theta \end{cases}$ → $4/25a^2\ddot{\theta}$

$F_{3I} = M(\ddot{x}_3, \ddot{y}_3) = M(2a\ddot{\theta}, a\ddot{\theta}) = \begin{cases} 2Ma\ddot{\theta} \\ Ma\ddot{\theta} \end{cases}$, $\begin{cases} \delta_{3Ix} = 2a\delta_\theta \\ \delta_{3Iy} = a\delta_\theta \end{cases}$ → $5Ma^2\ddot{\theta}$

$M_1 I = \frac{(2m)(2a)^2}{12}\ddot{\theta} = \frac{4}{12}ma^2\ddot{\theta}$, δ_θ → $\frac{4}{12}ma^2\ddot{\theta}$

$M_2 I = \frac{(ma)a^2}{12}\ddot{\theta} = \frac{1}{12}ma^2\ddot{\theta}$, δ_θ → $\frac{1}{12}ma^2\ddot{\theta}$

} $= 1/25ma^2\ddot{\theta}$

$F_D = c\dot{\chi}_D = ca\dot{\theta}$, $\delta_D = a\delta_\theta$ → $ca^2\dot{\theta}$

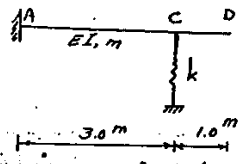
$F_K = K\chi_K = 2aK\theta$, $\delta_K = 2a\delta_\theta$ → $2a^2K\theta$

$P(t)$, $\delta_P = a\delta_\theta$ → $P(t)\cdot a$

ترکیب → $(Vm + 25M)\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + 4K\theta = \frac{1}{2}P(t)$

دینامیک سازه‌ها | روش ریلی | سال تحصیلی ۰۰

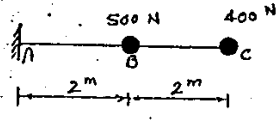
۴-۱ تیر کنسول AB به جرم واحد طول m و صلبیت خمشی EI در نقطه C به فنر k وصل شده است. زمان تناوب اصلی سیستم را بدست آورید.



$m = 100\ kg/m$ ، $k = 50\ kN/m$

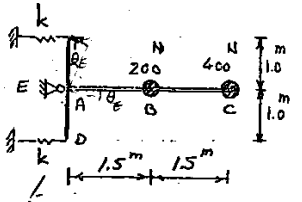
زمان کنید: $\varphi(x) = (\frac{x}{l})^2$

۴-۲ زمان تناوب اصلی تیر کنسول AC را بدست آورید. از وزن تیر صرفنظر کنید. تابع شکل ارتعاش، $\varphi(x)$، را شکل تیر در اثر بارهای استاتیکی وارد بگیرید.



EI = ثابت

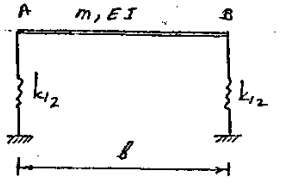
۴-۳ زمان تناوب اصلی تیر کنسول AC را بدست آورید. از وزن تیر صرفنظر کنید. تیر در نقطه A به قطعه صلب FD و فنر k متصل شده است. از اثر جابجایی قطعه FD و فنر k در ارتعاش صرفنظر کنید.



$k = 50\ kN/m$ ، EI = ثابت

تابع شکل ارتعاش، شکل تیر در اثر بارهای استاتیکی

۴-۴ تیر AB به جرم کل (m) روی فنرهای مطابق شکل قرار دارد. در صورتی که رابطه شکل ارتعاش را $\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{l} + b$ فرض کنیم، زمان تناوب اصلی سیستم را بدست آورید.



جواب ۴-۱-

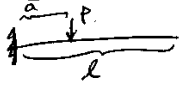
$$\omega = \frac{\int EI\,\varphi''^2(x)\,dx + \sum \psi_i^2(x_i)K_i}{\int m\varphi^2(x)\,dx}$$

$\psi(x) = \frac{x^2}{l^2} \rightarrow \psi'(x) = \frac{2x}{l^2} \rightarrow \psi''(x) = \frac{2}{l^2} \rightarrow \psi''^2(x) = \frac{4}{l^4}$ ، $\psi^2(x) = \frac{x^4}{l^4}$

$\psi^2_{x=l}(x) = \psi^2(l) = \frac{9}{14} \rightarrow \psi^2_{x=l}(x)K = \frac{9}{14} \times 5000$

$$\rightarrow \omega = \frac{\int_0^4 \frac{4}{l^4} EI\,dx + \frac{9}{14}\times 5000}{\int_0^4 1 - \frac{x^4}{l^4}\,dx} \rightarrow \omega = \frac{1}{220}\sqrt{80\,EI + 2000}$$

جواب ۴-۲-



$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{Px^2}{6EI}(3a - x) & , 0 \le x \le a \\ \frac{Pa^2}{6EI}(3x - a) & , a \le x \le l \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_B = \frac{5\times 2^2}{6EI}(3\times 2 - 2) + \frac{4\times 2^2}{6EI}(3\times 4 - 2) = \frac{400}{EI} \\ y_C = \frac{5\times 2^2}{6EI}(3\times 4 - 2) + \frac{4\times 4^2}{6EI}(3\times 4 - 4) = \frac{1147}{EI} \end{cases}$$

$$\rightarrow \omega = g\frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i y_i^2} = 9.81\,EI \times \frac{5\times 400 + 4\times 1147}{5\times 400^2 + 4\times 1147^2} \rightarrow \omega = 1.22\sqrt{EI}$$

جواب ۴-۳- $\psi(x)$ در نقطه دلخواه از رابطه مستقیم تبدیل بدست می‌آید

$$\begin{cases} y_B = \psi(x)\big|_{x=1.0^m} + \theta_E \times 1.0 \\ y_C = \psi(x)\big|_{x=2^m} + \theta_E \times 2 \end{cases}$$

$\theta_E = \frac{\Delta_K}{1}$ ، $\Delta_K = \frac{F_K}{K}$

$\sum M_E = 2\times 1.0 + 4\times 2 = 10\ N.m \rightarrow F_K = \frac{\sum M_E}{2} = 5.0\ N$ $\Big\}$ $\rightarrow \Delta_K = 0.005\ m$ ، $\rightarrow \theta_E = 0.005\ rad$

$$\rightarrow y_B = \frac{125}{EI} + 0.025 \quad , \quad y_C = \frac{414}{EI} + 0.05$$

$$\rightarrow \omega^2 = g\frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i y_i^2} = \dots$$

جواب ۴-۴-

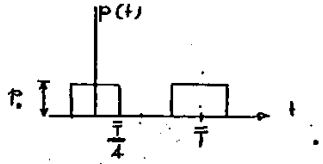
$x = 0 \rightarrow \psi_i(0) = b$

$x = l \rightarrow \psi_i(l) = b$ $\Big\}$ $\rightarrow \sum \psi_i^2(x)K_i = Kb^2$

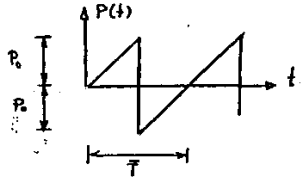
$\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{l} + b \rightarrow \psi'(x) = \frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi x}{l} \rightarrow \psi''(x) = -(\frac{\pi}{l})^2 \sin\frac{\pi x}{l}$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{\int EI\,\psi''^2(x)\,dx + \sum \psi_i^2(x)K_i}{\int m\psi^2(x)\,dx} \rightarrow \omega = \frac{2K}{m}\,\frac{\frac{EI}{Kl^2}\frac{\pi}{4} + \frac{b^2}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{2b}{\pi} + b^2}$$

۷-۱ نیروی خارجی $P(t)$ به جسم m وارد می‌شود:



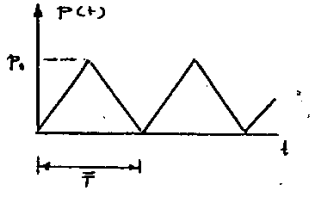
۷-۲ جواب سیستم جرم فنر را تحت اثر بار $P(t)$ به دست آورید.



فرض کنید: $\bar{\omega} = 1.5\,\omega$

$\zeta = \%10$

۷-۳ جواب سیستم جرم-فنر را تحت اثر بار $P(t)$ به دست آورید.



جواب ۷-۳- تابع زوج $\Rightarrow b_n = 0$

$$P(t) = \begin{cases} -\frac{2P_0}{T}t, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ \frac{2P_0}{T}t, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{P_0}{2}, \quad a_n = \frac{2P_0}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n) = \begin{cases} -\frac{4P_0}{n^2\pi^2} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{K}\left[\frac{P_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{1-\beta_n^2}\frac{P_0}{n^2\pi^2}\cos n\bar{\omega}t\right)\right]$$

جواب ۷-۲- تابع فرد $\Rightarrow a_0, a_n = 0$

$$P(t) = \frac{2P_0}{T}t, \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

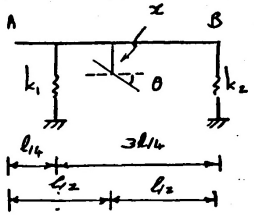
$$\rightarrow b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} P(t)\sin\bar{\omega}t\,dt = -\frac{2P_0}{n\pi}\cos n\pi = (-1)^{n+1}\frac{2P_0}{n\pi}, \quad \beta_n = \frac{\bar{\omega}}{\omega_n}$$ از روی

$\rightarrow x = \ldots$ رابطه بالایی

جواب ۷-۱- تابع زوج $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{P_0}{2}, \quad a_n = \frac{2P_0}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \pm\frac{2P_0}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

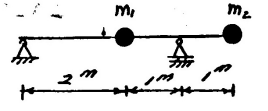
۸-۱ میله صلب AB با جرم واحد طول m می‌تواند در امتداد قائم حرکت انتقالی و در زاویه حول مرکز جرمش نقطه (O) داشته باشد. معادلات دیفرانسیل حرکت را بنویسید.



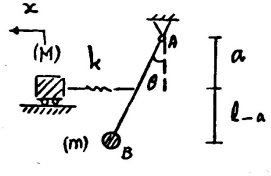
۸-۲ حرکت آزاد جرم‌های m_1 و m_2 را بررسی کرده و معادلات دیفرانسیل حرکت را بنویسید.

$m_1 = m_2 = 400$ kg

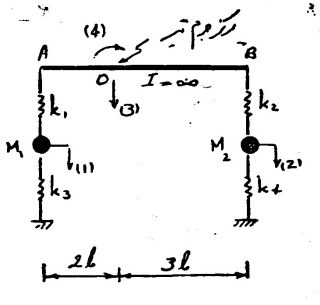
EI = ثابت



۸-۳ یک دستگاه نزاله‌گیر شکل مقابل مدل شده است. میله AB صلب و بدون وزن فرض می‌شود. معادلات دیفرانسیل حرکت را بنویسید. کوچک $\theta =$



۸-۴ تیر صلب AB به جرم M_1، M_2 و ممان اینرسی $I = \infty$ مطابق شکل مقابل است. جرم واحد طول تیر برابر m شده است. سیستم دارای چهار درجه آزادی (1)، (2)، (3) و (4) می‌باشد. معادلات دیفرانسیل ارتعاش سیستم را بصورت ماتریسی بنویسید.

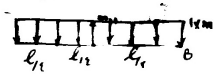


جواب ۸-۱-

• محاسبه [K]:

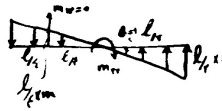
$K_{11} = K_1 + K_2$ ، $K_{12} = \frac{K_2 l}{2} - \frac{K_1 l}{4} = K_{21}$ ، $K_{22} = \frac{K_2 l^2}{4} + \frac{K_1 l^2}{16}$ → $K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$

• محاسبه [m]:



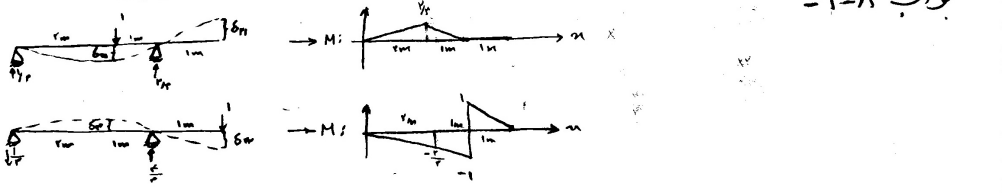
$m_{11} \times \frac{l}{2} = ml \times \frac{l}{2}$ → $m_{11} = ml$ ، $m_{21} = 0$

→ $m = \begin{bmatrix} ml & \cdot \\ \cdot & \frac{ml^2}{12} \end{bmatrix}$



$m_{22} = -\frac{l_2}{2} m \times \frac{l_2}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \frac{l_2}{2} \times 1 = -\frac{ml^2}{12}$ ، $m_{12} = 0$

جواب ۸-۲-

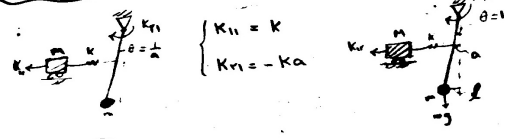


$\rightarrow \begin{cases} \delta_{11} = \left(\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) \frac{1}{EI} = \frac{1}{3EI} \\ \delta_{21} = \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \frac{1}{EI} = -\frac{1}{8EI} = \delta_{12} \end{cases}$ ، $\delta_{22} = \left(-1 \times 2 \times \frac{1}{2} \times -\frac{1}{3} + 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) \frac{1}{EI} = \frac{1}{2EI}$

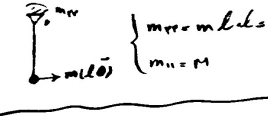
→ $\delta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{EI}$ → $K = \delta^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 2.5 \\ 2.5 & 6 \end{bmatrix} EI = K$ ، $m = \begin{bmatrix} 400 & \cdot \\ \cdot & 200 \end{bmatrix}$

جواب ۸-۳-

• محاسبه [K]:



• محاسبه [m]:



$\begin{cases} m_{22} = ml \cdot l = ml^2 \\ m_{11} = M \end{cases}$

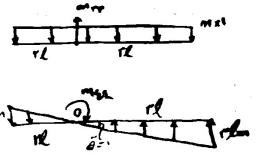
جواب ۸-۴-

• محاسبه [K]:

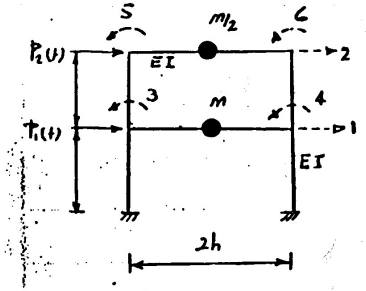
$\begin{cases} K_{11} = K_1 + K_2 \text{ ، } K_{12} = 0 \text{ ، } K_{13} = -K_1 \text{ ، } K_{14} = 2lK_1 \\ K_{21} = 0 \text{ ، } K_{22} = K_2 + K_4 \text{ ، } K_{23} = -K_2 \text{ ، } K_{24} = 2lK_2 \\ K_{31} = -K_1 \text{ ، } K_{32} = -K_2 \text{ ، } K_{33} = K_1 + K_2 + K_3 \text{ ، } K_{34} = 2lK_2 - 2lK_1 \\ K_{41} = 2lK_1 \text{ ، } K_{42} = -2lK_2 \text{ ، } K_{43} = 2lK_2 - 2lK_1 \text{ ، } K_{44} = 4l^2K_2 + 4l^2K_1 \end{cases}$

• محاسبه [m]:

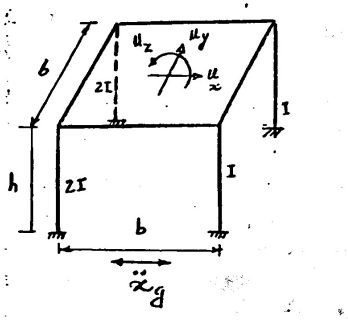
$\begin{cases} m_{11} = M_1 \text{ ، } m_{22} = M_2 \\ m_{33} = aml \\ m_{44} = \frac{2a}{3} ml^2 \end{cases}$



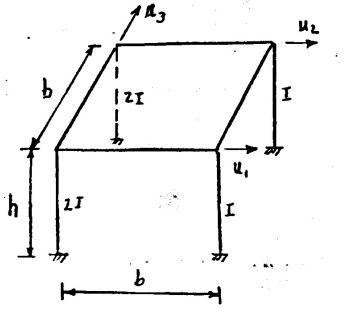
۹-۱ شش درجه آزادی (جابجایی در راستای و دوران حول) برای قاب صلب شکل متقارن در نظر بگیرید، آرایش سختی را تشکیل دهید و کاربرای هر درجه آزادی استقلال تدریجی کنید و سپس معادلات دینامیکی حرکت را بنویسید.
(از انعطاف‌پذیری محوری تیرها صرفنظر می‌شود)



۹-۲ یک پلتان متقارن صلب فرض می‌شود و درجات آزادی آن به صورت انتقال (u_x ، u_y) و یک دوران حول محور z (u_z) محدود شده است. معادلات دینامیکی حرکت را برای زلزله‌ای در امتداد محور x بنویسید.
جرم دال تخت = m
از جرم ستون‌ها صرفنظر کنید



۹-۳ مسئله ۹-۲ را با درجات آزادی مطابق شکل متقارن حل کنید.
نیروی زلزله را یکبار در جهت x و یکبار در جهت y به‌دست آورید.



جواب ۹-۱-

ماتریس [K] : ضرایب اثر ستون ها → $F = \frac{12EI}{L^3}x1$ ، $M = \frac{6EI}{L^2}x1$

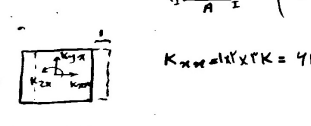
ضرایب اثر دوران ها → $R = \frac{4EI}{L^2}$ ، $M = \frac{2EI}{L}$

$$\rightarrow \begin{cases} K_{11} = 4x\frac{12EI}{h^3} = \frac{48EI}{h^3} , K_{21} = -2x\frac{12EI}{h^3} = -\frac{24EI}{h^3} , K_{31} = K_{41} = 0 , K_{01} = K_{21} = -\frac{6EI}{h^2} \\ K_{12} = -\frac{24EI}{h^3} , K_{22} = \frac{24EI}{h^3} , K_{32} = K_{42} = \frac{6EI}{h^2} = K_{02} = K_{42} \\ K_{13} = 0 , K_{23} = \frac{6EI}{h^2} , K_{33} = 2x\frac{8EI}{h} + \frac{2EI}{2h} = \frac{17EI}{h} , K_{43} = \frac{EI}{h} , K_{03} = \frac{2EI}{h} , K_{43} = 0 \\ K_{14} = 0 , K_{24} = \frac{6EI}{h^2} , K_{34} = \frac{EI}{h} , K_{44} = \frac{10EI}{h} , K_{04} = 0 , K_{44} = \frac{2EI}{h} \\ K_{10} = -\frac{6EI}{h^2} , K_{20} = \frac{6EI}{h^2} , K_{30} = \frac{2EI}{h} , K_{40} = 0 , K_{00} = \frac{8EI}{h} + \frac{8EI}{2h} = \frac{12EI}{h} , K_{04} = \frac{EI}{h} \\ K_{14} = -\frac{6EI}{h^2} , K_{24} = \frac{6EI}{h^2} , K_{34} = \frac{2EI}{h} , K_{40} = 0 , K_{04} = \frac{2EI}{h} , K_{44} = \frac{8EI}{h} \end{cases}$$

ماتریس $[k_{con}]$: $k_{con} = K' = \delta^{-1} = \frac{2EI}{h^3}\begin{bmatrix} 1.25 & -0.75 \\ -0.75 & 0.50 \end{bmatrix}$

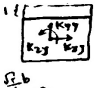
جواب ۹-۲-

ماتریس [K] :



$$\begin{cases} K_A = K_B = \frac{12EI}{L^3} = 2K \\ K_D = \frac{24EI}{L^3} = 2K , K_C = \frac{48EI}{L^3} = 4K \end{cases}$$

$K_{xx} = 4+2+2 = 4K$ ، $K_{yx} = 0$ ، $K_{zx} = 0$



$K_{xy} = 0$ ، $K_{yy} = 4Kx1 = 4K$ ، $K_{zy} = 2Kx\frac{b}{2} - 4Kx\frac{b}{2} = -Kb$

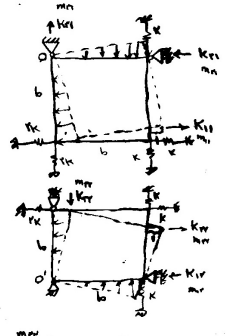
$K_{xz} = \frac{b}{2}x2K - \frac{b}{2}x2K = 0$ ، $K_{yz} = -\frac{b}{2}x2K + \frac{b}{2}x4K = Kb$

$K_{zz} = 2Kbxb + 2Kx\frac{b}{2}x\frac{b}{2} + 4Kx\frac{b}{2}x\frac{b}{2} = 1.5Kb^2$

ماتریس [m] : $m_{xx} = m = m_{yy}$ ، $m_{zz} = \frac{m(2b)}{12} = \frac{mb^2}{6}$

جواب ۹-۳-

ماتریس [K]



$\Sigma M_{o'} = 0 \rightarrow K_{11}xb - 8Kb = 0 \rightarrow K_{11} = 8K$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow K_{21} = 4K$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow K_{11} - 2K - K_{31} = 0 \rightarrow K_{31} = -2K$

$\Sigma M_{o'} = 0 \rightarrow K_{12}xb - 8Kb = 0 \rightarrow K_{12} = 8K$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow K_{22} = 4K$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow K_{32} = -2K$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow K_{23} = 4K$

$\Sigma F_x = 0$ ، $\Sigma M_{o'} = 0 \rightarrow K_{13} = 2K$ ، $K_{23} = -4K$

ماتریس [m] :

u_1 : $\Sigma M_{o'} = 0$ ، $\Sigma F_x = 0 \rightarrow m_{11} = \frac{3m}{2}$ ، $m_{21} = -\frac{m}{4}$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow m_{31} = \frac{m}{2}$

u_2 : جسم صلب $\rightarrow m_{12} = -\frac{m}{4}$ ، $m_{22} = \frac{3m}{2}$ ، $m_{32} = -\frac{m}{2}$

u_3 : $\rightarrow m_{13} = \frac{m}{2}$ ، $m_{23} = -\frac{m}{2}$ ، $m_{33} = m$

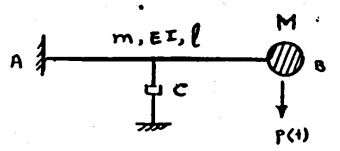
زلزله در جهت x و به ترتیب ماتریس m در جهت u_3 :

$$P_{ex}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\ddot{x}_g$$

$$P_{ey}(t) = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} \\ -\frac{m}{2} \\ m \end{bmatrix}\ddot{y}_g$$

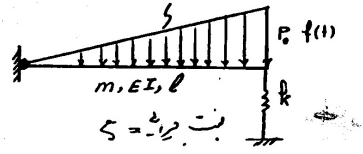
10-1 تعیین جرم، سختی و فرکانس طبیعی ارتعاش در محاسبات تقسیم یافته را تعیین کنید.

فرض کنید $\Phi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2l}$



10-2 اگر $\Phi(x) = \frac{x}{l}$ فرض شود، تعیین جرم، سختی و فرکانس طبیعی ارتعاش را در محاسبات تقسیم یافته بدست آورید.

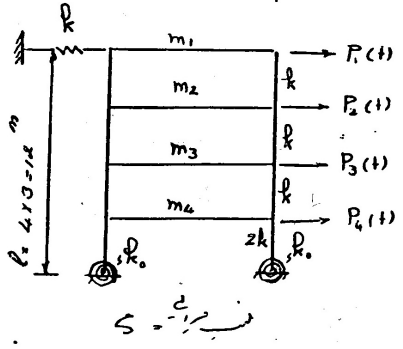
$P(x,t) = P_0 \frac{x}{l} f(t)$



10-3 تعادل چهار طبقه‌ای مطابق شکل تقریباً مدل شده است. معادله دیفرانسیل حرکت آنرا در محاسبات تقسیم یافته بنویسید.

فرض کنید:

$\Phi(x) = x/l$



جواب 10-1-

$$M^* = \int_0^l m\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right)^2 + M = 0.1227\,m + M$$
$$K^* = \int_0^l EI\left(\frac{\pi^2}{4l^2}\cos\frac{\pi x}{2l}\right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{32l^3}$$
$$\rightarrow \omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} \rightarrow C^* = 2\xi M^* \omega^*$$

$P^* = \beta P(t)$ ، $P_e^* = \ddot{u}_g \int_0^l m\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right)dx = 0.3634\, m\ddot{u}_g$ ← آثر زلزله محرک

جواب 10-2-

$$M^* = \int_0^l m\left(\frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{1}{3}m$$
$$K^* = K$$
$$\rightarrow \omega^* = \sqrt{\frac{3K}{m}} \rightarrow C^* = \frac{2}{3}\xi m\sqrt{\frac{3K}{m}}$$

$$P^* = \int_0^l P_0 \frac{x}{l}\cdot\frac{x}{l} f(t)\,dx = \frac{1}{3}P_0 l f(t)$$

جواب 10-3-

$\Phi_1(x) = 1$ ، $\Phi_2(x) = \frac{x}{4}$ ، $\Phi_3(x) = \frac{1}{2}$ ، $\Phi_4(x) = \frac{1}{4}$

$$M^* = \sum_{i=1}^{4} m_i \Phi_i^2 = m_1\times 1^2 + m_2\times\frac{2^2}{4^2} + m_3\times\frac{1}{2^2} + m_4\times\frac{1}{4^2} = m_1 + \frac{9}{16}m_2 + \frac{1}{4}m_3 + \frac{1}{16}m_4$$

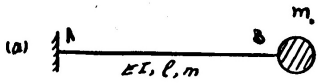
$$K^* = \sum_{i=1}^{4} K_i \Delta\Phi_i^2 = K\left(1-\frac{2}{4}\right)^2 + K\times\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{2}\right)^2 + K\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2 + 2K\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$$
$$+ K\times(1)^2 + 2K_0\times\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1.3125K + 0.1129K_0$$

$$P^* = \sum_{i=1}^{4} P_i\Phi_i = P_1(t) + \frac{2}{4}P_2(t) + \frac{1}{2}P_3(t) + \frac{1}{4}P_4(t)$$

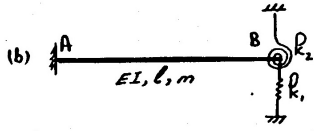
فیزیک سازه‌ها — مدل جرم گسترده سازه‌ها — سال نامه ۱۱

۱-۱۱ ـ فرکانس نوسان‌های برای تیرهای زیر را بدست آورید.

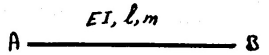
(a)



(b)

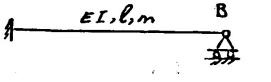


۲-۱۱ ـ سامانه شکل مقابل را در نظر گرفته و فرکانس‌های نوسان آن را بدست آورید.



۳-۱۱ ـ سامانه شکل مقابل را تحلیل نمایید.

۴-۱۱ ـ سه مود اول تیر شکل مقابل را بیابید.



جواب ۱۱-۱ ـ

$y(x,t) = \phi(x)\cdot\tau(t)$

a) • $y(0,t) = y'(0,t) = 0 \rightarrow \phi(0) = \phi'(0) = 0$

• $M(l,t) = EI\,y''(l,t)$
$\Sigma M = 0 \rightarrow M(l,t) = I_{m0}\cdot\ddot{\theta}$
$\theta = y'(l,t) \rightarrow \ddot{\theta} = \phi'(l)\,\ddot{\tau}(t)$
$\tau(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \rightarrow \ddot{\tau}(t) = -\omega^2\tau(t)$
$\rightarrow EI\,\phi''(l)\tau(t) = -I_{m0}\cdot\omega^2\phi'(l)\tau(t)$
$\rightarrow EI\,\phi''(l) + I_{m0}\cdot\omega^2\phi'(l) = 0$

• $V(l,t) = EI\,y'''(l,t)$
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V(l,t) = ma_y = m\dfrac{\partial^2 y(l,t)}{\partial t^2} = m\phi(l)\,\ddot{\tau}(t)$
$\rightarrow EI\,\phi'''(l)\tau(t) = m\phi(l)\cdot(-\omega^2\tau(t))$
$\rightarrow EI\,\phi'''(l) + m\phi(l)\omega^2 = 0$

b) • $y(0,t) = y'(0,t) = 0 \rightarrow \phi(0) = \phi'(0) = 0$

• $\Sigma M = 0 \rightarrow M(l,t) = K_2\,\theta \xrightarrow{\text{شرط (a)}} EI\phi''(l) + K_2\phi'(l) = 0$

• $\Sigma F_y = 0 \rightarrow V(l,t) = k_1 y(l,t) \xrightarrow{\text{شرط (a)}} EI\phi'''(l) + k_1\phi(l) = 0$

جواب ۱۱-۳ ـ روند حل مسئله ۲، فقط:

$\begin{cases} y(0,t) = 0 \rightarrow \phi(0) = 0 \\ y'(0,t) = 0 \rightarrow \phi'(0) = 0 \end{cases}$

⋮

$\rightarrow \cos\alpha l\cdot\cosh\alpha l = -1 \rightarrow \ldots$ ادامه همان روند مسئله ۲

جواب ۱۱-۴ ـ روند حل مسئله ۳، فقط:

$\begin{cases} y(l,t) = 0 \rightarrow \phi(l) = 0 \\ M(l,t) = 0 \rightarrow \phi''(l) = 0 \end{cases}$

⋮

$\rightarrow \tan\alpha l = \tanh\alpha l \rightarrow \ldots$ ادامه حل روند مسئله ۲

جواب ۱۱-۲ ـ

$y(x,t) = \phi(x)\cdot f(t)$

$\begin{cases} \phi(x) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + C\sinh\alpha x + D\cosh\alpha x \\ f(t) = A\cdot\sin\omega t + B\cdot\cos\omega t \end{cases}$

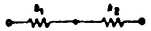
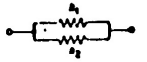
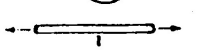
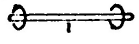
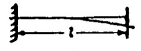
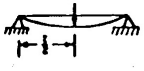
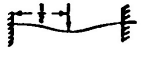
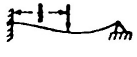
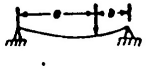
$\begin{cases} M(0,t) = 0 \rightarrow \phi''(0) = 0 \rightarrow D = B \\ V(0,t) = 0 \rightarrow \phi'''(0) = 0 \rightarrow C = A \end{cases}$ ①

$\begin{cases} M(l,t) = 0 \rightarrow \phi''(l) = 0 \rightarrow (\sinh\alpha l - \sin\alpha l)A + (\cosh\alpha l - \cos\alpha l)B = 0 \\ V(l,t) = 0 \rightarrow \phi'''(l) = 0 \rightarrow (\cosh\alpha l - \cos\alpha l)A + (\sinh\alpha l + \sin\alpha l)B = 0 \end{cases}$ ②

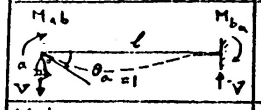
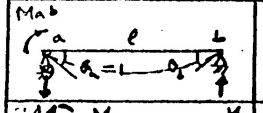
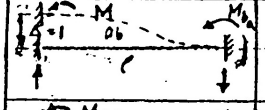
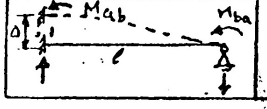
$\rightarrow \cos\alpha l\cdot\cosh\alpha l = 1 \rightarrow \alpha l = \ldots \rightarrow \alpha_n = \ldots$, $\omega_n = \alpha_n^2\sqrt{\dfrac{EI}{m}}$

① و ② $B = -\dfrac{\sin\alpha l - \sinh\alpha l}{\cos\alpha l - \cosh\alpha l}A$ جایگذاری $\rightarrow \phi(x) = A\left(\sin\alpha x + \sinh\alpha x + (\cos\alpha_n x + \cosh\alpha_n x)\left(-\dfrac{\sin\alpha l - \sinh\alpha l}{\cos\alpha l - \cosh\alpha l}\right)\right)$

Table of Spring Stiffness

	$k = \frac{1}{1/k_1 + 1/k_2}$
	$k = k_1 + k_2$
	$k = \frac{EI}{l}$ • I = moment of inertia of cross-sectional area l = total length
	$k = \frac{EA}{l}$ A = cross-sectional area
	$k = \frac{GJ}{l}$ J = torsion constant of cross section
	$k = \frac{Gd^4}{64nR^3}$ • n = number of turns
	$k = \frac{3EI}{l^3}$
	$k = \frac{48EI}{l^3}$
	$k = \frac{192\,EI}{l^3}$
	$k = \frac{768EI}{7l^3}$
	$k = \frac{3EIl}{a^3b^2}$

صدل كنى :

(بـ EI) عضو	M_{ab}	M_{ba}	V
	$\frac{4EI}{\ell}$	$\frac{2EI}{\ell}$	$\frac{6EI}{\ell^2}$
	$\frac{3EI}{\ell}$	0	$\frac{3EI}{\ell^2}$
	$-\frac{6EI}{\ell^2}$	$-\frac{6EI}{\ell^2}$	$\frac{12EI}{\ell^3}$
	$-\frac{3EI}{\ell^2}$	0	$\frac{3EI}{\ell^3}$