جزوه درس مقاومت مصالح

استاد:

دکتر امیرعباس فاطمی

بردار

دیمانسیون ها:

در کمیت ها چه در سیستم بین المللی (SI) یا در سیستم انگلیسی کمیت های اصلی شامل جرم (m)، زمان (t) و طول (L) می باشند

بنابراین داریم: تعریف نیرو $F = k \cdot x$ نیرو $F = ma = M \cdot \frac{L}{a} \cdot T^{-2}$

$V = \frac{L}{T} = LT^{-1}$ سرعت $P_a = \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$

$a = \frac{V}{T} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$ شتاب

نکته: در بحث دیمانسیون ها فقط از سه واحد بالا استفاده می شود

یادآوری

1 ft = 12 inch
1 inch = 2.54 cm
1 ft = 30.48 cm

مسئله ی اصلی مکانیک جامدات بررسی مقاومت داخلی و تغییر شکل اجسام تحت اثر بارهای خارجی می باشد

بر اساس مفهوم فوق در مکانیک جامدات بحث نیرو و تغییر شکل ها اهمیت دارد.

برای اساس دو مفهوم نیرو و تغییر شکل مفهوم انرژی تعریف می‌شود، این امر مستلزم مطالعه نیروهایی است که در داخل جسم به وجود می‌آیند تا هم‌واره نیروهای خارجی مؤثر بر جسم تعادل آن را تأمین کنند.

اولین گام در تحلیل، تهیه یک دیاگرام (Free body) از جسم یا قطعه‌ی مورد نظر می‌باشد که در آن کلیه نیروها در نقاط تأثیرشان مشخص شده‌اند.

اصطلاحاً این دیاگرام را دیاگرام جسم آزاد می‌گویند.

به دلیل اینکه محاسبه‌ی نیروهای داخلی ناشی از نیروهای خارجی بر جسم موضوع اصلی درس مقاومت مصالح می‌باشد، در گام بعدی صفحه‌ای فرضی و دلخواه از جسم عبور داده می‌شود تا بطوری که جسم بطور کامل به دو قسمت جدا از هم تقسیم گردد. این روش را روش مقطع می‌گویند.

نکته: اگر جسمی کاملاً در تعادل باشد هر جزء آن نیز باید در تعادل باشد در نتیجه:

نیروهای خارجی مؤثر در یک طرف هر مقطع دلخواه با نیروهای به وجود آمده در سطح مقطع شده (که نیروهای مقاومت داخلی نامیده می‌شود) در تعادل هستند. بنابراین:

نیروهای مقاومت داخلی، نیروهای خارجی را متعادل می‌کنند.

یادآوری از استاتیک:

تعریف جسم صلب (rigid):

جسم صلب جسمی است که تحت اثر اعمال نیروها هیچ گونه تغییر شکلی ندهد، به عبارت دیگر تغییر موقعیت نقاط یا اجزای مختلف آن جسم نسبت به یکدیگر صفر باشد

معادلات تعادل:

برای اینکه معادلات اینجا برای تعادل یک جسم صلب (rigid) باید هم دارای تعادل انتقالی

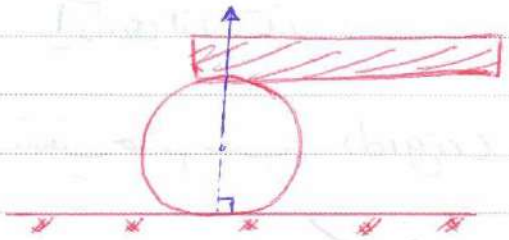
$\Sigma F_x = 0$ $\quad \Sigma M_x = 0$
$\Sigma F_y = 0$ $\quad \Sigma M_y = 0$ و هم تعادل دورانی داشته باشد یعنی
$\Sigma F_z = 0$ $\quad \Sigma M_z = 0$

بنابراین مجموع مؤلفه های تمام نیروهای مؤثر بر جسم در سه امتداد محور هم (x, y, z) باید صفر باشند، همچنین برای حفظ تعادل مجموع گشتاورهای تمام نیروها حول این 3 محور هم باید صفر باشند. بیان این است در مورد مسائل دوبعدی، کلیه اعضا و نیروها در یک صفحه قرار دارند بطور مثال در صفحه ی $(x-y)$ باید داشته باشیم:

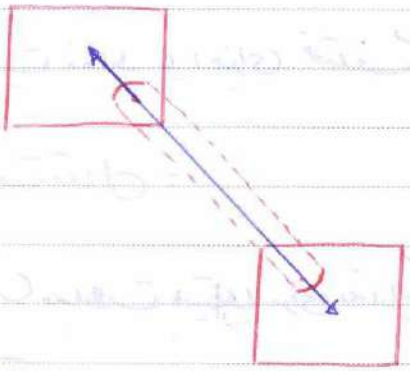
$\Sigma F_x = 0$
$\Sigma F_y = 0$
$\Sigma M_z = 0$

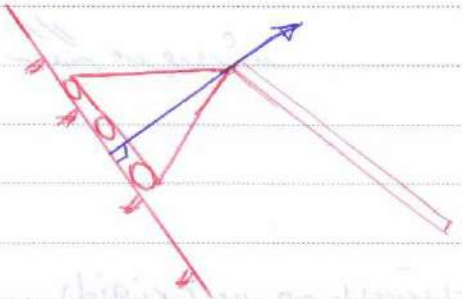
و سه رابطه ی دیگر که در اینجا نیاز نبود خود به خود ارضا می شوند.

علائم ترسیمی تکیه‌گاه‌ها:



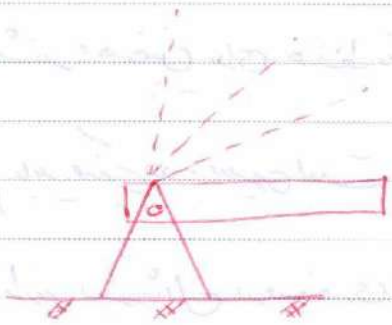
1- تکیه‌گاه غلتکی و صفحه‌ای:





با توجه به درجات آزادی این تکیه‌گاه (آزادی دوران) تنها امتداد ممکن برای اعمال واکنش توسط خط چین نمایش داده شده است.

نکته: در فضای تکیه‌گاه غلتکی دارای $\Sigma F_z = 0$ است



2- تکیه‌گاه مفصلی

تکیه‌گاه مفصلی در برابر نیروهای وارده در هر جهت که بخواهد می‌تواند مقاومت کند ولی در مقابل گشتاورها اصلاً مقاومتی ندارد به عبارت دیگر تکیه‌گاه مفصلی جسم را به تعلیق کامل انتقالی را می‌برد و بنابراین دارای عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی انتقالی می‌باشد.

Shahab

اما هیچ گونه مقاومتی در برابر لنگرهای یا مولفه ها دورانی ندارد بنابراین هیچ گونه عکس العمل

تکیه گاهی دورانی ندارد.

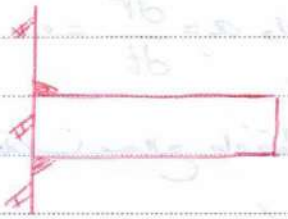
نکته: تکیه گاه مفصلی در صفحه $\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ و در فضا $\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$

3- تکیه گاه گیردار:

این نوع تکیه گاهها تمامی نیروها و مؤثر در هر جهت و لنگرهای مؤثر را تحمل می کند به عبارت دیگر

اجازه هیچ گونه تغییر مکان انتقالی و تغییر مکان دورانی را از جسم می گیرد، بنابراین دارای

تمامی عکس العمل ها تکیه گاهی انتقالی و دورانی می باشد.



یادآوری

Beam	Column	Brace	shear wall
تیر	ستون	بادبند	دیوار برشی

grid شبکه	Engineering	stiffness سختی
strengthe of materials	solid mechanics	
stiffner سخت کننده		

تعریف: مطالعه‌ی حرکت یک جسم تحت اثر نیروهای خارجی را علم مکانیک می‌گویند، زمانی که نیروهای وارده بر یک جسم یا یک سیستم سازه‌ای در آن ایجاد شتاب ننمایند آن نیروها را در حال تعادل و جسم و سیستم را متعادل می‌گویند.

یعنی $a = \frac{dv}{dt} = 0$ و این یعنی یا سرعت صفر بوده یا سرعت مقداری ثابت داشته است.

در مقاومت مصالح حالت $V=0$ کار داریم، در این حالت مطالعه‌ی جسمی که در حال تعادل است موضوع علم استاتیک می‌باشد

فرض مهم استاتیک صلب بودن اجسام مورد مطالعه می‌باشد، اما موضوع علم مقاومت مصالح مطالعه‌ی اثرات داخلی ناشی از عوامل خارجی مؤثر بر اجسام شکل پذیر می‌باشد بنابراین هم نیرو و هم تغییر شکل اهمیت دارد.

چیزی دیگر جسم صلب فرض می‌شود، بنابراین بطور کلی فرق اساسی علم استاتیک با علم مقاومت مصالح این است که:

در استاتیک به عنوان مثال یک تیر برای توانایی کافی در تحمل بارهای وارده را دارد، اما در

مقاومت مصالح شعبه ای از علم است که به بررسی رفتار اجسام تحت اثر نیروهای خارجی می پردازد. این نیروها باعث تغییر شکل و ایجاد تنش در اجسام می شوند. مقاومت مصالح به ما کمک می کند تا بفهمیم چگونه می توانیم سازه ها و اجسام را طوری طراحی کنیم که در برابر این نیروها مقاوم باشند و دچار شکست یا تغییر شکل بیش از حد نشوند.

کاربرد مقاومت مصالح در طراحی سازه ها (structure) و ساختمان ها (Bulding)

در تکنولوژی نیز مورد نیاز می باشد:

1- مقاومت (strength)

2- سختی (stiffness) ← درجه انحراف پذیری بررسی می شود

3- پایداری (stability) ← سیستم طراحی شده باید بتواند در مقابل بارهای وارده تعادل خود را حفظ نماید

فرضیات اساسی در مقاومت مصالح:

با توجه به پیچیدگی رفتار سیستم ها در حالت کلی معمولاً در مقاومت مصالح فرض های زیر را می پذیریم که بررسی سازه ها را بسیار ساده می نماید. این فرض ها عموماً در محدوده عوامل مصالح بکار رفته و همچنین در مورد چگونگی بارهای وارده و رفتار اعضای مختلف سازه تحت بارها نیز صادق خواهد بود.

1- پیوستگی (continous)

مصالح بکار رفته در سازه ها معمولاً پیوسته در نظر گرفته می شوند، یکی از روش های اساسی در آنالیز یک جسم در مقاومت مصالح، بررسی خواص قطعه ای کوچکی از جسم و انتگرال گیری از نتایج حاصل می باشد که مفهوم این انتگرال گیری فرض پیوستگی خواص مصالح مطابق می باشد تا سیستم را ساده تر می کند.

2- همگن بودن مصالح (Homogeneous)

یعنی خواص مصالح را در تمام نقاط یک جسم یکسان فرض می کنند، فلزات را معمولاً می توان کاملاً همگن در نظر گرفت، مصالح دیگر مانند بتن و چوب همگنی کمتری دارند، مثلاً در بتن خواص سیمان، ماسه، شن با یکدیگر متفاوت می باشد. اما تجربه نشان داده است برای کلیه مصالح ساختمانی، همین فرض همگن بودن نتایج قابل قبول خواهد داشت.

3- ایزوتروپی مصالح (Isotropic)

unisotropic غیر ایزوتروپ

مصالح بکار رفته در ساختمان ها اغلب ایزوتروپ فرض می شوند یعنی خواص مصالح را در تمام جهات یکسان فرض می کنند. مطالعه دقیق نشان می دهد که خواص کریستال مصالح مختلف در جهات

← در مورد جوش نفوذی ، هنگامی که چنین موقعیت جوش را که از نظر کیفیت مناسب نیست می شناسیم و دوباره پر می کنیم ، این حرکت باعث تغییر در اندازه ی کریستال های فولاد می شود و دلیل آن فشار اکتوپی هم ایجاد شده در فولاد است.

Year. Month. Day. Subject.

مقاومت بیشتر نیتز ، مثلاً کریستال مس در یک امتداد مقاومتی سه برابر مقاومت حرکت بخود برجهت اول را دارد .

ولی چون مصالح از کریستال های بسیار ریزی بصورت نامشخص متوازن شده است و بنابراین کریستال ها بسیار زیاد است ، بنابراین جسم را می توان با خطا توجیه ایزوتروپ در نظر گرفت .

در مورد بتن مسلح (آلمانی concrete فرانسه Beton) (وقتی در داخل بتن آرماتور قرار می گیرد مصالح نامیده می شود) وقتی فولاد داخل بتن قرار می گیرد جسم را باید غیر ایزوتروپ در نظر گرفت .

از مصالح دیگر غیر ایزوتروپ می توان خاک و چوب را نام برد . در مورد چوب به دلیل اینکه نیروها در جهت الیاف و یا عمود بر الیاف چوب می توانند اعمال شوند ، چوب رفتار متفاوتی از خود نشان می دهد .

4- عدم وجود نیروهای داخلی قبل از بارگذاری

قبل از بارگذاری فرض می شود که در جسم هیچ نیروی داخلی وجود نداشته باشد ، از نیروهای ایجاد شده حاصل از ذرات جسم بر یکدیگر ، نیروهای مولکولی و ... هم معمولاً صرف نظر می شود به عنوان نمونه در فلزات معمولاً در اثر سرد شدن غیر یکنواخت مقطعات یا حمل آنها نیروهای داخلی تولید می شوند .

در طراحی سازه ها معمولاً از این نیروها صرف نظر می شود اما بدیهی است اگر این نیروها قابل توجه باشند به سطالعه دقیق تر در طراحی سازه نیاز داریم که معمولاً قطعاتی از این اجسام را جدا کرده و با آزمایشهای ویژه مقدار نیروهای داخلی تولید شده را مشخص می کنند

۵ - اصل جمع آثار و هموا (super position)

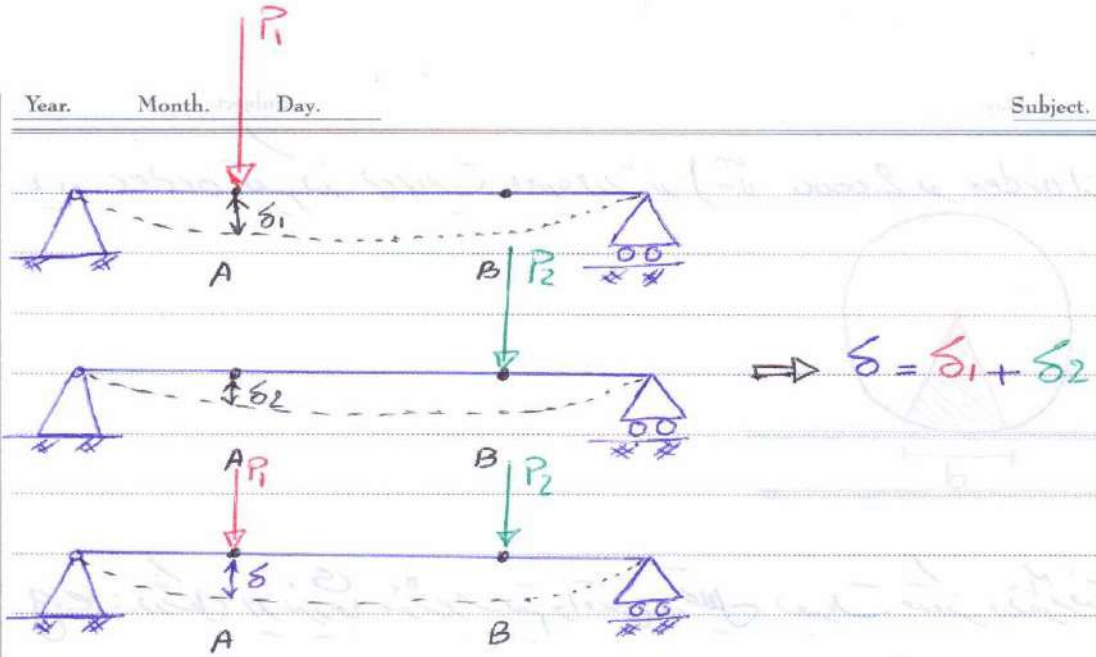
اثر یک مجموعه نیرو بر روی یک جسم برابر جمع آثار هر کدام از نیروها بوده و مستقل از ترتیب و نحوه ی اثر نیروها می باشد. این اصل در استفاده کاربردهای فراوانی دارد اما در مقاومت مصالح با شرایط زیر قابل استفاده خواهد بود:

شرط اول: تغییر مکان نقاط اثر نیروها در مقابل ابعاد جسم کوچک باشد (اصطلاحاً تغییر شکل های کوچک در ناحیه الاستیک داشته باشیم و وارد ناحیه پلاستیک نشویم)

شرط دوم: تغییر شکل جسم تابع خطی از نیروها داده باشد

شرط سوم: شرایط تکیه گاهی نیز تغییر نکند

مثال: تیر شکل زیر تحت اثر نیروی P_1 در نقطه ی A به اندازه ی δ_1 تغییر شکل داده است و این نقطه تحت اثر نیروی P_2 که در نقطه ی B به اندازه ی δ_2 جابجا گردیده است. با استفاده از جمع آثار، تغییر مکان نقطه A تحت اثر دو نیروی P_1 و P_2 برابر $\delta_1 + \delta_2$ می باشد:



$\Rightarrow \delta = \delta_1 + \delta_2$

۶ - اصل سن - وِنن (saint_venant)

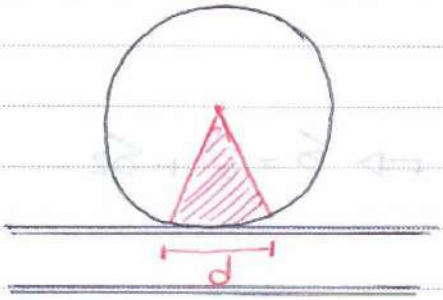
نیروهای داخلی تقاطعی که دور از محل اثر نیروهای خارجی باشند بسیار کم به چگونگی اثر نیروها حساس هستند. با قبول این اصل می‌توان یک مجموعه نیرو یا مجموعه نیروی معادل از نقطه استاتیکی جایگزین کرد و محاسبات را ساده‌تر نمود.

به عنوان نمونه در چرخ یک قطار ملاحظه می‌شود نیروها فقط بر روی ریل داخلی تونل تعویض نیروی متمرکز و تقویت شده‌ای از نقطه استاتیکی معادل نیروی حاصل از وزن قطار وارد بر چرخ می‌باشد.

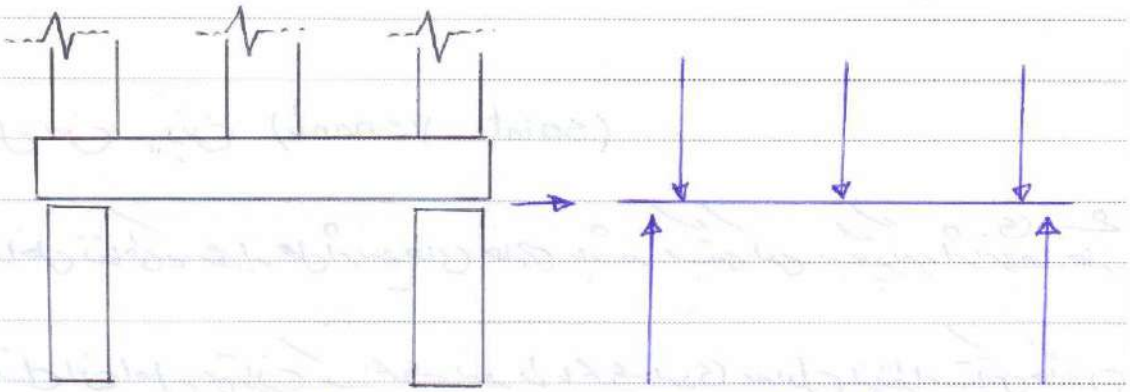
تجربه نشان داده است که فقط d تا $2d$ از سطح اثر نیروی چرخ بارگذاری در نیروهای داخلی این تقاطع اثر قابل توجهی ندارد.

نکته: بی نهایت همواره با بی نهایت در ریاضیات متفاوت است. مثلاً در مهندسی اگر اعداد یک order

باید دو order تغییرشکل بی‌نهایت ناچیز داشته باشند (مثلاً 20000 و 20200 میلیمتر)



e.g: در شکل زیر نیروهای موثر بر سیستم واقعی در تحلیل بصورت متمرکز در تکیه‌گاه‌ها در نظر گرفته می‌شود

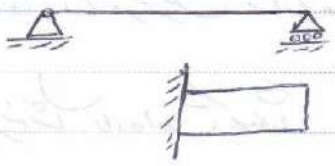


ولی برآیند این اعمال متمرکز در تکیه‌گاه‌ها در نظر گرفته می‌شوند — این نیروها گسترده هستند

انواع تیرها:

تیرها معمولاً بر حسب شرایط و نوع تکیه‌گاه‌ها تفکیک می‌شوند به:

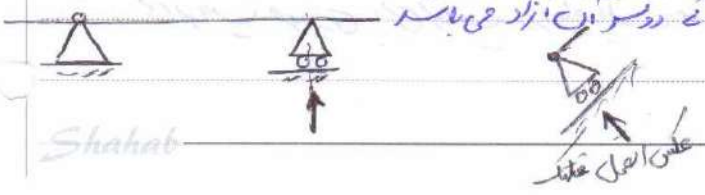
1- تیر ساده: یک سر غلتک یک سر مفصل

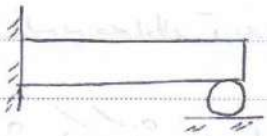


2- تیر طره یا کنسول: یک سر گیردار یک سر آزاد

3- تیر دو سر گیردار:

4- تیر یکسر بار: همان تیر ساده است که دو سر آن آزاد می‌باشد





۵ - تیر یک سرگیردار یک سر ساده

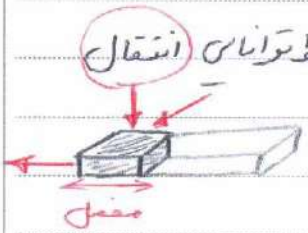
۶ - تیر ممتد: تیر بیش از یک دهانه است

محاسبه ی واکنش تیرها:

اولین گام در تحلیل سازه تعیین واکنش های تکیه گاهی می باشد، واکنش ها عموماً نیروهای خارجی هستند که برای تعادل با بارهای خارجی مؤثر بر سازه مورد نظر اعمال می گردد.

برای تعیین واکنش ها در فضا ۶ معادله تعادل استاتیکی و در صفحه ۳ معادله تعادل استاتیکی استفاده می شود

معادلات تعادل:



برخی مواقع در تیرها مفصل های داخلی وجود دارند، یک مفصل فقط توانایی انتقال نیروهای محوری (کشش و فشار) و نیروی برشی (عرضی) را دارد

نکته: مفصل هیچ گونه نیروی (تلاش های درونی) را انتقال نمی دهد، بنابراین یک مفصل داخلی نقطه ی مناسبی برای اعمال برش مقطع و انفصال سازه به دو قسمت جدا برای محاسبه ی واکنش ها می باشد

چون هر مفصل داخلی شرط جدیدی را برای نوشتن تعادل تیرها معرفی می کند بنابراین

یک معادله به معادلات تقابل کل سیستم اضافه می‌شود بنابراین اگر سازه یک درجه نامعین
داشته باشد (یک واکنش مجهول اضافه) با تعبیه یک مفصل داخلی در آن سازه معین می‌شود

توجه: واکنش های مفصل داخلی در دو قسمت جدا از یکدیگر و در خلاف جهت یکدیگر رفتار می‌کنند

انواع تکیه گاه ها: (منظور نیروهایی است که می توانند بر سازه اثر کنند)

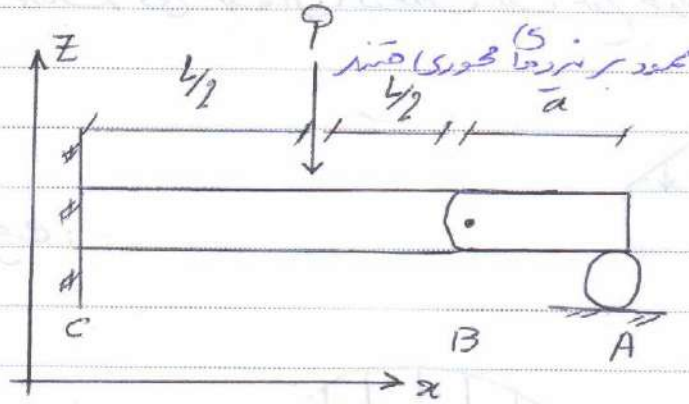
1- نیروهای محوری (کشش یا فشار): مثلاً در خرپاها اعضا فقط تحت نیروهای محوری هستند

2- گشتاور خمشی: مثلاً در تیرها ما معمولاً خمش داریم و معمولاً از نیروهای محوری صرف نظر می شود

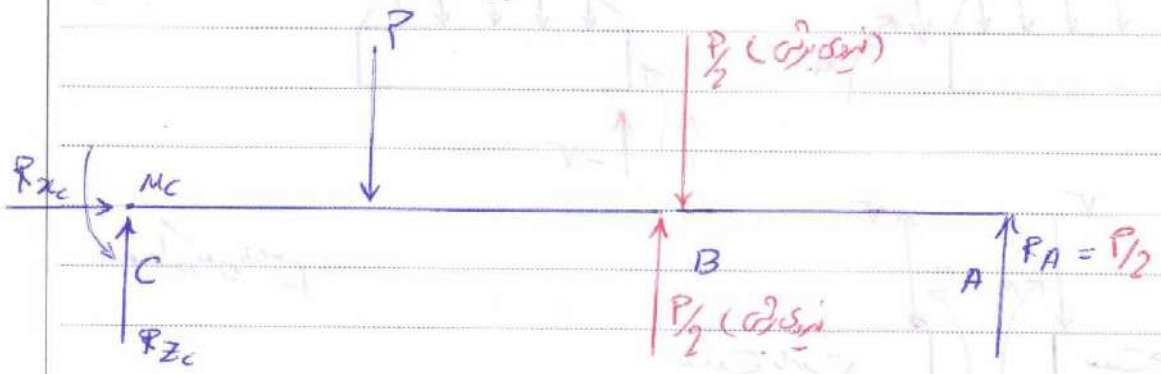
3- گشتاور پیچشی: فرمانده علی اصغر می تواند دو اعضای تیروتیر ایجاد پیچش و تنش پیچشی بیندازد

نمایید دستون ها دارای بار زلزله ها هم دچار پیچش می شوند

4- نیروهای عرضی یا برشی که معمولاً نیروهای عمود بر نیروهای محوری هستند



e.g: ابتدا رسم دیاگرام آزاد (فقط نیروهای خارجی رسم می شود)



$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_z = 0$

$\Sigma M_y = 0 \rightarrow \Sigma M_C = 0 \Rightarrow P \cdot L/2 - P/2 \times (L+a) = M_C$

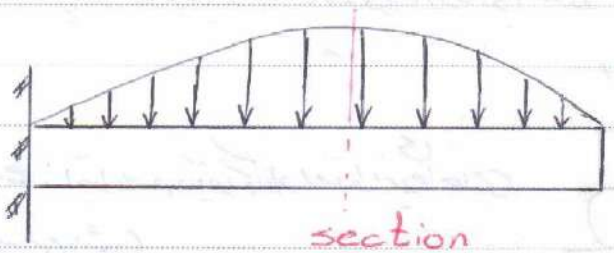
$\Rightarrow \frac{-P \cdot a}{2} = M_C$

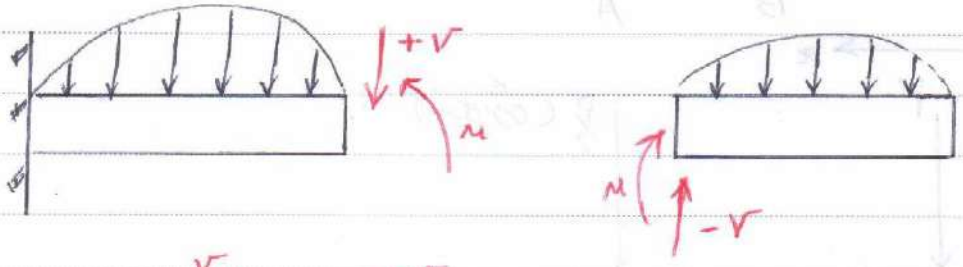
نیروی برشی در تیرها:

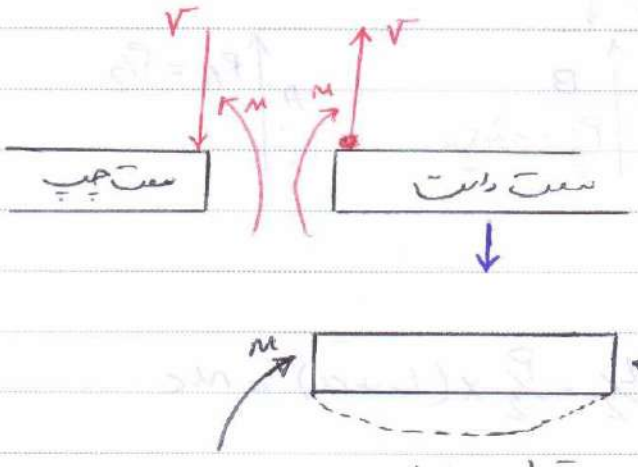
برای اینکه یک بخش از تیر در حال تعادل باقی بماند باید یک نیروی داخلی قائم V در مقطع باشد تا معادله‌ی $\sum F_y = 0$ ارضا گردد، این نیروی داخلی V که عمود بر محور تیر می‌باشد نیروی برشی مقاوم داخلی یا به اختصار نیروی برشی گفته می‌شود.

مقدار نیروی برشی برابر است با مجموع جبری مؤلفه‌های قائم کلیه بارهای وارده بر قطعه جدا شده می‌باشد ولی جهت آن در خلاف جهت مجموع خواهد بود

e.g:







نیروهای محوری در تیرها:

در یک مقطع از تیر علاوه بر نیروی برشی (V) برای حفظ تعادل ممکن است یک نیروی افقی مانند P در امتداد محور تیر لازم باشد، مقدار و جهت این نیرو از معادله $\sum F_x = 0$ حاصل می‌گردد.

(اما بر دیاگرام اغلب برش‌ها بیشتر موارد از نیروی محوری تیر صرف نظر می‌شود)

لنگر خمشی در تیرها: (توضیح مسئله قبل)

وجود نیروهای برشی و محوری در یک مقطع تضمین می‌کند که معادلات تعادل (در تا $\sum F$ها) ارضا گردد. در مسائل دو بعدی معادله‌ی سوم تعادل یعنی $\sum M$ نیز باید صادق باشد، این امر فقط در صورت وجود یک لنگر مقاوم داخلی در مقطع امکان پذیر است.

این لنگر در مقابل لنگر حاصله از نیروهای خارجی در جهت عکس آن باید عمل کند تا معادله‌ی $\sum M_z = 0$ ارضا گردد.

دیاگرام تغییرات نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی:

مقدار و جهت نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی را می‌توان در هر مقطع از تیر تعیین کرد. با در دست داشتن مقادیر و جهت این کمیت‌ها در مقاطع مختلف می‌توان تغییرات نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی را در طول تیر بدست آورد و دیاگرام آن را رسم نمود.

معادلات دیفرانسیل تعادل:

$$\text{(I)}\quad \frac{dV}{dx} = q \;\rightarrow\; dV = q\,dx \xrightarrow[\text{انتگرال‌گیری}]{\text{از طرفین}} V = \int q\,dx$$

(dV: تغییرات برش؛ dx: تغییرات در طول (در متر)؛ q: بار گسترده)

$$\text{(II)}\quad \frac{dM}{dx} = V \;\rightarrow\; dM = V\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} M = \int V\,dx$$

با توجه به رابطه‌ی (I) با استفاده از شرایط تعادل، نیروهای قائم را محاسبه می‌نماییم و با استفاده از این روش می‌توان دیاگرام تغییرات نیروی برشی را رسم نمود.

به روش مشابه و با استفاده از رابطه‌ی (II) می‌توان تعادل لنگر و دیاگرام لنگر خمشی را بدست آورد.

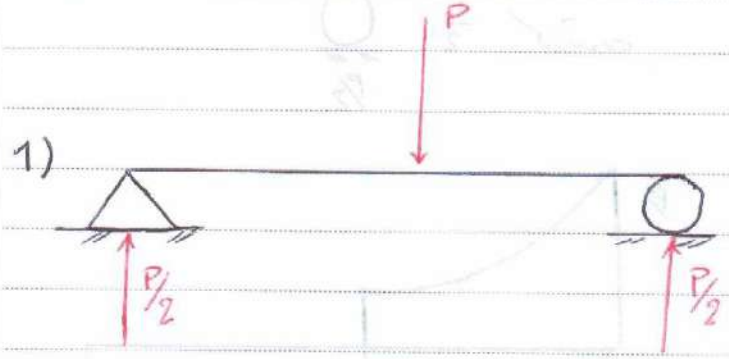
توجه: براین اساس بین هر دو مقطع مشخص یک تیر تغییر در نیروی برشی برابر است با جمع جبری تک‌تک نیروهایی که در بین دو مقطع بر تیر وارد می‌شوند.

توجه: اگر هیچ نیروی بین دو مقطع بر تیر وارد نشود هیچ گونه تغییری در مقدار نیروی برشی رخ نمی‌دهد.

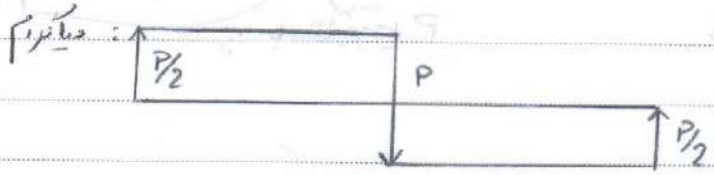
اگر یک بار متمرکز اعمال گردد در جمع جبری در مقدار برش ناپیوستگی یا پرشی رخ می‌دهد.

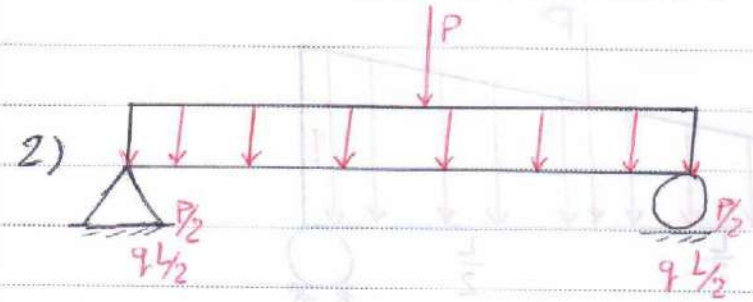
توجه: در رسم دیاگرام آزاد همیشه از چپ به راست حرکت میکنیم

رسم دیاگرام برش

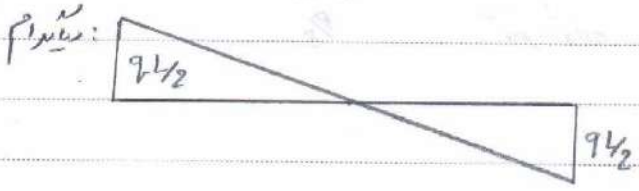


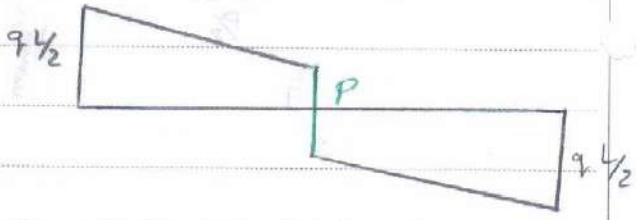
دیاگرام:





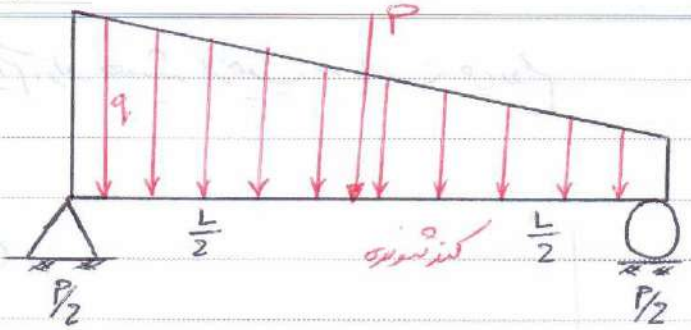
دیاگرام:



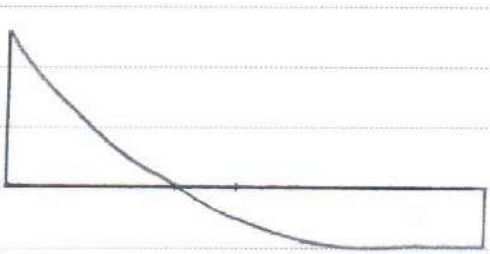


اگر نیروی خارجی P داشتیم در نظر میگیریم

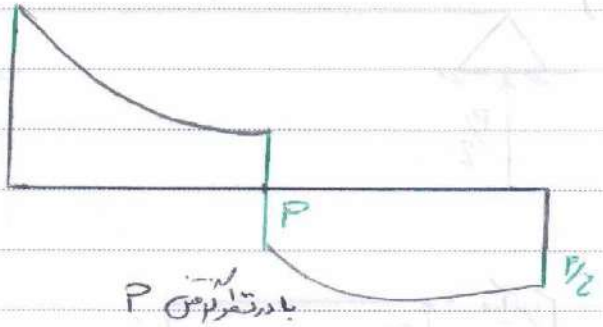
اگر فقط بار q داشتیم در نظر میگیریم



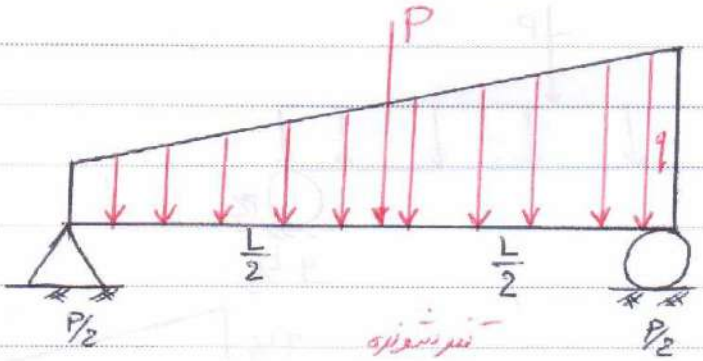
کنترشونده



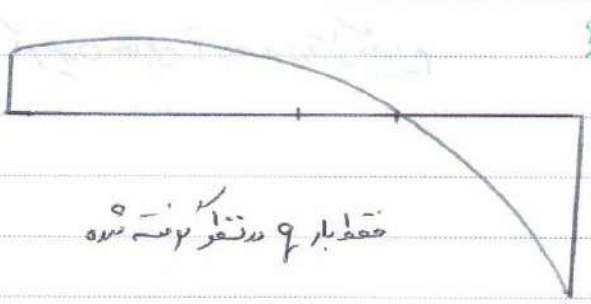
فقط بار q در تغییر شکل نقطه شده است



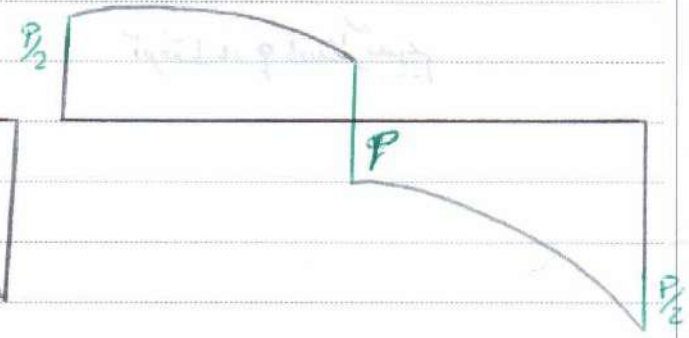
با در نظر گرفتن P



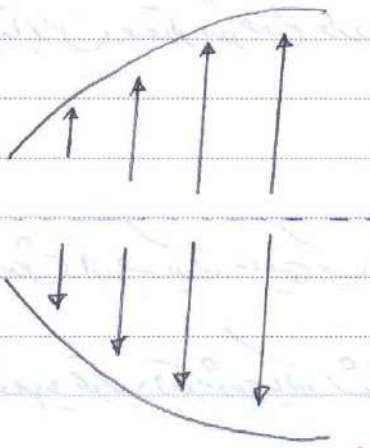
غیر شونده



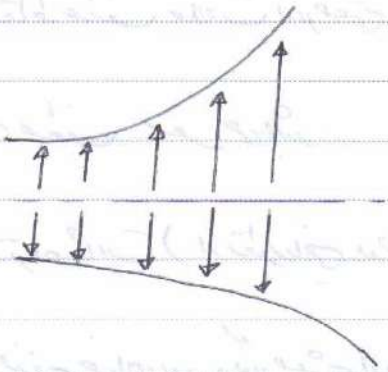
فقط بار q در تغییر شکل نقطه شده



نقطه :



نقد شونده



نقد شونده

در کاربرد روش جمع زدن باید توجه خاصی به نیروهای متمرکز نیز داشته باشیم، چون اثر آنها در جمع زدن سطح زیر منحنی برش (دیاگرام آزاد نیرو) وارد می‌شود و در نقطه اثر نیرو متمرکز و خارجی یک تغییر ناگهانی (پرش) مساوی نیرو متمرکز در دیاگرام تغییرات نیروی خواهیم داشت.

توجه :

در دیاگرام تغییرات نیروی، شکلی که مجموعه نیرو در هر مقطع بارگذاری به خود می‌گیرد را منحنی تغییر شکل ارتجاعی تیر یا منحنی ارتجاعی می‌گویند.

در مقطعی از تیر که لنگر خمشی مثبت می‌باشد منحنی ارتجاعی تغییرات محدب خواهد بود

و در مقطعی از تیر که لنگر خمشی منفی می‌باشد منحنی ارتجاعی مقعر خواهد بود.

در منحنی ارتجاعی نقاط انتقالی که در آن جهت انحنای منحنی عوض می‌شود را نقاط عطف گویند

در نقاط عطف علامت تنگرخشی عوض می‌شود بنابراین مقدار تنگرخشی وارد بر تیر در نقطه‌ی عطف صفر می‌باشد.

اگر بارگسترده مثبت (از تغورپانی درجه صفر) باشد برش از درجه یک 1 - یعنی یک خط با شیب مثبت یا منفی خواهد بود و تنگرخشی از درجه‌ی 2 یا تقعر یا تحدب (تند شونده یا کند شونده) مشخص خواهد بود

به همین ترتیب اگر بارگسترده از درجه یک 1 باشد (یک خط با شیب مثبت یا منفی) برش از درجه 2 و تنگر از درجه 3 خواهد بود

همچنین اگر بار از درجه 2 (یک منحنی) ، برش از درجه 3 و تنگر از درجه 4 می‌باشد.

تنش

تنش نرمال (Normal stress)

تنش: نیرو بر واحد سطح

با این تعریف تنش عضوی که تحت اثر نیروی محوری P قرار دارد بصورت زیر محاسبه می‌شود

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

P ← بار محوری
A ← سطح
σ ← سیگما

توجه: سیگما (σ) بیانگر متوسط تنش در سطح مقطع می‌باشد و بیانگر تنش در نقطه خاص نخواهد بود

علامت تنش کشش (tensile stress) مثبت در نظر گرفته و علامت تنش فشاری (compressive stress) را منفی در نظر می‌گیریم.

یکی از واحدهای مهم برای تنش N/m^2 (نیوتن بر مترمربع) یا Pa (پاسکال) می‌باشد و در سیستم BS داریم:

$$Psi = \frac{lb}{in^2}$$ (پوند / اینچ)

$$ksi = \frac{klb}{in^2}$$ (کیپ / اینچ)

نکته:

$$MPa = \frac{N}{mm^2}$$

$$Mega = 10^6$$

یادآوری:

واحد	SI	BS
جرم	kg	پوند lb
زمان	sec	sec
طول	m	inch = 2.54cm ft = 12 inch

با توجه به اینکه سطح مقطع عضو تحت اثر نیروی محوری، بسته به شکل یا نوع بارگذاری آن افزایش یا کاهش می یابد تنش را با استفاده از سطح مقطع اولیه یا سطح مقطع می توان بدست آورد. در حالت اول تنش محاسبه شده تنش مهندسی نام دارد و در حالت دوم تنش واقعی

تنش مهندسی: محاسبه تنش با استفاده از سطح مقطع اولیه تنش واقعی: محاسبه تنش در هر لحظه با استفاده از سطح مقطع محاسبه می شود. (اغلب در مقاومت مصالح در سطح کارشناسی تنش مهندسی سروکار داریم)

تنش برشی (shearing stress)

چنانچه نیروی P عمود بر محور طولی عضو به موازات سطح مقطع A در عضو وارد گردد، در عضو تنش برشی ایجاد خواهد شد.

با تقسیم برش P بر مساحت A تنش برشی میانگین در مقطع محاسبه می شود

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A}$$

نیروی برشی ← P

تاو ← τ_{ave}

توجه: برخلاف تنش قائم نمی‌توان توزیع تنش برشی در مقطع را یکنواخت فرض کرد

و مقدار واقعی τ از مقدار در سطح عضو تا مقدار τ_{MAX} تغییر می‌کند ممکن است

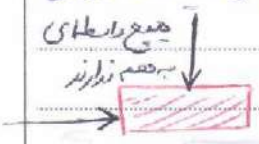
τ_{MAX} از τ_{ave} بسیار بزرگتر باشد. این تنش (برشی) اغلب در پیچ‌ها و پرچ‌ها مورد استفاده

برای اتصال اعضا به وجود می‌آید.

توجه: با مقایسه تنش برشی و تنش قائم می‌توان به نکات زیر دست یافت:

1- تنش برشی تحت اثر نیروی مماسی بر سطح مقطع اعمال می‌گردد، در صورتی که تنش قائم (نرمال) تحت اثر عمود بر سطح مقطع اعمال می‌گردد.

2- تنش برشی روی سطوح عمود بر هم تحت اثر هم زمان وجود می‌آید، اما در اثر تنش قائم روی سطوح عمود بر هم هیچ گونه واسطه‌ای با یکدیگر ندارند



3- در اثر تنش برشی در عضو اعوجاج (deflection) به وجود می‌آید و زوایا تغییر می‌کند

اما در اثر تنش قائم اعوجاجی به وجود نمی‌آید.

4- تنش برشی خالص (زمانی که فقط یکی را داریم) هیچ تغییر طولی را در امتداد خود باعث

نخواهد شد بلکه فقط باعث تغییر زوایا می‌گردد، بنابراین تحت اثر برش خالص هیچ تغییر حجمی

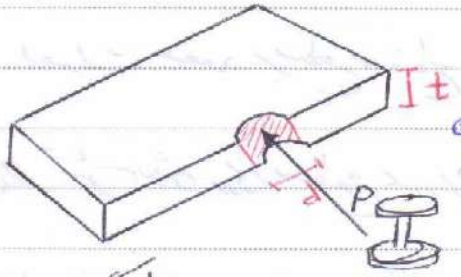
نخواهیم داشت، ولی تنش قائم خالص باعث تغییر طول و تغییر حجم خواهد شد.

تنش لهیدگی (crushing stress) ← از جنس نرمال می باشد

تنش ایجاد شده در سطح تماس اعضای یک اتصال و یا سطح تکیه گاه اعضا را تنش لهیدگی نامند.

اگر مطابق شکل توسط پرچ نیروی P بر سطح وارد گردد می توان سطح مؤثر در مقابل نیروی P را مستطیلی که همان تصویر پرچ بروی سطح صفحه می باشد در نظر گرفت.

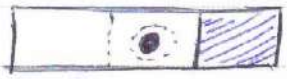
این مستطیل دارای ابعاد t (ضخامت صفحه) و d (قطر پرچ یا پیچ) می باشد. بنابراین تنش لهیدگی که آن را تنش تکیه گاهی نیز گویند بصورت زیر محاسبه می شود:



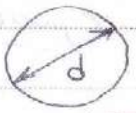
این مشابه دایره در نظر گرفته می شود

$$\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{t \cdot d}$$

مساحت مستطیل



$$\text{تنش لهیدگی} = \frac{\text{نیرو}}{\text{تصویر پیچ (پرچ)}} \longrightarrow (\text{ارتفاع پیچ در هر قطعه} \times \text{قطر پیچ}) \quad d \quad t$$



تنش پسماند (Residual stress)

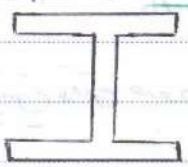
سرد نورد cold forming
گرم نورد warm forming ←

در مقاطع نورد شده در مرحله ی سرد شدن عضو، بال (flange) ها و وسط جانها (web) که تمرکز جرم

در آنها کمتر می باشد زودتر سرد می شوند و تمایل به کاهش طول دارند ولی تقاطع جان و بال که تمرکز

جرم بیشتر می باشد مانع از این کاهش طول می گردد و در نتیجه در بال ها و وسط جانها

تنش های پیسعاند کششی و در محدوده ی تقاطع جان و بال تنش پیسعاند فشاری به وجود می آید.



علت این تنش های پیسعاند عمود بر سطح مقطع در راستای طولی می باشد.

هرچه ضخامت پروفیل ها بیشتر باشد تنش پیسعاند بیشتر می شود مثلاً پروفیل IPE300 تنش پیسعاند بیشتری نسبت به پروفیل IPE180 دارد. تنش پیسعاند در مقاومت اعضای کششی تقشی ندارد ولی در رفتار آنها تاثیر دارد و باعث می شود مقطعات کششی به صنعا جاری شدن، کرنش بیشتری از خود نشان دهند.

اثر مهم تنش پیسعاند در مقاومت اعضای فشاری می باشد که در محاسبات آئین نامه اعضا باید مورد توجه قرار گیرد.

تنش وارد بر سطحی مایل در بارگذاری محوری:

نیروی محوری روی سطحاتی که بر محور عضو عمود نباشند تنش برشی و تنش قائم را بصورت هم زمان ایجاد می کند. در شکل زیر که عضو تحت اثر نیروی محوری P قرار دارد، اگر مقطعی از عضو را در نظر بگیریم که با سطح قائم زاویه θ بسازد مقادیر تنش برشی و تنش قائم از روابط زیر محاسبه می شود:

در روابط زیر A_0 بیانگر سطح مقطع عمود بر محور عضو می باشد (یعنی $\theta = 0$) و تنش قائم

تنش نرمال بصورت عمود بر هم
تنش برشی بصورت هم جهت با محور طولی

Year. Month. Day. Subject.

ماکزیمم $\left(\frac{P}{A_0}\right)$ بصورتی حی شد و تنش برشی صفر خواهد بود.

همچنین وقتی صفحه‌ی مقطع با صفحه‌ی قائم زاویه 45° بسازد تنش برشی به مقدار ماکزیمم

$if\ \theta = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{P}{A_0}$ خود یعنی $\frac{P}{2A_0}$ می‌شد

$if\ \theta = 45^\circ \Rightarrow \tau_{MAX} = \frac{P}{2A_0}$

در صفحات مایل نسبت به جهت طولی نمونه

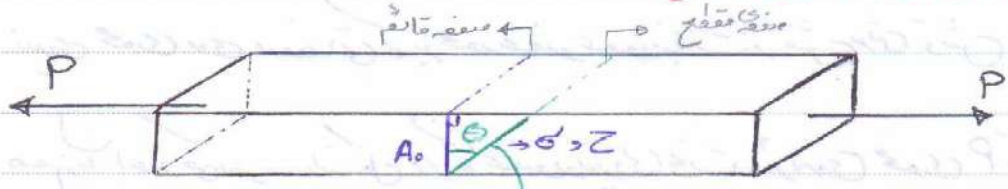
تنش قائم $= \frac{P}{A} = \frac{P\cos\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}} = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta$

تنش برشی $\tau = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta$ ← اثبات

$\tau = \frac{P}{A} = \frac{P\sin\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}} = \frac{P}{A_0}\sin\theta\cos\theta = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\frac{1}{2}\sin 2\theta = \sin\theta \cdot \cos\theta$



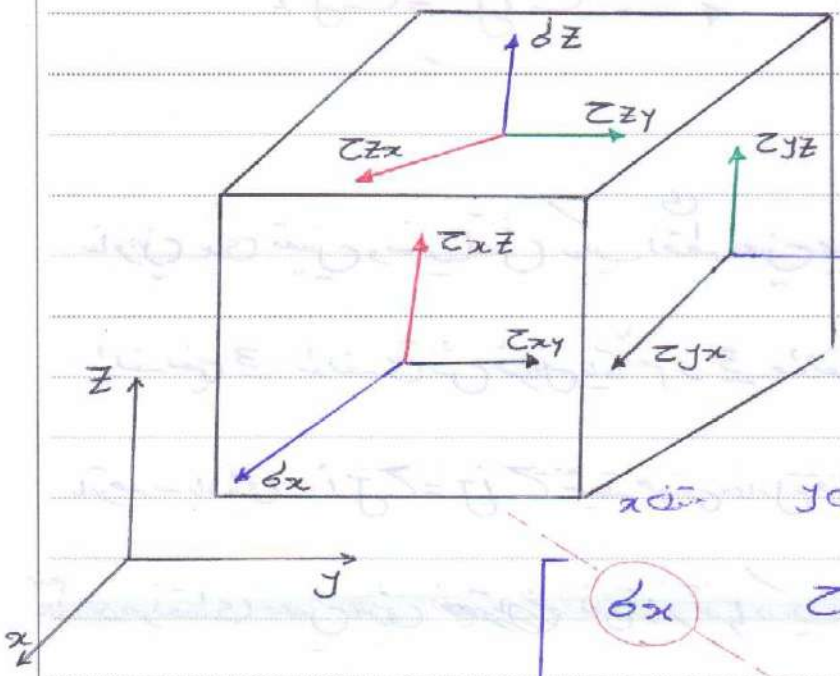
$\frac{A_0}{\cos\theta}$ ← چون سطح افزایش یافته است A_0 بر $\cos$ تقسیم

کنیم عددی کوچک می‌شود و این صحیح نیست بلکه به دلیل افزایش سطح باید بر $\cos$ تقسیم کنیم تا عدد بزرگی را به ما برگرداند

مؤلفه‌های تنش (تانسور تنش)

اگر یک عضو مکعبی شکل را از جسمی که تحت اثر نیرو قرار دارد ازدایی کنیم مشاهده می‌شود که این عضو دارای ۹ مؤلفه‌ی تنش می‌باشد که ۳ تا مؤلفه‌ی آن مربوط به تنش‌های قائم و ۶ مؤلفه‌ی آن مربوط به تنش‌های برشی خواهد بود.

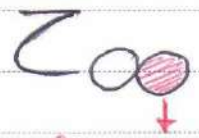
البته بدیهی است تنش‌های برشی مستقل از یکدیگر نمی‌باشند. اگر همه‌ی مؤلفه‌های تنش را درون یک ماتریس قرار دهیم، این ماتریس را تانسور تنش گویند که روابط خاصی بین مؤلفه‌های آن حاکم می‌باشد.



تنش x | تنش y | تنش z

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

قطر اصلی



نشان دهنده جهت محور می‌باشد

توضیح ← i در مؤلفه‌ی تنش τ از کدام محور عمود بر صفحه‌ی تنش را مشخص می‌کند

و j نیز راستای تنش را مشخص می‌کند. مثلاً نمونه τ_{xy} بیانگر تنشی است که بر

صفحه‌ای عمود بر محور x‌ها وارد می‌شود و در جهت y ها می‌باشد. بدیهی است جنس

تنش از نوع برشی (عرضی) خواهد بود. اگر در المان مکعبی معادلات تعادل نیرو را حول 3 محور

مختصات بنویسیم خواهیم داشت:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \leftarrow \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

بنابراین برای تعیین وضعیت تنش در یک نقطه‌ی معین بجای 9 مؤلفه‌ی تنش ابتدایی تنها 6

مؤلفه یعنی 3 مؤلفه‌ی تنش نرمال یا قائم و 3 مؤلفه‌ی تنش برشی داریم

با توجه به رابطه‌ی $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ نتیجه مهمی حاصل می‌شود:

مهم ← در هر نقطه‌ی معین برش نمی‌تواند تنها در یک صفحه رخ دهد بلکه باید تنش برشی

یکسانی بر صفحه‌ی دیگر عمود بر صفحه‌ی اول نیز وارد شود.

هر تانسور تنش را می توان بصورت مجموع دو تانسور تنش باز نویسی نمود یکی از تانسورها تانسور برش خالص

و دیگری تانسور تنش قائم خالص می باشد (مانند فشار هیدرواستاتیک)

اگر $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ باشد داریم:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} =$$

تنش های برشی

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

T_1 (تانسور برش خالص) T_2 (تانسور تنش زوال خالص)

در تانسور T_1 مجموع عناصر روی قطر اصلی که همان مجموع تنش های قائم می باشد برابر صفر خواهد بود بنابراین

آن را تانسور برش خالص گویند.

(برهان) به دلیل اینکه مانند تانسور برش خالص باعث اعوجاج یا تغییر حجمی نمی گردد و تنها باعث

ایجاد اعوجاج می‌شود می‌توان با چرخاندن المان تنش یا تانسور T_1 به تانسور اصلی برش خالص

بصورت زیر تبدیل نمود:

تانسور اصلی برش خالص

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

تانسور T_2 (مخصوص تنش نرمال) فقط باعث ایجاد تغییر حجم در المان می‌شود ولی هیچ گونه اعوجاجی تولید نمی‌کند

- برش خالص: تغییر حجم نمی‌شود / ایجاد اعوجاج می‌شود
- تنش نرمال خالص: ایجاد تغییر حجم می‌شود / اعوجاج تولید نمی‌کند

نکته: تانسور تنش دارای دو ویژگی زیر می‌باشد:

1- مجموع عناصر روی قطر اصلی تانسور تنش با چرخاندن المان تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند (روی قطر اصلی تانسور برش نیز همین گونه خواهد بود)

2- مقادیر ویژه‌ی تانسور تنش همان تنش‌های اصلی المان هستند با چرخاندن المان می‌توان به آنها رسید.

مقادیر ویژه با استفاده از معادله‌ی مشخصه بصورت زیر محاسبه می‌شود:

(مقادیر ویژه ← ، ماتریس همانی →)

$$\left| [\sigma_{ij}] - \lambda I \right| = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Shahab

حالت های خاص تنش به دو صورت زیر قابل بررسی می باشد:

1- حالت تنش مسطح (تنش صفحه ای) (plane stress)

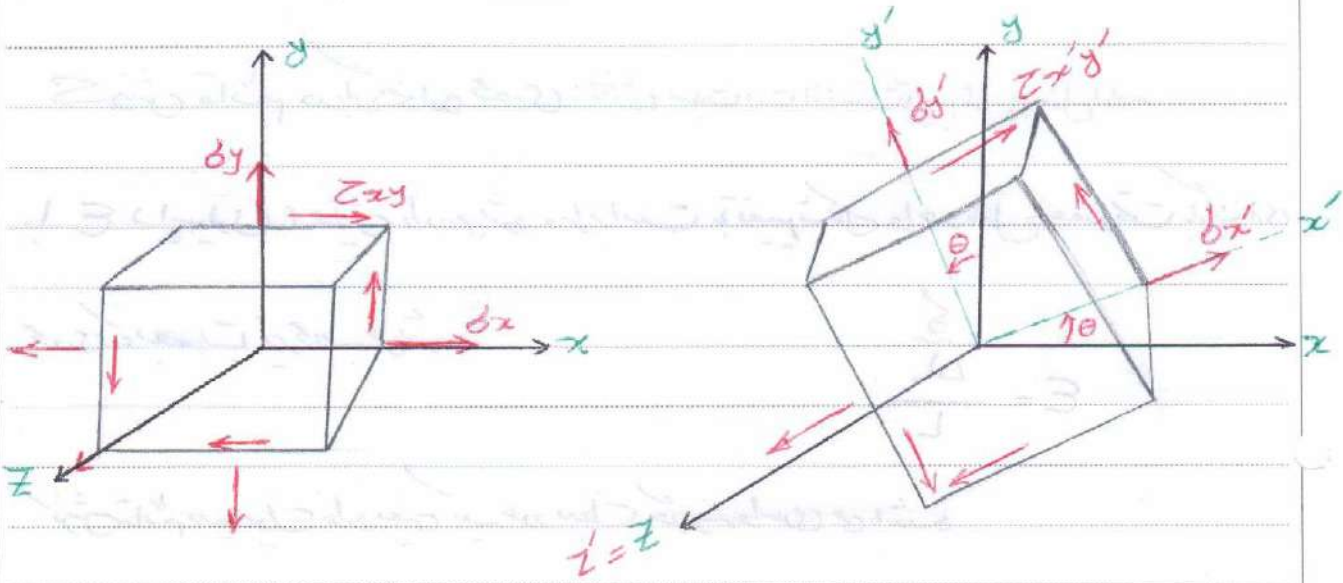
در این حالت تمام مؤلفه های تنش در یک امتداد برابر صفر می باشد بطور مثال در راستای Z تنش ها

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

نسبت دوبرد صفر می باشد

یادآوری:

اگر داشته باشیم آنگاه در این مؤلفه تنش نرمال محور عمود بر صفحه تنش اصلی یا راستای تنش می باشد



فرمول ها: فرمول ها در حالت دوبعدی یافته:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

Shahab

2- حالت کرنش مسطح (کرنش صفحه‌ای) (plane strain)

در این حالت تمام مؤلفه‌های کرنش در یک امتداد برابر صفر می‌باشد، بعنوان مثال کرنش ε در راستای z برابر صفر می‌باشد

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

(کرنش قائم (در راستای z)، کرنش برشی)

توجه: معمولاً حالت کرنش مسطح صفحه‌ای را می‌توان برای اجسامی که یکی از ابعاد آنها خیلی کوچک باشد در نظر گرفت

کرنش قائم در بارگذاری محوری: کرنش عبارت است از نسبت تغییر طول به طول اولیه

با ε (اپسیلون) نمایش داده می‌شود و برابر است با تغییر شکل واحد طول عضو تحت بارگذاری محوری که بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{\Delta L}{L}$$

کرنش قائم بی‌بعد است یعنی یک عدد بدون هر گونه واحدی می‌باشد

در صورتی که بار محوری وارد بر عضو کششی باشد (بار محوری مثبت) عضو افزایش طول خواهد داد و اصطلاحاً گوییم کرنش کششی (tensile strain) رخ می‌دهد

به همین ترتیب اگر در عضو، بار محوری فشاری (بار محوری منفی) اعمال گردد کرنش فشاری (compressive strain) رخ می دهد یعنی عضو کاهش طول داده است.

منحنی تنش - کرنش

با رسم منحنی تنش ($\sigma = \frac{P}{A}$) برحسب کرنش ($\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$) یک منحنی (curve) می رسیم که بستگی به ابعاد نمونه ندارد و مشخص کننده خواص می باشد. این منحنی، منحنی تنش - کرنش نامیده می شود که برای بدست آوردن آن معمولاً یک از نمونه گیری از عضو مورد نظر و انجام آزمایش کشش در آزمایشگاه مقادیر متعدد تنش و کرنش بصورت یک منحنی ارائه می دهند.

در کلیت مواد شکل پذیر، برش نقش اساسی دارد، بطور مثال برای یک نمونه فولادی تحت اثر بار محوری کشش کشیدگی در سطح مخروطی شکل رخ می دهد که با سطح اولیه نمونه تقریباً زاویه 45° درجه می سازد.

برخلاف مواد شکل پذیر که شکستی برش داشتند مواد ترد شکستی کشش دارند در شکست آنها تنش عامل نقش اساسی دارد

مواد شکل پذیر (Ductile Materials)

مواد ترد (Brittle Materials)

بعنوان مثال یک میله‌ی چدنی تحت اثر بارمحوری کشش بایک گسیختگی در سطحی عمود بر بار دارده

دچار شکست می شود (شکست کششی) و تقاطت عمده‌ی دیگر شکست مواد شکل پذیر با مواد ترد این

است که در مواد شکل پذیر تحت کشش باریک شدگی (necking) رخ می دهد و در حالی که در مواد ترد

قبل از هرگونه تغییر شکل عضو دچار شکست می شود.

توجه: در مواد شکل پذیر از دیاد طولی معادل 200 برابر تغییر شکل آن عضو قبل از تسلیم یا جاری شدن

(Yield) بعد از شروع تسلیم دیده می شود.

مقطع جدا شده

توجه: باریک شدگی فقط مربوط به مواد شکل پذیر تحت اثر بار محوری کشش می باشد و در حالت

بار محوری فشاری هیچ گاه باریک شدگی رخ نمی دهد و در مواردی تورم خواهیم داشت.

در مواد شکل پذیر تنش مهندسی که با بار P متناسب مستقیم دارد بخاطر مرحله‌ی باریک شدگی همراه

با بار P تنش مهندسی نیز کاهش می یابد. اما تنش واقعی (σ_t) وابسته به زمان که با بار P متناسب

است با سطح A نیز متناسب معکوس دارد.

بنابراین همچنان افزایش می یابد تا نمونه گسیخته گردد.

بطور مشابه برای کرنش نیز مقادیر مهندسی و مقادیر واقعی تعریف می گردد

کرنش مهندسی برابر است با :

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$ تغییر شکل واحد طول عضو و رابطه‌ی آن

$$\varepsilon_t = \ln \frac{L}{L_0}$$ و کرنش واقعی از رابطه‌ی محاسبه می شود بطوری که L طول نمونه در هر زمان

بارگذاری می باشد و L_0 طول اولیه نمونه خواهد بود

قانون رابرت هوک Hook law

مواد با رفتار هوک Hookian materials

بیان می کند تنش (σ) با کرنش (ε) رابطه‌ی خطی دارد

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

مدول یانگ، ضریب ارتجاعی یا الاستیک نامیده می شود

برای بدست آوردن دیمانسیون تنش داریم

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

P: نیرو $\rightarrow M.a = MLT^{-2}$ (a: شتاب $\rightarrow \frac{L}{T^2}$)

A: سطح $\rightarrow L^2$ (دیمانسیون سطح)

در رابطه‌ی هوک به دلیل اینکه کرنش عاقد دیمانسیون می‌باشد، E (ضریب ارتجاعی) باتنش هم دیمانسیون می‌باشد.

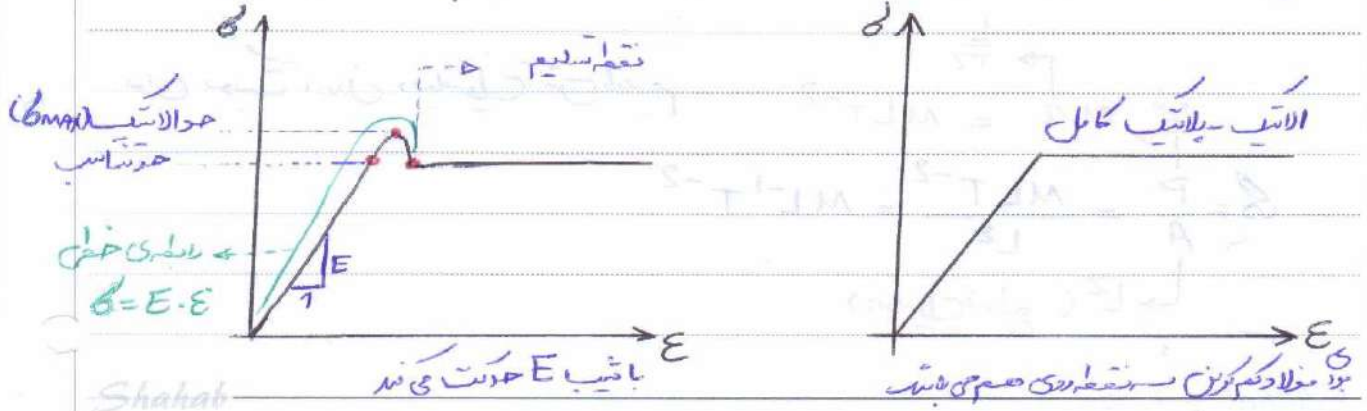
چند تعریف

← بزرگترین مقداری تنش که برای آن می‌توان قانون هوک را برای ماده‌ی معینی بکار برد حدتناسب (limit of proportionality) آن ماده می‌نامند.

یعنی تا این حد بین تنش و کرنش یک تناسب خطی وجود دارد.

← بزرگترین مقداری تنش که برای آن ماده رفتار الاستیک (Elastic) (ارتجاعی باتنش سان) دارد، یعنی با برداشتن بار هیچ گونه تغییر شکل جاماندگاری در عضو نماند و تغییر شکل محو شود که به این، حدکشسان می‌گویند.

اگر ماده‌ای مانند فولاد کم کربن (low carbon steel) نقطه‌ی تسلیم به خوبی تعریف شده‌ای داشته باشد حدکشسان و حدتناسب و نقطه‌ی تسلیم همگی بر هم منطبق شند

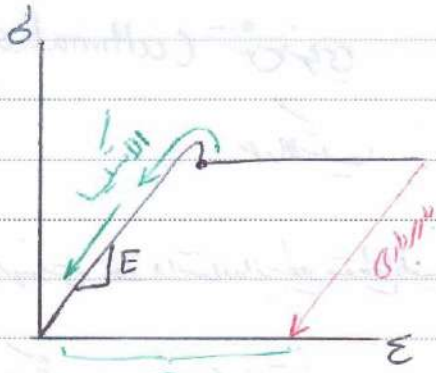


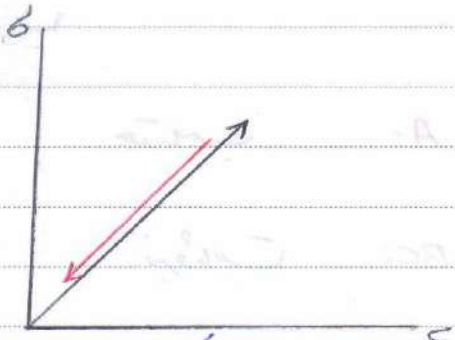
Shahab

Year. Month. Day. Subject.

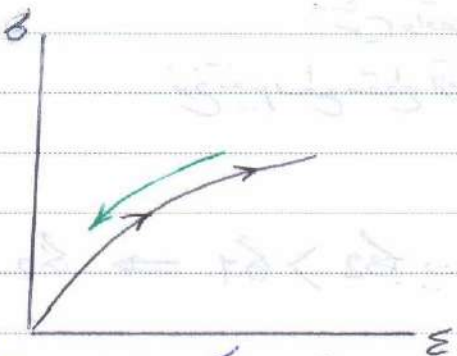
توجه: باید توجه داشت که بحث خطی بودن مصالح (قانون هوک) از بحث الاستیک بودن مصالح متفاوت است. بحث خطی بودن مصالح اشاره به تناسب خطی تنش با کرنش دارد که ضریب این تناسب E می‌باشد. درحالی که الاستیک بودن مصالح بستگی به نحوه رفتار عضو در بارگذاری و بار برداری دارد، یعنی پس از بارگذاری بدون هیچ گونه تغییر شکل یا کرنشی عضو به حالت اول خود باز می‌گردد.

بر این اساس می‌توان مصالحی داشت که در عین خطی بودن، الاستیک رفتار نکنند و برعکس می‌توان مصالحی یافت که در عین غیر خطی بودن، الاستیک رفتار کنند.





هم خطی هم الاستیک



غیر خطی - الاستیک (مانند لاستومر تا پل)

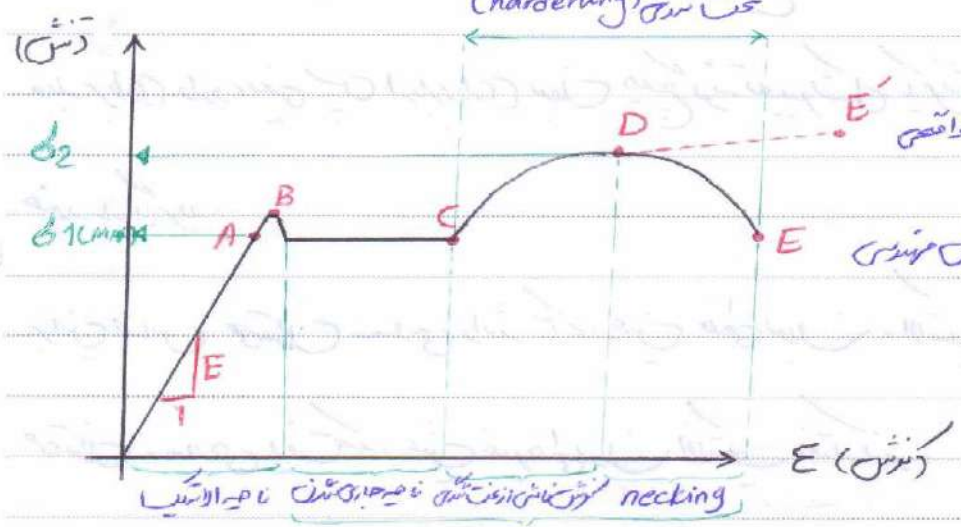
Shahab

39 Collapse سقوط - فروریختگی

نکته ۱: قانون هوک در مقاطع الاستیک خطی تعریف می‌شود

میله منشوری: میله‌ای (عضوی) است که مقطع آن در طول عضو ثابت و مستقیم باشد

(یعنی غیر خمیده باشد)



ناحیه پلاستیک

D: تنش نهایی (ultimat stress)

A: حد تناسب

B: حد الاستیک

BC: نیرو ثابت

DE: تنش مهندسی ⇐ (استفاده از سطح مقطع اولیه)

DE': استفاده از سطح مقطع لحظه‌ای ⇒ تنش واقعی

CD: (سخت شدگی محدود) مکانیزم تغییر

نرخ تغییر سطح مقطع از تغییر (کاهش) تنش (σ) می‌باشد

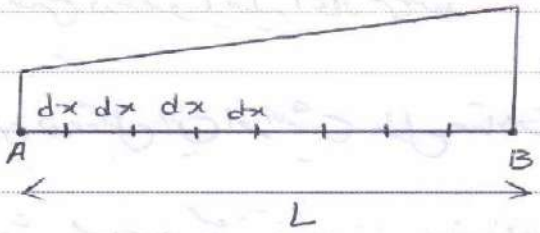
$$\sigma_2 > \sigma_1 \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_{MAX}$$

نکته: اگر میله‌ای بطول L با سطح مقطع متغیر تحت اثر نیروی محوری P قرار گیرد براساس قانون هوک تغییر شکل ناشی از اعمال بار P برعضو از رابطه‌ای زیر محاسبه می‌شود (A و P تابعی از طول عضو (x) می‌باشد)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \frac{P \cdot L}{A \cdot E}$$ چون سطح متغیر است

$$\delta = \int_0^L \frac{P_x \cdot dx}{A_x \cdot E}$$ نمایش داده می‌شود



در حقیقت dx آخر کل dx ها را جاروب می‌کند پس می‌توان آن را عاملی با مقدار ثابت دانست

حال اگر سطح مقطع عضو ثابت باشد:

$$\delta = \frac{P \cdot L}{A \cdot E}$$

تغییر دما:

میله‌ای با سطح مقطع یکنواخت بطول a و ضریب انبساط حرارتی α معروف است که آزادانه روی یک سطح مقطع افقی صیقلی قرار گرفته است. اگر این میله تحت اثر تغییر دمای ΔT

مقدار داشته باشد تغییر طول آن برابر است با:

$\delta = L \cdot \alpha \cdot \Delta T$ (تغییر طول ناشی از تغییر دمای ΔT)

و برای کرنش حرارتی داریم:

$\varepsilon_T = \frac{L \cdot \alpha \cdot \Delta T}{L} = \alpha \cdot \Delta T$ (کرنش حرارتی ناشی از تغییر دمای ΔT)

این کرنش را کرنش گرمایی (حرارتی) گویند.

در این حالت هیچ گونه تنشی در عضو یا میله ایجاد نمی شود ← دلیل: زیرا میله آزادانه تغییر طول می تواند بدهد و تکیه گاهی در مقابل این افزایش طول مقاومت نمی کند، بنابراین هیچ گونه نیرویی بر عضو وارد نمی شود، پس هیچ گونه تنشی نیز در عضو نداریم)

اگر مطابق شکل زیر این عضو بین دو تکیه گاه ثابت Fix شده باشد که در فاصله L از دو طرف مقداری فاصله دارند حد تکیه گاه مانع از افزایش طول میله می شوند، اگر از طرف تکیه گاه ها نیروی متناری F بر میله اعمال گردد خواهیم داشت:

$$\frac{F \cdot L}{A \cdot E} - L \cdot \alpha \cdot \Delta T = 0 \Rightarrow \frac{F \cdot L}{A \cdot E} = L \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

تنش ناشی از نیروی F

$$\frac{F}{A} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \Rightarrow F = A \cdot E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

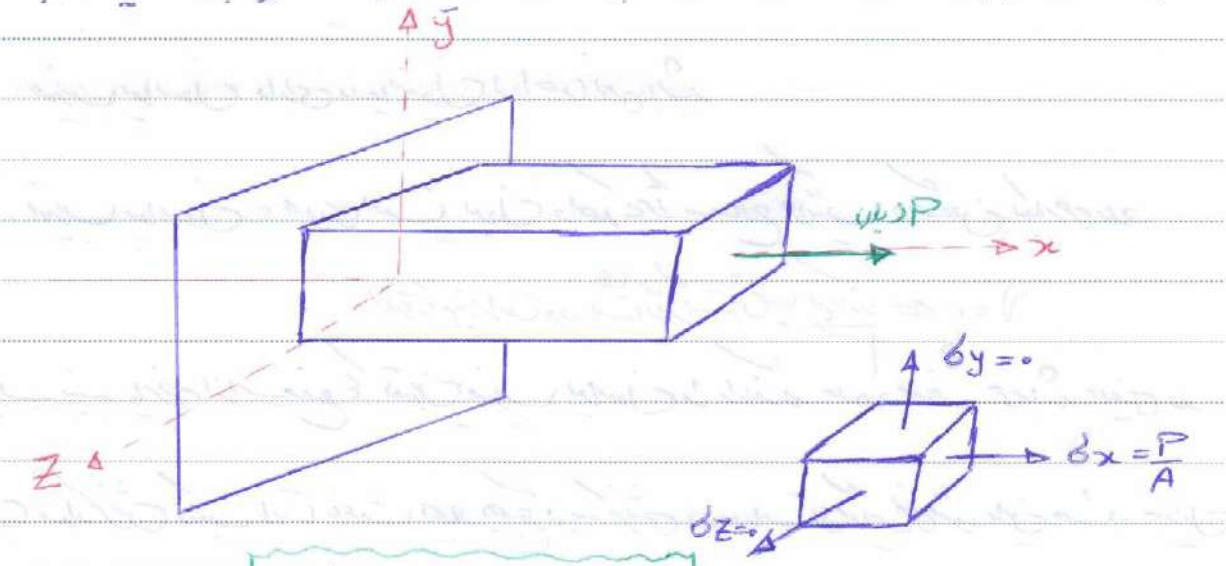
تنش ایجاد شده در عضو در اثر تغییر دمای ΔT

بارگذاری حداقل، بارگذاری خاصی می باشد که می توان بدان بدون وجود کرنش تنش ایجاد کرد و یا اینکه بدون وجود تنش، کرنش ایجاد کرد. به ازای نقطه این بارگذاری متفاوت از انواع دیگر بارگذاری است.

نسبت پواسون (ν) (نو)

در میله ای تحت اثر بار محوری، علاوه بر تنش های عامل، دو جهت جانبی برابر صفر می باشد اما کرنش های متناظر ε_y ، ε_z صفر نمی باشد.

نسبت کرنش جانبی به کرنش محوری را نسبت پواسون گویند که بصورت زیر قابل تعریف می باشد:



$$-\nu\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$$

$$\nu = \left| \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} \right| = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

همواره مثبت است

$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$ (کرنش جانبی) $\quad \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$ (کرنش جانبی)

بر اساس قانون هوک $\Rightarrow \sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ (کرنش محوری)

Shahab

$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$ ، $\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x$ ، $\varepsilon_x = \frac{-\varepsilon_y}{\nu}$ $\Rightarrow$ $\frac{-\varepsilon_y}{\nu} = \frac{\sigma_x}{E}$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_y = -\frac{\nu \sigma_x}{E}$

$\frac{-\varepsilon_z}{\nu} = \frac{\sigma_x}{E}$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E}$

Year. Month. Day. Subject.

بنابراین: زمانی که بخواهیم بین مدول یانگ و دهانه مقدار ارتباط برقرار کنیم

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu \sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E}$$

علامت منفی در روابط فوق برای آن است که عت تاثیر تنش محوری علامت کرنش جانبی

و کرنش محوری مخالف یکدیگر می باشد.

چند نکته:

معمولاً مدول پواسون فلزات بین 0.25 تا 0.35 می باشد

مدول پواسون بتن معمولاً حدود 0.1 می باشد

مدول پواسون دارای دیمانسیون (واحد) نمی باشد

مدول پواسون: عددی است بدون واحد که برای مصالح الاستیک و همگن بکار می رود

کاملاً ناگهنی پدیده است و در راستای دیگر کرنش پیدا نمی کند $\Leftarrow \nu = 0$

چون بیشتر مواد از اسفنج تا لاستیک مدول پواسون دارند حدود منفی می باشد یعنی در

این مواد کرنش در یک راستا باعث ایجاد هیچ گونه کرنش در دو راستای دیگر نمی شود این مسئله به دلیل

تخلخل موجود در این مواد می باشد

در بین از لاستیک و پایین ترین از مصالات (مانند آب و گل) که غیر قابل تراکم می باشند مدول پواسون

بیشترین مقدار خود یعنی 0.5 می باشد، چون با افزودن بارهای جانبی حجم آن ثابت مانده و تغییر نمی کند

هرچه یک ماده تراکم ناپذیرتر $\nu \uparrow$ هرچه یک ماده تراکم پذیرتر باشد $\nu \downarrow$

بالاترین مقدار ضریب پواسون ۰/۵ است.

Year. Month. Day. Subject.

نکته: ماده‌ای که تغییر شکل پلاستیک پیدا کرده است، تغییر حجم نخواهد داشت و دارای ضریب پواسون ۰/۵ خواهد بود.

بار کارهای عملی می‌توان مقدار عددی ضریب پواسون را با تحت کشش و تحت فشار یکسان فرض کرد.

$0 < \nu < \frac{1}{2}$ (غیر قابل تراکم) ← (کاملاً تراکم پذیر)

با پیشرفت علم در سال‌های اخیر مواد مرکب و مواد هوشمندی ساخته شده‌اند که ضریب پواسون منفی دارند.

کرنش خطی جانبی:

تغییر طول نسبی جانبی را گویند.

بارگذاری چند محوری:

برای عضوی که تحت اثر تنش‌های در سه جهت اصلی محورهای مختصات قرار گرفته باشد $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

با استفاده از قانون تعمیم ضریب پواسون و اصل جمع آثار قوا خواهیم داشت:

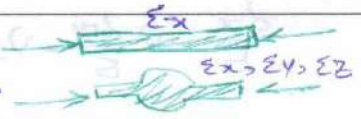
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E}$$

در علاوه بر کشش اصلی در راستای دیگر نیز کرنش می‌یابد ($\varepsilon_y, \varepsilon_z$)

طول را کاهش می‌دهد



روابط فوق تنها برای تغییر شکل های کوچک و تنش هایی که از حد تناسب تجاوز نکرده اند صادق می باشند.

انبساط حجمی: (e)

انبساط حجمی یا کرنش حجمی برابر است با:

تغییرات حجم ÷ حجم اولیه

و برای عنصری که تحت اثر تنش های قائم در سه راستای اصلی (x, y, z) می باشد کرنش حجمی

تعریف می شود:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad \text{(کرنش حجمی)}$$

(ΔV: تغییرات حجم، V: حجم)

$$= \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

در حالت خاصی که جسم تحت اثر فشار هیدرواستاتیک P قرار دارد $(-P = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z)$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{1-2\nu}{E}(-3P)$$

اثبات مدول حجمی با استفاده از مدول های یانگ در راستای چندگانه

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_z}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E}$$

$$\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} = \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)\sigma_x \;,\; \frac{1-2\nu}{E}\sigma_y \;,\; \frac{1-2\nu}{E}\sigma_z$$

اگر K مدول حجمی ماده‌ای نامیم که با ضریب ارتجاعی یا الاستیک (E) هم دیگر نیز باشد

خواهیم داشت

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$$

$$\Rightarrow e = \frac{1-2\nu}{E}(-3P)$$

$$\Rightarrow e = \frac{-P}{E} \longrightarrow K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

کرنش برشی :

اگر عضوی تحت تنش برشی قرار داشته باشد کرنش برشی بر اساس قانون هوک بصورت زیر

قابل بیان است :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

(τ: تنش برشی، γ: کرنش برشی، G: ضریب ارتجاعی یا الاستیسیته برشی)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

(E: ضریب ارتجاعی، ν: ضریب پواسون)

توجه : کرنش برشی نیز مانند کرنش محوری بدون دیمانسیون می‌باشد بنابراین دیمانسیون G

(ضریب الاستیسیته برشی) همان دیمانسیون تنش برشی می‌باشد

توجه: تنسور زاویه وجوه المان (عنصر) بیانگر کرنش برشی می‌باشد. اگر محورهای مرجع بر این وجوه x و y باشد، این کرنش برشی را با γ_{xy} نمایش می‌دهند که بر اساس رابطه‌ی هوک برابر است با:

1) $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$

2) $\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$

3) $\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$

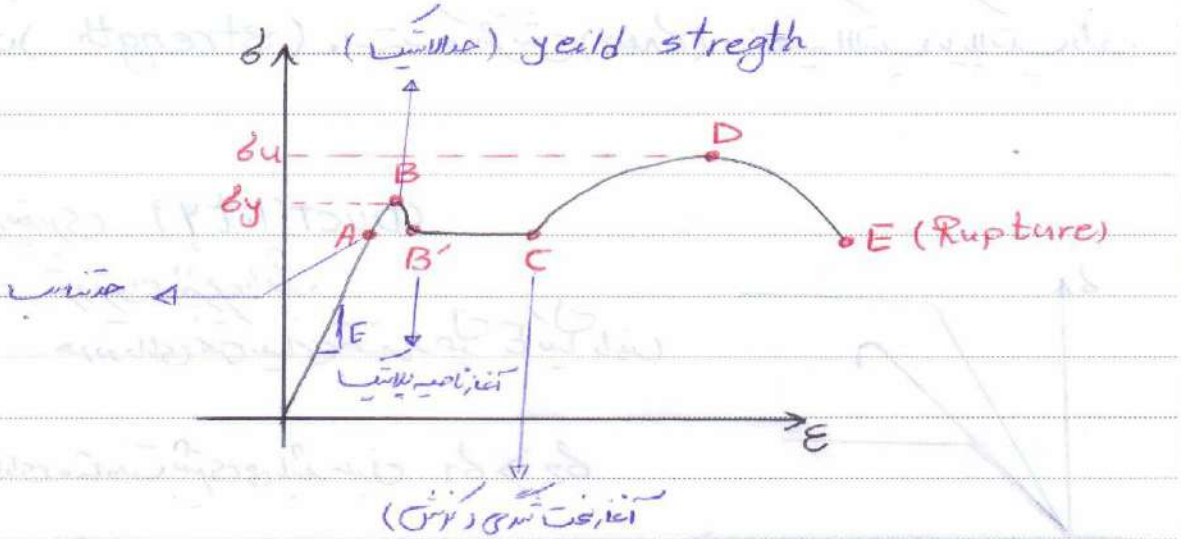
نکات مهم:

1- برای مصالح ایزوتروپیک تنسور دو حالت هیچ‌گونه کرنش برشی تولید نمی‌شود ($\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$)

2- یک ماده ایزوتروپیک ماده‌ای است که مدول الاستیسیته یکسان در تمامی جهات داشته باشد

3- در کشش تک محوری زاویه‌ی بین صفحه تنش برشی MAX و نیروی کششی برابر است با 45°

4- تنسور حجم واحد حجم، برای عضوی که تحت تنش خالص قرار دارد برابر صفر می‌باشد (e کرنش حجمی)



D: σ_u تنش نهایی (ultimate stress)

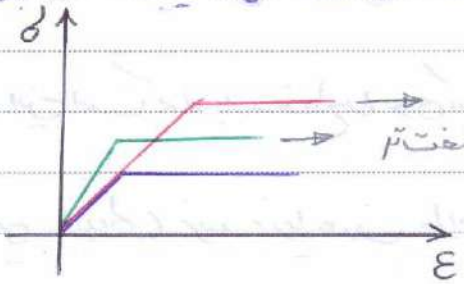
B: σ_y تنش تسلیم (yield stress)

بحث تحمل وزن را فقط در خط اول داریم چون وابسته به E می باشد

سفتی (سفتی وزنی) (Flexibility)

وابسته به E می باشد (همان شیب خط) در واقعیت مثلاً برای فولاد بسیار E بزرگ است و خط داده تقریباً به 90° می باشد ← مصالح سخت‌تر ⇒ $\uparrow E$

مقاومت مصالح رابطه‌ی مستقیم با σ دارد ولی سفتی با شیب خط (برای عامی مصالح صادق است)

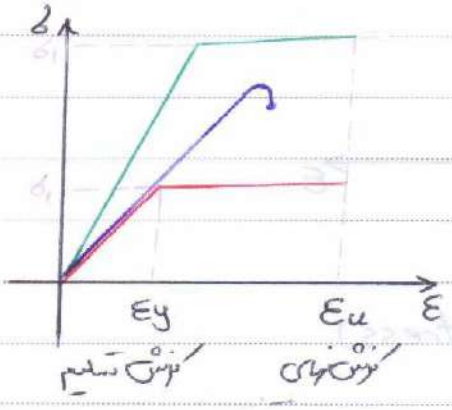


مقاومت (strength) وابسته به حداکثر تنش (σ_{MAX}) در ناحیه الاستیک یا پلاستیک دارد.

شکل پذیری (Ductility)

آب : تردترین نیز می باشد.

- هردو دارای محن یکسان هستند (چون E یکسان دارند)
- دارای مقاومت بیشتری می باشد چون $\sigma_2 > \sigma_1$
- مصالح ترد فقط دارای شکل پذیری بیشتری است
- دارای مقاومت و سختی بیشتری می باشد ولی شکل پذیری برابر با فولاد نرم دارد



هرچه شکل پذیری بیشتر ↑ μ (شکل پذیری) $= \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_y}$

هرچه کرنش بیشتر باشد ← شکل پذیری بیشتر است (شکل پذیرتر)

ضریب اطمینان Factor of safty (F.S.)

ضریب اطمینان در هر مصالحی با توجه به هدف طراحی تعریف و معین می شود

هر عضو تحت اثر بارگذاری به یک تنش مشخص یا کرنشی می رسد (ε_u کرنش نهایی)

هدف یک طراحی این است که ابعاد مقطع را برای یک عضو به نوعی تعیین کنیم که مصالح

هیچ گاه تنش نهایی (σ_u) نرسد زیرا هدف طراحی یک قطعه این نیست که آنقدر

برعضله وارد شود که به گسیختگی می رسد، در این راستا تنش با نام تنش مجاز که با σ_a نمایش

می دهند (allowable stress) تعریف می شود که برابر است با

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_u}{F.S.}$$ (باید عددی بزرگتر از یک باشد)

ضریب اطمینان تابع عوامل زیر می باشد

1- تغییرات خواص مصالح در حین اجرا برخلاف آنچه در طراحی در نظر گرفته شده است

2- تغییرات (ضعف) بارگذاری و همچنین سن های خستگی ← در پل ها بایه دار عبور بیار خودرو ها)

3- بارگذاری های اتفاقی که در طراحی در نظر گرفته نشده است

4- عدم اطمینان نسبت به روش های تحلیل ساده به علت فرضیات ساده کننده مهندس که در تحلیل ها

در نظر گرفته شده است و ممکن است نیز با یکی که در طراحی استفاده شده است دقیق یا واقعی نباشد

5- میزان اهمیت عضو و اینکه عضو اصلی یا فرعی باشد (عضو اصلی منظور عضوی است که پایداری

سازه وابسته به آن است و در حالی که اعضایی که نقش زیادی در پایداری کلی سازه ندارند، اعضای فرعی

خواهند بود پس برای طراحی اعضای اصلی باید ضریب اطمینان بزرگتری در نظر گرفته شود

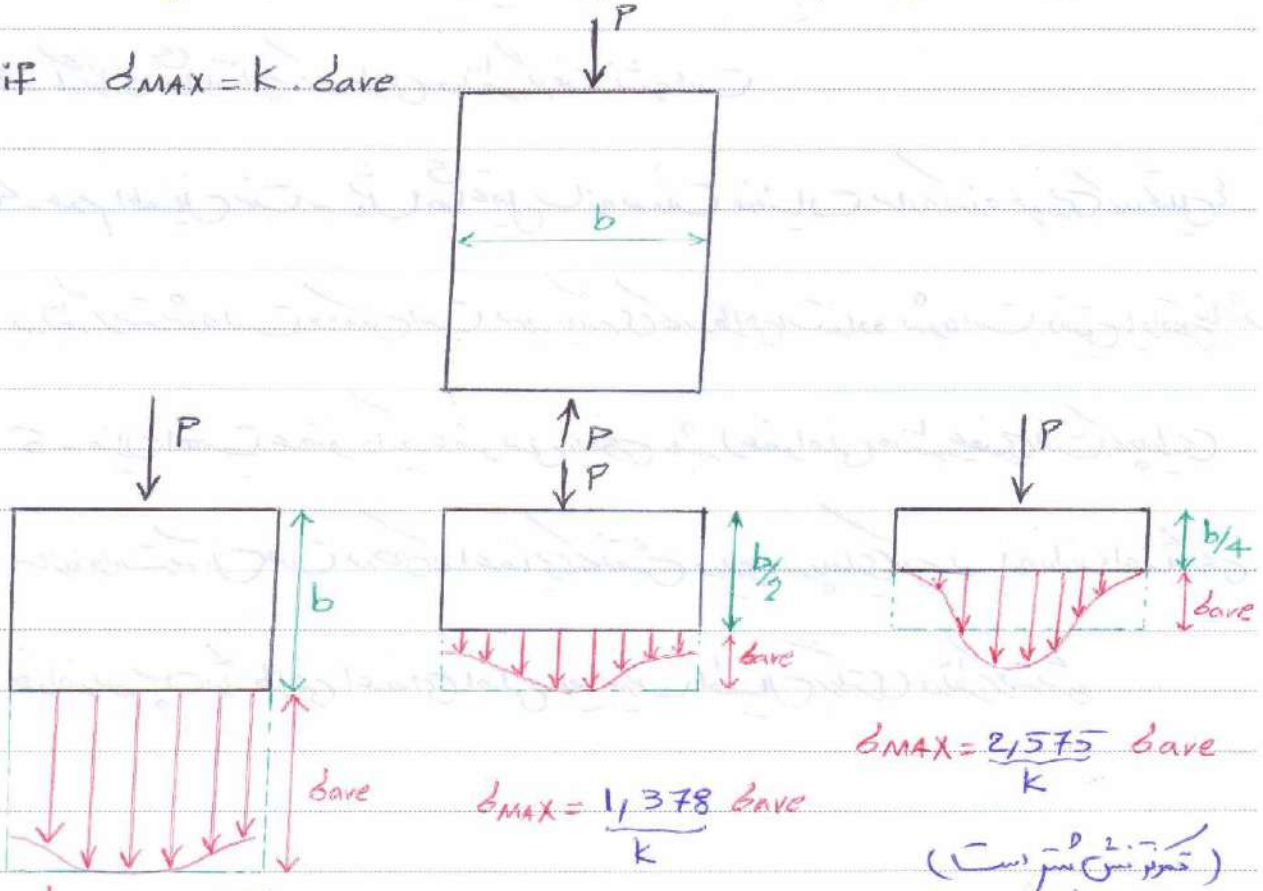
تمرکز تنش

همیشه در طراحی ها سعی می شود از تمرکز تنش در اعضا جلوگیری گردد.

براساس شکل های زیر مشاهده می شود که با دور شدن از محل تاثیر نیرو، عملاً در امتداد عاشم از ارتفاع تنش جدا تاثیر کم می شود بطوری که در مقطعی به فاصله ی عرض مقطع از محل تاثیر نیرو توزیع تنش تقریباً یکنواخت و بی نیاز است در می آید.

برای محاسبه ی تنش حداکثر (σ_{MAX}) ابتدا با استفاده از روابط مقاومتی مانند $\sigma = \frac{P}{A}$ که تنش متوسط (σ_{ave}) بدست می آوریم و سپس آن را در عدد مربوط تمرکز تنش (K) ضرب می کنیم.

if $\sigma_{MAX} = K \cdot \sigma_{ave}$



$\sigma_{MAX} = \frac{1,027}{K} \sigma_{ave}$

$\sigma_{MAX} = \frac{1,378}{K} \sigma_{ave}$

$\sigma_{MAX} = \frac{2,575}{K} \sigma_{ave}$

(تمرکز تنش بیشتر است)

آسیب پذیری خستگی

اگر ماده‌ای در حد الاستیک بارگذاری شود و در همین محدوده نیز باربرداری شود، هیچ گونه تنش و

به صفر می‌رسد و این حالت وقتی صحیح است که تعداد دفعاتی که این کار را انجام می‌دهیم

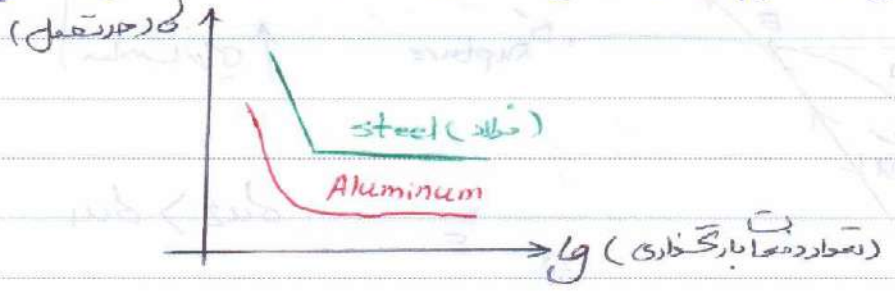
کم باشد، اما اگر تعداد دفعات بارگذاری و باربرداری را افزایش دهیم مصالح در تنشی کمتر از

تنش تسلیمی می‌شکند (همان نقطه‌ی E در نمودار تنش - کرنش)

و در این حالت در لحظه‌ی شکست، مقدار مصالح شکل زیر مثل مقدار مصالح ترد می‌شود، اصطلاحاً

این پدیده را خستگی می‌نامند و برای مصالح مختلف نمودارهای مرجب، لوگاریتم تعداد دفعات بارگذاری

و تنش تسلیمی ترسیم می‌شود، بر این اساس منحنی حدی (حد تحمل) تعریف می‌شود



سخت شدگی کرنشی (strain hardening)

عضوی تحت اثر بار محوری آنقدر تحت بار قرار می‌گیرد، تا از حد الاستیک مرتبر رود یعنی وارد

ناحیه پلاستیک گردد، مثل از اینجا به بعد اثر ادامه افزایش بار تسلیمی ایجاد شود بار را برمی‌داریم

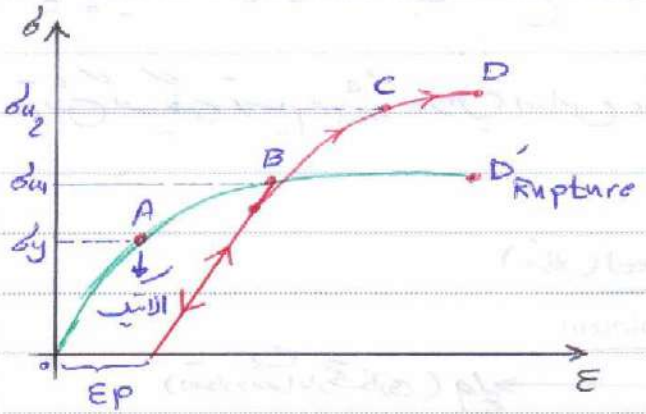
بنابراین منحنی در امتداد خطی مستقیم موازی ناحیه الاستیک بازگشت می‌کرد.

حال اگر مجدداً از همان نقطه بر خود با محور تنش بارگذاری را آغاز نمایم، منحنی در نزدیکی نقطه B منحرف می‌شود و نقطه‌ای تغییر شکل حداکثر در آن جابجا می‌شود و نهایتاً در نقطه‌ای شکسته خواهد شد

با مشاهده منحنی زیر به دو نکته مهم پی می‌بریم:

① وجود کرنش پسماند موجب تحمل تنش حداکثر بیشتر برای عضو می‌گردد

② از قابلیت شکل‌پذیری عضو کاسته می‌شود و اصطلاحاً موجب ترد ترشدن عضو می‌گردد.



کاهش شکل‌پذیری ↓
افزایش مقاومت نهایی ↑
} موجب کاهش کرنش

$\sigma_{u2} > \sigma_{u1}$

روش OFFSET

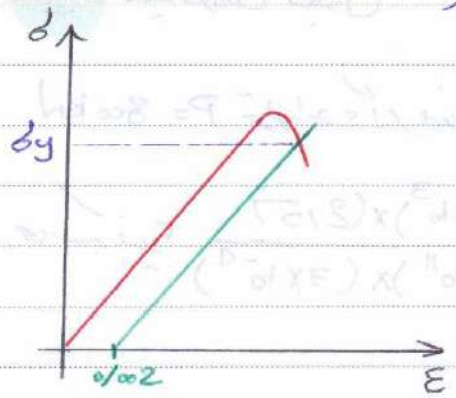
برای یافتن تنش حاصل از جاری شدن در مصالح ترد، از این روش استفاده می‌شود. بر این ترتیب

کرنش معادل 0.2٪ = 0.002 کرنش خطی موازی ناحیه الاستیک خطی

از کرنش 0.002 رسم می‌شود که در نتیجه تنش محل تقاطع این خط و منحنی اصلی

Shahab

تنش - کرنش دانشجو تسلیم (جاری شدن) در نظر می‌گیرند



(برای مصالح نرد که مثلاً yield ندارد

از این روش استفاده می‌شود)

مسائل نامعین استاتیکی

اگر در سازه‌ای تعداد مجهولات سازه، که همان نیروهای تکیه‌گاهی یا نیروهای داخلی اعضای باشد

از تعداد معادلات تعادل بیشتر باشد، سازه اصطلاحاً نامعین استاتیکی (hyppersatic)

گوییم.

درجات نامعینی برابر است با: اختلاف میان تعداد مجهولات و معادلات

در سازه‌های مستوی (مسطحه‌ای) ۳ معادله تعادل و در فضا ۶ معادله‌ی تعادل داریم

که به کمک این معادلات و با استفاده از اصل جمع آثار قوا می‌توان مجهولات را محاسبه کرد.

مثال - طول میله‌ای 2m می‌باشد، تغییر طول میله در اثر باری برابر 0.4mm می‌باشد

کرنش محوری میله را محاسبه کنید؟

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0.4}{2000} = 0/0002$$

مثال - میله فولادی بطول $2.5\,m$ با سطح مقطع $3\times10^{-4}\,m^2$ تحت بارگذاری $P=800\,kN$ قرار دارد، اگر ضریب الاستیسیته میله برابر $200\,GPa$ باشد، تغییر طول میله را محاسبه کنید؟

$$A=3\times10^{-4}$$
$$P=800\,kN$$
$$E=200\,GPa$$

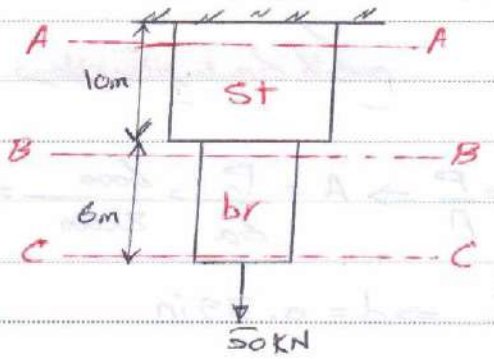
$$\delta=\frac{P\cdot L}{E\cdot A}=\frac{(800\times10^{3})\times(2.5)}{(2\times10^{11})\times(3\times10^{-4})}$$

مثال - یک استوانه توپر به قطر $50\,mm$ و طول $900\,mm$ تحت اثر نیروی کششی $120\,kN$ قرار دارد. متشکل از این استوانه را بطول L_1 از جنس فولاد و مابقیت کل این استوانه بطول L_2 از جنس Al می‌باشد، طول‌های L_1 و L_2 را به گونه‌ای تعیین کنید که افزایش طول میله در دو بخش یکسان باشد؟

$$\frac{E_{st}}{E_{Al}}=\frac{2}{0.7}$$ نسبت ضرایب الاستیسیته فولاد به Al

مثال - دو میله‌ی متقارن به هم بار 50kN را تحمل می‌کنند. میله‌ی فولادی از مواد با وزن مخصوص $\gamma_{st} = 7.7 \times 10^4 \ N/m^3$ و طول 10m و با سطح مقطع $6000 \ mm^2$ و میله‌ی برنجی با وزن مخصوص $\gamma_{br} = 8.25 \times 10^4 \ N/m^3$ و طول 6m می‌باشد. تنش محوری حداکثر را در کدام یک از میله‌ها می‌یابید؟ سطح مقطع $5000 \ mm^2$

حل: باید وزن میله‌ها را هم در نظر گرفت



تنش در مقطع B-B شامل وزن 50kN بالایی هم می‌باشد زیرا علاوه بر نیروی

میله نیز با این سطح مقطع افزایش یافته است.

مقادیر این تنش نسبت به مساحت بالایی محاسبه می‌شود.

$$A_{st} = 6000 \ mm^2 = 6 \times 10^{-3} \ m^2$$
$$A_{br} = 5000 \ mm^2 = 5 \times 10^{-3} \ m^2$$

$$W_{st} = 6 \times 10^{-3} \times 10 \times 7.7 \times 10^4 = 4620 \ N$$
$$W_{br} = 5 \times 10^{-3} \times 6 \times 8.25 \times 10^4 = 2475 \ N$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

(ST) A-A:
$$\sigma_{A-A} = \frac{4.62 \times 10^3 + 2.475 \times 10^3 + 50 \times 10^3}{6 \times 10^{-3}} = 25 \ MPa$$

(br) B-B:
$$\sigma_{B-B} = \frac{2.475 \times 10^3 + 50 \times 10^3}{5 \times 10^{-3}} = 10.5 \ \frac{MPa}{N/mm^2}$$

پس σ_{MAX} در مقطع B-B در میله‌ی برنجی می‌باشد

مثال - عضوی فولادی با مقطع دایره طوری طراحی نمایید که بتواند نیروی کششی 6000 lb را تحمل نماید

با فرض اینکه تنش مجاز برابر با $22000 \frac{lb}{in^2}$ باشد، فرض شود هریک از اعضا افزایش قطری معادل با $\frac{1}{16}$ in نسبت به عضو مشابه بارتر از خود دارد، ضریب اطمینان طراحی را پیدا کرده، با در نظر گرفتن تنش اینکه تنش تسلیم این فولاد $36000 \frac{lb}{in^2}$ باشد؟

حل:

$\sigma_a = 22000 \frac{lb}{in^2}$ $\sigma_y = 36000 \frac{lb}{in^2}$

$F.S = \frac{\sigma_y}{\sigma_a} = \frac{36000}{22000} = 1.64$

$\Delta d = \frac{1}{16}$ in

در طراحی باید با σ_a کار کنیم

$\sigma_a = \frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{P}{\sigma_a} = \frac{6000}{22000} = 0.273 in^2$

$A = \frac{\pi d^2}{4}$ (مقطع دایره)

$A = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow 0.273 = \frac{3.14 d^2}{4} \Rightarrow d = 0.59$ in

بنابر فرض اگر قطر $\frac{1}{16}$ افزایش یابد

$A = \frac{\pi (d + d/16)^2}{4}$ $\sigma_a = ?$

با افزایش $\frac{1}{16}$ قطر عضو فولادی با مقطع دایره سطح مقطع عضو افزایش یافته در نتیجه تنش محوری در عضو کاهش می‌یابد که ($\sigma = 19557 \frac{lb}{in^2}$) با تقسیم 36000 ($\sigma_a$) بر 19557 ضریب اطمینان معادل 1.84 بدست می‌آید که بیشتر از ضریب اطمینان اولیه که برابر با 1.64 بود می‌باشد بنابراین قابل قبول است.

مثال - میله‌ای با جنس Al بطول 0/8m و مدول الاستیسیته 70 Gpa تحت اثر نیروی محوری 36 kN قرار گرفته است. اگر تنش مجاز برای این میله 70 Mpa باشد و تغییر طول مجاز 0/65 mm باشد، ابعاد مقطع این میله را طراحی نمایید؟

$L = 0/8\,m$

$E = 70\,Gpa$

$P = 36\,kN$

$\sigma_a = 70\,Mpa$

$\Delta L_a = 0/65\,mm$

حل:

$$\sigma_a = \frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{P}{\sigma_a} = \frac{36\times10^3}{70\times10^6} = 0/5\,14\times10^{-3}\,m^2$$

سطح عمود با توجه به تنش مجاز

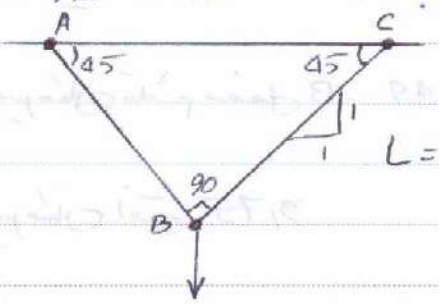
A بالا سطح مقطعی است که در آن σ_a بوجود آمده

$$0/65\,mm \geq \delta = \frac{P\cdot L}{E\cdot A} = \frac{(36\times10^3)(0/8)}{(70\times10^9)A} \Rightarrow A = 0/633\times10^{-3}\,m^2$$

سطح عمود با توجه به تغییر طول مجاز

در این مورد A بیشتر را انتخاب می‌کنیم زیرا رابطه $\sigma_a = \frac{P}{A}$ نیز، ما به تنش دقیق از تنش مجاز دست خواهیم یافت.

مثال - میله‌های فولادی AB و BC چه سطح مقطعی داشته باشند، تا تنش عمودی ایجاد شده در آنها از σ_a (200 Mpa) تجاوز نکند. اگر مدول الاستیسیته برابر با 200 Gpa فرض شود، تغییر طول مفصل B را با توجه به شکل زیر محاسبه نمایید؟

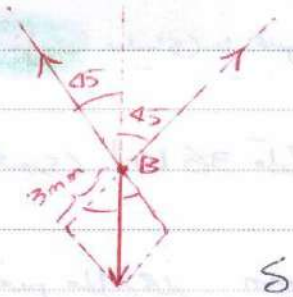


حل:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F\cos45 + F\cos45 = 475\,kN$$

$$2F\frac{\sqrt{2}}{2} = 475 \Rightarrow F = \frac{475}{\sqrt{2}} \Rightarrow F = 336\,kN$$

نیرو در هریک از میله‌ها



$$\sigma_a = \frac{F}{A} \Rightarrow 200\times10^6 = \frac{336\times10^3}{A}$$

$$\Rightarrow A = 1680\ mm^2$$ سطح مقطع مورد نیاز برای تنش مجاز

$$\delta_{BC} = \delta_{AB} = \frac{F.L}{E.A} = \frac{(336\times10^3)(3)}{(200\times10^9)(1{,}168\times10^{-3})} = 0{,}003m = 3mm$$

حال باید بررسی کنیم B چقدر جابجا شده

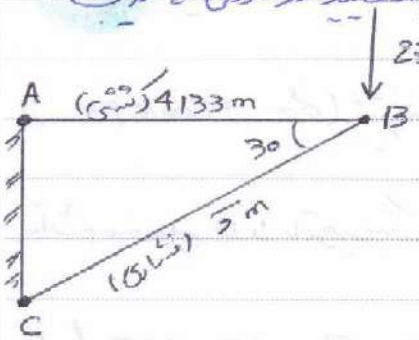
$$\cos 45 = \frac{\delta_{AB}\ (\text{ضلع مجاور})}{\delta_B\ (\text{وتر})} \Rightarrow \delta_B = 4{,}24mm$$

مثال - جعبه‌ی فولادی AB و BC با اتصال مفصلی به دیوار و به نقطه وصل شده‌اند.

نیروی 250 kN مطابق شکل زیر بر سازه وارد شده است. در صورتی که تنش تسلیم برابر 350 Mpa

باشد و ضریب اطمینان در فشار برابر 3/5 و در کشش برابر 2 باشد، سطح مقطع میله‌ها را

تعیین نمایید؟ تغییر مکان افقی و قائم مفصل B را حساب نمایید در صورتی که مدول



الاستیک عضو برابر 200 Gpa باشد؟

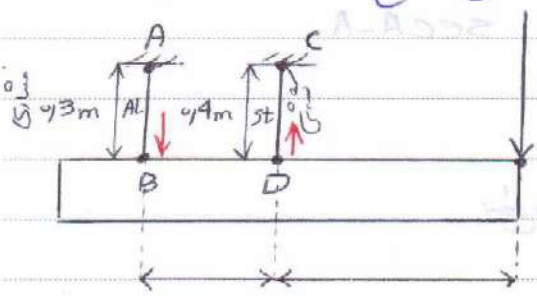
تغییر مکان قائم مفصل B 11,49

تغییر مکان افقی 3,75

سطح مقطع برای عضو BC 5000 mm^2 و برای AB 2500 mm^2

مثال: جسم صلب BDE به دو میله‌ی دوسیمی AB و CD به تکیه‌گاه متصل شده است.

میله‌ی AB از جنس Al با مدول الاستیسیته 70 Gpa و با سطح مقطع $500mm^2$ و میله‌ی CD از جنس فولاد با مدول الاستیسیته 200 Gpa و با سطح مقطع $600mm^2$ می‌باشد.



جابجایی نقاط B و D و E را بدست آورید؟

$\sum M_B = 0 \Rightarrow 30 \times 0/6 = F_{CD} \times 0/2$

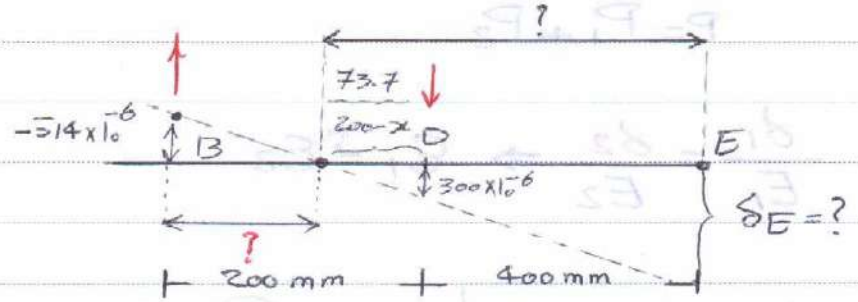
$\Rightarrow F_{CD} = \frac{30 \times 0/6}{0/2} = +90\,KN$ کششی

$\sum M_D = 0 \Rightarrow 30 \times 0/4 = -F_{AB} \times 0/2$

$\Rightarrow F_{AB} = \frac{30 \times 0/4}{0/2} = -60\,KN$ فشاری

عضو AB فشاری $\Rightarrow$ کاهش طول دارد: $\delta_{AB} = \frac{(-60 \times 10^3)(0/3)}{\underbrace{(70 \times 10^9)}_{E_{Al}}\underbrace{(500 \times 10^{-6})}_{A(m^2)}} = -\bar{3}14 \times 10^{-6}\,m$

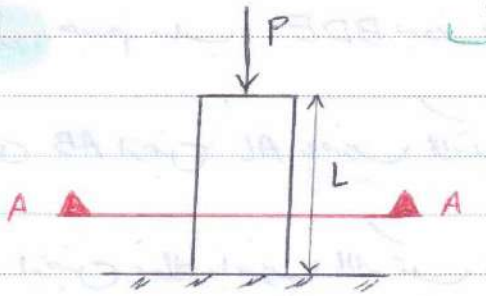
عضو CD کششی $\Rightarrow$ افزایش طول دارد: $\delta_{CD} = \frac{(90 \times 10^3)(0/4)}{(200 \times 10^9)(600 \times 10^{-6})} = 300 \times 10^{-6}\,m$

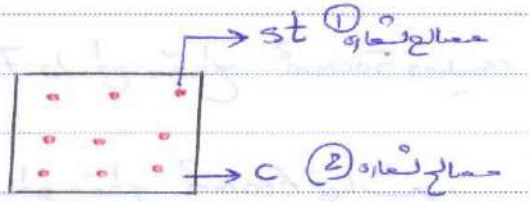


$\frac{x}{-0/\bar{3}14} = \frac{200-x}{0/3} \Rightarrow x = 12613\,mm$

$\delta E = \frac{7317}{47317} = \frac{0/3}{\delta E} \Rightarrow \delta E = 1,928\,mm$

اعضای محوری متشکل از دو مصالح مختلف





SECCA-A

$E_1 > E_2$ (ضریب الاستیسیته st) (ضریب الاستیسیته بتن)

$A_1 = \Sigma A_i$ سطح مقطع بخش فولادی (مثلاً آرماتور)

$A_2 =$ مساحت بخش بتنی

$P_1 =$ سهم مصالح شماره ① از نیروی P

$P_2 =$ سهم مصالح شماره ② از نیروی P

در اکثر موارد مصالح داریم:

$$\delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \frac{P_1 \cdot L}{E_1 \cdot A_1} = \frac{P_2 \cdot L}{E_2 \cdot A_2}$$

$$P = P_1 + P_2$$

$$\frac{\delta_1}{E_1} = \frac{\delta_2}{E_2} \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

$$\boxed{\delta_1 E_2 = \delta_2 E_1}$$ (I) رابطه‌ی سازگاری

حال از رابطه‌ی $P = P_1 + P_2$

$$P = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2$$

طرفین رابطه فوق را در E_1 ضرب می‌کنیم:

$$P.E_1 = \sigma_1 A_1 E_1 + \underbrace{\sigma_2 A_2 E_1}_{A_2 \sigma_1 E_2}$$

$$P.E_1 = \sigma_1 (A_1 E_1 + A_2 E_2) \Rightarrow \sigma_1 = \frac{P.E_1}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

$$\sigma_2 = \frac{P.E_2}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

به‌صورت مشابه داریم:

$n = \frac{E_1}{E_2}$ نسبت ضریب الاستیسیته st به بتن (ضریب الاستیسیته فولاد تقریباً برای مقاومت بتن ۲۵ تا ۳۰ برابر است).

بازنویسی:

اگر از E_1 فاکتور بگیریم

$$\sigma_1 = \frac{P.E_1}{E_1 (A_1 + \frac{A_2}{n})}$$

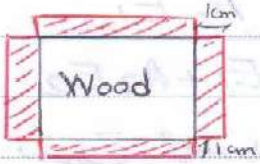
$$\sigma_2 = \frac{P.E_2}{E_2 (A_1 \cdot n + A_2)}$$

$$\boxed{\sigma_1 = n \sigma_2}$$

مثال ـ ستون چوبی با مقطع مربع با ابعاد $20 \times 20\ cm^2$ توسط صفحات فولادی با ضخامت 1cm مطابق شکل زیر تقویت شده است. بار محوری 70ton برای ستون دارد گزارش شده است، مدول ارتجاعی فولاد و چوب به ترتیب $2 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}$ ، $10^5 \frac{kg}{cm^2}$ است.

الف) تنش عمودی در فولاد و چوب را تحت اثر بار محوری محاسبه کنید؟

ب) اگر تنش عمودی مجاز فولاد و چوب به ترتیب $1350 \frac{kg}{cm^2}$ ، $80 \frac{kg}{cm^2}$ باشد، بار محوری حداکثر چه مقداری می‌تواند باشد؟ (P_{max})



① فولاد ② چوب

$$n = \frac{E_1}{E_2} = 20$$

$$\sigma_1 \text{ فولاد} = \frac{P}{A_1 + \frac{A_2}{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{70 \times 10^3}{80 + \frac{400}{20}} = \frac{70 \times 10^3}{80+20} = 700 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_2 \text{ چوب} = \frac{P}{nA_1 + A_2} = \frac{70 \times 10^3}{20 \times 80 + 400} = 35 \frac{kg}{cm^2}$$

ب) ① تنش در فولاد به مقدار مجاز برسد

$$\sigma_1 = \sigma_{st_a} = 1350 \frac{kg}{cm^2}$$

$$1350 = \frac{P}{80+20} \Rightarrow P = 135000\ kg = 135\ ton$$

② آرماتور در جیوب به مقدار مجاز رسد

$$\sigma_z = 80 = \frac{P}{2000} \Rightarrow P = 160000\ kg = 160\ ton$$

تحمل این ستون 135 ton می باشد اگر میلگرد وارد نکنیم تا 135 ton مواد جاری می شود

پس جیوب هم جاری می شود و به مقدار 160 ton نمی رسد

مثال - یک ستون کوتاه بتن مسلح با مقطع مربع با ابعاد $30 \times 30\ cm^2$ باید بارگذاری

68 ton را تحمل نماید اگر تنش مجاز بتن برابر با $60\ kg/cm^2$ و تنش مجاز مواد $1350\ \frac{kg}{cm^2}$ باشد،

تعداد میلگردهای لازم به قطر 16mm را که باید در سطح مقطع ستون تعبیه شود را

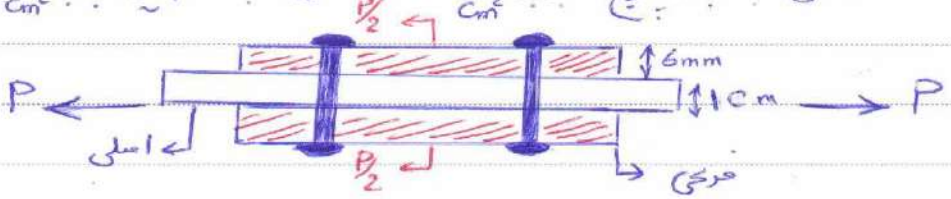
محاسبه نمایید با فرض اینکه $E_c = 1.4 \times 10^5\ \frac{kg}{cm^2}$ ، $E_{st} = 2.1 \times 10^6\ \frac{kg}{cm^2}$

سپس میلگردها را حساب می کنیم سپس تنش را تقسیم بر میلگردها می کنیم تا مقدار مربوطه بدست آید.

مثال - در اتصال شکل زیر تعداد پرچ های لازم در هر طرف را محاسبه نمایید اگر قطر پرچ ها 18mm

ضخامت صفحات اصلی 1cm و ضخامت نبشی اتصال 6mm باشد، نیروی P برابر

15 ton تنش مجاز برشی پرچ ها برابر $1000\ \frac{kg}{cm^2}$ و تنش مجاز کوبیدگی برابر $2500\ \frac{kg}{cm^2}$ در نظر گرفته شود؟



حل: تنش کهرگی در مقطع اصلی:

$P = 15000\ kg$

پیچ $d = 18\ mm$

$\tau_a = 1000\ \frac{kg}{cm^2}$

$\sigma_a = 2500\ \frac{kg}{cm^2}$

$\sigma_p = \frac{P}{A} = \frac{15000}{n(1.18 \times 1)} \Rightarrow \frac{15000}{2500 \times 1.18 \times 1} \Rightarrow \boxed{n = 4}$

σ_p: تنش کهرگی — A: سطح مقطع اصلی — n: تعداد پیچ‌ها — 1.18: قطر پیچ — 1: ارتفاع مقطع اصلی

تعداد پیچ‌های لازم

کنترل تنش کهرگی در مقطع فرضی (تقویتی)

$\frac{P}{2}$ ← دنبال

$2500 = \frac{15000/2}{n \times 1.18 \times 0.6} \Rightarrow n = \frac{7500}{2500 \times 1.18 \times 0.6} \Rightarrow \boxed{n = 3}$

تعداد پیچ‌ها

کنترل تنش برشی در پیچ‌ها: تعادل به برش پیچ وارد

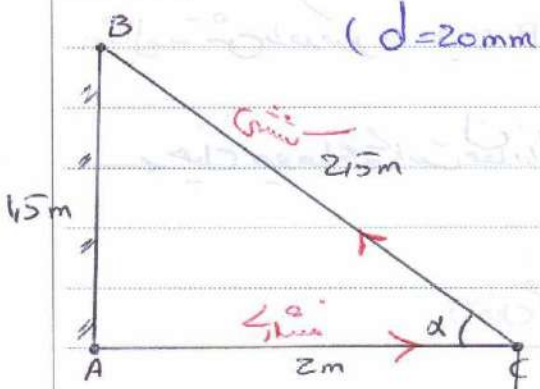
$\tau_a = \frac{P/2}{n \times (\frac{\pi d^2}{4})} \Rightarrow 1000 = \frac{7500}{n(5.14 \times \frac{1.18^2}{4})}$

تعداد پیچ‌ها ← n

$\Rightarrow \boxed{n = 3}$ تعداد پیچ‌ها

باید تعداد پیچ‌ها را حداقل کرد بنابراین ۴ عدد پیچ نیاز داریم

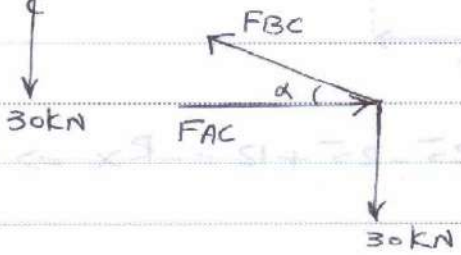
مثال - تنش اعضا را حساب کنید؟ (مقطع اعضا دایره ای $d=20mm$)



حل:

$$\sin\alpha = \frac{1.5}{2.5} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{2.5} = \frac{4}{5}$$



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{BC} \times \sin\alpha = 30\,kN$$

$$F_{BC} = \frac{30}{\sin\alpha} = \frac{30}{\frac{3}{5}} = \frac{5 \times 30}{3} = 50\,kN$$

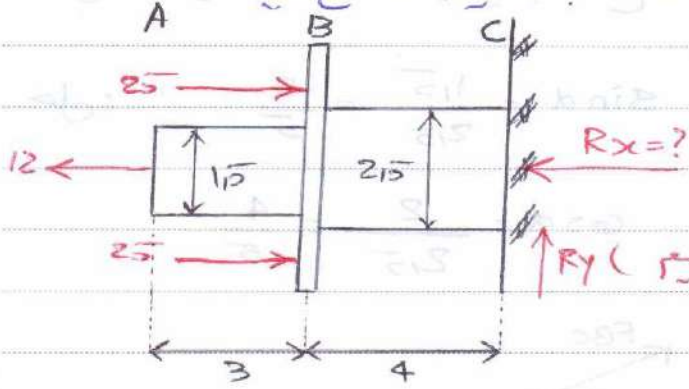
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{AC} = -F_{BC}\cos\alpha$$

$$F_{AC} = 50 \times \frac{4}{5} = -40\,kN$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \begin{cases} \rightarrow \sigma_{BC} = \dfrac{50 \times 10^3}{314} = 159\ N/mm^2 \\ \rightarrow \sigma_{AC} = \dfrac{-40 \times 10^3}{314} = -127\ N/mm^2 \end{cases}$$

$$A_{\substack{BC \\ AC}} = \pi r^2 = 3.14 \times 10^2 = 314\ mm^2$$

مثال - تنش را در میله‌ی AB و BC محاسبه نمایید؟ (مقطع داریم)

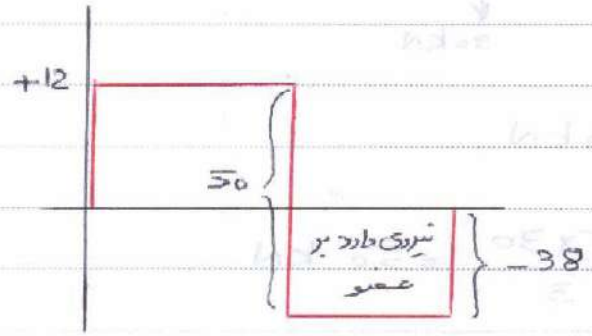


← چون نیروها محوری است عمل نداریم

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -25 - 25 + 12 = -R_x \Rightarrow R_x = -38$$

حل:

$R_x = 38$ ← تکه‌ها



$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{12 \times 10^3}{\pi \left(\frac{1.5}{4}\right)^2}$$

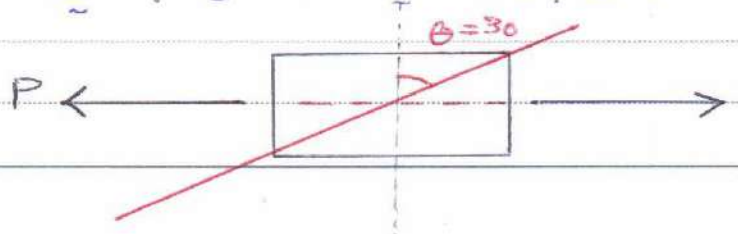
$$\sigma_{BC} = \frac{-38 \times 10^3}{\pi \left(\frac{2.5}{4}\right)^2}$$

مثال - میله‌ای با سطح مقطع $850\,mm^2$ مطابق شکل تحت اثر نیروی کششی 60kN قرار گرفته است،

تنش عمودی و برشی را روی صفحه‌ای با زاویه‌ی 30 درجه نسبت به مقطع محور طولی میله را

محاسبه نمایید؟

حداکثر تنش عمودی و حداکثر تنش برشی را در میله محاسبه نمایید و جهات این دو را مشخص نمایید؟



حل:

$$\sigma_\theta = \frac{P}{A}\cos^2\theta = \frac{60\times10^3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{850}$$

$$\tau_\theta = \frac{P}{2A}\sin 2\theta = \frac{60\times10^3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\times 850}$$

$\sigma_x =$ تنش محوری در راستای میله $= \frac{60\times10^3}{850}$

چون در هر راستای محوری $\theta = 0$ و $\cos$ ماکزیمم است پس $\sigma_{max} = \sigma_\theta$

$$\tau_{max} = \frac{P}{2A} = \frac{60\times10^3}{2(850)}$$

$\theta = 45$ ✓
$\sin 2\theta = 1$

صفحاتی که دارای بیشترین و کمترین تنش های عمودی هستند، صفحات اصلی نامیده می‌شوند

در صفحات اصلی تنش های برشی برابر صفر خواهند بود