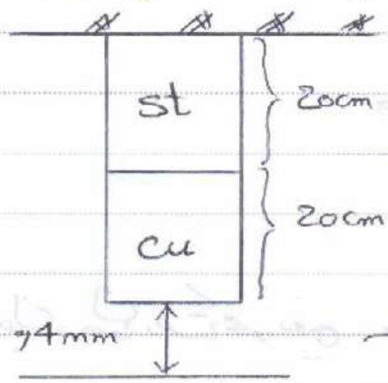
مثال - فاصله‌ی میله‌ی شکل زیر تا صفحه‌ی صلب پایین آن برابر /4mm می‌باشد. دما در این حالت 15- درجه سانتی‌گراد است، اگر دما تا 85 درجه سانتی‌گراد افزایش یابد تنش ایجاد شده در میله را محاسبه نمایید؟



حل: در برخی از سوال‌ها ابتدا باید مقدار افزایش طول (انبساط حرارتی) را محاسبه نمود و توجه کرد که آیا اصلاً میله به صفحه صلب می‌رسد یا خیر. در صورتی که میله به صفحه صلب نرسد هیچ گونه تنشی در میله ایجاد نمی‌شود (کار مسئله تمام شود جواب است)

$\Delta T = T_2 - T_1 = 85 - (-15) = 100^\circ$

$\alpha_{cu} = 165 \times 10^{-7}\ {}^\circ C \qquad \alpha_{st} = 125 \times 10^{-7}\ {}^\circ C$

$E_{cu} = 1 \times 10^{6} \frac{kg}{cm^2} \qquad E_{st} = 2 \times 10^{6} \frac{kg}{cm^2}$

افزایش حرارتی طول $= \alpha . L . \Delta T$

$for\ st = 125 \times 10^{-7} \times 20 \times 100$

$for\ cu = 165 \times 10^{-7} \times 20 \times 100$

جمع تغییر طول‌ها $\delta st + \delta cu = /58\ mm$

تغییر طولی که ایجاد تنش در میله می‌کند $/58 - /4 = /18\ mm$

تغییر طول در حلقه‌ی فولادی در اثر نیروی داخلی آن

〃 〃 مسی 〃 〃 〃

در اثر نیروی داخلی ← $\delta f_{st} + \delta f_{cu} = 0/18\,mm = 0/018\,cm$

$$\frac{P \times 20}{(2 \times 10^6)(A)} + \frac{P \times 20}{(10^6)(A)} = 0/018$$

$$\underbrace{\frac{P}{A}}_{\sigma} \left(\frac{20}{2 \times 10^6} + \frac{20}{10^6} \right) = 0/018 \Rightarrow \sigma = \ldots$$

تنش فشاری ، در اثر گرم شدن فشاری آمده

پیچش (Torsion)

تنش در محورها:

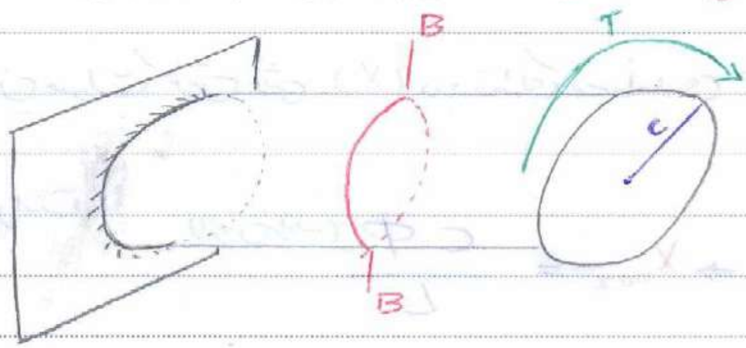
از بهترین کاربردهای اعضای تحت پیچش می‌توان به محورها انتقال مانند میل گاردان اشاره کرد.

برای اعضای تحت پیچش مقاطع دایروی توپر یا توخالی مناسب ترین می باشند زیرا این مقاطع در پیچش بصورت مسطح باقی می‌مانند و اعوجاج پیدا نمی‌کنند. منظور سطح مقطع عضو است که دچار تغییر شکل نمی‌کند

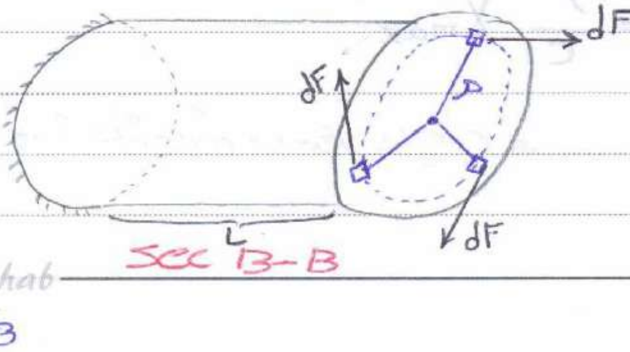
بر اساس این خاصیت نتیجه می‌شود که توزیع کرنش و تنش برشی بصورت خطی می باشد.

در شکل زیر میله‌ای که تحت اثر پیچش T می باشد. با در نظر گرفتن سیستم مانند نقطه دلخواه B مقطعی عمود بر محور این میله می زنیم

در مقطع B باید برآیند گشتاور نیروهای dF برابر با T باشد پس خواهیم داشت:



C: شعاع مقطع دایروی



$$\rho_{MAX} = C$$

Year. Month. Day. Subject.

$$\int \rho \cdot dF$$

تنش برشی

$$dF = \tau \cdot dA$$

$$dA = \underbrace{2\pi\rho}_{\text{محیط دایره}} \cdot d\rho$$

$$T = \int^{c} \rho \cdot \tau \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho$$

$$T = 2\pi \int^{c} \tau \rho^2 \cdot d\rho$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \tau = F/A \\ \to F = \tau \cdot A \\ dF = \tau \cdot dA \end{array}}$$

نکته: بهترین مقطع برای پیچش مقاطع دایره‌ای شکل می‌باشند که کاملا نسبت به نقطه‌ی مرکزی تقارن دارند. پس از دایره بهترین مقطع مربع خواهد بود که حول متقارن بیشتری نسبت به مستطیل دارد. بر این اساس بهترین شکل برای ستون‌ها در ساختمانها دایره و پس مربع خواهد بود.

اگر طول میله برابر با L و شعاع مقطع برابر با c باشد، مقطع به میزان Φ پیچیده باشد در این صورت کرنش برشی (γ) در نقطه‌ای به فاصله‌ی ρ از مرکز محور عضو قرار دارد برابر است با:

$$(\text{از جنس زاویه})\ \gamma = \frac{\rho\Phi}{L} \Rightarrow \gamma_{max} = \frac{c\Phi}{L}\ (\text{از جنس زاویه})$$

$$\to \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{max}$$

که معادله کرنش برشی در عضو تحت پیچش

Shahab

براساس فرمول صفحه‌ی قبل و با توجه به قانون هوک برای تنش برشی ($\tau = G\cdot\gamma$)

خواهیم داشت:

اگر طرفین را در G ضرب کنیم

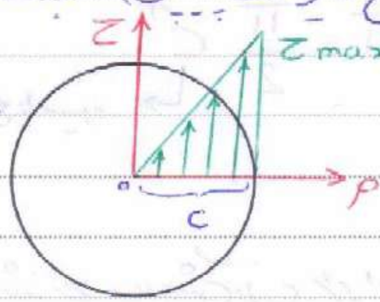
$$\gamma\cdot G = \frac{\rho}{c}\cdot\gamma_{max}\cdot G$$

$$\tau = \frac{\rho}{c}\,\tau_{max}$$

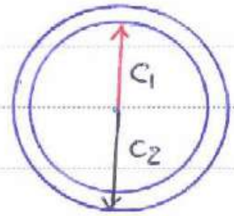
همان نقطه‌ای که رابطه هوک برقرار است

که این رابطه بیانگر این است که اگر در هیچ بخش از محور، از حد تناسب عبور نکنیم تنش برشی در میلگردان (عضو با مقطع دایره تحت پیچش) به صورت خطی با فاصله‌ی ρ از محور میلگردان تغییر می‌کند:

⇐ توزیع تنش برشی τ در مقطع دایروی تحت پیچش



نکته: در یک محور دایروی توخالی به شعاع داخلی c_1 و شعاع خارجی c_2 تنش برشی به صورت خطی از τ_{min} (تنش برشی حداقل) در جدار داخلی مقطع به τ_{max} (تنش برشی حداکثر) در جدار خارجی مقطع می‌رسد بنابراین داریم:



شعاع داخلی / شعاع خارجی

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\tau_{min}}{\tau_{max}}$$

محاسبه‌ی ممان اینرسی در مقاطع دایروی جدار نازک (توخالی)

$$J = \frac{1}{2}\pi c_2^4 - \frac{1}{2}\pi c_1^4 = \frac{1}{2}\pi\left(c_2^4 - c_1^4\right)$$

مقاطع توپر $J = \frac{\pi}{2}c^4$

در مقطع دایروی به شعاع c و ممان اینرسی پیچشی J (ممان اینرسی از خواص هندسی هر مقطع می باشد و هیچ گونه ارتباطی به نوع مصالح مقطع ندارد) و دیمانسیون آن برابر L^4 می باشد که تحت اثر گشتاور پیچشی T قرار دارد.

تنش برشی در فاصله ρ از محور دایره بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\tau = \frac{\overset{\text{گشتاور پیچشی}}{T} \cdot \rho}{J} \longrightarrow \tau_{max} = \frac{T \cdot \overset{\text{شعاع دایره}}{c}}{J}$$

مقطع دایره شکل

$$J = \frac{\pi}{2} \underset{\text{شعاع دایره}}{c^4}$$

اگر طول این مقطع دایروی L باشد زاویه پیچش آن برابر است با:

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

نکته: اگر دو میله یکی شکل پذیر و دیگری ترد باشد و تحت اثر کوپل پیچشی افزاینده ای قرار گیرد تا شکست رخ دهد مشاهده می شود که رفتار این دو میله کاملاً متفاوت می باشد.

مصالح شکل پذیر در اثر پیچش در امتداد صفحه‌ای عمود بر محور طولی عضو می‌شکنند زیرا در این صفحه تنش برشی MAX می‌باشد.

مصالح شکل پذیر در برش نسبت به کشش ضعیف‌تر می‌باشد

مصالح ترد

مصالح ترد تحت پیچش در امتداد سطوحی که با محور طولی زاویه 45° می‌سازد دچار شکست می‌شوند زیرا این صفحات عمود بر راستای تنش MAX هستند

مصالح ترد در کشش ضعیف‌تر از برش هستند

برای طراحی محورهای انتقال، باید مصالح و ابعاد مقطع به‌گونه‌ای انتخاب شوند که با انتقال توان مورد نیاز در سرعت معین تنش برشی MAX از تنش برشی مجاز فراتر نرود.

توان مربوط به چرخش میله‌ای که گشتاور T را با سرعت زاویه‌ای W (امگا) انتقال می‌دهد برابر است با :

$$P = T . W$$

گشتاور پیچشی ← T، سرعت زاویه‌ای ← W

$$W = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

فرکانس (HZ) ← f، دوره تناوب ← T

انواع قرینه بودن: ۱- قرینه نسبت به محور عرضی، قطری و طولی

۲- قرینه نسبت به نقطه‌ی مرکزی

توجه: rpm (واحد دور در دقیقه)

$$rpm = \frac{1}{60\,sec} = \frac{1}{60}\,sec^{-1} = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}\left(\frac{rad}{sec}\right)$$

پیچش مقاطع غیر دایروی:

در مقاطع دایروی چه توپر و چه توخالی تحت اثر پیچش، هیچ تنش طولی در مقطع به وجود نمی‌آید و تنها تنش برشی در مقطع خواهیم داشت.

در مقاطعی مانند مربع و یا مقاطع قوطی شکل (مقاطع غیر دایروی که نسبت به محور طولی مقطع تقارن نداریم)، اگر دو انتهای مقطع بطور آزادانه تحت اثر گشتاور پیچشی T قرار گیرد، تنش طولی در مقطع به وجود نمی‌آید.

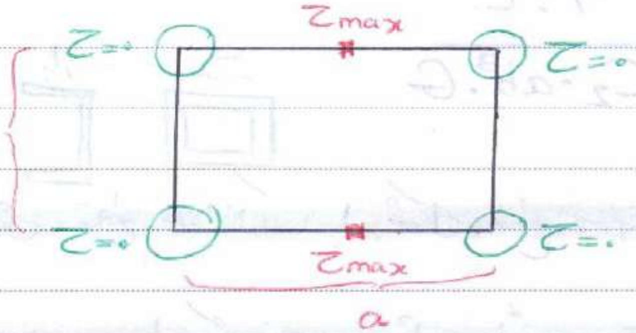
اگر یک انتهای مقطع ثابت باشد و توسط تکیه‌گاه گیردار اجازه پیچش و تغییر شکل آن گرفته شده باشد و انتهای دیگر را بپیچانیم، در مقطع تنش طولی به وجود می‌آید. البته در دو حالت اعوجاج در مقطع خواهیم داشت.

نکته: اگر یک مقطع مستطیلی بطول L که ضلع بزرگتر آن a و ضلع کوچکتر آن b باشد و تحت اثر گشتاور پیچشی T قرار گیرد، گوشه‌های مقطع مستطیلی دارای تنش برشی صفر می‌باشد و ...

حل مسائل صفحه 152 ، 153

Year. Month. Day. Subject.

اضلاع بزرگتر دارای تنش برشی MAX خواهد بود



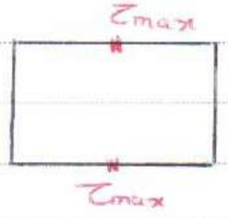
اگر ضرایب C_1 و C_2 که تنها وابسته به مقدار نسبت $\frac{a}{b}$ دارد و برای نسبت $\frac{a}{b} \geq 5$ خواهیم داشت :

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{3}\left(1 - 0.63\frac{b}{a}\right)$$

تذکر: برای نسبت های بزرگ $\frac{a}{b}$ (یعنی نسبت های کوچک $\frac{b}{a}$) با تقریب خوبی خواهیم داشت:

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{3}$$

بر این اساس تنش برشی MAX که در مقاطع مستطیلی، در وسط ضلع بزرگتر رخ می دهد برابر است با:

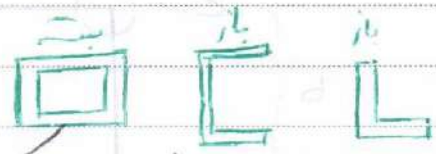


$$\tau_{max} = \frac{T}{C_1 \cdot ab^2}$$

سوالات صفحه 208 - 209

وزاویه پیچش برابر است با :

$$\varphi = \frac{T \cdot L}{C_2 \cdot a b^3 \cdot G}$$



نکته : در پیچش مقاطع جدار نازک باز شکل مقطع مهم نمی باشد بلکه ابعاد مقطع یعنی طول و ضخامت اهمیت دارد. اگر این ابعاد ثابت باشد . مقاطع جدار نازک باز با هر شکلی ساخته شوند رفتار یکسانی از خود نشان می دهند.

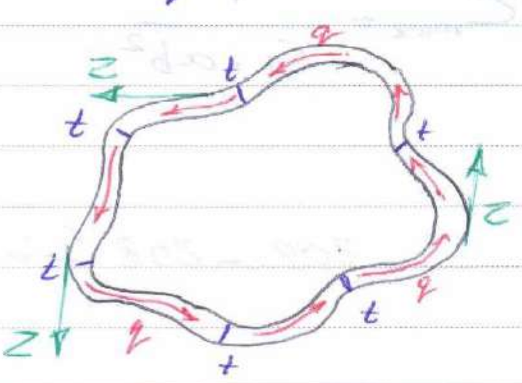
پیچش مقاطع جدار نازک بسته :

در این مقاطع که مثلا در شکل زیر نمایش داده شده است

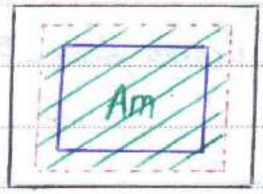
حاصل ضرب تنش برشی (τ) در ضخامت جداره (t) در سراسر مقطع مقداری ثابت می باشد

که این مقدار ثابت را جریان برشی گویند و با q نمایش می دهند.

$$(\text{جریان برشی})\ q = \tau \cdot t\ (\text{ضخامت جداره})$$



اگر سطح محدود به خط مرکزی مقطع را Am بنامیم



تنش برشی برابر است با:

در جدار نازک

$$\tau = \frac{T \text{ (گشتاور پیچشی)}}{2 \cdot A_m \cdot t \text{ (ضخامت جداره)}}$$

زاویه پیچش آن

$$\varphi = \frac{T \cdot L}{4 A_m \cdot G} \cdot \oint \frac{ds}{t}$$

$$\varphi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

$$\text{(ممان اینرسی پیچشی)}\ J = \frac{4 A_m}{\oint \frac{ds}{t}}$$

در مورد مقاطع جدار نازک چند سلولی که داشته باشیم، ابتدا مساحت هر سلول را جداگانه محاسبه می‌کنیم و در آخر با هم جمع می‌کنیم. تنش برشی هر قسمت را که از ما خواستند با استفاده از مساحت صلبیت پیچشی و مقاومت پیچشی کل بدست می‌آوریم.

اگر K_1 را صلبیت پیچشی مقطع و K_2 را مقاومت پیچشی مقطع بنامیم داریم:

به دو رابطه:

$$\tau_{max} = \frac{T}{K_2} \qquad \varphi = \frac{T}{K_1}$$

برای مقاطع مختلف خواهیم داشت:

۲- مقاطع جدار نازک باز	۱- مقاطع جدار نازک بسته
1) $K_1 = \frac{GJ}{L}$	1) $K_1 = \frac{GJ}{L}$
2) $K_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i t_i^3}{3 t_{max}}$	2) $K_2 = 2 A_m \cdot t_{min}$
3) $J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} a_i t_i^3$	3) $J = \frac{4 A_m}{\oint \frac{ds}{t}}$

3- مقطع دایره‌ای با شعاع R :

$1)\ K_1 = \dfrac{GJ}{L} \qquad J = \dfrac{\pi}{2} R^4 \qquad K_2 = \dfrac{\pi}{2} R^3$

4- لوله‌ای به شعاع R و ضخامت t :

$1)\ K_1 = \dfrac{GJ}{L} \qquad J = 2\pi R^3 . t \qquad K_2 = 2\pi R^2 . t$

5- مقطع دایره‌ای با شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 :

$1)\ K_1 = \dfrac{GJ}{L} \qquad J = \dfrac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4) \qquad K_2 = \dfrac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2R_2}$

نکته: صلبیت پیچشی مقطع (K_1) ؛ هم جنس و هم دیمانسیون با نیروی پیچشی T می‌باشد.

مقاومت پیچشی مقطع (K_2) دارای دیمانسیون مکعب طول (L^3) می‌باشد.

نکته: تنش برشی و تنش فشاری MAX در یک استوانه جدار نازک تحت پیچش (T)

و با ضخامت t و شعاع متوسط R به ترتیب برابر است با:

$$\sigma_{max} = \frac{T}{2\pi R^2 . t}$$

مساحت میانی (Am)

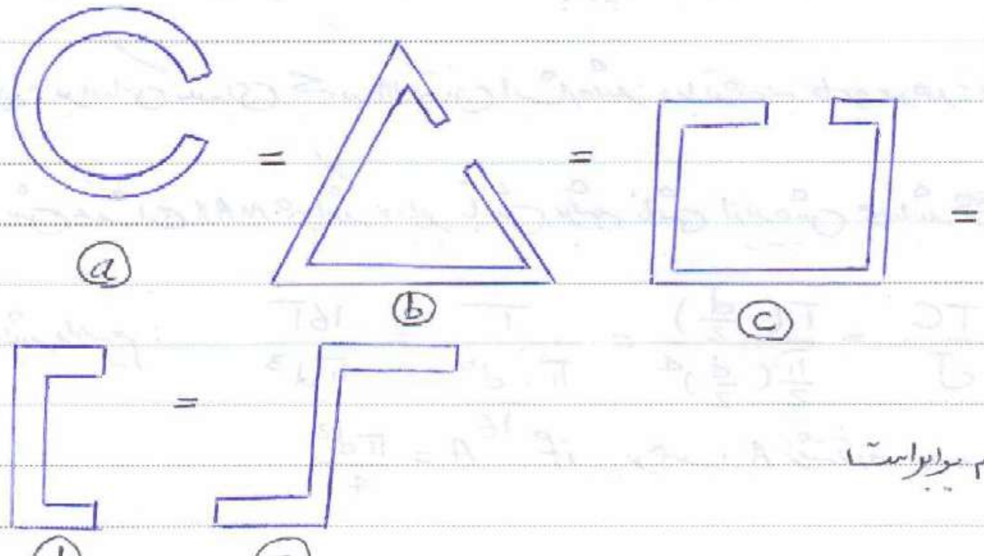
فرمول فوق هم برای تنش برشی MAX و هم تنش فشاری MAX صادق می‌باشد.

نکته: در پیچش (مقاطع مدور) از تنش محوری و همینطور تنش ها در جهت شعاع به دلیل ناچیز بودن صرف نظر می شود (بدیهی است در حالتی که مقطع حول محور تقارن می باشد)

بنابراین تنش های وارد بر المان فقط تنش های برشی و تنش MAX یا تنش های اصلی بر اساس قوانین دایره موهر محاسبه می شود.

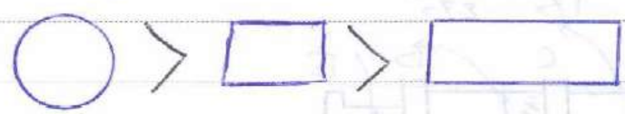
مقادیر تنش های اصلی در این حالت خاص برابر تنش برشی می باشد.

مثال – ظرفیت پیچشی کدامیک از مقاطع جدار نازک زیر با فرض اینکه محیط و ضخامت جداره ها برابر باشد بیشتر است؟



حل: همه باهم برابر است

مثال – ظرفیت پیچشی کدامیک از مقاطع زیر با در نظر گرفتن سطح مقطع ثابت برای سه مقطع بیشتر است؟



مثال - وقتی یک میله محوری تشکیل شده از مواد ترد تحت اثر پیچش قرار گرفته باشند جهت انتشار ترک چگونه می باشد؟ (مقطع دایروی فرض شده باشد)

حل: ترک ها با زاویه °45 نسبت به محور طولی گسترش می یابند زیرا مواد ترد تحت کشش و مواد شکل پذیر تحت برش می شکنند.

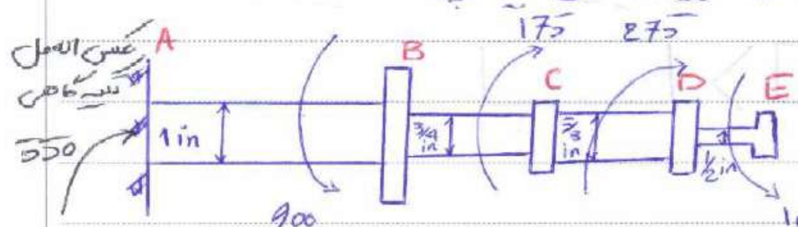
مثال - هرگاه کوپل $T=F.d$ به دو انتهای یک میله به قطر d با سطح مقطع A اعمال شود MAX تنش کششی در میله چقدر خواهد بود؟ (معنا پیچشی برابر T می باشد)

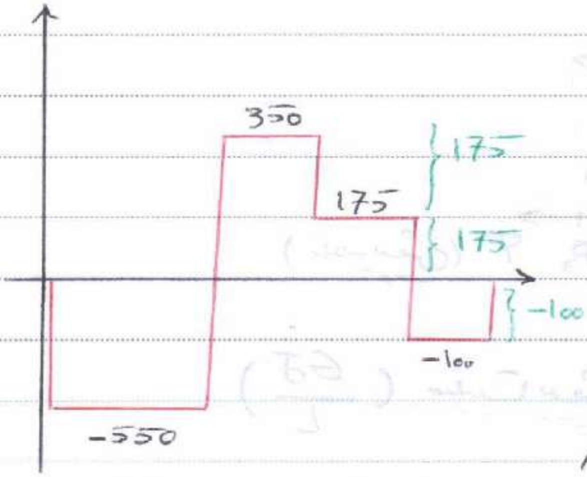
حل: براساس نکته ای که در بالا به آن اشاره شد و با توجه به دایره موهر، تنش کششی MAX برابر با تنش عمودی MAX می باشد و برابر با تنش برشی ناشی از پیچش می باشد ولی چون مقطع توپر می باشد داریم:

$$\tau_{max} = \frac{TC}{J} = \frac{T\left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^4} = \frac{T}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$= \frac{4T}{Ad} \leftrightarrow \text{برحسب } A \text{ نوشته شده} \quad if \; A = \frac{\pi d^2}{4}$$

مثال - حداکثر تنش برشی را در قطعه زیر محاسبه نمایید؟ (مقطع دایروی توپر)





حل: همواره در بیشتر مراجع مکانیک جامدات

برای رسم دیاگرام آزاد تلاش (نیروی که اعمال شده

و جای خواهیم با آن کار کنیم) مورد نظر را از انتها

آغاز آن شروع می کنیم.

$$\tau_{AB} = \frac{T.C}{J} = \frac{-550 \times \frac{1}{2}\,in}{\pi/2\,(1/2)^4} = 2810/12 \;\frac{lb}{in^2}$$

$$\tau_{BC} = \frac{T.C}{J} = \frac{350 \times \frac{3}{8}}{\pi/2\,(\frac{3}{8})^4} = 4225/26 \;\frac{lb}{in^2}$$

$$\tau_{CD} = \frac{T.C}{J} = \frac{175 \times 5/16}{\pi/2\,(5/16)^4} = 3650/6 \;\frac{lb}{in^2}$$

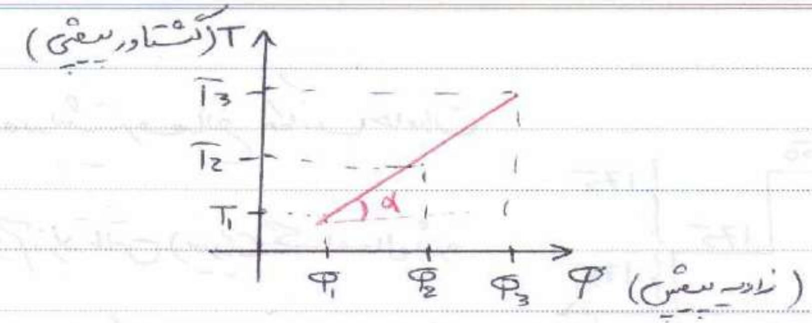
$$\tau_{DE} = \frac{T.C}{J} = \frac{-100 \times 1/4}{\pi/2\,(1/4)^4} = 4074/36 \;\frac{lb}{in^2}$$

محاسبه آزمایشگاهی صلبیت پیچشی:

میله را تحت پیچش های مختلف مانند T_1 یا T_2 یا ..... قرار می دهیم و برای هر پیچش زاویه

پیچش تغییر زاویه φ_1، φ_2، φ_3، φ_4 ... اندازه می گیریم پس از وصل کردن این چهار

نقطه در منحنی پیچش - زاویه پیچش - شیب این منحنی برابر است با صلبیت پیچشی



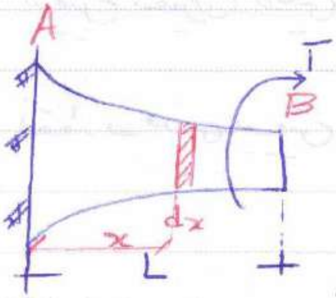
$$(\text{شیب خط})\ \tan\alpha = \text{صلبیت پیچشی}\ \left(\frac{GJ}{L}\right)$$

توجه: اگر مانند مثال قبل تعدادی میله با طول‌ها متفاوت دنبال هم داشته باشیم و گشتاورها پیچشی متفاوت روی آنها اعمال شده باشد، زاویه پیچش کل را می‌توان با جمع کردن تک تک زاویه‌ها پیچشی محاسبه نمود.

$$\varphi_{Totall} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{T\cdot L}{J\cdot G}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{T}{\underbrace{\left(\frac{GJ}{L}\right)}_{\text{صلبیت پیچشی}}}$$

در این روابط گشتاور پیچشی باید با علامت مربوط به خود وارد روابط شود یعنی نمودار مربوط به پیچش رسم شود و هر قسمت که پیچش مثبت بود با علامت ⊕ و هرگاه منفی بود با علامت ⊖

مثال - مقدار پیچش در نقطه‌ی انتهای را محاسبه نمایید؟ (φ_B)



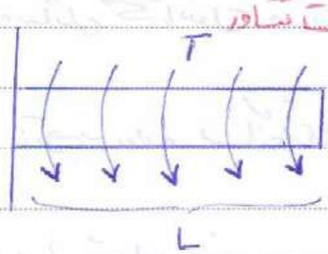
حل:

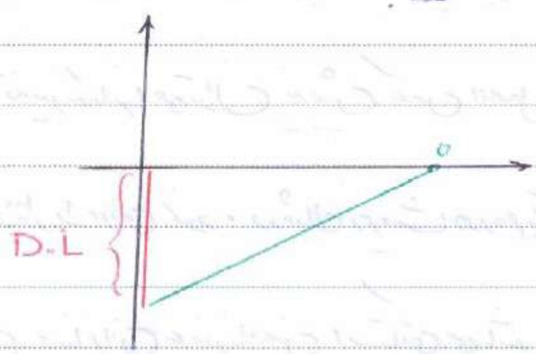
$$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{T\,dx}{GJ(x)}$$

dx ← چون مربوط به طول است

$J(x)$ ← مربوط به نقاط x

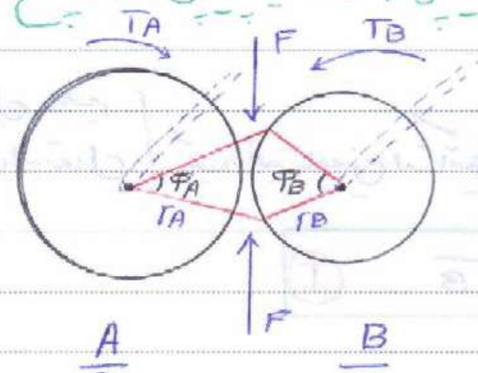
مثال - زاویه پیچش را برای حالتی که بر روی میله زیر با طول L گشتاور پیچشی گسترده در طول میله اعمال شده باشد را محاسبه نمایید؟





$$\varphi = \frac{1}{GJ}\int T\,dx = \frac{1}{GJ}\int DL\,dx$$

رابطه میان مقدار پیچش (گشتاور پیچشی) و زاویه پیچش در دو چرخ دنده درگیر



$$\varphi_A \cdot r_A = \varphi_B \cdot r_B = cte$$ باهم ثابت

$$\left.\begin{aligned} T_A &= F \cdot r_A \\ T_B &= F \cdot r_B \end{aligned}\right\} \frac{T_A}{T_B} = \frac{r_A}{r_B}$$

بنابراین :

زاویه پیچش چرخ دنده ها با شعاع چرخ دنده ها نسبت معکوس دارند

پیچش شفت ها با شعاع شفت ها نسبت مستقیم دارند

چرخ دنده ها و شفت های نامعین استاتیکی ← از روابط سازگاری تغییر مکانها

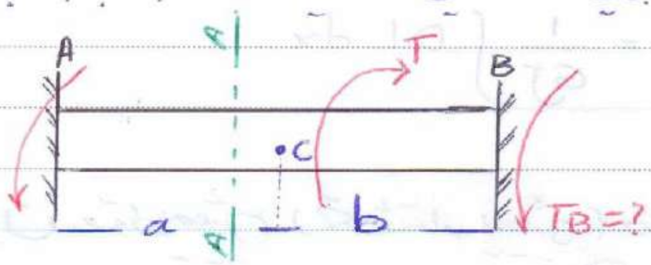
مسائلی که تاکنون مورد بحث قرار گرفته اند معین استاتیکی بودند اما در مورد شفت های نامعین

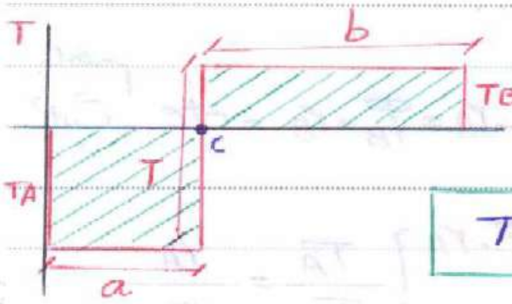
با توجه به روابط سازگاری تغییر مکانها می توان پیچش عکس العمل ها تکیه گاهی را همچنین

روابط تعادل عضو مورد نظر را بررسی نمود، در مثال زیر نشان داده می شود:

یک معادله و دو مجهول داریم، بنابراین عضو نامعین استاتیکی می باشد. با توجه به رابطه ی سازگاری

تغییر مکانها داریم:





یک معادله تعادل } یک درجه نامعین استاتیکی
دو مجهول داریم

$$\boxed{T = T_A + T_B \quad (\mathrm{I})}$$

رابطه ی سازگاری تغییر مکانها ϕ : $\phi_{A/B} = \phi_{A/C} + \phi_{C/B}$

چون دو سر گیردار می باشد $\phi_{AB} = 0$ است

(پیچش A نسبت به B) $\underbrace{\phi_{A/B}}_{\text{صفر}} = \underbrace{\phi_{A/C}}_{\phi_C - \underbrace{\phi_A}_{\text{گیردار} = 0}} + \underbrace{\phi_{C/B}}_{\underbrace{\phi_B}_{\text{گیردار} = 0} - \phi_C} \longleftrightarrow 0 = \phi_C - \phi_C$

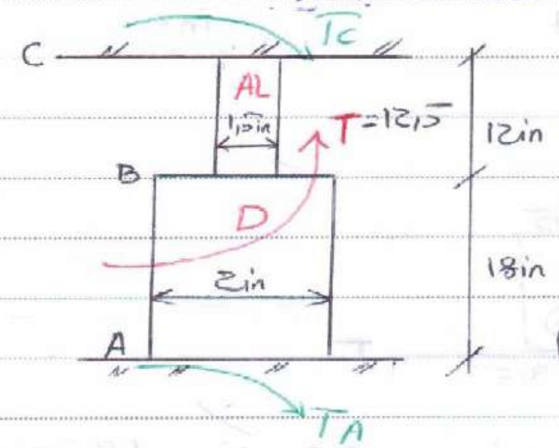
$\Rightarrow$

$$0 = \frac{T_A \cdot a}{GJ} - \frac{T_B \cdot b}{GJ} \Rightarrow T_A \cdot a - T_B \cdot b = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T_A \cdot a = T_B \cdot b \quad (\mathrm{II})}$$

حال از روابط (I), (II) می‌توان ...... , T_A, T_B را حساب کرد

مثال - تنش برشی حداکثر را در لوله‌ی AB , BC حساب کنید؟



$G_{AL} = 4 \times 10^6$

$G_D = 6 \times 10^6$ psi یا $\frac{lb}{in^2}$

حل:

$$(\mathrm{I}) \quad T = T_A + T_C$$

$$\Rightarrow 12.5 = T_A + T_C \quad (\mathrm{I})$$

$$\varphi_{A/C} = \varphi_{A/B} + \varphi_{B/C} \Rightarrow 0 = \varphi_B - \varphi_B$$

$$J = \frac{\pi}{2} R^4 \rightarrow J_{AC} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1.5}{2}\right)^4 , \; J_D = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{2}\right)^4$$

با روابط فوق:

$$0 = \frac{T_A \times 18}{(6 \times 10^6)(\pi/2)} - \frac{T_C (12)}{(4 \times 10^6)\left(\frac{\pi}{2} \times (.75)^4\right)} \quad (\mathrm{II})$$

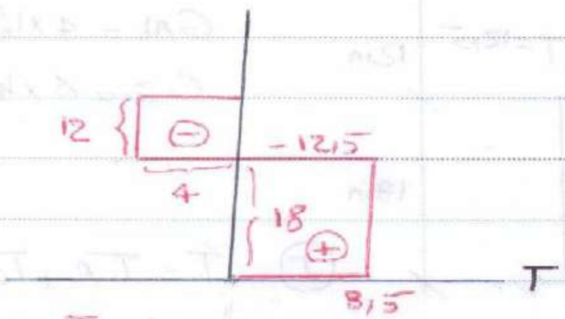
Year. Month. Day. Subject.

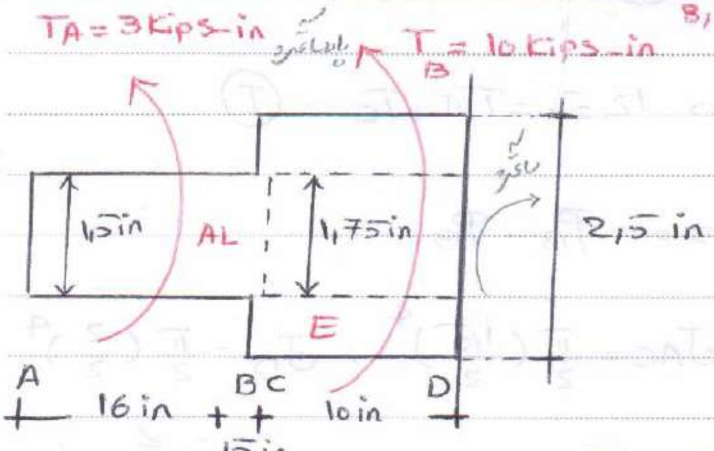
$$\text{I and II} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} T_C = 4{,}03 \ \text{kip-in} \\ T_A = 8{,}5 \ \text{kip-in} \end{cases}$$

با جایگذاری T_A و T_C در معادله ی $\tau = \dfrac{TC}{J}$ ، مقدار MAX را محاسبه می کنیم :

$$\tau_{AB} = \frac{(8{,}5)(\frac{3}{2})}{\pi/2} = 5{,}41 \ \frac{\text{kips}}{\text{in}^2}$$

$$\tau_{BC} = \frac{(4{,}03)(.75)}{\pi/2\,(.75)^4} = 6{,}03 \ \frac{\text{kips}}{\text{in}^2}$$





از DTC مقطع حداکثر لازم است.

مثال - زاویه پیچش حداکثر را حساب کنید؟

$G_{AL} = 4 \times 10^6$

$G_E = 6 \times 10^6$

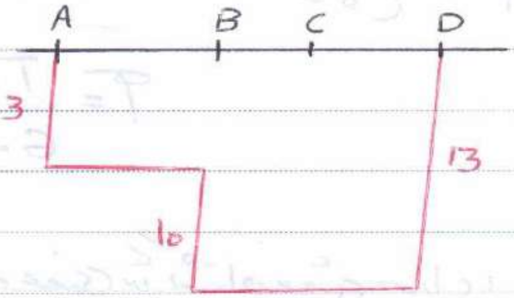
حل:

$$T_D = T_A + T_B \Rightarrow T = 10 + 3 = 13 \ \text{Kips-in}$$

$$\varphi_{A/D} = \varphi_{A/B} + \varphi_{B/C} + \varphi_{C/D}$$

Shahab

$$\varphi_{A/B} = \frac{3\,(16)}{(4\times10^{6})\,(\pi/2 \times (0{,}75)^{4})}$$

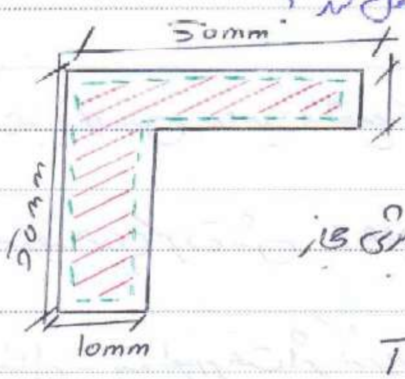


$$\varphi_{BC} = \frac{13\,(15)}{(6\times10^{6})\,(\pi/2 \times (1{,}25)^{4})}$$

$$\varphi_{CD} = \frac{13\,(10)}{(6\times10^{6})\left(\frac{\pi}{2}\left(\underbrace{(1{,}25)^{4}}_{\text{شعاع خارجی}} - \underbrace{\left(\frac{1{,}75}{2}\right)^{4}}_{\text{شعاع داخلی}}\right)\right)}$$

مقطع توخالی

مثال - اگر عضوی با مقطع جدار نازک زیر با ضخامت 10 mm تنش برشی مجاز 2,5 MPa داشته باشیم، این المان حداکثر چه گشتاور پیچشی را می‌تواند تحمل کند؟



$T_{max} = ?$

$$\text{تنش برشی مجاز} = \frac{T_{max}}{2A_m \cdot t}$$

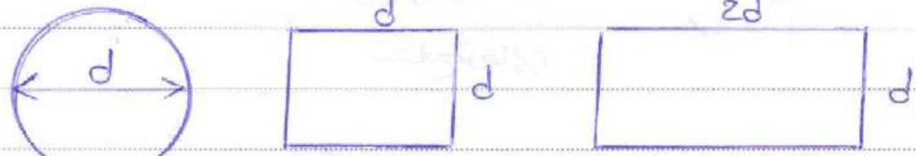
$$T_{max} = 2\tau A_m \cdot t$$

مجموع مساحت دو مستطیل $A_m = 758{,}875\ mm^2$

نکته مهم: در این نوع مسائل اگر ضخامت مقطع جدار نازک متغیر بود، برای هر قسمت باید جداگانه محاسبه شود و از ضخامت همان قسمت در محاسبات استفاده شود و نهایتاً پاسخ φ با هم جمع شود

$$\varphi = \frac{T \cdot L}{G \cdot 4 A_m^2} \int \frac{ds}{t}$$

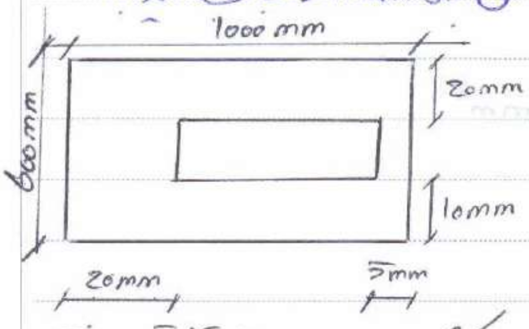
مثال - اگر بخواهیم با مصالحی با تنش مجاز برشی 60 MPa ، عضوی برای گشتاور پیچشی معادل با 300 N.m طراحی کنیم d را در حالت های زیر تعیین نمایید؟



$C_1 = .208$ $\quad$ $C_1 = .248$

توجه: براساس خاصیت مقطع توخالی می توان در مصالح مصرفی برای مقابله با اثر پیچشی صرفه جویی کرد. تنش MAX در وسط ضلع بزرگتر در اعضای منشوری رخ می دهد (نسبت به ضلع کوتاه)

مثال - مقطع زیر تحت اثر پیچشی 12 N/m قرار دارد، تنش برشی MAX را اعمال کنید؟



حل: در مقاطع جدار نازک، جریان برشی q ثابت می باشد و چون $q = \tau t$ است، تنش برشی در نقطه ای حداکثر می باشد که ضخامت (t) حداقل باشد. بنابراین تنش برشی حداکثر در جدار BD اتفاق می افتد

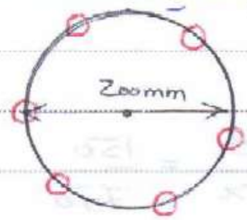
والازم است واحدها را به kg و cm تبدیل کنیم

$$(\text{جریان برشی})\quad q = \tau . t \Rightarrow \tau = \frac{q}{t} = \frac{T}{2A_m . t} = \frac{12\times 10^5}{2(A_m)(0/5\,cm)}$$

$$\text{مساحت میانی}\quad A_m = \left(1000 - \frac{5}{2} - \frac{20}{2}\right)\cdot\left(600 - \frac{20}{2} - \frac{10}{2}\right) = 577687/5\ mm^2$$

$$= 5776/875\ cm^2$$

مثال- یک محور انتقال بصورت شبه پیچی از 6 پیچ به قطر 25mm که در محیط دایره ای به قطر 200mm قرار دارد تشکیل شده است. اگر این اتصال تحت اثر گشتاور 20 kN.m قرار داشته باشد، تنش برشی ایجاد شده در پیچ ها را محاسبه نمایید؟



$T = 20\ kN.m$

تعداد پیچ $= 6$

d پیچ $= 25mm$

قطر دایره $= 200mm$

حل: با توجه به شکل:

گشتاور = تعداد پیچ × $\underbrace{\text{نیرو} \times \text{شعاع}}_{\text{کوپل}}$

$$T = n . P . r$$

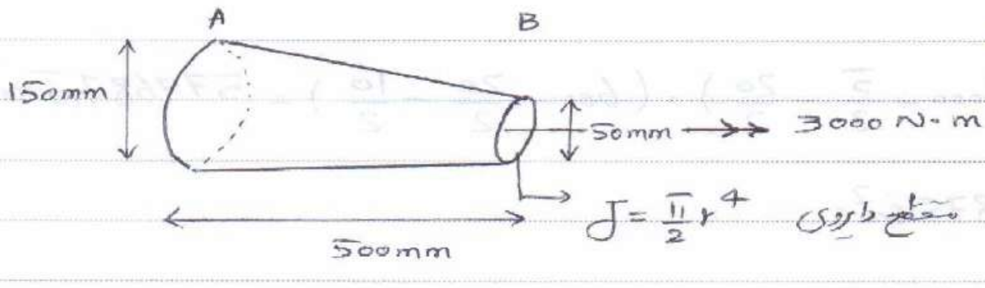
$$\text{نیروی وارد شده بر پیچ}\quad 20\times 10^3 = 6 . P . (12/5\times 10^{-3}) \Rightarrow P = \frac{20\times 10^3}{6\times 12/5\times 10^{-3}} = 0/2\times 10^6 N$$

$$\tau = \frac{P}{A} \Rightarrow \tau = \frac{0/2\times 10^6}{\pi\underbrace{(0/125)^2}_{r^2}} = 53/57\times 10^6\ N/m^2$$

مثال – محور فولادی با ضریب ارتجاعی برشی $0/84\times10^{5}$ تحت پیچش 3000 N.m

بصورت شکل زیر قرار دارد، زاویه‌ی پیچش انتهای آزاد آن را محاسبه کنید؟ (میله غیر منشوری

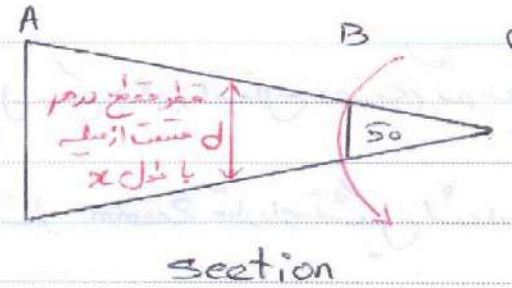
با مقطع دایره توپر)



سر مخفی

$J=\frac{\pi}{2}r^{4}$ مقطع دایروی

حل:



$$\frac{x}{50}=\frac{500+x}{150}$$

$$\Rightarrow x_1=250\ mm$$

طول

750 تناسب 150

x —— d

$$\Rightarrow \frac{d}{x}=\frac{150}{750}\Rightarrow d=\frac{x}{5}$$

$$r=\frac{x}{10}$$

$$J=\frac{\pi}{2}r^{4}\Rightarrow J=\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{10}\right)^{4}$$

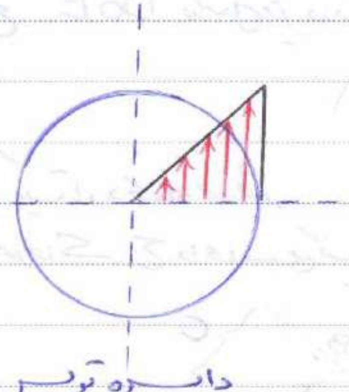
$$\varphi=\int_{x_B}^{x}\frac{T\cdot dx}{G\cdot\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{10}\right)^{4}\right)}=\int_{250}^{750}\frac{3000\cdot dx}{0/85\times10^{5}\left(\frac{1/57x^{4}}{10000}\right)}=4/67\times10^{-3}\ rad$$

تبدیل واحدها

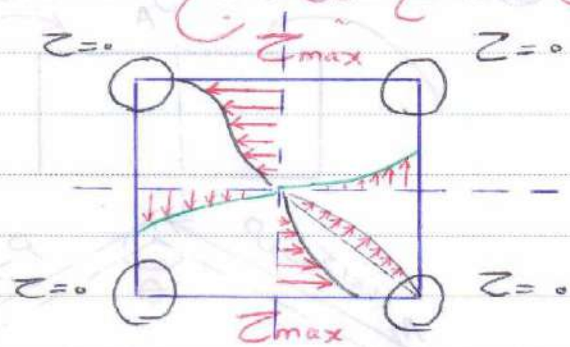
$$\boxed{\frac{R}{2\pi}=\frac{D}{360}=\frac{G}{400}}$$

زاویه

نمودار تنش برشی در مقطع دایره‌ای و مربعی :



دایره توپر
در محیط بیشترین τ را داریم



خمش (Flexure)

خمش الاستیک :

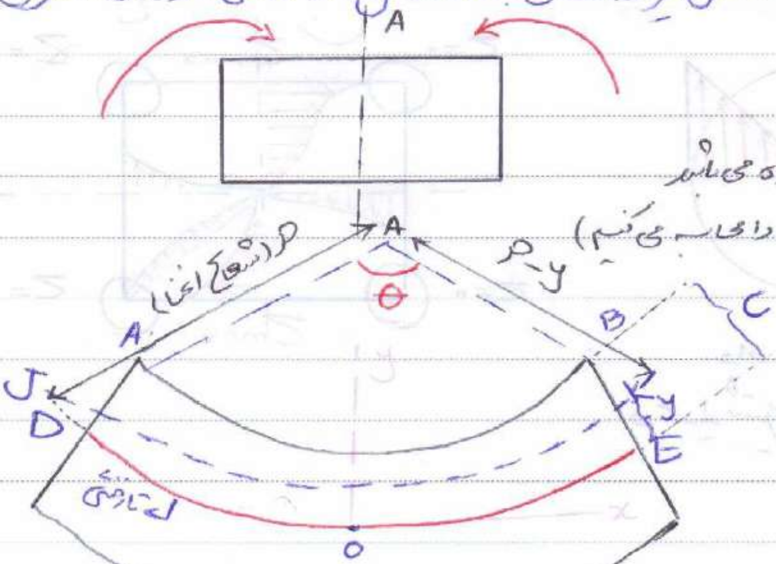
اعضای منشوری در خمش محض :

نمونه‌ای از عضوی که در معرض کوپل‌های مساوی و مخالف قرار دارد بر یک صفحه طولی موازی اند، عضو تحت خمش محض نامیده می‌شود.

این عضو به صورت یکسانی از دایره به شعاع انحنای ρ خم می‌شود

در خمش محض سطحی موازی با وجوه بالا و پایین عضو وجود دارد که در آن σ_x و ε_x صفر می‌باشد، این سطح، سطح خنثی نامیده می‌شود.

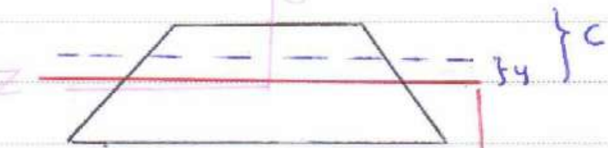
سطح DOE در شکل زیر در فاصله‌ی y از تار خنثی قرار دارد، کرنش به صورت زیر محاسبه می‌شود



JK یک تار دلخواه می‌باشد

(یعنی هر جا که ε را محاسبه می‌کنیم)

section



تار خنثی (N.A)

section

Nutral Axes

$$\text{(I)}\quad \varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \Rightarrow \varepsilon_{max} = \frac{-c}{\rho}$$

$$\varepsilon_x = \frac{y}{c}\,\varepsilon_{max}$$

برای تعیین موقعیت محور خنثی از تعادل نیروها در راستای طولی مقطع استفاده می‌کنیم.

$$\underbrace{\int \sigma_x \, dA}_{\text{مجموع نیروها}} = \int E \cdot \varepsilon_x \cdot dA = E \int \frac{-y}{\rho} \cdot dA = 0 \quad \text{تعادل نیروها}$$

$\sigma = E \cdot \varepsilon$, (I)

$$E \neq 0 \Rightarrow \underbrace{\overbrace{\int y \, dA}^{Q}}_{\text{گشتاور اول سطح}} = 0 \rightarrow Q = \int y \, dA = 0$$

بطور مشابه در نقاطی با فاصله‌ی y از تار خنثی، تنش بصورت:

$$\varepsilon_x = \frac{y}{c}\varepsilon_{max} \xrightarrow{\sigma = E\cdot\varepsilon} E\varepsilon_x = \frac{y}{c}E\varepsilon_{max} \rightarrow \sigma_x = \frac{y}{c}\sigma_{max}$$

Year. Month. Day. Subject.

این رابطه بیان می‌کند که نیروی کل سطح مقطع حول محور خنثی آن مقطع باید صفر باشد به عبارت دیگر:

در عضوی که در معرض خمش محض قرار دارد تا زمانی که تنش در محدوده‌ی الاستیک می‌باشد، محور خنثی از مرکز دوار مقطع می‌گذرد.

مرکز انحنا

«تا وقتی تنش‌ها در ناحیه الاستیک هستند محور خنثی هر مقطع عرضی از مرکز سطح آن می‌گذرد»

تنش خمشی در نقاطی که به فاصله‌ی y از محور خنثی می‌باشد برابر است با:

$$\sigma = \frac{\overbrace{-M}^{\text{گشتاور خمشی}} \cdot \overbrace{y}^{\text{فاصله نقطه تا تار خنثی}}}{\underbrace{I}_{\text{(ممان اینرسی مقطع)}}}$$

ع ایجاد انحنا

نکته: هرگاه گشتاور خمشی مثبت باشد، تنش خمشی بالای محور خنثی $(y>0)$ فشاری خواهد بود یعنی پایین تار خنثی $(y<0)$ تنش خمشی، کششی خواهد بود.

وقتی گشتاور خمشی M منفی باشد، تنش خمشی برعکس حالت فوق خواهد بود.

با توجه به رابطه‌ی $\sigma = \frac{-M\cdot y}{I}$ داریم:

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S}$$

(اساس مقطع یا مدول مقطع)

$$\rightarrow S = \frac{I}{C}$$

اثبات رابطه زیر:

$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho} \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_m}{c} \xrightarrow{\sigma = E\cdot\varepsilon} \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{\sigma}{E}}{c} = \frac{\sigma}{E\cdot c}$$

$$\xrightarrow{\sigma = \frac{Mc}{I}} \frac{M\cancel{c}}{I} \times \frac{1}{E\cdot \cancel{c}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E\cdot I}}$$

3) (انحنای مقطع) تنها به شکل هندسی مقطع وابسته است.

در خمش محض شعاع انحنای خمش مقطع را می‌توان بصورت زیر محاسبه کرد:

$$\text{انحنا} \quad \frac{1}{\rho_{\text{شعاع انحنا}}} = \frac{M}{E\cdot I}$$

ممان اینرسی مقطع حول محور خمش

در مقطع تحت خمش، تنش در یک طرف تار خنثی کششی و در طرف دیگر آن فشاری می‌باشد.

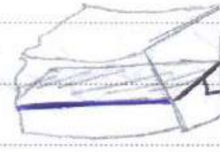
در قسمتی که تنش خمشی، کششی می‌باشد، تارهای طولی مقطع افزایش طول دارند و بخاطر

اثر پواسون عرض مقطع کاهش می‌یابد و در قسمتی که تنش خمشی فشاری می‌باشد

تارهای طولی مقطع کاهش طول دارند و بخاطر اثر پواسون عرض مقطع افزایش می‌یابد.

$\rho' = \frac{\rho}{\nu}$ اثر پواسون موجب می‌شود که محور خنثی مقطع عرضی بصورت دایره‌ای با شعاع

خم شود.



مرکز انحنای ناشی از خمش و مرکز انحنای مقطع عرضی در بالا و پایین محور خنثی قرار دارند

در یک طرف تار خنثی نمی‌باشد

عکس شعاع خمیدگی که نمایانگر خمیدگی مقطع عرضی می‌باشد و خمیدگی دوانحنایی نامیده می‌شود

پس داریم:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\nu}{\rho}$$ خمیدگی دوانمای

خمش اعضای مرکب:

اگر عضو قرار گرفته در معرض خمش، از دو یا چند ماده با مدول الاستیک متفاوت ساخته شده باشد، پیوستگی کرنش همچنان برقرار می باشد

چون مقطع یکپارچه رفتار می کند - ولی با توجه به اینکه تنش برابر حاصل ضرب مدول یانگ در کرنش می باشد نتیجه می شود که:

در محل اتصال اعضا پیوستگی تنش برقرار نیست، برای بررسی رفتار اینگونه اعضا که از دو مصالح مختلف ساخته شده اند، اگر نسبت مدول الاستیک دو مصالح برابر با $n=\frac{E_2}{E_1}$ باشد، براساس شکل های زیر پهنای مصالح با مدول ارتجاعی E_2، n برابر می شود و آنگاه مقطع جدید را با عنوان مقطعی که کلاً دارای مدول الاستیک E_1 می باشد مورد بررسی قرار می دهیم. بنابراین برای درک تنش مصالح از رابطه زیر بدست می آید:

$\boxed{E_1}$

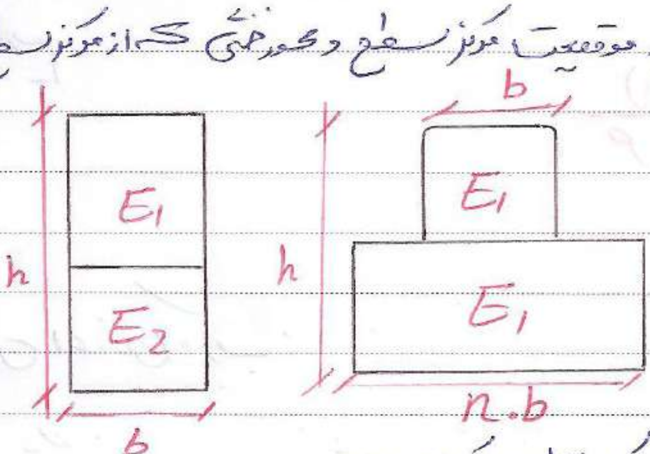
$\boxed{E_2}$ $\sigma_1 = E_1 \varepsilon_x \rightarrow \sigma_1 = \frac{-E_1 y}{\rho}$, $\sigma_2 = E_2 \varepsilon_x \rightarrow \sigma_2 = \frac{-E_2 y}{\rho}$

حال نیروهای موثر بر یک جزء از قسمت تحتانی و فوقانی به مساحت A:

$dF_1 = \frac{E_1 y}{\rho} . dA$

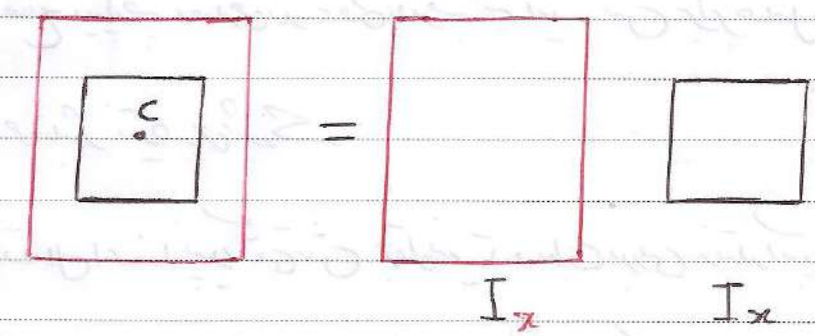
$dF_2 = \frac{E_2 y}{\rho} . dA$

توجه: برای این مقطع جدید باید موقعیت مرکز سطح و محور خنثی که از مرکز سطح مقطع عبور می‌کند را محاسبه کرد.



معادل‌سازی یک مقطع به یک مصالح

نکات: اگر یک مقطع حفره‌دار داشته باشیم I (ممان اینرسی آن) اینگونه محاسبه می‌شود:



در واقع ممان اینرسی سطح بزرگتر را از کوچکتر کم می‌کنیم تا ممان اینرسی کل شکل بدست آید.

خمش نامتقارن:

درحالتی که بردار خمش M در مقطع وارد می شود باید آن را در راستای محورهای اصلی تجزیه کرد و تنش های خمشی مقطع حول محورهای اصلی را با یکدیگر جمع کرد.

می دانیم که محورهای اصلی محورهایی است که I_{yz} در آنها صفر می باشد و تنها در صورتی محور خنثی بر محور بردار خمشی M منطبق می شود که بردار در امتداد یکی از محورهای اصلی مقطع باشد.

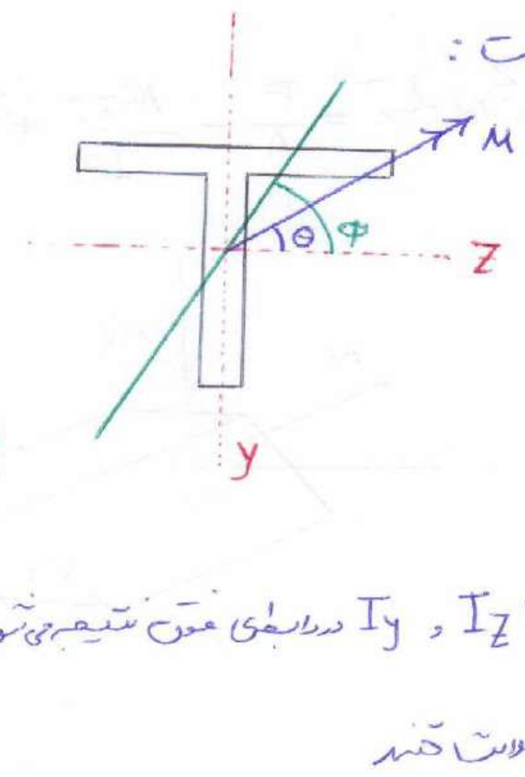
هنگامی که مقطعی دو محور تقارن داشته باشد، محورهای اصلی مقطع همان محورهای تقارن می باشند.

در n ضلعی های منتظم، تمام محورهایی که از مرکز مقطع می گذرد محور اصلی می باشد، یعنی برای هر دو محور متعامد گذرنده از مرکز مقطع، ممان اینرسی I_{yz} صفر می باشد.

و ممان اینرسی مقطع حول محوری که از مرکز مقطع بگذرد مقدار ثابتی می باشد.

در شکل زیر که بردار خمش M زاویه θ با محور اصلی Z می سازد، اگر زاویه محور خنثی با محور Z ها φ باشد خواهیم داشت:

$$\tan\varphi = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta$$



با توجه به مثبت بودن I_z و I_y در رابطه فوق نتیجه می شود که:

φ و θ هم علامت هستند

اگر $I_z > I_y$ باشد پس $\tan\phi > \tan\theta$ می‌باشد و در نتیجه $\phi > \theta$ خواهد بود.

اگر $I_y > I_z$ باشد بالعکس مشابه $\theta > \phi$ است.

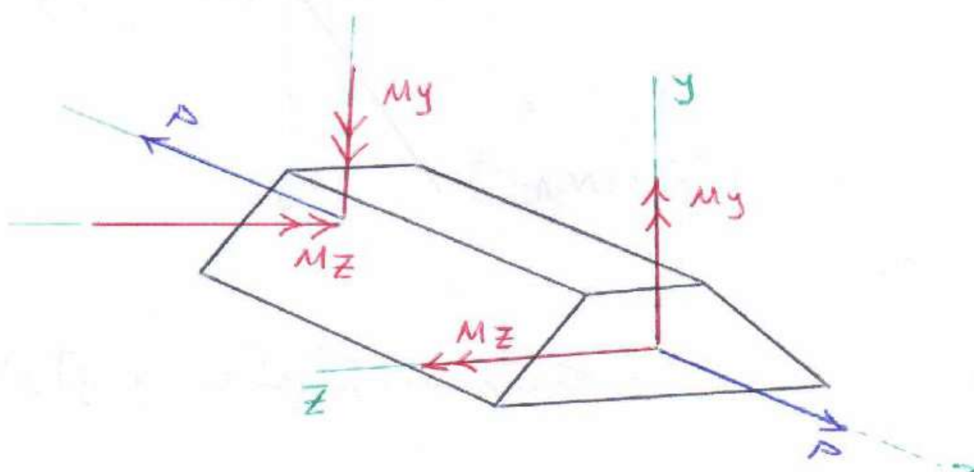
پس به موازات محور خنثی (N.A) بین بردار لنگر خمشی M و محور اصلی متناظر با ممان اینرسی Minimum قرار دارد.

$$I_y \tan\phi = I_z \tan\theta$$

حالت کلی :

بارگذاری روی مقطع مطابق شکل تحت نیروی محوری P و لنگر خمشی M_z و M_y می‌باشد،
برای محاسبه تنش خمشی در نقطه‌ای به مختصات (y,z) روی مقطع داریم :

(راستای طولی عضو) $$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$



در شکل فوق محورهای y و z، محورهای اصلی مقطع می‌باشند.

رابطه فوق بیان می‌کند که توزیع تنش در مقطع خطی می‌باشد.

در محاسبه‌ی تنش مرکب (σ_x) باید در تعیین علامت هر یک از ترم‌ها دقت شود، زیرا هر یک از این بخش‌ها بسته به جهت بار یا لنگر می‌توانند مثبت یا منفی باشند.

اگر معادله‌ی فوق برابر صفر باشد، معادله خط راستی بدست می‌آید که همان معادله محور خنثی می‌باشد، چون در محور خنثی تنش در تمام نقاط برابر صفر است.

P کششی +

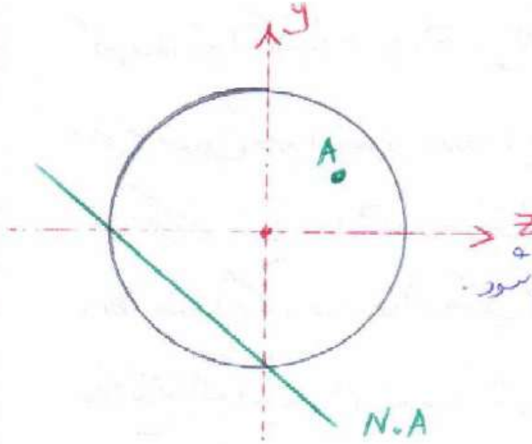
P فشاری −

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

(فرمول *)

هسته‌ی مقطع:

در مقطع اگر بار محوری P در نقطه A اعمال شود، تار خنثی به صورت نشان داده شده می‌باشد.



← اگر A در ربع اول باشد، تار خنثی در ربع سوم خواهد بود.

← اگر A در ربع دوم باشد، تار خنثی در ربع چهارم خواهد بود.

← اگر بار P از مقطع دور شود، تار خنثی به مرکز مقطع نزدیک می‌شود.

← اگر بار P دقیقاً در مرکز وارد شود، تار خنثی به بی‌نهایت می‌رود.

نکته: در معادله فرمول *، عملاً تنش قائم ناشی از P و My و Mz می‌باشد که با توجه به اصل جمع آثار قوا با هم جمع می‌شوند و معیار مثبت بودن یا منفی بودن هر بخش عملاً تابع کششی یا فشاری بودن تنش محوری اعمال شده، توسط هر یک از بخش‌ها می‌باشد.

وقتی جمع تنش ناشی از لنگرهای خمشی، مجاز می‌باشد که:

اولاً ترکیب تنش از تنش حد تناسب مصالح فراتر نرود.

دوماً تغییر شکل‌های ناشی از لنگر My تنش ناشی از Mz را تحت تأثیر قرار ندهد و برعکس.

توجه: در مسائل برای یافتن تار خنثی کافی است σ_x را مساوی صفر قرار دهیم.

اگر بار P از نقطه‌ی A به طرف مرکز مقطع حرکت کند، نقطه‌ای وجود دارد که با اعمال بار P در آن نقطه تار خنثی بر مقطع مماس می‌شود.

تعریف: «هسته‌ی مقطع»

مجموعه نقاطی که اگر بار در آنها وارد شود، تار خنثی بر مقطع مماس می‌شود سطحی را مشخص می‌کند که به آنها هسته‌ی مقطع گویند.

اگر بار در هسته‌ی مقطع وارد شود، تنش در مقطع تغییر علامت نمی‌دهد.

هسته‌ی مقطع از خصوصیات هندسی مقطع می‌باشد و ثابت خواهد بود و مشخص می‌شود که همواره محدب می‌باشد.

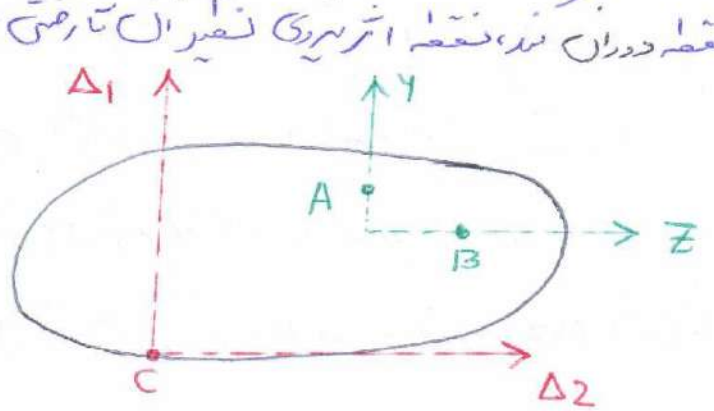
اگر مطابق شکل بار محوری P در A وارد شود، محور خنثی Δ_1 و اگر بار در B وارد شود محور خنثی Δ_2 می‌باشد.

در این صورت اگر در نقطه‌ای روی پاره خط AB وارد شود محور تار خنثی از نقطه C یعنی محل تلاقی Δ_1 و Δ_2 عبور می‌کند، زیرا اگر بار P در هر نقطه روی پاره خط AB اعمال شود می‌توان آن را با دو بار معادل در A و B معادل کرد که تحت اثر هر یک از آنها تنش در نقطه‌ی C صفر می‌باشد.

و از جمع آثار دو حالت نتیجه می‌شود که در نقطه‌ی C تنش برابر صفر می‌باشد.

و با توجه به اینکه تنش در تمامی نقاط محور خنثی صفر می‌باشد، محور خنثی از C خواهد گذشت. وقتی بار از A به سمت B حرکت کند، محور خنثی که خط Δ_1 می‌باشد حول نقطه‌ی C بصورت پادساعتگرد دوران می‌کند تا اینکه بار در B وارد شود محور خنثی بر خط Δ_2 منطبق می‌شود.

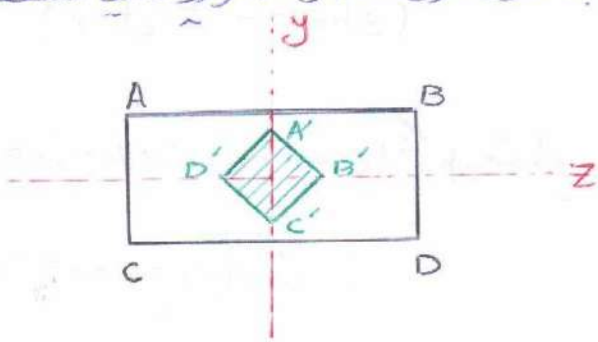
پس اگر تار خنثی حول یک نقطه دوران کند، نقطه اثر نیروی نظیر آن تار خنثی بر روی یک خط راست داخل مقطع حرکت می‌کند.



چند نکته مهم در بحث هسته‌ی مقطع:

① اگر نیرو روی مرز هسته وارد شود، تنش‌ها در یک رأس محیط مقطع صفر می‌شود، ولی اگر نیرو در یکی از رأس‌های هسته‌ی مقطع وارد شود، تنش‌ها در یک ضلع محیط مقطع صفر می‌شود.

مثال - در مقطع مستطیلی زیر هسته‌ی آن لوزی شکل خواهد بود، بنابراین اگر نیرو در نقطه‌ای بین A' و B' وارد شود تنش در نقطه‌ی D برابر صفر می‌شود، در حالی که اگر نیرو دقیقاً در نقطه‌ی A' وارد شود، تنش در ضلع CD مقطع صفر خواهد شد.



② اگر تار خنثی حول یک نقطه دوران کند، نقطه اثر نیروی نظیر آن تار خنثی بر روی یک خط راست حرکت می‌کند.

③ اگر تار خنثی یکی از محورهای تقارن عمود باشد، نقطه اثر نیروی نظیر آن بر روی همان محور تقارن و در طرف دیگر مقطع خواهد بود.

4 الی 7 در جزوه کپی شده

خمش پلاستیک:

در خمش الاستیک برای محاسبه کرنش در الیافی که به فاصله‌ی y از تار خنثی قرار دارد رابطه‌ی زیر بکار می‌رود:

$$\varepsilon = \frac{-y}{\rho}$$

طبق قانون هوک با ضرب مدول الاستیک در کرنش، تنش ($\sigma = E\cdot\varepsilon$) بدست می‌آید.

ولی در خمش پلاستیک تنها رابطه $\varepsilon = \frac{-y}{\rho}$ صادق است و دیگر قانون هوک برقرار نمی باشد
زیرا برخلاف کرنش، تنش نمی تواند از تنش تسلیم (σ_y) تجاوز نماید.
برای درست آوردن تنش در تاری از مقطع می توان کرنش آن را با کرنش تسلیم $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$ مقایسه کرد. اگر کرنش کمتر از کرنش تسلیم بود ($\varepsilon < \varepsilon_y$) می توان از قانون هوک تنش آن تار را محاسبه کرد ولی اگر کرنش بزرگتر از کرنش تسلیم بود ($\varepsilon > \varepsilon_y$) تنش آن تار برابر مقدار ثابت (σ_y) است

ضریب شکل (shape factor)

یکی از پارامترهای مهم در خمش پلاستیک، ضریب شکل مقطع می باشد که تنها از خصوصیات مقطع است و ربطی به نوع مصالح ربطی ندارد.

نسبت لنگر پلاستیک شدن مقطع (M_p) به لنگر جاری شدن (M_y) که با توجه به روابط زیر برابر با نسبت مدول مقطع پلاستیک (Z) به مدول مقطع الاستیک (S) را ضریب شکل گویند

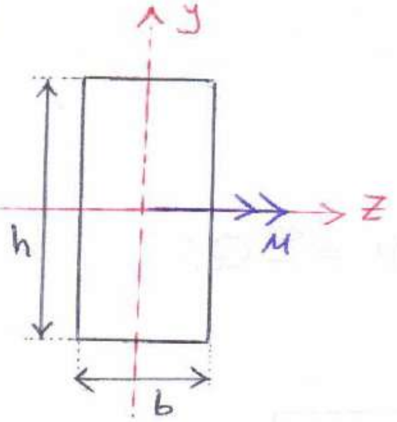
$$\hookrightarrow S = \frac{I}{C}$$

shape factors

$$S.F = \frac{M_p}{(yeild)M_y} = \frac{Z \times \cancel{\sigma_y}}{S \times \cancel{\sigma_y}} = \frac{Z}{S}$$

مثال - یک مقطع مستطیلی در شکل زیر مفروض است، چون این مقطع حول محور تنش (محور zها) متقارن است پس محور خنثی در خمش تغییر نمی کند. در خمش پلاستیک تارهای بالا محور خنثی جاری می شود و تنش کششی $+\sigma_y$ دارد و تارهای پایین محور خنثی نیز جاری شده و دارای تنش فشاری σ_y- می باشد.
برآیند نیروها در بالا و پایین محور خنثی برابر $\sigma_y \frac{bh}{2}$ می باشد که در مرکز سطح مستطیل های به عرض b و ارتفاع $\frac{h}{2}$ اثر می کند. پس فاصله ی برآیند نیروهای کششی و فشاری $2 \times \frac{h}{4} = \frac{h}{2}$ خواهد بود

پس داریم :



$$M_p = F \times d = (\underbrace{\overset{\text{مساحت}}{\frac{bh}{2}}\cdot\sigma_y}_{F}) \times \frac{h}{2}$$

$$= \frac{bh^2}{4}\cdot\sigma_y \Rightarrow Z = \frac{bh^2}{4}$$

مدول مقطع پلاستیک

مدول مقطع الاستیک $S = \dfrac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \dfrac{bh^2}{6}$

$$S.F. = \frac{Z}{S} = \frac{\frac{bh^2}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = 1.5$$

یعنی همواره ضریب شکل مقطع مستطیلی برابر ۱.۵ می باشد.

اگر مقطع تحت خمش پلاستیک نسبت به محور خمش نامتقارن باشد، دیگر محور خنثی از مرکز سطح مقطع نمی گذرد، بلکه مقطع را به دو بخش با مساحت مساوی تقسیم می کند.

اگر فاصله ی مرکز سطح قسمت های جاری شده ی کششی و فشاری برابر d باشد، لنگر پلاستیک مقطع برابر است با

$$M_p = \left(\frac{\sigma_y A}{2}\right) d$$

مشخص است که با خمش حول محور ضعیف مقطع نیز، ضریب شکل برابر ۱.۵ می باشد.
برای یک مقطع کلی که دارای اجزای مختلف به سطح مقطع A_i می باشد و فاصله ی مرکز سطح این اجزا تا محور خنثی d_i باشد، با توجه به اینکه در خمش پلاستیک، تنش در تمامی تارهای مقطع ثابت و برابر σ_y می باشد داریم:

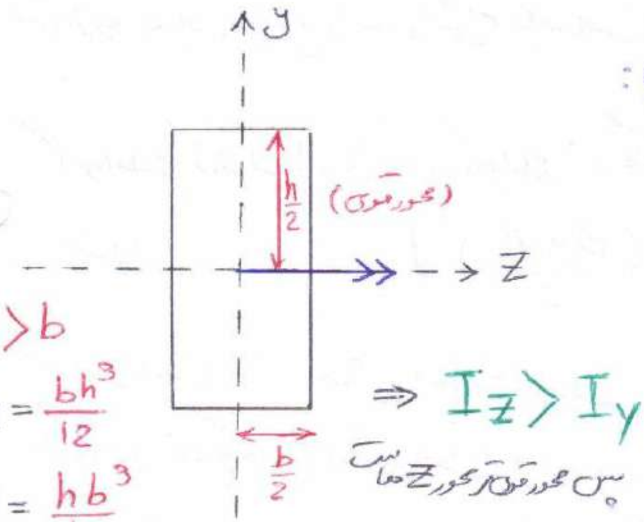
بسیار مهم $\boxed{M_P = Z \cdot \sigma_y} \Rightarrow Z = \dfrac{M_P}{\sigma_y}$

$$\Rightarrow Z = \frac{\cancel{\sigma_y} \sum A_i y_i}{\cancel{\sigma_y}} \Rightarrow Z = \sum A_i y_i = \sum Q_i$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_P &= \sum F_i y_i = \sum (A_i \underbrace{\sigma_y}_{\text{ثابت}}) \cdot y_i \\ &= \sigma_y \sum A_i \cdot y_i \end{aligned}}$$

توجه: ممان مقطع پلاستیک برابر می‌شود با مجموع ممان استاتیک اجزا مختلف مقطع در بالا و پایین محور خنثی (مستقل از نواحی کششی و فشاری مقطع)

توجه: چون y_i بیانگر فاصله‌ی مرکز سطح تا محور خنثی می‌باشد همواره مثبت است. و نباید برای اجزای واقع در پایین محور خنثی علامت آن را منفی در نظر گرفت.



$h > b$

$I_Z = \dfrac{bh^3}{12}$ $\Rightarrow I_Z > I_y$

پس محور قوی تر محور Z ها است

$I_y = \dfrac{hb^3}{12}$ ← ممان اینرسی حول محور y ها

نکته: ضریب شکل برخی از مقاطع برابر است با:

۱- مقطع مربع و مستطیل برابر $1,5$.

۲- مقطع لوزی برابر 2.

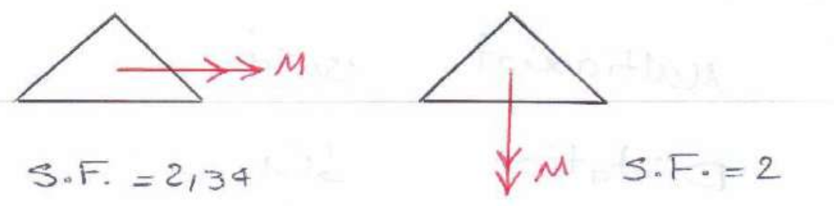
۳- دایره‌ای و بیضوی حدود $1,7$.

۴- لوله‌ای (دایره جدار نازک) $\frac{4}{\pi}$.

۵- مقاطع I شکل در خمش حول محور قوی برابر $1,1$ تا $1,2$.

(در خمش مقطع I شکل حول محور ضعیف جان تأثیری ندارد) و در نتیجه مقطع مانند دو مستطیل رفتار می‌کند و ضریب شکل برابر $1,5$ می‌باشد.

6 - در مثلث متساوی الساقین نسبت به محور خمشی ضریب شکل 2 تا 2,34 است



بطور کلی هرچه تمرکز مصالح حول محور خمشی بیشتر باشد ضریب شکل بزرگتر است و مطلوب است از حداکثر ظرفیت یک مقطع در خمش استفاده کرد و مقطع وارد تغییر شکل های پلاستیک که غیر قابل برگشت می باشد نشود پس:

مقطع با کمترین ضریب شکل بهینه ترین مقطع می باشد

پس برای سازه ها خمشی از مقطع I شکل استفاده می شود و در این مقطع ضریب شکل 1,1 تا 1,2 می باشد و در نتیجه اختلاف Mp با My حداقل است.

بارگذاری:

از داخل جزوه ها مطالعه شود

Axial محوری

True واقعی

Member عضو

Multiaxial چندمحوری

Dilatation اتساع

معرفی چند کلمه :

خمش Flexure خم کردن bending پیچش Torsion

خرپا . Truss پیچاندن twist گشتاور پیچشی Torque

تیر چوبی Timber جدار نازک thin-walled معیار تسلیم Yield ereteria

بارگذاری loading بار Load باربرداری unloading

معین determinate نامعین indeterminate تک محوری uniaxial

تراکم ناپذیر incompressible تغییر مکان (خیز) deflection

تغییر شکل deformation مرکز جرم centroid

بارگذاری مرکزی centric Loading ساعتگرد clock wise پادساعتگرد " " conter

تیر طره (کنسول) Cantilever Beam

روش تغییر شکل سازگار

(در برخی از موارد، برای محاسبه خیز، شیب تیرها، عکس العمل تکیه گاهی مورد استفاده قرار می گیرد)

هر سازه ی نامعین را می توان با حذف قیود اضافی موسوم به نیروهای زائد یعنی آن تعداد مؤلفه ها نیرو که مازاد بر حداقل تعداد لازم برای تعادل استاتیکی سازه می باشد، به یک سازه ی معین و پایدار تبدیل نمود.

سازه معین و پایداری که پس از برداشتن قیود اضافی حاصل می شود، **سازه ی اولیه** نامیده می شود.

در این صورت سازه اصلی معادل خواهد بود با سازه ی اولیه که تحت اثر مجموعه بارهای اصلی و نیروهای زائد مجهول قرار گرفته است.

پس از آن باید معادلات یکسان بودن شرایط هندسی در سازه‌ی اولیه و سازه حاصل را در نقطه اثر نیروهای زاید نوشت ، این معادلات را معادلات سازگاری گویند.

می‌توان به همان تعداد نیروهای زاید مجهول معادله‌ی سازگاری بدست آورد و به این ترتیب نیروهای زاید را با حل دستگاه معادلات چند مجهولی بدست آمده، تعیین کرد. این روش را روش تغییر شکل سازگار گویند که می‌تواند برای تحلیل هر نوع سازه تحت اثر بارگذاری یا نشست تکیه‌گاهی تحلیل شود و چه تحت اثر تغییر درجه حرارت.

در حل مسائل مقاومت مصالح و تحلیل سازه در مقطع کارشناسی باید برای استفاده از این روش اصل جمع آثار برقرار باشد که این مسئله مستلزم خطی بودن دیاگرام تنش کرنش مصالح تشکیل دهنده سازه می‌باشد. در این صورت معادله دیفرانسیل تغییر شکل تیر خطی می‌باشد که برای شیب و خیز تیرها (به طور مثال) جمع آثار برقرار می‌باشد.

طراحی شفت‌های انتقال قدرت :

منظور از طراحی شفت تعیین مشخصات شفت از قبیل طول، قطر و نوع مصالح آن می‌باشد تا بتواند پیچش مورد نظر را انتقال دهد بنابراین طراحی شفت وابسته به دو مورد می‌باشد :

(1) مقدار پیچش انتقالی (2) ابعاد شفت به لحاظ طول و قطر که البته جنس مصالح بسیار مهم است .

اگر شفتی پیچش T را با سرعت زاویه‌ای W منتقل کند ، توان یا قدرت انتقال یافته توسط شفت برابر است با :

$$P = T \cdot W$$

(توان) (سرعت زاویه‌ای)

$$W = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

اگر که انتخاب مصالح شفت در اختیار طراح می باشد بنابراین مدول ارتجاعی برشی آن (G) مشخص می باشد و همچنین تنش برشی مجاز آن نیز مشخص خواهد بود ، براین اساس تنش حداکثر را برابر تنش برشی مجاز در شفت قرار داده و داریم :

$$P = T \cdot \overbrace{(2\pi f)}^{w}$$

$$\text{if} \quad \tau_{max} = \tau_{all} \quad (\text{تنش برشی مجاز})$$

$$\Rightarrow \tau_{all} = \frac{T \cdot C}{J} \Rightarrow \begin{cases} J = \frac{\pi}{2} c^4 \\ \frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{all}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} C^3 = \frac{T}{\tau_{all}} \rightarrow C = \sqrt[3]{\frac{2T}{\pi \tau_{a}}}$$

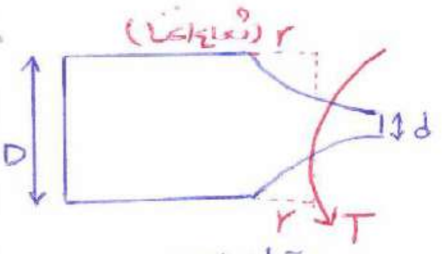
شعاع شفت طراحی شده

حداقل شعاع مورد نیاز برای شفت جهت اینکه بتواند پیچش T را براساس توان P بدست آمده است تحمل کند بصورت فوق محاسبه می شود و طول شفت نیز برای اینکه بتواند زاویه پیچش مجاز φ_{all} بصورت زیر محاسبه می شود :

$$\varphi_{max} = \varphi_{all} = \frac{T \cdot L}{GJ}$$

$$L = \frac{\varphi_{all} \cdot G \cdot J}{T}$$

تمرکز تنش در شفت های مدور:



مقطع دایروی

اگر در طول شفت قطر آن ثابت باقی بماند تنش برشی حداکثر ناشی از پیچش نیز در طول میله ثابت می باشد

اما اگر در بخشی از طول میله قطر مقطع آن تغییر کند تنش برشی حداکثر نیز تغییر خواهد کرد و در محل تغییر مقطع تنش برشی بطور ناگهانی افزایش می یابد که این مسئله را تمرکز تنش در شفت های مدور گویند

مقدار تنش برشی حداکثر با توجه به مفهوم تمرکز تنش

$$\tau_{max} = K\frac{T \cdot C}{J}$$

K ← ضریب تمرکز تنش

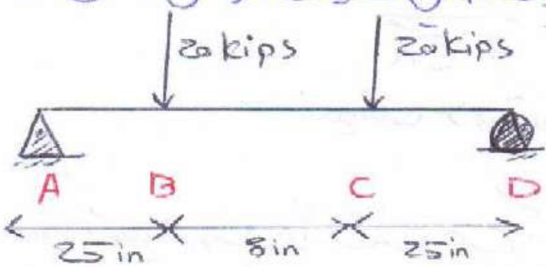
J ← بر اساس مشخصات سطح مقطع کوچکتر محاسبه می شود

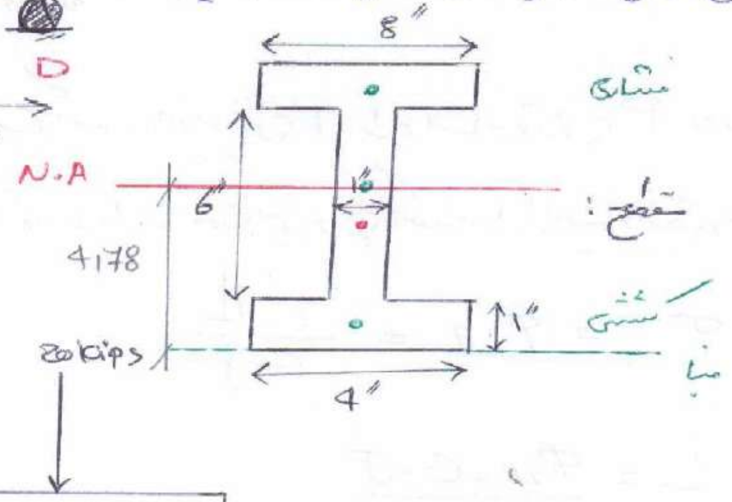
$$\begin{cases} K \propto \dfrac{d}{D} \\ K \propto \dfrac{r}{d} \end{cases}$$

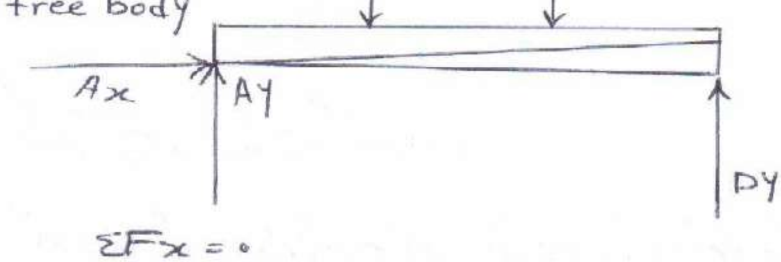
خمش خالص (بدون تنش برشی)

اگر عضوی را داشته باشیم که این عضو در دو انتهای خود تحت تأثیر دو گشتاور مساوی ولی مختلف العلامت قرار داشته باشد که در یک صفحه قرار دارند، اصطلاحاً گویند که این عضو تحت اثر خمش خالص است.

مثال - تنش نرمال حداکثر فشاری و کششی را محاسبه کنید؟



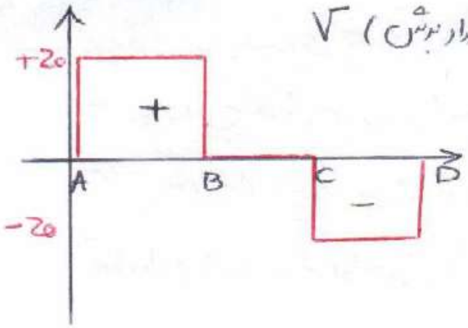




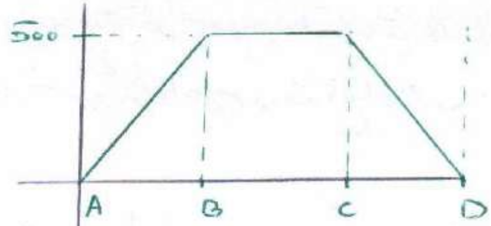
$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow A_Y = 20\,kips$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 20 \times 25 + 20 \times 33 - D_Y \times 58 = 0 \Rightarrow D_Y = 20\,kips$



گشتاور خمشی (M)



(برای بدست آوردن نمودار M مساحت زیر نمودار نمودار برش را محاسبه می‌کنیم)

برای محاسبه‌ی تنش حداکثر در خمش و کشش باید از فرمول $\sigma = \dfrac{MC}{I}$ استفاده شود. در این فرمول

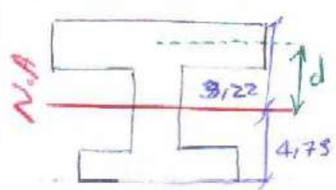
M (گشتاور خمشی) براساس مطالب فوق از دیاگرام گشتاور خمشی محاسبه می‌شود و اما C که فاصله‌ی دورترین تار فشاری و کششی از تار خنثی می‌باشد بعد از تعیین محل محور خنثی به طور زیر بدست می‌آید

فاصله تا محور مبنا در شکل I شکل

با استفاده از مقطع I شکل $\bar{y}$ را محاسبه می‌کنیم

$$\bar{y} = \frac{\underbrace{8\times1}_{A_1}\times\underbrace{7{,}5}_{\bar{y}_1} + \underbrace{6\times1}_{A_2}\times\underbrace{4}_{\bar{y}_2} + \underbrace{4\times1}_{A_3}\times\underbrace{0{,}5}_{\bar{y}_3}}{8\times1 + 6\times1 + 4\times1} = 4{,}78\ \text{in}$$

$$\sigma_{max}\ \text{فشاری} = \frac{(500)\overbrace{(8-4{,}78)}^{\text{دورترین تار فشاری تا تار خنثی}}}{I} \qquad \sigma_{max}\ \text{کششی} = \frac{(500)\overbrace{(4{,}78)}^{\text{دورترین تار کششی تا تار خنثی}}}{I}$$



$$I_{\text{حول محور خنثی}} = \underbrace{\frac{8\times1^3}{12} + \overbrace{(8\times1)}^{A}\overbrace{(3{,}22-0{,}5)}^{d^2}}_{\text{برای قسمت فوقانی}} + \underbrace{\frac{1\times6^3}{12} + (6\times1)(0{,}78)^2}_{\text{برای قسمت وسطی}}$$

$$+ \underbrace{\frac{4\times1^3}{12} + (4\times1)(4{,}78-0{,}5)^2}_{\text{برای قسمت پایینی}} = 155{,}2\ \text{in}^4$$

155,2 را در فرمول فوق جایگذاری می‌کنیم

اگر مقطعی از عضوی که تحت اثر خمش خالص می باشد در نظر بگیریم ، ابتدا باید تصور شود نیروهای داخلی ایجاد شده ، این خمش در مقطع جبران شود به عبارتی نیروهای داخلی در مقطع انتخاب شده باید گشتاوری برابر گشتاور M ایجاد کنند تا تعادل برقرار شود .

قراردادی که به لحاظ جهت گشتاورها در این بخش می نویسیم قطعاً قرارداد استاتیکی می باشد .

خمش خالص معمولاً به ندرت رخ می دهد اما بحث تئوریک آن اجتناب ناپذیر است ، در خمش خالص یکی از فرض های اساسی این است که

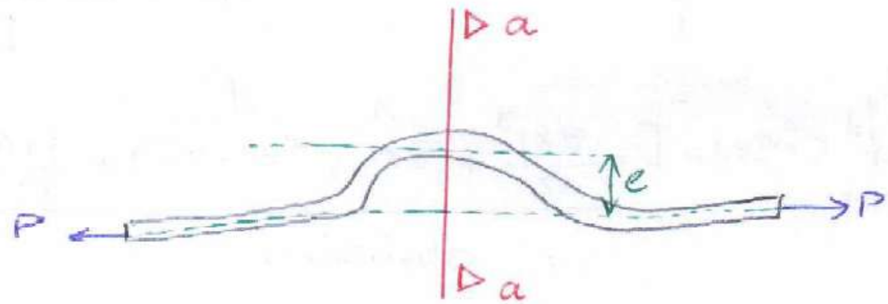
عضو مورد نظر دارای صفحه تقارن باشد و گشتاور خمشی در این صفحه تقارن اعمال شود .

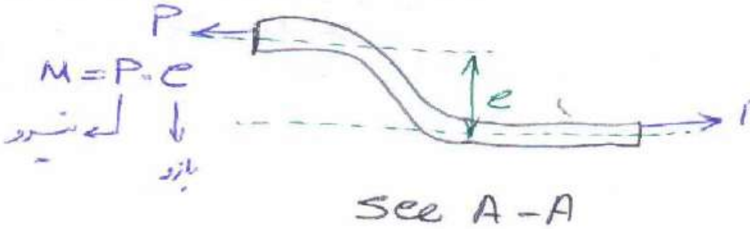
تعریف :

اگر گشتاور خارج از صفحه تقارن بر مقطع اعمال شود خمش ایجاد شده را خمش کج یا نامتقارن گویند

در این بخش خمش در یک قطعه نمونه ها نیروی محوری هم می تواند وجود داشته باشد .

بطور مثال در مقطع A-A علاوه بر بار محوری گشتاور خمشی نیز اعمال می شود (خمش مرکب)





See A-A

نکته : در خمش خالص تنش برشی در عضو ایجاد نمی شود

چون نیروهای داخلی بصورت فشاری یا کششی رفتار می کنند تنش ایجاد شده در مقطع ناشی از خمش خالص از نوع تنش عمودی می باشد . (از نوع σ می باشد و هیچ گونه τ ندارد)

توجه: تعیین توزیع تنش، در خمش خالص یک مسئله نامعین استاتیکی می‌باشد که علاوه بر روابط تعادل در خمش خالص لازم است، روابط سازگاری بین تغییر شکل‌ها نیز استفاده شوند

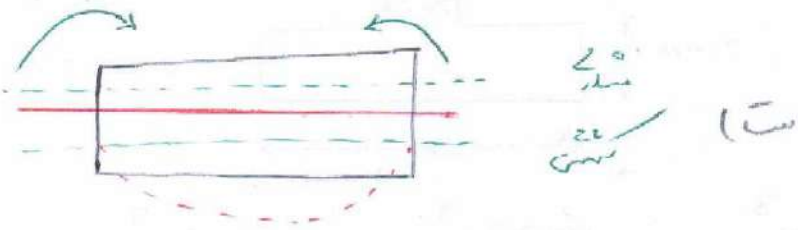
فرضیات اساسی خمش خالص (در اعضای دارای صفحه تقارن)

1) صفحات مستوی بعد از اعمال خمش همچنان مستوی باقی می‌مانند

2) از آنجا که در خمش خالص گشتاور M در طول عضو ثابت می‌باشد، انحنا در تمام نقاط مقطع یکسان خواهد بود یعنی عضو بصورت قوسی از دایره درمی‌آید.

تارهای فوقانی

3) تارهای فوقانی (طولی) مطابق شکل زیر برای گشتاور تحت فشار و تارهای تحتانی تحت کشش می‌باشند



طول عضو

4) از آنجا که تنش ایجاد شده از نوع تنش عمودی (σ_x) می‌باشد کرنش که در راستای طول عضو ایجاد می‌شود ε_x می‌باشد بنابراین در تارهای بالای کاهش طول و در تارهای پایینی افزایش طول داریم.

5) بین تارهای بالای و پایینی تاری وجود دارد که کرنش در آن تار برابر صفر می‌باشد یعنی بعد از تغییر شکل طول آن ثابت باقی مانده است، این تار همان تار خنثی می‌باشد.

6) تحت خمش خالص در محدوده‌ی کرنش‌های کوچک بررسی می‌شود، یعنی قانون هوک صادق خواهد بود و ما در محدوده‌ی الاستیک خواهیم بود.

7) در خمش خالص بجز تنش نرمال (σ_x) در راستای طولی عضو مابقی تنش‌ها از جمله σ_y و σ_z و τ_{xz}، τ_{xy}، τ_{yz} همگی برابر با صفر می‌باشند

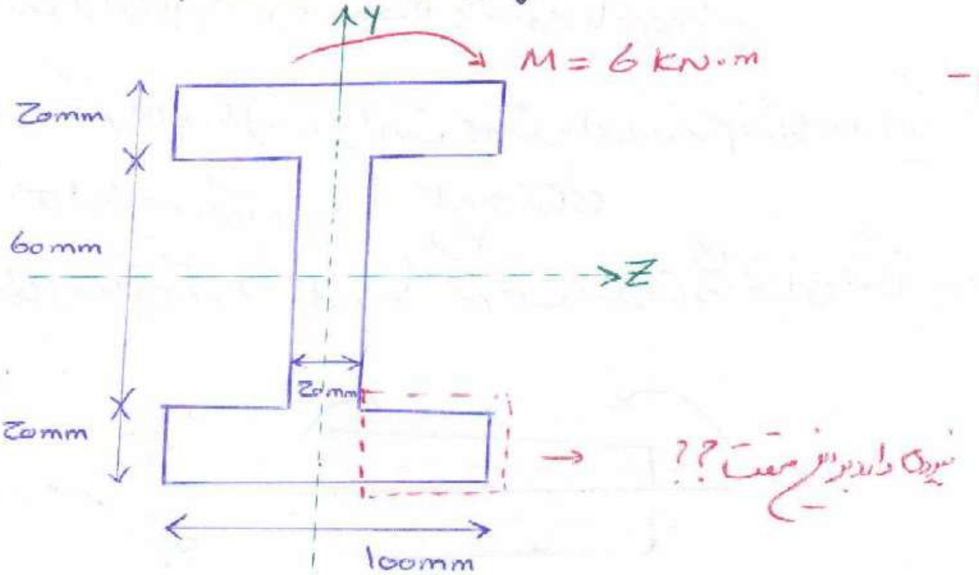
نکته: مربوط به بخش ممان اینرسی

در طراحی تیرها و یا بطور کلی اعضای سازه‌ای برای طرح مقطع عضو با یک سطح مقطع ثابت هرچه ارتفاع عضو بیشتر شود مقدار ممان اینرسی آن افزایش می‌یابد بنابراین مقدار تنش حداکثر ناشی از تنش کاهش می‌یابد

$A: cte$

$$\uparrow h \longrightarrow I\uparrow \xrightarrow{\sigma = \frac{MC}{I\uparrow}} \sigma\downarrow$$

مثال -



$$I_y = \frac{20\times 100^3}{12} + \frac{60\times 20^3}{12} + \frac{20\times 100^3}{12} = 20{,}04\times 10^{-6}\ m^4$$

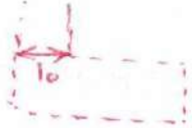
$$\sigma_x = \frac{M_y Z}{I}$$ شعاع در راستای عمود بر محور

$$\sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow F = \sigma\cdot A \Rightarrow dF = \sigma\cdot dA = \frac{M_y\cdot Z}{I_y}(20)\,dZ$$

$$dF = \frac{6\times 10^3\times Z\times 20\times dZ \times \cancel{10^{-6}}}{20{,}04\times \cancel{10^{-6}}}$$

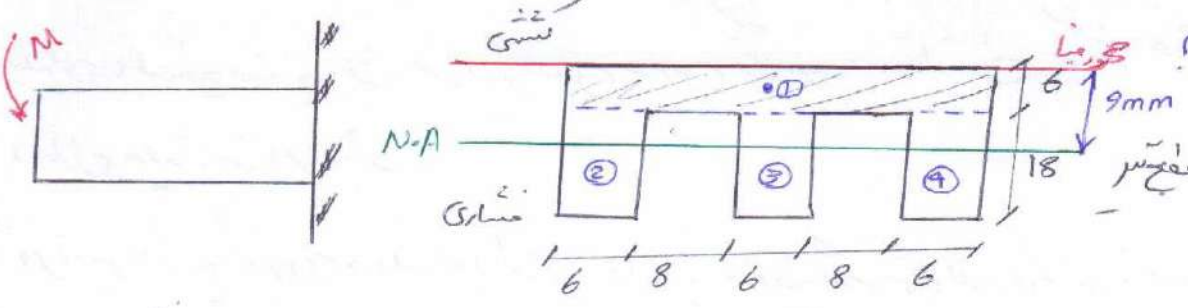
$$F = \int_{10}^{50} dF = 7{,}18\ kN$$

از تار خنثی محاسبه می‌شود



سوال شود؟

مثال - حداکثر لنگر قابل اعمال بر تیر روبرو با تنش فشاری مجاز 150Mpa و تنش کششی مجاز 120Mpa را محاسبه نمایید؟



حل:

فشاری $\sigma_{c\,all} = 150\ Mpa = \frac{N}{mm^2}$

کششی $\sigma_{t\,all} = 120\ Mpa$

$$\bar{y} = \frac{\overbrace{(6\times34)}^{A_1}\cdot\overbrace{\frac{6}{2}}^{\bar{y}_1} + \overbrace{3}^{\text{تعداد}}\times\overbrace{(6\times18)}^{A_{2,3,4}}\cdot\overbrace{\left(6+\frac{18}{2}\right)}^{\bar{y}'_{2,3,4}}}{6\times34 + 3(6\times18)} = 9mm$$ فاصله تار خنثی تا محور مبنا

<< اگر مرکز سطح جسم تا تار خنثی فاصله داشته باشد در Ad^2 ضرب می‌شود >>

$$I_Z = \underbrace{\frac{6^3\times34}{12} + \overbrace{(6\times34)}^{A}\cdot\overbrace{(9-3)}^{d}{}^2}_{\text{قطعه شماره 1}} + 3\times\left(\overbrace{\frac{6\times18^3}{12} + (6\times18)(6)^2}^{\text{سه قطعه}}\right)$$

$= 33048\ mm^4$

حداکثر فاصله فشاری

فشاری $\sigma = \frac{MC}{I} \Rightarrow 150 = \frac{M_c\times15}{33048} \Rightarrow M_c = 330480\ N.mm$

کششی $\sigma = \frac{MC}{I} \Rightarrow 120 = \frac{M_t\times9}{33048} \Rightarrow M_t = 440640\ N.mm$

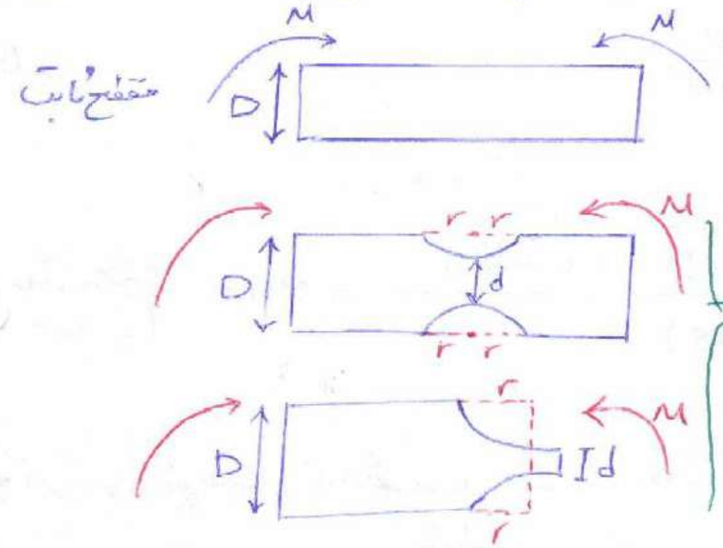
$M = \min(M_c, M_t)$ حداکثر گشتاوری که می‌تواند تحمل کند

$$\boxed{M = 330480\ N.mm}$$

تمرکز تنش ناشی از خمش

اگر میله‌ای با سطح مقطع ثابت تحت اثر خمش خالص قرار بگیرد، مقدار تنش حداکثر خمشی در طول میله ثابت می‌باشد

اما اگر تغییر مقطع ناگهانی در میله ایجاد شود در محل تغییر مقطع تمرکز تنش ایجاد می‌شود، تغییر مقطع معمولاً به یکی از دو صورت زیر می‌باشد



$$\rightarrow \sigma_{max} = \frac{MC}{I}$$

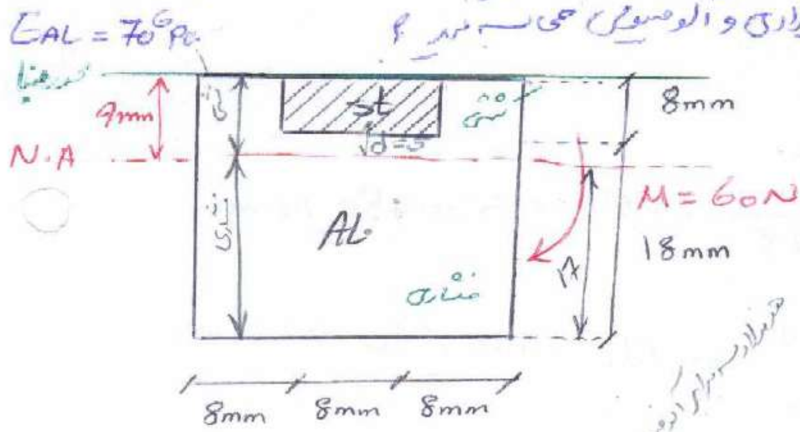
$$\rightarrow \sigma_{max} = k\,\frac{MC}{I}$$

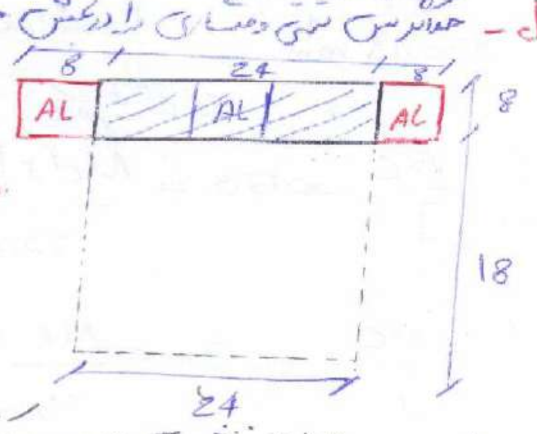
ضریب تمرکز تنش $k \begin{cases} \propto D/d \\ \propto r/d \end{cases}$

$E_{st} = 210\,GPa$

$E_{AL} = 70\,GPa$

مثال - حداکثر تنش فشاری در تیرهای فولادی و آلومینیومی را بدست آورید؟





بعد از معادل سازی مقطع نا همگن و I را محاسبه می‌نمایم

$$n = \frac{E_{st}}{E_{AL}} = \frac{210}{70} = 3 \text{ (برابر)}$$

$$\bar{Y} = \frac{(8\times 40)\times 4 + (24\times 18)\times 17}{8\times 40 + 24\times 18} = 9mm$$

$$I_Z = \frac{40\times(8)^3}{12} + (40\times 8)\times 5^2 + \frac{24\times(18)^3}{12} + (24\times 18)(8^2)$$

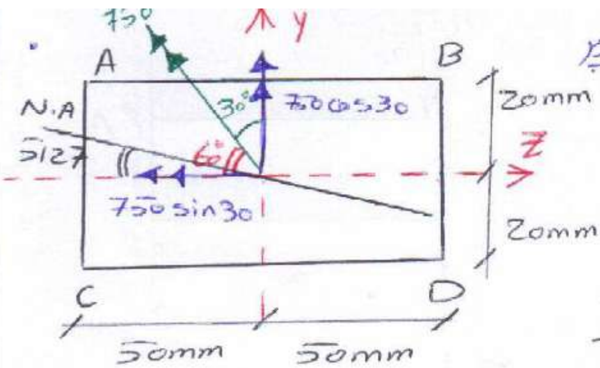
$$= 10/41 \times 10^3$$

$$st: \left\{ \sigma_{MAX}^{\text{کششی}} = \frac{3\times 60\times 9}{10/41\times 10^3} \right.$$

$$AL: \begin{cases} \sigma_{t\,max} = \dfrac{60\times 9}{10/41\times 10^3} \\ \sigma_{c\,max} = \dfrac{60\times 17}{10/41\times 10^3} \text{ تنش فشاری} \end{cases}$$

مثال: $\sigma_A = ?$ $\sigma_C = ?$

مقطع مستطیلی تیر



$$\tan\varphi = \frac{I_Y}{I_Z}\underbrace{\tan\overset{60}{\theta}}_{\sqrt{3}}$$

$$I_Z = \frac{(100)(40)^3}{12} = 0/533 \times 10^{-6}\ m^4$$

$$I_Y = \frac{(40)(100)^3}{12} = 3/33 \times 10^{-6}\ m^4$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{3/33\times10^{-6}}{0/533\times10^{-6}}\tan 60$$

$$\Rightarrow \varphi = 5/27$$

یادن مثله:
θ: زاویه M با محور Z ها
φ: زاویه تار خنثی با محور Z ها

$$\sigma_A = \frac{M_Y \cdot Z}{I_Y} - \frac{M_Z \cdot Y}{I_Z} = \frac{649/5\,(50\times10^{-3})}{I_Y} - \frac{375\times(20\times10^{-3})}{0/533\times10^{-6}} = -4/\ldots\ M$$

$$\sigma_C = \frac{M_Y \cdot Z}{I_Y} + \frac{M_Z \cdot Y}{I_Z} = \frac{649/5\,(50\times10^{-3})}{I_Y} + \frac{375\times20\times10^{-3}}{0/533\times10^{-6}} = 23/\ldots\ M$$

بارگذاری عرضی

وقتی یک تیر تحت اثر بارگذاری های مختلف قرار دارد، در مقاطع مختلف آن نیروی برشی با تیر خمشی اعمال می شود.

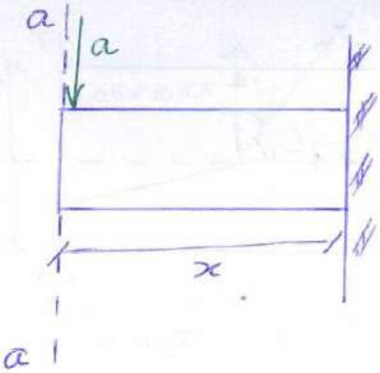
درفصل قبل تنش های ناشی از تیر خمشی M را مورد بررسی قرار دادیم و در این فصل هدف این است که تنش های ناشی از اعمال نیروی برشی بر مقطع وارد محاسبه شود و توزیع تنش برشی را در مقاطع مختلف محاسبه کنیم.

قرارداد انتخاب شده برای برش ها قرارداد استاتیکی می باشد

مثال - اگر یک تیر طره مانند شکل در نظر فرض شود مقدار برش و ممان در هر مقطع دلخواه (a-a) که به فاصله ی x از انتهای تیر واقع است برابر است با :

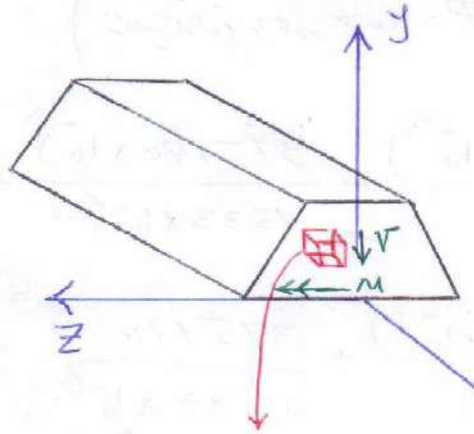
برش $V = P$

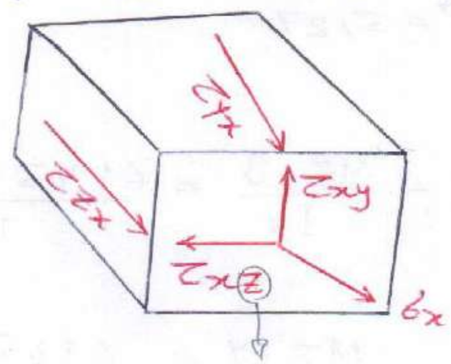
لنگر خمشی $M = P \cdot x$



اگر مقطع تیر را مطابق شکل در نظر بگیریم و المانی دلخواه در این مقطع انتخاب کنیم در این المان 3 مؤلفه تنش می‌تواند وجود داشته باشد.

2 مؤلفه تنش برشی و یک مؤلفه تنش قائم





جهت محور Z ها و عمود بر صفحه x ها

تنش ها باید شش معادله زیر را ارضا نمایند:

$1-\ \int \sigma_x \, dA = 0$

$2-\ \int \sigma_x \cdot y \, dA = 0$

$3-\ \int \sigma_x \cdot z \, dA = 0$

$4-\ \int \tau_{xy} \, dA = -V$

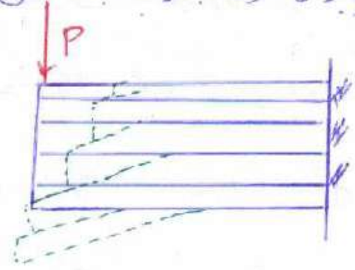
$5-\ \int \tau_{xz} \, dA = 0$

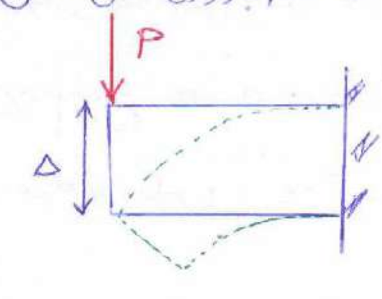
$6-\ \int \tau_{\cancel{z}y} \cdot z \cdot dA - \int \tau_{yz} \cdot y \cdot dA =$

- در روی محور I (سطح تعادل) برش افقی برابر صفر می‌باشد. تنش عمودی σ_x در اثر لنگر خمشی M ایجاد می‌شود و چنانچه نیروهای داخلی ناشی از σ_x محاسبه شود باید به لحاظ تعادل صفحه لنگری برابر M ایجاد کنند

- اما تنش‌های τ_x و τ_y ناشی از نیروی برشی اعمال شده بر مقطع می‌باشند. بنا به روش نشان موضوع

در هنگام بارگذاری عرضی، تنش‌های برشی طولی نیز ایجاد می‌شود. با توجه به شکل زیر می‌توان مشاهده کرد:





همانگونه که در شکل دیده می‌شود اگر بار P در انتهای تیر کنسول اعمال شود، الوارها به راحتی روی هم می‌لغزند و تیر به صورت شکل تغییر شکل می‌دهد. که بیانگر این است که در اثر اعمال بار P بین سطوح الوارها تنش برشی ایجاد می‌شود که چون عاملی برای مقابله با آن نداریم به راحتی باعث ایجاد تغییر شکل شده است.

اگر این الوارها را توسط میخ‌هایی به هم متصل کنیم بعد از اعمال بار P اجازه هیچ‌گونه لغزشی در الوارها داده نمی‌شود. پس در این حالت کل تنش برشی ایجاد شده توسط میخ‌ها تحمل می‌شود

بنابراین در اثر اعمال بار قائم دو نوع تنش برشی در مقطع ایجاد می‌شود یکی در راستای مماس بر مقطع و دیگری در امتداد طولی که به علت آنکه این دو تنش برشی روی دو سطح عمود بر هم اثر می‌کنند به لحاظ مقدار با هم مساوی‌اند.

تعیین برش روی یک صفحه افقی:

در اثر اعمال بار قائم تنش برشی مماس بر مقطع و تنش برشی در امتداد طول تولید می‌شود که مقدار این دو تنش با هم برابر است.

در این بخش هدف یافتن توزیع تنش برشی در امتداد قائم می‌باشد

از آنجا که این مسئله یک مسئله نامعین استاتیکی می‌باشد، علاوه بر روابط تعادل رابطه سازگاری بین تغییر مکان‌ها نیز مورد نیاز می‌باشد. از طرفی دیگر یافتن تغییر مکان‌های برشی در امتداد قائم کار مشکلی می‌باشد.

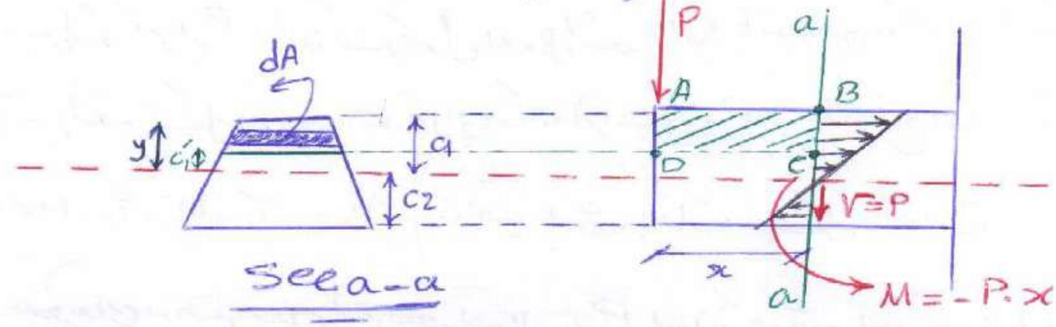
در اینجا به جای یافتن تنش برشی قائم، تنش برشی در امتداد طول یافته و از رابطه‌ی بدست آمده برای توزیع تنش برشی مماس بر مقطع استفاده می‌کنیم.

که البته این فرآیند با یک تقریب همراه می باشد که در محدوده ی کارهای مهندسی قابل قبول خواهد بود.

برای یافتن برش طولی قطعه ی A، B، C، D که بین انتهای تیر و مقطع $a-a$ می باشند

با برای نیروهای وارد بر آن، و با توجه به تغییر لنگر خمشی در مقطع $a-a$ موجود و برابر با : $M=-P.x$

می باشد تنش نرمال به صورت زیر محاسبه خواهد شد.



$$\sigma_x = \frac{M.C}{I} = \frac{(-P.x)\,y}{I}$$

نیروهای وارد بر قطعه A، B، C، D به صورت زیر می باشد

(1) نیروهای افقی (H) که در اثر تنش برشی طولی ایجاد می شود، نیروی P که عملاً سهمی از P می باشد به قطعه AD می رسد

و نیروی ناشی از توزیع تنش خمشی در ضلع BC

و برش داخلی V در مقطع BC خواهد بود

با نوشتن رابطه ی $\Sigma F_x=0$ داریم :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \int \sigma_x \cdot dA + H = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-P.x}{I}\int_{c_1}^{a} y\,dA + H = 0 \qquad Q = \bar{y}\cdot A = \int y\cdot dA$$

گشتاور اول سطح

بنابراین برای جریان برشی داریم

$$q = \tau . t = \frac{V . Q}{I}$$

I   II

Q : گشتاور اول سطح بالای مقطعی که می‌خواهیم برش را در آن محاسبه نماییم

از رابطه I و II نتیجه می‌شود که:

$$\tau . t = \frac{V . Q}{I} \Rightarrow \overbrace{\tau}^{\text{تنش برشی}} = \frac{V . Q}{I . t}$$

← ممان اینرسی نسبت به محور عمود بر امتداد برش

← ضخامت در مقطعی که می‌خواهیم تنش برشی را بدست آوریم

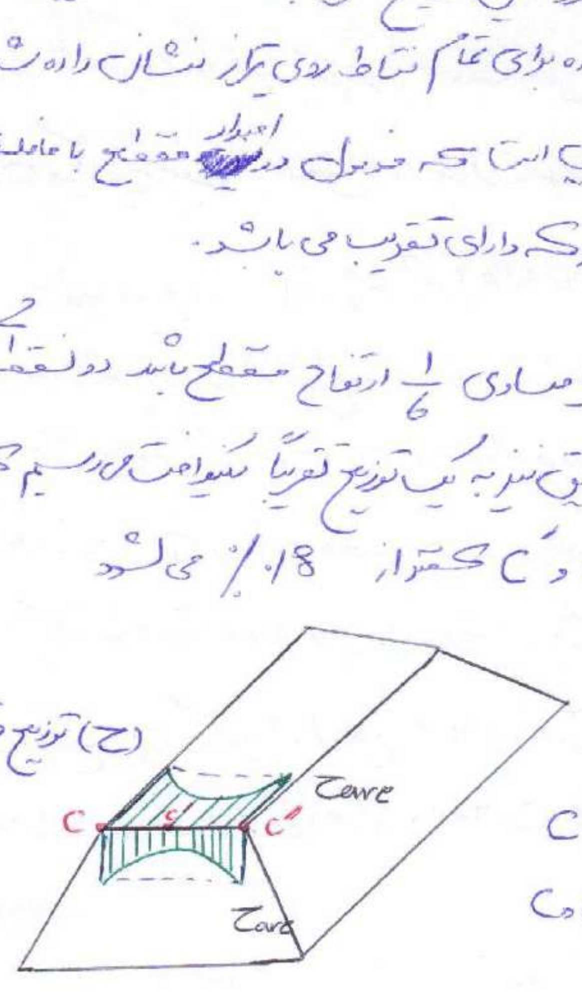
تقریبی که در بالا به آن اشاره شد: اگر مقطع ایرا در شکل بگیریم و در سطح نشان داده شده بخواهیم تنش برشی را محاسبه کنیم، همانطور که در شکل اشاره شده در این مقطع یک تنش برشی در طول و یکی دیگر در امتداد ضخامت مقطع وجود دارد

اگر در این مقطع با تئوری الاستیسیته بطور دقیق توزیع تنش برشی را بدست بیاوریم شکل آن، بصورتی خواهد شد در صورتی که با فرمول بدست آمده برای تمام نقاط روی تراز نشان داده شده تنش برشی یکسان حاصل می‌باشد که این موضوع بیانگر این است که فرمول در امتداد مقطع با عاملی مشخص از نظر ضخامت مقدار میانگین تنش برشی را بدست می‌دهد که دارای تقریب می‌باشد.

نکته: اگر در تیر مستطیلی عرض کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{6}$ ارتفاع مقطع باشد دو نقطه C و C' به هم خیلی نزدیک می‌شوند و در محاسبات دقیق نیز به یک توزیع تقریباً یکنواخت می‌رسیم که در این حالت اختلاف میان تنش برشی در نقاط C و C' کمتر از $0/8\%$ می‌شود

فرمول بدست آمده فوق که مقدار میانگین تنش برشی را می‌دهد.

(ج) توزیع دقیق تنش برشی



$C \longrightarrow \tau_{min}$

$C, C' \longrightarrow \tau_{max}$

توزیع تنش برشی ناشی از بارگذاری عرضی در مقطع یک تیر مستطیل شکل

منظور از بارگذاری عرضی ، بارگذاری می باشد که در امتداد طول یک عضو و عمود بر آن صورت می گیرد به عبارت دیگر بارگذاری ایجاد گشتاور خمشی و نیروی برشی در مقاطع مختلف می نماید .
اگر در مقطعی از یک تیر که دارای شکل مربع - مستطیل می باشد در اثر بارگذاری عرضی نیروی برشی V ایجاد شده باشد می خواهیم با استفاده از فرمول بدست آمده برای توزیع تنش برشی را در امتداد مقطع محاسبه کنیم :

$$\tau_{ave} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A} \left(\frac{c_2 - y_2}{c_2} \right)$$

بنابراین در مقاطع مستطیل شکل با توجه به فرمول فوق :

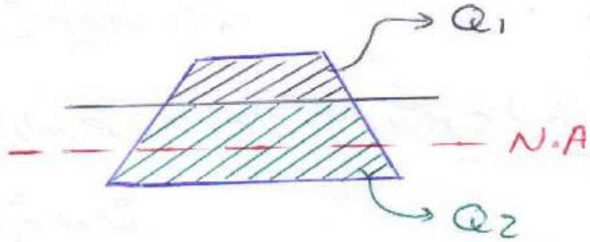
$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A}$$

هرچند در نقاط مشخص شده لبی بیشتر از این مقطع خمش داریم
بیش تنش برشی میانگین نسبت به عمق ، بصورت سهمی تغییر می کند .

نکته : همیشه در مقطع مربع مستطیل تنش برشی MAX روی محور خنثی رخ می دهد
مقدار تنش برشی در لبه ها مقطع به علت وجود سطح آزاد برابر صفر می باشد
یک دلیل دیگر برای آنکه تنش برشی در مقطع مربع مستطیل روی محور خنثی MAX می شود این است که مقدار Q در این مقطع حداکثر خواهد بود ، اما این قانون کلی نیست مثلاً در مقاطع مثلثی یا لوزی شکل تنش برشی MAX روی محور خنثی نمی باشد

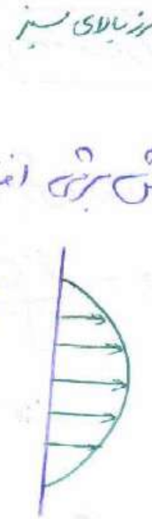
نکته : در یک مقطع Q (گشتاور اول سطح) بالای محور آن مقطع با گشتاور اول سطح (Q) پایین آن مقطع از لحاظ عددی مساوی ولی مختلف العلامت می باشند

سطحی که می‌خواهیم برش را به دست کنیم

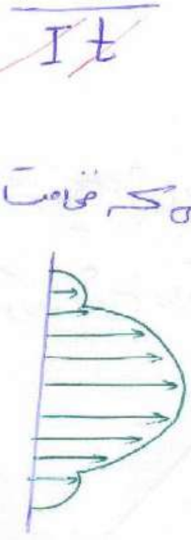


در پایین شکل $\tau = \underset{\text{مرز بالای سبز}}{\tau} \Rightarrow \frac{\cancel{V}\cdot Q_1}{\cancel{I\cdot t}} = \frac{\cancel{V}\cdot Q_2}{\cancel{I t}} \Rightarrow \boxed{Q_1 = Q_2}$

در پروفیل I شکل در صورتی که ضخامت جان را کاهش دهیم تنش برشی افزایش می‌یابد: ($\tau\uparrow$ در جان)



بصورت سهمی



بصورت سهمی

* قرارداد رسم جریان برش در مقاطع جدار نازک

اگر تیر I شکل بصورت روبرو مفروض باشد هنگامی که تیر تحت برش V واقع شود

اگر قسمتی از بال این تیر را در نظر بگیریم طبق موارد فوق یک تنش برشی طولی وجود دارد و یک تنش برشی

معادلی که ما مقدار تنش برشی طولی را محاسبه کردیم و آن را از تنش برشی معادل قرار داریم.

مقدار جریان برش در مقطع a-a از رابطه $q = \frac{VQ}{I}$ محاسبه می‌شود که در آن V نیروی

برشی، I ممان اینرسی مقطع و Q گشتاور اول سطحی می‌باشد که خارج از مقطع a-a واقع می‌شود

* جهت این جریان برش اگر عمود بر انتهای طولی رسم شود و این کار برای تمام مقاطع انجام شود شکلی

حاصل می‌شود که عملاً نحوه‌ی توزیع نیروی برشی را در مقطع نمایش می‌دهد و به آن دیاگرام جریان

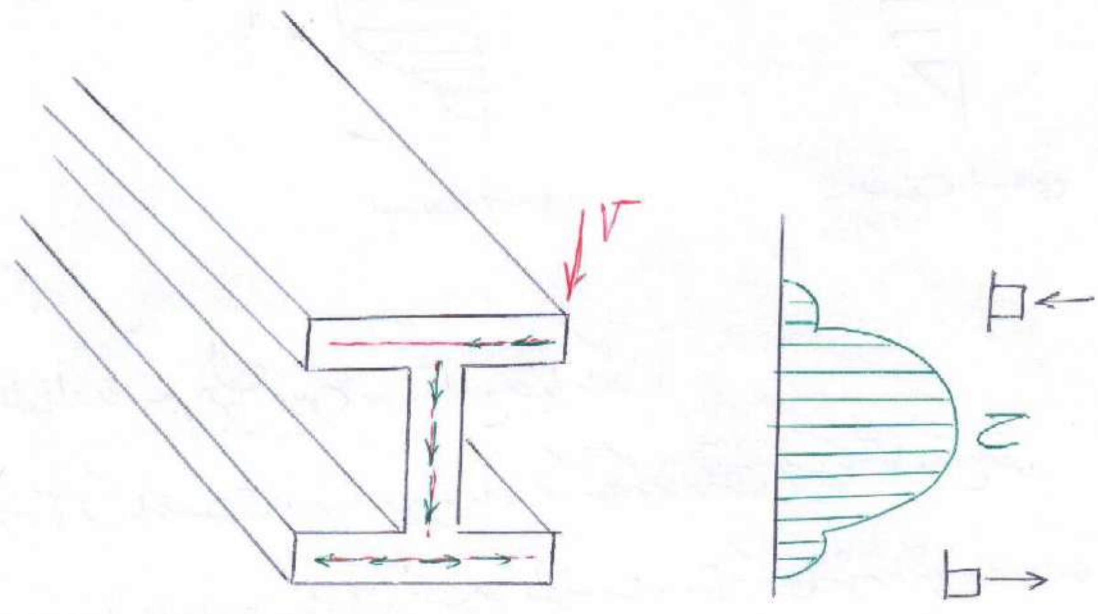
برش گفته می‌شود.

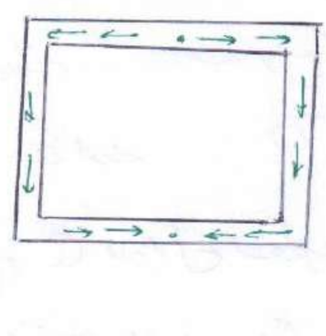
قرارداد رسم جریان برش بصورت زیر خواسته می‌شود

سطوحی که بالای محور خنثی قرار دارند جهت جریان برشی بر روی این سطوح طوری می‌باشد که جریان برش عمود بر مقطع و بصورت کششی می‌باشد.

برای خطوطی که پایین محور خنثی قرار دارند جریان برشی به گونه‌ای وارد می‌شود که عمود بر مقطع ایجاد شده و در جهت وارده نیروی فشاری بر آن می‌باشد

توجه: رسم جریان برش در مقاطع جدار نازک صادق می‌باشد که نیروی برشی در صفحه تقارن وارد شود زیرا رابطه‌ی $q=\frac{VQ}{I}$ برای حالتی اثبات می‌شود که برش در امتداد محور تقارن مقطع اعمال شده باشد.





محاسبه‌ی تنش برشی در بارگذاری عرضی در مقاطع مرکب (با دو یا چند مصالح مختلف)

اگر سطح مقطع از دو ماده با ضریب الاستیک E_1 و E_2 تشکیل شده باشد و تحت برش V قرار گرفته باشد عیناً مثل بحث خمش ماده‌ای که آن را به عنوان مبنا قرار داده و مقطع معادل را با توجه به $n = \frac{E_2}{E_1}$ معادل می‌کنیم (محاسبه می‌کنیم) سپس محل محور خنثی که از مرکز سطح می‌گذرد با توجه به مقطع معادل شده محاسبه می‌شود.

در هر مقطع که خواستیم تنش برشی را محاسبه کنیم Q (گشتاور اول سطح) مورد استفاده را از روی مقطع معادل محاسبه می‌کنیم و داریم:

$$\tau = \frac{V\,Q_e}{I_e\,t}$$

تنش ناشی از بارگذاری‌های مرکب:

اگر جسمی در حالت کلی تحت بارهای مختلفی قرار داشته باشد، اگر مقطعی از جسم انتخاب شود در این مقطع ممکن است نیروی محوری، نیروی برشی، گشتاور خمشی و گشتاور پیچشی ایجاد شود.

به عبارتی می‌توان تمام مؤلفه‌های تنش را با هم داشته باشند.

بر اساس اصل جمع آثار می‌توان تنش‌های ناشی از هر یک از نیروهای داخلی را محاسبه کرد. سپس با توجه به جهت تنش‌ها، تنش‌های هم‌نام را با هم جمع یا کم نمود.

این امر با 3 شرط زیر قابل اجرا می‌باشد:

1) بزرگترین تنش‌ها از تنش حد تناسب مصالح بیشتر نشود

2) مقطعی که در نظر می‌گیریم به محل اعمال بار نزدیک نباشد (به واسطه بحث تمرکز تنش)

3) تغییر شکل‌های ناشی از یک مؤلفه تنش در محاسبه مؤلفه‌ی دیگر تنش بی‌تاثیر باشد

جریان برشی $q = \frac{VQ}{I}$

براساس فرمول $\tau = \frac{VQ}{It}$ ، τ_{ave} را می‌دهد در یک مقطع مستطیلی تحت اثر برش قائم

V ، این تنش برشی توزیع تنش برشی در مقطع عرضی تیر مستطیلی سهمی شکل می‌باشد و تنش برشی در محل محور خنثی

MAX می‌باشد و مقدار آن 1.5 برابر تنش برشی متوسط می‌باشد $\tau_{max} = \frac{3}{2}\left(\frac{V}{A}\right)$

نکته: در مقاطعی که پهنا ثابت می‌باشد (مثل مقاطع مستطیلی شکل) برای حداکثر شدن تنش برشی باید ممان استاتیک ، حداکثر شود.

و در محل محور خنثی خواهد بود که ممان استاتیک حداکثر می‌باشد

ممان اینرسی

• در مقاطعی که پهنا تغییر می‌کند بسته به نوع مقطع می‌توانند محل تنش برشی حداکثر منطبق بر محور خنثی باشد یا نباشد

مثلا در مقاطع دایره‌ای و بیضوی محل تنش برشی حداکثر روی اقطار مقطع (که محور خنثی نیز می‌باشند) می‌باشد.

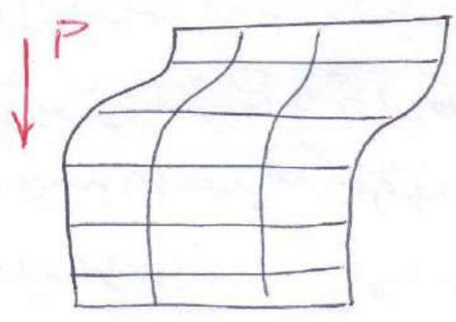
اما در مقاطع مثلثی یا لوزی شکل محل تنش برشی حداکثر بر محور خنثی مقطع منطبق نمی‌باشد

تذکر:

در تیرهای ساخته شده از دو یا چند مصالح مختلف می‌توان از رابطه $\tau = \frac{VQ}{It}$ استفاده کرد منتها به طوری که Q و I

براساس مقطع تعدیل شده اما t از پهنای واقعی (تبدیل نشده) محاسبه می‌شود.

تغییر شکل برشی ناشی از تنش‌های برشی بدین دلیل که تنش‌ها قائم بصورت زیر می‌باشد:



تغییر شکل برشی به وجود آمده در تمام المان‌هایی که از محور خنثی به یک فاصله می‌باشند یکسان خواهد بود

در نتیجه تارها به علت الزام یک بعدی سازگاری ، تعادل‌هایی وجود خواهد داشت

نکاتی که می‌توان برای تعیین تنش‌ها و جریان برشی استفاده کرد:

۱- درجاهای متقارن نسبت به صفحه تقارن جریان برشی یکسان می‌باشد

اگر محور خنثی (N.A) نیز محور تقارن باشد نقاط متقارن نسبت به این خط دارای جریان‌های برشی مخالف العلامت می‌باشند پس بر محور خنثی جریان برشی صفر می‌باشد

توجه: برای به وجود نیامدن پیچش حول محور طولی عضو تحت بار عرضی باید بار در صفحه تقارن باشد.

برای هر مقطع نقطه‌ای وجود دارد که اگر نیروی برشی (بار عرضی) به آنجا اعمال شود این پیچش به وجود نخواهد آمد پس درمقاطعی که صفحه تقارن ندارند نیز می‌توان بدون به وجود آمدن پیچش بارگذاری عرضی نمود این نقطه را اصطلاحاً مرکز برش نامند.

برای بدست آوردن محل مرکز برش باید جریان برشی در مقطع را بدست آوریم و گشتاور ناشی از بار خارجی را مساوی گشتاور ناشی از برش در مقطع قرار دهیم لنگری که هیچ نیرو در مقطع در مجموع وجود نداشته باشد

مرکز برش:

در بارگذاری نامتقارن اعضای جدار نازک برای اینکه عضو تحت اثر برش V بدون پیچش خم شود باید نیروی برشی در نقطه‌ای وارد شود که مرکز برش گفته می‌شود

در واقع مرکز برش نقطه‌ای می‌باشد که گشتاورهای پیچشی حاصل از تنش‌های برشی توزیع شده در مقطع (ناشی از V) حول آن نقطه همدیگر را خنثی می‌کنند.

توجه: به مرکز برش، مرکز پیچش هم گفته می‌شود زیرا اگر نیروی برشی در مرکز برش اثر کند مقطع به پیچش نمی‌افتد و پیچش مقطع صفر خواهد بود

- جریان‌های برشی در محل اتصال اجزای مقطع جدار نازک دارای خاصیت پیوستگی می‌باشند به گونه‌ای که جریان برشی ورودی با جریان برشی خروجی مساوی می‌باشد

مثلاً اگر المان محل تلاقی جان و بال را در یک مسیر تحت اثر برش به موازات جان در نظر بگیریم ($\frac{1}{\downarrow}$) جان / بال

با توجه به تقارن مقطع داریم:

$$\text{(جریان برشی)}\quad \underset{\text{web}}{q_w} = \underset{\text{flange}}{q_f} + q_f = 2q_f$$

$$q_w = 2q_f \Rightarrow \tau_w \times t_w = 2\tau_f \times t_f$$

جریان برشی ناشی از پیچش حتماً باید مسیر بسته هم جهت با گشتاور پیچشی اعمال شده را طی کند. (اولی)

جریان برشی ناشی از برش یک جریان بسته نمی باشد

برای مقاطعی که تنها از اعضای افقی و عمودی تشکیل شده اند می توان فاصله مرکز برش تا یک محور مشخص را از رابطه:

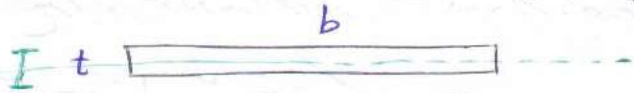
$$e = \frac{\sum I_i \bar{x}_i}{\sum I_i}$$

بطوری که I_i ممان اینرسی المان شماره i ام نسبت به تار خنثی کل مقطع می باشد و $\bar{x}_i$ فاصله مرکز سطح المان شماره i تا مبدأ محور مورد نظر می باشد.

← در محاسبه ممان اینرسی (I) در مقاطع جدار نازک به واسطه ناچیز بودن ضخامت نسبت به ابعاد دیگر برای محاسبه ممان اینرسی بخش های موازی با محور خنثی فقط ترم Ad^2 وجود دارد و ترم $\frac{1}{12}bh^3$ حذف می شود

اگر از تار خنثی فاصله داشت

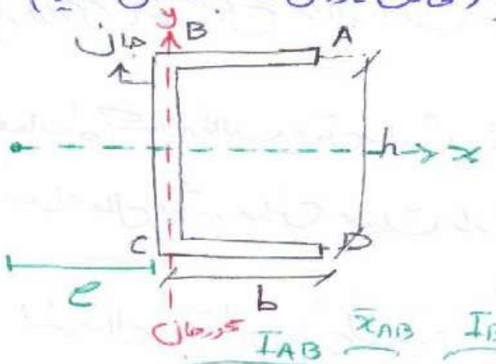
مثال -



$$I_y = \frac{1}{12}bt^3$$

← چون هر چیز کوچک به توان 3 برسد کوچک تر می شود بنابراین I_y نیز ناچیز است

مثال - در مقطع ناودانی زیر، فاصله‌ی مرکز برش تا جان ناودانی را محاسبه نمایید؟ (ضخامت ناودانی را ثابت فرض کنید)



حل:

$$e = \frac{\sum I_i \bar{x}_i}{\sum I_i}$$

$$= \frac{I_{AB} \times \bar{x}_{AB} + I_{BC} \times \bar{x}_{BC} + I_{CD} \times \bar{x}_{CD}}{I_{AB} + I_{BC} + I_{CD}}$$

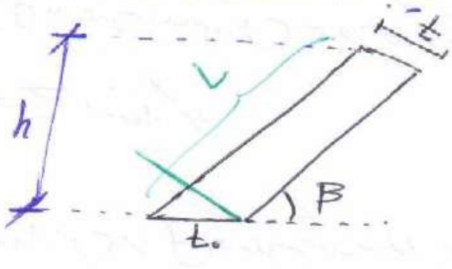
$$e = \frac{\overbrace{(bt)\left(\frac{h}{2}\right)^2}^{I_{AB}} \times \overbrace{\frac{b}{2}}^{\bar{x}_{AB}} + \overbrace{\frac{th^3}{12}}^{I_{BC}} \times 0 + \overbrace{(bt)\left(\frac{h}{2}\right)^2}^{I_{CD}} \times \frac{b}{2}}{(bt)\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{th^3}{12} + (bt)\left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{b^2 t h^2}{4}}{\frac{bth^2}{2} + \frac{th^3}{12}} = \frac{b}{2 + \frac{h}{3b}}$$

نکته: در اعضا جدار نازک، برای محاسبات جریان برش و تنش برشی باید به دو مورد زیر توجه داشت:

۱- مساحت قطعات شیب‌دار از حاصل‌ضرب طول ظاهری (h) در ضخامت آن بدست می‌آید

2- در محاسبه ممان اینرسی و Q از ضخامت واقعی عضو شیب‌دار استفاده می‌شود



$$t_0 = \frac{t}{\sin\beta}$$

$$A = h t_0$$

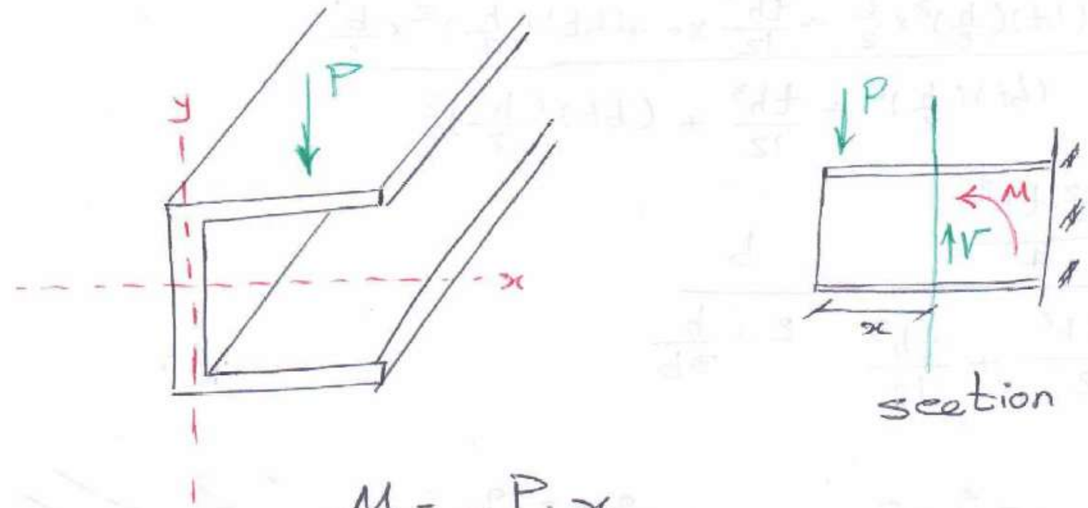
$$Q = A\bar{y} = (h t_0)\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$I = \frac{1}{3} t \cdot h^3$$

بارگذاری نامتقارن جدار نازک و محاسبه مرکز برش :

همانطور که در مطالب فوق اشاره شد، برش ایجاد شده در اثر بارگذاری عرضی در صفحه تقارن تمام عضو اعمال می‌شود در این صورت رابطه : $\tau = \frac{VQ}{It}$ برقرار است.

به عنوان مثال در مقطع ناودانی شکل زیر



$$M = -P \cdot x$$
$$V = -P$$

در اثر اعمال بار P در مقطع ناودانی، مقطع ناودانی شکل هم خم می‌شود و هم می‌پیچد و چون مقطع جدار نازک در برابر پیچش ضعیف است پیچش زیادی در آن به وجود می‌آید برای محاسبه تنش ناشی از بارگذاری عرضی نمی‌توان از رابطه $\tau = \frac{VQ}{It}$ استفاده کرد.

برای استفاده از این فرمول مطرح می‌شود که آیا در این مقطع می‌توان نقطه‌ای را پیدا کرد که اگر بار P از آن یا در امتداد آن اعمال شود پیچش نخورد؟

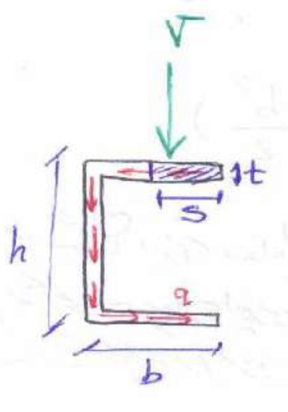
پس اصطلاحاً این نقطه را که مرکز برش گوییم، برش از آن بگذرد پیچش در مقطع ایجاد نمی‌شود.

در این راستا فرضیات زیر را می‌پذیریم :

۱- عضو باید رفتار الاستیک داشته باشد یعنی قانون هوک صادق است

۲- مقطع جدار نازک باشد یعنی ضخامتش در برابر ابعادش قابل صرف‌نظر کردن باشد (در مقاطع جدار نازک

معمولاً ابعاد وسطی را ملاک محاسبات قرار می‌دهند)



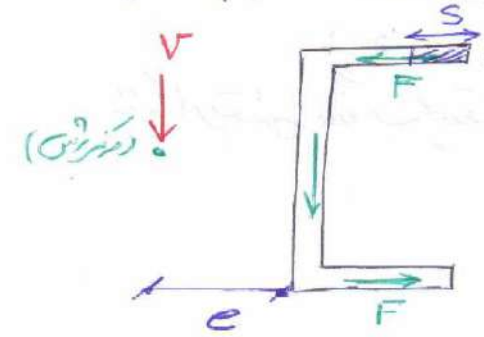
برای محاسبه‌ی مرکز برش مراحل زیر طی می‌شود:

- ابتدا با فرض حالت شکل توزیع جریان برش در مقطع رسم می‌شود
- با توجه به مثالی که در قبل حل شد (e محاسبه می‌شود)

توجه:

مرکز برش وابسته به ضخامت نیست یعنی در جواب نهایی t نباید وجود داشته باشد

برای محاسبه‌ی نیروی ایجاد شده در جهت الحاقی طول s را در آن انتخاب می‌کنیم و حتماً باید این الحاق در راستای قطعه مورد نظر انتخاب شود. بنابراین مقدار نیروی ایجاد شده در الحاق s برابر است با:



$$V \cdot e = F \cdot h$$

$$dF = q \cdot ds \longrightarrow F = \int q \cdot ds$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V(\overbrace{s \cdot t}^{A} \cdot (\frac{h}{2}))}{I}$$

بنابراین داریم:

$$F = \int_0^b \frac{V \cdot t(\frac{h}{2})}{I} \cdot s \; ds$$

$$F = \frac{Vth}{2I}\left(\frac{b^2}{2}\right)$$

پس از محاسبه‌ی نیروی محل مرکز برش (واحد برآیند)، برش اعمال شده بر مقطع را باید در نقطه‌ای قرار دهیم که پیچش هم جهت و معادل پیچش ناشی از نیروهای داخلی ایجاد کند

نکته: مرکز برش جزء مشخصات هندسی هر مقطع می‌باشد و به جنس مصالح و بار وارده هیچ وابستگی ندارد

$$V \cdot e = F \cdot h \Rightarrow V \cdot e = \frac{V \cdot t \cdot h}{2I}\left(\frac{b^2}{2}\right) \cdot h$$

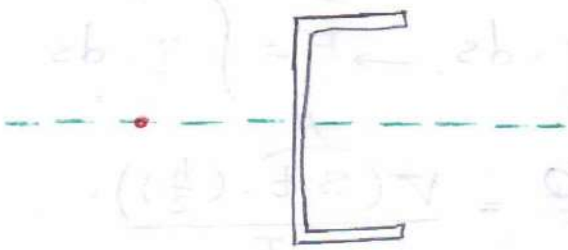
$$\hookrightarrow e = \frac{t h^2}{2I}\left(\frac{b^2}{2}\right)$$

- در محاسبه ممان اینرسی مقاطع جدار نازک از قطعاتی که موازی محور خنثی هستند فقط ترم Ad^2 وجود دارد.
- برای محاسبه ممان اینرسی در مقاطع غیر جدار نازک اگر یکی از اضلاع منطبق بر محور خنثی باشد برای محاسبه ممان اینرسی حول آن $\frac{1}{12}$ تبدیل به $\frac{1}{3}$ می‌شود.

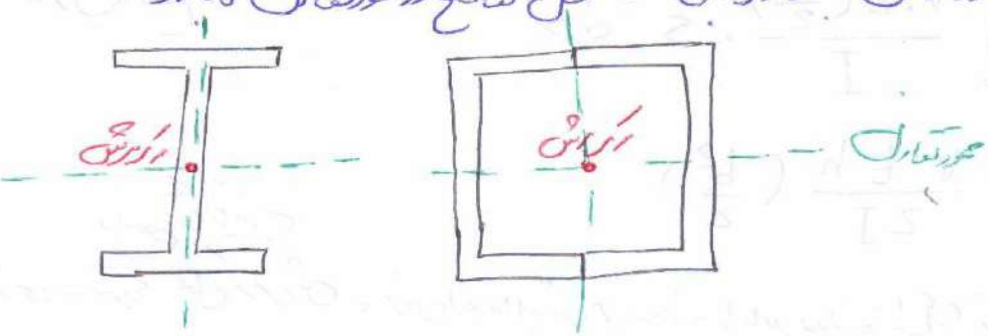
نکات محل مرکز برش

1- مقاطعی که از اتصال دو قطعه مستطیل شکل بهم ساخته شده اند مرکز برششان در محل برخورد دو مستطیل می‌باشد.

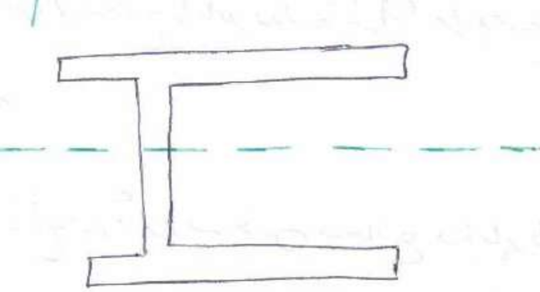
2- اگر مقطعی دارای یک محور تقارن باشد، مرکز برش لزوماً روی آن محور تقارن می‌باشد.



3- اگر مقطعی دارای دو محور تقارن باشد مرکز برش همان محل تقاطع دو محور تقارن می‌باشد.

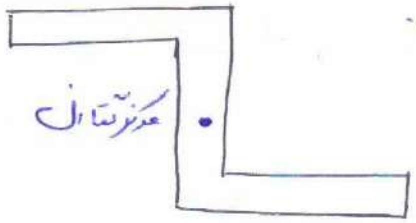


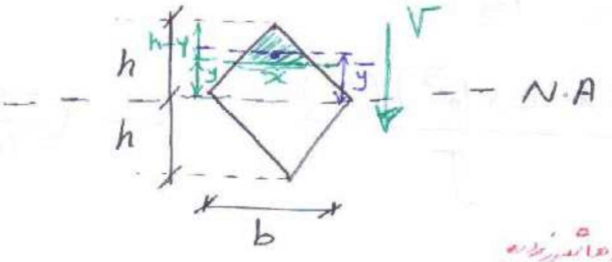
مثال:



مرکز برش به مرکز سطح نزدیک‌تر می‌شود
یعنی e نسبتاً کوچکتری دارد.

اگر جسمی دارای مرکز تقارن باشد، مرکز برش همان مرکز تقارن است.





مثال - الف - تنش برشی؟

تنش k در رابطه $\tau_{max} = k\left(\frac{V}{A}\right)$

$\bar{y}$ فاصله مرکز سطح مثلث — ممان مثلث هاشور زده

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{It} \Rightarrow {}^{*}\tau = V \cdot \frac{\left[\left(\frac{x(h-y)}{2}\right)\cdot\left(\frac{h-y}{3}+y\right)\right]}{2\left(\frac{bh^3}{12}\right)\cdot x} = \frac{V}{bh^3}(h-y)(h+2y)$$

از تشابه داریم $\Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow x = \frac{b(h-y)}{h}$

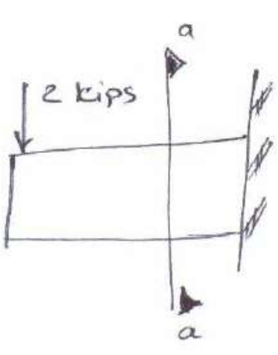
طبق ریاضیات برای محاسبه τ_{max} $\Rightarrow$ (τ مشتق $=0$) $\Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \Rightarrow$

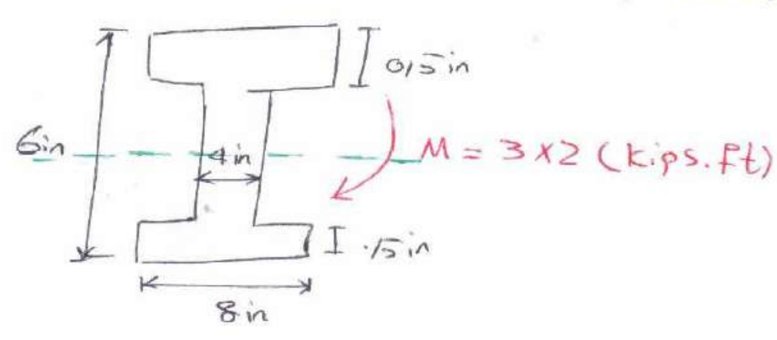
$$A \cdot \left[-h-2y+2h-2y\right] = 0 \qquad \boxed{y = h/4}$$

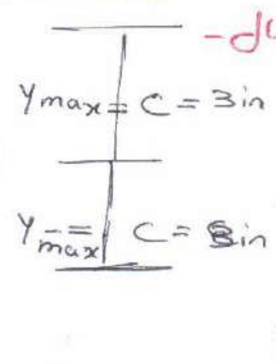
با جایگذاری $y = \frac{h}{4}$ در رابطه * $\Rightarrow \tau_{max} = \frac{V}{bh^3}\left(\frac{3h}{4}\right)\left(\frac{3h}{2}\right)$

$$= \frac{9Vh^2}{8bh^3} = \frac{9}{8}\frac{V}{A} \Rightarrow k = \frac{9}{8}$$

مثال - σ_{max} و τ_{max} ؟







حل:

$$V = -P = -2 \text{ kips}$$

$$M = -P \cdot x = -6 \,(\text{kips-ft})$$

$$I = \frac{8(6)^3}{12} - \overset{\text{تعداد}}{2} \times \left(\frac{2 \times 5^3}{12}\right) = \dots \,(\text{in}^4)$$

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \frac{(6 \times 12 \times 10^3)(3)}{I} = \dots \left(\frac{\text{Psi}}{\text{in}^2}\right)$$

$$\tau_{max} = \frac{(2 \times 10^3)\, Q}{I \cdot 4 \text{ inch}}$$

محاسبه کردیم ← I

$$Q = \underbrace{(8 \times 0.5)}_{\text{مساحت مستطیل بالا}} \times \underbrace{\overset{\bar{y}}{2.75}}_{\text{فاصله مرکز سطح مستطیل بالا تا تار خنثی}} + \underbrace{(2.5 \times 4)}_{\text{مساحت مستطیل پایین}} \times 1.25$$