بسمه تـ

جزوه

آمار و احتمالات

دانشگاه

صنعتی امیر کبیر

استاد

دکتر عربزاده

آمار و احتمال

عرب زاده

گردآورنده: مرتضی بخشعلی

احتمال یک پیشامد

می‌دانیم هر آزمایش تصادفی دارای یک فضای نمونه‌ی S است. در نظریه احتمال به هر عضو از فضای نمونه متناظر هر یک آزمایش تصادفی عددی را نسبت می‌دهیم که آن را «وزن» گویند و با W نمایش می‌دهند.

خصوصیات W عبارتند از:

1) $0 \leq W \leq 1$

2) $W \to 1$ اگر امکان وقوع این پیشامد بسیار زیاد باشد.

3) $W \to 0$ اگر امکان وقوع این پیشامد بسیار کم باشد.

4) $\sum_i W_i = 1$ (مجموع تمام وزن‌های نقاط موجود در فضای نمونه ۱ باشد.)

فضای نمونه: $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ (عضو) $\qquad n(S) = m$

وزن: $W_1, W_2, \ldots, W_m$

مثلاً: $\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m} = m\left(\frac{1}{m}\right) = 1$$

احتمال پیشامد A

احتمال پیشامد A برابر است با مجموع وزن‌های نقاط موجود در A. احتمال A را با $P(A)$ نشان می‌دهند.

$S=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ $\quad n(S)=m$

$\quad\ \ \downarrow\ \ \downarrow\qquad\ \ \downarrow$

$\quad\ w_1\ \ w_2\qquad w_m$

$A=\{a_1,a_2,a_m\}$ زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه

$P(A)=w_1+w_2+w_m$

نتیجه:

1) $0\leq P(A)\leq 1$

2) $P(\varnothing)=0$ محال‌ترین پیشامد

3) $P(S)=1$ محتمل‌ترین پیشامد

احتمال تابعی است از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای S به $[0,1]$.

$P: P(S)\longrightarrow[0,1] \Rightarrow P(A)=w \quad w\in[0,1]$

مثال/ تاس سالمی را یک مرتبه پرتاب می‌کنیم. اولاً پیشامدهای ساده را بدست آورید. ثانیاً احتمال پیشامد $A=\{1,2,5\}$ را محاسبه کنید.

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$\quad\ \downarrow\qquad\qquad\ \downarrow$

$\quad\ w_1\qquad\qquad w_6$

پیشامدهای ساده: $\{1\},\{2\},\dots,\{6\}$

سالم یعنی اینکه یا هم شانس بودن، یعنی هم وزن بودن نقاط فضای نمونه‌ای است.

$w_1=w_2=\dots=w_6$

$\sum_{i=1}^{6} w_i=1 \Rightarrow 6w=1 \Rightarrow w=\frac{1}{6}$ وزن هر پیشامد ساده

$P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

مثال/ تاس طوری اریب (ساخته) شده که وزن هر پیشامد ساده زوج، سه برابر پیشامد ساده فرد است. این تاس را یک مرتبه پرتاب می‌کنیم. اولاً احتمال پیشامدهای ساده را تعیین کنید. ثانیاً $P(A)$ را بیابید که در آن $A=\{1,2,5\}$ است.

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$\ \ w\ \ 3w\ \ w\ \ 3w\ \ w\ \ 3w$

$$\sum_{i=1}^{6} w_i = 1 \Rightarrow w + 3w + w + 3w + w + 3w = 1$$

$w = \frac{1}{12}$ وزن پیشامد ساده فرد

$3w = \frac{3}{12}$ وزن پیشامد ساده زوج

$$P(A) = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \Rightarrow P(A) \neq \frac{n(A)}{n(S)}$$

قضیه: اگر نتیجه یک آزمایش تصادفی به صورت N پیشامد هم‌شانس ممکن باشد، $n(S)=N$، آن گاه احتمال پیشامد A که در آن $n(A)=n$ باشد، $A \subseteq S$، خواهیم داشت:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال / می‌خواهیم یک عدد چهار رقمی را به تصادف از ارقام ۱، ۲، ۵، ۷، ۹ بسازیم. مطلوبست احتمال اینکه این عدد چهار رقمی، رقم تکراری نداشته باشد.

$n(S) = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = (6)^4$ تمام اعداد ۴ رقمی ممکن

A پیشامد اینکه عدد ساخته شده رقم تکراری نداشته باشد.

$n(A) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \qquad P(A) = \frac{5 \times 4 \times 3}{6^3} = \frac{10}{36}$

۲

مثال / می‌خواهیم یک گروه ۳ نفره را از بین ۵ دانشجو و ۶ دانش‌آموز انتخاب کنیم. مطلوبست احتمال آنکه این گروه شامل ۲ دانشجو و ۱ دانش‌آموز باشد.

$n(S) = \binom{11}{3} \qquad S = \{\{a,b,c\}, \{\ \}, \dots\}$

$n(A) = \binom{5}{2}\binom{6}{1} = 10 \times 6 = 60$

$$P(A) = \frac{6 \times \cancel{10}}{11 \times \cancel{10} \times 9} = \frac{2}{33}$$

یادآوری تعریف احتمال:

تعریف: پیشامد ناسازگار

پیشامد A و B را ناسازگار گوییم اگر امکان وقوع همزمان دو پیشامد به طور همزمان وجود نداشته باشد.

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

قضیه: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آن گاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اما اگر A, B ناسازگار باشند:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

نتیجه: اگر $A_1, \ldots, A_n$ ، n پیشامد ناسازگار باشند،

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

نتیجه: اگر A' متمم A باشد آنگاه:

$P(A') = 1 - P(A)$

مثال / احتمال اینکه از یک گروه ۴ نفره حداقل دو نفر ماه تولد یکسان داشته باشند چیست؟

$n(S) = 12\times12\times12\times12 = (12)^4$ — $\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$ حالت ۱۲ ۱۲ ۱۲ ۱۲

A پیشامد اینکه هیچ دو نفری ماه تولد یکسانی نداشته باشند.

$n(A) = 12\times11\times10\times9$

$P(A') = 1 - \frac{n(A)}{n(S)} = 1 - \frac{12\times11\times10\times9}{(12)^4}$

احتمال شرطی

احتمال وقوع پیشامد B به شرط اینکه پیشامد A اتفاق افتاده باشد را احتمال شرطی گوییم و با علامت $P(B|A)$ نشان داده و داریم:

$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad (P(A)>0)$

نتیجه: اگر A و B سازگار باشند، آن گاه:

$P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A)$

مثال / از ظرفی که چهار مهره سفید و سه مهره سیاه دارد، ۲ مهره را به تصادف و به طور متوالی و بدون جایگذاری برمی‌داریم. مطلوبست محاسبه احتمال پیشامد اینکه هر دو مهره سفید باشند.

A پیشامد اینکه مهره اول سفید باشد B پیشامد اینکه مهره دوم سفید باشد.

C: پیشامد اینکه هر دو مهره سفید برداشته شوند

$P(A\cap B) = ?$

$P(A\cap B) = P(A)P(A|B) \Rightarrow P(A) = \frac{4}{7}$

$P(B|A) = \frac{3}{6} \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{4}{7}\times\frac{3}{6}$

$P(C) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}$ ...

$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$

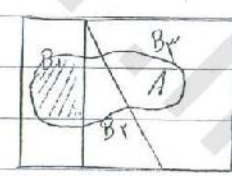
$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$

وقتی همه B_i ها دو به دو ناسازگارند

مثال / محصولات کارخانه‌ای توسط سه ماشین ۱، ۲، ۳ تولید می‌شوند. ماشین اول ۲۰٪ تولید را انجام میدهد. ماشین دوم ۳۰٪ و ماشین سوم ۵۰٪. از طرفی درصد کالای تولیدی معیوب توسط این سه ماشین به ترتیب عبارتند از ۱۵٪، ۱۰٪ و ۲٪. مطلوبست احتمال آنکه

الف / کالایی که به تصادف اختیار میشود ناسالم باشد.

ب / اگر یک کالا که به تصادف انتخاب میگردد ناسالم باشد، مطلوبست احتمال آنکه این کالا توسط ماشین اول تولید شده باشد.



B_i: پیشامد اینکه کالا توسط ماشین iام تولید شود. $i=1,2,3$

A: پیشامد اینکه کالای تولید شده ناسالم باشد.

الف / $P(A) = ?$ ب / $P(B_1|A)$

الف / $A = \bigcup_{i=1}^{3} (A \cup B_i) \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A \cap B_i)$

$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) P(A|B_i)$

$P(A|B_1) = 0.15 \quad P(A|B_2) = 0.10 \quad P(A|B_3) = 0.02$

جایگذاری $\Rightarrow P(A) = (0.2 \times 0.15) + (0.3 \times 0.1) + (0.5 \times 0.02) = 0.07$

ب / $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{0.2 \times 0.15}{0.07}$

مثال: سه ظرف مفروض است با محتویات زیر وجود دارد.

رنگ مهره	۱	۲	۳
سفید	۱	۲	۳
سیاه	۲	۱	۲
قرمز	۳	۱	۱

یک ظرف را به تصادف انتخاب می‌کنیم و یک مهره به تصادف از آن خارج میکنیم. می‌بینیم که مهره سفید است. مطلوبست احتمال آنکه این مهره از ظرف اول باشد.

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0} = \frac{1}{3}$$

$P(B_i) = \frac{1}{3} \quad (i=1,2,3)$

$P(A|B_1) = \frac{1}{2} \qquad P(A|B_2) = 1 \qquad P(A|B_3) = 0$

مثال / از ظرفی که a مهره سفید و b مهره سیاه دارد، یک مهره را به تصادف خارج کرده و بدون مشاهده رنگ این مهره را کنار می‌گذاریم. سپس از ظرف حاصل یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه

الف / مهره سفید باشد.   A: پیشامد اینکه مهره اول سفید باشد.

ب / مهره سیاه باشد.   B: پیشامد اینکه مهره اول سیاه باشد. $= A'$

C: پیشامد اینکه مهره دوم سفید باشد.

$$P(C|(\underbrace{A\cup B}_{B=A'})) = ? = \frac{P(C\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)} = P((C\cap A)\cup(C\cap B))$$

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B) = \frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$$

B_i: پیشامد اینکه ظرف iام انتخاب شود.

A: پیشامد اینکه مهرهٔ خارج شده از ظرف سفید باشد. $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i)} = \dots$$

$P(A|B_1) = \frac{1}{6} \qquad P(A|B_2) = \frac{2}{4} \qquad P(A|B_3) = \frac{3}{7}$

$$P(B_1|A) = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}}$$

مثال / سه ظرف یکسان با محتویات زیر وجود دارد.

نوع سکه	۱	۲	۳
طلا	1	2	0
نقره	1	0	2

یکی از این سه ظرف را به تصادف انتخاب کرده و یک سکه خارج می‌کنیم. مشاهده می‌شود سکه طلاست.

مطلوبست احتمال اینکه این ظرف، ظرف اول باشد. (یا سکه دیگر این ظرف نقره باشد)

B_i: پیشامد اینکه ظرف iام اختیار می‌شود   A: پیشامد طلا بودن سکه

(C∩A) و (C∩B) ناسازگارند چون A و B متمم یکدیگرند.

$$p(C|(A\cup B)) = P((C\cap A)\cup(C\cap B))$$

$$= P(A\cap C) + P(B\cap C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)$$

$$= \left(\frac{a}{a+b}\times\frac{a-1}{a+b-1}\right) + \left(\frac{b}{a+b}\times\frac{a}{a+b-1}\right) = \frac{a}{a+b}$$

تمرین / از ظرفی که A مهره سفید و B مهره سیاه دارد، ۱ مهره را به تصادف اختیار کرده بدون مشاهده رنگ آن، این مهره را با C مهره همرنگش به ظرف اضافه کرده و سپس از این ظرف یک مهره اختیار می‌کنیم، احتمال سیاه بودن مهره چیست؟

تابع متغیر تصادفی:

می‌دانیم هر آزمایش تصادفی دارای فضای نمونه‌ای S است.

تعریف: تابعی که از فضای نمونه یک آزمایش تصادفی (مجموعه S) به مجموعه اعداد حقیقی تعریف شود (مجموعه R) را تابع متغیر تصادفی گوییم و با علامت X، Y و ... نشان می‌دهیم.

در واقع داریم: $X : S \to R$

تفسیر: تابع متغیر تصادفی نوعی کدگذاری است. با این کدگذاری پیشامدها به عدد تبدیل می‌شوند.

تابع متغیر تصادفی به گونه‌ای تعریف می‌شود که مشخص کننده هدف آزمایش نیز باشد.

مثال / سکه‌ای را ۲ مرتبه پرتاب می‌کنیم. درصورتیکه هدف از این آزمایش شمارش تعداد روی سکه باشد. تابع متغیر تصادفی تعیین کنید که مشخص کننده این هدف باشد.

$S = \{TT, TH, HT, HH\}$

X: نشان دهنده تعداد روی سکه در این آزمایش

$X : S \longrightarrow \mathbb{R}$

$X(TT) = 0$

$X(TH) = 1$

$X(HT) = 1$

$X(HH) = 2$

به این تابع، متغیر تصادفی می‌گویند و با علامت X آن را نشان می‌دهند.

$x = 0, 1, 2$ برد

هر کدام از این اعداد یا هر عدد، نمایندهٔ یک پیشامد می‌باشند.

$0 \longrightarrow \{TT\} \qquad 1 \longrightarrow \{TH, HT\} \qquad 2 \longrightarrow \{HH\}$

تمرین / سکه‌ای را ۳ مرتبه پرتاب می‌کنیم. در صورتی که هدف از این آزمایش شمارش تعداد «رو»ی سکه باشد، تابع متغیر تصادفی X را چگونه تعریف کنید که مشخص کنندهٔ این هدف باشد.

$X : x = 0, 1, 2, 3$

فضای نمونه

۱- فضای نمونهٔ گسسته   ۲. فضای نمونهٔ پیوسته

اگر تعداد عناصر مجموعهٔ S متناهی یا نامتناهی قابل شمارش باشد، فضای نمونه را گسسته می‌نامیم.

اگر S نامتناهی غیر قابل شمارش باشد، فضای نمونه پیوسته است.

هر فضای نمونه‌ای که قابل شمارش باشد گسسته، و هر فضای نمونهٔ غیر قابل شمارش پیوسته است.

اعداد طول، عرض، قد، وزن و ... غیر قابل شمارش و پیوسته‌اند.

متغیر تصادفی خود دو دسته‌اند: گسسته و پیوسته.

فضای نمونه‌ای آن گسسته است   فضای نمونه‌ای آن پیوسته است

Subject:
Year: Month: Day:

تعریف: تابع احتمال متغیر تصادفی (تابع احتمال)

یک متغیر تصادفی گسسته مانند X هر کدام از مقادیر (پیشامدهای برد) خود را با احتمالی اختیار می‌کند (هر مشاهده نتیجهٔ یک پیشامد است و هر پیشامد دارای یک مقدار احتمال است.)

تابع احتمال: جدول یا فرمولی که مقادیر یک متغیر را با احتمالات مربوط به آن نشان دهد، تابع احتمال گویند و با علامت تابعی $f_X(x)$ یا $P_X(x)$ نشان می‌دهند.

مثال: سکه‌ای را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم. در صورتی که هدف از این آزمایش شمارش تعداد «رو»های سکه باشد؛

اولاً تابع متغیر تصادفی X را چگونه تعریف کنید که این هدف را نشان دهد.

ثانیاً برای این متغیر تصادفی، یک تابع احتمال به صورت جدول و فرمول بنویسید.

X نشان دهندهٔ تعداد رو $\quad x = 0,1,2,3$

$0 \rightarrow \{TTT\} \qquad 1 \rightarrow \{TTH, THT, HTT\}$

Subject:
Year: Month: Day:

$2 \rightarrow \{HHT, HTH, THH\} \qquad 3 \rightarrow \{HHH\}$

$P(X=0) = P(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$

$P(X=1) = P(\{TTH, \dots\}) = \frac{3}{8}$

$P(X=2) = P(\{HHT, \dots\}) = \frac{3}{8}$

$P(X=3) = P(\{HHH\}) = \frac{1}{8}$

x	0	1	2	3
$P(X=x) = f_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$f_X(x) = \frac{\binom{3}{x}}{2^3} \qquad x = 0,1,2,3$$

نکته: برای پرتاب n سکه خواهیم داشت:

$$f_X(x) = \frac{\binom{n}{x}}{2^n}$$ «تعداد x موفقیت در n پرتاب»

x ها را محور رسم کنیم.

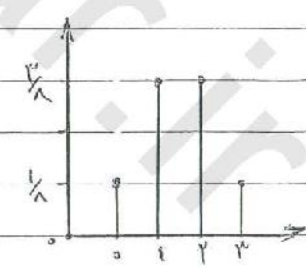
طرز رسم نمودار مستطیلی:

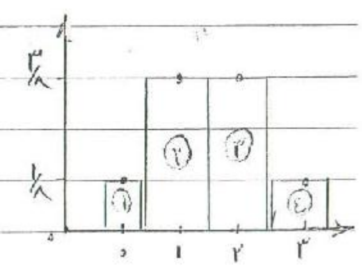
ظاهراً زوج مرتب‌های $(x, f(x))$ را در صفحه مختصات مشخص کرده و روی این نقاط مستطیل‌هایی به عرض یک و طول $f(x)$ می‌سازیم.

مثال: سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. در صورتی که متغیر تصادفی X نشان دهنده تعداد «رو» در این آزمایش باشد، نمودار میله‌ای و مستطیلی $f_X(x)$ را رسم نمائید.

$$f_X(x) = \frac{\binom{3}{x}}{2^3} \qquad x = 0, 1, 2, 3$$

x	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$





مساحت مستطیل ۱: $1 \times \frac{1}{8} = \int_{-0.5}^{0.5} \frac{1}{8}\,dx = \frac{1}{8}(0.5+0.5) = \frac{1}{8}$

مساحت مستطیل ۲: $1 \times \frac{3}{8} = \int_{0.5}^{1.5} \frac{3}{8}\,dx = \frac{3}{8}(1.5-0.5) = \frac{3}{8}$

تابع توزیع تجمعی (برای متغیرهای گسسته)

تعریف: اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه تابع توزیع تجمعی این متغیر را با علامت $F_X(x)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

مثال: متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $f_X(x) = \frac{\binom{3}{x}}{8}$ است. تابع توزیع تجمعی را برای این متغیر رسم کنید. $(x = 0, 1, 2, 3)$

x	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \rightarrow 0 \\ f(0) & 0 \le x < 1 \rightarrow \frac{1}{8} \\ f(0)+f(1) & 1 \le x < 2 \rightarrow \frac{4}{8} \\ f(0)+f(1)+f(2) & 2 \le x < 3 \rightarrow \frac{7}{8} \\ f(0)+f(1)+f(2)+f(3) & 3 \le x \rightarrow 1 \end{cases}$$

خصوصیات تابع توزیع تجمعی:

تابع $F_X(x)$ دارای خصوصیات زیر است:

1) $\forall x ,\ 0 \le F_X(x) \le 1$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \ ,\ \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

3) تابعی غیر نزولی و پیوسته‌ای است.

متغیرهای تصادفی پیوسته و تابع چگالی احتمال:

احتمال اینکه یک متغیر تصادفی پیوسته دقیقاً یکی از مقادیر خود مانند $x=a$ را اختیار کند

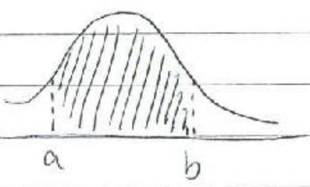
صفر است. به عبارت دیگر داریم: $P(x=a)=0$

در نتیجه احتمال در یک بازه مطرح می‌شود.

$P(a<x<b) = P(a \le x < b) = P(a < x \le b) = P(a \le x \le b)$

$P(a \le x \le b) = P(x=a) + P(x=b) + P(a<x<b)$

در چنین حالتی تابع احتمال یک تابع پیوسته یا پیوسته قطعه‌ای است که آن را چگالی احتمال گویند.



$P(a<x<b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

خصوصیات $f_X(x)$ در حالت پیوسته:

1) $\forall x ,\ f_X(x) \ge 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

3) $P(a<x<b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

سؤال: آیا تابع $f(x) = \begin{cases} 10 & 0 \le x \le \frac{1}{10} \\ 0 & \text{در بقیه} \end{cases}$ تابع احتمال است؟

1) $f_X(x) \ge 0$ ✓ 2) $\int_0^{\frac{1}{10}} 10\,dx = 1$ ✓

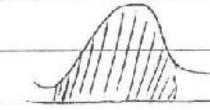
بله تابع توزیع احتمال است.

به طور کلی هر تابعی که دو شرط $f_X(x)\geq 0$ و $\sum_{x} f(x)=1$ $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)=1\right)$ را داشته باشد، تابع احتمال است.

تابع توزیع تجمعی (برای متغیرهای تصادفی پیوسته)

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، تابع توزیع تجمعی X را به صورت $F_X(x)$ نشان داده و به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_X(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$



به طور کلی هر تابع توزیع تجمعی عبارت است از:

$$F_X(x)=P(X\leq x)=\begin{cases}\sum_{t\leq x} f(t)\\ \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx\end{cases}$$

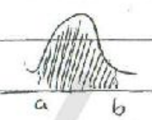
خصوصیات $F_X(x)$:

1) $0\leq F_X(x)\leq 1$ 2) $\lim_{x\to -\infty} F_X(x)=0$, $\lim_{x\to +\infty} F_X(x)=1$

در حالت پیوسته می‌توان نوشت:

$$P(a<x<b)=F_X(b)-F_X(a)$$

$$P(a<x<b)=\int_{a}^{b} f_X(x)\,dx$$



نکته: تابع توزیع تجمعی، تابع اولیه تابع احتمال است.

مثال/ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمالی به صورت $f_X(x)=\begin{cases}kx^3 & 0<x<1\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$ است. مقدار ثابت k را تعیین کنید.

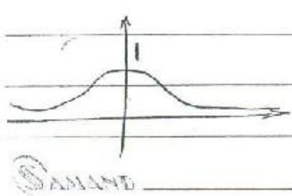
$$\int_0^1 kx^3\,dx=1 \Rightarrow \frac{1}{4}kx^4\Big|_0^1=1 \Rightarrow k=4$$

مثال/ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال به صورت $f_X(x)=\frac{k}{1+x^2}$ است. مقدار ثابت k را تعیین کنید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{1+x^2}\,dx=1 \Rightarrow k\,tg^{-1}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1 \Rightarrow k=\frac{1}{\pi}$$

تابع احتمال کوشی

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad x\in R$$



نمایش متغیرهای دو بعدی (یا بیشتر) و تابع احتمال توأم:

فرض کنید آزمایش‌های تصادفی موردنظر میباشند که آزمایش‌کننده همزمان می‌تواند دو هدف (یا بیشتر) را پیگیری کند.

مثال ۱/ از ظرفی که شامل ۵ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۶ مهره آبی است، ۳ مهره را به طور تصادفی برمی‌گزینیم.

آزمایش‌کننده می‌تواند یک هدف را دنبال کند. مثلاً تعداد مهره‌های سفید. می‌تواند همزمان دو هدف را پیگیری کند. مثلاً تعداد مهره‌های سفید و سیاه. و همچنین می‌تواند سه هدف را نیز دنبال کند. تعداد مهره‌های سفید، سیاه و آبی.

اگر هدف را با یک متغیر نشان دهیم، آنگاه می‌توانیم از چند متغیر بطور همزمان صحبت کنیم.

بطبع هرگاه X و Y دو متغیر تصادفی باشند. بطوریکه امکان وقوع این دو متغیر بطور همزمان وجود داشته باشد، آنگاه تابع احتمال وقوع همزمان این دو متغیر را تابع احتمال توأم نامیده و با علامت تابعی $f_{X,Y}(x,y)$ نشان میدهیم.

تابع احتمال توأم:

معمولاً یا فرمولی که مقادیر دو متغیر تصادفی X و Y را بطور همزمان همراه با احتمال آنها نشان دهد را تابع احتمال توأم گوییم و با علامت تابعی $f_{X,Y}(x,y)$ نشان میدهیم و در حالت گسسته:

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$$

خصوصیات تابع احتمال توأم:

1) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y$

2) $\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x,y) = 1$ یا $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

Subject:
Year: Month: Day:

نمودار توابع دو متغیره را رسم نمی کنیم. انتگرال دوگانه توابع دو متغیره حجم زیر منحنی را بدست می دهد.

مثال ۱) از ظرفی که ۵ مهره سفید، ۴ مهره و ۳ مهره آبی دارد، سه مهره را به تصادف و به طور همزمان انتخاب می کنیم. در صورتیکه متغیر تصادفی X تعداد مهره های سفید را نشان دهد، تابع احتمال X یا $f_X(x)$ را تعیین کنید.

$$f_X(x)=\frac{\binom{5}{x}\binom{7}{3-x}}{\binom{12}{3}} \qquad x=0,1,2,3$$

مثال ۲/ اگر در مثال ۱ متغیر Y را شمارشگر تعداد مهره های سیاه تعریف کنیم، تابع احتمال Y را بیابید.

$$f_Y(y)=\frac{\binom{4}{y}\binom{8}{3-y}}{\binom{12}{3}} \qquad y=0,1,2,3$$

مثال ۳/ اگر در مثال ۱ متغیر تصادفی X تعداد مهره سفید و Y را شمارشگر تعداد مهره سیاه تعریف کنیم، تابع احتمال توأم X و Y را تعیین کنید.

$$f_{X,Y}(x,y)=P(X=x,Y=y)$$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

۳ مهره $\to$ x تا سفید

۳ مهره $\to$ y تا سیاه

۳ مهره $\to$ $3-x-y$ بقیه آبی

$$f_{X,Y}=P(X=x,Y=y)=\frac{\binom{5}{x}\binom{4}{y}\binom{3}{3-x-y}}{\binom{12}{3}}$$

$$D_f=\{(x,y)\mid 0\le x+y\le 3,\ x,y\in\{0,1,2,3\}\}$$

$y \backslash x$	0	1	2	3
0	$f(0,0)$	$f(1,0)$	$f(2,0)$	$f(3,0)$
1	$f(0,1)$	$f(1,1)$	$f(2,1)$	0
2	$f(0,2)$	$f(1,2)$	0	0
3	$f(0,3)$	0	0	0

مثال ۴/ اگر در مثال ۱ متغیر X را تعداد مهره سفید، متغیر Y را تعداد مهره سیاه و متغیر Z را تعداد مهره آبی تعریف کنیم، $f_{X,Y,Z}(x,y,z)$ را تعیین کنید.

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z)=\frac{\binom{5}{x}\binom{4}{y}\binom{3}{z}}{\binom{12}{3}}$$

$$D_f=\{(x,y,z)\mid x+y+z=3,\ x,y,z\in\{0,1,2,3\}\}$$

SAMAND

می‌دانیم متغیر X به تنهایی دارای تابع احتمال $f_X(x)$ است و به همین ترتیب Y. از طرفی اگر X و Y به طور همزمان امکان وقوع داشته باشند، آنگاه دارای تابع احتمال توأم $f(x,y)$ می‌باشند.

اگر تابع $f_{X,Y}(x,y)$ در اختیار باشد آیا می‌توان $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را تعیین کرد؟

اگر $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ در اختیار باشد آیا می‌توان $f_{X,Y}(x,y)$ را تعیین کرد؟

توزیع کناری (حاشیه‌ای)

اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم $f(x,y)$ باشند، آنگاه توزیع X و Y را به تنهایی توزیع کناری گفته و به صورت زیر محاسبه می‌کنند:

$$f_X(x)=\begin{cases}\sum_y f_{X,Y}(x,y) & (\text{گسسته})\\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy & (\text{پیوسته})\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sum f_{X,Y}(x,y) & (\text{گسسته})\\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx & (\text{پیوسته})\end{cases}$$

مثال / اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}k(x+y) & 0<x,y<1\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$$

باشند:

الف) مقدار ثابت k را تعیین کنید.

ب) اگر $A=\{(x,y)\mid 0<x<\frac{1}{4},\ 0<y<\frac{1}{2}\}$ باشد، $P(A)$ را محاسبه کنید.

$$\int_0^1\int_0^1 k(x+y)\,dx\,dy=1 \Rightarrow k=1$$

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}x+y & 0<x,y<1\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$$

$$P(A)=\iint f(x,y)\,dA=\int_0^{1/2}\int_0^{1/4}(x+y)\,dx\,dy$$

Subject: Year: Month: Day:

مثال/ اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم به صورت جدول زیر باشند، توزیع های کناره ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را تعیین کنید.

$y \backslash x$	۰	۱	۲
۱	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
۲	$\frac{2}{10}$	۰	$\frac{3}{10}$

$$f_X(x) = \sum_{y=1}^{2} f_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(x,1) + f_{X,Y}(x,2)$$

$$f_X(x) = f(x,1) + f(x,2)$$

$x=0 \rightarrow f_X(0) = f(0,1) + f(0,2) =$ مجموع ستون اول جدول $= \frac{3}{10}$

$x=1 \rightarrow f_X(1) = f(1,1) + f(1,2) =$ مجموع ستون دوم $= \frac{1}{10}$

$x=2 \rightarrow f_X(2) = f(2,1) + f(2,2) =$ مجموع ستون سوم $= \frac{6}{10}$

با اضافه کردن یک سطر و یک ستون به جدول اصلی $f_X(x)$ ، $f_Y(y)$ را میتوان بدست آورد.

SAMAND

Subject: Year: Month: Day:

$y \backslash x$	۰	۱	۲	$f_Y(y)$
۱	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$
۲	$\frac{2}{10}$	۰	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$
$f_X(x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	

مثال/ اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم زیر باشند، توزیع های کناره ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را تعیین کنید.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \le x \le 1 ,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{در بقیه نقاط} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = xy + \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^1 = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{در بقیه جاها} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = xy + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \begin{cases} y+\frac{1}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{در بقیه جاها} \end{cases}$$

SAMAND

تمرین / اگر X و Y با تابع احتمال زیر تعریف شده، اولاً مقدار k را تعیین کنید. ثانیاً توزیع‌های کناره‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را تعریف کنید.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} k(x+y) & 0<x<1,\ 0<y<2 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$\int_0^1\int_0^2 k(x+y)\,dx\,dy=1 \Rightarrow k=\frac{1}{3}$$

استقلال دو متغیر تصادفی

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)$ و توزیع‌های کناره‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ باشند.

دو متغیر X و Y را مستقل آماری گویند اگر و تنها اگر:

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y) \quad \forall(x,y)$$

$X: x \longrightarrow A \quad P(A)=P(X=x)=f_X(x)$

$Y: y \longrightarrow B \quad P(B)=P(Y=y)=f_Y(y)$

$$P(A\cap B)=P(X=x,\,Y=y)=f_{X,Y}(x,y)$$

A,B مستقل اند اگر $\longrightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$

پس X و Y مستقل اند اگر $\longrightarrow f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y) \quad \forall(x,y)$

یعنی اینکه X و Y هیچ تأثیری بر هم ندارند.

مثال / اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم جدول زیر باشند، بررسی کنید که X و Y مستقل اند یا وابسته.

y\x	1	2	3	$f_X(x)$
0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$
$f_Y(y)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$	

ابتدا توزیع‌های کناره‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را تعیین می‌کنیم.

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y) \quad \forall(x$$

$$f(1,0)\overset{?}{=}f_X(1)\,f_Y(0) \Rightarrow \frac{1}{10}\neq\frac{4}{10}\times\frac{3}{10}$$

مثال: اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال زیر باشند، بررسی کنید که X و Y مستقل اند یا وابسته:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}x(1+3y^2) & 0 \le x \le 2 \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{1}{4}x(1+3y^2)\,dy = \frac{1}{4}x \times 2 = \frac{1}{2}x \qquad 0 \le x \le 2$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^2 \frac{1}{4}x(1+3y^2)\,dx = \frac{1}{2}(1+3y^2) \qquad 0 \le y \le 1$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+3y^2) & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) \overset{?}{=} f_X(x)\,f_Y(y)$$

$$\xrightarrow{?} \quad = \frac{1}{2}x \times \frac{1}{2}(1+3y^2) = \begin{cases} \frac{1}{4}x(1+3y^2) & 0 \le x \le 2 \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

X و Y مستقل اند.

مثال: اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم زیر باشند، بررسی کنید X و Y مستقل اند یا وابسته.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = xy + \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^1 = x + \frac{1}{2} \qquad 0 \le x \le 1$$

$$f_X(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y+\frac{1}{2} & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x)\,f_Y(y) = \begin{cases} (x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2}) & 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases} = \begin{cases} xy + \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{4} \\ 0 \end{cases}$$

X و Y مستقل نبوده و وابسته اند.

Subject: Year: Month: Day:

تابع احتمال شرطی:

$$P(Y=y \mid X=x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = f_{Y|X}(y|x)$$

اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)$ و توابع کناری $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ باشند آنگاه تابع احتمال شرطی $Y=y$ در صورتیکه $X=x$ اتفاق افتاده باشد را با علامت $f_{Y|X}(y|x)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \qquad f_X(x)>0$$

تابع احتمال شرطی [illegible] است.

نکته: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_{Y|X}(y|x)$

حال اگر X و Y مستقل باشند داریم: $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$

Subject: Year: Month: Day:

مثال / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال زیر باشند:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & x=0,1 \quad y=0,1,2 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

الف / مقدار ثابت k را تعیین کنید.

ب / تابع احتمال شرطی $f_{Y|X=0}(y|0)$ و $f_{Y|X=1}(y|1)$ را تعیین کنید.

ج / بررسی کنید X و Y مستقل اند یا وابسته.

y \ x	0	1
0	$0 \to 0$	$k \to 1/9$
1	$k \to 1/9$	$2k \to 2/9$
2	$2k \to 2/9$	$3k \to 3/9$

$9k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{9}$

یا

$\sum_{y=0}^{2}\sum_{x=0}^{1} k f_{X,Y}(x,y) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{9}$

y \ x	0	1	$f_X(x)$
0	0	1/9	1/9
1	1/9	2/9	3/9
2	2/9	3/9	5/9
$f_Y(y)$	3/9	6/9	

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم زیر باشند، تابع احتمال شرطی $f_{Y|X=\frac{1}{4}}(y|\frac{1}{4})$ را محاسبه کنید.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x+y & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases} \qquad f_{Y|X}(y|x)=\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}$$

$$f_{Y|X=\frac{1}{4}}(y|\tfrac{1}{4})=\frac{f_{X,Y}(\frac{1}{4},y)}{f_X(\frac{1}{4})}=\frac{\frac{1}{4}+y}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} \qquad 0\le y\le 1$$

Subject:
Year: Month: Day:

$$1)\ f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \Rightarrow f_{Y|X=0}(y|0)=\frac{f_{X,Y}(0,y)}{f_X(0)}=3f_{X,Y}(0,y)$$

$$2)\ f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|0}(y|0)=3f_{X,Y}(0,y) \qquad y=0,1,2$$

y	0	1	2
$f_{Y\|X=0}(y\|0)$	0	$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{9}$

$$f_{Y|X=1}(y|1)=\frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)}=\frac{9}{4}f_{X,Y}(1,y)$$

$$f_{Y|1}(y|1)=\frac{3}{2}f_{X,Y}(1,y) \qquad y=0,1,2$$

y	0	1	2
$f_{Y\|1}(y\|1)$			

Subject:
Year: Month: Day:

تعیین تابع احتمال برای تابعی از یک متغیر تصادفی (انتقال متغیر تصادفی)

سؤال: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال معلوم $f_X(x)$ است. می‌خواهیم تابع احتمال متغیر تصادفی Y را تعیین کنیم ($f_Y(y)=?$) که در آن Y تابعی از X است. به عبارت دیگر:

$$Y=g(X)$$

مثلاً $Y=5X+1$ ، $Y=X^2$ ، $Y=e^X$ و ...

مثال‌های زیر نمونه‌ای از این گونه مسائل را در حالت متغیرهای گسسته نشان می‌دهد.

مثال ۱: متغیر تصادفی X که نشان دهنده عدد روی یک تاس می‌باشد، دارای تابع احتمال زیر است:

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

تابع احتمال متغیر تصادفی Y که $Y=X^2$ است را تعریف کنید. ($f_Y(y)=?$)

y	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶
$f_Y(y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$x=1 \rightarrow y=1$
$x=2 \rightarrow y=4$
⋮
$x=6 \rightarrow y=36$

SAMAN

Subject:
Year: Month: Day:

در حالت گسسته $f_Y(y)=P(Y=y)$

$f_Y(1)=P(Y=1)=P(X=1)=\frac{1}{6}$

$f_Y(4)=P(Y=4)=P(X=2)=\frac{1}{6}$

⋮

$f_Y(36)=P(Y=36)=P(X=6)=\frac{1}{6}$

در واقع این مثال نشان می‌دهد که یک تاس معمولی با اعداد ۱ تا ۶، معادل تاسی با ۶ وجه با مجذور اعدادی که روی وجوه آن نوشته شده باشد، است.

مثال: متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر است.

x	۲-	۱-	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

تابع احتمال متغیر $Y=X^2$ را تعیین کنید.

Y تابعی غیر یک به یک از X است.

SAMAN

$Y = X^2$

$$\begin{cases} x=-2 \longrightarrow y=4 \\ x=2 \longrightarrow y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1 \longrightarrow y=1 \\ x=1 \longrightarrow y=1 \end{cases}$$

$$x=0 \longrightarrow y=0$$

$$x=3 \longrightarrow y=9$$

y	0	1	4	9
$f(y)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$f_y(0) = f(y=0) = P(X=0) = \frac{2}{8}$$

$$f_Y(1) = P(Y=1) = P(X=-1) + P(X=1) = f_X(-1) + f_X(1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$f_Y(4) = P(Y=4) = P(X=2) + P(X=-2) = f_X(2) + f_X(-2) = \frac{3}{8}$$

$$f_Y(9) = P(Y=9) = P(X=3) = f_X(3) = \frac{1}{8}$$

۱۲

تغییر متغیر خطی را نشان می‌دهد که $Y=aX+b$ یا Y یک تابع خطی از X باشد

(تابع Y یک تابع یک به یک است.)

قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد (X گسسته یا پیوسته)، آنگاه

تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=aX+b$ که در آن a و b دو مقدار ثابت اند (یا Y یک تابع

خطی) برابر است با:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{در حالت گسسته} \\ \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{در حالت پیوسته} \end{cases}$$

اثبات: حالت اول: فرض کنید X گسسته است.

$$f_Y(y) = P(Y=y) = P(aX+b=y) = P\left(\frac{y-b}{a} = X\right)$$

$$= f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad \boxtimes$$

حالت دوم: فرض کنید X پیوسته باشد.

تابع توزیع تجمعی

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX+b \leq y) = P(aX \leq y-b)$$

Subject:
Year: Month: Day:

به طوری که: $y = g(x) \iff x = w(y)$

آنگاه $f_Y(y)$ برابر است با:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(w(y)) & \text{در حالت گسسته} \\ f_X(w(y))\,|J| & \text{در حالت پیوسته} \end{cases}$$

که در آن $J = w'(y) = \frac{dx}{dy}$ و J را «ژاکوبین انتقال» می‌گویند.

در مثال قبل / $y = ax + b \iff x = \frac{y-b}{a} = w(y)$

$$\left(w'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{a} \right)$$

اثبات: در حالت گسسته:

$$f_Y(y) = P(Y=y) = P(g(X)=y) = P(X = w(y)) = f_X(w(y))$$

در حالت پیوسته:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$$

یکنوا: صعودی: جهت نامساوی حفظ می‌شود
نزولی: جهت نامساوی عوض می‌شود

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

$$F_Y(y) \begin{cases} a>0: & P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ a<0: & P\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{cases}$$

نکته: $P(X > \alpha) + P(X \leq \alpha) = 1$

$$F'_Y(y) = \begin{cases} a>0: & \frac{1}{a} F'_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ a<0: & \frac{-1}{a} F'_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ \frac{-1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

قضیه زیر حالتی را نشان می‌دهد که $Y = g(X)$ و $g(X)$ یک تابع یک به یک از X است.

قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی (گسسته یا پیوسته) با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = g(X)$ که در آن $g(X)$ یک انتقال یک به یک است

SAMAND

مثال: متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر است:

$$f_X(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \qquad x=1,2,3,\dots$$

تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=3X+1$ را تعیین کنید. $(f_Y(y)=?)$

$$y=3X+1 \Rightarrow X=\frac{y-1}{3}=w(y)$$

$$f_Y(y)=f_X\left(\frac{y-1}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{y-1}{3}-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{y-4}{3}}$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{y-4}{3}} \qquad y=4,7,10,\dots$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \to y=4 \\ x=2 \to y=7 \\ x=3 \to y=10 \\ \quad\vdots \end{array}\right\}$$

مثال: در مثال قبل تابع احتمال $Y=X^2$ را تعیین کنید.

$Y=X^2$ در دامنه $x=1,2,\dots$ یک به یک است.

$$y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}=w(y)$$

$$f_Y(y)=f_X(w(y))=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{y}-1} \qquad y=1,4,9,\dots$$

رنگ	ظ۱	ظ۲	ظ۳
سفید	۱	۳	۲
سیاه	۲	۱	۳
قرمز	۳	۲	۴

مثال: سه ظرف شامل مهره‌های رنگی
یکی از این سه ظرف را به تصادف انتخاب می‌کنیم
یک مهره از آن خارج می‌کنیم. احتمال اینکه
این ظرف، ظرف اول باشد

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / متغیر تصادفی X تابع احتمال زیر را داراست:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = X^2$ را تعیین کنید.

با توجه به دامنه x تابع $Y = X^2$ یک به یک است.

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} = w(y)$$

$$J = w'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y) = f_X(w(y))\,|J| = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} & y > 0 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

اگر به جواب بدست آمده شک کردیم، باید ببینیم حاصل انتگرال آن یک میشود یا خیر.

مثال / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال به صورت

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x e^{-x^2} & x \geq 0 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

است. تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = X^2$ را تعیین کنید. ($f_Y(y) = ?$)

AMAND

Subject:
Year: Month: Day:

با توجه به دامنه X تابع $Y = X^2$ یک به یک است.

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y} = w(y)$$

$$\frac{dx}{dy} = w'(y) = J = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(2\sqrt{y} \times e^{-y}\right)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y \geq 0 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

تفضیه زیر حالت خاصی را نشان میدهد که تابع $Y = g(X)$ یک به یک نیست.

تفضیه ۶ اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = X^2$ (Y یک به یک نیست چون مقادیر X مشخص نیست) برابر است با:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y}) \right)$$

اثبات:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$$

$$= P(|x| \leq \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y})$$

AMAND

$= F_X(+\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ مشتق

$F'_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} F'_X(+\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} F'_X(-\sqrt{y})$

$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \right)$

قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=|X|$ (Y یک به یک نیست) برابر است با:

$f_Y(y) = f_X(-y) + f_X(y)$

اثبات: $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(|X| \le y)$

$F_Y(y) = P(-y \le x \le y) = F_X(y) - F_X(-y)$

$F'_Y(y) = F'_X(y) + F'_X(-y) \Rightarrow f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y)$

قضیه زیر حالت کلی را نشان می‌دهد که $y=g(x)$ غیر یک به یک است اما می‌توان آن را به k افراز یک به یک تقسیم نمود.

قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته و با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=g(x)$ که در آن $g(x)$ یک تابع غیر یک به یک است. بطوری که بتوان آن را به k افراز یک به یک نسبت به متغیر X تقسیم نمود داشته باشیم

$y = u_1(x_1) \iff x_1 = w_1(y)$

$y = u_2(x_2) \iff x_2 = w_2(y)$

$\vdots$

$y = u_k(x_k) \iff x_k = w_k(y)$

آنگاه تابع احتمال $Y=g(x)$ برابر است با:

$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} f_X(w_i(y)) \, |J_i| \qquad J_i = \frac{dx_i}{dy} = w'_i(y)$

تذکر: در قضیه قبلی حالت خاصی از این قضیه اند. حتماً $k=2$ باشد.

مثال / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال به صورت جدول زیر است.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$f(-3)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$

$\sum_x f_X(x)=1$. تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=X^2$ را تعیین کنید. ($f_Y(y)=?$)

واضح است که تابع $Y=X^2$ یک به یک نیست (با توجه به دامنهٔ X ($x=-3,\dots,4$)).

$y=x^2$ $\quad x=3$ یا $-3 \longrightarrow y=9$

$x=2$ یا $-2 \longrightarrow y=4$

$x=1$ یا $-1 \longrightarrow y=1$

$x=0 \longrightarrow y=0$

$x=4 \longrightarrow y=16$

y	0	1	4	9	16
$f_Y(y)$	$f_X(0)$	$f_X(-1)+f_X(1)$	$f_X(2)+f_X(-2)$	$f_X(3)+f_X(-3)$	$f_X(4)$

$f_Y(0)=P(Y=0)=P(X=0)=f_X(0)$

$f_Y(1)=P(Y=1)=P(X=-1)\overset{\text{یا}}{+}P(X=1)=f_X(-1)+f_X(1)$

مثال / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمالی به صورت زیر است.

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & -1\leq x\leq 2\\ 0 & \text{در سایر جاها}\end{cases}$$

تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=X^2$ را تعیین کنید.

Y با توجه به مقادیر X یک به یک نیست.

$$\left|\frac{dx}{dy}\right|=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$$

$$\begin{cases}x=-\sqrt{y} & -1<x<0\\ x=+\sqrt{y} & 0<x<1\\ x=+\sqrt{y} & 1<x<2\end{cases}$$

$-1<x<1 \Rightarrow 0<y<1$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(-\sqrt{y})+f_X(\sqrt{y})\right) & 0<y<1\\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(0+f_X(\sqrt{y})\right) & 1<y<4\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$$

Subject:
Year: Month: Day:

تمرین / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال بصورت زیر است.

$$f_X(x) = \begin{cases} k & -1<x<2 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

اولاً مقدار ثابت k را تعیین کنید. ثانیاً تابع احتمال متغیر $Y=X^2$ را تعیین کنید.

Subject:
Year: Month: Day:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) & 0<y<1 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{3}\right) & 1<y<4 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{y}} & 0<y<1 \\ \frac{1}{6\sqrt{y}} & 1<y<4 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

تمرین ۱/ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال بصورت زیر است.

$$f_X(x)=\begin{cases} kx(1-x) & 0<x<1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

اولاً مقدار K را تعیین کنید. ثانیاً تابع احتمال $Y=X^2$, $Y=3X+1$ را بیابید.

امید ریاضی expected value

برای هر متغیر تصادفی مانند X با تابع احتمال $f_X(x)$ عددی را تعریف می‌کنیم که به آن امید ریاضی می‌گویند و دارای تعریف زیر است:

امید ریاضی:

اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال معلوم $f_X(x)$ باشد، آنگاه امید ریاضی متغیر تصادفی که با علامت $E(X)$ نشان داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E(X)=\begin{cases} \sum_x x\, f_X(x) & \text{گسسته} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx & \text{پیوسته} \end{cases}$$

فرمول ۱

تذکر: امید ریاضی هر متغیر تصادفی، عددی ثابت و منحصر به فرد است.

تذکر ۲: امید ریاضی دارای واحد است و همان واحد متغیر تصادفی را دارا می‌باشد.

مثال / تاسی را یک مرتبه پرتاب میکنیم. درصورتیکه متغیر تصادفی X نشان دهندهٔ عدد روی تاس باشد، امید ریاضی این متغیر را تعیین کنید.

X :	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f_X(x)$:	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X)=\sum_{x=1}^{6} x f_X(x) = 1\left(\frac{1}{6}\right)+2\left(\frac{1}{6}\right)+\dots+6\left(\frac{1}{6}\right)=3.5$$

انتظار میرود که اگر یک تاس سالم را یک مرتبه پرتاب کنیم، عدد ۳.۵ مشاهده شود. یعنی در عمل اگر تاس سالم باشد و به دفعات مکرر پرتاب شود، انتظار میرود معدل اعداد مشاهده شده به ۳.۵ نزدیک شود.

مثال / متغیر تصادفی X نشان دهندهٔ طول عمر یک نوع لامپ برحسب ساعت می‌باشد و دارای تابع احتمالی بصورت زیر است. اولاً مقدار ثابت k را محاسبه کنید، ثانیاً $E(X)$ را حساب کنید.

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{k}{x^3} & x \geq 1000 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$\int_{1000}^{+\infty} \frac{k}{x^3}\,dx = 1 \Rightarrow k=2000000$$

$$E(X)=\int_{1000}^{+\infty} x \cdot \frac{\overset{2000000}{k}}{x^3}\,dx = 2000 \text{ ساعت}$$

انتظار میرود که یک لامپ از این نوع ۲۰۰۰ ساعت دوام داشته باشد. در عمل، اگر تعدادی از این لامپ‌ها انتخاب و معدل طول عمر آنها محاسبه شود، انتظار میرود این عدد به ۲۰۰۰ نزدیک باشد.

مثال / متغیر X دارای تابع احتمال زیر است. امید ریاضی X را پیدا کنید.

$$f_X(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad x=1,2,3,\dots$$

$$E(X)=\sum_{x=1}^{\infty} x f(x) = 1(1/2)+2(1/4)+3(1/8)+\dots$$

$$E(X)=1(1/2)+2(1/4)+\dots$$

$$\frac{1}{2}E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+\dots$$

$$\frac{1}{2}E(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=\frac{1/2}{1-1/2}=1 \Rightarrow E(X)=2$$

تذکر / اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه امید ریاضی هر تابعی از X مانند $g(X)$ برابر است با:

$$E(g(X))=\begin{cases} \sum_x g(x) f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx \end{cases}$$

Subject: Year: Month: Day:

مثال / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ است. مطلوبست محاسبه $E(X)$ ، $E(X^2)$.

$E(X^2)=E(g(X)) \Rightarrow g(x)=x^2$

$E(X)=\int_0^{+\infty} x f_X(x)\,dx=\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx \overset{?}{=} 1$

یکبار جزء به جزء

$E(X^2)=\int_0^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx=\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx \overset{?}{=} 2$

دو بار جزء به جزء

توجه: اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)$ باشند آنگاه

امید ریاضی هر تابع از X و Y مانند $g(x,y)$ برابر است با:

$$E(g(X,Y))=\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\ \sum_x \sum_y g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y) \end{cases}$$

مثال / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x+y & 0\leq x,y\leq 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$ باشند، مطلوبست محاسبه $E(X)$ ، $E(Y)$ ، $E(XY)$.

SAMAND

Subject: Year: Month: Day:

$E(X)=\int_0^1\int_0^1 x(x+y)\,dx\,dy=\frac{7}{12}$

$g(x,y)=x$

$E(Y)=\int_0^1\int_0^1 y(x+y)\,dx\,dy=\frac{7}{12}$

$g(x,y)=y$

$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy=\frac{1}{3}$

خواص امید ریاضی:

۱- اگر $g(x)$ و $h(x)$ توابعی از متغیر تصادفی X باشند، آنگاه:

$E(g(X)\pm h(X))=E(g(X))\pm E(h(X))$

۲- اگر a و b دو عدد ثابت باشند، آنگاه:

$E(aX+b)=aE(X)+b$

نتیجه: اگر $a=0$ باشد $E(b)=b$

نتیجه: اگر $b=0$ باشد $E(aX)=aE(X)$

SAMAND

۳- اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند آنگاه:

$E(XY) = E(X)E(Y)$

اثبات: با توجه به تعریف امید ریاضی داریم:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

چون X و Y مستقل‌اند پس $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ است. در نتیجه:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy = E(X)E(Y) \quad \boxtimes$$

۴- اگر $g(X,Y)$ و $h(X,Y)$ توابعی از متغیرهای تصادفی X و Y باشند آنگاه:

$E(g(X,Y) \pm h(X,Y)) = E(g(X,Y)) \pm E(h(X,Y))$

معرفی چند امید ریاضی خاص:

در این قسمت به معرفی چند امید ریاضی خاص خواهیم پرداخت که در کاربرد مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

۱- میانگین ۲- واریانس ۳- انحراف معیار ۴- کوواریانس ۵- ضریب همبستگی

میانگین:

اگر در فرمول ۱ تابع $g(X)$ را به صورت $g(X) = X$ تعریف کنیم، مقدار امید ریاضی این تابع، میانگین می‌گوئیم و با علامت μ یا μ_X نشان داده و می‌نویسیم:

میانگین $= \mu = \mu_X = E(X)$

مثال: اگر متغیر X که مشاهده عدد روی تاس باشد، میدانیم $E(X) = 3.5$ است. به عبارت دیگر

میانگین $= \mu = 3.5$

تذکر: میانگین مشخص کننده محل تمرکز داده‌ها یک متغیر تصادفی است. (یک جامعه آماری)

تذکر: میانگین میتواند هر مقداری را اختیار کند $\mu = 0$ ، $\mu < 0$ ، $\mu > 0$

Subject:
Year: Month: Day:

واریانس

اگر در فرمول ۱ تابع $g(x)$ را بصورت $g(x)=(x-\mu)^2$ اختیار کنیم، آن گاه امید ریاضی

این تابع را با علامت σ^2 یا σ_x^2 یا $Var(X)$ نشان داده و آنرا واریانس متغیر X می‌نامیم

به عبارت دیگر واریانس عبارت است از

$$\text{واریانس} = \sigma^2 = Var(X) = E(X-\mu_x)^2$$

تذکر: واریانس مشخص کننده میزان پراکندگی مقادیر یک متغیر نسبت به میانگین است.

تعریف ـ فرمول محاسباتی واریانس:

واریانس متغیر تصادفی X برابر است با: $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

$$\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

اثبات:

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) \underbrace{- 2\mu E(X)}_{-2\mu^2} + \mu^2$$

AMAND

Subject:
Year: Month: Day:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

نکته: $E(X^2) \geq (E(X))^2$

انحراف معیار:

جذر مثبت واریانس را انحراف معیار می‌گوییم و با علامت σ یا σ_x نشان می‌دهیم.

نکته: هر متغیر تصادفی مانند X همواره سه عدد مهم دارد: μ، σ، σ^2.

مثال ۱/ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال به صورت $P_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ است. مطلوب است

محاسبه μ، σ و σ^2 برای این متغیر

$E(X)=1$, $E(X^2)=2$

$\mu=1$ $\quad \sigma^2 = E(X^2)-\mu^2 = 2-1 = 1 \Rightarrow \sigma^2=1 \Rightarrow \sigma=1$

کوواریانس

اگر در فرمول مشترک ۲ تابع $g(x,y)$ را بصورت زیر تعریف کنیم

AMAND

$g(X,Y) = (X-\mu_x)(Y-\mu_y)$

آن گاه امید ریاضی این تابع را کوواریانس گوییم و با علامت σ_{xy} یا $Cov(X,Y)$ نشان میدهیم.

$\sigma_{xy} = Cov(X,Y) = E\left((X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right)$

قضیه: فرمول محاسبه کوواریانس:

کوواریانس دو متغیر X و Y برابر است با

$\sigma_{xy} = E(XY) - \mu_x \mu_y$

$\sigma_{xy} = E(XY) - E(X)E(Y)$

نتیجه: اگر X و Y مستقل باشند، $\sigma_{xy} = 0$ است. عکس این مطلب برقرار نیست چون ممکن است در عین صفر بودن σ_{xy}، X و Y وابسته باشند.

نتیجه ۲: اگر $\sigma_{xy} \neq 0$ باشد، X و Y وابسته اند.

۱۷

ضریب همبستگی

اگر X، Y دو متغیر تصادفی باشند، ضریب همبستگی این دو متغیر با علامت ρ یا $\rho(X,Y)$ نشان میدهند و برابر است با:

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\text{کوواریانس}}{(\text{انحراف معیار } X)(\text{انحراف معیار } Y)}$$

σ_{xy}: >0، <0، $=0$ — ρ: >0، <0، $=0$

قضیه: اگر ρ ضریب همبستگی دو متغیر X و Y باشد، آن گاه:

$\rho^2 \leq 1$ یا $-1 \leq \rho \leq +1$

تذکر: اگر $\rho = 1$ یا $\rho = -1$، اولاً X و Y وابسته اند. ثانیاً X و Y وابستگی شدید خطی دارند. به عبارت دیگر:

$Y = aX + b$ یا $X = cY + d$

نتیجه: اگر $\rho = 0$، ۱) X و Y مستقل اند (X و Y مستقل $\Leftarrow \sigma_{xy} = 0$)
یا
۲) X و Y وابسته اند اما قطعاً وابستگی خطی ندارند.

مثال / اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم زیر باشد:

$y \backslash x$	-1	0	1	$f_Y(y)$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

الف / ρ این متغیرها را تعیین کنید.

ب / بررسی کنید X و Y مستقل اند یا وابسته.

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \qquad \sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

$$\mu_X = \mu_Y = -1(\tfrac{1}{4}) + 0(\tfrac{1}{2}) + 1(\tfrac{1}{4}) = 0$$

$$E(XY) = \sum_{y=-1}^{1} \sum_{x=-1}^{1} xy\, f_{X,Y}(x,y) = 0$$

$$\sigma_{XY} = 0 - 0 = 0 \rightarrow \rho = \frac{0}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = 0$$

برای تعیین وابستگی یا استقلال دو متغیر از تعریف استفاده می کنیم.

$$\forall x,y : f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

بررسی: $f(-1,1) \stackrel{?}{=} f_X(-1) f_Y(1)$

$0 \neq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \longrightarrow$ X و Y وابسته اند

مثال / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0<x,y<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$ باشد:

اولاً ρ را تعیین کنید. ثانیاً مشخص کنید X و Y مستقل اند یا وابسته.

$$\mu_X = E(X) = \int_0^1 \int_0^1 x(x+y)\,dx\,dy = \frac{7}{12} = \mu_Y$$

$$E(XY) = \frac{1}{3}$$

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{-1}{144}$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \frac{5}{144}$$

$$\rho = \frac{\frac{-1}{144}}{\sqrt{\frac{5}{144}} \times \sqrt{\frac{5}{144}}} =$$

$\rho \neq 0 \longrightarrow$ X و Y وابسته

Subject:
Year: Month: Day:

چند خاصیت از واریانس و کوواریانس

چند قضیه زیر خواص واریانس را نشان میدهند. این خواص به کمک فرمول های ۱ و ۲ به سادگی اثبات میشوند.

قضیه ۱:

اگر a و b دو مقدار ثابت باشند، آنگاه نتایج زیر برقرار است:

1) $\sigma^2_{x+b} = \sigma^2_x$

2) $\sigma^2_{ax} = a^2\sigma^2_x$

3) $\sigma^2_{ax\pm by} = a^2\sigma^2_x + b^2\sigma^2_y \pm 2ab\sigma_{xy}$

4) $Cov(ax+b, cy+d) = ac\, Cov(x,y)$

اثبات ۱:

$\sigma^2_{x+b} = E(x+b-\mu_{x+b})^2$

در فرمول ۲ بجای $g(x)$ قرار میدهیم: $x+b$

$\mu_{x+b} = E(x+b) = \mu_x + b$

Subject:
Year: Month: Day:

$\sigma^2_{x+b} = E(x+b-\mu_x-b)^2 = E(X-\mu_x)^2 = \sigma^2_x$

نتیجه: اگر به مشاهدات یک متغیر عددی را اضافه کنیم، آن عدد به میانگین اضافه میشود ولی واریانس تغییر نمیکند.

اثبات ۲: یعنی اگر همه مشاهدات یک متغیر را در عددی ضرب کنیم، میانگین a برابر و واریانس a^2 برابر میشود.

به عهده خواننده (اثبات ۳ و ۴)

$\mu_{ax\pm by} = E(ax\pm by) = a\mu_x \pm b\mu_y$

$\sigma^2_{ax\pm by} = E(ax\pm by) = a^2\sigma^2_x + b^2\sigma^2_y \pm ab\sigma_{xy}$

اگر x و y مستقل باشند:

$\sigma^2_{ax\pm by} = a^2\sigma^2_x + b^2\sigma^2_y$

Subject:
Year: Month: Day:

امید ریاضی شرطی (مشروط)

امید ریاضی متغیر Y به شرط آنکه $X=x$ اتفاق افتاده باشد را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu^* = E(Y|X) = \begin{cases} \sum_y y\, f_{Y|X}(y|x) \\ \int y\, f_{Y|X}(y|x)\, dy \end{cases}$$

به طور ترتیب واریانس مشروط بصورت زیر تعریف می‌شود:

واریانس مشروط متغیر تصادفی Y به شرط آنکه $X=x$ اتفاق افتاده باشد برابر است با

$$V(Y|X) = E\left((Y-\mu^*)^2 | X=x\right) = \begin{cases} \sum_y (y-\mu^*)^2 f_{Y|X}(y|x) \\ \int (y-\mu^*)^2 f_{Y|X}(y|x)\, dy \end{cases}$$

مثال / اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با میانگین‌های به ترتیب $\mu_X=2$ و $\mu_Y=3$ و واریانس‌های $\sigma_X^2=1$ و $\sigma_Y^2=2$ باشند، میانگین و واریانس متغیر تصادفی Z بصورت $Z=3X+2Y-7$ را محاسبه کنید.

Subject:
Year: Month: Day:

$$\mu_Z = E(Z) = E(3X+2Y-7)$$
$$= 3E(X) + 2E(Y) - 7$$
$$= 3\mu_X + 2\mu_Y - 7$$
$$= 3(2) + 2(3) - 7 = 5 \Rightarrow \mu_Z = 5$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma^2_{\underbrace{3X+2Y}_{W\ \text{متغیر}}-7} = \sigma^2_{3X+2Y} = 9\sigma_X^2 + 4\sigma_Y^2 = 9(1) + 4(2) = 17$$

مثال / اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم زیر باشند،

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy & 0 \le y \le x \,,\ 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

اولاً بررسی کنید که f یک تابع احتمال توأم است. $\left(\int_0^1 \int_0^x 8xy\, dy\, dx\right)$

ثانیاً مطلوبست $\mu^* = E(Y|X)$ ، $V(Y|X)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_0^x 8xy\, dy = \begin{cases} 4x^3 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{8xy}{4x^3} = \frac{2y}{x} \quad 0 \le x \le 1$$

$$\mu^* = \int_0^x y \cdot \frac{2y}{x}\, dy = \frac{2x^2}{3} \quad 0 < x \le 1$$

SAMAND SAMAND

$$V(Y|X) = \int_0^x \left(y - \frac{2x^2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2y}{x} \, dy \overset{?}{=} \frac{x^2}{18}$$

تمرین / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0<x,y<1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، مطلوبست محاسبهٔ $E(Y|X)$ ، $E(X|Y)$ ، $V(X|Y)$ ، $V(Y|X)$.

تمرین ۲: اگر دو متغیر تصادفی تابع احتمال به صورت

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/y} \cdot e^{-y}}{y} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، مطلوبست حل مطلوبات تمرین قبل.

Subject:
Year: Month: Day:

تابع مولد گشتاور

با توجه به اینکه محاسبهٔ میانگین و واریانس یک متغیر تصادفی اهمیت زیادی در موارد مختلف دارد لازم است که این دو مقدار همواره محاسبه شوند. اما محاسبهٔ این دو در بسیاری از موارد با استفاده از تعریف، کار ساده‌ای نمی‌باشد. در چنین مواردی می‌توان از گشتاورها و تابع مولد گشتاور برای محاسبهٔ μ و σ^2 استفاده کرد.

تعریف گشتاور مرتبهٔ r ام:

اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه مقدار $E(X^r)$ که با علامت μ'_r نشان داده می‌شود، گشتاور مرتبهٔ r ام پیرامون مبدا (صفر) می‌نامیم.

$$\mu'_r = E(X^r)$$

تذکر: گشتاور مرتبهٔ r ام نوعی امید ریاضی خاص است اگر $g(x)=X^r$ فرض کنیم که r عددی طبیعی است.

Subject:
Year: Month: Day:

اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، تابع مولد گشتاور این متغیر که با علامت $M_X(t)$ نشان داده می‌شود را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow \text{حاصل تابعی از } t \text{ است}$$

* t یک عدد دلخواه می‌باشد.

$$M'(t) = \frac{dM}{dt} = \begin{cases} \sum_x x e^{tx} f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{tx} f_X(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow M'(0) = E(X)$$

$$M''(t) = \frac{d^2M}{dt^2} = \begin{cases} \sum_x x^2 e^{tx} f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{tx} f_X(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow M''(0) = E(X^2)$$

⋮

$$M^{(r)}(t) = \frac{d^rM}{dt^r} = \begin{cases} \sum_x x^r e^{tx} f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{tx} f_X(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow M^{(r)}(t) = E(X^r)$$

$\mu'_1=\mu_1=E(X)=M'(0)=\frac{dM}{dt}\Big|_{t=0}$

$\mu'_2=E(X^2)$ → $\sigma^2=M''(0)-(M'(0))^2$

مثال/ اگر X متغیری با تابع احتمال $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ باشد، میانگین، واریانس و انحراف معیار متغیر X را به دو طریق تعیین کنید. ۱- با استفاده از تعریف ۲- استفاده از تابع مولد گشتاور

$E(X^2)=\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx=2$

$\sigma^2=E(X^2)-\mu^2=1 \rightarrow \sigma=1$

$M(t)=E(e^{tx})=\int_0^{+\infty} e^{tx}\cdot e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{(t-1)x}dx$

$=\frac{1}{t-1}e^{(t-1)x}\Big|_0^{+\infty} \qquad t<1$

$M(t)=\frac{1}{1-t} \qquad t<1$ تابع مولد گشتاور

مثال/ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X بصورت زیر است. $M(t)=e^{(2t+\frac{1}{2}t^2)}$

مطلوبست محاسبه میانگین، واریانس و انحراف معیار این متغیر.

$\mu=M'(0) \qquad \sigma^2=M''(0)-(M'(0))^2$

$M'(t)=(2+t)\,e^{(2t+\frac{1}{2}t^2)} \Rightarrow \mu=M'(0)=E(X)=2 \Rightarrow \mu=2$

$M''(t)=e^{2t+\frac{1}{2}t^2}+(2+t)^2e^{(2t+\frac{1}{2}t^2)}$

$M''(0)=E(X^2)=1+4=5$

$\sigma^2=5-(2)^2=1 \Rightarrow \sigma^2=1 \Rightarrow \sigma=1$

قضایای دیگری از تابع مولد گشتاور:

۱) اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع مولد گشتاورهای $M_X(t)$ ، $M_Y(t)$ باشند، آنگاه X و Y دارای توزیع یکسان (هم توزیع) می‌باشند اگر و تنها اگر:

$M_X(t)=M_Y(t)$

مثال: $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

Subject:
Year: Month: Day:

۲) اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با تابع مولد گشتاور $M_X(t)$ و $M_Y(t)$ باشند،

آن گاه تابع مولد گشتاور $Z = X + Y$ برابر است با:

$$M_Z(t) = M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

تعمیم: اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ مستقل باشند، آن گاه،

$$M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t)$$

اگر $X_1, \dots, X_n$ هم توزیع و مستقل باشند، آن گاه،

$$M_{X_1+\dots+X_n}(t) = \left(M_X(t)\right)^n$$

تمرین: تابع مولد گشتاور متغیر X به صورت زیر است.

$$M(t) = \frac{1}{10}e^{t} + \frac{2}{10}e^{2t} + \frac{2}{10}e^{3t} + \frac{3}{10}e^{4t} + \frac{2}{10}e^{5t}$$

الف: مطلوبست محاسبهٔ μ و σ^2.

ب: مطلوبست محاسبهٔ تابع احتمال X.

معرفی چند تابع احتمال کاربردی

در این قسمت به معرفی چند تابع احتمال گسسته و پیوسته می‌پردازیم که در کاربرد بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند. این توزیعات عبارتند از: توزیع یکنواخت، برنولی، دوجمله‌ای، فوق هندسی، دوجمله‌ای منفی و پواسن

توزیع گاما، نرمال (گوسی)، کای دو، توزیع t، توزیع F (فیشر)

توزیع یکنواخت:

اگر متغیر تصادفی X، n مقدار $x_1, x_2, \dots, x_n$ را با احتمال مساوی اختیار کند توزیع این متغیر را توزیع یکنواخت گویند و با علامت $f(x;n)$ نشان می‌دهیم.

$$f(x) = f(x;n) = \frac{1}{n}$$

تذکر: به آزمایش تصادفی که متغیر آن دارای توزیع یکنواخت باشد، آزمایش یکنواخت می‌گویند.

بنابراین نام آزمایش، نام متغیر و نام تابع احتمال یکسان تلقی می‌شود.

۲۳

مثال: پرتاب یک سکه سالم به تعداد ۱ مرتبه، یک آزمایش یکنواخت است که توزیع آن هم یکنواخت می‌باشد.

$$f(x;2) = \frac{1}{2} \quad x = 0, 1$$

مثال: پرتاب یک تاس سالم یک آزمایش یکنواخت است.

$$f(x;6) = \frac{1}{6} \quad x = 1, 2, \dots, 6$$

قضیه: میانگین و واریانس توزیع یکنواخت $f(x) = \frac{1}{n}$ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ برابر است با:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n}$$

اثبات: $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = x_1 \times \frac{1}{n} + x_2\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + x_n\left(\frac{1}{n}\right)$

$= \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

توزیع برنولی:

آزمایش برنولی: اگر نتیجه یک آزمایش تصادفی به دو صورت موفقیت و شکست ظاهر شود آنگاه یک آزمایش برنولی می‌گویند. (آزمایش دو حالته)

آزمایش $\to S, F$

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: پرتاب یک سکه، روشن کردن چراغ برق.

متغیر برنولی

متغیر تصادفی X که نشان‌دهنده تعداد موفقیت‌ها در آزمایش برنولی باشد را متغیر برنولی گویند.

$X, \; x = 0, 1$

(0: شکست، 1: موفقیت)

$p(S) = p(X=1) = p \quad (0<p<1)$

$p(f) = p(X=0) = 1-p = q$

توزیع برنولی

توزیع متغیر برنولی را توزیع برنولی نامیده و با علامت $b(x;p)$ نشان می‌دهند.

x	0	1
$f_X(x) = b(x;p)$	q	p

$f_X(x) = b(x;p) = p^x q^{1-x} \quad x = 0, 1$

قضیه: میانگین و واریانس توزیع برنولی $b(x;p)$ برابر است با:

$\mu = p \quad \sigma^2 = pq$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

اثبات:

الف: از طریق تعریف:

$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{1} x f(x) = 0 \times q + 1 \times p = p$

$E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 f(x) = 0^2 \times q + 1^2 \times p = p$

$\sigma^2 = E(X^2) - (\mu)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$

ب: با استفاده از تابع مولد گشتاور:

$M(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} f_X(x) = f(0) + e^t f(1)$

$= q + pe^t$

$M'(t) =$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

توزیع دو جمله‌ای (binomial distribution)

آزمایش دوجمله‌ای:

اگر یک آزمایش برنولی را n مرتبه و مستقل تکرار کنیم، این آزمایش را دوجمله‌ای می‌گویند.

مثال: پرتاب یک سکه (سالم یا ناسالم) n مرتبه، روشن کردن n کلید برق، خارج کردن n مهره با جایگذاری از ظرفی حاوی a مهره سفید و b مهره سیاه.

متغیر دوجمله‌ای:

متغیر تصادفی X که نشان‌دهنده تعداد موفقیت در آزمایش دوجمله‌ای می‌باشد را متغیر دوجمله‌ای گویند.

$X: x = 0,1,2,\dots,n$

تابع یا توزیع دوجمله‌ای:

توزیع متغیر دوجمله‌ای را توزیع دوجمله‌ای گویند و با علامت $f_X(x)=b(x;n,p)$ نشان می‌دهند.

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$n=1 \Rightarrow f_X(x)=b(x;1,p)=b(x;p)$$

۷۲

Subject:
Year: Month: Day:

تمرین: تحقیق کنید این تابع یک تابع احتمال است.

$$f_X(x)=b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

$$\sum_{x=0}^{n} f_X(x) \overset{?}{=} 1 \iff \sum_{x=0}^{n} b(x;n,p)=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \overset{?}{=} 1$$

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^r b^{n-r} \qquad \binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\begin{cases} r=x \\ a=p \\ b=q \end{cases} \Rightarrow (p+q)^n=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

تذکر: میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای $b(x;n,p)$ برابر است با:

$\mu=np \qquad \sigma^2=npq$

اثبات به کمک تابع مولد گشتاور:

$$M(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}f_X(x)=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x q^{n-x}$$

مطابق با بسط دوجمله‌ای