فهرست

1- جدول توزیع فراوانی طبقه بندی نشده

از این جدول برای تنظیم داده های گسسته که تنوع داده ها اندک است استفاده می کنند و فراوانی هر داده در مقابل آن ثبت می شود.

مثال 1. برای نمرات یک کلاس 30 نفری داریم:

نمرات = X_i	تعداد دانش آموزان= F_i
8	2
10	1
12	6
13	5
17	6
19	8
20	2

2- دامنه تغییرات

اختلاف بین بزرگترین داده آماری و کوچکترین داده آماری را دامنه تغییرات گویند.

$$R = X_{max} - X_{min}$$

چنانچه داده های آماری با تقریب کمتر از واحد گرد شده باشند دامنه تغییرات برابر است با:

$$R = X_{max} - X_{min} + 1$$

3- شاخصهای مرکزی یا پارامترهای مکانی

3-1- میانگین حسابی(Mean)

الف- اگر داده‌ها تکراری نباشند

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

ب- اگر هر یک از داده ها تکراری باشند

$$\overline{X} = \frac{\sum F_i X_i}{N}$$

مثال 2. در جدول زیر مطلوبست میانگین حسابی: $\bar{X} = \frac{654}{50} = 13/08$

حدود طبقات	فراوانی	نماینده طبقات X_i	$F_i X_i$
2-4	2	3	6
5-7	3	6	18
8-10	5	9	45
11-13	10	12	120
14-16	25	15	375
17-19	5	18	90

$\sum F_i = 50 \quad \sum F_i X_i = 654$

3- 2- میانه(Median)

عددی را که در یک مجموعه از اعداد مرتب شده آماری درست در وسط داده ها قرار گیرد، میانه گویند. برای تعیین میانه در یک سری داده های آماری ابتدا داده ها را به ترتیب صعودی یا نزولی مرتب می کنیم. در صورتیکه تعداد داده ها فرد باشد، عددی که در وسط قرار می گیرد عدد میانه بوده و اگر تعداد داده ها زوج باشد نصف مجموع دو عددی که در وسط قرار گرفته عدد میانه را مشخص می کند، میانه را با $\tilde{X}$ نشان می دهیم.

مثال 3.

$10,12,16,14,26,5$ $\qquad$ $4,7,6,9,1,5,3$

$5,10,12,14,16,26$ $\qquad$ $1,3,4,5,6,7,9$

$\tilde{X} = \frac{12+14}{2} = 13/5$ $\qquad$ $\tilde{X} = 5$

الف - تعیین میانه در جدول توزیع فراوانی دسته بندی نشده (طبقه بندی نشده)

ابتدا، $\sum F_i$ را به دست آورده و N می نامیم. سپس اولین ردیفی را که فراوانی تجمعی آن بزرگتر یا مساوی $\frac{N}{2}$ است را به عنوان ردیف میانه معین می‌کنیم. داده مربوط به این ردیف میانه خواهد بود.

مثال 4.

X_i	F_i	CF_i	
4	3	3	
6	2	5	
7	4	9	← ردیف میانه
10	1	10	
11	3	13	
16	2	15	
20	1	16	

$N = \sum F_i = 16$ $\qquad \frac{N}{2} = 8$ $\qquad \tilde{X} = 7$

ب- تعیین میانه در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده

در جدول توزیع فراوانی دسته بندی شده ابتدا مثل قبل ردیف میانه را مشخص کرده و سپس میانه را از فرمول زیر به دست می آوریم:

$$\tilde{X} = L + \frac{\frac{N}{2} - CF_{i-1}}{F_i} \times C$$

که در این فرمول

$\tilde{X}$ = میانه

L= کوچکترین عدد طبقه میانه‌دار (*در صفات پیوسته کرانه پایین و در صفات گسسته حد پایین طبقه میانه دار*)

CF_{i-1} = فراوانی تجمعی طبقه ماقبل طبقه میانه دار

F_i= فراوانی طبقه میانه دار

C= فاصله طبقات جدول(1+ حد پایین - حد بالا)

مثال5. در جدول ذیل میانه را مشخص کنید.

الف – اگر داده‌ها پیوسته باشند.

$$\frac{N}{2}=\frac{50}{2}=25$$

$$\tilde{X}=\underline{49/5}+\frac{25-20}{6}\times\underline{5}=53/66$$

ب- اگر داده‌ها گسسته باشند.

$$\frac{N}{2}=\frac{50}{2}=25$$

$$\tilde{X}=50+\frac{25-20}{6}\times\underline{5}=54.167$$

	F_i	FC_i	
40-44	12	12	
45-49	8	20	
50-54	6	26	ردیف میانه←
55-59	10	36	
60-64	4	40	
65-69	10	50	

نکته: اگر در ردیف فراوانی های تجمعی عدد $\frac{N}{2}$ عیناً وجود داشته باشد آنگاه کرانه بالای طبقه میانه دار را میانه بدانید.

مثال6.

	2-4	5-7	8-10	11-13	14-16	17-19
F_i	2	3	5	15	20	5
FC_i	2	5	10	25	45	50

طبقه میانه دار↑

$$\frac{N}{2}=\frac{50}{2}=25$$

$$\tilde{X}=13/5$$

نکته: اگر در یک جدول توزیع فراوانیهای طبقه بندی شده مربوط به صفات پیوسته، مجموع فراوانیهای طبقه ماقبل میانه دار برابر فراوانیهای طبقات ما بعد طبقه میانه‌دار باشد آنگاه نماینده طبقه میانه دار را میانه خواهیم دانست.

مثال7. جدول زیر مربوط به اندازه قد دانشجویان یک کلاس می باشد. میانه را مشخص کنید.

	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-69
F_i	4	10	6	16	12	8
CF_i	4	14	20	36	48	56

طبقه میانه دار↑

$$\frac{N}{2}=\frac{56}{2}=28$$

$$\tilde{X} = \frac{25-29}{2} = 27 \Rightarrow \begin{array}{l} = 4+10+6 = 20 \\ = 12+8 = 20 \end{array}$$

مجموع فراوانی های قبل از طبقه میانه دار

مجموع فراوانی های بعد از طبقه میانه دار

3-3- مد یا نما

در اعداد آماری، عددی که بیشترین تکرار (فراوانی) را داشته باشند، نما نامیده می شود. لذا یک نمونه آماری می تواند نما داشته باشد یا بیش از یک نما داشته باشد.

مثال 8.

1,1,1,2,2,2,3,4,5,5	1,1,2,2,2,3,4
Mode = 1,2	Mode = 2
1,1,1,2,2,2,3,3,3	1,2,3,4,5,6,7
مد ندارد	مد ندارد

- تعیین مد در جدول توزیع فراوانی های دسته بندی شده

ابتدا طبقه ای که بیشترین فراوانی را دارد به عنوان طبقه نمادار مشخص می کنیم و سپس مـد را از رابطه زیر به دست می آوریم:

$$\text{Mode} = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times C$$

که در آن

M= نما

d_1= تفاضل فراوانی طبقه نمادار با فراوانی طبقه ما قبل

d_2= تفاضل فراوانی طبقه نمادار با فراوانی طبقه ما بعد

C= فاصله طبقات

L= کوچکترین عدد طبقه نمادار (کرانه پایین)

مثال 9.

	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
F_i	12	17	20	40	10

طبقه مد دار↑

$$\text{Mode} = 39/5 + \frac{20}{20+30} \times 10 = 43/5$$

نکته: اگر در جدول توزیع فراوانی ها فراوانی طبقات ماقبل و مابعد طبقه نمادار مساوی باشند، نماینده طبقه نمادار را نما بدانید.

فراوانی طبقه مابعد= فراوانی طبقه مابعد

مثال 10.

	10-12	13-15	16-18	19-21	22-24
F_i	10	12	8	16	8

$\text{Mode} = \frac{19+21}{2} = 20$ ↑طبقه نما دار

3-4- چارک ها(Quantile)

سه نوع چارک داریم: چارک اول (Q_1)، چارک دوم (Q_2) و چارک سوم (Q_3)

الف- چارک اول: عددی که در یک مجموعه از داده های آماری مرتب شده، مرز 25% داده ها را مشخص کند چارک اول است. بنابراین می توان ادعا کرد که 25% داده ها از نقطه Q_1 کوچکتر و 75% داده ها از این نقطه بزرگتراند.

ب- چارک دوم: همان میانه است.

ج- چارک سوم: نقطه یا عددی که در یک مجموعه از اعداد مرتب شده آماری مرز 75% داده ها را نشان دهد چارک سوم است. یعنی نقطه ای که 75% داده ها از آن کوچکتر و 25% داده از آن بزرگتراند.

3-4-1- تعیین چارک اول و سوم در یک سری داده

ابتدا داده های آماری را به صورت صعودی از چپ به راست مرتب می کنیم. سپس اعداد را به 2 نیم تقسیم می کنیم. میانه نیمه سمت چپ را چارک اول و میانه اعداد سمت راست را چارک سوم می نامند و خود میانه اعداد همان چارک دوم می باشد.

مثال 11.

14,16,12,17,20,19,17,11,10,18

$$\underbrace{10,11,12,14}_{Q_1=12},\ \underbrace{16,17,17}_{Q_2=16/5},\ \underbrace{18,19,20}_{Q_3=18}$$

7,4,2,1,3,5,6

$$\underbrace{1,2,3}_{Q_1=2},\ \underbrace{4,5}_{Q_2=4},\ \underbrace{6,7}_{Q_3=6}$$

الف - تعیین چارک ها در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی نشده

ابتدا فراوانی تجمعی را حساب می کنیم. سپس اولین طبقه ای که فراوانی تجمعی آن بیشتر از $\frac{N}{4}$ است طبقه چارک اول و داده مربوط به آن چارک اول، سپس اولین طبقه ای که فراوانی تجمعی آن بیشتر از $\frac{N}{2}$ است طبقه چارک دوم و داده مربوط به آن چارک دوم و اولین طبقه ای که فراوانی تجمعی آن $\frac{3N}{4}$ است طبقه چارک سوم و داده مربوط به آن چارک سوم است.

مثال 12.

X_i	8	10	15	16	20	28	40	42
F_i	3	8	7	13	12	23	24	10
CF_i	3	11	18	31	43	66	90	100

↑ طبقه چارک اول $Q_1=16$

↑ طبقه چارک دوم $Q_2=\tilde{X}=28$

↑ طبقه چارک سوم $Q_3=40$

$$N=100 \quad \frac{N}{4}=25 \quad \frac{N}{2}=50 \quad \frac{3N}{4}=75$$

ب- تعیین چارک ها در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده

برای تعیین چارک اول ابتدا اولین طبقه ای را که فراوانی تجمعی آن بیشتر از $\frac{N}{4}$ است را به عنوان طبقه چارک اول تعیین کرده و چارک اول را از فرمول زیر به دست می آوریم:

$$Q_1=L+\frac{\frac{N}{4}-CF_{i-1}}{F_i}\times C$$

چارک دوم را از تعریف میانه به دست می آوریم.

برای تعیین چارک سوم ابتدا اولین طبقه ای را که فراوانی تجمعی آن بیشتر از $\frac{3N}{4}$ است را به عنوان طبقه چارک سوم تعیین کرده و چارک سوم را از فرمول زیر به دست می آوریم:

اگر داده ها از نوع پیوسته بود L کرانه پایین طبقه چارک دار است. و اگر داده ها از نوع گسسته بود Lحد پایین طبقه چارک دار است.

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - CF_{i-1}}{F_i} \times C$$

مثال 13.

	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
F_i	2	8	6	14	7	3
CF_i	2	10	16	30	37	40

طبقه چارک اول ↑ Q_1=19/5

طبقه چارک دوم و سوم ↑ Q_3=29/5

$N = 40 \quad \frac{N}{4} = 10 \quad \frac{N}{2} = 20 \quad \frac{3N}{4} = 30$

$Q_2 = \tilde{X} = 24/5 + \frac{20-16}{14} \times 5 = 25/92$

نکته: چون $\frac{N}{4} = 10$ دقیقاً در ستون فراوانی تجمعی می باشد لذا Q_1 کرانه بالای طبقه چارک اول است.

همین نکته در مورد چارک سوم صدق می کند.

فهرست

1- تعاریف

1-1- تعریف جامعه(Population)

جامعه مجموعه عناصر مورد مطالعه است که ممکن است تعداد آن محدود یا نامحدود باشد. مثلاً جامعه متولدین در یک سال و یا قیمت یک کالا در طول زمان معین.

2-1- تعریف پارامتر(Parameter)

مقدار ثابتی مربوط به جامعه آماری است که معمولاً مورد علاقه بررسی کننده واقع می شود. مثلاً در مورد لامپ ها، متوسط طول عمر لامپ ها.

نکته: موقعی روش های آماری مفید است که پارامتر مجهول داشته باشیم.

مدل آمار

X	0	1	2
P	$\theta/2$	$1-\theta$	$\theta/2$

مدل

X	0	1	2
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

3-1- تعریف نمونه(Sample)

در حالاتی که به جامعه دسترسی نداریم و یا به علت محدودیت در زمان و هزینه، بناچار مطالعه و بررسی بر روی بخشی از جامعه به عنوان نمونه انجام می‌شود. نمونه باید به گونه‌ای باشد که معرف جامعه اصلی بوده و نتایج حاصل از آن بتواند قابل تعمیم به جامعه برگرفته از آن باشد.

الف- نمونه تصادفی از جامعه متناهی بدون جاگذاری

در این حالت نمونه باید طوری انتخاب شود که احتمال انتخاب تمام نمونه‌های ممکن برابر باشد.

مثلا اگر جامعه دارای N عضو است انتخاب هرنمونه nتایی با احتمال $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ رخ می‌دهد.

تذکر: معمولا اگر در جریان انتخاب هیچ عاملی یا محدودیت و شرطی دخالت نکند نمونه تصادفی خواهد بود.

ب- نمونه تصادفی از جامعه نامتناهی(متناهی با جاگذاری)

مقدار هر متغیر که در نمونه تصادفی ظاهر می‌شود مربوط به یک متغیر تصادفی است و این متغیر دارای یک توزیع است.

4-1- اندازه نمونه(Sample Size)

تعداد افراد نمونه را حجم نمونه یا اندازه نمونه می نامند.

5-1- تعریف نمونه تصادفی(Random Sample)

متغیرهای تصادفی $x_1, x_2, ..., x_n$ تشکیل یک نمونه تصادفی به اندازه n می دهند اگر:

1- هم توزیع باشند.

2- از یکدیگر مستقل باشند.

6-1- توزیع نمونه

اگر $x_1, x_2, ..., x_n$ نشان دهنده نمونه‌ای به حجم n باشد بنا به تعریف، تابع توزیع توام $x_1, x_2, ..., x_n$ را تابع توزیع نمونه می نامند. لذا اگر $x_1, x_2, ..., x_n$ یک نمونه تصادفی به حجم n از جامعه $f_x(x)$ باشد در این صورت توزیع نمونه تصادفی $x_1, x_2, ..., x_n$ عبارتست از:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2) ... f_{x_n}(x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_i) = [f_x(x)]^n$$

7-1- تعریف آماره

تابعی است از نمونه تصادفی قابل مشاهده که شامل پارامتر مجهولی نیست (به پارامترهای نامعلوم

بستگی ندارد) مثلاً در یک نمونه گیری به اندازه n، $\overline{X}$ ، S^2 و S همه آماره‌اند. در این ارتباط توزیع آماره‌ها را توزیع نمونه‌ای می‌گویند و استنباطهای آماری معمولا بر آماره‌ها متکی است.

1-8- میانگین نمونه

اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه ای به حجم n باشد:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

1-9- گشتاور نمونه

فرض می کنیم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه با تابع چگالی احتمال $f_x(x)$ باشـند. در این صورت r مین گشتاور نمونه حول مبدا برابر است با:

$$M'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r$$

که در حالت خاص r=1، میانگین نمونه بدست می آید.

1-10- گشتاور r ام حول میانگین

گشتاور r ام حول میانگین برابر است با: $M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^r$

قضیه 1: فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یـک نمونـه تـصادفی از جامعـه بـا تـابع چگـالی $f_x(x)$ باشـد و $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ میانگین نمونه باشد در این صورت:

$$E[\overline{X}] = \mu \qquad , \qquad Var[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

که در آن μ و σ^2 به ترتیب میانگین و واریانس جامعه هستند.

اثبات:

$$E[\overline{X}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}.n\mu = \mu$$

$$Var[\overline{X}] = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}Var\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(x_i) = \frac{1}{n^2}.n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

11-1- واریانس نمونه

فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه $f_x(x)$ باشد در این صورت:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \quad ; \quad n > 1$$

واریانس نمونه نامیده می شود.

12-1- انحراف معیارنمونه

انحراف معیار n مشاهده $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را به عنوان ریشه دوم واریانسهایشان تعریف می کنیم:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

قضیه2: اگر تمام نمونه های تصادفی به حجم n از یک جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشددر اینصورت $\overline{X}$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ است.

$$M_{\overline{x}} = M_x[(\sum x_i / n)t] = (M_x(t/n))^n = (e^{\mu(t/n)+1/2(t/n)^2\sigma^2})^n = e^{\mu t + \frac{1}{2}t(\sigma^2/n)}$$

قضیه3: اگر تمام نمونه های تصادفی به حجم n از یک جامعه با میانگین μ و واریانس σ^2 با جایگذاری انتخاب شود، توزیع نمونه $\overline{X}$ تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ است.

نکته:

اگر $n \geq 30$ باشد، بدون توجه به نوع توزیع جامعه، توزیع $\overline{X}$ نرمال است.

اگر $n < 30$ باشد، توزیع $\overline{X}$ تقریباً نرمال است اگر توزیع جامعه تقریباً نرمال باشد.

1-13- قضیه حد مرکزی

اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه نامتناهی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد در این صورت توزیع حدی متغیر

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

وقتی $n \to \infty$، توزیع نرمال استاندارد است.

1-14- توزیع Gamma

اگر متغیر تصادفی گاما دارای تابع چگالی ذیل است:

$$f_X(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{s-1}}{\Gamma(s)} \quad ; \quad x > 0$$

$$\phi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^s ; E[x] = \frac{s}{\lambda} ; Var(x) = \frac{s}{\lambda^2}$$

2- توزیع مربع‌کای (Chi Square)

توزیع مربع‌کای حالت خاصی از توزیع گاماست که در آن $\lambda = \frac{1}{2}; s = \frac{\nu}{2}$ است و بر این اساس تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی مربع‌کای بشرح ذیل است.

$$f_x(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\left(\frac{\nu-2}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} \qquad ; \quad x > 0$$

که Γ معرف تابع گاما و معرف درجه آزادی است و

$$E\left(\chi^2\right) = \nu \,, Var\left(\chi^2\right) = 2\nu \,, M_X(t) = \phi(t) = (1-2t)^{\frac{-\nu}{2}}$$

قضیه4: اگر متغیر تصادفی Z_1 دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آنگاه متغیر تصادفی Z_1^2 دارای توزیع مربع‌کای با 1 درجه آزادی خواهد بود. این قضیه در واقع بیانگر اهمیت توزیع مربع کای است.

قضیه5: اگر $\chi_1^2, \chi_2^2, ..., \chi_k^2$ متغیرهای تصادفی مستقل هر یک دارای توزیع مربع‌کای با درجات آزادی به ترتیب $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_k$ باشند، آنگاه متغیر تصادفی $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + ... + \chi_k^2$ نیز یک توزیع مربع‌کای با $\nu = \sum_{i=1}^{k} \nu_i$ درجه آزادی دارد.

اثبات:

$$M_{x_i}(t) = (1-2t)^{-\nu_i/2}; M_{\sum x}(t) = \prod_{i=1}^{n}(1-2t)^{-\nu_i/2} = (1-2t)^{-\sum \nu_i/2}$$

قضیه6: اگر متغیرهای تصادفی مستقل $Z_1, Z_2, ..., Z_\nu$ دارای توزیع نرمال استاندارد باشند، آنگاه متغیر تصادفی $\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_\nu^2$ یک توزیع مربع‌کای با ν درجه آزادی خواهد بود.

تذکر: اگر $x_1, x_2, ..., x_\nu$ متغیرهای تصادفی مستقل نرمال به ترتیب با میانگین‌های $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_\nu$ و واریانسهای $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_\nu^2$ باشند، جمع مربعات Xها یک توزیع مربع‌کای ندارد.

قضیه7: اگر متغیرهای تصادفی $x_1, x_2, ..., x_\nu$ دارای توزیع نرمال مستقل با میانگین‌های $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_\nu$ و واریانس های $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_\nu^2$ باشند در این صورت متغیر تصادفی $Z = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}$

برای $i=1,2,....,v$ دارای توزیع نرمال استاندارد می باشد و متغیر تصادفی:

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{v}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\delta_i}\right)^2$$

دارای توزیع مربع‌کای با v درجه آزادی است.

قضیه8: اگر $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ نمونه های تصادفی حاصل از توزیع نرمال استاندارد $N(0,1)$ باشـند در این صورت:

1- $\bar{Z}$ دارای توزیع نرمال $N\left(0,\frac{1}{n}\right)$ است.

2- $\bar{Z}$ و $\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2$ از هم مستقلند.

3- $\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2$ دارای توزیع Chi Square با n-1 درجه آزادی است.

نتیجه: اگر $x_1, x_2, ..., x_n$ نمونه تصادفی حاصل از جامعه $N(\mu,\sigma^2)$ باشد در این صورت متغیر تصادفی $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2$ دارای توزیع مربع‌کای با n-1 درجه آزادی است.

قضیه9: اگر $x_1, x_2, ..., x_n$ یک نمونه تصادفی به اندازه n از یک جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد در این صورت $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ یک توزیع مربع‌کای با n-1 درجه آزادی است.

اثبات: در ابتدا بدون اثبات می‌پذیریم که هرگاه $x_1, ..., x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از یک جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند آنگاه توزیع های $\bar{X}, S^2$ که به ترتیب میـانگین و واریـانس نمونه است از یکدیگر مستقل هستند. حال داریم:

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$$

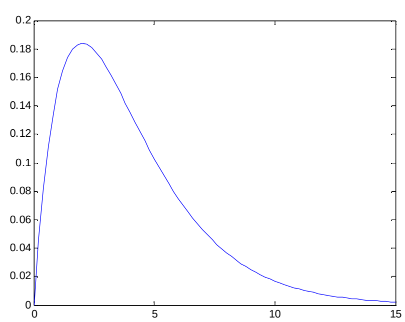
$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\mu\right)-\left(\overline{X}-\mu\right)\right]^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2}{\sigma^2}+\frac{n\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{\sigma^2}-\frac{2\left(\overline{X}-\mu\right)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)}{\sigma^2}$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2}_{\text{توزیع مربع کای با n درجه آزادی}}-\underbrace{\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}_{\text{توزیع مربع کای با یک درجه آزادی}}=\chi^2_{(n-1)}$$

تذکر: در یک نمونه تصادفی، احتمال اینکه مقدار عددی یک متغیر تصادفی مربع‌کای بزرگتر از عدد مشخصی شود عبارتست از سطح زیر چگالی مربع‌کای دم سمت راست آن عدد مشخص و این عـدد معمولاً توسط χ^2_α نمایش داده می‌شود بطوری که سطح زیر چگالی توزیع مربع کای واقع در سـمت راست آن عبارتست از α .

مثال توزیع مربع کای با چهار درجه آزادی.



قضیه10: اگر $x_1,\ldots\ldots,x_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای نامشخص $f_x(x)$ باشد آنگاه: $E[S^2]=\sigma^2$

اثبات:

$$E(S^2)=\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)-(\bar{X}-\mu)\right]^2=$$

$$\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-(\bar{X}-\mu)^2-2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)(\bar{X}-\mu)\right]=$$

$$\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2+n(\bar{X}-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)\overbrace{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}^{n(\bar{X}-\mu)}\right]=$$

$$\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2+n(\bar{X}-\mu)^2-2n(X_i-\mu)^2\right]=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2\right]=$$

$$\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E\left[(X_i-\mu)^2\right]-nE\left[(\bar{X}-\mu)^2\right]\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma^2-n\mathrm{Var}(\bar{X})\right]=$$

$$\frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}\right)=\sigma^2$$

قضیه11: اگر $x_1,\ldots\ldots,x_n$ یک نمونه تصادفی از یک جامعه نرمال $N(\mu,\sigma^2)$ باشد آنگاه:

$$\mathrm{Var}(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

اثبات:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\chi^2(n-1)$$

$$\mathrm{Var}\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}\mathrm{Var}(S^2)=2(n-1)\rightarrow \mathrm{Var}(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

3- توزیع t_student

توزیع t حاصل از تقسیم دو متغیر تصادفی است که صورت کسر متغیر تصادفی نرمال استاندارد و مخرج کسر جذر یک متغیر تصادفی دارای توزیع مربع کای تقسیم بر درجه آزادی آن است یعنی:

$$t_{(\nu)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(\nu)}}{\nu}}}$$

با استفاده از تکنیک تبدیل متغیر در تابع توزیع تابعی از یک متغیر تصادفی، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی t-student بشرح ذیل خواهد بود.

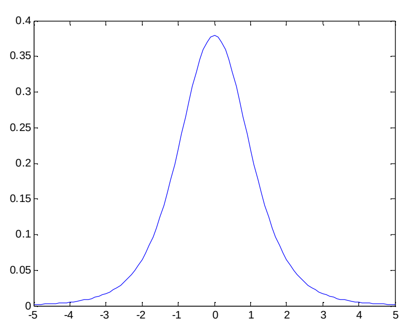
$$f_{t}(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \qquad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

$$E[x] = 0$$

$$Var(x) = \frac{\nu}{\nu-2}; \nu > 2$$

شکل تابع چگالی متغیر تصادفی t، مانند توزیع نرمال با میانگین صفر حول نقطه صفر متقارن است. تفاوت توزیع t با توزیع نرمال در آنست که توزیع t کمی پهن تراز توزیع نرمال است. در توزیع t با افزایش درجه آزادی، واریانس کمتر می شود.

مثال: توزیع t با 5 درجه آزادی



نکته: در یک نمونه تصادفی، احتمال اینکه مقدار عددی یک متغیر تصادفی t بزرگتر از عدد مشخصی باشد عبارتست از سطح زیر چگالی t در سمت راست آن عدد مشخص و این عدد معمولاً

با t_α نمایش داده می شود بطوری که سطح زیر چگالی t واقع در سمت راست t_α عبارتست از α.

$$P(T \ge t_{\alpha,\nu}) = \alpha$$
$$P(T_{(10)} \ge 1.812) = P(T \ge t_{(10),\%5}) = \%5$$
$$P(T_{(5)} \ge 2.015) = P(T \ge t_{(5),\%5}) = \%5$$

قضیه12: در توزیع t هر چه ν بزرگتر باشد، توزیع t به سمت توزیع نرمال استاندارد میل خواهد کرد و وقتیکه $\nu = +\infty$ باشد توزیع t همان توزیع نرمال استاندارد است. یعنی:
$t_{\nu,\alpha}$

$$\lim_{\nu\to\infty} t_{(\nu)} = Z$$

اهمیت توزیع t

در حالتیکه σ معلوم باشد بر اساس قضیه حد مرکزی، متغیر تصادفی $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است اما در عمل σ مجهول است لذا برای تصمیم‌گیری لازم است توزیع متغیر تصادفی $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ را داشته باشیم که این مهم بر اساس توزیع t و قضیه ذیل برآورده می شود.

قضیه13: اگر $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ نمونه تصادفی حاصل از جامعه $N(\mu,\sigma^2)$ و $\overline{X}$ و S بترتیب میانگین و انحراف معیار نمونه مزبور باشد در این صورت متغیر تصادفی $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ دارای توزیع t با n-1 درجه آزادی است.

$$t_{\nu=(n-1)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(n-1)}}{n-1}}}$$
$$t_{\nu=(n-1)} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

لذا متغیر تصادفی $\frac{\overline{X}-\mu}{\delta/\sqrt{n}}$ دارای توزیع t با (n-1) درجه آزادی است.

نکته: اگر از یک جامعه نرمال $X \sim N(\mu,\sigma)$ یک نمونه n_1 تایی بگیریم و $\overline{X}$ را بر اساس این نمونه n_1 تایی تعریف کنیم و پس یک نمونه n_2 تایی مستقل از n_1 گرفته و S^2 را بر اساس آن تعریف

کنیم داریم آنگاه:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n_1}} \sim t_{(n_2-1)}$$

$$t_{\nu=(n-1)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(n-1)}}{n-1}}}$$

$$t_{\nu=(n_1-1)} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n_1}}}{\sqrt{\frac{(n_2-1)S^2}{\sigma^2}/(n_2-1)}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n_1}}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n_1}}$$

نکته: اگر یک نمونه n_1 از جامعه $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ گرفته و $\overline{X}$ را از روی آن تعریف کنیم و سپس یک نمونه n_2 از جامعه $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ مستقل از X گرفته و S_y^2 را بر اساس آن تعریف کنیم داریم:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \frac{\overline{X}-\mu_1}{S_y/\sqrt{n_1}} \sim t_{(n_2-1)}$$

نکته: توزیع t با یک درجه آزادی یک توزیع کوشی است. توزیع کوشی دارای میانگین نیست همچنین این توزیع دارای واریانس نیست.

$$f_{t_{(1)}} = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

4- توزیع تفاوت بین دو میانگین نمونه

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_{n_x}$ یک نمونه تصادفی متشکل از n_x متغیر تصادفی مستقل با توزیع نرمال هر یک با میانگین μ_x و واریانس σ^2 باشد و فرض کنید $Y_1, Y_2, ..., Y_{n_x}$ یک نمونه تصادفی متشکل از n_y متغیر تصادفی مستقل با توزیع نرمال هر یک با میانگین μ_y و واریانس σ^2 باشد. همچنین فرض کنید که تمام Xها، Y ها مستقل باشند در این صورت:

الف- اگر σ معلوم باشد:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma^2}{n_x}\right)$$
$$\overline{Y} \sim N\left(\mu_y, \frac{\sigma^2}{n_y}\right)$$
$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma^2}{n_x} + \frac{\sigma^2}{n_y}\right)$$

آنگاه متغیر تصادفی $Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است

ب- اگر σ مجهول باشد:

$$\frac{(n_x - 1)S_x^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_x - 1)}$$
$$\frac{(n_y - 1)S_y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_y - 1)}$$

آنگاه با استفاده از خاصیت جمع در توزیع مربع کای، متغیر تصادفی $\frac{(n_x - 1)S_x^2}{\sigma^2} + \frac{(n_y - 1)S_y^2}{\sigma^2}$ دارای توزیع مربع کای با $n_x + n_y - 2$ درجه آزادی است. از طرفی توزیع آن از $\overline{X} - \overline{Y}$ مستقل است. بنا به تعریف متغیر تصادفی t داریم:

$$\frac{\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}}{\sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{\sigma^2} / (n_x + n_y - 2)}} = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}}\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}$$

لذا متغیر تصادفی $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\dfrac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_x}+\dfrac{1}{n_y}}}$ دارای توزیع t با n_x+n_y-2 درجه آزادی است

مثال: نمونه های تصادفی مستقل به اندازه $n_1=30$ و $n_2=50$ از دو جامعه نرمال با میانگین های $\mu_1=78$ و $\mu_2=75$ و واریانس های $\sigma_1^2=150$ و $\sigma_2^2=200$ اختیار شده اند. احتمال اینکه میانگین نمونه اول از میانگین نمونه دوم حداقل 4.8 بیشتر باشد چقدر است؟

$$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_1}}}\sim Z$$

$$P(\overline{X}_1-\overline{X}_2\ge 4.8)=P\left[\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(78-75)}{\sqrt{\dfrac{150}{30}+\dfrac{200}{50}}}\ge\frac{4.8-(78-75)}{\sqrt{\dfrac{150}{30}+\dfrac{200}{50}}}\right]=P(Z\ge 0.53)$$

مثال: میانگین نمرات تست هوش دانشجویان سال اول یک دانشکده 540 و انحراف معیار آن 50 است. دو نمونه تصادفی با حجم $n_1=32$ و $n_2=50$ انتخاب می کنیم احتمال اینکه تفاضل میانگین نمرات این دو نمونه:

الف-بیش از 20 باشد چقدر است؟

$$P(\overline{X}_1-\overline{X}_2>20)=P\left[\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{50\sqrt{\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{50}}}>\frac{20}{50\sqrt{\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{50}}}\right]=$$

$$P(Z>1.76)=1-\phi(1.76)$$

ب-بین 5 و 10 باشد چقدر است؟

$$P(5<\overline{X}_1-\overline{X}_2<10)=P\left[\frac{5}{50\sqrt{\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{50}}}<Z<\frac{10}{50\sqrt{\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{50}}}\right]=P(0.44<Z<0.88)$$

نکته: نتایج بدست آمده از توزیع نمونه $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ ، نیز برای جمعیتهای محدود وقتیکه نمونه گیـری به روش بدون جایگذاری انجام می پذیرد صادق باشد، مشروط بر آنکه اندازه جمعیت هـا یعنــی N_1 و N_2 به ترتیب در مقابل اندازه نمونه یعنی n_1 و n_2 بزرگ باشد. بهرحال اگر جمعیت ها کوچـک باشند و نمونه گیری به روش بـدون جایگـذاری انجـام پـذیرد در آنـصورت مـا بایـد $\sigma_{\bar{x}_1}$ و $\sigma_{\bar{x}_2}$ را بتوسط رابطه زیر محاسبه نمائیم:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

5- توزیع F

اگر متغیرهای تصادفی مستقل χ_1^2 و χ_2^2 دارای توزیع های مربع کای با درجات آزادی به ترتیب ν_1 و ν_2 باشند متغیر تصادفی:

$$F = \frac{\chi_1^2/\nu_1}{\chi_2^2/\nu_2}$$

توزیع F با ν_1 و ν_2 درجه آزادی دارد. بر این اساس تابع چگالی متغیر تصادفی F به صورت ذیل است:

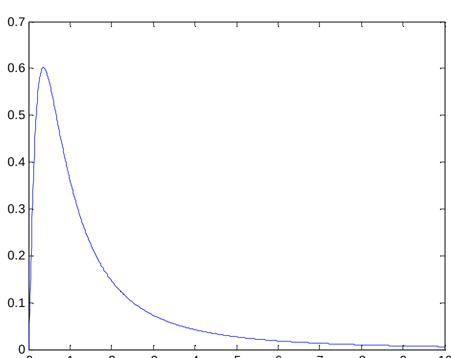
$$f_{F_{\nu_1,\nu_2}}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}(\nu_1)^{\frac{\nu_1}{2}}(\nu_2)^{\frac{\nu_2}{2}} \quad \frac{x^{\left(\frac{\nu_1}{2}-1\right)}}{(\nu_2+\nu_1 x)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} \quad ; \quad x>0$$

که در ν_1 و ν_2 بترتیب درجه آزادی صورت و مخرج است. شکل تابع چگالی متغیر تصادفی F مانند توزیع مربع‌کای است. اهمیت توزیع F در آنست که برای مقایسه واریانسهای دو جامعه بکار می‌رود. میانگین و واریانس توزیع F با درجات آزادی ν_1 و ν_2 به ترتیب برابر است با:

$$E[x] = \frac{\nu_2}{\nu_2-2} \quad ; \quad \nu_2>2$$

$$Var[x] = \frac{\nu_2^2(2\nu_2+2\nu_1-4)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)} \quad ; \quad \nu_2>4$$

مثال : توزیع F با 5 درجه آزادی در صورت و 3 درجه آزادی در مخرج



نکته: در یک نمونه تصادفی، احتمال اینکه مقدار عددی یک متغیر تصادفی F بزرگتر از عدد مشخصی باشد عبارتست از سطح زیر چگالی F در سمت راست آن عدد مشخص و این عدد معمولاً با $F_{v_1,v_2,\alpha}$ نمایش داده می شود بطوری که سطح زیر چگالی F واقع در سمت راست آن عبارتست از α یعنی $P(F > F_{\alpha;v_1,v_2}) = \alpha$

قضیه14: اگر $X_1,\dots,X_{m+1}$ یک نمونه تصادفی به حجم m+1 از یک توزیع نرمال $N(\mu_x,\sigma^2)$ باشد، همچنین اگر $Y_1,\dots,Y_{n+1}$ یک نمونه تصادفی به حجم n+1 از یک توزیع نرمال $N(\mu_y,\sigma^2)$ باشد و نمونه های تصادفی ناهمبسته باشند در این صورت:

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m+1}(X_i-\overline{X})^2 \sim \chi^2_{(m)}$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n+1}(Y_i-\overline{Y})^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m+1}(X_i-\overline{X})/m}{\sum_{i=1}^{n+1}(Y_i-\overline{Y})/n} \sim F_{m,n}$$

قضیه 15: (توزیع نسبت دو واریانس) فرض کنید $X_1,X_2,\dots,X_{n_x}$ یک نمونه تصادفی متشکل از n_x متغیر تصادفی با توزیع نرمال هر یک با میانگین μ_x و واریانس σ_x^2 باشد. همچنین فرض کنید $Y_1,Y_2,\dots,Y_{n_x}$ یک نمونه تصادفی متشکل از n_y متغیر تصادفی با توزیع نرمال هر یک با میانگین μ_y و واریانس σ_y^2 باشد. همچنین فرض کنید تمام X ها و Y ها مستقل باشند لذا:

$$\frac{(n_x-1)S_x^2}{\sigma_x^2} \sim \chi^2_{(n_x-1)}$$

$$\frac{(n_y-1)S_y^2}{\sigma_y^2} \sim \chi^2_{(n_y-1)}$$

چون X ها و Y ها مستقل اند پس این دو متغیر تصادفی مربع کای مستقل از هم هستند.

اثبات: طبق تعریف متغیر تصادفی F داریم:

$$F_{\nu_1,\nu_2}=\frac{\chi^2_{(\nu_1)}/\nu_1}{\chi^2_{(\nu_2)}/\nu_2}$$

$$\frac{\frac{(n_x-1)S_x^2}{\sigma_x^2}/(n_x-1)}{\frac{(n_y-1)S_y^2}{\sigma_y^2}/(n_y-1)}=F_{n_x-1,n_y-1}$$

لذا متغیر تصادفی $\frac{S_x^2}{S_y^2}\cdot\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$ دارای توزیع F با درجات آزادی n_x-1 و n_y-1 است.

چند نکته مهم

1- اگر x دارای توزیع F_{ν_1,ν_2} باشد آنگاه متغیر $Y=\frac{1}{X}$ نیز دارای توزیع F_{ν_2,ν_1} است.

2- مربع توزیع $t_{(\nu)}$ دارای توزیع F با درجات آزادی $\nu,1$ است.

$$t_{(\nu)}=\frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(\nu)}}{\nu}}}\rightarrow t^2_{(\nu)}=\frac{Z^2/1}{\chi^2_{(\nu)}/\nu}$$

3- $F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}=\frac{1}{F_{1-\alpha;\nu_2,\nu_1}}$ یا $F_{1-\alpha;\nu_2,\nu_1}\frac{1}{F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}}$

4- اگر X_1 و X_2 یک نمونه تصادفی از پخش $x>0\quad;\quad f(x)=e^{-x}$ باشد آنگاه $Z=\frac{x_1}{x_2}$ دارای پخش $F_{2,2}$ است. توزیع F با درجات آزادی 2 و 2 به صورت زیر است:

$$f_z(z)=\frac{1}{(1+z)^2}$$

6- توزیع میانگین جامعه های متناهی

اگر آزمایش متشکل از انتخاب یک مقدار یا بیشتر از مجموعه ای متناهی از اعداد $\{c_1,........c_n\}$ باشد این مجموعه را جامعه‌ای متناهی با اندازه N می نامند. اگر انتخاب بدون جایگذاری باشد و x_1 اولین و x_n nامین عددی باشد که استخراج می شوند، این متغیرهای تصادفی، نمونه ای تصادفی به اندازه n این جامعه متناهی را تشکیل می دهند مشروط بر آنکه توزیع احتمال توأم آنها به ازای هر n تایی مرتب مقادیر انتخاب شده از مجموعه $\{c_1,........c_n\}$ به صورت زیر باشد:

$$f(x_1,.......,x_n)=\frac{1}{N(N-1)....(N-n+1)}$$

$$f(x_i)=\frac{1}{N},\ x_i=c_1,.........c_N,\ i=1,......,n$$

میانگین و واریانس آنرا میانگین و واریانس جامعه متناهی می نامیم. یعنی میانگین و واریانس جامعه متناهی $\{c_1,...............,c_N\}$ عبارتست از :

$$\mu=\frac{\sum_{i=1}^{N}c_i}{N},\ \sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}(c_i-\mu)^2}{N}$$

توزیع حاشیه ای توام هر دوتا از متغیرهای تصادفی $x_1,...,x_n$ برای هر زوج مرتب از مقادیر جامعه متناهی است و برابر است با:

$$g(x_i,x_j)=\frac{1}{N(N-1)}$$

و کوواریانس آنها عبارتست از:

$$Cov(x_i,x_j)=\frac{\sigma^2}{N-1}$$

اگر $\overline{X}$ میانگین یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه ای متناهی به اندازه N با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه:

$$E(\overline{x})=\mu,\ Var(\overline{x})=\frac{\sigma^2}{n}.\frac{N-n}{N-1}$$

قضیه16: اگر تمام نمونه های تصادفی n تـایی ممکنـه بـا روش بـدون جایگـذاری از یـک جمعیـت محدود N تایی با حد متوسط μ و انحراف معیار σ بیرون کشیده شود در آنصورت توزیـع نمونـه ای $\overline{X}$ به طور تقریبی یک توزیع نرمال با حد متوسط و انحراف معیار زیر خواهد بود.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$\operatorname{Var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

مثال:

جمعیت 1و1و1 و 3و4و5 و 6و6و6و7 داده شده است. نمونه تصادفی 36 تایی بـه روش **جـایگزین** انتخاب شده است. احتمال اینکه میانگین نمونه بیشتر از 3/8 و کوچکتر از 4/5 باشد چقدر است؟

توزیع احتمال جمعیت مربوط به صورت زیر است:

x	1	3	4	5	6	7
P(x)	0.3	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1

$$E(x) = \mu = 4$$
$$\operatorname{Var}(x) = \sigma^2 = 5$$
$$\bar{x} \sim N\left(4, \frac{5}{36}\right)$$
$$P(3.8 < \bar{x} < 4.5) = P(-0.405 < z < 1.216) = 0.5453$$

نکته: برای Nهایی که در مقابل تعداد نمونه n عدد بزرگی هستند، ضریب $\frac{N-n}{N-1}$ به سمت 1 میـل می‌کند.

قضیه17: اگر نمونه ای تصادفی به اندازه n از جامعه ای متناهی که متشکل از N عدد صحیح مثبـت است انتخاب شود آنگاه:

$$E(\bar{x}) = \frac{N-1}{2}$$
$$\operatorname{Var}(\bar{x}) = \frac{(N+1)(N-n)}{12n}$$

$$E(y) = \frac{n(N+1)}{2}$$
$$\operatorname{Var}(y) = \frac{n(N+1)(N-n)}{12}$$

$$\mu = E(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{N} x_i.f(x_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i.\frac{1}{N} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + ...x_N) = \frac{1}{N}.\frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

$$E(x^2) - (E(x))^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i.f(x_i) - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{1}{N}.\frac{N(2N+1)(N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2-1}{12}$$

$$Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{N^2-1}{12n}.\frac{N-n}{N-1} = \frac{(N+1)(N+n)}{12n}$$

7- آماره‌های ترتیبی

فرض کنید از یک جامعه نامتناهی پیوسته یک نمونه تصادفی n تایی بشرح $X_1,\dots\dots,X_n$ انتخاب کرده‌ایم. اگر کوچکترین مقدار x ها را Y_1 ، بزرگترین مقدار بعد از آن را Y_2 و به همین ترتیب بزرگترین آنها را Y_n بنامیم در این صورت $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_N$ را آماره تریبی می‌نامیم.

قضیه18: برای نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه‌ای نامتناهی که که دارای تابع چگالی f(x) است. چگالی r امین آماره ترتیبی ،y_r، به ازای $-\infty < y_r < +\infty$ عبارتست از:

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x)dx\right]^{r-1} f(y_r)\left[\int_{y_r}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-1}$$

اثبات: فرض کنید که محور اعداد حقیقی را به سه بازه تقسیم کرده‌ایم یکی از $-\infty$ تا y_r، دومی از y_r تا y_r+h(که در آن h ثابت است) و سومی از y_r+h تا $+\infty$. در اینصورت اگر چگالی جامعه‌ای که از آن نمونه برگرفته شده است f(x) باشد، احتمال اینکه r-1 تا از نمونه ها در اولین باز قرار بگیرد ، یکی در بازه دوم و n-r تا در بازه سوم قرار بگیرند طبق فرمول توزیع چند جمله‌ای عبارتست از

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)!1!(n-r)!}\left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x)dx\right]^{r-1}\left[\int_{y_r}^{y_r+h} f(x)dx\right]^{r-1}\left[\int_{y_r}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-1}$$

با استفاده از قضیه میانگین در حسابان داریم:

$$\left[\int_{y_r}^{y_r+h} f(x)dx\right] = f(\xi).h \qquad y_r \le \xi \le y_r + h$$

و در زمانی که $h \to 0$ خواهیم داشت

$$\lim_{h \to 0} \int_{y_r}^{y_r+h} f(x)dx = f(y_r)$$

و سرانجام

$$g_r(y_r)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x)dx\right]^{r-1} f(y_r)\left[\int_{y_r}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-1}$$

بر این اساس توزیع اولین، آخرین و میانه آماره ترتیبی عبارتست از

الف – توزیع اولین آماره ترتیبی

$$g_1(y_1)=nf(y_1)\left[\int_{y_1}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-1} \qquad -\infty \le y_1 \le +\infty$$

ب- توزیع آخرین آماره ترتیبی

$$g_n(y_n)=nf(y_n)\left[\int_{-\infty}^{y_n} f(x)dx\right]^{n-1} \qquad -\infty \le y_n \le +\infty$$

ج – در نمونه‌ای تصادفی به اندازه $n=2m+1$ توزیع $\tilde{x}=y_{m+1}$ میانه آماره‌های ترتیبی عبارتست از

$$h(\tilde{x})=\frac{(2m+1)!}{m!m!}\left[\int_{-\infty}^{\tilde{x}} f(x)dx\right]^{m} f(\tilde{x})\left[\int_{\tilde{x}}^{\infty} f(x)dx\right]^{m} \qquad -\infty \le \tilde{x} \le +\infty$$

د - در نمونه‌ای تصادفی به اندازه $n=2m$ توزیع $\tilde{x}$ میانه آماره‌های ترتیبی عبارتست از

$$h(\tilde{x})=\frac{g_m(y_m)+g_{m+1}(y_{m+1})}{2}$$

ه- چگالی توام $g_{r,j}(y_1,y_j)$ عبارتست از

$$g_{r,j}(y_r,y_j)=\frac{n!}{(r-1)!(j-r-1)!(n-j)!}\left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x)dx\right]^{r-1} f(y_r)\left[\int_{y_r}^{y_j} f(x)dx\right]^{j-1-1} f(y_j)\left[\int_{y_j}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-j}$$

مثال: فرض کنید $x_1,\ldots\ldots,x_n$ یک نمونه تصادفی nتایی از یک جامعه‌ای نمایی با $\lambda=1$ باشد. تابع چگالی اولین و اخرین آماره ترتیبی را بدست آورید.

$$g_1(y_1)=ne^{-y_1}\left[\int_{y_1}^{\infty} e^{-x}dx\right]^{n-1} = ne^{-y_1}(e^{-y_1})^{n-1}=ne^{-ny_1}$$

$$g_n(y_n)=ne^{-y_n}\left[\int_{-\infty}^{y_n} e^{-x}dx\right]^{n-1} = ne^{-y_n}(1-e^{-y_n})^{n-1}$$

فهرست

1- مقدمه

نظریه برآورد به دو موضوع برآورد نقطه‌ای و برآورد فاصله‌ای می‌پردازد. در برآورد نقطه‌ای یک آماره، تنها یک مقدار عددی بکار می‌رود تا بتوان به کمک آن یک پارامتر بخصوصی از جامعه را برآورد نمود در حالیکه در برآورد فاصله‌ای، یک فاصله مخصوصی معین می‌گردد که مقدار واقعی پارامتر در داخل این فاصله قرار دارد.

2- برآورد نقطه‌ای(Point Estimator)

یک مقدار به خصوصی از یک آماره که برای برآورد یک پارامتر مشخص به کار می‌رود به نام برآورد نقطه ای نامیده می شود. می توان مساله کلی برآورد نقطه‌ای را به شرح ذیل بیان کرد:
متغیر تصادفی X، با تابع چگالی احتمال $f_X(x;\theta)$ مفروض است که در آن پارامتر θ مجهول می‌باشد. یک نمونه تصادفی، $x_n,......,x_2,x_1$ از این جامعه انتخاب می‌نماییم و بر اساس تابعی از این نمونه تصادفی، $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,......,x_n)$، مقدار پارامتر θ را برآورد می‌کنیم. در این صورت متغیر تصادفی $\hat{\theta}$ یک برآورد کننده برای پارامتر θ و مقداری که $\hat{\theta}$ می‌گیرد برآورد نقطه‌ای θ نامیده می‌شود.
بدیهی است، برای پارامتر θ، تعداد زیادی برآوردکننده وجود دارد. اما یک برآوردکننده خوب آن است که تا حد ممکن به مقدار واقعی پارامتر نزدیک باشد. در اینجا این سوال مطرح می‌شود که از بین تخمین زننده‌های مختلف برای پارامتر θ کدام بهتر است؟
از آنجایی که تخمین زننده‌ها، متغیرهای تصادفی هستند پس عملکرد آنها را نمی‌توان برای یک مورد خاص مدنظر قرار دارد. بنابراین برآوردکننده‌ها باید براساس عملکردشان در بلندمدت مورد ارزیابی قرار گیرند.

3- ارزیابی یک تخمین زننده یا مقایسه برآوردکننده ها

در برآورد پارامتر θ که بر اساس مقادیر نمونه تعیین می شود، در ابتدا تابع ضرر (زیان) به صورت ذیل تعریف می کنیم:

$$\ell(\hat{\theta},\theta)=(\hat{\theta}-\theta)^2$$

از آنجایی که تابع زیان یک متغیر تصادفی است بنابراین منطقی بنظر می‌رسد از امید ریاضی تابع

زیان تحت عنوان تابع ریسک برای نیل به ارزیابی بهتر استفاده شود. تابع ریسک عبارتست از:

$$R(\hat{\theta},\theta)=MSE=E\left[l(\hat{\theta},\theta)\right]=E(\hat{\theta}-\theta)^2$$

3-1- مقایسه دو برآوردکننده از طریق سنجش کارآیی نسبی آنها

اگر برآورد کننده $\hat{\theta}_1$ دارای میانگین مربع خطای $E(\hat{\theta}_1-\theta)^2$ (که آنرا با MSE1 نشان می‌دهند) و برآوردکننده $\hat{\theta}_2$ دارای میانگین مربع خطای $E(\hat{\theta}_2-\theta)^2$ (که آنرا با MSE2 نشان می‌دهند) باشد در این صورت کارایی $\hat{\theta}_2$ نسبت به $\hat{\theta}_1$ بصورت $\frac{MSE_1}{MSE_2}$ یا $\frac{E(\hat{\theta}_1-\theta)^2}{E(\hat{\theta}_2-\theta)^2}$ تعریف می‌شود. اگر کارایی $\hat{\theta}_2$ نسبت به $\hat{\theta}_1$ کمتر از یک باشد، $\hat{\theta}_1$ برآورد کننده ای بهتر از $\hat{\theta}_2$ برای θ به شمار می آید. در غیر این صورت $\hat{\theta}_2$ برآوردکننده ای بهتر از $\hat{\theta}_1$ برای θ است.

3-2- تعریف تخمین زننده بهینه

تخمین زننده بهینه به تخمین زننده‌ای گفته می‌شود که MSE مربوط به آن، از MSE سایر تخمین زننده ها به ازای تمام مقادیر θ کمتر باشد. به عنوان مثال $\overline{X}$ یک تخمین زننده بهینه μ مربوط به توزیع نرمال می باشد.

3-3- برآوردکننده های نااریب

$\hat{\theta}$ یک برآوردکننده نااریب برای θ است اگر امید ریاضی آن با θ مساوی شود. یعنی اگر به ازای تمام مقادیر θ داشته باشیم:

$$E(\hat{\theta})=\theta$$

اگر یک برآوردکننده ناریب نباشد، اریب نامیده می شود و مقدار $b=E(\hat{\theta})-\theta$ به عنوان اریبی شناخته می شود. در اینصورت، اگر $b>0$ باشد اریبی مثبت و اگر $b<0$ باشد اریبی منفی است. در اینصورت میانگین مربعات خطا بر حسب مقدار اریبی عبارتست از:

$$MSE(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-\theta)^2=Var(\hat{\theta})+b^2$$

نکته: اگر متغیر تصادفی T یک برآوردکننده نااریب برای پارامتر مجهول θ باشد و $Var(T)\neq 0$ در این صورت T^2 همواره برای θ^2 اریب است.

مثال: دو برآوردکننده $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ برای پارامتر θ به شرح ذیل بیان شده است:

$$\begin{cases}E(\hat{\theta}_1)=\theta\\ Var(\hat{\theta}_1)=7\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}E(\hat{\theta}_2)=\frac{2}{3}\theta\\ Var(\hat{\theta}_2)=3\end{cases}$$

بر حسب مقادیر مختلف θ این دو تخمین زننده را مقایسه کنید.

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + b^2$$
$$MSE(\hat{\theta}_1) = 7 + \left[E(\hat{\theta}_1) - \theta_1\right]^2 = 7 + (0)^2 = 7$$
$$MSE(\hat{\theta}_2) = 3 + \left[E(\hat{\theta}_2) - \theta_2\right]^2 = 3 + \left(\frac{2}{3}\theta - \theta\right)^2 = 3 + \frac{1}{9}\theta^2$$

اگر $\hat{\theta}_2$ برآورد کننده بهتری برای θ باشد آنگاه:

$$MSE(\hat{\theta}_1) > MSE(\hat{\theta}_2)$$
$$7 > 3 + \frac{\theta^2}{9} \rightarrow -6 < \theta < 6$$

مثال 1: متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2 است. یک نمونه تصادفی 9 تایی می‌گیریم و 2 برآورد کننده نقطه‌ای $T_1 = 0.1\sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{x})^2$ و $T_2 = 0.125\sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{x})^2$ را برای σ^2 تعریف می‌کنیم اگر $Var(T_1) = 0.16\sigma^4$ و $Var(T_2) = 0.25\sigma^4$ باشد. کارایی T_1 نسبت به T_2 برابر است با:

$$\frac{T_1 \text{ کارایی}}{T_2 \text{ کارایی}} = \frac{MSE_2}{MSE_1} = \frac{Var(T_2) + (E(T_2) - \sigma^2)^2}{Var(T_1) + (E(T_1) - \sigma^2)^2} = \frac{0.25\sigma^4}{0.16\sigma^4 + 0.04\sigma^4} = 1.25$$

$$E(T_1) = 0.1 \times 8 \times \sigma^2 = 0.8\sigma^2$$
$$E(T_2) = 0.125 \times 8\sigma^2 = \sigma^2$$

مثال 2: اگر X_1 و X_2 و X_3 یک نمونه تصادفی از جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند، کارائی نسبی برآورد کننده $\bar{X}$ (میانگین نمونه) نسبت به برآوردکننده $\frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{4}$ چقدر است؟

$$\frac{\bar{x} \text{ کارایی}}{y \text{ کارایی}} = \frac{MSE(y)}{MSE(\bar{x})} = \frac{Var(y)}{Var(\bar{x})} = \frac{\frac{1}{16} \times 6\sigma^2}{\frac{\sigma^2}{3}} = \frac{9}{8}$$

مثال 3: فرض کنید T_1 و T_2 برآوردکننده های θ هستند و بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} E(T_1)=\theta \\ Var(T_1)=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} E(T_2)>\theta \\ Var(T_2)=2 \end{cases}$$

و $[E(T_2)-\theta]^2 = 7$ است. کدام برآوردکننده بهتری برای θ است؟

$$MSE_{T_1} = Var(T_1)+b^2 = 4+0=4$$

$$MSE_{T_2} = Var(T_2)+[E(T_2)-\theta]^2 = 2+7=9$$

چون $\frac{MSE_{T_1}}{MSE_{T_2}}<1$ است لذا T_1 برآوردکننده بهتری برای θ است.

مثال 4: فرض کنید T بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی، برآوردکننده‌ای برای θ باشد. اگر $E(x_i)=\theta$ و $T=\sum a_i x_i$ باشد. a_i ها چه محدودیتی باید داشته باشند تا T یک برآوردکننده ناریب θ شود؟

$$T=\sum a_i x_i \rightarrow E(T)=E\left[\sum a_i x_i\right]=\sum\left[E(a_i x_i)\right]=\sum\left[a_i E(x_i)\right]$$

چون T یک برآوردکننده ناریب θ است لذا:

$$\theta=\sum(a_i\theta)=\theta=\theta\sum a_i \rightarrow \sum a_i=1$$

مثال 5: فرض کنید $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ باشد. اگر $\hat\theta_1$ و $\hat\theta_2$ دو تخمین زننده برای پارامتر σ^2 باشند، آنها را مقایسه کنید.

$$\hat\theta_1=\frac{\sum(x_i-\bar x)^2}{n-1} \qquad ,\ \hat\theta_2=\frac{\sum(x_i-\bar x)^2}{n+1}$$

$$E(\hat\theta_1)=E(S^2)=\sigma^2 \quad ,\ Var(\hat\theta_1)=Var(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1} \quad ,\ MSE(\hat\theta_1)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$E(\hat\theta_2)=E\left[\frac{(n-1)S^2}{(n+1)}\right]=\frac{n-1}{n+1}\sigma^2$$

$$Var(\hat\theta_2)=Var\left[\frac{(n-1)}{(n+1)}S^2\right]=\frac{2(n-1)}{(n+1)^2}\sigma^4$$

$$MSE(\hat\theta_2)=\frac{2(n-1)}{(n+1)^2}\sigma^4+\left[\frac{n-1}{n+1}\sigma^2-\sigma^2\right]^2=\frac{2\sigma^4}{n+1}$$

$MSE(\hat\theta_1)>MSE(\hat\theta_2)\Rightarrow$ $\hat\theta_2$ برآورد کننده بهتر از $\hat\theta_1$ برای پارامتر σ^2 است

3-4- برآوردکننده های سازگار

خاصیت نااریبی بر حسب تکرار آزمایش‌ها بیان شده است اما خاصیت سازگاری مربوط به رفتار یک تخمین زننده در یک آزمایش است وقتیکه حجم نمونه اجازه یابد بسیار بزرگ شود.

تعریف: گفته می شود برآورد کننده $\hat{\theta}_{(n)}$ یک برآورد کننده سازگار است هرگاه:

1- $\hat{\theta}_{(n)}$ نااریب باشد.

2-با بزرگ شدن اندازه نمونه (n) داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\theta}_{(n)}=\theta \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}_{(n)}\right)=0$$

نماد $\hat{\theta}_{(n)}$ به کار می رود تا نشان دهد که ممکن است برآوردکننده تابعی از نمونه تصادفی باشد.

بطور کلی برآوردکننده‌هایی که تابع ریسک آنها، با بزرگ شدن اندازه نمونه به سمت صفر میل می‌گراید، برآوردکننده های سازگارند.

اگر این برآوردکننده ها اریب باشند، مقدار اریبی آنها نیز به سمت صفر میل می کند.

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{MSE}_{\theta}\left(\theta_n\right)=0$$

مثال 6: نمونه تصادفی $x_1,\ldots\ldots,x_n$ را از متغیر تصادفی دلخواه X با میانگین μ واریانس σ^2 در نظر می گیریم. فرض کنید:

$$\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum x_i; \qquad U_n=\bar{x}_n+1$$

نشان دهید که $\overline{X}_n$ یک برآوردکننده سازگار و U_n یک برآوردکننده ناسازگار برای μ می باشد.

$\overline{X}_n$ یک برآوردکننده سازگار نااریب برای μ است.

$$E\left(\overline{X}_n\right)=\mu\ , \ \lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}\left(\overline{X}_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n}=0$$

U_n یک برآوردکننده ناسازگار است.

$$E\left(U_n\right)=E\left(\overline{X}_n+1\right)=\mu+1$$

نکته: سازگاری یک خاصیت مجانبی است یعنی خاصیت حدی یک برآوردکننده است. به عبارت دیگر وقتی n به حد کافی بزرگ است می توانیم عملاً مطمئن باشیم که خطایی که با یک برآوردکننده سازگار صورت می گیرد از هر ثابت مثبت مفروضی کمتر خواهد بود.

نکته: شرط کافی (نه لازم) برای اینکه آماده $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده سازگار پارامتر θ باشد این است که:

1) $\hat{\theta}$ نااریب باشد.

2)وقتی $n \to \infty$ ، $\operatorname{Var}(\hat{\theta}) \to 0$

این شرط، شرط کافی است و شرط لازم نیست. لذا یک برآوردکننده می تواند سازگار باشد بدون اینکه نااریب باشد.

مثال 7: نشان دهید برآوردکننده $\frac{x+1}{n+2}$ یک برآوردکننده سازگار پارامتر θ جامعه دو جمله ای است.

نکته: یک برآوردکننده اریب تنها وقتی می تواند سازگار باشد که بطور مجانبی نااریب باشد یعنی وقتی $n \to \infty$ نااریب باشد.

مثال 8: برآوردکننده مینیماکس پارامتر θ ی دو جمله ای یعنی $\frac{X+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$ مجانباً نااریب است.

$$E\left(\frac{x+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\right)=\frac{E(x)+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}+\frac{n\theta+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\neq\theta$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{x+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\theta+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}=\theta$$

مثال 9: نشان دهید که واریانس نمونه ای S^2، برآوردکننده سازگار σ^2 برای یک نمونه تصادفی از جامعه های نرمال است.

1) $E(S^2)=\sigma^2$ نااریب است S^2

2) $\operatorname{Var}(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}(S^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sigma^4}{n-1}=0$$

مثال 10: نشان دهید که $\bar{x}^2$ یک برآوردکننده مجانباً نااریب μ^2 است.

$$E(\bar{x}^2) = Var(\bar{x}) + [E(\bar{x})]^2$$

$$E(\bar{x}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

$$\lim_{n\to\infty} E(\bar{x}^2) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = \mu^2$$

پس $\bar{x}^2$ یک برآوردکننده مجانباً ناااریب است.

5-3- تخمین زننده های ناااریب کارا

اگر برآوردکننده‌های پارامتر θ متعلق به طبقه برآوردکننده ناااریب باشند تابع ریسک، همان واریانس برآوردکننده می‌شود. در صورت وجود، برآوردکننده بهینه، $\hat{\theta}_0$، در میان این طبقه برآوردکننده ای است که به ازای تمام مقادیر θ واریانس آن از واریانس هیچ برآوردکننده ناااریب دیگر تجاوز نکند. اگر چنین تخمین زننده ای وجود داشته باشد تخمین زننده $\hat{\theta}_0$ به تخمین زننده ناااریب با حداقل واریانس θ معروف بوده و نیز در این طبقه از همه کاراتر است.

برای جستجو برای یک چنین برآورد کننده‌ای، تعیین یک حد پائین برای واریانس تمام برآوردکننده های ناااریب مفید خواهد بود. یک چنین حدی بوسیله یک نامساوی مشهور به نامساوی کرایمر- رائو ارائه می شود.

فرض کنید $\hat{\theta}$، یک برآورد کننده ناااریب برای پارامتر θ از جامعه‌ای با تابع چگالی $f_x(x;\theta)$باشد. تحت شرایط بسیار کلی $\hat{\theta}$ در نامساوی ذیل صدق می‌کند.

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial Lnf(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]}$$

است. اگر X گسسته باشد، $f_x(x;\theta)$ را برداشته و به جای آن از $P(x,\theta)$ استفاده می کنیم.

متاسفانه همواره برآوردکننده‌ای که عملاً دارای حد پائین کریمر- رائو باشد وجود ندارد. اما در بسیاری از موارد می‌توان نشان داد که برآوردکننده‌ای مانند $\hat{\theta}_0$ دارای چنین حدی است در این صورت $\hat{\theta}_0$ باید برآوردکننده بهینه ناااریب باشد. به عبارت دیگر حد پائین کریمر- رائو متعلق به

تخمین زننده نااریب بهینه است.

قضیه: اگر $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده نااریب θ باشد و $Var(\hat{\theta})=\frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial Lnf(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]}$ باشد، آنگاه $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده نااریب با کمترین واریانس از θ است.

مثال11: نشان دهید $\overline{X}$ یک برآوردکننده نااریب با کمترین واریانس برای میانگین جامعه نرمال است.

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

$$f_X(x;\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad ; \qquad -\infty < x < \infty$$

$$Ln\, f_X(x;\mu)= Ln\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2$$

$$\frac{d\,Ln\, f_X(x;\mu)}{d\mu}=\frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

$$E\left\{\frac{d\,Ln\, f_X(x;\mu)}{d\mu}\right\}^2=\frac{E(x-\mu)^2}{\sigma^4}=\frac{\sigma^2}{\sigma^4}=\frac{1}{\sigma^2}$$

$$\frac{1}{nE\left\{\frac{d\,Ln\, f_X(x;\mu)}{d\mu}\right\}^2}=\frac{\sigma^2}{n} \qquad (1)$$

$$Var(\overline{x})=\frac{\sigma^2}{n} \qquad (2)$$

$$(1)=(2)$$

لذا واریانس میانگین نمونه به حد پائین کریمر-رائو می رسد. بنابراین $\overline{X}$ برآوردکننده نااریب کمترین واریانس برای میانگین توزیع نرمال با واریانس معلوم است.

4- روش‌های برآورد نقطه‌ای

4-1- روش گشتاورها

فرض کنید $x_1,.....,x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از یک توزیع دلخواه باشد. در اینصورت k امین گشتاور نمونه M'_k حول مبدا امین گشتاور توزیع حول مبدا بترتیب عبارتست از $M'_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^k}{n}$ و $E(X^k)$ که گشتاور توزیع حول مبدا، عموماً توابعی از p پارامتر مجهول است. در روش گشتاورها با برابر قرار دادن p گشتاور اول توزیع با گشتاورهای نظیر نمونه

$$M'_1 = E(x) \qquad \bar{x} = E(x)$$
$$M'_2 = E(x^2) \qquad \frac{\sum x_i^2}{n} = E(x^2)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$M'_p = E(x^p) \qquad \frac{\sum x_i^p}{n} = E(x^p)$$

و حل دستگاه حاصل پارامترهای مجهول جامعه بدست می‌آید. بطور خلاصه: این روش عبارتست از مساوی قرار دادن گشتاورهای جامعه با گشتاورهای نمونه و بعد حل دستگاه معادلات حاصل.

مثال12: برآورد کننده های μ و σ^2 یک جامعه نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2 را به روش گشتاورها تعیین کنید.

برای یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال داریم:

$$E(x) = \mu$$
$$E(x^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

در این صورت با مساوی قرار دادن دو گشتاور اول نمونه با دو گشتاور اول توزیع داریم:

$$\bar{x} = \mu$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

می انجامد. از حل توام این معادلات، برآورد کننده های روش گشتاورها عبارتند از:

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

مثال13: اگر $x_1,\dots\dots,x_n$ مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه‌ای با چگالی

$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{2(\theta - x)}{\theta^2} & ; \ 0 < x < \theta \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$ باشد. برآورد کننده ای برای θ به روش گشتاورها پیدا کنید.

$$E(x) = \int_0^\theta x \frac{2(\theta - x)}{\theta^2} dx = \frac{2}{\theta^2} \int_0^\theta (\theta x - x^2) dx = \frac{2}{\theta^2} \left[\frac{1}{2} \theta x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^\theta = \frac{2}{\theta^2} \left(\frac{1}{2} \theta^3 - \frac{1}{3} \theta^3 \right) =$$

$$\frac{2}{\theta^2} . \frac{1}{6} \theta^3 = \frac{1}{3} \theta$$

$$M_1' = E(x)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{3} \theta \rightarrow \hat{\theta} = 3\bar{x}$$

مثال14: اگر $x_1,\dots\dots,x_n$ مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه هندسی باشد. برآورد کننده پارامتر θ ی توزیع را به روش گشتاورها بدست آورید.

$$f_x(x;\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}$$

$$E(x) = \frac{1}{\theta} \qquad \bar{x} = \frac{1}{\theta} \rightarrow \theta = \frac{1}{x}$$

مثال15: نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه گاما داریم. برای برآورد کردن پارامترهای α و β روش گشتاورها را بکار ببرید.

$$\left. \begin{aligned} &\bar{x} = \alpha\beta \\ &\frac{\sum x_i^2}{n} = \alpha\beta^2 + \bar{x}^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{\alpha} = \frac{n\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad , \quad \hat{\beta} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n\bar{x}}$$

مثال16: اگر $x_1,\dots\dots,x_n$ مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه بتا با $\beta = 1$ باشد برآوردی برای پارامتر α به روش گشتاورها بدست آورید.

$$f_x(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

$$E(x)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\qquad \bar{x}=\frac{\alpha}{\alpha+1}\rightarrow\hat{\alpha}=\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}$$

مثال17: تابع چگالی زیر داده شده است که در آن θ پارامتر مجهول می باشد. θ را به روش گشتاورها تخمن بزنید.

$$f_x(x)=\theta x^{\theta-1}\quad ;\quad 0<x<1\quad ;\ 0<\theta<\infty$$

$$E(x)=\int_0^1 x\theta x^{\theta-1}dx=\theta\int_0^1 x^{\theta}dx=\frac{\theta}{\theta+1}\left[x^{\theta+1}\right]_0^1=\frac{\theta}{\theta+1}$$

$$\frac{\theta}{\theta+1}=\bar{x}\rightarrow\hat{\theta}=\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}$$

4-2- روش حداکثر درستنمایی (روش MLE)

این روش عبارتست از حداکثر کردن درست نمایی احتمال بدست آوردن یک مجموعه از مقادیر نمونه تصادفی. فرض کنید $x_1,x_2,.....,x_n$ یک نمونه به حجم n از یک جامعه پیوسته با چگالی احتمال $f_x(x,\theta)$ یا گسسته با احتمال $P_x(x,\theta)$ باشد که θ یک پارامتر مجهول است و باید برآورد شود. در حقیقت می خواهیم بجای برآورنده θ، آن تابعی از مشاهدات نمونه ای را قرار دهیم که احتمال نمونه به ازای آن حداکثر شود. تابع احتمال L را بصورت:

$$L=P(x_1,x_2,....,x_n|\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i=x_i)$$

$$L=f_x(x_1,x_2,....,x_n|\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_x(x_i,\theta)$$

تعریف می کنیم که همان احتمال توام برای مشاهدات نمونه است. تخمین θ باید به گونه‌ای صورت پذیرد که بیشترین احتمال برای مشاهده مقادیر $x_1,x_2,.....,x_n$ حاصل شود. به عبارت دیگر تخمین زننده بیشترین احتمال $\hat{\theta}$ مقداری خواهد بود که به ازای آن تابع L حداکثر شود. به تابع L، تابع درست نمایی می‌گویند و $\hat{\theta}$ حاصل از این روش را با نماد $\hat{\theta}=MLE(\theta)$ نمایش می دهیم.

توجه: اغلب در حداکثر کردن تابع $f(x_1,....,x_n|\theta)$ راحت‌تر است که Ln آن حداکثر شود زیرا

Ln(L) یک تابع صعودی یکنواخت از L است و θ که L را ماکزیمم می‌کند Ln(L) را نیز ماکزیمم می کند.

مثال18: اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از یک جامعه نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ باشد، برآورد کننده ای برای μ و σ بیابید.

$$L = f(x_1, \ldots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2} =$$

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$LnL = -n\,Ln\,\sigma\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial Ln\,L}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial\delta} = -\frac{n}{\delta} + \frac{1}{\delta^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

مثال19: اگر x_1 . .. x_n مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه برنولی باشد. MLE پارامتر برنولی را بدست آورید.

$$p_x(x_i, p) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}, x_i = 0,1$$

$$L = p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}$$

$$LnL = (Lnp)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + [Ln(1-p)]\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\frac{dLnL}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - n - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i}{p} = \frac{n-\sum x_i}{1-p} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_1 = np \Rightarrow p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

مثال20: اگر x_1 و... وx_2 نمونه ای به اندازه n از جامعه دو جمله ای با پارامتر $p = \theta$ باشد. MLE

پارامتر دوجمله‌ای را بدست آورید.

راه حل اول: $L(\theta)=f(x;\theta)=\binom{n}{n}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=\binom{n}{x}\left[x\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x}-(n-x)\theta^{x}(1-\theta)^{n-x-1}\right]=0$$

$$f_x(x;\theta)\left[x\theta^{-1}-(n-x)(1-\theta)^{-1}\right]=0$$

$$\frac{x}{\theta}-\frac{n-x}{1-\theta}=0\Rightarrow x=n\theta\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{x}{n}$$

راه حل دوم:

$$\mathrm{Ln}\,L(\theta)=\mathrm{Ln}\binom{n}{x}+x\mathrm{Ln}\theta+(n-x)\mathrm{Ln}(1-\theta)$$

$$\frac{d\mathrm{Ln}L(\theta)}{d\theta}=\frac{x}{\theta}-\frac{n-x}{1-\theta}=0\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{x}{n}$$

خواص MLE

1- با افزایش n توزیع MLE به توزیع نرمال میل می‌کند و درزمانیکه $\mathrm{MLE}, n\to\infty$ توزیع نرمال دارد.

2-در زمانیکه $n\to\infty$ ، MLE سازگار است و به تبع ناریب است.

3- اگر $\hat{\theta}$ برآورد کننده به روش حداکثر درست نمایی برای θ باشد و n به سمت ∞ میل کند. انگاه واریانس $\hat{\theta}$برابر حد پایین نامساوی کرایمر – رائو خواهد شد.

4- MLE دارای خاصیت پایایی است یعنی اگر فرض کنید $\hat{\theta}=(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_k)$ که در آن $\hat{\theta}_j=\hat{f}(x_1,\ldots,x_n)$ است که برآوردکننده درستنمایی ماکزیمم $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_4)$ در چگالی $f(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ باشد، آنگاه برآوردکننده درستنمایی ماکزیمم $\tau(\theta)=(\tau_1(\theta),\ldots,\tau_r(\theta))$ برابر است با $\tau(\hat{\theta})=(\tau_1(\hat{\theta}),\ldots,\tau_r(\hat{\theta}))$

مثال21: فرض کنید $x\sim N(\mu,1)$ برآورد کننده MLE پارامتر $\alpha=\mu^2$ را پیدا کنید.

$$\hat{\mu}=\overline{x}\Rightarrow\hat{\alpha}=\hat{\mu}^2=\overline{x}^2$$

5- برآوردکننده های کافی

برآورد کننده ای مانند $\hat{\theta}$ را کافی می نامیم در صورتی که از همه اطلاعات یک نمونه، مربوط به برآورد پارامتر θ یک جامعه بهره‌برداری کند. یعنی اگر تمام دانشی را که می توانیم با مشخص کردن مقادیر فردی نمونه ها و ترتیب آنها بدست آوریم، بتوانیم تنها با مشاهده مقدار آماره $\hat{\theta}$ هم بدست آوریم. این را می توان بر حسب توزیع شرطی مقادیر نمونه به فرض $\hat{\theta}$ بیان کرد. این کمیت با عبارت زیر داده می شود.

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n \middle| \hat{\theta}\right) = \frac{f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \hat{\theta}\right)}{g\left(\hat{\theta}\right)}$$

اگر این عبارت به $\hat{\theta}$ بستگی داشته باشد، مقادیر خاص $x_n, \ldots, x_2, x_1$ که $\hat{\theta}$ را بدست می دهند برای برخی مقادیر θ محتملتر از سایر مقادیرند و دانستن این مقادیر نمونه ای به برآورد θ کمک خواهد کرد. اگر این عبارت به θ بستگی نداشته باشد، مقادیر خاص $x_n, \ldots, x_2, x_1$ که $\hat{\theta}$ را بدست می دهند برای هر مقدار θ به یک اندازه محتمل اند و دانستن این مقادیر نمونه ای به برآورد θ کمکی نخواهد کرد.

تعریف: آماره $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده کافی پارامتر θ است اگر و تنها اگر به ازای هر مقدار $\hat{\theta}$، توزیع شرطی نمونه تصادفی $x_n, \ldots, x_2, x_1$ به فرض $\hat{\theta}$، مستقل از θ باشد.

مثال22: اگر $x_n, \ldots, x_2, x_1$ متغیرهای تصادفی برنولی با پارامتر یکسان θ باشند. نشان دهید که آماره $\hat{\theta} = \frac{X}{n}$ که در آن $X = x_1 + \ldots + x_n$، برآورد کننده کافی برای θ است.

$$f(x;\theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} \qquad ; \quad x_i = 0,1$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i} = \theta^{x}(1-\theta)^{n-x} = \theta^{n\hat{\theta}}(1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}$$

X یک متغیر دو جمله ای با پارامترهای n و θ است لذا:

$$b(x;n,\theta)=\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$$

$$g(\hat{\theta})=\binom{n}{n\hat{\theta}}\theta^{n\hat{\theta}}(1-\theta)^{n-n\hat{\theta}} \quad ; \qquad \hat{\theta}=0,\frac{1}{n},\ldots\ldots,1$$

$$f(x_1,\ldots.,x_n|\hat{\theta})=\frac{f(x_1,\ldots.,x_n)}{g(\hat{\theta})}=\frac{\theta^{n\hat{\theta}}(1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}}{\binom{n}{n\hat{\theta}}\theta^{n\hat{\theta}}(1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}}=\frac{1}{\binom{n}{x}}$$

که بهθ بستگی ندارد.

مثال23: نشان دهید که آماره $y=\frac{1}{6}(x_1+2x_2+3x_3)$ برای برآورد پارامتر θ ی جامعه برنولی، کافی نیست.

باید نشان دهیم $f(x_1,x_2,x_3|y)=\frac{f(x_1,x_2,x_3,y)}{g(y)}$ به ازای برخی مقادیر x_3,x_2,x_1 مستقل از θ نیست. بنابراین حالت خاصی را در نظر می گیریم که در آن $x_3=0,x_2=1,x_1=1$ بطوری که

$$f\left(1,1,0\middle|y=\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left(x_1=1,x_2=1,x_3=0,y=\frac{1}{2}\right)}{p\left(y=\frac{1}{2}\right)}=\frac{f(1,1,0)}{f(1,1,0)+f(0,0,1)}=\frac{\theta^2(1-\theta)}{\theta^2(1-\theta)+\theta(1-\theta)^2}=\theta$$

که به θ بستگی دارد.

قضیه: آماره θ یک برآوردکننده کافی پارامتر θ است اگر و فقط اگر چگالی یا توزیع احتمال توام نمونه تصادفی را بتوان تجزیه کرد بطوری که

$$f(x_1,\ldots.,x_n;\theta)=g(\hat{\theta},\theta)h(x_1,\ldots.,x_n)$$

که در آن $g(\hat{\theta},\theta)$ تنها به $\hat{\theta}$ و θ بستگی دارد و $h(x_1,\ldots.,x_n)$ به θ بستگی ندارد.

مثال24: نشان دهید که $\bar{x}$ یک برآورد کننده کافی μ جامعه نرمال یا واریانس معلوم σ^2 است.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n .e^{-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\sum(x_i-\mu)^2 = \sum(x_i-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-\mu)^2$$

$$f(x_1, \ldots, x_n; \mu) = \left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}\right\} \times \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{n-1} .e^{-\frac{1}{2}.\sum\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2}\right\}$$

که در آن اولین عامل سمت راست تنها به برآورد $\bar{x}$ و به میانگین جامعه، μ، بستگی دارد و دومین عامل شامل μ نیست. بنابراین $\bar{x}$ یک برآورد کننده کافی μ جامعه نرمال با واریانس معلوم σ^2 است.

3-1- مقدمه

نوع دیگر برآورد، برآورد فاصله ای به شکل $[C_1,C_2]$ است که در آن C_1 حد پائین و C_2 حد بالا است بنابراین اگر پارامتری که باید برآورد کرده شود با θ معرفی شود، $[C_1,C_2]$ یک برآورد کنندهٔ فاصله ای θ است به طوری که با احتمال مفروض، $1-\alpha$، $C_1 \le \theta \le C_2$ باشد. C_2,C_1 حدود اطمینان پارامتر مفروض و فاصله بین آنها یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ نامیده می شود. به کسر $(1-\alpha)$ اغلب ضریب اطمینان گفته می شود.

3-2- فاصله اطمینان برای میانگین یک توزیع نرمال هرگاه انحراف معیار معلوم باشد

فرض کنید متغیر تصادفی x دارای توزیع نرمال $N(\mu,\sigma)$ است. یک نمونه تصادفی n تـایی از ایـن جامعه گرفته می‌شود. اگر $\bar{x}$ میانگین نمونه باشد در نتیجه $\bar{x} \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ است. در ایـن‌صـورت فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ به صورت ذیل تعیین می‌شود:

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim Z$$

$$p\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{x}-\mu \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\bar{x}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{x}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}\right\} = 1-\alpha$$

بنابراین فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ عبارتست از:

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}$$

یعنی:

$$\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}$$

و طول فاصله اطمینان برابر است با:

$2z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}$

در نهایت فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ عبارت است از:

$$p(z \ge -z_{\alpha})=1-\alpha \qquad p(z \le z_{\alpha})=1-\alpha$$
$$p\left\{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge -z_{\alpha}\right\}=1-\alpha \qquad p\left\{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{\alpha}\right\}=1-\alpha$$
$$\mu \le \bar{x}+z_{\alpha}\sigma/\sqrt{n} \qquad \mu \ge \bar{x}-z_{\alpha}\sigma/\sqrt{n}$$

مثال1. میانگین نمونهٔ یک نمونه تصادفی 100 تایی از موشک‌های انبار شده 2208 شده است. انحراف معیار معلوم و مساوی 40 است. برای میانگین واقعی یک فاصله اطمینان 0/99 پیدا کنید.

$$p\left(\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$
$$2208-z_{.005}40.10 \le \mu \le 2208+z_{.005}40.10$$

مثال2. متغیر تصادفی x توزیع نرمال با میانگین مجهول μ دارد. یک فاصله اطمینان 95 درصد بصورت [7/12و 3/72] برای μ ارائه شده است. بدین ترتیب، مقدار بدست آمده برای میانگین نمونه چقدر است؟

$$\bar{x}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}=7.12$$
$$\bar{x}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}=3.72$$
$$2\bar{x}=10.84 \Rightarrow \bar{x}=5.42$$

تذکر: بنا به قضیه حد مرکزی، فاصله اطمینان فوق را در صورتی که $n \ge 30$ باشد، می‌توان در مورد جامعه‌های غیر نرمال نیز به کار برد و در زمانی که σ نامعلوم است به جای σ ، مقدار انحراف معیار نمونه ای s را قرار می دهیم.

3-3- فاصله اطمینان برای میانگین یک توزیع نرمال هرگاه انحراف معیار مجهول باشد

فرض کنید x یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار (مجهول) σ باشد. یک نمونه تصادفی n تایی گرفته و فرض کنید $\bar{x}$ میانگین نمونه و S انحراف معیار نمونه باشد. در این صورت فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ بصورت ذیل بدست می آید.

$$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}=t_{(n-1)}$$

$$p\left\{-t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\le t_{(n-1)}\le t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right\}=1-\alpha$$

$$p\left\{-t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\le \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\le t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right\}=1-\alpha$$

$$p\left\{-t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\le \bar{x}-\mu\le t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$$

$$p\left\{x-t_{\frac{\alpha}{2},n-1}s/\sqrt{n}\le \mu\le \bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2},n-1}s/\sqrt{n}\right\}=1-\alpha$$

بنابراین فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ عبارتست از:

$$\bar{x}\pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1}s/\sqrt{n}$$

بعبارت دیگر:

$$\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2},n-1}s/\sqrt{n}\le \mu\le \bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2},n-1}s/\sqrt{n}$$

طول فاصله اطمینان برابر است با:

$$2t_{\frac{\alpha}{2},n-1}s/\sqrt{n}$$

و در نهایت فاصله اطمینان یکطرفه برای μ:

$$p\left\{-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \le t_{n-1}\right\} = 1-\alpha \qquad p\left(t_{n-1} \le t_{\alpha}\right)$$

$$p\left\{-t_{\alpha,n-1} \le \frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha \qquad p\left\{\frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \le t_{\alpha,n-1}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\mu \le \overline{x} + t_{\alpha,n-1} s/\sqrt{n}\right\} = 1-\alpha \qquad p\left\{\mu \le \overline{x} - t_{\alpha,n-1} s/\sqrt{n}\right\} = 1-\alpha$$

$$\mu \le \overline{x} + t_{\alpha,n-1} s/\sqrt{n} \qquad \mu \ge \overline{x} - t_{\alpha,n-1} s/\sqrt{n}$$

مثال3. برای مدت چندین سال یک امتحان قوه ریاضی برای همه دانشجویان تازه وارد دانشگاهی ترتیب داده شده است. اگر برای 64 دانشجو که تصادف که تصادف در این مدت زمان انتخاب شده اند متوسط زمانی که صرف جواب دادن به این امتحان کرده اند 28/5 دقیقه و واریانس زمانها 9/3 دقیقه باشد یک فاصله اطمینان 99% برای متوسط واقعی زمانی که یک دانشجویی سال اول صرف این امتحان می کند بسازید:

$$n = 64$$

$$\bar{x} = 28.5 \qquad \bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} s/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} s/\sqrt{n}$$

$$s^2 = 9.3 \qquad 28.5 - t_{0.005}\sqrt{9.3}/8 < \mu < 28.5 + t_{0.005}\sqrt{9.3}/8$$

$$\alpha = 0.01$$

مثال4. طول جمجمه های اسکلت فسیل شده نوعی از پرندگان که نسل آنها نابود شده است دارای میانگین 5/68cm و انحراف معیار 0/29cm است. با فرض اینکه چنین اندازه هایی بطور نرمال توزیع شده اند. یک فاصله اطمینان 95% برای طول میانگین این نوع پرندگان پیدا کنید.

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} s/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} s/\sqrt{n}$$

$$5.68 - t_{0.025} 0.29/\sqrt{10} < \mu < 5.68 + t_{0.025}(0/29)/\sqrt{10}$$

$$5.68 - (2.262)\frac{0.29}{3.016} < \mu < 5/68 + (2.262)\frac{0.29}{3.16}$$

$$5.4724 < \mu < 5.8875$$

4-3- فاصله اطمینان برای انحراف معیار یک توزیع نرمال که μ آن مجهول است

فرض کنید متغیر تصادفی x داری توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و انحراف معیار مجهول σ است. یک نمونه تصادفی n تایی را در نظر بگیرید. فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای σ^2 بصورت ذیل بدست می آید.

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = x^2_{(n-1)}$$

$$p\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \le \chi^2_{(n-1)} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \le \sigma^2 \le \chi\frac{(n-1)s^2}{x^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right\} = 1-\alpha$$

لذا فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای σ^2 برابر است با:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$$

و برای σ برابراست با:

$$s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}} \le \sigma \le s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}}$$

و در نهایت فاصله اطمینان یکطرفه $100(1-\alpha)\%$ عبارت است از:

$$p\{\chi^2_{1-\alpha,n-1} \le \chi^2_{(n-1)}\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\chi^2_{1-\alpha,n-1} \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}}\right\} = 1-\alpha$$

$$\sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{x^2_{1-\alpha,n-1}}$$

$$\sigma \le \sqrt{\frac{n-1}{x^2_{1-\alpha,n-1}}}$$

$$\{\chi^2_{(n-1)} \le \chi^2_{\alpha,n-1}\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le x^2_{\alpha,n-1}\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\sigma^2 \ge \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha,n-1}}\right\} = 1-\alpha$$

$$\sigma^2 \ge \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha,n-1}}$$

$$\sigma \le \sqrt{\frac{n-1}{x^2_{\alpha,n-1}}}$$

مثال5. قطر کامل شدهٔ کابل مسلح برق، دارای توزیع نرمال است. یک نمونه 20 تایی، دارای میانگین 0,79 و انحراف معیار 0,01 می دهد. یک فاصله اطمینان 95% برای σ پیدا کنید.

$$\frac{(n-1)s^2}{x^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{x^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}$$

$$\frac{19(0.0001)}{32.85} < \sigma^2 < \frac{19(0.0001)}{8.9}$$

3-5- فاصله اطمینان برای تفاوت بین میانگین‌های دو توزیع نرمال هرگاه انحراف معیار در هر دو جامعه معلوم باشند

فرض کنید x یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین μ_x و انحراف معیار معلوم σ_x و y یک متغیر تصادفی مستقل از x دارای توزیع نرمال با میانگین μ_y و انحراف معیار معلوم σ_y باشد. فرض کنید $\bar{x}$ معرف میانگین یک نمونه تصادفی n_x تایی از x و $\bar{y}$ معرف میانگین یک نمونه تصادفی n_y تایی از y باشد. فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\mu_x-\mu_y$ عبارتست از:

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}}=z$$

$$P\{-Z_{\alpha/2}\le Z\le Z_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

$$P\left\{-Z_{\alpha/2}\le\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}}\le Z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\bar{x}-\bar{y}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}\le\mu_x-\mu_y\le\bar{x}-\bar{y}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}\right\}=1-\alpha$$

لذا فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ به صورت زیر است:

$$\bar{x}-\bar{y}\pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$:

یک فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ بالا به صورت

$$\bar{x}-\bar{y}+Z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

و یک فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ پائین به صورت

$$\bar{x}-\bar{y}-Z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

مثال6. به منظور آزمایش تفاوت تاثیر دو روش کشت گندم، تجربه ای اجرا می شود. ده قطعه زمین شخم کم عمق و پانزده قطعه شخم عمیق زده می شوند. میانگین استحصال گروه اول در هر جریب 40/8 تن و میانگین گروه دوم 44/7 است. فرض کنید انحراف معیار شخم کم عمق معادل 0/6 تن و انحراف معیار شخم عمیق 0/8 باشد. یک فاصله اطمینان 90% برای تفاوت استحصال ارائه کنید.

$$\bar{x}-\bar{y}\pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

$$40.8-44.7\pm Z_{\%5}\sqrt{\frac{0.36}{10}+\frac{0.64}{15}}$$

مثال7. از دو نوع دستگاه فتوکپی نشان می دهد که زمان تعمیر V بار از کارافتادگی های دستگاه اول به طور متوسط 80/7 دقیقه و انحراف معیار دستگاه اول 19/4 دقیقه بوده است و زمان تعمیر 60 بار از کارافتادگی دستگاه دوم به طور متوسط 88/1 دقیقه و انحراف معیار دستگاه دوم 18/8 دقیقه بوده است. یک فاصله اطمینان 90% برای تفاضل بین زمانهای متوسط تعمیر از کارافتادگی های دو دستگاه فتوکپی پیدا کنید.

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

تذکر: می توان به کمک قضیه حد مرکزی، این نتیجه را برای نمونه های تصادفی از جامعه های غیرنرمال با واریانس های معلوم δ_1^2 و δ_2^2 نیز به کاربرد مشروط بر اینکه $n_1,n_2\geq 30$ باشند.

نکته: برای ساختن یک فاصله اطمینان $\%100(1-\alpha)$ برای $\mu_1-\mu_2$ موقعی که σ_1 و σ_2 نامعلوم باشند ولی $n_1,n_2>30$ باشند به جای σ_1 و σ_2 مقادیر انحراف معیارهای نمونه ای S_1 و S_2 را قرار می دهیم و مانند قبل عمل می کنیم.

6-3- فاصله اطمینان برای تفاوت بین میانگین‌های دو توزیع نرمال هرگاه هر دو انحراف معیار مجهول

ولی مساوی و $n_y \le 30$ باشند: فرض کنید x یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین μ_y و انحراف معیار مجهول σ باشد. فرض کنید $\bar{x}$ میانگین یک نمونه تصادفی متشکل از n_x مشاهده از x و $\bar{y}$ میانگین یک نمونه تصادفی متشکل n_y مشاهده از y باشد. فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\mu_x - \mu_y$ به صورت:

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x-n_y-2}}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}}=t_{n_x+n_y-2}$$

n_x و n_y نیز کوچک هستند. $n_x, n_y \le 30$

$$P\left(-t_{\alpha/2;n_x+n_y-2} \le t_{n_x+n_y-2} \le t_{\alpha/2;n_x+n_y-2}\right)=1-\alpha$$

$$P\left\{-t_{\alpha/2;n_x+n_y-2} \le \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}} \le t_{\alpha/2;n_x+n_y-2}\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\bar{x}-\bar{y}-t_{\alpha/2;n_x+n_y-2}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}} \le\right.$$

$$\mu_x-\mu_y \le \bar{x}+\bar{y}+t_{\alpha/2;n_x+n_y-2}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}=1-\alpha$$

لذا فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ عبارتست از:

$$\bar{x}-\bar{y}\pm t_{\alpha/2;n_x+n_y-2}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}$$

فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$:

یک فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ بالا به صورت

$$\bar{x}-\bar{y}+t_{\alpha;n_x+n_y-2}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}$$

و یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ پائین به صورت

$$\overline{x}-\overline{y}-t_{\alpha;n_x+n_y-2}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}$$

ارائه می شود.

مثال 8. مطالعه از دو نوع دستگاه فتوکپی نشان می دهد که زمان تعمیر 60 بار از کارافتـادگی هـای دستگاه اول به طور متوسط 80/7 دقیقه با انحراف معیار 19/4 دقیقه بوده است و زمـان تعمیـر 60 بار از کارافتادگی دستگاه دوم به طور متوسط 88/1 دقیقه با انحراف معیار 18/8 دقیقه بـوده اسـت. یک فاصله اطمینان 90% برای تفاضل بین زمانهای متوسط تعمیـر از کارافتـادگی هـای دو دسـتگاه فتوکپی پیدا کنید.

$n_1=60 \qquad n_2=60$

$\overline{x}_1=80.7 \qquad \overline{x}_2=88.1$

$S_1=19.4 \qquad S_2=18.8$

$$(\overline{x}_1-\overline{x}_2)-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\overline{x}_1-\overline{x}_2)+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$(80.7-88.1)-Z_{0.05}\sqrt{\frac{(19.4)^2}{60}-\frac{(18.8)^2}{60}}<\mu_1-\mu_2<(80.7-88.1)+Z_{0.05}\sqrt{\frac{(19.4)^2}{60}-\frac{(18.8)^2}{60}}$$

مثال 9. دوازده درخت نوع خاصی از مرکبات که به تصادف انتخاب شـده انـد دارای میـانگین ارتفـاع 13/8 با انحراف معیار 1/2 و پانزده درخت نوع دیگری که به تصادف انتخاب شده اند دارای میانگین ارتفاع 12/9 و انحراف معیار 1/5 است. با فرض اینکه نمونه های تصادفی از جامعـه هـای نرمـال بـا واریانسهای برابر انتخاب شده اند یک فاصله اطمینان 95% برای تفاضل‌های ارتفـاع دو نـوع درخـت مرکب پیدا کنید.

$$\overline{x}-\overline{y}\pm t_{\alpha/2;n_x+n_y-2}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}=$$

$$13.8-12.9\pm t_{0.025;26}\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{15}}\sqrt{\frac{11\times(1.2)^2+14(1.5)^2}{26}}=0.9\pm2.056(0.3873)(1.35)$$

$$-0.198<\mu_1-\mu_2<1.998$$

7-3- فاصله اطمینان برای $\mu_1-\mu_2$ نمونه های کوچک در حالتی که $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ و مجهول هستند

حال فرض کنید که مساله پیدا کردن یک فاصله اطمینان جهت $\mu_1-\mu_2$ برای نمونه های کوچکی باشد که پراش جمعیت‌های آنها مساوی نبوده به علاوه این امکان هم وجود ندارد که نمونه ها را با اندازه های مساوی اختیار نمائیم.

آماره ای که در چنین حالت بکار گرفته می شود غالباً بصورت زیر است:

$$T' = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

که تقریباً دارای توزیع t با v درجه آزادی خواهد بود که v از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\left[\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1}\right]+\left[\frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2-1}\right]}$$

از آنجا که مقدار v فوق به ندرت عدد صحیح می‌شود لذا آنرا به نزدیکترین عدد صحیح گرد می‌کنیم.

با استفاده از آماره T' می توان نوشت:

$$P\left(-t_{\alpha/2} < T' < t_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

لذا فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\mu_1-\mu_2$ بصورت زیر است:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

که در آن $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ و S_1^2 و S_2^2 به ترتیب میانگین و پراش نمونه های کوچک به اندازه های n_1 و n_2 هستند که از جمعیتهای تقریباً نرمال اختیار می شوند.

محاسبه خطا در برآورد μ بوسیله $\bar{x}$ (محاسبه خطای ماکزیمم برآورد)

اگر در فرمول: $\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2} < \mu < \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}$

از طرفین نامساوی، $\bar{x}$ را کم کنیم داریم: $-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2} < \mu-\bar{x} < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}$

و یا $|\mu-\bar{x}| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}$

فرمول فوق نشان می دهد که اگر از $\bar{x}$ به عنوان برآورد μ استفاده شود بـا $100(1-\alpha)\%$ اطمینــان می توان گفت که اختلاف مقدار واقعی μ و مقدار برآوردگر از مقدار $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}$ کمتر اسـت. و قـضیه زیر را می توان بیان نمود.

قضیه: اگر از $\bar{x}$ به عنوان برآورد μ استفاده شـود بـا $100(1-\alpha)\%$ اطمینـان مـی تـوان گفـت کـه حداکثر خطا برابر است با:

$$e=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}$$

تذکر: با توجه به مقدار e داریم L=2e. به عبارت دیگر طول فاصـله اطمینـان بـا e نـسبت مـستقیم دارد.

8-3- محاسبه اندازه نمونه

اگر از $\bar{x}$ به عنوان برآورد μ استفاده شود با $100(1-\alpha)\%$ اطمینان می توان گفت خطا کمتر از مقدار e است اگر حجم نمونه را از فرمول زیر بدست آوریم:

$$n = \left(\frac{\sigma}{e} Z_{\alpha/2}\right)^2$$

تذکر: از فرمول فوق می توان استفاده کرد که σ معلوم باشد. اگر σ معلوم نباشد ابتدا نمونه ای با حجم $n \geq 30$ انتخاب و مقدار S را محاسبه می کنیم و در فرمول فوق به جای σ از S استفاده می کنیم.

محاسبه خطای ماکزیمم برآورد در صورتیکه σ مجهول باشد و $n<30$ باشد:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$
$$-t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu - \bar{x} < t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$
$$|\mu - \bar{x}| < t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$
$$e = \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}$$
$$n = (\frac{S}{e} t_{\alpha/2})^2$$

مثال10. یک مهندس علاقمند به استفاده از نمونه تصادفی به اندازه $n=150$ برای برآورد متوسط شایستگی مکانیکی کارگران خط مونتاژ در یک صنعت بزرگ می باشد. اگر بر اساس تجربه، مهندس بتواند برای داده ها $\sigma=6.2$ را فرض کند، او با احتمال 99% درباره اندازه ماکزیمم خطایش چه ادعایی بکند.

$$\alpha = 0.01$$

$$e = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} = \frac{6.2}{\sqrt{150}} \times 2.575 = 1.3$$

مثال11. یک کارگر محقق می خواهد متوسط زمانی که یک مکانیک صرف بازدید چرخهای یک ماشین می کند تعیین کند، همین طور بتواند با اطمینان 95% ادعا کند که متوسط نمونه اش به

اندازه 0/5 دقیقه انحراف دارد. اگر از تجربه گذشته اش $\sigma=1.6$ فرض کنید. اندازه نمونه را چقدر باید انتخاب کند؟

$$n = \left(\frac{\sigma Z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 = \left(\frac{1.6\times 1.96}{0.5}\right)^2 = 39.6 \approx 40$$

مثال12. در 6 بار تعیین نقطه ذوب قلع، میانگین 232/26°C با انحراف معیار 0/14 به دست آمـده است. اگر این میانگین را به عنوان نقطه ذوب واقعی قلع بـه کـار بـرود دربـاره خطـای مـاکزیمم بـا اطمینان 98% چه ادعایی می توان کرد؟

$$e = \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} = \frac{0.14}{\sqrt{6}} t_{0.01} = 0.19$$

می توان با اطمینان 98% ادعا کرد که طرح برای نقطه ذوب قلع حداکثر 0/19 درجه منحرف است.

9-3- فاصله اطمینان برای $\mu_1-\mu_2=\mu_D$

در این حالت نمونه ها مستقل از یکدیگر نبوده و پراش های دو جمعیت لزوماً مساوی نیستند. این در صورتی درست خواهد بود که ملاحظات در دو نمونه بصورت زوجی صورت پذیرد بطوریکه دو ملاحظه نیز به یکدیگر مربوط باشند.

به عنوان مثال، اگر آزمایشی را بر روی روش جدیدی در مورد رژیم گرفتن روی n فرد انجام دهید، وزن های قبل و بعد تکمیل تست، نمونه های ما را تشکیل می دهند. ملاحظات در دو نمونه که بر روی یک فرد انجام می پذیرد به یکدیگر مرتبط بوده و از این رو یک جفت را ایجاد می کند. برای تعیین اینکه رژیم گرفتن موثر است یا خیر ما باید اختلاف های d_i از ملاحظات دوتایی را بدست آوریم. این اختلاف ها مقادیری از متغیرهای تصادفی نمونه $d_n,\ldots,d_2,d_1$ از جمعیتی هستند که ما فرض می کنیم دارای توزیع نرمال با حد متوسط μ_D و پراش مجهول σ_D^2 باشند. ما σ_D^2 را با S_d^2 یعنی پراش اختلافهایی که نمونه ها را می سازند تخمین می زنیم. در نتیجه S_d^2 مقداری از آماره S_d^2 است که از نمونه ای به نمونه دیگر نوسان می کند. تخمین نقطه ای $\mu_1-\mu_2=\mu_D$ به توسط $\bar{d}$ داده می شود.

فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ_D بصورت زیر نوشته می شود:

$$P\left(-t_{\alpha/2}<T<t_{\alpha/2}\right)$$

که در آن آماره:

$$T=\frac{\bar{D}-\mu_D}{S_d/\sqrt{n}}$$

دارای توزیع t با n-1 درجه آزادی است.

لذا فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ_D بصورت زیر است:

$$\bar{d}-t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu_D<\bar{d}+t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

که در آن $\bar{d}$ و S_d میانگین و انحراف معیار اختلاف n جفت اندازه گیری است.

مثال13. تعداد 20 دانشجوی سال اول را به 10 جفت تقسیم می کنــیم. هـر عـضوی از ایـن جفـت تقریباً دارای یک بهره هوشی هستند. از هر زوجی یکی بطور تصادفی انتخاب شـده و بـه ایـن گـروه یک درس ریاضی به فرم ارائه کنفرانس آموخته شد. به اعضاء باقیمانده این جفتها عین همـان درس بصورت تدریس معمولی توسط یک استادیار داده شد. در پایان ترم به هر دو گروه یک امتحـان داده و نتایج زیر حاصل گشت. فاصله اطمینان 98% را برای اختلاف واقعی دو روش تدریس بدست آورید.

جفت	تدریس بصورت کنفرانس	روش معمولی	D_i
1	76	81	-5
2	60	52	8
3	85	87	-2
4	58	70	-12
5	91	86	5
6	75	77	-2
7	82	90	-8
8	64	63	1
9	79	85	-6
10	88	83	5

تخمین نقطه ای μ_D به توسط $\bar{d}=1.6$ داده می شود. پراش S_d^2 اختلاف نمونه بصورت زیر است:

$$S_d^2=\frac{n\sum d_i^2-\left(\sum d_i^2\right)}{n(n-1)}=40.7$$

$$S_d=6.38$$

$$t_{\%1,9}=2.821$$

$$-7.29<\mu_D<4.09$$

3-10- فاصله اطمینان برای نسبت انحراف معیارهای دو توزیع نرمال

فرض کنید که x یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین μ_x و انحراف معیار δ_x و y یک متغیر تصادفی مستقل از x دارای توزیع نرمال با میانگین μ_y باشد. فرض کنید S_x^2 واریانس یک نمونه تصادفی متشکل از n_x مشاهده از x و S_y^2 واریانس یک نمونه تصادفی متشکل از n_y مشاهده از y باشد، فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$ به صورت :

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\cdot\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}=F_{n_x-1,n_y-1}$$

$$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}\le F_{n_x-1,n_y-1}\le F_{\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}\le \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\cdot\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\le F_{\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\frac{S_x^2}{S_y^2\,F_{\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}}\le\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\le\frac{S_x^2}{S_y^2\,F_{1-\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}}\right\}=1-\alpha$$

پس فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ عبارتست از:

$$\left[\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}},\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}}\right]$$

فاصله اطمینان یکطرفه $100(1-\alpha)\%$:

یک فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ بالا به صورت:

$$\left[\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha;n_x-1,n_y-1}}\right]$$

و یک فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ پائین به صورت:

$$\left[\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha;n_x-1,n_y-1}}\right]$$

ارائه می شود.

تذکر: فواصل فوق برای $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ به ترتیب بصورت زیر است:

$$\left[\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\sqrt{\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}}}\quad,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\sqrt{\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}}}\quad\right]$$

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\sqrt{F_{\alpha;n_x-1,n_y-1}}$$

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\sqrt{\frac{1}{F_{\alpha;n_x-1,n_y-1}}}$$

مثال14. دوازده درخت نوع خاصی از مرکبات که به تصادف انتخاب شده اند دارای میـانگین ارتفـاع 13/9 با انحراف معیار 1/2 و 15 درخت نوع دیگری که به تصادف انتخاب شـده انـد دارای میـانگین ارتفاع12/9 و انحراف معیار 1/5 است. یک فاصله اطمینان 98% برای نسبت واریانس های دو جامعه بسازید.

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}.\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}}<\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}<\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}.\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2};n_x-1,n_y-1}}$$

$$\frac{(1.2)^2}{(1.5)^2}\frac{1}{F_{0.01;11,14}}<\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}<\frac{(1.2)^2}{(1.5)^2}\frac{1}{F_{0.99;11,14}}\rightarrow 0.165<\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}<2.752$$

1-4. مقدمه

در بسیاری از مسائل روزانه باید در رد یا قبول یک عبارت در مورد برخی پارامترهای جامعه تصمیم‌گیری بعمل آید. برای مثال، آیا میانگین طول عمر یک واحد الکترونیکی برابر 200 ساعت است؟ آیا میانگین محصول یک نوع بذر اصلاح شده از نوع اصلاح نشده بیشتر است؟ آیا دقت یک نوع ماشین تراش از نوع دیگر کمتر است؟ آیا نسبت خرابی یک محصول برابر مقدار مشخصی است؟ آیا میانگین شویندگی یک ماده شوینده در ازای استفاده از مواد اولیه مختلف یکسان است؟ آیا توزیع عمر یک قطعه در دستگاه تراش از توزیع نمایی تبعیت می کند؟ آیا نوع گروه خونی و نژاد به هم بستگی دارند؟

2-4. فرضیه آماری

فرض یا بیان یا حدسی در باره توزیع جامعه یا پارامترهای جامعه را فرض آماری گویند. اگر این فرض آماری توزیع را کاملاً مشخص کند آنرا فرض ساده در غیر اینصورت آنرا فرض مرکب گویند. برای مثال، توزیع وزن جامعه ایران، نرمال با میانگین 75 و انحراف معیار 15 است، یک فرضیه ساده و توزیع وزن جامعه ایران، نرمال با میانگین 75 ، است، یک فرضیه مرکب است.

فرضیه صفر و مقابل: فرضیه های اصلی، محقق معمولا دقیق و صحیح نیستند. برای مثال در فرضیه "میانگین محصول بذر نوع الف از نوع ب بیشتر است"، میزان فزونی محصول نوع الف از ب مشخص نیست و در عمل نمی توان حدی برای آن تعیین کرد و همه این موارد را رد یا تایید کرد.

مشاهده می شود فرضیه اصلی را نمی توان به صورت مستقیم آزمون کرد. اما از نظر منطقی می توان فرضیه های با اجزای مشخصی تعریف کرد و رد و یا پذیرش فرضیه اصلی را منوط به قبول و یا رد چنین فرضیه هایی نمود. در مورد مثال بالا فرضیه مزبور به صورت "میانگین محصول بذر نوع الف از نوع ب برابر است" تعریف می شود. چنین فرضیه هایی را فرض صفرNull Hypothesis می نامند زیرا منجر به خنثی کردن Nullify فرضیه های اصلی می شوند. با این وصف فرضیه اصلی را فرضیه مقابل Alternate Hypothesis نامیده می شود.

مرسوم است که بسیاری از محققین، فرضیه هایی را که به باور آنها نادرست است فرض صفر در نظر می گیرند به امید اینکه، روش‌های آماری به رد آنها بینجامد. برای مثال اگر بخواهیم نشان دهیم که میانگین طول عمر باطری کارخانه الف از کارخانه ب بیشتر است، فرضیه صفر به این صورت فرمول بندی می شود که تفاوتی بین طول عمر باطری دو کارخانه نیست.

فرضیه صفر با H_0 و فرض آماری که در مقابل فرض صفر قرار می گیرد را با H_1 نشان داده می شود.

3-4. انواع آزمون فرضیه

1- آزمون فرضیه دو طرفه: آزمون فرضیه دو طرفه گفته می‌شود، اگر فرض مقابل دو طرفه به صورت نامساوی باشد. به عبارت دیگر آزمون فرضیه به صورت ذیل فرموله شده باشد:

$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

2- آزمون فرضیه یک‌طرفه: آزمون فرضیه یک‌طرفه است اگر فرض مقابل آن به یکی از دو صورت ذیل فرموله شده باشد.

الف:
$$\begin{cases} H_0: \theta \leq \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}$$

ب-
$$\begin{cases} H_0: \theta \geq \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$$

4-4. طریقه ساختن فرضیه صفر و مقابل

برای نشان دادن چگونگی ساختن فرضیه صفر و مقابل به مثال های ذیل توجه نمایید.

مثال1. تصور کنیدکه ارتش، پوتین‌های مورد نیاز خود را از یک تولیدکننده خاص، تامین می‌کند که میانگین عمر پوتین‌های تولیدی وی 12 ماه است. یک تولیدکننده جدید، ادعا می‌کند که پوتین‌هایی با میانگین عمر بیش از 12 ماه با همان قیمت ارائه می‌دهد. برای اثبات این مدعی، آزمایشی ترتیب داده می‌شود. با استفاده از نمادهای آزمون فرض، فرضیه صفر و مقابل را می توان به یکی از دو صورت ذیل فرموله کرد.

(1
$$\begin{cases} H_0: \mu \leq 12 \\ H_1: \mu > 12 \end{cases}$$

(2
$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 12 \\ H_1: \mu < 12 \end{cases}$$

در حالت اول، $\begin{cases} H_0: \mu \leq 12 \\ H_1: \mu > 12 \end{cases}$ ، پذیرش فرضیه صفر، به معنای ادامه همکاری با تولید کننده قدیمی، و رد آن به معنی شروع همکاری باشرکت جدید است. اگر میانگین عمر پوتین های شرکت جدید 12 ماه یا کمتر باشد، احتمال ادامه همکاری با تولیدکننده قدیمی نزدیک به یک است. از سوی دیگر، اگر میانگین عمر پوتین‌ها مقدار جزئی از 12 ماه بیشتر باشد هنوز احتمال حفظ تولیدکننده قدیمی کاملاً زیاد است. اگر میانگین عمر پوتین‌ها بطور قابل توجهی از 12 ماه بیشتر باشد، احتمال شروع همکاری با تولیدکننده جدید افزایش می‌یابد.

این فرموله‌بندی زمانی مطرح می شود که ارتش از تولیدکننده داخلی بسیار راضی است. شرکت قدیمی کالای مطمئن و با کیفیت و همچنین به موقع ارسال می‌کند و خرید از شرکت جدید باعث بروز مشکلات اداری خواهد شد. در این حالت، شرکت جدید موظف است تا نشان دهد پوتین‌هایش دارای میانگین عمری بسیار بزرگتر از 12 ماه هستند.

در حالت دوم، $\begin{cases} H_0 : \mu \geq 12 \\ H_1 : \mu < 12 \end{cases}$، پذیرش فرضیه صفر، به معنای خرید از شرکت جدید است و رد آن به معنای حفظ تولیدکننده قدیمی است. اگر میانگین عمر پوتین‌های شرکت جدید 12 ماه یا بیشتر باشد احتمال شروع همکاری با تولیدکننده جدید نزدیک به یک است. همچنین، اگر میانگین عمر پوتین‌ها به‌طور قابل توجهی از 12 ماه کمتر باشد احتمال حفظ تولیدکننده قدیمی افزایش می‌یابد.

حالت دوم در زمانی مطرح می‌شود که ارتش از تولیدکننده فعلی ناخشنود است. در این حالت، نه تنها، اگر میانگین عمر پوتین‌های شرکت جدید بیشتر از 12 ماه باشد، بلکه حتی اگر میانگین عمر به مقدار جزئی کمتر از 12 ماه باشد، تولیدکننده قدیمی کنار گذاشته می‌شود. در این صورت، تولیدکننده جدید کافی است، نشان دهد میانگین عمر پوتین‌هایش بطور قابل توجهی از 12 ماه کمتر نیست.

مثال2. یک تولید کننده لامپ روشنایی ادعا کرده که میانگین عمر کالای او از 1000 ساعت بیشتر است. در صورت سختگیری نسبت به ادعای مزبور فرضیه صفر و مقابل را فرموله نمایید.

از آنجا که در مورد این ادعا برخورد سختگیرانه‌ای اتخاذ شده، و باور بر این است که میانگین عمر کالا کمتر از 1000 ساعت است، نحوه فرمولاسیون فرضیه صفر و مقابل به صورت ذیل است.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 1000 \\ H_1 : \mu > 1000 \end{cases}$$

4-5. طریقه تعیین مقدار پارامتر جامعه در فرضیه صفر

1- تجربیات و دانایی های گذشته و یا آزمایشی که در گذشته انجام شده و هدف از آزمون این است که آیا شرایط آزمایش تغییر کرده است.
2- بررسی درستی و نادرستی یک فرضیه علمی
3- طراحی و مشخصات فنی و مهندسی و یا الزامات قراردادی

4-6. فرآیند آزمون فرضیه

پس از فرموله بندی فرضیه صفر و مقابل، باید روشی سیستماتیک مبتنی بر آمار، اتخاذ نمود تا بر اساس آن درستی و نادرستی فرضیه صفر و به تبع فرضیه مقابل معلوم شود. برای این هدف، می توان مجموعه اعضای جامعه را مطالعه کرد که این کار به سبب نامحدود بودن جامعه و تنگنای زمان و هزینه در عمل ناممکن است. در این صورت ناگزیر از نمونه گیری و تعمیم نتایج حاصل از نمونه به جامعه است. در واقع رد و یا قبول فرضیه صفر منوط به اطلاعات حاصل از نمونه است.

روش کار به این صورت است که با استفاده از داده‌های حاصل از نمونه یک شاخص نمونه‌ای و یا آماره آزمون به عنوان تخمینی از پارامتر جامعه محاسبه می‌شود، آنگاه مقدار آماره با مقدار پارامتر جامعه براساس یک معیار تحت عنوان ناحیه رد مقایسه می‌شود. ناحیه رد در یک آزمون فرضیه، در واقع به معنای تفاوت آشکار مقدار آماره با مقدار عددی پارامتر است. در صورتی که مقدار آماره در ناحیه رد قرار گیرد فرضیه صفر رد و در غیر این صورت قبول می شود.

فرض کنید می خواهیم فرضیه صفر $H_0 : \theta = \theta_0$ را در مقابل $H_0 : \theta \neq \theta_0$ آزمون کنیم. در این

صورت، اگر برآورد نقطه ای $\hat{\theta}$ برای θ، به θ_0 نزدیک باشد(در داخل ناحیه قبول قرار گیرد) ، فرضیه صفر پذیرفته و در صورتی که $\hat{\theta}$ بسیار بزرگتر و یا بسیار کوچکتر از θ_0 باشد(در داخل ناحیه رد قرار گیرد)، فرضیه صفر رد می شود.
به طریق مشابه، در صورتی که بخواهیم فرضیه صفر $H_0 : \theta = \theta_0$ را در مقابل $H_0 : \theta < \theta_0$ آزمون کنیم. در این صورت، اگر برآورد نقطه ای $\hat{\theta}$ بسیار کوچکتر از θ_0 باشد، فرضیه صفر رد می شود. همچنین در صورتی که بخواهیم فرضیه صفر $H_0 : \theta = \theta_0$ را در مقابل $H_0 : \theta > \theta_0$ آزمون کنیم. در این صورت، اگر برآورد نقطه ای $\hat{\theta}$ بسیار بزرگتر از θ_0 باشد، فرضیه صفر رد می شود.
در مورد هریک از حالت‌های بالا، در مورد عبارات بسیار بزرگتر و بسیار کوچکتر مفاهیم ناحیه قبول و ناحیه رد تعریف می شود .

4-6-1. تعریف ناحیه پذیرش و ناحیه بحرانی(رد)

ناحیه‌ای که در آن فرض صفر پذیرفته می‌شود ناحیه پذیرش و ناحیه‌ای که در آن فرض صفر رد می‌شود ناحیه بحرانی یا ناحیه رد و مرز بین این دو ناحیه را عدد بحرانی گفته می‌شود. برای تبیین ریاضی ناحیه رد و قبول، از مفاهیم خطاهای آزمون فرض به طریقه ذیل استفاده می شود.

4-6-2. خطای نوع اول (I) و نوع دوم (II)

خطای نوع اول: رد فرض H_0 در صورتی که در واقع درست باشد، خطای نوع اول گفته می شود و آنرا با α نشان می دهند. و بیان ریاضی خطای نوع اول به صورت ذیل است.

$\alpha = p$ (رد فرض H_0 | درست باشد H_0)

خطای نوع دوم: قبول فرض H_0 در صورتی که در واقع نادرست باشد خطای نوع دوم گفته می شود و با β نشان داده می شود. بیان ریاضی خطای نوع دوم به صورت ذیل است

$\beta = p$ (قبول فرض H_0 | نادرست باشد H_0)

مثال3. فرض کنید یک نوع کپسول سرماخوردگی A چند سال است که در کشور تولید می شود و ثابت شده است که پس از 5 روز 70 درصد مؤثر است. کارخانه ای مدعی است که کپسولی مشابه A به نام B تولید کرده است که اثر آن پس از 5 روز بیشتر از 70 درصد است. می‌خواهیم بررسی کنیم که با توجه به هزینه ای که برای ساخت کپسول B باید صرف شود آیا استفاده مقرون به صرفه است؟ برای این منظور یک نمونه 20 تایی از افراد را انتخاب و کپسول B را به آنها داده ایم. اگر در این آزمایش پس از 5 روز تأثیر دارو بر روی کمتر از 16 نفر مؤثر واقع شده باشد ادعای کارخانه B رد می‌شود. مطلوبست محاسبه مقادیر خطای نوع اول و دوم.

$$\begin{cases} H_o : p = 0.7 \\ H_1 : p > 0.7 \end{cases}$$

$$\alpha = p\left(\text{Re ject } H_0 \mid H_0 \text{ is True} \right) = p\left(x \geq 16 \mid P = 0.7 \right) = \sum_{x=16}^{20} b\left(x ; 20, 0.7 \right) = 0.2375$$

$$\beta = p\left(\text{Accept } H_0 \mid H_0 \text{ is False} \right) = p\left(x < 16 \mid p > 0.7 \right)$$

ملاحظه می‌شود که β قابل محاسبه نیست، زیرا فرض مقابل به طور کامل مشخص نشده اما اگر فرض مقابل را تغییر داده و به صورت $H_0 : p = 0.8$ در نظر بگیریم:

$$\beta = p(x < 16 \mid p = 0.8) = \sum_{x=0}^{15} b(x; 20, 0.8) 0.3704$$

واضح است که تصمیم گیری خوب وقتی انجام می پذیرد که هر دو نوع خطا کم باشند. به عبارت دیگر نه فرضی را بی دلیل رد و نه فرضی را بی دلیل قبول کنیم. در واقع در شرایط ایده ال، α و β بطور همزمان کوچک هستند.

مثال: در مثال فوق اگر نقطه بحرانی از 16 به 15 تغییر دهیم. مقادیر α و β را تعیین کنید.

$$\alpha = p(x \geq 15 \mid p = 0.7) = \sum_{x=15}^{20} b(x; 20, 0.7) = 0.4164$$

$$\beta = p(x < 15 \mid p = 0.8) = \sum_{x=0}^{14} b(x; 20, 0.8) = 0.1958$$

ملاحظه می شود که با تعدیل نقطه بحرانی α زیاد و β کم می شود. به عبارت دیگر α و β به یکدیگر وابسته بوده و کاهش یکی باعث افزایش دیگری می شود. پس با تغییر نقطه بحرانی می توان یکی از خطاها را کم و دیگری را زیاد نمود.

مثال4. در مثال قبل اگر یک نمونه 100 تایی انتخاب و نقطه بحرانی را عدد 74 اختیار کنیم، مقادیر α و β را محاسبه کنید.

$$\alpha = p(x \geq 74 \mid p = 0.7) = p\left(z > \frac{73.5 - 100 \times 0.7}{\sqrt{100 \times 0.7 \times 0.3}}\right) = p(z > 0.76) = 0.2236$$

$$\beta = p(x < 74 \mid p = 0.8) = p\left(z > \frac{74.5 - 100 \times 0.8}{\sqrt{100 \times 0.8 \times 0.2}}\right) = p(z < -1.375) = 0.085$$

بنابراین با افزایش حجم نمونه هر دو خطا بطور همزمان کاهش می یابد.

نتیجه: خطای نوع اول و دوم به یکدیگر وابسته بوده و افزایش یکی باعث کاهش دیگری می شود. با افزایش حجم نمونه می توان هر دو خطا را بطور همزمان کاهش داد. (هرچه n زیاد شود α کم می شود و در صورتیکه α ثابت باشد β کم می شود)

مثال5. فرض کنید گزارش رسیده که میانگین قد دانشجویان یک دانشگاه 170 cm و انحراف معیار آن 9cm است. برای آزمایش درستی آن یک نمونه تصادفی 36 تایی انتخاب و ناحیه پذیرش را بین 167/5 و 172/5 در نظر می گیریم. مقادیر α و β را حساب کنید.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 170 \\ H_1 : \mu \neq 170 \end{cases}$$

$$\alpha = p(\bar{x} > 172.5 \mid \mu = 170) + p(\bar{x} < 167.5 \mid \mu = 170) = p\left(z > \frac{172.5 - 170}{9 / \sqrt{36}}\right) + p\left(z < \frac{167.5 - 170}{9 / \sqrt{36}}\right) = 0.97$$

برای اینکه آزمون خوبی داشته باشیم باید خطای نوع دوم را نیز محاسبه کنیم. اما در حالی که فرض مقابل بصورت $H_0 : \mu \neq 170$ باشد، محاسبه β امکان پذیر نیست. ولی با انتخاب مقادیر مختلف برای μ می توان β را محاسبه نمود تا تضمین کافی در مورد رد فرض صفر بدست آید.

برای مثال $H_1 : \mu = 175$

$\beta = p(167.5 < \bar{x} < 172.5 | \mu = 175) = .097$

بنابراین در 9/7% از تمام نمونه های تصادفی که با حجم n=36 انتخاب می شوند فرض H_0 رد می-شوند.

مثال6. در مثال قبل اگر حجم نمونه را 64 انتخاب کنیم مقادیر α و β را حساب کنید.

$$\alpha = p\left(\bar{x} > 172.5 \mid \mu = 170\right) + p\left(\bar{x} < 167.5 \mid \mu = 170\right)$$
$$= p\left(z > \frac{172.5 - 170}{9/\sqrt{64}}\right) + p\left(z < \frac{167.5 - 170}{9/\sqrt{64}}\right) = 0.0264$$
$$\beta = p\left(167.5 < \bar{x} < 172.5 \mid \mu = 175\right) = p\left(\frac{167.5 - 175}{9/\sqrt{64}} < x < \frac{172.5 - 175}{9/\sqrt{64}}\right)$$
$$= p\left(-6.66 < z < -2.22\right) = 0.0132$$

4-6-3. طریقه تعیین ناحیه بحرانی

با توجه به تعاریف خطای نوع اول و دوم برای تعیین اندازه ناحیه رد (بحرانی)، از ارتکاب به خطای نوع اول یعنی α استفاده می شود. در واقع، در توزیع نمونه ای $\hat{\theta}$، احتمال مشاهده مقادیر در ناحیه بحرانی برابر α است . از آنجایی که معمولا α عدد کوچکی انتخاب می شود مفهوم "تفاوت آشکار $\hat{\theta}$ و θ_0" معنا می شود. به این معنی که مقادیری که در ناحیه بحرانی مشاهده می شوند بسیار بزرگتر و یا بسیار کوچکتر از پارامتر جامعه هستند.

در نتیجه ، اگر آماره‌ای که بر اساس آن تصمیم گیری می شود، دارای توزیع پیوسته باشد می توان ابتدا خطای نوع اول را اختیار کرد و به کمک آن ناحیه بحرانی را تعیین نمود. به اندازه ناحیه بحرانی سطح معنادار‌بودن (Significanse Level) گفته می‌شود.

مثال7. فرض کنید می‌خواهیم این فرض صفر را که میانگین یک جامعه نرمال با واریانس σ^2 ، برابر μ_0 است، $H_0: \mu = \mu_0$، در برابر فرض مقابل $H_1: \mu > \mu_0$، آزمون کنیم. مقدار k را طوری تعیین کنید که $\bar{x} > k$ یک ناحیه بحرانی به اندازه α=0,05 برای نمونه تصادفی به اندازه n باشد.

$$z_{0.05} = 1.645 \; ; Z_{0.05} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \Rightarrow 1.645 = \frac{k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \Rightarrow k = \mu_0 + \frac{1.645}{\sigma/\sqrt{n}}$$

در این صورت ناحیه بحرانی به اندازه α=0,05 عبارت است از $\bar{x} > \mu_0 + 1.645\sigma/\sqrt{n}$ و یا به عبارت ساده تر $Z^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > Z_{0.05}$ است . در این صورت به Z^* آماره آزمون گویند.

با بدست آوردن ناحیه فوق، پس از نمونه گیری اگر میانگین نمونه و یا آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفت فرضیه صفر رد و در غیر این صورت قبول می شود.

4-6-4. ارتباط بین فاصله اطمینان و آزمون فرض

اگر $[L\ U]$ یک فاصله اطمینان در سطح 100(1-α)% باشد، در آزمون فرضیه $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$، فرضیه صفر رد می شود اگر و فقط اگر θ_0 به این فاصله متعلق نباشد.

4-6-5. مراحل آزمون فرض

- فرموله کردن فرضیه صفر و مقابل
- تعیین اندازه ناحیه بحرانی و یا سطح معنادار بودن
- انتخاب آماره آزمون و محاسبه آن
- تعیین مقدار بحرانی از روی جدول و با توجه به سطح معناداری
- مقایسه آماره آزمون و مقدار بحرانی. در صورتی که آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفت فرضیه صفر رد و در غیر این صورت رد قبول می شود. در صورتی که آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفت اصطلاحاً گفته می شود که فرضیه صفر در سطح معناداری α، معنادار نیست.

7-4. آزمون فرضیه برابری میانگین یک جامعه با یک مقدار معین

1-7-4. آزمون برابری میانگین یک جامعه نرمال با یک مقدار معین با فرض معلوم بودن واریانس جامعه

فرض کنید بخواهیم با معلوم بودن واریانس یک جامعه نرمال، σ^2، فرض برابری میانگین جامعه نرمال را، μ، با یک مقدار معین، در سطح معنادار بودن α آزمون کنیم. برای این کار، ابتدا، یک نمونه تصادفی به اندازه n، از جامعه مزبور گرفته و سپس آماره

$$Z^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

که متغیر تصادفی نرمال استاندارد است، محاسبه می‌شود. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد(بحرانی) قرار گیرد فرض H_0 رد و در غیر این صورت پذیرفته می‌شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \le \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases} \quad if \;\; Z^* > Z_\alpha \;\; then\ reject\ H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \ge \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \quad if \;\; Z^* < -Z_\alpha \;\; then\ reject\ H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \ne \mu_0 \end{cases} a \quad if \;\; Z^* > \left| Z_{\frac{\alpha}{2}} \right| \; then\ reject\ H_0$$

مثال8. بر اساس الزامات قراردادی با یک فروشنده، میانگین مقاومت پارگی تارهای یک نوع پارچه باید،از 180psi= μ کمتر نباشد. بر اساس تجارب گذشته، انحراف معیار مقاومت پارگی تارها، 4psi است. مجموعه ای مرکب از یک انباشته از این پارچه از فروشنده دریافت می شود و از سه قطعه نمونه برداری می شود. این نمونه ها که تقریباً توزیع نرمال دارند آزمایش شده و نتایج ذیل به دست آمده است: قطعه اول: 182 psi قطعه دوم: 172 psi قطعه سوم: 177 psi

در سطح 0,05= α، نتیجه آزمون فرضیه ذیل چه خواهد بود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \ge 180 \\ H_1 : \mu < 180 \end{cases}$$

$$\bar{x} = 177 \quad Z^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{177 - 180}{4 / \sqrt{3}} = -1.3\,; \; if \;\; Z^* < -Z_\alpha \;\; then\ reject\ H_0$$

$$Since \;\; Z^* = -1.3 \not< -Z_{0.05} = -1.645 \;\; then\ Accept\ H_0$$

بنابراین فرضیه صفر قبول می‌شود.

مثال9. در بررسی آماری که در گذشته انجام شده است، قد افراد دارای متوسط 68/5 اینچ با انحراف معیار 2/7 اینچ گزارش شده است. برای تایید یا رد این ادعا، اگر یک نمونه 50 تایی از افراد دارای متوسط قد 69/7 اینچ باشد، در سطح معنا دار بودن 0,02= α آیا دلیلی برای تغییر در متوسط قد وجود دارد؟

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 68.5 \\ H_1 : \mu \ne 68.5 \end{cases} \qquad Z^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{69.7 - 68.5}{2.7 / \sqrt{50}} = 3.143$$

$$if \;\; Z^* > \left| Z_{\frac{\alpha}{2}} \right| \; then\ Reject\ H_0$$

$$Since \;\; Z^* = 3.143 > \left| Z_{0.01} \right| = 2.32 \;\; then\ Reject\ H_0$$

بنابراین، H_0 رد می شود.

مثال10. یک شرکت باربری نسبت به ادعای تولیدکننده یک نوع لاستیک خودرو، مبنی بر اینکه طول عمر متوسط آنها حداقل برابر با 28000 مایل است، بدگمان است. برای بررسی این ادعا، شرکت 40 حلقه از این لاستیک ها را در ماشین ها استفاده می کند. طول عمر متوسط 40 حلقه مزبور، 27463 مایل با انحراف معیار 1348 مایل بوده است. اگر خطای نوع اول 1% باشد، شرکت چه تصمیمی می‌تواند اتخاذ کند؟

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 28000 \\ H_1 : \mu < 28000 \end{cases}$$

$$n = 40 > 30 \Rightarrow \sigma \approx S$$

$$\alpha \leq \%1$$

$$Z^* = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{27463 - 28000}{1348 / \sqrt{40}} = -2.52\ ;\ if \quad Z^* < -Z_{0.01} = -2.32 \ \ then\ reject\ H_0$$

$$Since\ \ Z^* = -2.52 < -Z_{0.01} = -2.32 \ \ then\ reject\ H_0$$

2-7-4. آزمون برابری میانگین یک جامعه نرمال با یک مقدار معین با فرض مجهول بودن واریانس جامعه

در نظر بگیرید، با فرض مجهول بودن واریانس جامعه، σ^2، می‌خواهیم فرض برابری میانگین جامعه نرمال را، μ، با یک مقدار معین، در سطح معنادار بودن α آزمون کنیم. برای این کار، ابتدا، یک نمونه تصادفی به اندازه n، از جامعه مزبور گرفته و سپس آماره

$$t^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

که متغیر تصادفی t با $n-1$ درجه آزادی است، محاسبه می‌شود. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد(بحرانی) قرار گیرد فرض H_0 را رد و در غیر این صورت پذیرفته می شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \le \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases} \quad if \quad t^* > t_{\alpha,n-1} \quad then\ reject\ H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \ge \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \quad if \quad t^* < -t_{\alpha,n-1} \quad then\ reject\ H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \ne \mu_0 \end{cases} \quad if \quad t^* > \left| t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \right| \quad then\ reject\ H_0$$

مثال11. در روش متداول استحصال بنزین از نفت، میانگین استحصال 26 واحد است. اخیراً روش تازه‌ای ابداع شده است که در ذیل آن ادعا می شود که بازده روش ابداعی از 26 واحد بیشتر است.

الف) فرض صفر و فرض یک را بنویسید.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \le 26 \\ H_1 : \mu > 26 \end{cases}$$

ب) اگر نمونه تصادفی 9 تایی بگیریم و نتایج $S=2$ و $\bar{x}=28$ به دست آمده باشد، با فرض خطای نوع اول در سطح 1%، در مورد روش جدید چه می‌توان گفت؟

$$t^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{28 - 26}{2 / \sqrt{9}} = 3\ ; \quad Critical\ \ Region: t^* > t_{0.01,8}$$

$$Since\ \ t^* = 3 > t_{0.01,8} = 2.896 \ \ then\ Reject\ H_0$$

3-7-4. آزمون فرضیه برابری واریانس جامعه نرمال

در نظر بگیرید، بخواهیم فرض برابری واریانس جامعه نرمال را، σ^2، با یک مقدار معین، در سطح معنادار بودن α آزمون کنیم. برای این کار، ابتدا، یک نمونه تصادفی به اندازه n، از جامعه مزبور گرفته و سپس آماره

$$\chi^{2^*}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

که متغیر تصادفی مربع کای با n-1 درجه آزادی است، محاسبه می‌شود. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد(بحرانی) قرار گیرد فرض H_0 را رد و در غیر این صورت پذیرفته می شود.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \le \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases} \quad if \quad \chi^{2^*} > \chi^2_{\alpha,n-1} \quad then\ Reject\ H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \ge \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases} \quad if \quad \chi^{2^*} < \chi^2_{1-\alpha,n-1} \quad then\ Reject\ H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \ne \sigma_0^2 \end{cases} \quad if \quad \chi^{2^*} > \chi^2_{\alpha,n-1} \ or \ \chi^{2^*} < \chi^2_{1-\alpha,n-1} \quad then\ Reject\ H_0$$

مثال12. در یک نمونه تصادفی، زمانی که 30 زن برای جواب دادن به سوالات امتحان صرف کردند، دارای واریانس 6/4 دقیقه بوده است. با فرض اینکه جامعه منظور نرمال باشد، فرضیه ذیل را در سطح معنادار بودن α=0/05 آزمون کنید.

$$H_0 : \sigma^2 \ge 64$$
$$H_1 : \sigma^2 < 64$$

n =30 ، S^2 =6/4 ،α=0/05

$$\chi^{2^*}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{29\times(6.4)^2}{8^2}=18.56\ ; \quad Critical\ \ Region: \chi^2 \le \chi^1_{n-1,1-\alpha}=\chi^2_{29,0.95}=17.7$$

$$Since \quad \chi^{2^*}=18.56 \not< \chi^2_{29,0.95}=17.7 \quad then\ Accept\ H_0$$

4-7-4. آزمون فرض برابری میانگین های دو جامعه

1-4-7-4. آزمون فرض برابری میانگین های دو توزیع نرمال زمانی که هر دو انحراف معیار معلوم باشند.

فرض کنید، بخواهیم فرض برابری تفاضل میانگین دو جامعه نرمال با میـانگین μ_1 و μ_2 و واریـانس σ_1^2 و σ_2^2 را، با یک مقدار معین، در سطح معنادار بودن α آزمـون کنـیم. بـرای ایـن کـار دو نمونـه مستقل از دو جامعه نرمال به صورت $x_1,...,x_{n_1}$ و $x_1,...,x_{n_2}$ گرفته می شود. سپس آماره

$$Z^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

که متغیر تصادفی نرمال استاندارد اسـت، محاسـبه مـی شـود. اگـر مقـدار آمـاره آزمـون در ناحیـه رد(بحرانی) قرار گیرد فرض H_0 را رد و در غیر این صورت پذیرفته می شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \le d \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d \end{cases} \quad if \ \ Z^* > Z_\alpha \ \ then\ reject\ H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \ge d \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d \end{cases} \quad if \ \ Z^* < -Z_\alpha \ \ then\ reject\ H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \ne d \end{cases} \quad if \ \ Z^* > \left| Z_{\frac{\alpha}{2}} \right| \ then\ reject\ H_0$$

مثال13. در تحقیقات مربوط به انواع سوخت موشک که با هدف تقلیل زمان تأخیر بین لحظه آغاز شلیک و لحظه انفجار صورت می گیرد، تصور بر این است که جانشین کردن سوخت فعلی با سوخت جدید می تواند تأثیر مثبتی داشته باشد. انحراف معیار نظیر سوخت فعلی و سوخت جدید مساوی 0/04 است. قرار است در خلال یک تجربه، n موشک را با سوخت متداول و n موشک را با سوخت جدید شلیک کنیم. اگر در اثر استفاده از سوخت جدید زمان تأخیر به میزان 0/07 کاهش یابد، استفاده از سوخت جدید قابل توصیه خواهد بود. اگر بر اساس نمونه های 32= n تایی مقادیر 0/261 ثانیه و 0/251 ثانیه برای متوسط زمان تأخیر به ترتیب سوخت فعلی و سوخت جدید به دست آید، در سطح خطای نوع اول 5 درصد آیا سوخت جدید را توصیه می کنید.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \ge 0.07 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0.07 \end{cases}$$

$$Z^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(0.261 - 0.251) - .07}{\sqrt{(\frac{0.04^2}{32} + \frac{0.04^2}{32})}} = -6 ; Critical\ Region : Z^* < -Z_{0.05} = -1.645$$

$$Since\ Z^* = -6 < -1.645\ then\ Reject\ H_0$$

بنابراین فرض صفر رد می‌شود.

2-4-7-4. آزمون فرض برابری میانگین دو جامعه نرمال در حالت واریانس های مجهول و مساوی

فرض کنید، بخواهیم فرض برابری تفاضل میانگین دو جامعه نرمال با میـانگین μ_1 و μ_2 و *واریـانس مجهول و مساوی* σ_1^2 و σ_2^2 $(\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2)$را، با یک مقدار معین، در سطح معنادار بـودن α آزمـون کنیم. برای این کار دو نمونه مستقل از دو جامعه نرمال بـه صـورت $x_1,...,x_{n_1}$ و $x_1,...,x_{n_2}$ گرفتـه می شود. سپس آماره

$$t^*=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_1-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}}$$

که متغیر تصادفی t با n_1+n_2-2 درجه آزادی است، محاسبه می‌شـود. اگـر مقـدار آمـاره آزمـون در ناحیه رد(بحرانی) قرار گیرد فرض H_0 را رد و در غیر این صورت پذیرفته می شود.

$$\begin{cases}H_0: \mu_1-\mu_2\le d\\ H_1: \mu_1-\mu_2>d\end{cases}\quad if\ \ t^*>t_{\alpha,n_1+n_2-2}\ \ then\ reject\ H_0$$

$$\begin{cases}H_0: \mu_1-\mu_2\ge d\\ H_1: \mu_1-\mu_2<d\end{cases}\quad if\ \ t^*<-t_{\alpha,n_1+n_2-2}\ \ then\ reject\ H_0$$

$$\begin{cases}H_0: \mu_1-\mu_2= d\\ H_1: \mu_1-\mu_2\ne d\end{cases}\quad if\ \ t^*>\left|t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}\right|\ then\ reject\ H_0$$

مثال14. 8 موشک کوتاه برد از یک نوع دارای میانگین خطای اصابت $\bar{x}_1=98$ فوت و انحراف معیار s_1=18 فوت و 10 موشک کوتاه برد از نوع دیگـر دارای میـانگین خطـای اصـابت $\bar{x}_2=76$ فـوت بـا انحراف معیار $s_2=15$ فوت باشد. فرض صفر $\mu_1-\mu_2=15$ را در برابر فرض مقابـل $\mu_1-\mu_2>15$ آزمون کنید. اندازه ناحیه بحرانی را $\alpha=0.05$ بگیرید. و فرض کنیـد کـه جامعـه هـا نرمـال و دارای واریانس های یکسان اند.

$$\begin{cases}H_0: \mu_1-\mu_2\le 15\\ H_1: \mu_1-\mu_2>15\end{cases}$$

$$t^*=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}}=\frac{(97-76)-(15)}{\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}}\sqrt{\frac{7\times18^2+9\times15^2}{16}}}=0.9$$

$$Critical\ \ Region: t^*>t_{0.05,10+8-2}=1.746$$

$$Since\ \ t^*=0.9\not>1.746\ \ Then\ Accept\ H_0$$

بنابراین نمی توان H_0 را رد کرد.

3-4-7-4. آزمون فرض برابری میانگین دو جامعه نرمال در حالت واریانس های مجهول و نامساوی

فرض کنید، بخواهیم فرض برابری تفاضل میانگین دو جامعه نرمال با میانگین μ_1 و μ_2 و *واریانس مجهول و نامساوی* σ_1^2 و σ_2^2 ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)را، با یک مقدار معین، در سطح معنادار بودن α آزمون کنیم. برای این کار دو نمونه مستقل از دو جامعه نرمال به صورت $x_1,...,x_{n_1}$ و $x_1,...,x_{n_2}$ گرفته می شود. سپس آماره

$$t^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

که متغیر تصادفی t با v درجه آزادی است، محاسبه می‌شود. در رابطه بالا درجه آزادی متغیر تصادفی t از رابطه ذیل محاسبه می شود.

$$v = \frac{(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2})^2}{\frac{(\frac{S_1^2}{n_1})^2}{n_1 + 1} + \frac{(\frac{S_2^2}{n_2})^2}{n_2 + 1}} - 2$$

اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد(بحرانی) قرار گیرد فرض H_0 را رد و در غیر این صورت پذیرفته می شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq d \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d \end{cases} \quad if \quad t^* > t_{\alpha,v} \quad then\ reject\ H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq d \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d \end{cases} \quad if \quad t^* < -t_{\alpha,v} \quad then\ reject\ H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d \end{cases} \quad if \quad t^* > \left| t_{\frac{\alpha}{2},v} \right| \quad then\ reject\ H_0$$

مثال15. یک تولید کننده دو نوع ریزمدار طراحی کرده و می خواهد بداند که آیا این دو نوع ریزمدار جریان یکسانی تولید می کنند یا نه؟ برای این کار، 15 ریز مدار از نوع اول و 10 ریزمدار از نوع دوم انتخاب کرده نتایج ذیل را بدست آورده است.

$$\bar{x}_1 = 24.2 ; S_1^2 = 10$$
$$\bar{x}_2 = 23.9 ; S_2^2 = 20$$

در سطح معنادار بودن 10% فرض برابری جریان در دو نوع ریز مدار را در مقابل نابرابر بودنشان آزمون کنید.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

$$t^* = \frac{24.2 - 23.9}{\sqrt{\frac{10}{15} + \frac{20}{10}}} = 0.184 \text{ ;Critical Region: } |t^*| > t_v$$

$$v = \frac{\left(\frac{10}{15} + \frac{20}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{10}{15}\right)^2}{15+1} + \frac{\left(\frac{20}{10}\right)^2}{10+1}} - 2 = 16$$

$$\text{Since } |t^*| = 0.184 \not> t_{0.05,16} = 1.746 \text{ then Accept } H_0$$

5-7-4. آزمون برابری واریانس های دو جامعه

فرض کنید، بخواهیم فرض برابری واریانس دو جامعه نرمـال را، در سـطح معنـادار بـودن α آزمـون کنیم. برای این کار، ابتدا، دو نمونه مستقل از دو جامعه نرمـال بـه صـورت $x_1,...,x_{n_1}$ و $x_1,...,x_{n_2}$ گرفته می شود. سپس آماره

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}$$

که متغیـر تـصادفی F بـا n_1-1 درجـه آزادی در صـورت و n_2-1 درجـه آزادی در مخـرج اسـت، محاسبه می‌شود. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد(بحرانی) قرار گیرد فرض H_0 را رد و در غیر این صورت پذیرفته می شود.

$$\begin{cases} H_0:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\geq 1 \\ H_1:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1 \end{cases} \quad if\ \ F^*>F_{\alpha,n_1-1,n_2-1}\ \ then\ Reject\ \ H_0$$

$$\begin{cases} H_0:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\leq 1 \\ H_1:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}>1 \end{cases} \quad if\ \ F^*<F_{1-\alpha,n_1-1,n_2-1}\ \ then\ Reject\ \ H_0$$

$$\begin{cases} H_0:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1 \\ H_1:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\neq 1 \end{cases} \quad if\ \ F^*>F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_1-1}\ \ or\ \ F^*<F_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1} then\ Reject\ \ H_0$$

مثال16. بر اساس داده‌های ذیل که مربوط به زمان نمایش فیلم های تهیه شـده توسـط دو شـرکت است، فرضیه $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ را در برابر $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ در سطح $\alpha=0.1$، آزمون کنید.

زمان برحسب دقیقه

شرکت 1	102	86	98	109	92		
شرکت 2	81	165	97	134	92	87	114

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{78.8}{913.333}=0.0863$$

$$Critical\ \ Region: F^*>F_{\frac{\alpha}{2},4,6}=4.53\ \ and\ \ F^*<F_{1-\frac{\alpha}{2},4,6}=0.163$$

$$Since\ \ F^*=0.0863<F_{1-\frac{\alpha}{2},4,6}=0.163\ \ then\ Reject\ H_0$$

بنابراین H_0 رد می شود.

6-7-4. آزمون مشاهدات زوجی

در آزمون مشاهدات زوجی اثر یک اقدام اصلاحی بر یک جامعه سنجیده می‌شود. بنابراین جامعه اول مربوط به قبل از اقدام مزبور و جامعه دوم مربوط به بعد از اقدام مزبور است از هم مستقل نبوده و به هم وابسته‌اند. فرض کنید $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ مجموعه‌ای متشکل از n زوج متغیر تصادفی زوجی باشد. تفاوت بین هر زوج مشاهده عبارت است از $D_1 = x_1 - y_1, ..., D_n = x_n - y_n$ که متغیرهای تصادفی نرمال با میانگین مشترک و مجهول μ_D و انحراف معیار مشترک و مجهول σ_D است. انحراف معیار σ_D، به σ_x^2 و σ_y^2 بستگی دارد. اگر x و y مستقل باشند در اینصورت $\sigma_D = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ است.

با این فرض، آزمون برابری تفاضل میانگین دو جامعه (قبل و بعد از اقدام اصلاحی) با یک مقدار خاص معادل آزمون فرض $\mu_D = d$ است وقتی که انحراف معیار σ_D مجهول باشد، در این صورت آماره آزمون بصورت ذیل در می‌آید:

$$t^* = \frac{\bar{D} - d}{S_D / \sqrt{n}}$$

که متغیر تصادفی t با n-1 درجه آزادی است. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد(بحرانی) قرار گیرد فرض H_0 را رد و در غیر این صورت پذیرفته می شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D \le d \\ H_1 : \mu_D > d \end{cases} \quad if \quad t^* > t_{\alpha, n-1} \quad then\ reject\ H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D \ge d \\ H_1 : \mu_D < d \end{cases} \quad if \quad t^* < -t_{\alpha, n-1} \quad then\ reject\ H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = d \\ H_1 : \mu_D \ne d \end{cases} \quad if \quad t^* > \left| t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \right| \quad then\ reject\ H_0$$

که در آن داریم:

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n}, s_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(D_i - \bar{D}\right)^2}{n-1}}$$

مثال17. تجربه ای مبتنی بر مقایسه خوردگی لوله با دو نوع پوشش انجام شده است. به منظور بررسی میزان خوردگی نمونه برداری‌های زوجی انجام شده و طی آن یک نمونه از هر پوشش در هر زوج شرکت داده شود و هر زوج در یک نوع خاک، در عمق یکسان، با موقعیتی مشابه و برای مدتی یکسان دفن می شود. از دیدگاه علمی، کشف تفاوت 11% اینچی در میانگین عمق بزرگترین حفره بوجود آمده در هر پوشش با احتمال بزرگتر یا مساوی با 0/95 مهم شمرده می‌شود. براساس تجارب گذشته می دانیم که انحراف معیار عمیق بزرگترین حفره برای پوشش های مشابه مقدار تقریبی 0/008 اینچ را دارد. نتایج بدست آمده از 15 نمونه برداری به شرح ذیل است:

پوشش A	پوشش B	تفاوت = D_i
65	40	25
75	68	7
73	51	22
43	41	2

53	41	12
58	47	11
47	32	15
52	24	28
38	43	-5
61	53	8
56	52	4
56	57	-1
34	44	-10

در سطح معنادار‌بودن 5% آیا دو نوع پوشش از نظر میزان خوردگی یکسان هستند.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = 0 \\ H_1 : \mu_D \neq 0 \end{cases}$$

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n} = \frac{120}{15} = 8\ ;\ S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - \bar{D}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{121.571}$$

$$t^* = \frac{5-0}{\sqrt{121.571} / \sqrt{15}} = 2.81\ ;\ \text{Critical Region: } \left|t^*\right| > t_{0.025,14} = 2.145$$

$$\text{Since } \left|t^*\right| = 2.81 > t_{0.025,14} = 2.145 \text{ then Reject } H_0$$

بنابراین، بین دو نوع پوشش از نظر میزان خوردگی تفاوت قابل توجه ای وجود دارد.

7-7-4. آزمون نسبت

فرض کنید در یک جامعه دو جمله‌ای می‌خواهیم فرضیات ذیل را آزمون کنیم.

$$I:\begin{cases}H_0: p = p_0\\ H_1: p \neq p_1\end{cases}\quad II:\begin{cases}H_0: p = p_0\\ H_1: p < p_0\end{cases}\quad III:\begin{cases}H_0: p = p_0\\ H_1: p > p_0\end{cases}$$

که در آن P_0 نسبت موفقیت در آزمایش برنولی است. آماره مناسب برای P که تصمیم گیری بر اساس آن انجام می‌شود $\hat{p}=\frac{x}{n}$ است. در محاسبه احتمال در توزیع دوجمله ای اگر n بزرگ باشد، عموماً از تقریب پواسون و در حالتی که p به صفر یا یک نزدیک نباشد از تقریب نرمال استفاده می شود. بنابراین برای تعیین ناحیه بحرانی دو حالت در نظر می گیریم.

1-7-7-4. آزمون نسبت برای اندازه نمونه کوچک

اگر اندازه نمونه، n، کوچک باشد، برای تشکیل ناحیه بحرانی ابتدا نقطه بحرانی را برابر تعداد موفقیت‌ها در نمونه منتخب، x ، قرار داده و به کمک آن α را محاسبه می کنیم. از آنجا که x توزیع دوجمله ای دارد و میانگین آن $\mu = np_0$ است، بنابراین مقادیری از x که فاصله زیادی با $\mu = np_0$ داشته باشد باعث رد فرض صفر خواهد شد. در نتیجه برای آزمون فرضیه به صورت $\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$ با استفاده ازتوزیع دو جمله‌ای b(x,n,p₀) مقدار احتمال $\alpha_1 = p(x \le x | H_0 \text{ is True})$ را که در آن x تعداد موفقیت‌ها در نمونه‌ای به اندازه n است، محاسبه کرده و در صورتیکه α_1 کمتر از α، سطح معناداربودن، باشد، فرض صفر را رد می‌کنیم.

همچنین برای آزمون فرضیه به صورت $\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$ با استفاده ازتوزیع دو جمله ای $b(x,n,p_0)$ مقدار احتمال $\alpha_1 = p(x \ge x \mid H_0 \text{ is True})$ را محاسبه کرده و در صورتی‌که α_1 کمتر از α، سطح معناداربودن، باشد، فرض صفر را رد می کنیم.

به همین ترتیب برای آزمون فرضیه دوطرفه $\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \ne p_0 \end{cases}$ با استفاده از توزیع دو جمله ای $b(x,n,p_0)$ مقدار احتمال ذیل را بدست می آوریم:

$$\alpha_1 = p(x \le x \mid p = p_0) \qquad \text{if } x < np_0$$
$$\alpha_1 = p(x > x \mid p = p_0) \qquad \text{if } x > np_0$$

اگر $\alpha_1 < \frac{\alpha}{2}$ باشد. فرض صفر را رد می کنیم.

مثال18. یک بازیکن بسکتبال ادعا می‌کند که 60% از توپ‌هایی که پرتاب می‌کند وارد سبد می‌شوند. در یک بازی، از 15 توپی که پرتاب کرده 10 توپ وارد سبد شده است. آیا می توان این ادعا را پذیرفت؟ α=%5

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.6 \\ H_1 : p \ne 0.6 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$\mu = np_0 = 15 * 0.6 = 9$$

$$x = 10 \Rightarrow x > np_0$$

$$\alpha_1 = p(x \ge 10 \mid p = 0.6) = 1 - p(x < 10) = 1 - \sum_{x=0}^{9} bin(x, 15, 0.6) = 1 - 0.5968 = 0.4032$$

$$Since\ \alpha_1 = 0.4032 \not< \frac{\alpha}{2} = 0.025\ \ then\ Accept\ H_0$$

2-7-7-4. آزمون نسبت برای اندازه نمونه بزرگ

اگر n بزرگ باشد(معمولا برای اندازه نمونه بزرگتر از 30)، بنا بر قضیه حد مرکزی، $\hat{p}=\frac{x}{n}$ تقریباً توزیع نرمال با میانگین و واریانس $\mu=np_0$, $\sigma=\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}}$ دارد و در نتیجه تصمیم‌گیری بر اساس آماره ذیل خواهد بود:

$$z^*=\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}}}=\frac{x-np_0}{\sqrt{np_0q_0}}$$

که متغیر تصادفی نرمال استاندارد است. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد(بحرانی) قرار گیرد فرض H_0 رد و در غیر این صورت پذیرفته می‌شود.

$$\begin{cases}H_0: P\le P_0\\ H_1: P>P_0\end{cases}\quad if\ \ Z^*>Z_\alpha\ \ then\ reject\ H_0$$

$$\begin{cases}H_0: P\ge P_0\\ H_1: P<P_0\end{cases}\quad if\ \ Z^*<-Z_\alpha\ \ then\ reject\ H_0$$

$$\begin{cases}H_0: P=P_0\\ H_1: P\ne P_0\end{cases} a\quad if\ \ Z^*>\left|Z_{\frac{\alpha}{2}}\right|\ then\ reject\ H_0$$

مثال19. سکه ای را 900 بار پرتاب می کنیم، 490 بار شیر می آید. آیا سکه نا اریب است؟ α=%5

$$\begin{cases}H_0: p=\frac{1}{2}\\ H_1: p\ne\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$Z^*=\frac{490-900\times\frac{1}{2}}{\sqrt{900\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}=2.667\ ;Critical\ \ Region: \left|Z^*\right|>Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{.025}=1.96$$

$$Since\ \ \left|Z^*\right|=2.667>Z_{.025}=1.96\ \ then\ Reject\ H_0$$

بنابراین فرضیه صفر رد می‌شود.

مثال20. یک شرکت تولیدی ادعا می‌کند که تنها 5 درصد تولیدات او ممکن است معیوب باشد. از 400 نمونه ای که از این شرکت خریداری شده 30 عدد معیوب بوده است. بر پایه این اطلاعات، آیا می‌توان ادعای شرکت را قبول کرد؟ α=%5

$$\begin{cases}H_0: p=0.05\\ H_1: p>0.05\end{cases}\quad \hat{p}=\frac{x}{n}=\frac{30}{400}=0.075$$

$$z^*=\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0q_0/n}}=\frac{(0.05-0.075)}{\sqrt{\frac{0.05\times0.95}{400}}}=2.29\ ;Critical\ \ Region: Z^*>Z_\alpha=Z_{.05}=1.645$$

$$Since\ \ Z^*=2.29>Z_{.05}=1.645\ \ then\ Reject\ H_0$$

بنابراین فرضیه صفر رد می‌شود.

4-7-8. آزمون تفاضل نسبت‌ها در دو جامعه

در این حالت نیز دو حالت برای اندازه نمونه کوچک و بزرگ به شرح ذیل درنظر گرفته می شود.

4-7-8-1. آزمون تفاضل نسبت‌ها در دو جامعه برای اندازه نمونه کوچک

فرض کنید x_1و x_2 تعداد موفقیت مشاهده شده در دو نمونه تصادفی به اندازه n_1 و n_2 و $x_1 + x_2 = y$ مقدار ثابتی باشد. آزمون فرضیه ذیل را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 > p_2 \end{cases}$$

با داشتن $x_1 + x_2 = y$، مقادیر بزرگ x_1 فرض مقابل را تایید می‌کند و مقادیر کوچک x_1 فرض صفر را تایید می‌کند. بنابراین اگر x_1 به اندازه کافی بزرگ باشد فرض صفر رد می‌شود.

از آنجا که نمونه متشکل از $n_1 + n_2$مشاهده شامل $x_1 + x_2 = y$ موفقیت است، اگر فرض صفر درست باشد موفقیت‌ها با احتمال یکسانی در دو نمونه ظاهر می‌شوند. به معنای اینکه از $n_1 + n_2$ مشاهده با احتمال یکسان n_1 پاسخ در نمونه اول و n_2 پاسخ در نمونه دوم ظاهر می‌شوند.

براین پایه، تعداد روش‌های انتخاب x_1 برای نمونه اول و $y - x_1$ موفقیت برای نمونه دوم عبارت است از :

$$\binom{y}{x_1} * \binom{n_1 + n_2 - y}{n_1 - x_1}$$

$$P(x = x_1 \mid Y \; Success \; in \; n_1 + n_2 \; Response) = \frac{\binom{y}{x_1} * \binom{n_1 + n_2 - y}{n_1 - x_1}}{\binom{n_1 + n_2}{n_1}}$$

در صورتی که فرضیه صفر درست باشد، توزیع بالا، فوق هندسی است. برای رد یا قبول فرضیه صفر باید p-value را به صورت ذیل محاسبه نمود.

$$p - value = p(x > x_1 \mid p_1 = p_2)$$

اگر مقدارp-value از سطح معناداربودن α کوچکتر باشد فرضیه صفرد و به جز آن قبول می‌شود.

2-8-7-4. آزمون تفاضل نسبت‌ها در دو جامعه برای اندازه نمونه بزرگ

در مواقعی که اندازه نمونه در دو نمونه بزرگ باشد، بنا به قضیه حـد مرکـزی، $\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}$ و $\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$، تقریبـــاً دارای توزیـــع نرمـــال بترتیـــب بـــا میـــانگین و واریـــانس $\mu_1 = n_1 p_1$, $\sigma_1^2 = \frac{p_1 q_1}{n_1}$ و $\mu_2 = n_2 p_2$, $\sigma_2^2 = \frac{p_2 q_2}{n_2}$است. در این صورت:

$$\widehat{P_1} - \widehat{P_2} \sim Normal(\, \mu = n_1 p_1 + n_2 p_2 \,;\, \sigma^2 = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2})$$

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \sim Normal(0,1)$$

با این اوصف، برای آزمون فرضیه، از دو جامعه بترتیب دو نمونه مـستقل بـه انـدازه n_1 و n_2 انتخـاب می کنیم و نسبت های موفقیت $\hat{p}_1$ و $\hat{p}_2$ را از دو رابطه ذیل حساب می کنیم:

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}, \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$$

که د رآن x_1 و x_2 تعداد موفقیت در دو نمونه است و n_1 و n_2 اعداد بزرگی هستند. با ادغام دو نمونه، برآورد نا اریب p (نسبت مشترک دو جامعه تحت فرض H_0) به صورت ذیل بدست می آید:

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

در صورتی که فرض صفر که برابری نسبت در دو جامعه درست باشد($(p_1 = p_2)$)، متغیر تصادفی Z، آماره آزمون، بصورت ذیل در می‌آید.

$$z^* = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

که در آن $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ است. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه رد(بحرانی) قرار گیرد فرض H_0 رد و در غیر این صورت پذیرفته می‌شود.

$$\begin{cases} H_0 : P_1 \le P_2 \\ H_1 : P_1 > P_2 \end{cases} \quad if \;\; Z^* > Z_\alpha \;\; then\ reject\ H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : P_1 \ge P_2 \\ H_1 : P_1 < P_2 \end{cases} \quad if \;\; Z^* < -Z_\alpha \;\; then\ reject\ H_0$$

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \\ H_1 : P_1 \ne P_2 \end{cases} a \quad if \;\; Z^* > \left| Z_{\frac{\alpha}{2}} \right| \;\; then\ reject\ H_0$$

مثال21. در شهر الف از هر 1000 نفر 450 نفر و در شهر ب از هر 800 نفر 40 نفر نوعی چای مخصوص خریداری می‌کنند. آیا می‌توان گفت مردم در هر دو شهر به یک اندازه به این نوع چای علاقمند هستند؟(خطای نوع اول را ده درصد در نظر بگیرید).

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 = p \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{450}{1000} = 0.45 \; ; \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{400}{800} = 0.5$$

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{450 + 400}{1000 + 800} = 0.47 \; ; \hat{q} = 1 - 0.47 = 0.53$$

$$Z^* = \frac{0.45 - 0.5}{\sqrt{0.47 \times 0.53 \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{800} \right)}} = -2.08 \; ; Critical \;\; Region: \left| Z^* \right| > Z_{\frac{\alpha}{2}=0.05}$$

$$Since \;\; \left| Z^* \right| = 2.08 > Z_{\frac{\alpha}{2}=0.05} = 1.645 \;\; then \; Reject \; H_0$$

مثال22. در یک بیمارستان از 956 نوزاد 52/5 درصد پسر بودند در حالیکه وقتی نوزادان 2 بیمارستان را در نظر گرفتیم از 1406 نوزاد 0/4960 درصد پسر بودند. آیا اختلاف معنی داری در مورد نسبت نوزادان پسر در دو بیمارستان وجود دارد؟

$$\mathrm{n}_1 = 956$$

$$\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2 = 1406 \Rightarrow \mathrm{n}_2 = 450$$

$$\hat{\mathrm{p}}_1 = 0.525$$

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} \Rightarrow 0.496 = \frac{956 \times 0.525 + 450 \, \hat{p}_2}{1406} \Rightarrow \hat{p}_2 = 0.434$$

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

$$z^* = \frac{0.525 - 0.434}{\sqrt{0.496 \times 0.504 \left(\frac{1}{956} + \frac{1}{450} \right)}} = 3.37 \; ; Critical \;\; Region: \left| Z^* \right| > Z_{\frac{\alpha}{2}=0.05}$$

$$Since \;\; \left| Z^* \right| = 3.37 > Z_{\frac{\alpha}{2}=0.05} = 1.645 \;\; then \; Reject \; H_0$$

بنابراین فرضیه صفر رد می شود.

9-7-4. آزمون های مربوط به تفاضل های بین k نسبت

هدف از این انجام آزمون این است که معلوم شود که آیا تفاضل‌هایی که بین نسبت‌های نمونه‌ای در k جامعه، مشاهده می‌شوند معنادار یا معلول تصادف هستند. برای اشاره به یک روش کلی در حل این نوع مسائل، فرض کنید که $X_1,...,X_K$ مقادیر مشاهده شده مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل باشند که توزیع دو جمله‌ای با پارامتر (n_i, θ_i) دارند. اگر n_i ها به اندازه کافی بزرگ باشند می توانیم توزیع متغیرهای تصادفی مستقل را با توزیع نرمال استاندارد به صورت ذیل تقریب بزنیم.

$$z_i = \frac{x_i - n_i\theta_i}{\sqrt{n_i\theta_i(1-\theta_i)}}; i = 1,...,k$$

و با توجه به اینکه $z^2 \sim \chi^2_{(1)}$ دارد، می‌توانیم.

$$\chi^2_{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - n_i\theta_i)^2}{\sqrt{n_i\theta_i(1-\theta_i)}}$$

را یک متغیر تصادفی که توزیع مربع کای با k درجه آزادی دارد تلقی کنیم.

بنابراین برای آزمون فرض

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_k = \theta_0 \\ H_1 : \quad \text{حداقل یکی از } \theta \text{ها برابر } \theta_0 \text{ نیست} \end{cases}$$

از ناحیه بحرانی $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,k}$ استفاده می‌شود که د رآن

$$\chi^{2^*} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - n_i\theta_0)^2}{n_i\theta_0(1-\theta_0)}$$

وقتی در فرضیه صفر θ_0 معین نیست، به جای θ برآورد ادغام شده را قرار می دهیم و ناحیه بحرانی بصورت $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,k-1}$ در می آید که در آن تغییر در ناحیه بحرانی از $\chi^2_{\alpha,k}$ به $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,k-1}$ ناشی از این واقعیت است که به جای پارامتر نامعلوم θ_0 ، برآورد آن قرار داده شده است.

برای انجام آزمون، با مرتب کردن داده ها بصورت جدول ذیل:

	موفقیت	شکست
نمونه 1	x_1	n_1-x_1
.	.	.
نمونه k	x_k	n_K-x_k

در جدول فوق، فراوانی مشاهده شدهٔ در هر خانه از جدول f_{ij} نامیده می‌شود، که در آن اندیس i نشانه سطر و اندیس j نشانه ستون در جدول است. براساس درستی فرضیه صفر، $\theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_k = \theta_0$ مقدار انتظاری(امید) فراوانی مشاهده شده در هر خانه از جدول به صورت ذیل برآورد می‌شود.

$$e_{i1} = n_i\hat{\theta},\ i = 1,...,k$$
$$e_{i2} = n_i(1-\hat{\theta}),\ i = 1,...,k$$

در این صورت، مقدار آماره آزمون بصورت ذیل است:

$$\chi^{2^*} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{2} \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

و فرض صفر در صورتی که $\chi^{*2} \geq \chi^2_{\alpha,k-1}$ باشد رد می شود.

مثال23. برمبنای داده‌های نمونه‌ای که در جدول ذیل نشان داده شده تعین کنید که نسبت واقعی مشتریانی که ماده پاک کننده را به ماده پاک کننده B ترجیح می دهند در هر سه شهر یکسان است یا نه؟(α=0/05)

شهر C	شهر B	شهر A
197	260	232

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \\ H_1 : \qquad\qquad H_o \end{cases}$$

$$\hat{\theta} = \frac{232 + 260 + 197}{400 + 500 + 400} = 0.53$$

$$Critical\ \ Region: \chi^2 \geq \chi^2_{0.05\ ,2} = 5.991$$

$$e_{11} = 400 \times 0.53 = 212 \qquad e_{12}\, 400 \times 0.47 = 188$$

$$e_{21} = 500 \times 0.53 = 265 \qquad e_{22} = 500 \times 0.47 = 235$$

$$e_{31} = 400 \times 0.53 = 212 \qquad e_{32} = 400 \times 0.47 = 180$$

$$\chi^{2^*} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} \frac{\left(f_{ij} - e_{ij}\right)^2}{e_{ij}} = \frac{(232 - 212)^2}{212} + \frac{(260 - 265)^2}{265} + \frac{(197 - 212)^2}{212} + \frac{(168 - 188)^2}{188} + \frac{(240 - 235)^2}{235}$$

$$+ \frac{(203 - 188)^2}{188} = 6.48$$

$$Since\ \ \chi^{2^*} = 6.48 > 5.991\ \ then\ Reject\ H_0$$

مثال24. یک نمونه تصادفی از 30 نفر بزرگسال برحسب جنس و تعداد ساعتی که در هفته تلویزیون تماشا می کنند به صورت جدول ذیل دسته بندی شده اند:

	مرد	زن
بالای 25 سال	5	9
زیر 25 سال	9	7

با استفاده از سطح معنادار بودن 0/01 فرضیه استقلال بین جنس و مدت زمان تماشای تلویزیون را تست نمائید.

	مرد	زن
بالای 25 سال	5 (6/53)	9 (7/46)
زیر 25 سال	9 (7/46)	7 (538)

$$\chi^{2^*}_{(1)} = \frac{\left(|5 - 6.53| - 0.5\right)^2}{6.53} + \frac{\left(|9 - 7.46| - 0.5\right)^2}{7.46} + \frac{\left(|9 - 7.46| - 0.5\right)^2}{7.46} + \frac{\left(|7 - 8.53| - 0.5\right)^2}{8.53} = 0.5768$$

$$Critical\ \ Region: \chi^2 \geq \chi^2_{0.01\ ,1}\ ;\ Since\ \chi^{2^*}_{(1)} = .5768 \not> \chi^2_{0.01\ ,1} = 6.635\ \ then\ Accept\ H_0$$

بنابراین H_0 رد نمی شود.

4-7-10. آزمون استقلال

در آزمون استقلال هدف بررسی استقلال بین دو متغیر تصادفی است. آزمون استقلال بر پایه جداول توافقی انجام می شود. درحالت کلی یک جدول توافقی r*c، r سطر معرف سطوح مختلف از یک متغیر و c ستون معرف سطوح مختلف از متغیر دیگر هستند. در جدول ذیل نمونه یک جدول توافقی نشان داده شده است.

	A_1	000	A_c	
B_1	f_{11}	000	f_{1c}	$\mathbf{f_{.1}}$
.	.		.	.
.	.		.	.
.	.		.	.
B_r	f_{r1}	000	f_{rc}	$\mathbf{f_{.r}}$
	$\mathbf{f_{1.}}$	000	$\mathbf{f_{c.}}$	$\mathbf{f}$

که در آن f_{ij} فراوانی خانه‌ای مشاهده شده در سطر i و ستون j است و $f_{i.}=\sum_{j=1}^{c} f_{ij}$ و $f_{.j}=\sum_{i=1}^{r} f_{ij}$ مجموع سطر و ستون و به عبارت دیگر فراوانی حاشیه‌ای و f مجموع کل است.

فرض صفر در این آزمون استقلال بین دو متغیر تصادفی است. یعنی اگر θ_{ij} احتمال آن باشد که یک فقره به سطر i و ستون j متعلق باشد و $\theta_{i.}$ احتمال آن باشد که یک فقره به سطر iام متعلق باشد و $\theta_{.j}$ احتمال آن باشد که یک فقره به ستون jام متعلق باشد فرض صفر عبارت است از

$$\theta_{ij}=(\theta_{i.})(\theta_{.j})$$

احتمال‌های $\theta_{i.}$ و $\theta_{.j}$ را بترتیب با $\hat{\theta}_{i.}=\frac{f_{i.}}{f}$ و $\hat{\theta}_{.j}=\frac{f_{.j}}{f}$ تخمین می زنیم بنابراین فراوانی انتظاری هر خانه از جدول توافقی عبارت است از

$$e_{ij}=(\hat{\theta}_{i.})(\hat{\theta}_{.j})f=\frac{f_{i.}}{f}\frac{f_{.j}}{f}f=\frac{(f_{i.})(f_{.j})}{f}$$

و بر این اساس آماره آزمون عبارتست از

$$\chi^{2^*}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}$$

که توزیع مربع کای با (r-1)(c-1) درجه آزادی دارد.

اگر $\chi^{2^*}>\chi^2_{\alpha;(r-1)(c-1)}$ باشد، فرضیه H_0 مبنی بر استقلال متغیرها در سطح α رد می شود.

مثال25. برای بررسی ارتباط بین دین و منطقه جغرافیایی آزمایشی به شرح ذیل انجام شده است. دو گروه از مردم بطور تصادفی انتخاب شده اند، یک گروه از ناحیه شمال و گروه دیگر از ناحیه جنوب و هر شخص متعلق به یکی از 3 گروه شیعه، سنی و سایر ادیان خواهد بود. فراوانی های ملاحظه شده در جدول ذیل آورده شده است.

منطقه جغرافیایی	نوع مذهب		
	مسلمان	مسیحی	سایرین
شمال	182	215	203
جنوب	154	136	110

در سطح α=0/05 آیا عقاید مذهبی و ناحیه ای که فرد زندگی می کند مستقل از یکدیگرند؟

A_1= فرد انتخابی از قسمت شمال باشد.

A_2= فرد انتخابی از قسمت جنوب باشد.

B_1= فرد انتخابی از مذهب مسلمان باشد.

B_2= فرد انتخابی از مدهب مسیحی باشد.

B3= فرد انتخابی از سایر مذاهب باشد.

$$\begin{cases} H_0: \text{استقلال رابطه منطقه جغرافیایی و نوع مذهب} \\ H_1: H_0 \text{ درست نیست} \end{cases}$$

نوع مذهب				
منطقه جغرافیایی	مسلمان	مسیحی	سایرین	جمع
شمال	182(202)	215(112)	203(187)	600
جنوب	154(136)	136(140)	110 (140)	400
جمع	336	351	313	1000

براساس جدول بالا، احتمال آنکه یک فرد از قسمت شمال مسلمان باشد عبارت است از

$$p(A_1 \cap B_1) = p(A_1)p(B_1) = \frac{600}{1000} \times \frac{436}{1000}$$

و بر این پایه، در صورتیکه H_0 درست باشد، تعدادافرادی که در 1000 نفر انتظار داریم شمالی و مسلمان باشند عبارت است از $n_{A_1,B_1=} \left(\frac{600}{1000}\right)\left(\frac{336}{1000}\right)(1000) = 202$

به همین ترتیب احتمال و فراوانی انتظاری تعداد افرادی که از قسمت شمال انتخاب شده اند و مسیحی هستند عبارتست از:

$$p(A_1 \cap B_2) = p(A_1)p(B_2) = \frac{600}{100} \times \frac{351}{1000}$$

$$n_{A_1,B_2=} = \left(\frac{600}{1000}\right)\left(\frac{351}{1000}\right)(1000) = 211$$

به همین ترتیب برای بقیه محاسبه می شود.

$$\chi^{2^*}_{(2-1)(3-1)} = \frac{(182-202)^2}{202} + \frac{(215-211)^2}{211} + \frac{(203-187)^2}{187}$$

$$+\frac{(154-134)^2}{134} + \frac{(136-140)^2}{140} + \frac{(110-126)^2}{126} = 8.556$$

$$Critical\ \ Region:\ \chi^{2^*} > \chi^2_{\alpha,(r-1)(c-1)}$$

$$Since\ \chi^{2^*} = 8.556 > \chi^2_{0.05,2} = 5.991\ \ then\ Reject\ H_0$$

11-7-4. آزمون درستی انطباق

آزمون درستی انطباق برای آزمون اینکه آیا داده‌های یک نمونه از توزیع احتمالی خاصی تبعیت می‌کند به کار می رود. در آزمون درستی انطباق فرضیه صفر و مقابل به صورت ذیل فرموله می‌شود.

H_0: داده‌ها، توزیع احتمالی خاصی دارد

H_1: داده‌ها، از توزیع احتمالی خاص پیروی نمی‌کند

در آزمون درستی انطباق، براساس آماره ذیل:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

که در آن O_i مقادیر ملاحظه شده و e_i مقادیر انتظاری خانه iام است و χ^2 متغیر تصادفی مربع کای است تصمیم‌گیری می‌شود. فرض H_0 اگر $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k-1-t}$ باشد، رد می‌شود. به عبارتی درجه آزادی مربع کای عبارت است از:

تعداد پارامترهای تخمین زده شده از روی داده ها – 1- تعداد سلول ها= درجه آزادی توزیع مربع کای

مثال26. یک تاس 120 مرتبه انداخته می شود و نتایج ذیل به دست آمده است. آیا این تاس سالم است؟ α=0/05

x	1	2	3	4	5	6
f	20	22	17	18	19	24
انتظاری	20	20	20	20	20	20

$$\begin{cases} H_0 : P(x=i) = \frac{1}{6} \\ H_0 : P(x=i) \neq \frac{1}{6} \end{cases}$$

اگر تاس سالم باشد، انتظار خواهیم داشت که هر یک از اعداد 1 تا 6 را 20 بار نشان دهد.

$$\chi^{2^*}_{(15)} = \frac{(20-20)^2}{20} + \frac{(22-20)^2}{20} + \frac{(17-20)^2}{20} + \frac{(18-20)^2}{20} + \frac{(19-20)^2}{20} + \frac{(24-20)}{20} = 1.7$$

$$Critical\ Region: \chi^2 > \chi^2_{\alpha, k-1-t}$$

$$Since\ \chi^{2^*}_{(15)} = 1.7 \ngtr \chi^2_{0.05, 6-1} = 11.07\ \ then\ Accept\ H_0$$

بنابراین H_0 پذیرفته می شود و نتیجه می گیریم توزیع یکنواخت است و تاس سالم است.

نکته: در صورتی که فراوانی انتظاری سلولی از 5 کمتر باشد با سلولهای بالاتر خود ادغام می‌شود.

مثال27. فرض کنید طول عمر 40 باطری از توزیع نرمال پیروی می کند. فراوانی مشاهده شده برای هر طبقه داده شده است طول عمر 40 باطری دارای حد متوسط 3/4125= $\bar{x}$ و انحراف معیار 0/703= S است. در سطح α=0/05 آیا طول عمر باطری ها از توزیع نرمال پیروی می کند یا خیر؟

از آنجا که بعضی از مقادیر مشاهده شده و انتظاری از 5 کمتر هستند در هم ادغام شده اند.

حدود طبقه ها		o_i فراوانی مشاهده شده	e_i فراوانی انتظاری	
1/45-1/95	7	2	0/6	10/1
1/95-2/45		1	2/7	
2/45-2/95		4	6/8	
2/95-3/45		15	10/6	
3/45-3/95		10	10/3	
3/95-4/45	8	5	6/1	8/3
4/45-4/95		3	2/2	

$$P(1.45 < x < 1.95) = P\left(\frac{1.45-3.4125}{0.70} < Z < \frac{1.95-3.4125}{0.703}\right) = 0.015\ ;\ e_1 = 0.015 \times 40 = 0.6$$

$$P(1.95 < x < 2.45) = P\left(\frac{1.95-3.4125}{0.703} < Z < \frac{2.45-3.4125}{0.703}\right) = 0.0675\ ;\ e_1 = 0.0675 \times 40 = 2.7$$

$$P(2.45 < x < 2.95) = P\left(\frac{2.45-3.4125}{0.703} < Z < \frac{2.95-3.4125}{0.703}\right) = 0.17\ ;\ e_1 = 0.17 \times 40 = 6.8$$

$$P(2.95 < x < 3.45) = P\left(\frac{2.95-3.4125}{0.703} < Z < \frac{3.45-3.4125}{0.703}\right) = 0.265\ ;\ e_1 = 0.265 \times 40 = 10.6$$

$$P(3.45 < x < 3.95) = P\left(\frac{3.45-3.4125}{0.703} < Z < \frac{3.95-3.4125}{0.703}\right) = 0.2575\ ;\ e_1 = 0.2575 \times 40 = 10.3$$

$$P(3.95 < x < 4.45) = P\left(\frac{3.95-3.4125}{0.703} < Z < \frac{4.45-3.4125}{0.703}\right) = 0.1525\ ;\ e_1 = 0.1525 \times 40 = 6.1$$

$$P(4.45 < x < 4.95) = P\left(\frac{4.45-3.4125}{0.703} < Z < \frac{4.95-3.4125}{0.703}\right) = 0.55\ ;\ e_1 = 0.55 \times 40 = 2.2$$

$$\chi^{2^*}_{(1)} = \frac{(|7-10.1|-0.5)^2}{10.1} + \frac{(|15-10.6|-0.5)^2}{10.6} + \frac{(|10-10.3|-0.5)^2}{10.2} + \frac{(|8-8.3|-0.5)^2}{10.3} = 2.1129$$

$$Critical\ Region: \chi^2 > \chi^2_{\alpha,k-1-t} = \chi^2_{0.05,1}$$

$$Since\ \chi^{2^*}_{(15)} = 2.1129 \not> \chi^2_{0.05,1} = 3.841\ then\ Accept\ H_0$$

بنابراین، H_0 رد نمی شود.

مثال28. در بررسی از 1000 خانواده که دارای 5 بچه هستند تعداد دخترها مطابق جدول ذیل احصاء شده است. در سطح معنادار‌بودن 5 درصد آیا این تولدها از توزیع دو جمله ای پیروی می کند؟

دختر	0	1	2	3	4	5
فراوانی	38	144	342	287	164	25

$$\mu = \frac{x_i}{n} = \frac{2470}{1000} = 0.247$$
$$P = \frac{\mu}{n} = \frac{2.47}{5} = 0.494$$
$$P(x = x) = \binom{5}{0}(0.494)^x (0.506)^{5-x}$$
$$P(x = 0) = \binom{5}{0}(0.494)^0 (0.506)^5 \ 0.03317$$
$$n = (x = 0) = (0.03317)(1000) = 33.2$$

فراوانی مشاهده شدهo_i :	38	144	342	287	164	25
فراوانی انتظاری :Ei	33/2	161/9	316/2	308/7	150/7	29/4

$$\chi^2_{(2)} = \frac{(38-32.2)^2}{32.2} + \frac{(144-161.9)^2}{161.9} + \frac{(342-316.2)^2}{316.2} + \frac{(287-308.7)^2}{308.7} + \frac{(164-150.7)^2}{150.7}$$
$$+ \frac{(25-201.4)^2}{29.4} = 8.48$$

Critical Region: $\chi^2 > \chi^2_{\alpha, k-1-t} = \chi^2_{0.05,5}$

Since $\chi^{2^*}_{(15)} = 8.48 \ngtr \chi^2_{0.05,5} = 11.07$ *then Accept* H_0

بنابراین، H_0 قبول می شود.