بسمه تـ

جزوه

امار احتمال مهندسی

دانشگاه

علم و صنعت

استاد

دکتر [illegible]اری

آمار و احتمالات مهندسی :

احتمال :

آزمایش تصادفی : هر عملی که نتایج آن بطور قاطع مشخص نباشد را آزمایش تصادفی گوییم.

فضای نمونه‌ای : مجموعه نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ای گوییم. که شامل همه حالات ممکن یک آزمایش تصادفی است. و با Ω یا S نشان می‌دهیم.

پیشامد : زیرمجموعه‌های از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد گوییم.

انواع پیشامد : ۱) هر پیشامد تک عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد ساده گوییم.

$A_i = \{a_i\}$

۲) زیرمجموعه‌ی تهی از فضای نمونه‌ای را پیشامد غیرممکن گوییم.

۳) زیرمجموعه‌ی کل فضای نمونه‌ای را پیشامد حتمی گوییم.

۴) همه زیرمجموعه‌های غیر از ۳ حالت قبل را پیشامد مرکب گوییم.

* پیشامدی را غیرممکن گوییم هرگاه در شرایط معین رخ ندهد.
* پیشامدی را حتمی گوییم هرگاه در شرایط معین رخ دهد.
* پیشامدهایی که تحت شرایط معین رخ می‌دهند یا نمی‌دهند را پیشامدهای تصادفی گویند.

انواع فضاهای نمونه‌ای :

۱) فضای نمونه‌ای شمارا و متناهی ...... اعداد طبیعی بین ۱ تا ۱۰۰

۲) فضای نمونه‌ای شمارا و نامتناهی ...... اعداد طبیعی

۳) فضاهای نمونه‌ای ناشمارا

مانند اعداد حقیقی بین صفر تا یک ... $\Omega = \{x ; x \in (a,b), a,b \in R\}$

مجموعه‌های پیوسته شمارا نیستند

توجه : کلیه عملیات نظریه‌ی مجموعه‌ها درباره‌ی پیشامدهای حاصل از یک فضای نمونه‌ای نیز صادق است.

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند:

$A\cup B$: A یا B رخ دهد

$A\cap B$: هر دوی A و B رخ دهند

$A\Delta B$: فقط یکی از A و B رخ دهد

$A-B$: A رخ دهد ولی B رخ ندهد

$\bar{A}$: A رخ ندهد

محاسبهٔ احتمال در فضای نمونه‌ای با اعضای هم‌شانس:

اگر A پیشامدی از Ω باشد، آنگاه:

اگر $n(A)$, $n(S)$ شمارا باشند می‌توان از این نسبت استفاده کرد.

$$P(A)=\frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای}}$$

اگر $A=\emptyset \Rightarrow P(A)=0$ پیشامد غیرممکن

اگر $A=\Omega \Rightarrow P(A)=1$ پیشامد حتمی

اگر $A\neq\emptyset,\ A\neq\Omega \Rightarrow P(A)=\frac{k}{n},\ 0<k<n$

$$\Rightarrow \forall A\in\Omega \longrightarrow \boxed{0\leq P(A)\leq 1}$$

مثال) از مجموعهٔ اعداد طبیعی بین ۱ تا ۲۰، احتمال انتخاب عددی که مضرب ۲ باشد چقدر است؟

$$n(S)=20\ ;\ n(A)=\left[\frac{20}{2}\right]=10 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

۸ـ یادآوری از روش‌های شمارش:

۱) اصل ضرب: اگر آزمایشی به n طریق و آزمایش بعدی به m طریق رخ دهد، دو آزمایش باهم به $m\times n$ طریق رخ خواهند داد.

و تعمیم این تعریف برای k آزمایش امکان‌پذیر است. $(n_1\times n_2\times\cdots\times n_k)$

مثال) یک سکهٔ معمولی، یک تاس معمولی، هرم چهار وجهی، و [illegible] را باهم یکبار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای مربوطه را بیابید.

$n(S)=2\times6\times4\times6=288$

هر عضو از فضای نمونه‌ای یک ۴تایی است.

۲) اگر مجموعه‌ای دارای n عضو باشد، تعداد گروه‌های r تایی که می‌توان انتخاب کرد.

بستگی به حالت زیر است:

الف) انتخاب با جایگذاری و با ترتیب باشد

یعنی هر عضوی که انتخاب می‌کنیم دوباره به مجموعه باز می‌گردانیم و ترتیب افراد مهم است یعنی اینکه اگر عضوی از مجموعه در بار اول انتخاب شود با انتخاب او در بار دوم متفاوت است.

پس انتخاب هر عضو n حالت دارد:

* انتخاب با ترتیب یعنی اینکه دو حالت abc و acb متفاوتند. یعنی جایگشت این سه از هر حالات حل می‌شود.

$$\text{تعداد} = \underbrace{n \times n \times n \cdots \times n}_{r} = n^r$$

که این مورد بیشتر برای کدها به کار می‌رود.

مثلاً تعداد حالات نوشتن شماره‌های ۵ رقمی با تکرار از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 9\}$ برابر است با: 9^5

ب) انتخاب بدون جایگذاری و با ترتیب:

در این حالت با انتخاب هر فرد او از مجموعه کم می‌کنیم سپس نفر دوم به $(n-1)$ حالت انتخاب می‌شود، و چون ترتیب افراد مهم است. (مثلاً از قبل تعیین شده که نفر اول مدیر، نفر دوم کارمند و ... هستند) بنابراین اگر علی در بار اول انتخاب شود با اینکه وی در بار دوم انتخاب شود متمایز است.

جواب: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots (n-r+1) = (n)_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

(تعداد جایگشت r تا از n تا با ترتیب)

اگر $r = n \Rightarrow \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$

نکته: تعداد حالت چیدن n نفر در یک صف (جایگشت n نفر با ترتیب)

ج) انتخاب بدون جایگذاری و بدون ترتیب:

بدون جایگذاری و با ترتیب: $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

حال ترتیب مهم نیست یعنی جایگشت r نفر مهم نیست پس از کل حالات جایگشت این r تا را جدا می‌کنیم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

ترکیب

ضریب دو جمله‌ای

د) انتخاب با جایگذاری و بدون ترتیب : $\binom{n+r-1}{r-1}$

ضریب دوجمله‌ای منفی $\rightarrow (1+x)^{-r}$

$x_1+x_2+\dots+x_r=n \longrightarrow$ تعداد جواب‌های صحیح نامنفی $\binom{n+r-1}{r-1}$

* بدون ترتیب یعنی اینکه حالت abc با حالت cab یکی است.

نکته: اگر آزمایشی دارای k حالت باشد و n مرتبه بطور مستقل انجام بگیرد،
آنگاه فضای نمونه‌ای آزمایش k^n حالت دارد و هر حالت n تایی دارد.

مثال) سکه‌ای را ۵۰ بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای:

$k=2,\ n=50 \Rightarrow \Omega = 2^{50}$

هر حالت از فضای نمونه‌ای ۵۰ عضو دارد. برای هر بار پرتاب سکه ۲ حالت داریم.

$\Rightarrow \Omega = 2\times 2\times \dots \times 2 = 2^{50}$

$\binom{50}{2}$ = تعداد اعضایی که دو بار خط بیاید

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$$

مثال) سکه‌ای را ۳ بار پرتاب می‌کنیم، فضای نمونه‌ای را نوشته و احتمال اینکه سکه دو بار شیر بیاید را بیابید.

$\Omega = \{HHH, HHT, HTT, TTT, THH, TTH, THT\}$

تعداد حالات: $\underset{\text{اولی}}{2} \times \underset{\text{دومی}}{2} \times \underset{\text{سومی}}{2} = 2^3$ $\quad n(\Omega)=2^3,\ n(A)=3 \Rightarrow P(A)=\frac{3}{8}$

حال اگر سکه‌ای را n بار پرتاب کنیم احتمال اینکه k بار شیر بیاید را بیابید.

با توجه به احتمال دوجمله‌ای

$P(A)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$

ابتدا k محل را به $\binom{n}{k}$ طریق انتخاب کرده که هر کدام احتمال $\frac{1}{2}$ دارد. $\binom{n}{k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k$

و بقیه یعنی برای آمدن خط باید به احتمال $\frac{1}{2}$ باشند که $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$ حالت است.

همه اینها طبق اصل ضرب انجام گرفته است.

روشی که تا اینجا برای محاسبه احتمال بکار برده شد، روش فراوانی نسبی احتمال بوده است.
آیا روش دیگر روش حدی این فراوانی نسبی است:
اگر آزمایشی دارای دو حالت مطلوب و نامطلوب باشد (a, b)

n_a : تعداد حالات مطلوب

$$\Rightarrow p(\{a\}) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_a}{n}$$

با محاسبه احتمال درمی‌یابیم که احتمال اینکه در ۸ پرتاب سکه ۴ پرتاب خط باشد $\frac{1}{2}$ است:

* آیا این بدین معنی است که اگر ۸ بار سکه را بیندازیم $\binom{8}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}$
۴ بار حتماً خط می‌آید؟ خیر، ممکن است تمام دفعات شیر بیاید.

اما اگر تعداد پرتاب‌ها را خیلی زیاد کنیم یعنی تعداد N که $N \to \infty$ آنگاه تعداد حالات خط آمدن به $\frac{N}{2}$ بسیار نزدیک خواهد بود.

* روش دوم: روش کلاسیک احتمال

تعریف: فرض کنید Ω فضای نمونه‌ای متناهی و هم‌شانس باشد. اگر E پیشامدی از Ω باشد، آنگاه احتمال پیشامد E به صورت زیر است:

$$P(E) = \frac{\text{تعداد حالات مساعد برای } E}{\text{تعداد کل حالات آزمایش}}$$

مثال) فرض کنید در یک کلاس ۸۰ نفر ثبت نام کرده‌اند، ۱۵ نفر رشته A، ۲۰ نفر رشته B و ۴۵ نفر رشته C هستند. ۸ نفر به تصادف و بدون جایگذاری از کلاس انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه ۳ نفر رشته A انتخاب شود چقدر است؟

$$\Omega = \left\{\binom{80}{8}\right\} \qquad E = \{\text{پیشامد انتخاب شدن ۳ نفر از رشته A}\} = \left\{\binom{15}{3} \cdots\right\}$$
حالات مساعد

$$\Rightarrow p(E) = \frac{\binom{15}{3}\binom{65}{5}}{\binom{80}{8}} \Rightarrow \text{حالات مساعد}$$

ابتدا ۱۵ نفر رشته A را کنار گذاشته، از این ۱۵ نفر ۳ نفر را انتخاب می‌کنیم، از ۶۵ نفر باقی مانده ۵ نفر انتخاب می‌کنیم و این تعداد حالات متناظر مربوط به ۸ تایی‌هایی هستند که دقیقاً ۳ نفر رشته A و بقیه رشته غیر A است.

۴) احتمال آنکه از رشته A، ۲ نفر و از رشته B، ۳ نفر و از رشته C، ... نفر انتخاب شود چقدر است؟

$$P(E_1) = \frac{\binom{15}{2}\binom{10}{3}\binom{20}{1}\binom{35}{2}}{\binom{80}{8}}$$

مثال) یک تاس سالم را ۳ بار پرتاب می‌کنیم: ۱) احتمال آنکه نتایج هر سه پرتاب یکسان باشد چقدر است؟

$$\Omega = \{(i,j,k) : i,j,k = 1,2,\dots,6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6^3$$

$$E = \{(i,i,i) ; i = 1,2,\dots,6\} \Rightarrow n(E) = 6$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

۲) احتمال آنکه نتایج ۳ پرتاب نامساوی باشند.

ترتیب بدون تکرار

$$P(E_1) = \frac{(6)_3}{6^3} = \frac{6\times5\times4}{6^3} = \frac{20}{36}$$

روش ۲:

$$\underset{\text{احتمال تاس ۱}}{1} \times \underset{\text{احتمال تاس ۲}}{\frac{5}{6}} \times \underset{\text{احتمال تاس ۳}}{\frac{4}{6}}$$

اگر اولین عدد ۲ شد دومین عددی غیر از ۲
پس هر حالت دارد مثلاً ۱ و سومین عددی
غیر از ۲ و ۱ است سوم ۴ حالت دارد.

۳) احتمال آنکه نتایج دو پرتاب یکسان باشد و نامساوی با پرتاب سوم:

$$P(E_2) = 1 - (P(E_1) + P(E)) = \frac{9}{6^3} = \frac{15}{36}$$

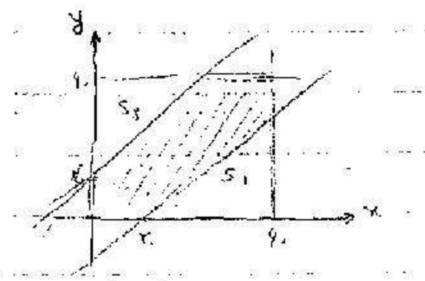
$$\Omega: \boxed{E \mid E_1 \mid E_2}$$

اشاره: ۲ حالت ممکن دو تکرار را برای یکسان بودن اعداد انتخاب می‌کنیم

روش ۲: اولی هر عددی می‌تواند باشد با احتمال $\frac{6}{6}$ سکه دوم حتماً باید با اولی برابر باشد پس با احتمال $\frac{1}{6}$ (فقط یک حالت دارد) و حالت سوم غیر از آن در حالت باشد که ۵ حالت دارد.

$$P(E_2) = \binom{3}{1} \times \frac{6}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{36}$$

مثال) دو نفر A و B قرار گذاشتند بین ساعت ۱۱ و ۱۲ در یک مکان با هم ملاقات کنند ولی هر کدام زودتر به محل برسد، حداکثر ۲۰ دقیقه منتظر دیگری باشد، اگر دیگری نیامد محل را ترک کند. احتمال ملاقات دو نفر را بیابید:



زمان رسیدن A بعد از ساعت ۱۱: x ... $0 \le x \le 60$

زمان رسیدن B بعد از ساعت ۱۱: y ... $0 \le y \le 60$

احتمال ملاقات: $|x-y| \le 20$

$\Rightarrow -20 \le x-y \le +20$

$$\Rightarrow p = \frac{S_T - (S_1 + S_2)}{S_T} = \frac{20}{36}$$

تعریف: هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای Ω باشند، دو پیشامد A و B را دو پیشامد ناسازگار گوییم، هرگاه:

$P(A \cap B) = 0$

۵- چون این مسئله را می‌توان به n پیشامد تعمیم داد: این پیشامدها دو به دو ناسازگارند هرگاه:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 0$$

۳) دنباله‌ای از پیشامدهای A_1، A_2 و ... را دو به دو ناسازگار گوییم هرگاه: $\binom{3}{2}$ $3 \times 15 \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{36}$

$\forall i \ne j \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = 0$

۴) برخورد ریاضی (اصولی) احتمال:

تعریف: فرض کنید Ω فضای نمونه‌ای و A پیشامدی از Ω است. P تابعی نامنفی روی Ω است، در این صورت احتمال پیشامد A را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و P را یک تابع احتمال می‌نامیم، هرگاه در سه اصل زیر صدق کند:

1) $P(\Omega) = 1$

2) $\forall A \subset \Omega \quad 0 \le P(A) \le 1$

3) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \quad \text{if } A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad (P(A_1 \cap A_2) = 0)$

4) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{if } A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \ne j$

A

تعمیم :

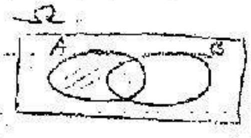
اگر A_1 و A_2 دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، داریم :

① $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

② نتیجه : اگر A و B دو پیشامد از S باشند بطوریکه $A \subset B$ باشد، داریم :

$P(B - A) = P(B) - P(A)$

① $\rightarrow$ $A_1 \cup A_2 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_1) \cup (A_1 \cap A_2)$



چون هر سه زیرمجموعه ناسازگارند طبق اصل ۳ کولموگروف داریم :

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 - A_2) + P(A_2 - A_1) + P(A_1 \cap A_2)$

طبق تعمیم ② $\Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 - (A_1 \cap A_2)) + P(A_2 - (A_1 \cap A_2)) + P(A_1 \cap A_2)$

$\Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2)$

$\Rightarrow \boxed{P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)}$

اگر بخواهیم برای سه مجموعه این رابطه را اثبات کنیم :

$P(\underbrace{(A_1 \cup A_2)}_{D} \cup A_3) = P(D \cup A_3) = P(D) + P(A_3) - P(D \cap A_3)$

حال از آنچه برای دو مجموعه نشان دادیم خواهیم داشت :

اثبات؟ $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

* برای n مجموعه چطور است؟

قضیه: فرض کنید S فضای نمونه‌ای و A پیشامدی از S باشد، در این صورت اگر A' را متمم پیشامد A نسبت به S در نظر بگیریم آنگاه:

$$P(A)=1-P(A')$$

مثال: فرض کنید در یک کلاس ۷۰ نفر حضور دارند که ۱۰ نفر از دانشجویان جوان هستند، ۸ نفر به تصادف بدون جایگذاری از کلاس انتخاب می‌کنیم،

۱) احتمال اینکه فقط دو نفر از جوان‌ها انتخاب شود، چقدر است؟

$$P(A)=\frac{\binom{10}{2}\times\binom{60}{6}}{\binom{70}{8}}$$

۲) احتمال اینکه حداقل دو نفر از دانشجویان جوان انتخاب شوند، چقدر است؟

روش ۱) حداقل دو نفر یعنی فقط ۲ نفر یا فقط ۳ نفر ... تا ۸ نفر

که هر کدام را احتمالش را حساب کرده و با هم جمع می‌کنیم (طولانی است)

$A_i=\{$پیشامد انتخاب i نفر جوان$\}$ $i=2,3,\dots,8$

روش ۲) در نظر گرفتن متمم:

$A'=\{$پیشامد حداکثر یک نفر$\}$

$$P(A')=\underbrace{\frac{\binom{10}{0}\times\binom{60}{8}}{\binom{70}{8}}}_{\text{فقط صفر نفر جوان}}+\underbrace{\frac{\binom{10}{1}\binom{60}{7}}{\binom{70}{8}}}_{\text{فقط ۱ نفر جوان}}\qquad P(A)=1-P(A')$$

قضیه: فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_n$، n پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه:

به تعداد $\binom{n}{1}$ — به تعداد $\binom{n}{2}$ (هر دو عضو که از کل مجموعه) — به تعداد $\binom{n}{3}$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j}P(A_i\cap A_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_i\cap A_j\cap A_k)$$

به تعداد $\binom{n}{4}$ — به تعداد $\binom{n}{n}=1$

$$-\sum_{1\le i<j<k<l\le n}P(A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l)+\dots+\underbrace{(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)}_{\text{جمله آخر}}$$

۲ اتاق دختر بوده $\frac{2}{3}$. احتمال آنکه هر دو دختر باشند؟ ① $\binom{}{}$ ؟ $\frac{2 \times 2}{2 \times 2}$

② ۱/۳ در اتاق دختر باشد

مثال) از مجموعه ی ورق های بازی ۵۲ تایی یک ورق به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه این ورق آس یا دل باشد چقدر است؟

$\Omega = \{a_1, \dots, a_{52}\}$, $A = \{$پیشامد اینکه ورق انتخاب شده آس باشد$\}$

$B = \{$ " " " " دل باشد $\}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$

مثال) در یک صندوق ۲۰ عدد سیب موجود است. ۱۰ عدد از سیب ها کرم دارند. ۸ عدد از سیب ها شکسته اند. ۵ عدد از سیب ها هم شکسته هم کرم دار است.

۱ سیب به تصادف از صندوق انتخاب می کنیم:

مطلوبست احتمال آنکه سیب شکسته یا کرم دار باشد؟

مطلوبست احتمال آنکه سیب سالم باشد.

$A: \{$پیشامد انتخاب یک سیب کرم دار$\}$

$B: \{$ " " " " شکسته $\}$

$P(A \cup B) = \frac{10}{20} + \frac{8}{20} - \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$

چون $P(A \cup B) = \frac{13}{20}$ است، پس هنوز سیب سالم نیز در جعبه وجود دارد

۸ احتمال انتخاب سیب سالم: → $\boxed{P(C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}}$ سیب سالم

احتمال شرطی: فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه احتمال شرطی پیشامد B به شرط وقوع پیشامد A را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\underbrace{P(B|A)}_{\text{پیشامدی که اول رخ دهد}} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)\neq 0}$$

قضیهٔ حاصلضرب برای دو پیشامد:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)$$
$$= P(B)\cdot P(A|B)$$

مثال) فرض کنید در یک ظرف ۱۲ عدد سیب موجود است. ۴ عدد از سیب‌ها زرد هستند، ۲ عدد سیب به تصادف بدون جایگذاری از ظرف انتخاب می‌کنیم.

۱) احتمال اینکه هر دو انتخاب سیب زرد باشد چقدر است.

$\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}=$

انتخاب سیب‌ها بدون جایگذاری: احتمال انتخاب دو سیب زرد = احتمال سیب اول زرد × احتمال سیب دوم زرد $= \frac{4}{12}\times\frac{3}{11}=\frac{1}{11}$

A = {پیشامد اینکه انتخاب اول سیب زرد باشد} ، B|A = {پیشامد اینکه سیب دوم هم زرد باشد}

انتخاب‌ها بدون جایگذاری هستند.

سیب اول و دوم زرد باشند

$P(A\cap B)=\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}=\frac{1}{11}$

$P(A\cup B)=?$

۲) احتمال اینکه انتخاب دوم زرد باشد چقدر است؟

P(انتخاب دوم زرد) = P(اولی زرد) × P(دومی زرد) + P(اولی غیرزرد) × P(دومی زرد)

$\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}+\frac{8}{12}+\frac{4}{11}$

۳) اگر انتخاب‌ها با جایگذاری صورت بگیرد، احتمال‌های بالا را بیابید.

(1) P(هر دو زرد) $= \underbrace{\frac{4}{12}}_{\text{انتخاب اول}}\times\underbrace{\frac{4}{12}}_{\text{انتخاب دوم}}$ $\qquad P(A\cup B)=P(A)\cdot P(B|A)$

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند: $\boxed{P(A\cup B)=P(A)\cdot P(B)}$ آنگاه

* در استخراج دو کارت از ... متغیرها مستقل، احتمال‌ها در هم ضرب می‌شوند.

(۲) p(زوج ... انتخاب) = p(...) × p(...) + p(...) × p(...)

$$p = \frac{4}{12} \times \frac{4}{12} + \frac{8}{12} \times \frac{4}{12}$$

تعریف: هر دو پیشامد A و B را مستقل از هم نامیم هرگاه رابطه زیر برقرار باشد.

$$* \quad \boxed{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)}$$

A و B مستقل از هم هستند اگر و تنها اگر رابطه * برقرار باشد.
یعنی این رابطه دوطرفه است

مثال: در ظرف A، پنج عدد سیب زرد و ۸ عدد سیب سرخ موجود است. در ظرف B، ۳ عدد سیب زرد و ۷ عدد سیب سرخ موجود است. از هر ظرف یک سیب انتخاب می‌کنیم.
احتمال آنکه هر دو انتخاب سیب زرد باشد چقدر است؟

$E_A = \{$پیشامد آنکه از ظرف A سیب زرد انتخاب شود$\}$

$p(E_A \cap E_B) = ?$

$E_B = \{$ " " " " B " " " " $\}$

این دو انتخاب از دو ظرف مستقل‌اند، یعنی نتیجه انتخاب سیب از ظرف اول ربطی به انتخاب از ظرف دوم ندارد

$$p(E_A \cap E_B) = \frac{5}{13} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{26}$$

* تعمیم قاعده ضرب برای سه پیشامد:
اگر A_1، A_2، A_3 پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند، داریم:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1) \cdot p(A_2 | A_1) \cdot p(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

* احتمال رخ دادن هر سه پیشامد همزمان

مثال) فرض کنید ۳ کارت را از یک دسته کارت‌های بازی بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم:
احتمال اینکه هر سه کارت دل باشد چقدر است؟

$A_1 = \{$ کارت اول دل باشد $\}$ $\quad$ $A_2 | A_1 \{$ کارت دوم دل باشد به شرطی که اولی دل باشد $\}$

$A_3 | A_1 \cap A_2 = \{$ کارت سوم دل باشد به شرطی که دو تای اول دل باشند $\}$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50}$$

اگر انتخاب‌ها با جایگذاری باشد، احتمال را محاسبه کنید؟

$$P = \frac{13}{52} \times \frac{13}{52} \times \frac{13}{52}$$

نکته: انتخاب‌های با جایگذاری پیشامدهای مستقل را می‌سازد
ولی انتخاب‌های بدون جایگذاری پیشامدهای وابسته را می‌سازد.

استقلال کامل سه پیشامد:

اگر A_1، A_2، A_3 پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای Ω باشند، گوییم این سه پیشامد استقلال کامل دارند اگر و فقط اگر همه روابط زیر توأم برقرار باشند.

1) $P(\bigcap_{i=1}^{3} A_i) = \prod_{i=1}^{3} P(A_i)$

2) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$

3) $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$

4) $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$

تعمیم قضیه ضرب برای n پیشامد:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdots P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

* پیشامدهای ناسازگار اشتراک ندارند ولی پیشامدهای مستقل ~~...~~ اشتراک ~~...~~ دارند.

استقلال کامل n پیشامد: ← تعداد متناهی n تا.

n پیشامد $A_1, A_2, \dots, A_n$ استقلال کامل دارند اگر و تنها اگر

به تعداد $2^n-(n+1)$ رابطه برقرار باشد. (شامل مجموعه‌های ~~...~~ دوتایی، سه‌تایی ... n تایی)

یعنی تهی و n تا مجموعه تک عضوی — استقلال داشته باشند.

تعمیم استقلال برای دنباله‌ای از پیشامدها: * تعداد نامتناهی

$A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots$

این دنباله از پیشامدها را مستقل می‌نامیم اگر برای هر عدد صحیح و مثبت k رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

* اصل اشتراک‌ها برای حاصلضرب باقی باشد.

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_{i_k})$$

*(یعنی انتخاب n پیشامد ترتیبی در انتخاب وجود ندارد)

مثال) تاس همگون و سالم را دو بار پرتاب می‌کنیم: $\Omega = \{(i,j) \mid i,j = 1,2,\dots,6\}$

$n(\Omega) = 36 = 6^2$

پیشامدهای زیر را در نظر می‌گیریم:

A_1: {پیشامد اینکه پرتاب اول ۱ یا ۲ یا ۳ باشد} $n(A_1) = 18$

A_2: {پیشامد اینکه پرتاب اول ۳ یا ۴ یا ۵ باشد} $n(A_2) = 18$

A_3: {مجموع اعداد حاصل از ۲ پرتاب برابر ۹ باشد} $n(A_3) = 4$

$P(A_1) = P(A_2) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, $P(A_3) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$n(A_1 \cap A_2) = 6 \Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(1) $P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1) \cdot P(A_2)$ A_1, A_2 مستقل نیستند.

(2) $P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{36}$, $P(A_1) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$

$\Rightarrow P(A_1 \cap A_3) \neq P(A_1) \cdot P(A_3)$ A_1, A_3 مستقل نیستند.

نکته: اگر پیشامدهای ... دو به دو مستقل باشند لزوماً مستقل نیستند.

۱۵

$$p(A_2 \cap A_3) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \quad , \quad p(A_2) \cdot p(A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow p(A_2 \cap A_3) \neq p(A_2) \cdot p(A_3)$$ A_2 و A_3 مستقل نیستند

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{36} \quad , \quad p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$$

(۳،۶) حالت مطلوب:

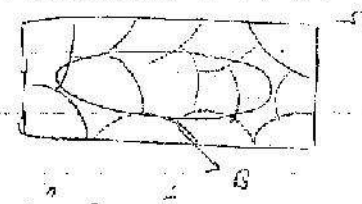
$$\Rightarrow p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3)$$ مستقل‌اند.

قضیه احتمال کل: total theory

فرض کنید A_1، A_2، ... دنباله‌ای از افرازهای فضای نمونه‌ای Ω باشد به طوری که $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ در این صورت اگر B هر پیشامد دلخواه از Ω باشد:

افراز Ω به A_iها: که هیچ دو تا از A_iها اشتراک ندارند.

$$\boxed{p(B) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i) \cdot p(B \mid A_i)}$$



پیشامد B را به صورت اجتماعی از A_iها نوشتیم:

$$B \subset \Omega \Rightarrow B = B \cap \Omega \Rightarrow B = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \Rightarrow B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B \cap A_i)$$

اگر $B \cap A_i = C_i$ مستقل‌اند: $$\Rightarrow p(B) = \sum_{i=1}^{\infty} p(C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(B \cap A_i)$$ $B \cap A_i$ها مستقل‌اند

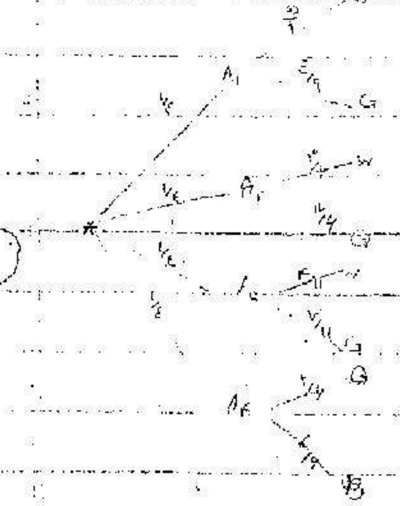
$$p(B) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i) \cdot p(B \mid A_i)$$

* نکته: اگر پیشامدهای A و B مستقل باشند، آنگاه پیشامدهای A' و B، A و B'، A' و B' نیز مستقل هستند.

$$p(A' \cap B') = 1 - p(A \cup B)$$
$$= 1 - p(A) - p(B) + p(A \cap B)$$
$$= p(A') - p(B)\,(1 - p(A))$$
$$= p(A') - p(B) \cdot p(A')$$
$$= p(A') \cdot p(B')$$

مثال) فرض کنید در ظرف A_1، ۵ مهره سفید و ۴ مهره سبز، در ظرف A_2، ۳ مهره سفید و ۳ مهره سبز، در ظرف A_3، ۴ مهره سفید و ۷ مهره سبز، در ظرف چهارم ۱ مهره آبی و ... مهره سبز موجود است. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و مهره‌ای از آن به تصادف خارج می‌کنیم.
احتمال اینکه این مهره سفید باشد چقدر است؟

نمودار درختی:



هر یک از حالات به صورت مسیر A_1 است یا مسیر A_2 و یا مسیر A_3 چون هر کدام از این‌ها ناسازگارند پس احتمال آنها با هم جمع خواهد شد:

$$P(W) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i)\cdot P(W|A_i)$$

$$\Rightarrow P(W) = \frac{1}{4}\times\frac{5}{9} + \frac{1}{4}\times\frac{3}{6} + \frac{1}{4}\times\frac{4}{11} = /۵$$

تعمیم: اگر در تعریف قبل با حفظ فرضیات، پیشامد B رخ داده باشد، آنگاه احتمال شرطی A_k به شرط وقوع پیشامد B را احتمال برگشت می‌نامیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{P(B)}$$

سؤال: اگر مهره انتخاب شده رنگ سفید داشته باشد، چه احتمالی از ظرف دوم انتخاب شده است؟

$P(W) = /۵$, $\quad P(A_2|W) = \frac{P(A_2)\cdot P(W|A_2)}{/۵} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{6}}{/۵}$

$P(A_2|W) \rightarrow$ اگر مهره سفید باشد احتمال اینکه از ظرف A_2 باشد

$P(A_2 \cap W) = P(A_2)\cdot P(W|A_2)$ احتمال انتخاب ظرف A_2 و مهره سفید از آن

۱) در ظرف A ۵ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سبز موجود است

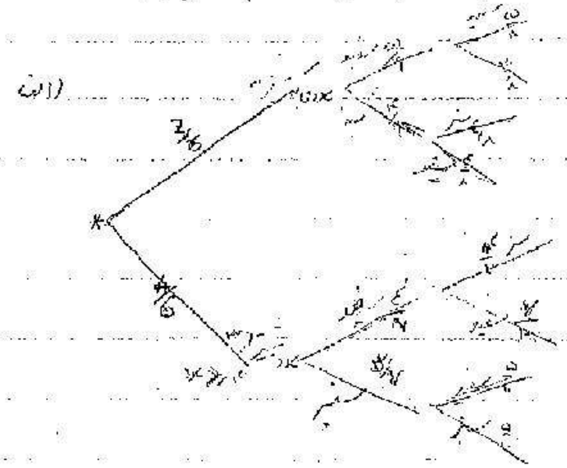
در ظرف B ۴ ... و ۳ ...

یک تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. و اگر نتیجه‌ی پرتاب عددی کمتر از ۳ باشد مهره‌ای را از ظرف A انتخاب می‌کنیم و در ظرف B قرار می‌دهیم و از B یک مهره انتخاب می‌کنیم. در غیر این صورت مهره‌ای از ظرف B انتخاب کرده و در ظرف A قرار می‌دهیم و از ظرف A یک مهره انتخاب می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه هر دو مهره هم‌رنگ باشند چقدر است؟

ب) اگر انتخاب دوم رنگ سفید داشته باشد احتمال اینکه مهره‌ی انتقالی سفید بوده باشد چقدر است؟

الف)



$$P(B) = \frac{2}{6}\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{4}{8}\right) + \left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{6}{10}\right) + \frac{4}{6} \ldots$$

ب) P (انتخاب دوم سفید | مهره‌ی انتقالی سبز) — A ، C

اولی سبز دومی سفید

$$\frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{6}\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{4}{8}\right) + \frac{4}{6}\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{5}{10}\right)}{P(C)}$$

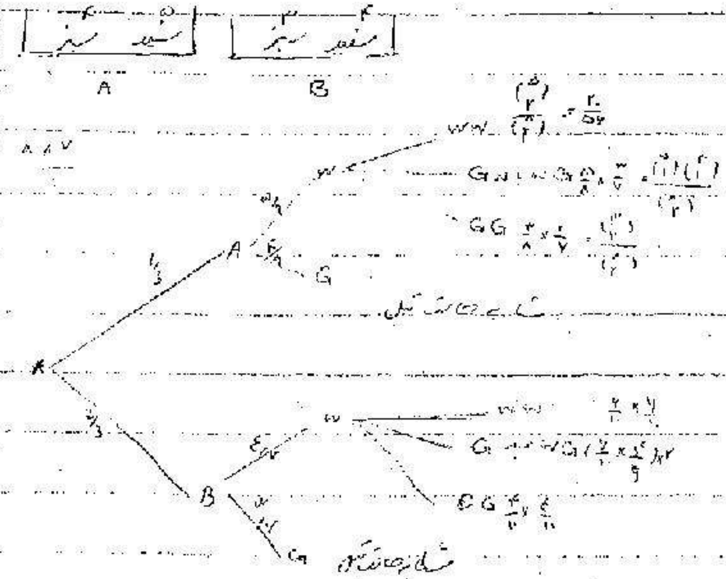
$$P(C) = \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{4}{8}\right) + \left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{3}{7}\right) \ldots$$

مثال) در ظرف A ، ۵ مهره سفید و ۴ مهره سبز موجود است

در ظرف B ، ۴ مهره سفید و ۳ مهره سبز موجود است.

یک تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر نتیجه پرتاب عددی کمتر از ۳ باشد، مهره‌ای از ظرف A انتخاب کرده و در ظرف B قرار می‌دهیم و از ظرف B دو مهره بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم و در غیر این صورت مهره‌ای از ظرف B انتخاب کرده و در ظرف A قرار می‌دهیم و از ظرف A دو مهره بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم: الف) احتمال آنکه هر دو مهره همرنگ باشند چقدر است؟

ب) اگر بدانیم دو مهره آخر غیر همرنگ باشند، احتمال آنکه مهره انتقالی سفید باشد چقدر است؟



* در این مثال مهره‌های WG و GW را یکی در نظر گرفت و WW و GG را جدا چون در اینجا همرنگ یا غیر همرنگ بودن مهره‌ها مهم است.

الف) $p(\text{هر دو مهره همرنگ}) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{9} \times \frac{20}{56}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{9} \times \frac{6}{56}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} \times \frac{36}{100}\right)$

$+ \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{7} \times \frac{16}{100}\right)$

ب) $p(\text{مهره انتقالی سفید} \mid \text{دو مهره آخر غیر همرنگ}) = \dfrac{p(\text{مهره انتقالی سفید} \cap \text{دو مهره آخر غیر همرنگ})}{p(\text{دو مهره آخر غیر همرنگ})}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{9} \times \frac{15}{56}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} \times \frac{48}{90}\right)}{\left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{9} \times \frac{15}{56}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{9} \times \frac{15}{56}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} \times \frac{48}{90}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{7} \times \frac{48}{90}\right)}$$

(تمرین) یک تاس [illegible] را ... پرتاب می‌کنیم ... اگر [illegible] ... n بار [illegible] سکهٔ [illegible]

[illegible] ... سکه ... احتمال [illegible]

[illegible] ... ?

$$P(\text{سکه حداقل یکبار شیر بیاید} \mid \text{نتیجه} \ldots) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$$

$$P(\text{حداقل یکبار شیر در } n \text{ بار پرتاب سکه}) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \times (2^n - 1) = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C \mid A) = \frac{1}{2} \times \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{6} \times \left(\frac{17}{8}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{17}{48}$$

$$* \quad \frac{17/48}{\frac{2^n - 1}{2^n}} = \text{جواب}$$

متغیرهای تصادفی : (بخش تابع احتمال گسسته و پیوسته)

تعریف : فرض کنید Ω فضای نمونه‌ای آزمایشی است . تابع X از Ω به مجموعه اعداد حقیقی را متغیر تصادفی گویند .

$X : \Omega \longrightarrow R$

بنابراین هر عضو از X یک پیشامد از فضای نمونه‌ای است

الف) اگر X مقادیر متمایز $x_1, x_2, \dots$ را اختیار کرد، X را متغیر تصادفی گسسته می‌گویند .

(مجموعه‌ی مقادیر X را (برد تابع X) فضای متغیر تصادفی یا تکیه‌گاه X می‌نامیم .)

$A = \{x ; x = x_1, x_2, \dots\}$

ب) اگر X از Ω به R تابع پیوسته باشد، X را متغیر تصادفی پیوسته می‌نامیم

$A = \{x ; x \in (a,b) ; a, b \in R\}$

مثال : از بین کلاس یک نفر به تصادف انتخاب . و تعداد واحدهایی که در ترم جاری اخذ کرده است، سؤال می‌شود . تابع X از Ω به R تعداد واحدها تعریف می‌شود .

$\Omega = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ $\quad X : \Omega \longrightarrow R$

$X(\{a_i\}) =$ تعداد واحدهای نفر iام

تعداد واحد :	۱۶	۱۸	۱۷	۲۰	۱۴	۱۹	۱۵	۱۲	۱۳	
تعداد افراد :	۳	۱۲	۴	۵	۱	۱۴	۰	۰	۰	← صفر

در a_i ، X دارای ۶ مقدار است .

$X = \{x ; x = 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$ در واقع از یک مجموعه n عضوی

یک مجموعه ۶ عضوی درست کرده‌ایم که در واقع اطلاعات خلاصه شده است .

تابع احتمال گسسته

اگر A فضای متغیر تصادفی گسسته باشد، تابع f از A به R را تابع احتمال گسسته می‌نامیم هرگاه دو شرط زیر صدق کند.

1) $0 \le f(x) \le 1 \quad \forall x \in A$

2) $\displaystyle\sum_{x=-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$

مثال: کدام یک از توابع زیر تابع احتمال گسسته است.

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{10} & x=0,1,2,3,4 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

f تابع احتمال نیست زیرا $\exists\, x=0 \Rightarrow f(x)<0$

2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{10} & x=1,2,3,4 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

f تابع احتمال نیست زیرا جمع آن کمتر از ۱ می‌شود:

$\displaystyle\sum_{x=1}^{4} f(x) < 1 \rightarrow$ تابع احتمال نیست

$\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}=\frac{6}{10}$

3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{10} & x=2,\dots,5 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

تابع احتمال است زیرا در دو شرط فوق صدق می‌کند.

1) $0 \le f(x) \le 1$

2) $\sum f(x) = 1$

$\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=1$

4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2^{x}} & x \in N \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

1) $0 \le f(x) \le 1 \quad \forall x \in A$

2) $\sum f(x) = \sum \frac{1}{2^{x}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

پس f(x) تابع احتمال است.

توجه شود که در این توابع احتمال همهٔ اعضا ممکن است مثبت نیست، بنابراین برای احتمال‌های غیرمثبت نیز نیاز به یک کل داریم که همان توابع احتمال هستند.

۳) محاسبه احتمال توسط تابع احتمال گسسته

اگر $f(x)$ تابع احتمال گسسته برای متغیر تصادفی X باشد، آنگاه

1) $p(X=x_0)=f(x_0)$

2) $P(a\le X\le b)=\sum_{x=a}^{b} f(x)$

مثال) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^x} & x\in \mathbb{N}\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$

$$P(2<X\le 7)=\sum_{x=3}^{7}\frac{1}{2^x}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}$$

مثال) به ازای چه مقداری از c تابع زیر، تابع احتمال گسسته می‌شود؟

$f(x)=\begin{cases}\frac{c}{x(x+1)} & x\in \mathbb{N}\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$ باید در دو شرط تابع احتمال صدق کند:

۲) $\sum_{x=1}^{\infty} f(x)=1$

$$\Rightarrow c\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x(x+1)}=c\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=1\Rightarrow c\left(1-\frac{1}{\infty}\right)=1\Rightarrow c(1-0)=1\Rightarrow \boxed{c=1}$$

تعریف: فرض کنید X متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال گسسته $f(x)$ است. اگر $g(x)$ تابعی از X باشد، آنگاه امید ریاضی $g(x)$ (میانگین $g(x)$) بصورت زیر است:

$$E[g(x)]=\sum_{x} g(x)f(x)$$ * این سری جدید باید همگرا باشد.

* اگر سری واگرا باشد، آنگاه $g(x)$ میانگین ندارد. امید ریاضی باید جواب داشته باشد.

اگر $g(x)=X$ باشد، آنگاه:

① $\mu_x=E[g(x)]=\sum_{x} x f(x)$ * میانگین معمولی (وزن دار)

میانگین برای حالت های غیر همشانس * مقدار متوسط x

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^x} & x=1,2,\ldots\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$ ، EX چقدر است؟

① $EX=\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{1}{2^x} = \frac{1}{2} + \overset{\text{دوتا}}{2}\,\frac{1}{4} + \overset{\text{سه‌تا}}{3}\,\frac{1}{8} + 4\,\frac{1}{16} + 5\,\frac{1}{32}$

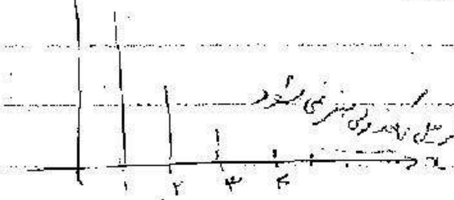
$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\right)$

$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}}+\cdots$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots = 1\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2 \Rightarrow \boxed{EX=2}$

$EX=\sum_{1}^{\infty} x\frac{1}{x(x+1)} = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(x+1)}$ واگراست

① $\longrightarrow$



* حال مرکز ثقل این اطلاعات (میانگین)

در واقع امید ریاضی است

یا جایی که این میله‌ها در تعادل قرار گرفته است

بعضی میل به صفر می‌شود

② اگر $x^2=g(x) \Rightarrow E[g(x)]=Ex^2=\sum x^2 f(x)$

میانگین مربعات یا گشتاور مرتبه ۲

③ اگر $g(x)=x^k \Rightarrow E(g(x))=Ex^k=\sum x^k f(x)<\infty$ متناهی

گشتاور مرتبه k ام

مثال: گشتاور مرتبه دوم $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^x} & x=1,2,\ldots\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$ را بیابید

۴) اگر $g(x) = \overset{\text{انحراف از میانگین}}{\overbrace{x - E_{(x)}}} = x - \mu_x$ انحراف از میانگین

$$E[g(x)] = E[x - E(x)] = \sum_x (x - E_x) f(x) = \sum_x x f(x) + (-1) \sum E_x f(x)$$

$$= \sum_x x f(x) - E_x \underbrace{\sum f(x)}_{1} = E(x) - E(x) = 0$$

* نتیجه‌گیری: مجموع انحرافات از میانگین صفر است.

۵) اگر $g(x) = (x - E_x)^2$

$$\Rightarrow E[g(x)] = E[(x - E_x)^2] = \sigma^2$$ واریانس x

میانگین مربع انحرافات.

$$\Rightarrow E[g(x)] = \sum_x (x - E_x)^2 f(x)$$

$$= \sum_x x^2 f(x) + \sum_x E^2 x f(x) - \sum_x 2E_x \cdot x f(x)$$

$$= E x^2 + E^2 x - 2E^2 x =$$

$$\sigma^2_{(x)} = \underset{\text{گشتاور مرتبه دوم}}{E x^2} - \underset{\text{توان دوم گشتاور اول}}{E^2 x} \geq 0$$ فرمول محاسبه‌ی واریانس.

مثال: واریانس تابع احتمال $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} & , x \in N \\ 0 & \text{سایر حالات} \end{cases}$ را بیابید.

۲۵

(۶) اگر $g(x)=e^{tx}$ ، X $(t\in R)$

$M_x(t)=E[g(x)]=E[e^{tx}]=\sum_x e^{tx} f(x) < \infty$ به شرطی که

تابعی است برحسب t

* $M_x(t)$ تابع مولد گشتاورهای x

* ویژگیهای تابع مولد گشتاورها $M_x(t)$:

الف) $M_x(t) \xrightarrow{t=0} M_x(0)=1$

ب) $\frac{dM(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_x e^{tx}f(x)\right)=\sum_x \frac{d}{dt}\left(e^{tx}f(x)\right)=\sum_x x e^{tx} f(x)$

$\frac{dM(0)}{dt}=\sum_x x\times 1\times f(x)=E(x)$ گشتاور مرتبه اول

ج) $\frac{d^kM(0)}{dt^k}=\sum x^k f(x)=Ex^k$

$\Longrightarrow \boxed{\delta^2 = M''(0)-(M'(0))^2}$

(۷) $g(x)=(x-Ex)^k$ $(k\geq 1)\in N$

$E[g(x)]=E(X-EX)^k=\sum_x (x-EX)^k f(x)<\infty$

گشتاور مرتبه kام حول Ex

اگر $k=2 \Rightarrow \delta_x^2$ گشتاور مرکزی مرتبه دوم
(پراکنش نمایش)

$Ex=\mu_x=\mu=\mu'_1$ حول صفر

$Ex^2=\mu'_2$ (حول صفر) $Ex^k=\mu'_k$ $E[x-Ex]^k=\mu_k$

مثال) اگر تابع احتمال متغیر $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & x=1,2,3 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$ را داشته باشیم:

1) $E(X) = \sum_{x=1}^{3} x \cdot \frac{x}{6} = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{2}{6} + 3\times\frac{3}{6} = \frac{7}{3}$ بین ۱،۲،۳ است

2) $E(X^2) = \sum_{1}^{3} x^2 \cdot \frac{x}{6} = 1^2\times\frac{1}{6} + 2^2\times\frac{2}{6} + 3^2\times\frac{3}{6} = 6$

$\Rightarrow \sigma^2 = E x^2 - E^2 x = 6 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ انحراف معیار

3) $M_x(t) = E e^{tx} = \sum_{x=1}^{3} e^{tx} \frac{x}{6} = \frac{1}{6} e^{t} + \frac{2}{6} e^{2t} + \frac{3}{6} e^{3t}$

که این یک سری همگراست (زیرا هیچ t وجود ندارد که این سری واگرا بشود).

بنابراین تمام خواص تابع مولد گشتاور را داراست:

$M(0) = 1 \;,\; M'(t) = \frac{1}{6} e^{t} + \frac{4}{6} e^{2t} + \frac{9}{6} e^{3t} \Big|_{t=0} = \boxed{\frac{14}{6}}$

---

* قضیه:

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع مولد گشتاور در همسایگی صفر باشد، $M_x(t)$

الف) ثابت می‌شود که X دارای تابع احتمال است

ب) تابع احتمال $f(x)$ یکتاست.

اما عکس این قضیه برقرار نیست یعنی هر تابع احتمال نمی‌تواند تابع مولد گشتاور داشته باشد.

مثال) نشان دهید که تابع احتمال زیر تابع مولد گشتاور ندارد:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{\pi^2 x^2} & x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$\sum_{1}^{\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \sum \frac{6}{\pi^2 x^2} = 1 \quad \checkmark$$

حال می‌خواهیم تابع مولد گشتاور را بدست آوریم:

$$M_X(t) = E e^{tx} = \sum e^{tx} \cdot \frac{6}{\pi^2 x^2}$$

$$= \frac{6}{\pi^2} \sum \frac{e^{tx}}{x^2} \Rightarrow \frac{\infty}{\infty} \longrightarrow$$ با دوبار هوپیتال رفتن

به این نتیجه می‌رسیم که سری همگرا نیست.

توزیع‌های پیوسته:

تعریف:

اگر X متغیر تصادفی پیوسته باشد، تابع $f_X(x)$ را تابع احتمال پیوسته می‌نامیم هرگاه:

1) $\forall x \quad f(x) \geq 0$

2) $\int_x f(x)\,dx = 1$

مثال) از انتگرال زیر یک تابع احتمال معرفی کنید:

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1)\,dx$$

می‌دانیم که $f(x) \geq 0$ است.

۲) جواب انتگرال: $\begin{cases} = 1 \Rightarrow f(x) & \text{تابع احتمال} \\ = A \neq 1 \Rightarrow \frac{1}{A} f(x) & \text{تابع احتمال} \quad x \in (0,1) \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 + x + 1 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Big|_0^1 = \frac{11}{6} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{6}{11}(x^2 + x + 1) & x \in (0,1) \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

* محاسبهٔ احتمال در توابع پیوسته

* یعنی جرم احتمال توزیع شده در بازهٔ $[a,b]$

$$p(a<X<b) = \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow$$

در هر ۴ حالت $a<x<b$ ، $a\le x<b$ ، $a<x\le b$ ، $a\le x\le b$

$$p(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = 0$$

* اگر $f(x)$ تابع احتمال پیوسته برای متغیر تصادفی X باشد و $g(x)$ هر تابعی یعنی (از X) باشد آنگاه:

* به شرط همگرا باشد

$$E[g(x)] = \int_x g(x)\,f(x)\,dx < \infty$$

همهٔ تعاریف گفته شده در مورد توابع پیوسته فقط با تغییر سیگما (Σ) به انتگرال معتبر است.

مثلاً $g(x) = e^{tx} \Rightarrow E[g(x)] = M_x(t) = \int_x e^{tx} f(x)\,dx$

$M(0) = 1$

همهٔ ویژگیهای $M_x(t)$ در حالت پیوسته بودن X نیز برقرار است.

مثال) واریانس تابع احتمال پیوستهٔ $f(x)$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\delta^2 = Ex^2 - E^2x$$

$$Ex = \int_0^\infty x e^{-x}\,dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} = -xe^{-x} - e^{-x}\Big]_0^\infty = 0-(0-e^0) = 1$$

یعنی جرم

$$Ex^2 = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx \xrightarrow{\text{دو بار پشت سر هم جزء به جزء}} E x^2 = 2$$

$\Rightarrow \delta_x^2 = 2 - (1)^2 = 1$ واریانس

انحراف معیار $\sqrt{\delta^2} = \sqrt{1} = 1$

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{-x(1-t)}\,dx$$

$$\Rightarrow M_X(t) = \frac{1}{1-t} e^{-x(1-t)}\Big|_0^\infty = \frac{1}{1-t} \qquad (1-t)>0$$

* آنگاه جواب برای ∞ صفر می‌شود.

$M(0)=1$ ✓   میانگین $E_x = M'(0) = \frac{1}{(1-t)^2}\Big|_{t=0} = 1$ ✓

$$M''(0) = \frac{2(1-t)}{(1-t)^4}\Big|_{t=0} = 2$$

واریانس $\sigma^2 = M''(0) - (M'(0))^2 = 2-(1)^2 = 1$

$$M(t) = \frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+t^3+\dots+t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

سری توانی

همگرایی سری را بررسی می‌کنیم

آزمون نسبت: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \begin{cases} <1 & \text{همگرا} \\ >1 & \text{واگرا} \\ 1 & \text{بی‌نتیجه} \end{cases}$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{t^{n+1}}{t^n} = |t| \Rightarrow$

اگر $|t|<1$ باشد آنگاه سری همگراست. (بازه همگرایی $|t|<1$)

$t \in (-1, 1)$

بنابراین $M_X(t)$ همگرا است به ازای $t \in (-h_1, h_2)$ بطوریکه $(h_1, h_2 > 0) \in \mathbb{R}$

---

* توزیع های یک بعدی پیوسته ، توزیع های یک بعدی گسسته:

همگرا $\quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx < \infty$ ، تابع گاما (انتگرال نوع دوم)

با روش انتگرال جزء به جزء:

آنقدر از جزء به جزء استفاده می‌کنیم که x حذف شود: $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx=(\alpha-1)!$

اثبات ← $\boxed{0!=1} \Leftarrow 1 = \int_0^\infty e^{-x}dx = \Gamma(1)=0!$

$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$?

الف) توزیع های گسسته خاص:

* ۱) توزیع برنولی:

فرض کنید آزمایشی دارای دو حالت مطلوب و نامطلوب (پیروزی و شکست) است که احتمال حالت مطلوب برابر p $(0\le p\le 1)$ و احتمال حالت نامطلوب $(1-p=q)$ و $p+q=1$.

اگر این آزمایش یک بار انجام شود و متغیر تصادفی X تعداد حالتهای مطلوب باشد، آنگاه X دارای توزیع برنولی است با پارامتر p است که تابع احتمال آن بصورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}=p^x q^{1-x} & x=0,1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

توزیع دوجمله ای:

توزیع دوجمله‌ای:

تعریف: فرض کنید یک آزمایش برنولی با حفظ همه شرایط n مرتبه بطور مستقل تکرار شود و X مرتبه نتیجه مطلوب باشد، آنگاه X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p که تابع احتمال آن به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x} & x=0,1,\dots,n\\ 0 & \text{other wise}\end{cases}$$

توضیح: x حالت مطلوب داریم با احتمال p و $n-x$ حالت نامطلوب با احتمال q.
حال با جابجایی x حالت مطلوب را داریم که $\binom{n}{x}$ طریق امکان‌پذیر است.

---

1) $0<f(x)<1 \qquad x=0,1,\dots,n$ ✓

2) $\sum_{0}^{n} f(x)=1$

میدانیم که: $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{r}b^{n-r}$

$$\Rightarrow \sum_{0}^{n} f(x)=(p+q)^{n}=1$$

مثال: فرض کنید در یک ظرف ۱۰ عدد مهره وجود دارد که ۵ عدد از آنها رنگ سبز دارند، ۴ عدد مهره به تصادف و با جایگذاری از ظرف انتخاب می‌کنیم:

الف) احتمال اینکه هیچ مهره سبز انتخاب نشود.

ب) احتمال اینکه ۲ مهره سبز انتخاب شود.

ج) حداکثر ۵ مهره سبز انتخاب شود.

د) حداقل ۲ مهره سبز انتخاب شود.

حل) چون مهره‌ها با جایگذاری انتخاب می‌شود پس مستقل‌اند. بنابراین از توزیع دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم. چون در نتیجه دو حالت داشته باشد، در توزیع دوجمله‌ای تعداد حالات معلوم است.

* شرایط استفاده از توزیع دوجمله‌ای:

۱) دو نتیجه داشته باشد. ۲) احتمال نتایج معلوم باشد. ۳) مستقل بودن هر کدام از نتایج.
۴) تعداد آزمایش‌ها معلوم باشد.

$n=10$, $p = p(\text{سبز}) = \frac{5}{20}$, $q = \frac{15}{20}$

$X \sim B(n,p)$: $X \sim B(10, \frac{5}{20})$

تابع احتمال :
$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{10}{x}\left(\frac{5}{20}\right)^x\left(\frac{15}{20}\right)^{10-x} & x=0,1,\dots,10 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

الف) $x=0$

[illegible]

$$f(0) = \binom{n}{0} p^0 q^{10-0} = \left(\frac{15}{20}\right)^{10}$$

ب)

$$f(2) = \binom{n}{2} p^2 q^8 = \frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{5}{20}\right)^2 \times \left(\frac{15}{20}\right)^8$$

ج) حداکثر ۵ مهره سبز:

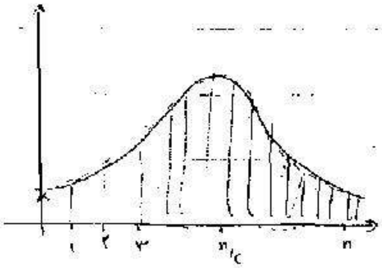
احتمال اجتماع از پیشامدهای ناسازگار، جمع [illegible] باشد:

$$P(X \le 5) = \sum_{x=0}^{5} f(x)$$

د)

$$P(x \ge 2) = \sum_{x=2}^{10} f(x) = 1 - \sum_{x=0}^{1} f(x)$$

حال اگر شکل تقریبی توزیع دوجمله‌ای را رسم کنیم:



حال می‌خواهیم میانگین این توزیع را بیابیم

که همان مرکز جرم این هم است:

$$E(x) = ? = \sum x f(x)$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} < \infty$$

همگراست. زیرا با معلوم بودن n حد بالا $E(x)$ مشخص است.

$$= \sum_{x=0}^{n} x \times \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x \frac{x\, n(n-1)!\, p\, p^{x-1} q^{n-x}}{x(x-1)!(n-x)!}$$

چون صفر تأثیری ندارد $x=1,\dots,n$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!\, p^{x-1} q^{n-x}}{(x-1)!\,(n-x)!} \qquad \begin{cases} n-1 = n' \\ x-1 = x' \end{cases}$$

$$= (np) \sum_{x'=0}^{n'} \frac{n'!}{x'!\,(n'-x')!} p^{x'} q^{n'-x'} = (np) \times \sum f(x') = (np) \times 1$$

$$\Rightarrow * \boxed{E(x) = np}$$

* میانگین توزیع دوجمله‌ای.

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$X^2 = X(X-1) + X \Rightarrow E(X^2) = E(X(X-1)+X)$$

$$= E(X(X-1)) + \underbrace{E(X)}_{np}$$

$$\boxed{\sigma^2 = EX^2 - (EX)^2 = npq}$$

با توجه به مثال:

میانگین توزیع دوجمله‌ای : $EX = np = 20 \times \frac{5}{20}$

واریانس : $\sigma^2 = npq = 20 \times \frac{5}{20} \times \frac{15}{20}$

$e^{x} = \sum$

* محاسبه تابع مولد گشتاور در توزیع دوجمله‌ای :

$$M_X(t) = Ee^{tx} = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(e^t p)^x q^{n-x} = (e^t p + q)^n$$

1) $M_X(0) = \Big|_{t=0} (p+q)^n = 1$

2) $M'(t)\Big|_{t=0} = EX = np\,e^t(pe^t+q)^{n-1}\Big|_{t=0} = np$

3) $M''(t) = np\,e^t(pe^t+q)^{n-1} + n(n-1)p^2 e^{2t}(pe^t+q)^{n-2}\Big|_{t=0}$

$$= np + n(n-1)p^2$$

$$\left.\begin{aligned} M''(t)\Big|_{t=0} = EX^2 &= E(X(X-1)) + E(X) \\ &= n(n-1)p^2 + np \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E(X)=np}$$

$$\Rightarrow \underline{E(X(X-1)) = n(n-1)p^2}$$

$$\sigma^2 = EX^2 - (EX)^2 = M''(t) - (M'(t))^2\Big|_{t=0} = npq$$

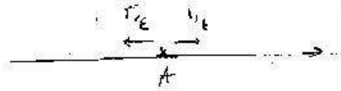
مثال) شخصی از نقطه A شروع به قدم زدن می‌کند. با احتمال $\frac{1}{4}$ یک قدم به سمت راست و با احتمال $\frac{3}{4}$ یک قدم به سمت چپ بر می‌دارد. (قدم زدن به طور تصادفی)

۱) احتمال اینکه بعد از ۱۰۰ قدم در نقطه A باشد چقدر است؟

۲) احتمال اینکه بعد از ۱۰۰ قدم در ۲۰ قدمی نقطه A باشد چقدر است.

1) $\binom{100}{50}\left(\frac{1}{4}\right)^{50}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{50}$

2) $\binom{100}{40}\left(\frac{1}{4}\right)^{40}\left(\frac{3}{4}\right)^{60} + \binom{100}{60}\left(\frac{1}{4}\right)^{60}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{40}$



این توزیع دوجمله‌ای است زیرا دو حالت دارد که هر کدام مستقل اند در تعداد ۱۰۰ قدم:

$X \sim B(100, \frac{1}{4})$

اگر در ۱۰۰ قدم بخواهد به نقطه A برگردد باید تعداد قدمهای چپ و راست یکسان باشد

تا اینکه در ۱۰۰ قدم چندین قدمهای راست یا چپ باشد، را باید در نظر بگیریم.

$P(X=50)=f(50)$

ب)

باید اختلاف قدمهای چپ و راست ۱۰ باشد.

$P(|X-(100-X)|=10)=?$

$P(X=45, 55) = f(45)+f(55)$

ج) انتظار داریم که بعد از ۱۰۰ قدم در چند قدمی نقطه A باشد (میانگین فاصله تا A)

$E(X) = np = 100 \times \frac{1}{4} = 25$

۷ مثال) یک شکارچی دو تیر رها می‌کند ۲۵۰ بار هر دو تیر به ساده‌ای صید می‌شوند
احتمال آنکه ۱۰۰ بار در شکارها موفق باشد چقدر است؟

* دو پرتاب: $\Omega = \{HH, TT, HT, TH\}$ HH → موفقیت $p = \frac{1}{4}$

شکست: TT, HT, TH ⟶ شکستها $p = \frac{3}{4}$

$X \sim B(100, \frac{1}{4})$

* انتظار داریم در چند تا شکار موفق شود؟ Ex

توجه: اگر در مثال قبل احتمال شکار در شکار اول $\frac{2}{3}$ و در شکار دوم ۰.۲۵ یا $\frac{3}{4}$ باشد، احتمال دو شکار، مثل حاصلضرب این دو است. $\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$

توزیع فوق هندسی:

فرض کنید جامعه‌ای دارای N عنصر است که M عضو آن ویژگی خاصی دارد. از این جامعه، نمونه تصادفی n تایی بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم.

اگر X مرتبه تعداد انتخاب در M باشد، آنگاه X دارای توزیع فوق هندسی است.

تابع احتمال آن به صورت زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} & x = 0, 1, \dots, \min(M, n) \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$$

$\sum f_X(x) = 1$ ✓

تمرین: $\sum_{x=0}^{\min(M,n)} f(x) = 1 \Rightarrow \dfrac{\sum_{x=0}^{n} \binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}} = 1$

مثال: فرض کنید کلاس ۵۰ نفره است که ۱۰ نفر آن خانم هستند. ۸ نفر بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم؟

(۱) احتمال اینکه یکی از خانم‌ها انتخاب شود چقدر است؟

چون توزیع بدون جایگذاری است پس از توزیع فوق هندسی استفاده می‌کنیم:

فرض می‌کنیم X نفر از ۸ نفر خانم انتخاب شوند.

X دارای توزیع فوق هندسی است:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{10}{x}\binom{40}{8-x}}{\binom{50}{8}} & x = 0, 1, \dots, 8 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

* توزیع شرطی را نخواستیم اگر انتخاب کنیم x نفر است الزاماً ... باشد.

۱) $p(X=1)=f(1)=\dfrac{\binom{۱۰}{۱}\binom{۴۰}{۷}}{\binom{۵۰}{۸}}$

۲) احتمال اینکه حداقل دو نفر جوان انتخاب شود:

$$p(X\geq 2)=\sum_{۲}^{۸} f(x)$$

$$=1-p(X=0,1)$$

۳) احتمال اینکه تعداد جوانهای انتخابی به صورت زیر باشد:

$$^{*}p(Ex-\sigma < X < Ex+\sigma)$$

با این شرط که فرمولهای σ را بدانیم باید Ex را نیز بدانیم.

میانگین توزیع فوق هندسی: $Ex=\sum_{x=0}^{\min(M,n)} x f(x)$

$$=\sum_{x=1}^{\min(M,n)} x\,\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

* اثبات با کلاس

$$\Rightarrow Ex=\frac{Mn}{N}$$

$$\Rightarrow Ex=\frac{۸\times ۱۰}{۵۰}=\frac{۸}{۵}=۱/۶$$

* به عهده اثبات شما

$$E x^2=\sum_{x=0}^{\min(M,n)} x^2 . f(x)$$

$$\sigma^2=E X^2-(EX)^2=\frac{nM}{N}\left[\frac{(N-M)(N-n)}{N(N-1)}\right]$$ * واریانس

$$\Rightarrow \sigma^2=۱/۶\left[\frac{۴۰\times ۴۲}{۵۰\times ۴۹}\right]\longrightarrow \sigma=۱/۰۴۷$$

$$\rightarrow * \; p(۱/۶-۱/۰۴۷<X<۱/۶+۱/۰۴۷)=p(۰/۵۵۳<X<۲/۶۴۷)$$

$$=p(X=۱,۲)=\sum_{x=1}^{۲} f(x)+f(x)$$

* دوجمله‌ای: $EX = np$
* فوق هندسی: $EX = n\frac{M}{N} \to p$

* تابع مولد گشتاور برای توزیع فوق هندسی:

سری محدود نیست ← نامشخص است. $M_X(t) = Ee^{tx} = \sum_{x=0} e^{tx} f(x)$ ✗

* پس تابع مولد گشتاور ندارد.

مثال) فرض کنید در یک بسته‌بندی ۱۰۰ عدد قطعه وجود دارد که ۱۰ قطعه معیوب هستند، از این بسته نمونه ۵ تایی بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم.

۱) احتمال آنکه در انتخاب ۵ تایی فقط یک قطعه معیوب باشد چقدر است؟

۲) انتظار داریم در انتخاب ۵ تایی چند قطعه معیوب وجود داشته باشد؟

X: تعداد قطعه‌های معیوب

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{10}{x}\binom{90}{5-x}}{\binom{100}{5}} & x = 0, 1, \ldots, 5 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

۱) $P(X=1) = f(1)$

۲) میانگین متغیر: $EX = \frac{nM}{N} = \frac{5 \times 10}{100} = \frac{1}{2}$

توزیع هندسی:

* توزیع هندسی:

تعریف: یک آزمایش برنولی با احتمال‌های p و q ($0<p,q<1$ و $p+q=1$)
بطور مستقل تکراری کنیم تا اولین نتیجه مطلوب بدست آید.
اگر X تعداد آزمایش‌ها باشد، آنگاه X دارای توزیع هندسی با تابع احتمال زیر است.

$$f_X(x)=\begin{cases} pq^{x-1} & x=1,2,\dots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

بدیهی $0<f_X(x)<1$

$$\sum f(x) \overset{?}{=} 1$$

$$\Rightarrow \sum f(x) = p\sum q^{x-1} = p(1+q+q^2+\cdots) = p\times\frac{1}{1-q} = 1 \checkmark$$

مثال: فرض کنید احتمال آمدن شیر در هر پرتاب یک سکه معیوب دو برابر آمدن خط می‌باشد. احتمال اینکه اولین باری که نتیجه پرتاب سکه شیر ظاهر شود، پرتاب بیستم باشد.

حل: X: تعداد پرتاب‌ها $\quad p=\frac{2}{3}\ ,\ q=\frac{1}{3}$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & x=1,\dots \\ 0 & o.w. \end{cases} \qquad f(20)=P(X=20)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{19}$$

* در اینجا بزرگترین شانس پرتاب اول است.

---

* میانگین، واریانس، و تابع مولد گشتاورهای توزیع هندسی:

$$EX=\sum_{x=1}^{+\infty} xpq^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1}$$
$$= p(1+2q+3q^2+\cdots)$$
$$= p\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right) = \frac{1}{p}$$

دنباله‌ای از سری‌های هندسی $1+2q+3q^2+\cdots$: روش اول

روش دوم: $1+2q+3q^2+\cdots \xleftarrow{\text{مشتق رابطه}} q+q^2+q^3+\cdots$

$$EX^2 = \sum_{1}^{\infty} x^2 p q^{x-1} = ?$$

$$\boxed{\sigma^2 = q/p^2}$$ واریانس

تابع مولد گشتاور: $M_X(t) = Ee^{tx} = \sum_{1}^{\infty} e^{tx} p q^{x-1}$

$$= \frac{p}{q} \sum_{1}^{\infty} (qe^t)^x = \frac{p}{q}(qe^t + q^2e^{2t} + \cdots)$$

* شرط همگرایی $|qe^t| < 1$، $0 < qe^t < 1$

باید t هایی را بعنوان دامنه تابع مولد گشتاور انتخاب کنیم که $0 < qe^t < 1$ باشد.

$$\Rightarrow M_X(t) = \frac{p}{q} \frac{qe^t}{1-qe^t} \Rightarrow \boxed{M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}} *$$

$M(0) = 1$ ✓

* تعریف: فرض کنید X متغیر تصادفی $M_X(t)$ تابع مولد گشتاورهای X وجود دارد، در این صورت لگاریتم $M_X(t)$ را تابع مولد کومولانهای X می‌نامیم.

$$\boxed{\varphi_X(t) = \ln M_X(t)} \qquad \varphi(0) = \ln 1 = 0$$

$$\varphi(0) = 0$$

مشتق: $\varphi'_X(t) = \left.\frac{M'(t)}{M_X(t)}\right|_{t=0} = EX$ ← میانگین

مشتق دوم: $\varphi''_X(t) = \left.\frac{M''(t)M(t) - (M'(t))^2}{(M(t))^2}\right|_{t=0} = M''(0) - (M'(0))^2$

$$= EX^2 - (EX)^2$$

واریانس

* مشتق دوم تابع مولد کومولانها واریانس را می‌دهد.

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

$$\ln M_X(t) = \ln pe^t - \ln(1-qe^t) \qquad \text{باید}: 1-qe^t > 0$$

$$\Rightarrow 0 > \ln q + t \Rightarrow \boxed{t < -\ln q}$$

* بازه‌ای برای t که تابع مولد گشتاور در آن تعریف است.

* فاصلهٔ همگرایی سری: $t \in (-\infty, -\ln q)$

تابع $M_X(t)$

مثال) فرض کنید ماشینی، قطعاتی را با استاندارد ۲٪ معیوب تولید می‌کند. معیار ادامهٔ کار ماشین را معرفی کنید.

$X =$ تعداد آزمایش

$p = ٪۲ \quad , \quad q = ٪۹۸$

$$EX = \frac{1}{p} = \frac{1}{٪۲} = ۵۰$$

یعنی هر بار ۵۰ تعداد از محصول را آزمایش می‌کنیم اگر یکی معیوب باشد ادامهٔ کار انجام نگیرد.

---

* توزیع پواسن:

تعریف: پیشامدهای مستقلی که در زمان به طور مستقل رخ می‌دهند پیشامدهای پواسنی نام دارند. مانند: حوادث رانندگی، تغییرات جوی، در مسیرهای طبیعی، طوفان، سیل و... که از هم مستقل‌اند و به طور تصادفی رخ می‌دهند.

تعریف: فرض کنید به طور متوسط در واحد زمان λ پیشامد پواسنی رخ می‌دهد، در این صورت

تعداد این پیشامدها در واحد زمان دارای توزیع احتمال پواسن با تابع احتمال زیر است.

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & , \quad x=0,1,2,\dots\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

$f(x)\geq 0$ اگر ثابت کنیم $\sum f(x)=1$

نشان داده می‌شود که هر کدام از x ها $f(x)\leq 1$

$$\sum f(x)=e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}}_{e^{\lambda}\ \text{بسط}}=e^{-\lambda}\times e^{\lambda}=1$$

مثال) فرض کنید بطور متوسط در هر دقیقه ۱۲ نفر وارد یک ایستگاه خاص اتوبوس می‌شوند.
۱) احتمال آنکه در یک دقیقه معین هیچ کس وارد ایستگاه نشود، چقدر است؟

اولین توزیع احتمالی که با زمان سروکار دارد پواسن است. باید λ را داشته باشیم.

$X\sim P(\lambda)$ — λ: متوسط رخ داد در واحد زمان

$X\sim P(12)$ — X: تعداد افراد — * اطلاعات داده شده

* نرخ ورود

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(12)^x e^{-12}}{x!} & x=0,1,\dots\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

* اگر نرخ خروج از نرخ ورود کمتر باشد صف تشکیل می‌شود (البته متوسط)

$P(X=0)=f(0)=e^{-12}$

$P(X\geq 2)=\sum_{2}^{\infty}f(x)$
حداقل دو نفر

ماکزیمم توزیع پیوسته: $f'(x)=0 \Rightarrow x_1$ رشد

اگر $f''(x_1)<0 \Rightarrow f(x_1) \longrightarrow$ مقدار ماکزیمم

در توزیع گسسته: دو شرط داریم $\longrightarrow$

$$\begin{cases}f(r)>f(r+1)\\ f(r)>f(r-1)\end{cases}$$

تابع توزیع :

الف) تابع توزیع متغیرهای تصادفی گسسته :

تعریف : فرض کنید $f(x)$ تابع احتمال گسسته برای متغیر تصادفی X است ، در این صورت ...

تابع توزیع X بصورت زیر است :

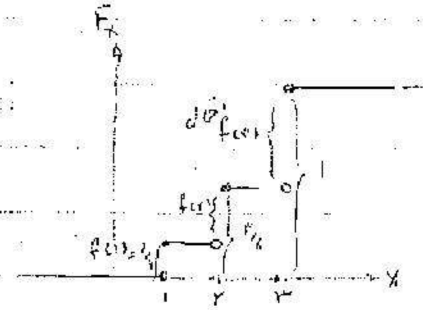
$$F_X(x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

مثال : تابع توزیع در نقطه ۳ : $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 1, 2, \dots, 6 \\ 0 & o.w \end{cases}$

$$F_X(3) = \sum_{t \leq 3} f(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال : $f(x) = \begin{cases} x/6 & x = 1, 2, 3 \\ 0 & o.w \end{cases}$ که تابع احتمال گسسته است :

تابع توزیع ... را تعیین و نمودار آن را رسم کنید :



$\underset{x<1}{F_X(x)} = 0$, $\underset{x \leq 1}{F_X(x)} = 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

$\underset{x<2}{F_X(x)} = \frac{1}{6}$, $\underset{x \leq 2}{F_X(x)} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$

$F_X(2) = 3/6$ $\qquad \underset{x \leq 2}{F_X(x)} = 1$

$f(2) = 2/6$ احتمال $x=2$

خواص تابع توزیع :

1) $F_X(-\infty) = 0$,

2) $F_X(+\infty) = 1$ $\qquad$ 3) $\forall\, x_1 \leq x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

F_X یک تابع غیرکاهشی می‌باشد

۴) F_X گسسته از راست پیوسته است :

* نکته:

فرض کنید X متغیر تصادفی و F_X تابع توزیع X است، اگر a یک نقطه انفصال (ناپیوستگی) برای F_X باشد آنگاه،

x_0 احتمال*

$$P(X=x_0) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$$

مقدار جهش تابع در x_0

ب) تابع توزیع پیوسته: فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته و f_X تابع احتمال پیوسته برای X است، در این صورت تابع توزیع X بصورت زیر است،

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = P(X \leq x)$$

* نکته: * مشتق تابع توزیع پیوسته، تابع احتمال است، و انتگرال تابع احتمال، تابع توزیع است.

$$F'_X(x) = f(x)$$

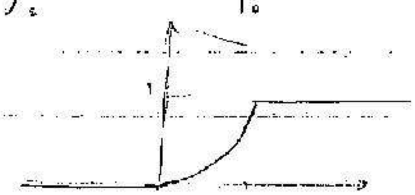
مثال: تابع احتمال متغیر تصادفی X بصورت زیر داده شده است:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

تابع توزیع را تعیین، و نمودار آن را رسم و خواص F_X را بررسی کنید:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 2t\,dt \Rightarrow F_X(x) = \int_0^x 2t\,dt = t^2\Big|_0^x = x^2$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$



توجه شود که در نقطه‌ای پیوسته، مثلاً در نقطه $x=1$، مشتق‌پذیر نیست ولی $f(1)$ وجود دارد، این بدین دلیل است که در حالت پیوسته، نقاط مهم نیستند.

نکته: $F(1\leq x\leq 2) = \cancel{\int_1^1 f(x)dx} + \int_1^2 f(x)dx + \cancel{\int_2^2 f(x)dx}$

$\Rightarrow P(1<x<2) = P(1\leq x<2) = P(1<x\leq 2) = P(1\leq x\leq 2)$

بنابراین در حالت پیوسته خودِ نقطه مهم نیست.

✓ تابع توزیع آمیخته:

مثال) تابع توزیع X به صورت زیر داده شده است:

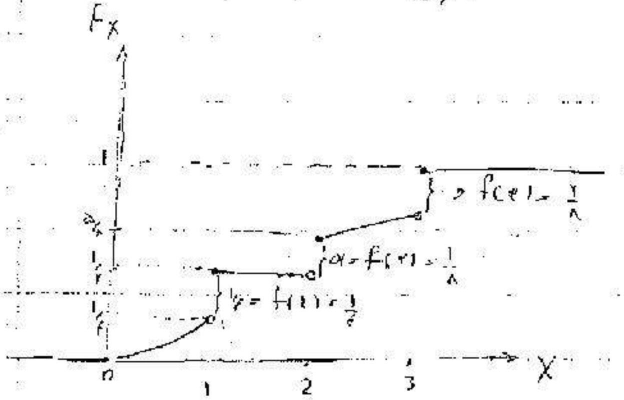
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2/4 & 0\leq x<1 \\ 1/2 & 1\leq x<2 \\ \dfrac{x+3}{8} & 2\leq x<3 \\ 1 & x\geq 3 \end{cases}$$

1) $P(X=1)=?$

2) $P(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2})=?$

3) $E_X=?$

ابتدا نمودار را رسم می‌کنیم.



$P(X=1) = F_X(1) - F_X(1^-)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(1) = \frac{1}{4}$ ✓

$= F(\frac{3}{2}) - F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$

$P(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}) = P(\frac{1}{2}\leq X<1) + P(X=1) + P(1<X<\frac{3}{2})$

$\frac{1}{2}\leq x<1 \Rightarrow F'_X(x) = f(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow P(\frac{1}{2}\leq x<1) = \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx$

$= F(1) - F(\frac{1}{2})$

$P(1<x<\frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(1)$

توجه شود که تابع F(x) در نقطه ۱ و ۲ و ۳ گسستگی وجود دارد بنابراین جرم مقدار F قبل و بعد از آن نامساوی اند بنابراین باید اختلاف دو سطح را بیابیم:

$$f(x)=F(x_i)-F(x_{i-1})$$

$$f_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x/2 & 0\leq x<1\\ 1/4 & x=1\\ 0 & 1<x<2\\ 1/8 & x=2\\ 1/8 & 2<x<3\\ 1-\frac{6}{8}=\frac{2}{8} & x=3\\ 0 & x>3\end{cases}$$

$$EX=\int_0^1 x\,\frac{x}{2}\,dx+1\times\frac{1}{4}+0+2\times\frac{1}{8}+\int_2^3 \frac{1}{8}\,x\,dx+3\times\frac{2}{8}=\ldots$$

گشتاور دوم $EX^2=\int_0^1 x^2\,\frac{x}{2}\,dx+1^2\times\frac{1}{4}+0+2^2\times\frac{1}{8}+\int_2^3 \frac{1}{8}\,x^2\,dx+3^2\times\frac{2}{8}=$

$$\sigma^2=EX^2-E^2X$$

* نکته: اگر F(x) تابع توزیع تجمعی باشد: $P(a<x\leq b)=F(b)-F(a)$

مثال) فرض کنید بطور متوسط در هر دقیقه ۶ تلفن به مرکز مخابرات اداره‌ای زده می‌شود.

۱) احتمال اینکه در یک دقیقه درست ۲ تلفن زده شود چقدر است؟

تعداد تلفن $X \sim P(\lambda=6)$.

پواسن $f(x)=\begin{cases}\frac{6^x e^{-6}}{x!} & , x=0,1,\ldots\\ 0 & o.w.\end{cases}$ $\quad f(2)=P(X=2)=\frac{6^2 e^{-6}}{2!}$

۲) احتمال اینکه در سه دقیقه حداقل دو تلفن زده شود چقدر است؟

توجه شود که در اینجا واحد زمان تغییر کرده بنابراین λ جدید عبارتست از:

$1\ min \longrightarrow \lambda$

$3\ min \longrightarrow \lambda'=3\lambda=18$

$$X \sim P(\lambda' = 18) \Rightarrow f(x) = \frac{(18)^x e^{-18}}{x!}$$

$$P(X \geq 5) = \sum_{5}^{\infty} f(x) = 1 - \sum_{x=0}^{4} f(x)$$

فرض کنید که به طور متوسط در واحد زمان λ پیشامد گسستنی رخ می‌دهد. بنابراین در یک زمان t (t، به طور متوسط λt پیشامد رخ می‌دهد:

$$X \sim P(\lambda t)$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} & x = 0, 1, 2, \dots \quad t, \lambda > 0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

حال احتمال آنکه در زمان t هیچ پیشامدی رخ ندهد چقدر است؟

$$P(X = 0) = f(0) = e^{-\lambda t} \qquad f(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

این احتمال روی متغیر گسسته X (تعداد تلفن‌ها) است.

و این معادل است با اینکه در زمان تعیین شده T هیچ تلفنی زده نشود،

$$P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

$$P(T > t) = P(X = 0) = e^{-\lambda t}$$

$$1 - P(T \leq t) = P(X = 0) = e^{-\lambda t}$$

$$1 - \underbrace{G_T(t)}_{\text{تابع توزیع } T} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \boxed{G_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}}$$

تابع توزیع زمان انتظار

از این به بعد مشتق تابع توزیع، تابع احتمال را نتیجه می‌دهد پس:

تابع احتمال زمان انتظار: $G'_T(t) = g(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t,\lambda > 0$

در مثال قبل، تابع احتمال زمان انتظار تلفن‌چی برای تلفن‌ها:

$$\boxed{g(t) = 4e^{-4t}}$$

گشتاورها

متوسط زمان انتظار بین دو رویداد: ET

$$ET = \int_0^{+\infty} t\,g(t)\,dt = \frac{1}{\lambda} \qquad \underbrace{\boxed{ET = \frac{1}{\lambda}}}_{\text{میانگین}}$$

$$ET^2 = \int_0^{\infty} t^2 g(t)\,dt = ? \ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_T^2 = \frac{1}{\lambda^2}} \quad \text{variance}$$

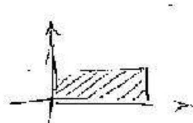
توزیع‌های احتمال پیوسته خاص:

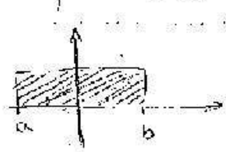
1) توزیع‌های پیوسته یکنواخت

فرض کنید متغیر تصادفی X بین a و b باشد، در این صورت $f(x)$ را تابع احتمال یکنواخت X می‌نامیم، اگر تابع احتمال آن زیر باشد:

توزیع مستطیلی

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$





$$\int_a^b f(x)\,dx = 1$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1$$

$$EX = \int_a^b x\,\frac{dx}{b-a} = \boxed{\frac{a+b}{2}}$$

$$EX^2 = \int_a^b x^2\,\frac{dx}{b-a} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{b-a}\Big|_a^b$$

واریانس: $\sigma^2 = EX^2 - E^2X = \boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}$

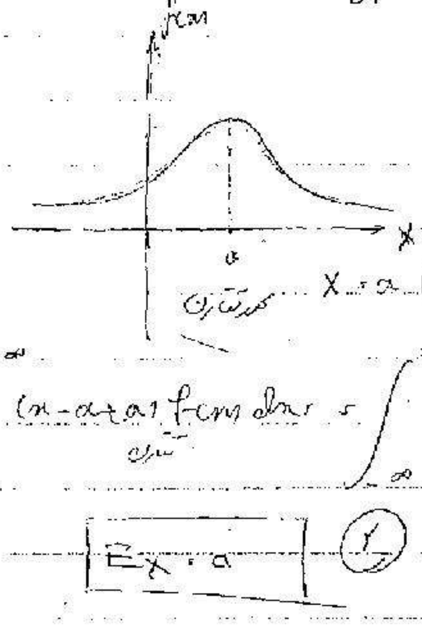
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\sqrt{3} < x < +\sqrt{3} \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \qquad EX = 0\ ,\ \sigma^2 = 1$$

---

۱) توزیع نرمال:

متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با پارامترهای a، b^2 است، هرگاه تابع احتمال آن بصورت زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2b^2}(x-a)^2} & -\infty < x, a < +\infty \\ & b > 0 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$X = a$ (۱)

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(x-a+a) f(x)\,dx}_{\text{صفر}} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a) f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow EX = 0 + a \Rightarrow \boxed{EX = a}$$ (۲)

① $f'(x)=0 \Rightarrow x=a$

$\Rightarrow f''(a)<0 \Rightarrow x=a$ نقطه max منحنی نرمال

بنابراین $f(a)$ ماکزیمم است

بنابراین

③ $\boxed{\text{مد } x=a}$

میانه: هر شاهده که توزیع را نصف کند، میانه است.

④ $x=a$ میانه توزیع است

بنابراین در اینجا میانه، مد و میانگین در این توزیع نرمال یکسان است.

گشتاور دوم

$$Ex^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = a^2+b^2$$

$$\sigma^2 = Ex^2 - E^2X = a^2+b^2-a^2 \qquad \boxed{\sigma^2=b^2}$$

b = انحراف معیار

توزیع نرمال

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)$$

$$\mu=EX=a,\quad \sigma^2=b^2$$

تابع مولد گشتاور

$$M_X(t)=Ee^{tx}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{tx}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{tx-\frac{1}{2\sigma^2}x^2-\frac{1}{2\sigma^2}\mu^2+\frac{x\mu}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,dx$$

$$\overset{\text{تعریف}}{=} e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\mu,\sigma^2)\,dx = e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

* تمام خصوصیات یک تابع مولد گشتاور را دارد. $M_X(0)=1$

$\mu = M'(t)\big|_{t=0}$, $\sigma^2 = M''(t) - M'^2(t)\big|_{t=0}$

تابع مولد کومولانی: $\ln M_X(t) = t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2$

حال اگر بخواهیم تابع توزیع را بدست آوریم. برای مثال:

$p(a<x<b) = \int_a^b f(x)\,dx$ که بدست آوردن این انتگرال مشکل است و نقاط اعداد مربوط به آن در جدول آمده است. که با تقریب زدن اعداد به دست آمده است.

---

* تبدیل نرمال استاندارد (نرمال استاندارد):
فرض کنید $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ آنگاه اگر $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(\overset{\text{میانگین}}{0},\underset{\text{واریانس}}{1})$

* اثبات: تابع مولد گشتاور Z: * یکی از روشهای قوی در اثبات استفاده از تابع مولد گشتاور است.
با استفاده از تابع مولد گشتاور می‌خواهیم تابع احتمال را بدست آوریم:

$M_Z(t) = Ee^{tZ}$
$= Ee^{t(\frac{X-\mu}{\sigma})} = Ee^{\frac{tx}{\sigma}-\frac{t\mu}{\sigma}} = Ee^{\frac{tx}{\sigma}} \times Ee^{-\frac{t\mu}{\sigma}}$ ①

$E[c]=c$ امید ریاضی اعداد ثابت خودشان اند.

① $\longrightarrow Ee^{\frac{tx}{\sigma}} \cdot e^{-\frac{t\mu}{\sigma}} = e^{-\frac{t\mu}{\sigma}}\, Ee^{\frac{tx}{\sigma}} = e^{-\frac{t\mu}{\sigma}} M_X(t/\sigma)$

$= e^{-t\mu/\sigma} \times e^{\frac{t}{\sigma}\mu+\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{t}{\sigma})^2} = e^{t^2/2} \Rightarrow \boxed{M_Z(t) = e^{t^2/2}}$

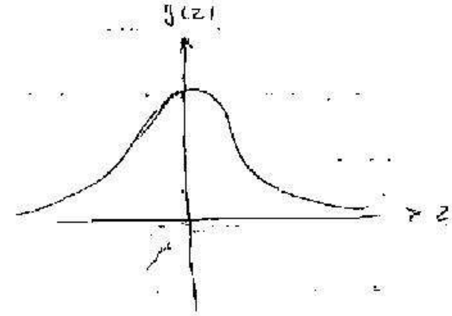
تابع مولد گشتاور Z

بنابراین $M_Z(t)$ حالت خاصی از $M_X(t)$ است که اگر $\mu=0$ و $\sigma^2=1$

بنابراین Z یک توزیع نرمال است با میانگین صفر و واریانس ۱.

نرمال استاندارد: برای تابع احتمال Z که همان X است اگر $\mu=0$, $\sigma^2=1$

$$\Rightarrow \quad g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$$



$p(4<X<16)$

$$=p\left(\frac{4-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{16-\mu}{\sigma}\right)=p(c<Z<d)=\Phi(d)-\Phi(c)$$

اگر $\mu=10$ و $\sigma^2=7$ آنگاه

$$p\left(\frac{-6}{\sqrt{7}}<Z<\frac{6}{\sqrt{7}}\right)=p(-2.26<Z<2.26)$$

با استفاده از اطلاعات جدول داریم:

$$p(-2.26<Z<2.26)=\Phi(2.26)-\Phi(-2.26)=2\Phi(2.26)-1$$
$$=2(0.9881)-1=0.9762=\%97.62$$

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x) \Rightarrow \Phi(x)-\Phi(-x)=2\Phi(x)-1$$

نکته: $\Phi(x)$ تابع توزیع تجمعی نرمال است که مقادیر آن با توجه به جدول قابل استخراج است:

سؤال: فرض کنید نمرات یک امتحان دارای توزیع نرمال با میانگین 10 و واریانس 7 است. مطلوبست:

1) چند درصد افراد نمره بین 4 و 16 دارند؟
2) چند درصد افراد با میانگین نمره 6 ... دارند؟
3) چند درصد افراد بالای 18 نمره دارند؟
4) چند درصد افراد نمره کمتر از 2 دارند؟

چون توزیع نرمال است اعداد ... بالای 18 ... برابر است

۱) قبلاً پاسخ داده شد:

$p(6 < x < 14) = 0.9744$

$|x-\mu| < 1 \longrightarrow 9 < x < 11$

۲) $p(9 < X < 11) = p\left(\frac{9-10}{\sqrt{7}} < \frac{X-10}{\sqrt{7}} < \frac{11-10}{\sqrt{7}}\right)$

$= p\left(-\frac{1}{\sqrt{7}} < z < \frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) - 1$

$= 2\Phi(0.37) - 1 = 2(0.6443) - 1 = 0.2886$

$= \%28.86$

۳) $p(X > 18) = 1 - p(X < 18)$

$= 1 - p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{18-\mu}{\sigma}\right) = 1 - p(Z < 3.02)$

$= 1 - (\Phi(3.02) - \Phi(-\infty)) = 1 - \Phi(3.02) = 1 - 0.99878$

* با استفاده از درون‌یابی (Interpolation) در جدول مقدار $\Phi(3.02)$ را می‌یابیم

$\Phi(3) = 0.9987$

$\Phi(3.05) = 0.9989$

$0.05 \quad 0.0002$

$\frac{0.05}{0.02} = \frac{0.0002}{x} \Rightarrow x = 0.00008$

$\Rightarrow \Phi(3.02) = \Phi(3) + x = 0.9987 + 0.00008$

* در فاصله ۰٫۰۵ از ۳ افزایش طول به اندازه ۰٫۰۰۰۲ افزایش ارتفاع است.
حال اگر ۰٫۰۲ افزایش طول داشته باشیم ارتفاع چقدر افزایش می‌یابد

حال اگر عکس جدول هم داشته باشیم

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \Phi(a) = 0.7753 \Rightarrow a = ?$

$\Phi(0.75) = 0.7734$ $\qquad \frac{0.01}{k} = \frac{0.003}{0.0019} \Rightarrow k = \ldots$

$\Phi(a) = 0.7753$

$\Phi(0.76) = 0.7764$ $\qquad \Rightarrow a = 0.75 + k$

توزیع گاما:

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما با پارامترهای α و β باشد، آنگاه تابع احتمال آن به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}} & x>0,\ \beta>0,\ \alpha \in N \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y}\,dy = (\alpha-1)!$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-1} e^{-y}}{\Gamma(\alpha)}\,dy$$

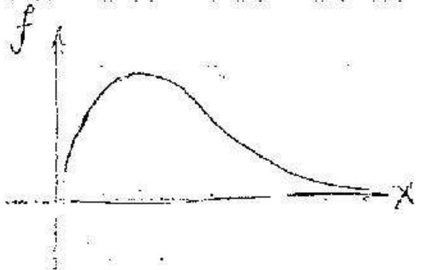
چون زیر انتگرال مثبت و پیوسته است
بنابراین یک تابع احتمال پیدا کردیم:

تغییر متغیر: $y = x/\beta \ , \ \beta > 0 \qquad dy = \frac{dx}{\beta}$

$$\Rightarrow 1 = \int_0^{\infty} \frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{dx}{\beta} = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}} & x,\beta>0,\ \alpha \in N \\ 0 & o.w \end{cases}$$

تابع احتمال توزیع گاما



چولگی به راست است.
(تقارن نداشتن به سمت چپ)

$$EX = \int_0^\infty \frac{x \cdot x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha}\,dx = \varphi(\alpha,\beta)$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{(1+\alpha)-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha) * \beta^\alpha} \cdot \frac{\beta^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)}\,dx = \frac{\beta^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)}{\beta^\alpha\,\Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^{(1+\alpha)}}{\Gamma(\alpha+1)}}_{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{EX = \varphi(\alpha,\beta) = \alpha\cdot\beta}$$

EX^k

$$EX^k = \beta^k (\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots(\alpha+1)(\alpha)$$

$$EX = \alpha\cdot\beta \qquad EX^2 = \beta(\alpha)(\alpha+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma^2 = E X^2 - E^2 X = \alpha\cdot\beta^2}$$

$$M_X(t) = Ee^{tX} = \int_0^\infty \frac{e^{tx}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^\alpha}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{(tx-\frac{x}{\beta})}\, x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\, e^{-x(\frac{1}{\beta}-t)}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha}$$

اگر $x(\frac{1}{\beta}-t)=z$ آنگاه $x=\frac{\beta z}{1-\beta t}$

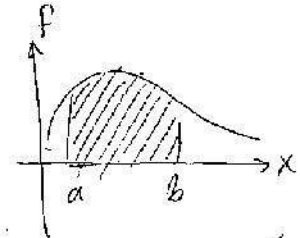
تغییر متغیر: $\Rightarrow dx=\frac{\beta\, dz}{1-\beta t}$

با فرض $1-\beta t>0$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}\cdot\beta^{\alpha-1}}{(1-\beta t)^{\alpha-1}}\,\frac{e^{-z}\beta\, dz}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}(1-\beta t)}=\frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}}\underbrace{\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}e^{-z}}{\Gamma(\alpha)}dz}_{1}$$

تابع مولد گشتاورها:

$$\Rightarrow \boxed{M_X(t)=\frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}}}$$



$$P(a<x<b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

برای محاسبه احتمال در خانواده توزیع گاما از تغییر زیر استفاده می‌کنیم:

نتیجه: فرض کنید $X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$ آنگاه:

$$Y=\frac{2X}{\beta}\ ,\ \beta>0$$

با درجه آزادی

$$Y\sim\chi^2(r=2\alpha)$$

کای‌دو

با تغییر متغیر $\frac{2X}{\beta}$ در تابع توزیع گاما:

$$1=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}dx \qquad x=\frac{\beta Y}{2}\Rightarrow dx=\frac{\beta}{2}dy$$

$$=\int_0^\infty \frac{\beta^{\alpha-1}y^{\alpha-1}e^{-y/2}}{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\cdot\frac{\beta\, dy}{2}=\int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}e^{-y/2}}{\Gamma(\alpha)2^{\alpha}}dy=\int \frac{y^{r/2-1}e^{-y/2}}{\Gamma(r/2)\cdot 2^{r/2}}$$

کافیست در تابع گاما $\alpha\to\frac{r}{2}\ ,\ \beta\to 2$

تابع احتمال توزیع کای اسکوئر

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{y^{r/2 - 1} e^{-y/2}}{\Gamma(\frac{r}{2})\, 2^{r/2}} & y>0,\ r=1,2,\dots \\ 0 & o.w \end{cases}$$

حال محاسبه احتمال:

$$P(a<X<b) = P\left(\frac{2a}{\beta} < \frac{2X}{\beta} < \frac{2b}{\beta}\right)$$

$$= P(c<Y<d) = \int_c^d f(y)\,dy$$

$$= \int_0^d f(y)\,dy - \int_0^c f(y)\,dy$$ تبدیل کردن کران انتگرال در صفر

با استفاده از جدول می‌توان حاصل انتگرال را محاسبه کرد.

مثال) فرض کنید X دارای توزیع گاما $X \sim \Gamma(4,4)$ در این صورت مطلوبست $P(a<x<b)$

* برای استفاده از جدول باید سطر مورد نیاز را مشخص کرد که 2α آن را مشخص می‌کند. $2\alpha = 2\times 4 = 8$ = سطر درجه آزادی پس از سطر ۸ استفاده می‌کنیم:

باید $P\left(\frac{2a}{\beta} < \frac{2X}{\beta} < \frac{2b}{\beta}\right)$

$$= P\left(\frac{2a}{\beta} < Y < \frac{2b}{\beta}\right)$$

* باید طوری در سطر ۸ حرکت کنیم که $\frac{2a}{\beta}$, $\frac{2b}{\beta}$ در سطر ۸ باشد

$c = \frac{2a}{\beta} = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2} = 7{,}807$ $\quad a = 15{,}614$ احتمال ٪۲۰

$c = \frac{2b}{\beta} = \frac{b}{2} = 11{,}34$ $\quad b = 22{,}68$ احتمال : ٪۵۰

$$\Rightarrow P(15{,}614 < X < 22{,}68) = P(7{,}807 < Y < 11{,}34)$$

$$= \int_0^{11{,}34} f(y) - \int_0^{7{,}807} f(y)\,dy = \%50 - \%20 = \%30$$

* میانگین توزیع χ^2 همان درجه آزادی است.
تابع کای اسکور

$Ey = r$

$\sigma_y^2 = 2r$

واریانس در توزیع χ^2 دو برابر درجه آزادی است.

$M_y(t) = \frac{1}{(1-2t)^{r/2}}$

* اگر در تابع توزیع گاما:

$\alpha = 1 , \beta = \frac{1}{\lambda}$

$\Rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ تابع توزیع زمان انتظار

تابع های گاما برای طول عمر بکار می‌روند.

توزیع های گسسته: دوجمله‌ای ، فوق هندسی ، هندسی ، پواسن

توزیع های پیوسته: نرمال ، گاما ، کای اسکور ، نمایی.

توزیع گاما: $f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^{\alpha}}$ $x \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

if $\beta = 1 , \alpha = 2 \longrightarrow$ توزیع نمایی: xe^{-x} $X \sim E(X)$

میانگین توزیع نمایی $= 2$ ، واریانس $= 2$

توأم پیوسته ، البته می‌تواند خود گسسته شده و نامیده گسسته و دیگری پیوسته باشد.
فرض کنید (X , Y) متغیر تصادفی توأم پیوسته است، آنگاه $f(x,y)$ را تابع احتمال
پیوسته می‌نامیم ، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$1)\quad f(x,y) \geq 0 \qquad \forall (x,y) \in D \quad , D \in \mathbb{R}^{(2)}$$

$$2)\quad \int_x \int_y f(x,y)\, dy\, dx = 1$$

انتگرال زیر که تابع احتمال توأم پیوسته بسازید:

$$\iint (x+y)\, dy\, dx \qquad D = \{ (x,y) \mid 0<x<y , 0<y<$$

با انتگرال دوگانه حساب می‌کنیم ، چون x تابعی از y دارد در کران اول انتگرال x را انتگرال می‌گیریم:

$$\int \left(\frac{x^2}{2} + xy \right)\Big|_0^y dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2} + y^2 = \frac{y^3}{6} + \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{تابع احتمال} \quad f(x,y) = \begin{cases} 2(x+y) & 0<x<y \ , \ 0<y<1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

احتمال:

$$P(X \in A , Y \in B) = \int_A \int_B f(x,y)\, dy\, dx$$

$$p(a \leq X \leq b \ , \ c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx$$

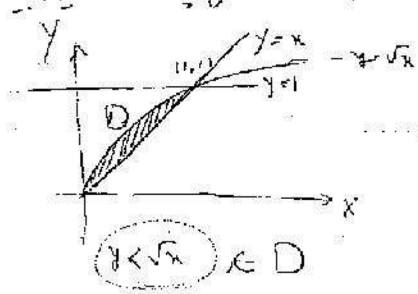
اگر $a \longleftrightarrow b \ , \ c \longleftrightarrow d \Rightarrow p(X=a , Y=c) = 0$

۴۰

$\boxed{X \leq Y}$ در این ۴ مورد تمام داریم

مثلاً احتمال زیر را بیابید:

$$P(Y<\sqrt{X}) = \iint 2(x+y)\,dy\,dx$$



$$= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} 2(x+y)\,dy \right) dx = \frac{1}{4}$$

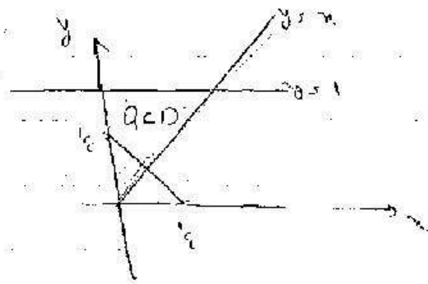
$$P\left(0<X<\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}<Y<\frac{3}{4}\right) = \int_0^{1/2} \int_{1/4}^{3/4} 2(x+y)\,dy\,dx = \frac{1}{4}$$

چرا احتمال منفی است

* مجموعه ... احتمال است زیرا در این ناحیه تمام هستند $X \leq Y$ ...

$$P\left(0<X<\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<Y<\frac{3}{4}\right) = \int_0^{1/2} \int_{1/2}^{3/4} 2(x+y)\,dy\,dx =$$

$$P\left(X+Y>\frac{1}{2}\right) = \iint_{x\ y} 2(x+y)\,dy\,dx$$



$$= 1 - P\left(x+y<\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - \int_0^{1/2} \int_x^{\frac{1}{2}-x} 2(x+y)\,dy\,dx$$

marginalize — تابع حاشیه‌ای (ارزش) ۵

$$f_Y(y) = f_y(y) = \int_x f(x,y)\,dx$$

$$f_1(x) = f_X(x) = \int_y f(x,y)\,dy \Rightarrow \int f_1(x)\,dx = \iint_{x\ y} f(x,y)\,dy\,dx = 1$$

$$\int_x f_1(x)\,dx = 1$$

* هر تابع حاشیه‌ای یک تابع احتمال است (پیوسته)

در مثال (1) توابع حاشیه‌ای X و Y را بیابید:

$$f_1(x) = \int_{y=x}^{1} 2(x+y)\,dy = 2xy + y^2 \Big|_x^1$$

$$\Rightarrow \quad f_1(x) = 2x + 1 - 3x^2 \quad , \quad 0<x<1$$
$$0 \quad \quad o.w.$$

آزمون:

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx \overset{?}{=} 1 \Rightarrow \int_0^1 2x + 1 - 3x^2 = x^2 + x - x^3 \Big|_0^1 = 1 \quad \checkmark$$

بنابراین تابع احتمال حاشیه‌ای درست است.

$$f_2(y) = \int_{x=0}^{y} 2(x+y)\,dx = x^2 + 2xy \Big|_0^y = 3y^2 \quad \quad 0<y<1$$

آزمون:

$$\int_0^1 f_2(y) = 1 \quad \checkmark$$

$$P(0<X<\tfrac{1}{2}) = \int_0^{1/2} f_1(x)\,dx = \int_{x=0}^{1/2} \overbrace{\int_y f(x,y)\,dy}^{f_1(x)}\,dx$$

بنابراین تمام موارد مربوط به تک‌متغیره‌ها
از توابع حاشیه‌ای مربوط به همان متغیر
فقط استفاده می‌کنیم.

توزیع های شرطی:

تعریف: فرض کنید $f(x,y)$ تابع احتمال توأم و $f_1(x)$ و $f_2(y)$ توابع حاشیه‌ای باشند. در این صورت تابع احتمال شرطی x به شرط y و y به شرط x به صورت زیر است:

$$f_{x|y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

مثال) انواع چگالی توابع شرطی را بیابید:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x+y) & 0<x<y,\ 0<y<1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

تابع حاشیه‌ای را می‌یابیم:

$$f_1(x) = 2x+1-3x^2 \quad , \quad 0<x<1$$
$$= 0 \qquad \text{سایر جاها}$$

* نکته: حدود تغییرات در توابع شرطی همان حدود تابع توأم است.

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{2(x+y)}{1+2x-3x^2} \qquad 0<x<y,\ 0<y<1$$
$$= 0 \qquad o.w$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{2(x+y)}{3y^2} \qquad 0<x<y,\ 0<y<1$$
$$= 0 \qquad o.w$$

* احتمال در توابع شرطی:

با استفاده از تابع احتمال شرطی $f(x|y)$ داریم:

$$p(x \in A / y = c) = \int_{x \in A} f(x|c)\, dx$$

$$p(Y \in B \mid X = d) = \int_{y \in B} f(y|d)\, dy$$

مثال) در مثال قبل مطلوبست: ... $y > \frac{1}{2}$ ...

$$p(0<X<\tfrac{1}{2} \mid Y = \tfrac{2}{3})$$

$$f(x \mid \tfrac{2}{3}) = \frac{2(x+\frac{2}{3})}{3(\frac{2}{3})^2}$$

$$\Rightarrow p(0<X<\tfrac{1}{2} \mid Y = \tfrac{2}{3}) = \frac{2}{3(\frac{2}{3})^2}\int_0^{\frac{1}{2}} (x+\tfrac{2}{3})\, dx$$

$$= \frac{2}{3(\frac{2}{3})^2}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$x=\frac{1}{2}$ تعین $y \geq x$

$$P\left(\frac{1}{4}<y<\frac{1}{2} \,\middle|\, x=\frac{1}{6}\right) =$$

$$\Rightarrow f\left(y \,\middle|\, \frac{1}{6}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{6}+y\right)}{1+2\frac{1}{6}-3\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{2}{1+\frac{2}{6}-\frac{3}{36}}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\left(y+\frac{1}{6}\right)dy$$

$$P\left(0<X<\frac{1}{2} \,\middle|\, y=\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{1}{2}} = 1$$

احتمال حتمی :

توزیع های شرطی :

امید ریاضی شرطی :

فرض کنید $f(y|x)$ تابع احتمال شرطی است، و $g(y)$ تابع معینی از y است.

در این صورت امید ریاضی $(g(y)|x)$ بصورت زیر است :

$$E\left(g(y)|x\right) = \int_y g(y) f(y|x)\, \underline{\underline{dy}} < \infty$$

مثال : مطلوب است : $E(y^2+5y+1|X)$

$0 \leq y \leq 1 , \quad 0 \leq x \leq y$

$$\int_y \left(y^2+5y+1\right) f(y|x)\, dy = \int_x^1 \left(y^2+5y+1\right)\frac{2(x+y)}{1+2x-3x^2}\, dy$$

$\boxed{\text{جواب تابعی از } x \text{ است.}}$

* گشتاورهای شرطی :

$g(y) = Y^n \quad n \geq 1 , n \in \mathbb{N}$

$\forall n=1 \Rightarrow g(y)=Y$

گشتاور مرتبه اول $f(y|x)$

میانگین شرطی $f(y|x)$

گشتاور مرتبه r ام شرطی $y|x$

$$E(y^r|x) = \int_y y^r f(y)\,dy$$

$$Ey = \int y f(y)\,dy \Rightarrow E\,y|x = \int y f(y|x) = \varphi_1(x) \quad \text{تابع } x$$

$$\Rightarrow \sigma_y^2 = Ey^2 - E^2y \Rightarrow \sigma^2_{y|x} = E\,y^2|x - (E\,y|x)^2 = \varphi_2(x) \quad \text{تابع } x$$

مثال از مثال فوق مطلوبست: $\sigma^2 y|x = ?$

$$E(y|x) = \int_y y f(y|x)\,dy = \int_x^1 y \cdot \frac{2(x+y)}{1+2x-3x^2}\,dy = \frac{2}{1+2x-3x^2}\left[\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_x^1$$

$$= \varphi_1(x)$$

$$E(y^2|x) = \frac{2}{1+2x-3x^2}\left[\frac{xy^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]_x^1 = \varphi_2(x)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \varphi_2(x) - \varphi_1^2(x)$$

تعریف: فرض کنید $f(x,y)$ تابع احتمال توأم و $g(x,y)$ تابعی از دو متغیر x و y باشد در این صورت:

امید ریاضی $g(x,y)$ بصورت زیر است:

$$E\big(g(x,y)\big) = \int_x\int_y g(x,y)\cdot f(x,y)\,dy\,dx < \infty$$

$$E(x^2) = \int_x\int_y x^2 f(x,y)\,dy\,dx = \int_x x^2 f_1(x)\,dx$$

$$E(y^k) = \int_x\int_y y^k f(x,y)\,dy\,dx = \int_y y^k f_2(y)\,dy$$