☜ علم آمار

آمار :

روش و چگونگی جمع آوری اطلاعات و بیان آنها در قالب عدد

احتمال :

تجزیه و تحلیل اطلاعات عددی جمع آوری شده

استنباط :

قضاوت درباره کل اطلاعات وقتی بخشی از آن رؤیت شده

جمعیت :

مجموعه تمام عناصری که دارای یک یا چند ویژگی مشترک باشند

نمونه:

بخشی از جمعیت میباشد

متغیر:

یک ویژگی که از فردی به فرد دیگر در یک جمعیت (نمونه) تغییر میکند

۱- متغیر کمی (وزن یا قد)

۲- متغیر توصیفی (مهارت یا هوش)

مقیاس سازی

۱- مقیاس اسمی (تهران ۰۲۱ - شیراز ۰۷۱۱)

۲- مقیاس ترتیبی (ضعیف ۰ – متوسط ۱ – خوب ۲)

۳- مقیاس فاصله ای ($x=at+b$ که $b<>0$ مثلاً $f=9/5(c+32)$) در این مقیاس صفر بمعنی هیچ نیست

۴- مقیاس نسبتی ($x=at$) صفر بمعنی هیچ است این مقیاس خوبی است

داده :

۱- داده گسسسته (تعداد فرزند)

۲- داده پیوسته (طول قد)

مشخص کننده مرکزی

۱- میانگین (حسابی – وزنی – هندسی – توافقی و ...)

۲- میانه (وسط صف منظم داده ها) m

۳- نما (داده ای که بیشتر تکرار شده) M

۴- میانگین و واریانس (میانگین و میزان انحراف داده ها از میانگین)

۵- چارک – دهک – صدک یعنی داده ها ار این چندک کوچکترند (ابتدا داده ها را مرتب کنیم سپس تعداد داده ها (n) را در نسبت مربوط به چندک (p) ضرب کنید n*p (در صورت اعشاری بودن آن را به بالا گرد کنید و داده را استخراج نمایید در صورت مساوی بودن آن - میانگین آن داده و داده بالاتر را استخراج کنید) تا محل قرار گرفتن چندک معلوم شود.

صدک (P) : صدک چهلم p_{40} یا دهک چهارم است و داده‌ای است که ۴۰ درصد داده‌ها از آن کوچکتر است. بدیهی است که ۶۰ درصد داده‌ها از آن بزرگتر باشد.

دهک ها، حالت خاص صدک ها هستند و به ترتیب به صدک های دهم، بیستم، سی ام و... و نودام، به ترتیب دهک اول، دوم، سوم و ... نهم گفته می‌شود.

چارک Q: چارک سوم Q_3 است داده‌ای است که سه چهارم (۷۵٪) داده‌ها از آن کوچکتر است. بدیهی است که یک چهارم (۲۵٪) دیگر داده‌ها از آن بزرگتر باشد.

۱) مثال

صدک ۶۵ داده‌های زیر را معلوم کنید. 3.5-4.4-4.3-4.0-3.8-3.9-3.7-3.5-3.6-3.2

حل : ابتدا داده‌ها مرتب میکنیم و یک ردیف بنام ردیف (فراوانی تجمعی) تشکیل میدهیم

n=F	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
Data=Xi	3.2	3.5	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4	4.3	4.4

برای محاسبه صدک ۶۵ باید تعداد داده ها را در ۶۵٪ ضرب کنیم. (۶۵٪ نسبت مربوط به صدک ۶۵ است)

n*p=10*0.65=6.5 6.5+(=7) در سطر n=> n=7 ➔ X=3.9

بنابراین عدد هفتم، صدک ۶۵ ام است یعنی: $P_{65}=3.9$

یعنی ۶۵٪ دادها مقدارعددیشان از ۳.۹ کمتر است

۲) مثال

دهک چهارم داده‌های زیر را معلوم کنید

7.5- 8.3 -9.8-2.3 – 3- 3.1 –3.2- 3.4 – 3.8- 4 – 4.4- 3.5- 5.3- 6.1- 6.9

داده‌ها را مرتب میکنیم

Xi	2.3	3	3.1	3.2	3.4	3.5	3.8	4	4.4	5.3	6.1	6.9	7.5	8.3	9.8
fi	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Fi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

برای محاسبه دهک چهارم باید تعداد داده ها (n=۱۵) را در ۰.۴ ضرب کنیم

n*p=15*0.4=6Fi=6+➔F=7 7➔X=3.8

یعنی 40%داده ها کمتر از 3.8 ام است یعنی: $P_{40}=3.9$

چندک برای داده پیوسته :

ستون فراوانی تجمعی را تشکیل دهید

مقدار n*p را محاسبه کنید

از ستون فراوانی تجمعی طبقه چندک دار را معلوم کنید.

از فرمول مقابل استفاده کنید

$$Q = L_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} * C$$

توجه شود در داده پیوسته حتما حدود و فاصله طبقات باید مساوی باشد

۳) مثال

برای داده‌های جدول زیر دهک سوم را بدست آورید.

حدود طبقات	f_i
1-4	8
4-7	6
7-10	13
10-13	16
13-16	7

حل : ابتدا فراوانی تجمعی حساب میکنیم

برای دهک سوم $P_{۳۰}$ ستون فراوانی تجمعی را به دست می آوریم

i	حـــــدود طبقات	f_i	F_i
1	1-4	8	8
2	4-7	6	14
3	7-10	13	27
4	10-13	16	43
5	13-16	7	50

$n \times p = ۵۰ \times ۰/۳ = ۱۵$

عدد ۱۵ که گرد شود در ستون فراوانی تجمعی به 27 میرسیم که در طبقه سوم i=3 است.

$$Q = L_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} * C$$

i = طبقه گرد شده   Li = داده کران پایین در همان طبقه گردشده   C = فاصله طبقـات   Fi فراوانـی تجمعـی fi فراوانی

$$Q_{0.3} = 7 + \frac{50 * 0.3 - 14}{13} * 3 = 7.23$$

تذکر : میانه = عدد چارک دوم = دهک پنجم = صدک پنجاهم

٤) مثال

دادههایی بشرح ذیل داریم صدک ۶۰ چه مقدار میشود

13-14-13-15-13-17-14-12-15-17

داده را مرتب مینماییم و یک سطر (ردیف) ایجاد میکنیم

دادهXi	12	13	13	13	14	14	15	15	17	17
ردیف	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

n*p=10*(60/100)=6 ⇨ در ردیف 6+ == 7 ⇨ داده متناظر با ردیف مربوطه ⇨ x=15

صدک شصت (شصت درصد) داده ۱۵ یا کمتر از آن میباشد

اگر همان داده را به صورت جدول فراوانی و تجمع فراوانی بنویسیم

Xi داده	12	13	14	15	17
fi تعداد	1	3	2	2	2
Fi	1	4	6	8	10

$n = \sum f_i$=1+3+2+2+2=10

n*p=10*(60/100)=6 ⇨ 6+ ⇨ در ردیف Fi 6+ == 8 ⇨ داده متناظر x=15

صدک شصت (شصت درصد) داده ۱۵ یا کمتر از آن میباشد

نکته: در کران بالای هر طبقه عددی ملاحظه میشود که شمول این طبقه بر این داده نیست یعنی آخرین داده این طبقه کمی کمتر از همین داده است و این داده شامل طبقه بعدی است که در کران پایین طبقه بعدی ملاحظه میشود

توجه : عدد چارک دوم = عدد دهک پنجم = عدد صدک پنجاهم = میانه

خاصیت میانه

اگر m میانه باشد و a یک عدد باشد

$$\sum |x_i - m| \leq \sum |x_i - a|$$

۵) مثال

تعدادی اتومبیل بشرح جدول ذیل از محل A به B وجود دارد میخواهیم یک پمپ بنزین ایجاد کنیم تا جهت سوختگیری اتومبیلها جمع کل مسافت برای کلیه اتومبیلها کمترین شود

فاصله(کیلومتر)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	
اتومبیل(تعداد)	10	5	25	5	5	

Xi	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	
Fi	10	5	25	5	5	
Fi	10	15	40	45	50	
I	1	2	3	4	5	

$$Q = L_i + \frac{np -}{j}$$

میانه وسط صف داده است

$$\frac{\sum f_i}{2} = \frac{5 + 10}{}$$

در سطر Fi سلول مرتبط با 25 (که بزرگتر از 15در طبقه2میباشد) عدد 40 یعنی طبقه3 میباشد پس i=3 است. ضمنا میانه یعنی p=50% است و فاصله طبقات هم C=20 است

$Q = 40 + \frac{50*\%50-15}{25} * 20$=48

بنابراین پمپ بنزین باید در ۴۸ کیلومتری از A احداث شود

مود در داده پیوسته

$$M = L_i + \Big(\frac{}{d_1}$$

که i همان طبقه ای است که بیشترین فراوانـی را دارد و Li کـران پـایین همـین طبقـه اسـت و C طـول هـر رده (تقریبا همان C فاصله طبقات) میباشد

$d_1 = f_i - f_{i-1}$

$d_2 = f_i - f_{i+1}$

۶) مثال

در جدول زیر مود دقیقا چه عددی است

داده xi	3-6	6-9	9-12
fi	4	20	12

عدد کران بالا شامل همان طبقه نیست

فاصله بین دو طبقه عدد ۳ میباشد

داده xi	3-6	6-9	9-11
فراوانی fi	4	20	12
I	1	2	3

بیشترین فراوانی(مود) در طبقه 2 است پس i=2 بنابراین مود بین ۶-۹ است که برای بدست آوردن عدد دقیق

$M = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right) * C$=6+$\left(\frac{20-4}{20-4+20-12}\right) * 3$=8

بنابراین مود عدد ۸ میباشد

نکته : در بعضی کتب در فرمول فوق بجای C حرف W میگذارند W=C-1 میباشد(که کمتر میشود)

مشخصه های پراکندگی :

۱- دامنه تغییرات (تفاضل بزرگترین داده از کوچکترین داده)
۲- انحراف متوسط (میانگین قدر مطلق انحراف ها از میانگین داده ها)
۳- انحراف معیار (جذر واریانس که واریانس میانگین توان دوم انحراف ها از میانگین داده ها)

فراوانی :

اگر n شیء متمایز در دسته های مختلفی (n1, n2 , ..) را به تعداد مختلف (w1,w2,..) داشته باشیم w ها را فراوانی گویند

۱- فراوانی نسبی نسبت فراوانی هر مجموعه به کل تعداد آن مجموعه ri=wi/n
۲- فراوانی انباشته (تجمعی) حاصل جمع فراوانی تا موقعیت مورد نظر Fj
۳- فراوانی انباشته نسبی : حاصل جمع Wi ها تقسیم بر n

میانگین

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n} x_h$$

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

واریانس σ^2 انحراف معیار σ

$$v(x) = \sigma^2 = \frac{1}{n}(\sum (x_i - \mu)^2$$

یا

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n}$$

در حالت داشتن فراوانی

$$\mu = \frac{1}{\sum f_i}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

$$v(x) = \sigma^2 = \frac{1}{\sum f_i}(\sum f_i (x_i - \mu)^2$$

ثابت شده است که در طبیعت آمار بصورت نرمال توزیع شده است که معمولاً ۶۸٪ داده ها بین $\mu \pm \sigma$ و ۹۶٪ داده ها بین $\mu \pm 2\sigma$ خواهد بود

۷) مثال

برای داده های xi و فراوانی fi میانگین و واریانس را حساب کنید آیا این داده ها نرمال هستند

	xi	Fi	xifi	Ri	Fi		
	10.4	1	10.4	0.02	1		
	11.3	6	67.8	0.12	7		
	12.2	7	85.4	0.14	14		
	13.1	12	157.2	0.24	26		
	14	12	168	0.24	38		
	14.9	9	134.1	0.18	47		
	15.8	3	47.4	0.06	50		
جمع		50	670.3	1			
			13.406			**1.80547**	
			میانگین			واریانس نمونه	

$s^2 = 1.805$

$s = 1.34$

$\mu \pm \sigma = 12.06 \quad 14.74$

$\mu \pm 2\sigma = 10.71 \quad 16.09$

$\mu \pm 3\sigma = 09.37 \quad 16.43$

داده بین اعداد	12.06-14.74	10.71-16.09	09.37-16.43
تعداد	31	49	50
درصد	31/50=62%	49/50=98%	50/50=100%

میانگین در داده پیوسته

اگر داده‌های ما پیوسته بود جمع کران بالا و پایین هر طبقه را بر ۲ تقسیم نموده و این عدد بعنوان داده جدید(گسسته) با فراوانی مربوطه در نظر گرفته -حالا بصورت گسسته میانگین و انحراف معیار را بدست میاوریم.

۸) مثال

میانگین این داده ها را بدست آورید

yi	fi
61-64	5
64-67	8
67-70	10
70-73	12
73-76	10
76-79	5

فاصله بین دو طبقه برابر است با 64-61=3 و در هر طبقه داده جدید بنام yi بدست میاوریم که نصف مجموع کران بالا و پایین است (مثلا 62.5=(64+61)/2)

yi	fi	i	Xi	fi	Fi
61-64	5	1	62.5	5	5
64-67	8	2	65.5	8	13
67-70	10	3	68.5	10	23
70-73	12	4	71.5	12	35
73-76	10	5	74.5	10	45
76-79	5	6	77.5	5	50

حال میانگین این جدول جدید Xi را بدست میاوریم

که در فرمولهای ذیل عددگذاری میکنیم

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{(62.5*5)+(65.5*8)+\cdots}{5+8+..} = 70.2$$

$$v(x) = \sigma^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{(62.5-70.2)^2 * 5 + (65.5-70.2)^2 * 8 + \cdots.}{5+8+\cdots.} = 19.47$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{}$$

میانگین 70.2 است که در طبقه i=4 میباشد

خواص میانگین حسابی

اگر داده های ما x_i باشد میانگین آنها $\bar{x}$ باشد آنگاه

الف) جمع داده ها با میانگین با توجه به فراوانی صفر میشود

$\sum(x_i - \bar{x})\, f_i$=0

اگر داده ها را با یک عدد ثابت جمع یا تفریق کنیم میانگین هم با همین عدد ثابت جمع یا تفریق میشود

$y_i = x_i \pm a \quad ⇨ \bar{y} = \bar{x} \pm a$

$y_i = x_i * a \quad ⇨ \quad \bar{y} = \bar{x} * a$

اگر y_i یکسری اعداد دیگر باشد

$z_i = x_i + y_i \quad ⇨ \quad \bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$

۹) مثال

قد تعدادی اشخاص بشرح ذیل است میانگین قد را بدست آورید

X	165	168	170	171	173
F	2	4	5	3	1

ضرب اعداد فوق در فراوانی ها وقت زیاد میبرد یک عدد در حدود وسط داده ها انتخاب میکنیم

اعداد جدول فوق از سایز عدد ۱۷۰ کم کرده جدول زیر بدست میاید میانگین این جدول بدست آورده که ضرب و تقسیم آن ساده تر است بدست آورده و در انتها به میانگین عدد ۱۷۰ اضافه میکنیم

Y	-5	-2	0	1	3
F	2	4	5	3	1

$\bar{y} = \frac{\sum y_i f_i}{\sum f_i} = \frac{(-5*2)+(-2*4)+\cdots}{2+4+....} = \frac{-12}{15} = -0.8$

$\bar{x} = \bar{y} + 170 = -0.8 + 170 = 169.2$

خواص واریانس(پراش)

اگر داده های ما $\mathrm{x_i}$ باشد میانگین آنها $\bar{\mathrm{x}}$ باشد آنگاه

اگر داده ها را با یک عدد ثابت جمع یا تفریق کنیم واریانس و انحراف معیار تغییر نمیکند

$y_i = x_i \pm a \quad ⇨ \boldsymbol{\sigma_y} = \boldsymbol{\sigma_x}$

۱۰) مثال

قد تعدادی اشخاص بشرح ذیل است انحراف معیار قد را بدست آورید

X	165	168	170	171	173
F	2	4	5	3	1

ضرب اعداد فوق در فراوانی ها وقت زیاد میبرد یک عدد در حدود وسط داده ها انتخاب میکنیم

اعداد جدول فوق از سایز عدد ۱۷۰ کم کرده جدول زیر بدست میاید میانگین و واریانس این جدول بدست آورده که ضرب و تقسیم آن ساده تر است بدست آورده و در انتها به میانگین عدد ۱۷۰ اضافه میکنیم و واریانس فرق نمیکند

y	-5	-2	0	1	3
F	2	4	5	3	1

$\bar{y} = \frac{\sum y_i f_i}{\sum f_i} = \frac{(-5*2)+(-2*4)+\cdots}{2+4+....} = \frac{-12}{15} = -0.8 \qquad \bar{x} = \bar{y} + 170 = -0.8 + 170 = 169.2$

$v(y) = {\sigma_y}^2 = \frac{\sum(y-\bar{y})^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{(-5-(-0.8))^2*2+(-2-(-0.8))^2*4+\cdots.}{2+4+\cdots.}$ =4.56 $\qquad \sigma_y = \sqrt{4.56} = 2.13$

$\sigma_x = \sigma_y = 2.1$

❋ اگر داده ها را در یک عد ضرب کنیم انحراف معیار با مجذور آن عدد نسبت معکوس دارد

$y_i = x_i * a \ ⇨ \boldsymbol{\sigma_y} = \left(\frac{\mathbf{1}}{a^2}\right) * \boldsymbol{\sigma_x}$

☜ ** میانگین هندسی

در داده‌هایی که بر حسب در صد یا نسبت (مثلا متوسط رشد تولید) میباشند از این میانگین استفاده میشود

$$G = \left(\prod x_i^{f_i}\right)^{1/n}$$

مثال ۱۱)

در یک کارگاه تولیدی مدیر تولید تعویض میشود در سال اول تولید مساوی و برابر سال قبل میگردد و در سال دوم تولید دو برابر سال ما قبل میشود و در سال سوم تولید دو برابر سال ما قبل و در سال چهارم تولید چهار برابر سال ما قبل خود میشود . متوسط رشد تولید چند برابر شده است

$$G=\sqrt{1*2*2*4}=\sqrt{16}=4$$

☜ **میانگین همساز (توافقی) (هارمونیک)

اگر داده صفر نباشد و مقیاس داده‌ها بصورت ترکیبی باشد مثلا کیلومتر بر ساعت – آنگاه میانگین هارمونیک کاربرد دارد

$$H = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{x_i}}$$

مثال ۱۲)

اتومبیلی از A به B در سه فاصله مساوی با سرعتهای ۷۵ و ۸۰ و ۹۵ کیلومتر بر ساعت ساعت طی میکند متوسط سرعت اتومبیل چقدر است

Xi	75	80	95
fi	1/3	1/3	1/3

$$H = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{75}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{80}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{95}}=82.51$$

مثال ۱۳)

اتومبیلی از A به B با سرعت 100 کیلومتر بر ساعت و در بازگشت یک چهارم مسیر با سرعت 80 کیلومتر بر ساعت و باقی مسیر را با سرعت 120 کیلومتر بر ساعت طی میکند متوسط سرعت اتومبیل چقدر است

Xi	100	80	120
fi	1	1/4	¾

$$H = \frac{1+\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{100}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{80}+\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{120}}=\frac{2}{0.01+0.003125+0.00625}=\frac{2}{0.019375}=103.2258$$

رگرسیون و همبستگی خطی

n تا زوج مرتب داریم بهترین رابطه خطی بین دو متغیر زوج پیدا کنیم

$y = a + bx$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} \quad , \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \Rightarrow y = a + bx$$

در رگرسیون باید ببینیم متغیر مستقل کدام است مثلاً اگر جدولی از طول قامت پـدران و پسرانشـان داشـته باشـیم متغیر مستقل پدر است زیرا بتبع قامت پدر قامت پسر تغییر میکند

نکته مهم : در رابطه فوق در مخرج باید متغیر مستقل باشد

۱۴) مثال

معادله رگرسیون بر حسب y برای زوجهای مرتب زیر بدست آورید

x = 1,3,4,6,8,9,11,14
y = 1,2,4,4,5,7,8,9
y = a+bx
b = 7/11
a = 5-(7/11)*7=6/11
y = 6/11+(7/11)x

اگر بخواهیم معادله خط رگرسیون x بدست آوریم در تمام مخرج رابطه فـوق (رابطـه b) بجـای x میتوان y قرار داد

x = a+by
a = -0.5
b = 1.5
x = -0.5+1.5y

۱۵) مثال

در جدول زیر بر حسب اینچ طول قد پدر و پسر ملاحظه میکنید . معادله خط رگرسیون را بنویسـید؟ اگـر قامـت پدری ۷۵ شد پیش بینی میکنید فرزند او دارای چه قدی باشد؟

پدر	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
پسر	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

حل :

پدر را X و پسر را Y مینامیم زیرا قد پسر از پدر تبعیت میکند پس پدر متغیر مستقل است

$\sum x_i = 65 + 63 + ... + 71 = 800$ $\sum y_i = 68 + 66 + ... + 70 = 811$

$\sum x_i^2 = 65^2 + 63^2 + ... + 71^2 = 53418$ $\sum x_i y_i = 65 * 68 + 63 * 66 + ... + 71 * 70 = 54107$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} = \frac{54107 - \frac{800 * 811}{12}}{53418 - \frac{(800)^2}{12}} = 0.476 \quad , \bar{x} = 800/12 \quad \bar{y} = 811/12$$

$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad a = (811/12) - (0.476)(800/12) = 35.85 \Rightarrow$

$y = a + bx$

$y = 35.85 + 0.476x$

$y = 35.85 + (0.476 * 75) = 71.55$

۱۶) مثال

در جدول زیر طول قد لوبیا (به سانتیمتر) بر حسب سن (به هفته) ملاحظه میکنید

معادله خط رگرسیون را بنویسید؟

اگر هفته دهم شد پیش بینی میکنید طول لوبیا دارای چه قدی باشد؟

سن	1	2	3	4	5	6	7			10		
طول	5	13	16	23	33	38	40			????		

حل :

سن را X و طول را Y مینامیم زیرا طول از سن تبعیت میکند پس سن متغیر مستقل است

$$\sum x_i = 1+2+.....+7 = 28 \qquad \sum y_i = 5+13+.....+40 = 168$$

$$\sum x_i^2 = 1^2+2^2+.....+7^2 = 140 \qquad \sum x_i y_i = 1*5+2*13+....+7*40 = 844$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} = \frac{844 - \frac{28*168}{7}}{140 - \frac{(28)^2}{7}} = 6.143 \quad , \bar{x} = 28/7 \quad \bar{y} = 168/7$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \qquad a = (168/7) - (6.143)(28/7) = -0.572 \Rightarrow$$

$$y = a + bx$$

$$y = -0.572 + 6.143x$$

$$y = -0.572 + (6.143*10) = 60.85$$

۱) تمرین :

طی آماری طول قامت ۵۰ کودک بشرح ذیل است

70(6)	75(9)	80(5)	85(7)	90(4)	95(7)
100(2)	105(2)	115(6)	120(1)	125(1)	

میانگین و واریانس و انحراف معیار را حساب کنید

شمارش - ترتیب و ترکیب:

شمارش

اصل جمع : اگر عمل A به n طریق و عمل B به m طریق بتوان انجام داد
چنانچه عمل L منوط به انجام عمل A یا عمل B باشد
در اینصورت تعداد طرق انجام عمل L عبارت است از

n+m

اصل ضرب : اگر عمل A به n طریق و عمل B به m طریق بتوان انجام داد
چنانچه عمل L منوط به انجام عمل A و عمل B توام باشد
در اینصورت تعداد طرق انجام عمل L عبارت است از

n*m

۱۷) مثال

از منزل تا محل کار با پنج اتوبوس و سه مینی بوس و دو تاکسی میتوان رفت به چند طریق میتوان به مقصد رسید

5+3+2=10

۱۸) مثال

از منزل تا محل دو ایستگاه است تا ایستگاه اول با پنج اتوبوس و از ایستگاه اول تا محل کار با سه مینی بوس میتوان رفت به چند طریق میتوان به مقصد رسید

5*3=15

۱۹)مثال

از بین ۴ قاضی و ۶ دبیر و ۳ بازرگان میخواهیم کمیته ۲ نفری با مشاغل مختلف تشکیل دهیم به چند طریق میشود

قاضی و دبیر + قاضی و بازرگان + دبیر و بازرگان 4*6+4*3+6*3=54

$$\binom{4}{1}\binom{6}{1}+\binom{4}{1}\binom{3}{1}+\binom{6}{1}\binom{3}{1}$$

۲) تمرین

در یک شهر شرکت مخابرات شماره های تلفن همراه یازده رقمی که رقم سمت چپ آنها با ۰۹۱۱۷۱۱ و ۰۹۱۱۷۱۵و۰۹۱۳۷۱۳ شروع شود میتواند سرویس بدهد - کل تلفنهایی که میتواند واگذار شود چقدر است.

ترتیب

ترتیب n شئ (ترتیب انتخاب n شئ از بین n شئ) = n! (مثلاً با سه رقم متفاوت چند عدد سه رقمی)

تعداد ترتیب k شئ از بین n شئ = $P_k^n=\frac{n!}{(n-k)!}$ (مثلاً با سه رقم متفاوت چند عدد دو رقمی)

ترکیب

در ترکیب ترتیب اهمیت ندارد

تعداد ترکیب k شئ از بین n شئ = $\binom{n}{k}=C_k^n=\frac{n!}{(n-k)!k!}$

(مثلاً انتخاب سه محصول ازبین ۱۰ محصول) $C_k^n=\binom{10}{3}=C_3^{10}=\frac{10!}{(10-3)!3!}=120$

تعداد ترکیب n شئ (ترکیب انتخاب n شئ از بین n شئ) $C_n^n=C_1^1=1$

اگر n شئ داشته باشیم n1 تا از نوع اول و n2 تا از نوع دوم و .... باشد آنگاه تعداد ترتیب

$$\frac{n!}{n_1!n_2!....n_k!}$$

اگر n شیئ داشته باشیم که در یک محیط دایره قرار گرفته باشند تعداد ترتیب

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

اگر k شیئ از بین n شیئ بخواهیم بخواهیم انتخاب کنیم چون ترتیب در این حالت مهم نیست ترکیب گویند

$$\binom{n}{k}=C_k^n=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۲۰)مثال

- n شیئ از بین n شیئ انتخاب کنید

$$C_n^n=\binom{n}{n}=\frac{n!}{(n-n)!n!}=1$$

۲۱)مثال

- به چند طریق میتوان دو شیئ را از بین سه شیئ انتخاب کرد

اگر ترتیب مهم باشد

$$P_k^n=\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{3!}{(3-2)!}$$

اگر ترتیب مهم نباشد

$$C_k^n=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{3!}{2!(3-2)!}=3$$

۲۲) مثال

به چند طریق میتوان سه شیئ را از بین سه شیئ انتخاب کرد

اگر ترتیب مهم باشد

$$P_k^n=\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{3!}{(3-3)!}=6$$

اگر ترتیب مهم نباشد

$$=\frac{3!}{3!(3-3)!}=1\ C_k^n=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۲۳)مثال

چند عدد دو رقمی با ارقام ۹ و ۸ و ۶ و ۲ و ۱ میتوان نوشت

یکان دهگان

۵ ۴ بدون تکرار ارقام = ۲۰=۵*۴

$$P_2^5=\frac{5!}{(5-2)!}=20$$

روش دوم

چون ترتیب مهم است

$$=\frac{5!}{(5-2)!}=4*5=20 \quad P_k^n=\frac{n!}{(n-k)!}$$

۲۴) مثال

چند عدد زوج سه رقمی با ارقام ۸ و ۵و ۶ و ۱ و ۲ بدون تکرار ارقام میتوان نوشت

بدون تکرار

روش اول - تعداد حالاتی که در یک موقعیت میتوان ارقام را بدون تکرار داشت

یکان	دهگان	صدگان
۳	۴	۳

بدون تکرار ۳۶=۳*۴*۳

روش دوم - کل اعداد سه رقمی که با پنج رقم میتوان نوشت

$$P_3^5=\frac{5!}{(5-3)!}=60$$

کل اعداد دو رقمی که با چها رقم میتوان نوشت (یعنی کلیه سه رقمی های دارای سمت راست رقم فرد ۵)

$$P_2^4=\frac{4!}{(4-2)!}=12$$

کل اعداد دو رقمی که با چها رقم میتوان نوشت (یهنی کلیه سه رقمی های دارای سمت راست رقم فرد ۱)

$$P_2^4=\frac{4!}{(4-2)!}=12$$

بنابراین کل اعداد زوج سه رقمی از پنج رقم

60-12-12=36

با تکرار ارقام

تعداد حالاتی که در یک موقعیت میتوان ارقام را با تکرار داشت

یکان	دهگان	صدگان
۳	۵	۵

با تکرار ۷۵=۳*۵*۵

۲۵) مثال

نمرات کلاسی بصورت P و F است بیست نفر نمره P گرفته اند به چند طریق دو نفر میتوان از بین آنها انتخاب کرد که نمره P گرفته باشند

$$C_k^n=\frac{20!}{(20-2)!2!}$$

۲۶) مثال

بیست نفر در یک کلاس نمره های مختلفی گرفته اند دو نفر چگونه میتوان از بین آنها انتخاب کرد

در این حالت ترتیب مهم است

$$P_2^{20}=\frac{20!}{(20-2)!}$$

۲۷) مثال

تعداد ۱۰ نفر دور میز دایره ای به چند طریق امکان نشستن دارند

$(n-1)!=(10-1)!$

۲۸) مثال

۵ لامپ سبز و ۲ لامپ زرد و ۳ لامپ قرمز داریم به چند طریق میتوان ده عدد سر پیچ مشخص را روی لامپها نصب کرد

اول سبز دوم زرد سوم قرمز

$\binom{10}{5}\binom{10-5}{2}\binom{10-5-2}{3}$

۲۹) مثال

۴ کتاب ریاضی و ۳ کتاب شیمی و ۲ کتاب تاریخ و یک کتاب زبان (همه متفاوت) داریم این ده عدد کتاب را میخواهیم در قفسه مرتب کنیم بطوریکه کتابهای ریاضی کنارهم و کتابهای تاریخ کنارهم و ..... باشد

کل حالاتی که ۴ کتاب ریاضی میتواند کنار هم باشد = !۴ و کل حالاتی که ۲ کتاب تاریخ میتواند کنار هم باشد = !۲ و ....

و چهار گروه ریاضی و شیمی و تاریخ و زبان میتواند کنار هم قرار گیرد !۴

بنابراین کل حالات

$4! * (4 ! * 3! * 2! * 1!)$

۳۰) مثال

شخصی به یک اتاق با شش صندلی که در یک ردیف هستند وارد میشود پنج نفر از دوستانش متعاقبا وارد میشوند به چند طریق این پنج نفر کنار آن شخص قرار میگیرند

خود شخص به شش حالت روی صندلی ها قرار میگیرد پنج نفر هم بصورت $5!$ میتوانند کنار او بنشینند پس

$6*5!=6!$

۳۱) مثال

۴ کتاب ریاضی و ۳ کتاب شیمی (مشخص) داریم به چند طریق میتوان ۳ کتاب را داشت که ۲ تا ریاضی و یکی شیمی در آن باشد

$\binom{3}{1}\binom{4}{2}$

۳۲) مثال

به چند طریق میتوان یک کمیته ۳ نفری شامل ۲ پزشک عمومی و یک چشم پزشک از بین ۴ پزشک عمومی و ۳ چشم پزشک داشت

$\binom{3}{1}\binom{4}{2}$

۳۳) مثال

به چند طریق میتوان از بین ۵ خانم و ۷ آقا کمیته ای شامل ۲ خانم و ۳ آقا داشت

$\binom{5}{2}\binom{7}{3}$

۳۴) مثال

به چند طریق میتوان از بین ۵ خانم و ۷ آقا کمیته ای شامل ۲ خانم و ۳ آقا داشت ولی چون ۲ آاقای مشخص با هم اختلاف دارند نباید باهم باشند

راه اول – هفت آقا را به ۵ آقای بدون مشکل و دو آقای مشکل دار تفکیک میکنیم که دو حالت مطلوب را با هم جمع میکنیم

$\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{0}+\binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{2}{1}$

راه دوم) تعدادحالات کمیته سه نفره آقایان که آن دو نفر نباشند $A=\binom{2}{0}\binom{5}{3}$

تعدادحالات کمیته سه نفره آقایان که یکی از آن دو نفر باشد $B=\binom{2}{1}\binom{5}{3}$

تعداد حالات کمیته دو نفره از بین ۵ خانم $C=\binom{5}{2}$

تعداد کل حالت مورد نظر $(A + B) * C =$

مثال(۳۵

معادله $x1+x2+x3+ \quad +xk=n$ الف –چند جواب صحیح مثبت دارد ب - چند جواب مثبت و صفر دارد

حالت اول - ابتدا بصورت ساده زیر در نظر میگیریم

x1+x2+x3=8

مثل این است که بگوییم دو چوب خط چگونه بین ۸ گو میتوان قرار داد

$000 \mid 000 \mid 00 \quad \Rightarrow$

کل تعداد حالات

$\binom{n-1}{k-1}$ =تعداد جواب صحیح= $\binom{8-1}{3-1} = \frac{7!}{(7-2)!2!} = 21$

برای وقتی جواب صفر هم مد نظر باشد به دو طرف معادله اصلی به تعداد k تا عدد یک اضافه میکنیم

(x1+1)+(x2+1)+ .....+ (xk+1)=n+1+1.....1

y1+ y2 + ... yk = n+k

حال مثل حالت اول حل میشود

$\binom{n+k-1}{k-1}$ =تعداد جواب صحیح و صفر $\binom{8+3-1}{3-1} = \frac{10!}{(10-2)!2!} = 45$

مثال(۳۶

چهار پروژه داریم و میتوانیم روی هر کدام مضارب صحیح از هزار تومان خرج کنیم

الف - تعداد حالات که بخواهیم ۲۰ هزار تومان را مصرف کنیم (هیچ پروژه ای بدون هزینه نیست)

ب - تعداد حالات که مقداری از ۲۰ هزار تومان را خرج کنیم

حالت الف -

x1+x2+x3+x4= 20

$\binom{20-1}{4-1}$

حالت ب - مضارب صحیح و صفر مد نظر است (پروژه با هزینه صفر هم قبول است)

x1+x2+x3+x4 <= 20

$\binom{20+4-1}{4-1}$

احتمالات

تعداد کل حالات ممکن

تعداد کل حالات مطلوب

$$\text{احتمال} = \frac{\text{کل حالات مطلوب}}{\text{کل حالات ممکن}}$$

احتمال

* همیشه احتمال بین صفر و یک است *

مثال(۳۷

سکه ای دوبار پرتاب میکنیم احتمال حداقل یک شیر آمدن چقدر است

فضای کلی S= { HH , HT , TH , TT }

احتمال هر حالت ¼ ¼ ¼ ¼

فضای مورد نظر A= { HH,HT,TH }

احتمال P(A)=3/4

مثال(۳۸

تاسی ناریب که احتمال عدد زوج آن دو برابر فرد است داریم با یک بار پرتاب احتمال اینکه عدد کمتر از ۴ بیاید چقدر است

S = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }
w 2w w 2w w 2w
w+2w+w+2w+w+2w=1
9w=1 w = 1/9
S = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }
1/9 2/9 1/9 2/9 1/9 2/9
A = { 1 , 2 , 3 }
1/9 2/9 1/9
P(A) = 1/9+2/9+1/9=4/9

مثال(۳۹

در یک ظرف ۶ توپ سفید و ۵ توپ سیاه داریم دو توپ را بدون جایگزینی بیرون میاوریم

الف)احتمال اینکه یکی سفید و یکی سیاه باشد چقدر است ؟.

ب) احتمال اولی سفید دومی سیاه

حل الف) بدون جایگزینی و بدون ترتیب

روش اول

تعداد کل حالات ممکن

110 = 10 * 11 = تعداد کل حالات دو توپ 10 =حالت توپ دوم 11 = حالت توپ اول

تعداد کل حالات مطلوب

30 = 6 * 5 = دومی سفید اولی سیاه

30 = 5 * 6 = دومی سیاه اولی سفید

30+ 30 = 60

P (A) = 60 / 110 احتمال مورد نظر

روش دوم

$$\frac{\text{مطلوب}}{\text{ممکن}} = \frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{60}{110}$$

حل ب) بدون جایگزینی و با ترتیب

روش اول

P(wb)=P(w1).P(w1b2)=6/11*5/10=30/110

روش دوم

$$\frac{\binom{5}{0}\binom{6}{1}}{\binom{11}{1}} \cdot \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{0}}{\binom{10}{1}} = \frac{30}{110}$$

*** ترکیب همیشه بدون جایگزینی است ***

۴۰) مثال

بیست نفر داریم احتمال اینکه حداقل دو نفر روز تولد یکسان داشته باشند چقدر است

تعداد کل فضا = 365 * 365... * 365 = (365) ^ 20

احتمال تولد روزهای مختلف = 365 * 364 * 363... * 346

P(A)= (365 * 364 * 363 ....* 346) / (365^20)= 0.5886

P(B) = 1-P(A)=0.4114

خواص احتمال

اگر S کل فضا و E فضای خواسته شده باشد و P احتمال باشد

$0 \le P(E) \le 1$

$P(S) = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} P(E) = 1$$

اگر دو پیش آمد مستقل از هم بودند (مستقل از هم یعنی $A \cap B = \{\ \} = \emptyset$)

احتمال رخداد اولی یا دومی(∪ = **یا**):

$P(E \cup F) =$

احتمال هر دو رخداد با هم (∩ = **و**):

$$P(E \cap F) = P(E) * P(F)$$

اگر چندین پیش آمد مستقل از هم باشد آنگاه احتمال چند پیش آمد

$P(\cup E_i) = \sum$

۴۱) مثال

تاسی را پرتاب میکنیم احتمال اینکه عدد فرد ;کمتر از۴ یا عدد زوج بیاید چقدر است

اگرS کل حالات و E عدد زوج و F عدد فرد کمتر از ۴ باشد

S={1,2,3,4,5,6,7} E={2,4,6} F={1,3}

$P(C) = \frac{\text{تعداد حالات خواسته شده}}{\text{تعداد کل حالات}} = \frac{C}{S}$

$P(E) = \frac{3}{6} \qquad P(E) = \frac{2}{6}$

این دو پیش آمد از هم مستقل هستند پس

$P(E \cup F) = P($

۴۲) مثال

تاسی را پرتاب میکنیم احتمال اینکه عدد زوج باشد یا کمتر از ۵ باشد چقدر است

اگر S کل حالات و E عدد زوج و F عدد کمتر از ۵ باشد

S={1,2,3,4,5,6,7} E={2,4,6} F={1,2,3,4} $E \cap F = \{2,4\}$

$P(C) = \frac{\text{سته شده}}{\text{لات}}$

$P(E) = \frac{3}{6} \qquad P(F) = \frac{4}{6} \qquad P(E \cap F) = \frac{2}{6}$

این دو پیش آمد از هم مستقل نیستند (بهم وابسته اند) پس

$P(E \cup F) = P($

۴۳) مثال

ثابت کنید برای سه پیش آمد که مستقل از هم نباشند و بخواهیم احتمال سه پیش آمد با هم را حساب کنیم

$P(A \cup B \cup C) = P(A)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A$

۴۴) مثال

احتمال پنچر شدن لاستیک سمت راست یک خودرو 0.24 احتمال پنچر شدن است و احتمال پنچر شدن لاستیک سمت چپ 0.20 است و احتمال اینکه هر دو لاستیک باهم پنچر شود 0.08 میباشد احتمال اینکه بنزین در باک تمام شود 0.02 است

احتمال پنچر شدن لاستیک راست یا چپ چقدر است.

احتمال اینکه اصلا پنچر نشود چقدر است

احتمال اینکه لاستیک چپ پنچر یا بنزین تمام شود چقدر است

احتمال اینکه لاستیک چپ پنچر و بنزین تمام شود چقدر است

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$=0.24+0.20-0.08=0.36

احتمال اینکه چپ یا راست پنچر شود 0.36

احتمال اینکه پنچر نشود عبارتست از

$P(K \cup L) = P(k) + P(L) - P(K \cap L)$=(1-0.24)+(1-0.20)-(1-0.08)=0.64

احتمال چپ پنچر یا بنزین تمام شود

$P(F \cup B) = P(E) + P(F) = 0.20 + 0.02 = 0.22$

احتمال چپ پنچر و بنزین تمام شود

$P(F \cap B) = P(E) * P(F) = 0.20 * 0.02 = 0.0040$

احتمال شرطی

قبلا گفتیم اگر کل تعداد حالات S و تعداد حالات خواسته شده E باشد آنگاه

$P(E) = \frac{E}{S}$

اگر F یک پیش آمد باشد و اگر E یک پیش آمد باشد حال احتمال E به شرط رخداد F عبارتست از

$P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}$; P(F)>0

۴۵) مثال

تاس همگنی که روی آن اعداد ۱ تا ۶ نوشته شده پرتاب میکنیم ملاحظه شد زوج آمد احتمال اینکه عدد ظاهر شده بر 1.5 بخش پذیر باشد چقدر است

کل حالات S – ظهور زوج A – بخش پذیری ۱.۵ B نام میگذاریم

S={1,2,3,4,5,6} A={2,4,6} B={3,6} $P(A\cap B) = \{6\}$

$P(B|A) = \frac{P(A}{P}$

میشد از طریق قضیه بیز نیز حل کنیم

۴۶) مثال

در جعبه آبی رنگی شش گوی با شماره گذاری ۱ تا ۶ داریم و در جعبه قرمز رنگی نیز ۴ گوی با شماره ۷ تا ۱۰ داریم یکی از دو جعبه بتصادف انتخاب میکنیم و یک گو بیرون میاوریم اگر جعبه انتخابی آبی باشد احتمال اینکه عدد روی گوی بر ۳ بخش پذیر باشد چقدر است

کل حالات S – ظهور مهره های آبی A – بخش پذیری ۳ را B نام میگذاریم

S={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 } A={1,2,3,4,5,6} B={3,6,9} $P(A\cap B) = \{3,6\}$

$P(B|A) = \frac{P(A}{P}$

قبلا نوشتم که

$$P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} \quad ; \quad P(F)>0$$

از فرمول فوق میتوان گفت که احتمال اینکه پیش آمد E و پیش آمد F رخ دهد (∩ = **و**)عبارتست از

$$P(E\cap F) = P(F).P(E|F) = P(E).P(F|E)$$

اگر دو پش آمد E و F مستقل باشند

$$P(F|E) = P(F)$$

بنابراین به این فرمول مهم برای احتمال توام دو پیش آمد مستقل میرسیم

$$P(E\cap F) = P(F) * P(E)$$

۴۷) مثال

جعبه ای ۲۱ لامپ دارد که ۴ لامپ آنها سوخته است از این جعبه یک به یک دو لامپ **بدون** عمل جای گذاری انتخاب میکنیم احتمال اینکه هر دو لامپ سوخته باشد چقدر است

اگر B1 پیشامد لامپ سوخته در برداشت اول و B2 پیشامد لامپ سوخته دوم در دومین برداشت باشد

اگر بخواهیم لامپ اول و لامپ دوم سوخته باشد چون لامپ اول پس از برداشتن به ظرف باز نگشته است لامپ دوم وابسته به لامپ اول است آنگاه

$$P(B1\cap B2) = P(B1) * P(B2|B1) = \frac{4}{21} * \frac{3}{20} = \frac{1}{35}$$

----

۴۸) مثال

جعبه ای ۲۱ لامپ دارد که ۴ لامپ آنها سوخته است از این جعبه یک به یک دو لامپ **با** عمل جای گذاری انتخاب میکنیم احتمال اینکه هر دو لامپ سوخته باشد چقدر است

اگر B1 پیشامد لامپ سوخته در برداشت اول و B2 پیشامد لامپ سوخته دوم در دومین برداشت باشد

اگر بخواهیم لامپ اول و لامپ دوم سوخته باشد چون لامپ اول به ظرف بازگشته است پس لامپ دوم ارتباطی با لامپ اول ندارد آنگاه

$$P(B1\cap B2) = P(B1) * P(B2) = \frac{4}{21} * \frac{4}{21}$$

٤٩) مثال

مطابق جدول ۹۰۰ نفر داریم یک فرد انتخاب میکنیم متوجه میشویم که استخدامی است احتمال مرد بـودن چقـدر است

	مستخدم	بیکار	
مرد	460	40	500
زن	140	260	400
	600	300	900

$$P(M \downarrow E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{460/900}{600/900} = 460/600$$

۵۰) مثال

در جعبه ای ۲۰ فیوز داریم و میدانیم که ۵ عدد از آنها خراب است دو فیوز انتخاب میکنیم احتمال هـر دو خـراب چقدر است؟

روش اول

$$P(A \cap B) = P(A) . P(B) = (5/20) . (4/19)$$

روش دوم

$$P(Z) = \frac{\binom{15}{0}\binom{5}{2}}{\binom{20}{2}}$$

قضیه بیز

اگر بتعداد E_i پیش آمد مستقل داشته باشیم اگر A یک پیش آمد دلخواه باشد

$$P(E_r \mid A) = \frac{P(E_r)P(A|E_r)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A|E_i)}$$

در فرمول فوق $P(Er|A)$ همان خواست مسئله است و $P(Er)$ همـان احتمـال ذکـر شـده در مسـئله اسـت و $P(A|Er)$ طبق محاسبه شرح مسئله است

مهم : در حل مسائل A همان وضعیتی است که در مسئله رخ داده است و Er همان خواسته مسئله است

۵۱) مثال

۷۰ در صد دانشجویان مرتب و ۳۰ در صد نا مرتب هستند دانشجوی مرتب ۹۰٪ احتمال موفقیت و دانشـجوی نـا مرتب ۴۰ در صد احتمال موفقیت دارند یک دانشجو بتصادف انتخاب میکنیم ملاحظه شد قبـول شـده احتمـال مرتب بودن او جقدر است .

A=موفق

B1=مرتب

B2=نا مرتب

$$P(B1 \downarrow A) = \frac{P(B1).P(A \downarrow B1)}{P(B1).P(A \downarrow B1) + P(B2).P(A \downarrow B2)}$$

$$\frac{0.7 * 0.9}{0.7 * 0.9 + 0.3 * 0.4} = \frac{63}{75}$$

۵۲) مثال

شخصی سکه‌ای در دست دارد که ۷۰٪ حدس میزنیم سکه اش دو شیری باشـد سـکه را پرتـاب میکنـد ملاحظـه میشود شیرآمده است احتمال دو شیری بودن سکه چقدر است؟

A=شیر P(A)= 50%

B1=یک شیری بودن P(B1)=30%

B2=دو شیری بودن P(B2)=70%

$$P(B2 \downarrow A) = \frac{P(B2).P(A \downarrow B2)}{P(B1).P(A \downarrow B1) + P(B2).P(A \downarrow B2)}$$

$$\frac{0.7 * 1}{0.3 * 0.5 + 0.7 * 1} = \frac{0.7}{0.85} = 0.81 = 81\%$$

۵۳) مثال

آزمایش تشخیص سرطان در مورد ۹۵٪ بیماران سرطانی جواب مثبت میدهد. آزمایش تشـخیص سـرطان در مـورد ۱۰٪ بیماران غیر سرطانی جواب مثبت میدهد . از بـین بیمـاران یـک بیمارسـتان کـه ۳٪ آنهـا سـرطانی هسـتند بیماری بتصادف انتخاب میکنیم . آزمایش تشـخیص سـرطان در مـورد ایـن بیمـار سـرطانی جـواب مثبـت میدهـد احتمال اینکه واقعاً سرطانی باشد چقدر است.

A=پاسخ مثبت

B1=سرطانی باشد P(B1)=3%

B2= سرطانی نباشد P(B2)=97%

$$P(B1 \downarrow A) = \frac{P(B1).P(A \downarrow B1)}{P(B1).P(A \downarrow B1) + P(B2).P(A \downarrow B2)}$$

$$\frac{0.03 * 0.95}{0.03 * 0.95 + 0.97 * 0.10} =$$

تابع توزیع احتمال *F(x)* - تابع احتمال(چگالی) *f(x)*

متغیر تصادفی ***Random Variable***

تابعی از فضای نمونه – زیر مجموعه از اعداد حقیقی معمولا با حروف بزرگ مثل X نمایش میدهند
برد تابع را تکیه گاه متغیر تصادفی میگویند و با Sx نمایش میدهند

تابع توزیع ***Distribution Function***

اگر X متغیر تصادفی باشد آنگاه تابع توزیع X بصورت $F_X(x)$ نشان میدهند دامنه تابع R میباشد و بصورت زیر تعریف میشود

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

خواص تابع توزیع

١- $0 \le F_X(x) \le 1$

٢- $$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = F_x(-\infty) = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = F_x(+\infty) = 1$$

٣- حداقل از راست در هر نقطه پیوسته است

۴- غیر نزولی است یعنی

$$x_1 < x_2 \to F_X(x_1) < F_X(x_2)$$

نکته – هر تابع حقیقی که دارای چهار خاصیت فوق باشد تابع توزیع است

نکته –

$$\lim_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a^+)$$

تابع احتمال (چگالی):

١- گسسته : اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد آنگاه تابع چگالی احتمال که با $f_X(x)$ نشان داده میشود بصورت زیر تعریف میشود

$$f_X(x) = P(X = x)$$

که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی است و دارای دو خاصیت زیر است

$$f_X(x) \ge 0$$
$$\sum_x f_X(x) = 1$$

٢- پیوسته : میزان فشردگی احتمال روی خط اعداد حقیقی تشکیل تابعی حقیقی میدهد بنام چگالی احتمال $f_X(x)$ که دارای دو خاصیت زیر است

$$f_X(x) \ge 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

رابطه تابع توزیع با تابع چگالی احتمال

۱- تبدیل در گسسته (با داشتن تابع چگالی احتمال تابع توزیع بدست آورید و بالعکس)

$$F_X(x) = \sum_{t \le x} f_X(t)$$

$$f_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$$

۲- تبدیل در پیوسته (با داشتن تابع چگالی احتمال تابع توزیع بدست آورید و بالعکس)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

۵۴) مثال

سکه ای سه بار پرتاب میکنیم تعداد شیرها را بررسی نمایید

S={HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT}

تعداد شیر 3 2 2 1 2 1 1 0

احتمال هر مورد 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8

3/8=احتمال دو شیر 1/8= احتمال سه شیر 3/8= احتمال یک شیر 1/8= احتمال اصلا شیر نیاد

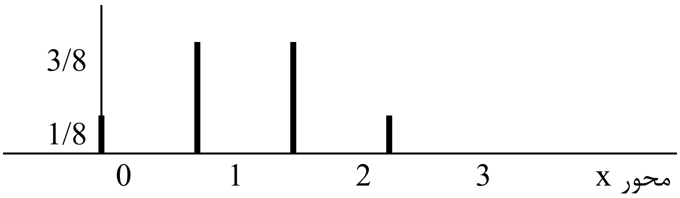
X=تعداد شیر	0	1	2	3
تابع احتمال P(X=x) = f(x) چگالی احتمال	1/8	3/8	3/8	1/8

Rx= { 0 , 1 , 2 , 3) برد x

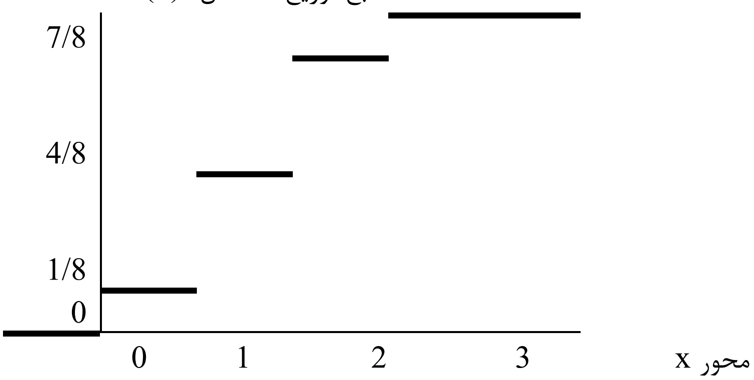
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \le x < 1 \\ 4/8 & 1 \le x < 2 \\ 7/8 & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x \end{cases}$$

تابع توزیع احتمال

f(x)=تابع چگالی احتمال



8/8=1 F(x)=تابع توزیع احتمال



مثال۵۵)

شرکتی ۸ کامپیوتر دارد که ۳ عدد آن خراب است ۲ کامپیوتر خرید میکنیم احتمال خرابی چقدر است

احتمال هر دو خراب $\dfrac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}}$

احتمال یکی خراب $\dfrac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}}$

احتمال هر دو سالم $\dfrac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}$

x= کامپیوتر خراب

R(x)= { 0,1,2 }

f(x)= تابع چگالی احتمال f (0)= 10/28 f(1)=15/28 f(2)=3/28

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 10/28 & x<1\\ 25/28 & x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$$ تابع توزیع احتمال

مثال۵۶)

آیا $f(x)=\frac{x-2}{5}$ بازاء x=1,2,3,4,5 یک تابع احتمال است

حل همیشه باید دو شرط برقرار باشد تا تابع احتمال (چگالی احتمال) باشد

الف) $\sum f(x)=1$

ب) هر $0 \le f(x) \le 1$ باید باشد

$\sum f(x)=\frac{x-2}{5}=\frac{1-2}{5}+\frac{2-2}{5}+\frac{3-2}{5}+\frac{4-2}{5}+\frac{5-2}{5}$=-0.2+0+0.2+0.4+0.6=1

چون جواب $\sum f(x)=1$ گردید و $f(x)$ بازاء مقادیر مختلف x بین یک و صفر میباشد، پس تابع چگالی احتمال است

مثال۵۷)

بازاء چه مقداری از k تابع $f(x)=\frac{x^2}{k+5}$ بازا x=0,1,2,3,4 یک تابع احتمال است

حل همیشه باید دو شرط برقرار باشد تا تابع احتمال (چگالی) باشد

الف) $\sum f(x)=1$

ب) هر $0 \le f(x) \le 1$ باید باشد

$$\sum f(x)=\frac{x^2}{k+5}=\frac{0^2}{k+5}+\frac{1^2}{k+5}+\frac{2^2}{k+5}+\frac{3^2}{k+5}+\frac{4^2}{k+5}=\frac{30}{k+5}$$

$$\sum f(x)=1 \rightarrow \frac{30}{k+5}=1 \rightarrow k+5=30 \rightarrow k=25$$

همچنین بازاء k=25 و بازاء مقادیر مختلف x=0,1,2,3,4 آنگاه $0 \le f(x) \le 1$ میشود

پس جواب مسئله k=25 است

۵۸) مثال

الف) در تابع زیر مقدار c را بدست آورید

ب)تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ را نوشته و رسم کنید

ج) احتمال $p(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2})$ را با تابع چگالی و همچنین با تابع توزیع بدست آوردید

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ c - x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & other \end{cases}$$

$$\int f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (c-x)\,dx = \left|\frac{1}{2}x^2\right|_0^1 + \left|cx - \frac{1}{2}x^2\right|_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(c*2 - \frac{1}{2}*4 - c*1 + \frac{1}{2}*1\right)$$

$$\int f(x)dx = c - 1$$

که باید برابر یک شود

$$c - 1 = 1 \quad \to \quad c = 2$$

بنابراین تابع احتمال (چگالی احتمال)

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & other \end{cases}$$

برای تابع توزیع احتمال

$$-\infty \leq x < 0 \;\to\; F(x) = \int_{-\infty}^0 f(x)dx = 0$$

$$0 \leq x < 1 \;\to F(x) = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^x f(x)dx = 0 + \int_0^x xdx = \frac{1}{2}x^2$$

$$1 \leq x < 2 \;\to F(x) = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^x f(x)dx = 0 + \int_0^1 xdx + \int_1^x (2-x)dx$$

$$= 0 + \left|\frac{1}{2}x^2\right|_0^1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \left|(2x - \frac{1}{2}x^2)\right|_0^1 = \frac{1}{2} + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \left(2 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$$

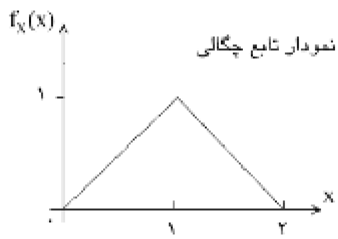
$$2 \leq x < \infty \;\to F(x)$$

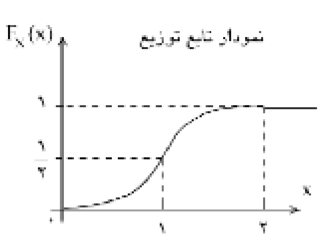
$$= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^x f(x)dx = 0 + \int_0^1 xdx$$

$$+ \int_1^2 (2-x)dx + \int_2^x odx =$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + 4 - \frac{4}{2} - 2 + \frac{1}{2} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$





با تابع احتمال مقدار $p(\frac{1}{2} \leq \mathrm{x} \leq \frac{3}{2})$

$p\left(\frac{1}{2} \leq \mathrm{x} \leq \frac{3}{2}\right) = \int_{1/2}^{3/2} \mathrm{f(x)dx} = \int_{1/2}^{1} \mathrm{xdx} + \int_{1}^{3/2} (2 - \mathrm{x})\mathrm{dx} = \left|\frac{1}{2}\mathrm{x}^2\right|_{1/2}^{1} + \left|(2\mathrm{x} -\right.$
12x2)13/2=12−18+(62−98−2+12)=34

با تابع توزیع احتمال مقدار $p(\frac{1}{2} \leq \mathrm{x} \leq \frac{3}{2})$

$$p\left(\frac{1}{2} \leq \mathrm{x} \leq \frac{3}{2}\right) = \mathrm{F}\left(\frac{3}{2}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\right) = \left|-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1\right|_{x=\frac{3}{2}} - \left|\frac{1}{2}x^2\right|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

☜ امید ریاضی

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته یا پیوسته باشد آنگاه امید ریاضی X که با علامت E(X) نشان داده میشود بصورت زیر تعریف میشود

$E(X) = \sum X f_X(x)$ گسسته

$E(X) = \int x f_X(x) dx$ پیوسته

خواص امید ریاضی

$aX + b$

در خصوص واریانس

$Var(X) = E[($

$Var(aX + b) =$

مثال۵۹)

صاحب دستگاهی هستیم که دارای نمایش سه سکه است

هر بار فشردن دسته کل نمایش را تغییر میدهد

اگر بازیگری دکمه فشار دهد بازاء هر تعداد شیر باید ۱۰۰ ریال بعنوان جایزه در یافت کند

صاحب دستگاه چند ریال بگیرد که نه سود کند و نه ضرر

S={HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT}

300 200 200 100 200 100 100 0 ریال پرداختی بازاء تعداد شیر

1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 احتمال هر مورد

(احتمال دو شیر =3/8) (احتمال سه شیر =1/8) (احتمال یک شیر =3/8) (احتمال اصلا شیر نیاد =1/8)

X=x	0	1	2	3	سایرین
$f_X(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8	0

E(x)=(0*100*1/8) +(1*100*3/8) +(2*100*3/8) +(3*100*1/8) =150

پس اگر صاحب دستگاه بخواهد سود کند باید برای هر بار بازی بیش از ۱۵۰ ریال دریافت کند

که در حقیقت نام دیگرش میانگین (متوسط) است

مثال۶۰)

یک شرکت تولید برق در مقابل آتش سوزی به میزان خسارت کلی یک میلیارد تومان بیمه میشود

مدیر عامل از تجربیات خود میداند که :

احتمال آتش سوزی کلی یک میلیونیم است احتمال آتش سوزی ۵۰٪ یک صدهزارم است

احتمال آتش سوزی ۲۵٪ یک ده هزارم است

حق بیمه سالیانه چقدر باشد تا در سال یک میلیون تومان سود کنیم

1-0.000001-0.00001-0.0001=0.999889

X=x	-1000	-500	-250	+a	میلیون تومان
$f_X(x)$	0.000001	0.00001	0.0001	0.999889	0

$E(X) = \sum_x x f_x(x) = 1$ میلیون تومان

1= (-1000*0.000001)+ (-500*0.00001)+ (-250*0.0001)+ (a*0.999889)

a=1.031114

یعنی اگر در سال یک میلیون سی هزارتومان دریافت کنیم سالی یک میلیون تومان سود میکنیم

☜ توزیع‌های مهم

آزمایش برنولی

آزمایشی که دارای دو نتیجه باشد (موفقیت S و شکست F) احتمال موفقیت را P و احتمال شکست 1-P میگردد.

توزیع دوجمله‌ای

اگر آزمایش برنولی را n بار بطور مستقل تکرار میکنیم و تعداد پیروزی‌ها را X بنامیم
برد تابع (تکیه گاه متغیر تصادفی)
متغیر تصادفی X دارای توزیع دوجمله ای بصورت زیر مینویسند

$$X \sim B(n, p)$$

تابع چگالی باین صورت است

$$f_x(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & \text{سایرین} \end{cases}$$

توزیع پواسن

اگر یک آزمایش برنولی مستقلاً تکرار کنیم و تعداد پیروزیها در یک فاصله زمانی مشخص X بنامیم آنگاه X دارای توزیع پواسن با پارامتر لاندا است که لاندا متوسط پیروزها است

$$X \sim p(\lambda)$$

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & \text{سایرین} \end{cases}$$

توزیع نرمال

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & -\infty < x < +\infty \;,\; \mu = \text{میانگین} \quad \text{واریانس} \;\; \sigma > 0 \\ 0 & \text{سایرین} \end{cases}$$

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه متغیر تصادفی $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است $Z \sim N(0,1)$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$
$$Z \sim N(0,1)$$

و احتمال آن چنین خواهد بود

$P(x < b)$

$$p(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}) = p(z < \frac{b-\mu}{\sigma}) \Rightarrow$$

حالا از روی جدول نرمال استاندارد احتمال حاصل میشود

طریقه استفاده از جدول نرمال

در اولین ستون سمت چپ مقدار عدد مربوط به Z که هم مقادیر مثبت و هم منفی دارد و در اولین سطر رقم صدگان بصورت مثبت و دنباله Z است که با هم جمع جبری میشود

در داخل جدول از سمت چپ بالا احتمال صفر است و در سمت راست پایین عدد احتمال یک است

Z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0007
-3.2	0.0007	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009	0.0009
-3.1	0.0010	0.0010	0.0010	0.0011	0.0011	0.0011	0.0012	0.0012	0.0013	0.0013
-3	0.0013	0.0014	0.0014	0.0015	0.0015	0.0016	0.0016	0.0017	0.0018	0.0018
-2.9	0.0019	0.0019	0.0020	0.0021	0.0021	0.0022	0.0023	0.0023	0.0024	0.0025
-2.8	0.0026	0.0026	0.0027	0.0028	0.0029	0.0030	0.0031	0.0032	0.0033	0.0034
-2.7	0.0035	0.0036	0.0037	0.0038	0.0039	0.0040	0.0041	0.0043	0.0044	0.0045
-2.6	0.0047	0.0048	0.0049	0.0051	0.0052	0.0054	0.0055	0.0057	0.0059	0.0060
-2.5	0.0062	0.0064	0.0066	0.0068	0.0069	0.0071	0.0073	0.0075	0.0078	0.0080
-2.4	0.0082	0.0084	0.0087	0.0089	0.0091	0.0094	0.0096	0.0099	0.0102	0.0104
-2.3	0.0107	0.0110	0.0113	0.0116	0.0119	0.0122	0.0125	0.0129	0.0132	0.0136
-2.2	0.0139	0.0143	0.0146	0.0150	0.0154	0.0158	0.0162	0.0166	0.0170	0.0174
-2.1	0.0179	0.0183	0.0188	0.0192	0.0197	0.0202	0.0207	0.0212	0.0217	0.0222
-2	0.0228	0.0233	0.0239	0.0244	0.0250	0.0256	0.0262	0.0268	0.0274	0.0281
-1.9	0.0287	0.0294	0.0301	0.0307	0.0314	0.0322	0.0329	0.0336	0.0344	0.0351
-1.8	0.0359	0.0367	0.0375	0.0384	0.0392	0.0401	0.0409	0.0418	0.0427	0.0436
-1.7	0.0446	0.0455	0.0465	0.0475	0.0485	0.0495	0.0505	0.0516	0.0526	0.0537
-1.6	0.0548	0.0559	0.0571	0.0582	0.0594	0.0606	0.0618	0.0630	0.0643	0.0655
-1.5	0.0668	0.0681	0.0694	0.0708	0.0721	0.0735	0.0749	0.0764	0.0778	0.0793
-1.4	0.0808	0.0823	0.0838	0.0853	0.0869	0.0885	0.0901	0.0918	0.0934	0.0951
-1.3	0.0968	0.0985	0.1003	0.1020	0.1038	0.1056	0.1075	0.1093	0.1112	0.1131
-1.2	0.1151	0.1170	0.1190	0.1210	0.1230	0.1251	0.1271	0.1292	0.1314	0.1335
-1.1	0.1357	0.1379	0.1401	0.1423	0.1446	0.1469	0.1492	0.1515	0.1539	0.1562
-1	0.1587	0.1611	0.1635	0.1660	0.1685	0.1711	0.1736	0.1762	0.1788	0.1814
-0.9	0.1841	0.1867	0.1894	0.1922	0.1949	0.1977	0.2005	0.2033	0.2061	0.2090
-0.8	0.2119	0.2148	0.2177	0.2206	0.2236	0.2266	0.2296	0.2327	0.2358	0.2389
-0.7	0.2420	0.2451	0.2483	0.2514	0.2546	0.2578	0.2611	0.2643	0.2676	0.2709
-0.6	0.2743	0.2776	0.2810	0.2843	0.2877	0.2912	0.2946	0.2981	0.3015	0.3050
-0.5	0.3085	0.3121	0.3156	0.3192	0.3228	0.3264	0.3300	0.3336	0.3372	0.3409
-0.4	0.3446	0.3483	0.3520	0.3557	0.3594	0.3632	0.3669	0.3707	0.3745	0.3783
-0.3	0.3821	0.3859	0.3897	0.3936	0.3974	0.4013	0.4052	0.4090	0.4129	0.4168
-0.2	0.4207	0.4247	0.4286	0.4325	0.4364	0.4404	0.4443	0.4483	0.4522	0.4562
-0.1	0.4602	0.4641	0.4681	0.4721	0.4761	0.4801	0.4840	0.4880	0.4920	0.4960
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$$Z_{0.05} = a$$

$$p(z > a) = 0.05$$

$$1 - p(z \leq a) = 0.($$

$$p(z \leq a) = 0.95$$

$$z_{\alpha} = -z_{1-\alpha}$$

جدول توزیع نرمال

جدول توزیع دوجمله ای

n	r	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	p
5	0	0.5905	0.3277	0.1681	0.0778	0.0313	0.0102	0.0024	0.0003	0.0000	
5	1	0.9185	0.7373	0.5282	0.3370	0.1875	0.0870	0.0308	0.0067	0.0005	
5	2	0.9914	0.9421	0.8369	0.6826	0.5000	0.3174	0.1631	0.0579	0.0086	
5	3	0.9995	0.9933	0.9692	0.9130	0.8125	0.6630	0.4718	0.2627	0.0815	
5	4	1.0000	0.9997	0.9976	0.9898	0.9688	0.9222	0.8319	0.6723	0.4095	
5	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
10	0	0.3487	0.1074	0.0282	0.0060	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	
10	1	0.7361	0.3758	0.1493	0.0464	0.0107	0.0017	0.0001	0.0000	0.0000	
10	2	0.9298	0.6778	0.3828	0.1673	0.0547	0.0123	0.0016	0.0001	0.0000	
10	3	0.9872	0.8791	0.6496	0.3823	0.1719	0.0548	0.0106	0.0009	0.0000	
10	4	0.9984	0.9672	0.8497	0.6331	0.3770	0.1662	0.0473	0.0064	0.0001	
10	5	0.9999	0.9936	0.9527	0.8338	0.6230	0.3669	0.1503	0.0328	0.0016	
10	6	1.0000	0.9991	0.9894	0.9452	0.8281	0.6177	0.3504	0.1209	0.0128	
10	7	1.0000	0.9999	0.9984	0.9877	0.9453	0.8327	0.6172	0.3222	0.0702	
10	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9893	0.9536	0.8507	0.6242	0.2639	
10	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9940	0.9718	0.8926	0.6513	
10	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
15	0	0.2059	0.0352	0.0047	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
15	1	0.5490	0.1671	0.0353	0.0052	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
15	2	0.8159	0.3980	0.1268	0.0271	0.0037	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	
15	3	0.9444	0.6482	0.2969	0.0905	0.0176	0.0019	0.0001	0.0000	0.0000	
15	4	0.9873	0.8358	0.5155	0.2173	0.0592	0.0093	0.0007	0.0000	0.0000	
15	5	0.9978	0.9389	0.7216	0.4032	0.1509	0.0338	0.0037	0.0001	0.0000	
15	6	0.9997	0.9819	0.8689	0.6098	0.3036	0.0950	0.0152	0.0008	0.0000	
15	7	1.0000	0.9958	0.9500	0.7869	0.5000	0.2131	0.0500	0.0042	0.0000	
15	8	1.0000	0.9992	0.9848	0.9050	0.6964	0.3902	0.1311	0.0181	0.0003	
15	9	1.0000	0.9999	0.9963	0.9662	0.8491	0.5968	0.2784	0.0611	0.0022	
15	10	1.0000	1.0000	0.9993	0.9907	0.9408	0.7827	0.4845	0.1642	0.0127	
15	11	1.0000	1.0000	0.9999	0.9981	0.9824	0.9095	0.7031	0.3518	0.0556	
15	12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9963	0.9729	0.8732	0.6020	0.1841	
15	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9948	0.9647	0.8329	0.4510	
15	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9953	0.9648	0.7941	
15	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
20	0	0.1216	0.0115	0.0008	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
20	1	0.3917	0.0692	0.0076	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
20	2	0.6769	0.2061	0.0355	0.0036	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
20	3	0.8670	0.4114	0.1071	0.0160	0.0013	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
20	4	0.9568	0.6296	0.2375	0.0510	0.0059	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	
20	5	0.9887	0.8042	0.4164	0.1256	0.0207	0.0016	0.0000	0.0000	0.0000	
20	6	0.9976	0.9133	0.6080	0.2500	0.0577	0.0065	0.0003	0.0000	0.0000	
20	7	0.9996	0.9679	0.7723	0.4159	0.1316	0.0210	0.0013	0.0000	0.0000	
20	8	0.9999	0.9900	0.8867	0.5956	0.2517	0.0565	0.0051	0.0001	0.0000	
20	9	1.0000	0.9974	0.9520	0.7553	0.4119	0.1275	0.0171	0.0006	0.0000	
20	10	1.0000	0.9994	0.9829	0.8725	0.5881	0.2447	0.0480	0.0026	0.0000	
20	11	1.0000	0.9999	0.9949	0.9435	0.7483	0.4044	0.1133	0.0100	0.0001	
20	12	1.0000	1.0000	0.9987	0.9790	0.8684	0.5841	0.2277	0.0321	0.0004	
20	13	1.0000	1.0000	0.9997	0.9935	0.9423	0.7500	0.3920	0.0867	0.0024	
20	14	1.0000	1.0000	1.0000	0.9984	0.9793	0.8744	0.5836	0.1958	0.0113	
20	15	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9941	0.9490	0.7625	0.3704	0.0432	
20	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9987	0.9840	0.8929	0.5886	0.1330	
20	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9964	0.9645	0.7939	0.3231	
20	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9924	0.9308	0.6083	
20	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9992	0.9885	0.8784	
20	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$$

$$B(x; n, p) = \sum_{y=0}^{n} b(y; n, p)$$

$$E(x) = np$$

$$\sigma^{2}(x) = np(1-p)$$

توزیع نرمال استاندارد

اگر در توزیع نرمال میانگین مساوی صفر و واریانس یک باشد آنگاه توزیع نرمال استاندارد نامیده میشود

$$Z \sim N(0,1)$$

$$f_z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z}{2}} & -\infty < x < +\infty \\ 0 & \text{سایرین} \end{cases}$$

ثابت شده است که در طبیعت آمار بصورت نرمال توزیع شده است که معمولاً ۶۸٪ بین $\mu \pm \sigma$ و ۹۶٪ بین $\mu \pm 2\sigma$ خواهد بود

۶۱) مثال

تیراندازی ۲۰ بار بطرف یک هدف شلیک میکند احتمال به هدف اصابت کردن هر شلیک ۰.۴ است

الف) تابع چگالی احتمال را بنویسید

ب) احتمال اینکه از این ۲۰ بار دقیقا ۱۲ بار بهدف بخورد چقدر است

ج) احتمال اینکه از این ۲۰ بار حداکثر ۱۲ بار بهدف بخورد چقدر است

توجه شود

۱- که در آزمایش برنولی زمان و مکان مطرح نیست

۲- چون یا به هدف میخورد یا نمیخورد پس برنولی است

$$f_x(x) = \begin{cases} \dbinom{20}{x} 0.4^x 0.6^{20-x} & x = 0,1,2,....20 \\ 0 & \text{سایرین} \end{cases}$$

$$P(x=12) = \binom{20}{12} 0.4^{12} 0.6^{8}$$

$$P(x \le 12) = \sum_{x=0}^{12} \binom{20}{x} 0.4^x 0.6^{20-x}$$

ضمنا اگر جدول کوچکتر یا مساوی در دسترس باشد میتوان نوشت

$$P(x=a) = F_x(a) - F_x(a^-)$$
$$P(x=12) = P(x \le 12) - P(x \le 11)$$

در جدول برای موارد ذیل داریم

$$n = 20, p = 0.4, r \le 12$$
$$P(x \le 12) = 0.97$$
$$P(x \le 11) = 0.943$$
$$P(x = 12) = 0.97 - 0.943 = 0.0355$$
$$P(x \ge 12) = 1 - P(x \le 12) = 1 - 0.943 = 0.0565$$

۶۲) مثال

در سال گذشته بطور متوسط ۱۰ زلزله در شمال کشور بوقوع پیوسته است
احتمال اینکه در سه ماه آینده دقیقا ۳ زلزله بوقوع بپیوندد چقدر است
احتمال اینکه در سه ماه آینده حداکثر ۶ زلزله بوقوع بپیوندد چقدر است
در ۱۲ ماه ۱۰ لرزه بنابراین در ۳ ماه با یک تناسب ساده ۲/۵ زلزله بطور متوسط خواهیم داشت . ($e = 2.7183$)

$$p(x=3),\ x \sim p(2.5)$$
$$p(x=3) = \frac{e^{-2.5}\,2.5^3}{3!}$$
$$p(x \le 6) = \sum_{x=0}^{6} \frac{e^{-2.5}\,2.5^x}{x!}$$

حالت اول توزیع نرمال :

تعداد حمعیت مشخص – میانگین جمعت مشخص – انحراف معیار جمعیت مشخص – یک سوال احتمال m از جمعیت

$$X \approx N(\mu,\sigma^2) \qquad p(x<a) \qquad p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{a-m}{\sigma}\right) = n$$

۶۳) مثال

نمرات امتحان کلاسی دارای توزیع نرمال و میانگین ۶۵ و انحراف معیار ۴ میباشد ، از این کلاس ۴۰ نفری ۴ نفر مردود شدند ، کمترین نمره قبولی را مشخص کنید

$$v = \sigma^2 = 4^2 = 16$$
$$X \approx N(\mu,\sigma^2) = (65,16)$$

برای تقریب به توزیع نرمال چون حدنهایی جمعیت و نمونه یکی است و مشخص است تقسیم بر σ و گرنه تقسیم بر $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$

$$p(x<a) = \frac{4}{40} = 0.1$$
$$p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{a-65}{4}\right) = 0.1$$
$$p\left(z < \frac{a-65}{4}\right) = 0.1$$

از روی جدول عدد ۱.۲۸ - حاصل میشود

$$\frac{a-65}{4} = -1.28 \Rightarrow a = 59.88$$

توزیع *t-student*

این توزیع برای نمونه های گوچکتر از ۳۰ میباشد و با یک درجه آزادی همراه است هرچه درجه آزادی بیشتر باشد نمودار تابع چگالی احتمال به نمودار نرمال استاندارد نزدیک است با درجه آزادی ۳۰ و بیشتر تابع توزیع t بر تابع توزیع نرمال دقیقاً منطبق میشود

$$x \sim t(n)$$

دیگر توزیع ها

توزیع هندسی **توزیع فوق هندسی**

توزیع تی t **توزیع کای مربع** **توزیع F**

جدول توزیع – احتمال – امید(متوسط) - واریانس

توزیع	احتمال	متوسط یا میانگین	واریانس	
برنولی $x \sim B(n,p)$ $n=1$	$p^x(1-p)^{1-x}$	p	pq	$x = 0,1$
دوجمله ای $x \sim B(n,p)$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	np	npq	$x = 0,1,....n$
پواسن $x \sim P(\lambda)$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	λ	λ	$x = 0,1,....$
نرمال $x \sim N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$	μ	σ^2	$-\infty \le x \le +\infty$
نرمال استاندارد $x \sim N(0,1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z}{2}}$	0	1	$-\infty \le z \le +\infty$

۶۴) مثال

در خصوص X متغیر تصادفی برنولی امید و واریانس را بدست آورید

$$E(X) = \sum XI$$
$$Var(X) = E(X$$

۶۵) مثال

در یک نقل و انتقال داده‌ها- درجه حرارت بصورت زیر تعریف میشود

الف - آیا چگالی احتمال است

ب - احتمال بین صفر و یک چقدر است

$$f(x) = \begin{cases} x^2/3 & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

حل :

$$\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{9} \Big]_{-1}^{2} = \frac{8}{9} - (-\frac{1}{9}) = 1$$ پس چگالی احتمال است

$$\int_{0}^{1} \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{9} \Big]_{0}^{1} = \frac{1}{9}$$

۶۶) مثال

خراب شدن یک مونیتور دارای چگالی احتمال زیر است λ را حساب کنید و تابع آنرا بنویسید

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \ e^{-x/100} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

حل :

$$\int_{0}^{\infty} \lambda \ e^{-x/100} \ dx = -100 \lambda e^{-x/100} \Big]_{0}^{\infty} = 1 \quad \Rightarrow \lambda = 1/100$$

$$f(x) = \begin{cases} 0.01 \ e^{-x/100} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

☜ احتمال توام

مثال(۶۷)

ظرفی شامل ۲ توپ قرمز و ۳ توپ آبی و دو توپ مشکی است دو عدد توپ انتخاب میکنیم

الف- برد توپهای آبی و قرمز را مشخص کنید ب - توزیع احتمال توام را بنویسید ج - فرض کنید یکی از توپها قرمز باشد با چه احتمالی توپ دیگر آبی است د - آیا دوتابع احتمال مستقل هستند ه- بطور متوسط حاصلضرب تعداد توپ آبی در قرمز چقدر است

y = تعداد توپ قرمز x = تعداد توپ آبی

y = 0 , 1 , 2 x = 0 , 1 , 2

R(y) = { 0 , 1 , 2 } R(x) = { 0 , 1 , 2 } جواب الف

---

f(x , y)

$$f(0,0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{28}\qquad f(0,1)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{6}{28}\qquad f(0,2)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}}=\frac{1}{28}$$

$$f(1,0)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{9}{28}\qquad f(1,1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}}=\frac{6}{28}\qquad f(1,2)=NotPssible$$

$$f(2,0)=\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{28}$$

ب - جدول توزیع احتمال توام -

y↓ x →	0	1	2	h(y)
0	3/28	9/28	3/28	15/28
1	6/28	6/28	-	12/28
2	1/28	-	-	1/28
g(x)	10/28	15/28	3/28	28/28 = 1

$$f(x|\,y=1)=\frac{f(x,y)}{h(y)}=\frac{f(x,1)}{h(1)}=\frac{f(x,1)}{12/28}$$

x	0	1	2
$f(x\|\,y=1)$	$\frac{f(0,1)}{h(1)}=\frac{6/28}{12/28}=1/2$	$\frac{f(1,1)}{h(1)}=\frac{6/28}{12/28}=1/2$	$\frac{f(2,1)}{h(1)}=0$

ج - ملاحظه میشود که ۵۰ درصد احتمال دارد دیگری آبی باشد

---

g(x) * h(y) = g(0) * h (0) = 10/28 * 15/28 $\neq$ f(x,y)=f(0,0)=3/28

د - دو تابع احتمال مستقل نیستند

E[u(x,y)]=$\sum\sum$ u(x,y) f (x,y) حاصل ضرب تعداد توپ قرمز در آبی

E(x.y)= $\sum\sum$ x. y f(x,y) = 0*0*3/28+ 0*1*9/38 + 0*2*3/28 + 1*0*6/28 + 1*1*6/28 + 2*0*1/28 = 6/28

مثال۶۸)

- اگر x ضخامت ورق جوشکاری شده و y مقاومت ورق برش داده شده باشد که دارای تابع زیر باشد

$$f(x,y)=\begin{cases}1/500 & 0\le x\le 0.25\ ,\ 0\le y\le 2000\\ 0 & \text{ßé Óè}\end{cases}$$

الف - آیا تابع چگالی احتمال میباشد

ب - با چه احتمالی $P[\ 0.1< x < 0.2\ ,\ 100 < y < 200\ ]$ است

ج - چگالی های کناری را بنویسید

د - چنانکه x=0.1 باشد احتمال y را پیدا کنید

ه - آیا x و y مستقل هستند

الف

$$\int_0^{0.25}\int_0^{2000}\frac{1}{500}\,dxdy=\int_0^{0.25}\frac{1}{500}\,y\Big|_0^{2000}dx=1$$

ب

$$\int_{0.1}^{0.2}\int_{100}^{200}\frac{1}{500}\,dxdy=\int_{0.1}^{0.2}\frac{1}{500}\,y\Big|_{100}^{200}dx=\int_{0.1}^{0.2}\frac{1}{5}dx=\frac{1}{50}$$

ج

$$g(x)=\int_0^{2000}1/500\quad \mathrm{dy}=4\qquad 0\le x\le 0.25$$

$$\mathrm{h(y)}=\int_0^{0.25}1/500\quad \mathrm{dx}\ =\ 1/2000\ \ 0\le y\le 2000$$

د

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{g(x)}=\frac{1/500}{4}=\frac{1}{2000}$$

g(0.1) . h(100)= 4 * 1/2000 = 1/500

f(0.1,100) = 1/500

f(0.1,100)=g(0.1)*h(100) پس مستقل هستند

۶۹) مثال

- الف - برای تابع زیر احتمالهای شرطی را حساب کنید

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\frac{xy}{3} & 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

ب - f(x|y=1) را بدست آورید و سپس $\int_{x=0}^{x=1} f(x|y=1)$ را بدست آورید

$$g(x)=\int_{y=0}^{y=2}(x^2+\frac{xy}{3})dy=x^2y+\frac{xy^2}{6}\ \Big|_0^2=2x^2+\frac{2}{3}x$$

$$h(x)=\int_{x=0}^{x=2}(x^2+\frac{xy}{3})dx=\frac{x^2}{3}+\frac{x^2y}{6}\ \Big|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{y}{6}$$

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{g(x)}=\frac{x^2+\frac{xy}{3}}{2x^2+\frac{2}{3}x}=\frac{x+\frac{y}{3}}{2x+\frac{2}{3}}$$

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{h(y)}=\frac{x^2+\frac{xy}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{y}{6}}$$

$$f(x|y=1)=\frac{f(x,1)}{h(1)}=\frac{x^2+\frac{x}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{y}{6}}=2(x^2+\frac{x}{3})$$

جواب ب $\int_{x=0}^{x=1} f(x|y=1)dx=2[\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{6}]\ \Big|_0^1=2x(\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=1$

۷۰) مثال

تعداد اتومبیلهایی که بین ساعت ۵ تا ۷ صبح به یک پمپ بنزین وارد میشوند دارای احتمال ذیل است و در آمد پمپ v=2x-1 میباشد متوسط در آمد را حساب کنید

x= تعداد	4	5	6	7	8	9
f (x)	1/12	1/12	1/4	1/4	1/6	1/6

E(U(x))=Σ U(x)f(x)=(2*4 - 1)*1/12 + (2*5 - 1) * 1/12 + (2* 6 - 1) * 1/4 + (2*7 - 1) *1/4 + (2* 8 - 1) *1/6 + (2 * 9 -1) * 1/6 = 12.67

۷۱) مثال

- اگر یک تابع احتمال بصورت { $-1<x<2$ $f(x)=x^2/3$ } باشد و g(x)= 4x + 3 باشد متوسط g(x) را بدست آورید

$$E(g(x))=\int_{-1}^{2} f(x)g(x)dx=\int_{-1}^{2}\frac{x^2}{3}\ (4x+3)\ dx\ =\ 8$$

۷۲) مثال

- معدنی سه درب دارد

درب ااول بعد از ۳ ساعت به خروجی تونل منتهی میشود

درب دوم بعد از ۵ ساعت به محل قبلی بر میگردد

درب سوم بعد از ۷ ساعت به محل قبلی بر میگردد

اگر معدنچی هر بار با انتخاب یکسان درب ها را انتخاب کند بطور متوسط بعد از چند ساعت به محل امن میرسد

$E(x)=E(x|y_i).\,p(y_i)$

$E(x)=E(x|y=1)\ p(y=1)\ +E(x|y=2)\ p(y=2)\ +\ E(x|y=3)\ p(y=3)$

p(y=1)= 1/3 p (y=2)= 1/3 p (y=3) = 1/3

E(x)= 1/3 [E(x|y=1)+ E(x|y=2)+ E(x|y=3)]
E(x)= 1/3 [(3) + (5+E(x)) + (7+ E(x))]
E(x) = 1 + 5/3 + 1/3 E(x) + 7/3 + 1/3 E(x)
E(x) = 15

توجه شود میتوانستیم ۳+۵+۸=۱۵ را بدست آوریم !!!!!

امیدهای ریاضی مخصوص

۱ - اگر $u(x) = x$ **باشد آنگاه**

$$E(x) = E[u(x)] = u(x) = \begin{cases} \sum_x xf(x) \\ \int_U xf(x)dx \end{cases}$$

به آن گشتاور مرتبه اول حول محور مختصات یا میانگین متغیر تصادفی x گویند

۲- اگر $u(x) = (x - u(x))^2$ باشد آنگاه

$$E(x) = E[x - u(x)]^2 = \begin{cases} \sum_x (x-u(x))^2 f(x) \\ \int_x (x-u(x))^2 f(x)dx \end{cases} = \sigma_x^2$$

به آن گشتاور مرتبه دوم حول میانگین و یا واریانس متغیر تصادفی x گویند

در حقیقت میزان پراکندگی حول x را نشان میدهد

به σ_x انحراف معیار یا انحراف استاندارد گویند

۷۳)مثال

رابطه σ_x^2 را بر حسب E بدست آورید

$$\sigma_x^2 = \mathrm{var}(x) = E(x-u(x))^2 = E(x^2 - 2x\,u(x) + u^2(x)) = E(x^2) - 2E(x)\;E(u(x)) + E(u^2(x))$$
$$= E(x^2) - 2u(x).\,u(x) + u^2(x) = E(x)^2 - u^2(x) = E\,x^2 - E^2\,x$$

واریانس همیشه مثبت است

۳- واریانس متغیر تصادفی g(x)

$$\sigma^2 g(x) = Var\;g(x) = \begin{cases} \sum (g(x) - E(g(x)))^2\; f(x) \\ \int (g(x) - E(g(x)))^2\; f(x)dx \end{cases}$$

۴- کوواریانس بین متغیرهای تصادفی x و y با توزیع احتمال با هم f(x,y)

$$Cov(x,y) = \sigma_{xy} = E\Big[(x-u_x)(y-u_y)\Big]$$
$$= \begin{cases} \sum_x \sum_y (x-u_x)(y-u_y)\; f(x,y) \\ \int_x \int_y (x-u_x)(y-u_y)\; f(x,y)dxdy \end{cases}$$
$$Cov(x,y) = E(xy - xu_y - yu_x + u_xu_y) = E(xy) - E(x)u_y - E(y)u_x + u_xu_y) =$$
$$= E(xy) - E(x)E(y)$$

اگر x و y مستقل باشند آنگاه

E(xy)=E(x)E(y)
Cov(x,y)=0

توجه شود کوواریانس صفر الزاما به مفهوم استقلال متغیرهای تصادفی نیست.

اگر x و y مستقل آنگاه Cov=0

اگر تغییرات x در خلاف جهت تغییرات y آنگاه Cov<0

اگر تغییرات x در هم جهت تغییرات y آنگاه Cov>0

در حقیقت Cov رابطه بین تغییرات دو متغیر تصادفی را نشان میدهد

ضریب همبستگی

$$\rho = \frac{Cov(x,y)}{\sigma x \, \sigma y}$$

$$-1 \le \rho \le 1$$

اگر x و y رابطه خطی داشته باشند p=1 میباشد

اگر x و y رابطه معکوس خطی داشته باشند p= -1 میباشد

اگر x و y رابطه نداشته باشند p=0 میباشد

خواص واریانس

۱- اگر a عدد ثابت باشد

$$V(a) = 0$$

$$V(ax) = a^2 V(x) \qquad \Rightarrow \qquad V(ax) = E[ax - au_x]^2 = a^2 E[x - u_x]^2 = a^2 V(x)$$

$$V(ax+b) = a^2 V(x)$$

$$V(ax \pm by) = a^2 V(x) + b^2 V(y) \pm 2abCov(x,y)$$

مثال ۷٤)

ثابت کنید $-1 \le \rho \le 1$

$$V\left(\frac{x}{\sigma x} + \frac{y}{\sigma y}\right) \ge 0$$

$$\frac{V(x)}{\sigma^2 x} + \frac{V(y)}{\sigma^2 y} + 2\frac{Cov(x,y)}{\sigma x \sigma y} \ge 0$$

$$1 + 1 \pm 2p \ge 0 \qquad \Rightarrow \qquad -1 \le p \le 1$$

گشتاور اول و دوم حول محور مختصات قبلا گفته شد

گشتاور k ام حول مبدا مختصات (مثال : گشتاور اول و دوم حول محور مختصات)

$$u_x = \left\{ \begin{matrix} \sum_k x^k f(x) \\ \int_x f(x)dx \end{matrix} \right\}$$

$$k=1 \quad \Rightarrow \quad u_1' = u_k$$

$$k=2 \quad \Rightarrow \quad u_2' = E(x^2)$$

گشتاور k ام حول میانگین (مثال : گشتاور اول و دوم حول میانگین)

$$u_k = \left\{ \begin{matrix} \sum_k (x-u_k)^k f(x) \\ \int_k (x-u_k)^k f(x)dx \end{matrix} \right\}$$

$$k=1 \qquad u_k = 0 \qquad \Rightarrow E(x-u_x) = E(x) - u_x = u_x - u_x = 0$$

$$k=2 \qquad u_2 = \sigma_x^2 = u_2' - u_1'^2 = E(x^2) - E^2(x)$$

نامساوی مارکف

اگر x یک متغیر تصادفی باشد که مقادیر غیر منفی بخود تخصیص دهد آنگاه

$$p\{x \ge a\} \le \frac{E(x)}{a}$$

اثبات : فرض کنیم

$$y=\begin{cases}1 & x\ge a\\ 0 & x<a\end{cases}$$

$$x\ge a \quad \Rightarrow \frac{x}{a}\ge 1 \quad \Rightarrow \frac{x}{a}\ge y \quad \Rightarrow E(\frac{x}{a})\ge E(y) \quad \Rightarrow \frac{1}{a}E(x)\ge E(y) \qquad (1)$$

$$E(y)=E(y=0)\,p(y=0)+e(y=1)\,p(y=1)=0*p(y=0)+1*p(y=1)$$

$$=0+1*p(x\ge a)=p(x\ge a) \qquad \Rightarrow E(y)=p(x\ge a) \qquad (2)$$

$$(1)\ ,\ (2) \quad \Rightarrow p(x\ge a)\le \frac{1}{a}E(x)$$

۷۵)مثال

کارخانه ای بطور متوسط ۵۰ قطعه تولید میکند احتمال اینکه تولید هفتگی از ۷۵ بیشتر باشد

$$p(x\ge 75)\le \frac{E(x-50)}{75} \quad \Rightarrow p(x\ge 75)\le \frac{50}{75}\Rightarrow p(x\ge 75)\le \frac{2}{3}$$

با وجودیکه هیچ اطلاعاتی از تولید کارخانه نداریم میتوان گفت که احتمال اینکه تولید بیشتر از ۷۵ قطعه بشود ۶۶٪ میباشد

نامساوی چبی شف

اگر x یک متغیر تصادفی با میانگین $\mu_{\hat{U}}$ و واریانس $\sigma^2_{\hat{U}}$ باشد آنگاه برای k>0 خواهیم داشت

$$p[|x-u_x|\ge k]\le \frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$k\to k\sigma \Rightarrow p[|x-u_x|\ge k\sigma]\le \frac{1}{k^2}$$

اثبات میدانیم $(x-u_x)^2$ یک متغیر تصادفی با مقادیر غیر منفی است حال با توجه بـه نامسـاوی مـارکف میتـوان نوشت

$$p(x\ge a)\le \frac{E(x)}{a}$$

$$p(x^2\ge a^2)\le \frac{E^2(x)}{a^2}$$

$$a\to k^2 \quad , \quad x\to x-u_x$$

$$p((x-u_x)^2\ge k^2)\le \frac{E(x-u_x)^2}{k^2} \qquad \Rightarrow \quad p(|x-u_x|\ge k)\le \frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$k\to k\sigma \quad \Rightarrow \quad p(|x-u_x|^2\ge k\sigma)\le \frac{1}{k^2}$$

مثال ۷۶)

تعداد قطعات تولیدی کارخانه ای دارای میانگین ۵۰ و واریانس ۲۵ میباشد ، احتمال اینکه تعداد تولید بین ۴۰ و ۶۰ باشد چقدر است

$$\sigma_x^2 = 25, u_x = 50, k = 50 - 40 = k = 60 - 50 = 10$$

$$p[|x - u_x| \geq k] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$p(x - u_x \geq k, -(x - u_x) \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$p(x - 50 \geq 10, x - 50 \leq -10) \leq \frac{25}{100}$$

$$p(x \geq 60, x \leq 40) \leq 0.25 \quad \Rightarrow p(40 \leq x \leq 60) \leq 1 - 0.25 \ \Rightarrow p(40 \leq x \leq 60) \leq 0.75$$

مثال ۷۷)

اگر f(x) را با شرط زیر داشته باشیم

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

آنگاه مقدار $p[|x - 5| \geq 4]$ را بدست آورید

طریق اول

$$E(x) = \int_0^{10} xf(x)dx = \int_0^{10} x\frac{1}{10}dx = \frac{x^2}{20}]_0^{10} = 5$$

$$E(x) = 5 \Rightarrow E^2(x) = 25$$

$$E(x^2) = \int_0^{10} x^2 f(x)dx = \int_0^{10} x^2 \frac{1}{10}dx = \frac{x^2}{30}]_0^{10} = \frac{1000}{30} = \frac{100}{3}$$

$$E(x^2) = \frac{100}{3}$$

$$V(x) = E(x^2) - E^2(x) = \frac{100}{3} - 25 = \frac{75}{3} = \sigma^2 x$$

$$p[|x - 5| \geq 4] \leq \frac{\sigma^2}{k^2} \quad \Rightarrow \quad p[|x - 5| \geq 4] \leq \frac{25/3}{4^2} \quad \Rightarrow$$

$$p[|x - 5| \geq 4] \leq 0.52$$

روش دوم

$$p[|x - 5| \geq 4] = p[(x - 5) \geq 4 \ , \ -(x - 5) \geq 4] = p[x \geq 9, x \leq 1] = p[x \geq 9] + p[x \leq 1]$$

$$= \int_9^{10} \frac{1}{10}dx + \int_0^1 \frac{1}{10}dx = \frac{1}{10}(10 - 9) + \frac{1}{10}(1 - 0) = 0.2$$

$$p[|x - 5| \geq 4] \leq 0.2$$

سؤال : چرا دو روش مساوی نشد

در فضای حدی از نامساوی چبی شف استفاده میشود

مثال ۷۸)

مدیر انباری تخمین میزند که از لحظه سفارش تا رسیدن جنس ۸ روز طول میکشدlead time

انحراف معیار این تخمین ۱.۵ روز است و از نحوه تابع توزیع lead time را نمیدانیم ، اگر حداقل با احتمال 8/9 بخواهیم جنس در انبار باشد چند روز قبل سفارش بدهیم
برای استفاده از حداقل یعنی علامت بزرگتر مساوی باید 1-8/9 را حساب کرد

$$E(x) = 8 \quad , \quad \sigma x = 1.5$$

$$p[|x - u_x| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$$

$$1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9} = k^2 \quad \Rightarrow \quad k = 3$$

$$p[|x-8| \leq 3*1.5] \geq \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad |x-8| \leq 3*1.5$$

$$x - 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x - 8 \leq 3*1.5} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x \leq 12.5}$$

$$x - 8 < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{-(x-8) \leq 3*1.5} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x \geq 3.5}$$

$$3.5 \leq \mathrm{x} \leq 12.5$$

توابع متغیر تصادفی :

اگر x متغیر تصادفی باشد آنگاه y=u(x) باشد y هم یک متغیر تصادفی است

$$y = u(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y}$$

$$G(y) = f(Y \leq y) = p(x^2 \leq y) = P(|x| \leq \sqrt{y}) = p(-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y})$$

$$G(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x) = F(x) \Big]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

$$G(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{dF(\sqrt{y})}{dy} - \frac{dF(-\sqrt{y})}{dy} = \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1} f(\sqrt{y}) - \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1} f(-\sqrt{y})$$

$$G(y) = \frac{f(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} - \frac{f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

۷۹) مثال

اگر یک تابع توزیع بصورت ذیل باشد و $y = x^2$ باشد آنگاه تابع توزیع g(y) را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

حل :

چون x پیوسته و بین ۱و ۱- است پس $y = x^2$ پیوسته و بین ۰ و ۱ است

$$G(y) = p(Y \leq y) = p(x^2 \leq y) = p(-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y})$$

$$G(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \sqrt{y}$$

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

$$x = 1 \;\; y = 1 \,, \quad x = -1 \;\; y = 1 \,, \quad x = 0 \;\; y = 0$$

☜ قضیه حد مرکزی

۱- اگر از یک جمعیت n عضوی با میانگین معلوم μ و واریانس معلوم σ^2 یک نمونه تصادفی n تایی ($n \succ 30$) یکی یکی و با عمل جایگزینی انتخاب کنیم آنگاه میانگین نمونه ای یعنی $\bar{x}$ تقریبا دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu_{\bar{x}} = \mu$ و واریانس $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ و انحراف معیار $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$ خواهد بود

و متغیر تصادفی $z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد میباشد

۲- اگر از یک جمعیت نرمال با واریانس مجهول یک نمونه تصادفی n تایی با n<30 انتخاب کنیم آنگاه متغیر تصادفی

$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ دارای توزیع t با n-1 درجه آزادی است که در آن $\bar{x}$ میانگین نمونه و μ میانگین جمعیت و S انحراف معیار نمونه میباشد.

۳- اگر در یک جمعیت دوجمله ای با احتمال پیروزی p یک نمونه تصادفی n تایی ($n \succ 30$) یکی یکی انتخاب کنیم (در دو جمله ای همیشه با عمل جایگزینی است) آنگاه احتمال پیروزی در نمونه یعنی $\hat{p}$ تقریبا دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu_{\hat{p}} = E(\hat{p}) = p$ و واریانس $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{p(1-p)}{n}$ خواهد بود

نکته : چون یک توزیع پیوسته به گسسته تقریب زده میشود در موارد کوچکتر نصف واحد یعنی $\frac{1}{2n}$ اضافه و در موارد بزرگتر نصف واحد یعنی $\frac{1}{2n}$ اضافه کم میشود

نکته : آزمایش برنولی مستقل از هم است یعنی با جایگزینی است

حالت دوم توزیع نرمال :

تعداد جمعیت نا مشخص – میانگین جمعت مشخص μ – انحراف معیار جمعیت مشخص σ – تعداد نمونه مشخص n - یک سوال احتمال m از نمونه

$$\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \qquad p(\bar{x} < m) = p\left(\frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sqrt{\sigma^2/n}} < \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) \qquad p(\bar{x} < m) = p\left(z < \frac{m - \mu_{\bar{x}}}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)$$

۸۰) مثال

کارخانه لامپ سازی ادعا میکند که طول عمر لامپهایش ۱۲۸۰ با انحراف معیار ۱۵۰ است از این کارخانه یک نمونه ۱۰۰ تایی لامپ انتخاب میکنیم احتمال اینکه این لامپها بیشتر از ۱۳۰۰ عمر کند چقدر است؟

از جمعیتی با میانگین $\mu = 1280$ و $\sigma = 150$ یک نمونه تصادفی $n = 100$ تایی انتخاب میکنیم احتمال اینکه $p(\bar{x} > 1300)$ باشد چقدر است

$$\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$\bar{x} \sim N(1280, 150^2/100)$$

$$p(\bar{x} > 1300) = p(\frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sqrt{\sigma^2 / n}} > \frac{1300 - 1280}{\sqrt{150^2 / 100}})$$

$$p(z > 1.33) = 1 - p(z \le 1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$$

۸۱) مثال

کارخانه لامپ سازی ادعا میکند که طول عمر لامپهایش ۱۲۸۰ با انحراف معیار ۱۵۰ است از این کارخانه یک نمونه ۲۵ تایی لامپ انتخاب میکنیم احتمال اینکه این لامپها بیشتر از ۱۳۰۰ عمر کند چقدر است؟

از جمعیتی با میانگین $\mu = 1280$ و $s = 150$ یک نمونه تصادفی $n = 25$ تایی انتخاب میکنیم احتمال اینکه $p(\bar{x} > 1300)$ باشد چقدر است

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t(24)$$

$$p\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} > \frac{1300-1280}{\sqrt{150^2/25}}\right)$$

$p(t > 0.67) = 1 - p(z \le 0.67)$ ازجدول

$$t_p(24) = 0.67 \quad \Rightarrow p = 0.74 \quad \Rightarrow p(t > 0.67) = 1 - 0.74 = 0.26$$

موارد فوق ازجدول توزیع t با n-1=25-1=24 درجه آزادی و از داخل جدول برای 0.67 و در سطر اول جدول عدد احتمال 0.74 حاصل شد

حالت سوم توزیع نرمال :

احتمال در حمعیت مشخص p – تعداد نمونه مشخص n - یک سوال احتمال m از نمونه

82)

$$P(\hat{p} < m) = P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) \qquad P\left(z < \frac{m-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)$$

83)

۸۴) مثال

کارخانه تلوزیون سازی ۲٪ از تولیداتش معیوب است اگر یک محموله ۴۰۰ تایی از این کارخانه خریداری شود

الف) احتمال اینکه ۳٪ یا بیشتر از تولیداتش معیوب باشد چقدر است

ب) احتمال اینکه ۲٪ یا کمتر از تولیداتش معیوب باشد چقدر است

$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{2*400} = 0.00125$$

$$P(\hat{p} \ge 0.03) = P(\hat{p} \ge 0.03 - 0.00125)$$

$$P(\hat{p} > 0.02875) =$$

$$P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} > \frac{0.02875-0.02}{\sqrt{\frac{0.02*0.98}{400}}}\right)$$

$$p(z > 1.25)$$

$$P(\hat{p} \le 0.02) = P(\hat{p} < 0.02 + 0.00125) = P(\hat{p} < 0.02125)$$

$$P\left(z < \frac{0.02125-0.02}{\sqrt{\frac{0.02*0.98}{400}}}\right) = P(z < 0.18) = 0.5714$$

☜ برآورد فاصله ای

سطح زیر منحنی ۱ یک است اگر $\alpha/2$ در سمت راست منحنی و $\alpha/2$ در سمت چپ منحنی باشد بنابراین $1-\alpha$ درصد مطمئن هستیم که z بین $Z_{\alpha/2}$ و $-Z_{\alpha/2}$ است

$$P(-|Z_{\alpha/2}|< Z <|Z_{\alpha/2}|) = 1-\alpha$$

$$P(-|Z_{\alpha/2}|< \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} <|Z_{\alpha/2}|) = 1-\alpha$$

$$P(\bar{x}-|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\sigma^2/n} < \mu < \bar{x}+|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\sigma^2/n}) = 1-\alpha$$

بنابراین $1-\alpha$ درصد مطمئن هستیم میانگین جمعیت بین $\bar{x}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n}$ و $\bar{x}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n}$ است

مثلاً برای جمعیت دو جمله ای

$$P(\hat{p}-|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} < p < \hat{p}+|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}) = 1-\alpha$$

نکته : اگر در مواردی σ معلوم نبود از S استفاده میکنیم

حل مسائل برآورد فاصله ای

برنولی : در مسئله یک احتمال در نمونه مشخص میشود $\hat{p}$ و یک عدد بعنوان فاصله اطمینان میدهند که بعنوان $1-\alpha$ در نظر گرفته سپس $\alpha/2$ محاسبه و از جدول Z مربوط به $\alpha/2$ پیدا کرده آنگاه جواب مسئله بصورت زیر است

$$\hat{p}-|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$$
$$\hat{p}+|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$$

نرمال : در مسئله یک میانگین $\bar{x}$ و انحراف معیار از نمونه σ مشخص میشود و یک عدد بعنوان فاصله اطمینان میدهند که بعنوان $1-\alpha$ در نظر گرفته سپس $\alpha/2$ محاسبه و از جدول Z مربوط به $\alpha/2$ پیدا کرده آنگاه جواب مسئله بصورت زیر است

$$\bar{x}-|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\sigma^2/n}$$
$$\bar{x}+|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\sigma^2/n}$$

مثال۸۵)

یک نمونه ۱۰۰ نفری از رای دهندگان انتخابات ریاست جمهوری انتخاب شدند ۵۹ نفر اظهار داشتند که بنفع کاندید A رای میدهند فاصله اطمینان ۹۵٪ برای نسبت افرادی که به کاندید A رای میدهند حساب کنید

$1-\alpha = 0.95 \qquad \alpha/2 = 0.025$

$Z_{0.025} = 1.96 \qquad n = 100 \qquad \hat{p} = 59/100 = 0.59$

$$P(\hat{p}-|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} < p < \hat{p}+|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}) = 1-\alpha$$

$0.59 - 1.96\sqrt{0.59*0.41/100}$ و $0.59 + 1.96\sqrt{0.59*0.41/100}$

0.496 و 0.684

بنابراین میتوان با اطمینان ۹۵٪ اظهار داشت که بیش از ۵۰٪ مردم به کاندید A رای میدهند

آزمون فرضها :

میخواهیم بحث قبول یا رد فرض صفر را بررسی کنیم

فرض H_α مشابه خواسته مسئله در نظر میگیریم و فرض H_0 را مساوی آن مقدار در مسئله قرار میدهیم

۱- اگر در فرض H_α علامت کوچکتر بود آنگاه اگر $Z < -|Z_\alpha|$ بود فرض H_0 را رد میکنیم و پذیرای فرض مقابل یعنی H_α میشویم وگرنه اعلام میکنیم دلیلی بر رد H_0 نداریم

۲- اگر در فرض H_α علامت بزرگتر بود آنگاه اگر $Z > +|Z_\alpha|$ بود فرض H_0 را رد میکنیم و پذیرای فرض مقابل یعنی H_α میشویم وگرنه اعلام میکنیم دلیلی بر رد H_0 نداریم

حل مسائل آزمون فرضها

نرمال : در مسئله میانگین جمعیت $\overline{x}$ و انحراف معیار جمعیت S و میانگین ادعا μ_0 و یک عدد بعنوان α در نظر گرفته سپس از جدول Z مربوط به α پیدا کرده و یک Z از $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sqrt{s^2/n}}$ در جدول بدست آورده و آنگاه جواب مسئله طبق شرایط فوق مقایسه میکنیم

برنولی : در مسئله احتمال نمونه p و میانگین ادعا p_0 و یک عدد بعنوان α در نظر گرفته سپس از جدول Z مربوط به α پیدا کرده و یک Z از $\dfrac{p-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ در جدول بدست آورده و آنگاه این دو Z طبق شرایط مسدله و شرایط آزمون در فوق مقایسه میکنیم

مثال ۸۶)

در آزمایش طول قامت ۵۰ کودک میانگین 89.2 سانتیمتر و انحراف معیار 15.5 سانتیمتر میباشد آیا میتوان ادعا کرد طول قامت کودکان کمتر از ۹۰ سانتیمتر است (هر وقت آلفا مشخص ندادند مقدارش 0.05 در نظر میگیریم)

$$n = 50 \qquad \bar{x} = 89.2 \qquad s = 15.5$$

$$H_a: \ \mu < 90$$

$$H_0: \mu = 90$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}} = \sqrt{\frac{15.5^2}{50}} \qquad\qquad Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{89.2-90}{\sqrt{\frac{15.5^2}{50}}} = -0.365$$

$$Z_\alpha = Z_{0.05} = m \Leftrightarrow p(z \le m) = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$\text{from table} \Rightarrow m = 1.645 = Z_{0.05} = Z_\alpha$$

$$(Z = -0.365) < (-Z_\alpha = -1.645) \quad \text{غلط}$$

چون $Z < -Z_\alpha$ نیست اعلام میکنیم دلیلی بر رد H_0 نداریم یعنی نمیتوان فرض H_α را پذیرفت پس نمیتوان گفت قامت کوچکتر از ۹۰ است

۸۷) مثال

لامپهای ساخت کارخانه ای با انحراف معیار ۱۴۲ ساعت در یک نمونه ۱۰۰ تایی میانگین عمرشان ۱۲۸۰ ساعت شد صاحب کارخانه ادعا میکند که با همین اطلاعات میانگین عمر لامپهای ای کارخانه از ۱۲۰۰ ساعت بیشتر است آیا میتوان ادعای او را قبول یا رد کرد ؟ (هر وقت آلفا مشخص ندادند مقدارش 0.05 در نظر میگیریم)

$$n=100 \qquad \bar{x}=1280 \qquad s=142$$

$$H_a: \ \mu>1200$$

$$H_0: \mu=1200$$

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{s^2}{n}}=\sqrt{\frac{142^2}{100}} \qquad Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}=\frac{1280-1200}{\sqrt{\frac{142^2}{100}}}=5.63$$

$$Z_\alpha=Z_{0.05}=m \Leftrightarrow p(z\le m)=1-0.05=0.95$$

$$\text{from table} \Rightarrow m=1.645=Z_{0.05}=Z_\alpha$$

$(Z=5.63)>(+Z_\alpha=+1.645)$ صحیح

چون $Z>+Z_\alpha$ میباشد فرض H_0 را رد میکنیم و پذیرای فرض مقابل یعنی H_α میشویم یعنی بله ادعای صاحب کارخانه میتواند درست باشد

۸۸) مثال

صاحب یک کارخانه داروسازی ادعا میکند که داروی ضد حساسیت این کارخانه در مورد بیش از ۹۰٪ حساس در مدت ۸ ساعت پس از مصرف دارو نتیجه مثبت میدهد

یک نمونه ۲۰۰ نفری آدمهای حساس انتخاب کردیم و دارو را استفاده نمودند و ۱۶۰ نفر بهبود یافتند آیا این داده ها دلیل کافی ارائه میدهد که ادعای صاحب کارخانه غلط است ؟ ($\alpha=0.01$)

توجه شود که چون صورت مسئله خلاف نظر صاحب کارخانه خواسته علامت کوچکتر استفاده میشود

$$n=200 \qquad \hat{p}=160/200=0.8 \qquad s=200*0.8*(1-0.8)$$

$$H_a: \ \mu<0.9$$

$$H_0: \mu=0.9$$

$$\sigma_{\hat{p}}=\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}=\sqrt{\frac{0.9(1-0.9)}{200}} \qquad Z=\frac{\hat{p}-p_0}{\sigma_{\hat{p}}}=\frac{0.8-0.9}{\sqrt{\frac{0.9(1-0.9)}{200}}}=-4.72$$

$$Z_\alpha=Z_{0.01}=m \Leftrightarrow p(z\le m)=1-0.01=0.99$$

$$\text{from table} \Rightarrow m=2.33=Z_{0.01}=Z_\alpha$$

$(Z=-4.72)<(-Z_\alpha=-2.33)$ صحیح

چون $Z<-Z_\alpha$ میباشد فرض H_0 را رد میکنیم و پذیرای فرض مقابل یعنی H_α میشویم یعنی بله ادعای صاحب کارخانه میتواند غلط باشد

☜ مدل مهره و جعبه

اگر N جعبه متمایز داشته باشیم و اگر R مهره داشته باشیم و بخواهیم این R مهره درون جعبه قرار دهیم حالتهای زیر بوجود میاید

۱- مهره متمایز مهره مکرر مجاز

$$C(N,R) = N * N * N ...... * N = N^R$$

در این حالت اهمیتی ندارد که $R < N$ باشد یا نباشد

مثال ۸۹)

سه ظرف رنگی مشخص سبز و قرمز و آبی داریم و دو مهره A و B به چند طریق میتوان دو مهره درون سه ظرف چید که مهره مکرر مجاز باشد

$$C(3,2) = 3^2 = 9$$

سبز	AB	–	-	A	B			A	B
قرمز	–	AB	–	B	A	A	B		
آبی	-	–	AB	-	-	B	A	B	A
-	1	2	3	4	5	6	7	8	9

۲- مهره متمایز مهره مکرر غیرمجاز

$$C(N,\overline{R}) = N * (N-1) * (N-2) ...... * (N-R+1) = \frac{N!}{(N-R)!}$$

این حالت همان ترتیب میباشد

در این حالت باید $R <= N$ باشد

مثال ۹۰)

سه ظرف رنگی مشخص سبز و قرمز و آبی داریم و دو مهره A و B به چند طریق میتوان دو مهره درون سه ظرف چید که مهره مکرر غیر مجاز باشد

$$C(3,\overline{2}) = P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

سبز	A	B			A	B			
قرمز	B	A	A	B					
آبی	-	-	B	A	B	A			
-	1	2	3	4	5	6	-	-	-

۳- مهره غیرمتمایز مهره مکرر غیرمجاز

$$C(\overline{N},\overline{R})=\binom{N}{R}=\frac{N!}{(N-R)!\,R!}$$

این حالت شبیه حالت ترکیب میباشد

در این حالت باید R <= N باشد

مثال ۹۱)

سه ظرف رنگی مشخص سبز و قرمز و آبی داریم و دو مهره A و A به چند طریق میتوان دو مهره درون سه ظرف چید که مهره مکرر غیر مجاز باشد

$$C(\overline{3},\overline{2})=\frac{3!}{(3-2)!2!}=3$$

سبز	A		A						
قرمز	A	A							
آبی	-	A	A						
-	1	2	3	-	-	-	-	-	-

٤- مهره غیرمتمایز مهره مکرر مجاز

$$C(\overline{N},R)=\binom{N+R-1}{R}=\binom{N+R-1}{N-1}$$

در این حالت میتواند R > N باشد

شبیه اینکه بگوییم N جعبه بیکدیگر میچسبانیم که N+1 خط عمودی تشکیل میدهد و R مهره مشابه درون این جعبه ها جا دهیم چون خط اول و آخر ثابت است پس N-1 خط عمودی وجود دارد و R مهره مشابه درون آنها بچینیم

مثال ۹۲)

سه ظرف رنگی مشخص سبز و قرمز و آبی داریم و دو مهره A و A به چند طریق میتوان دو مهره درون سه ظرف چید که مهره مکرر مجاز باشد

$$C(\overline{3},2)=\binom{3+2-1}{2}=\frac{4!}{(4-2)!2!}=6$$

سبز	A		A	AA					
قرمز	A	A			AA				
آبی	-	A	A			AA			
-	1	2	3	4	5	6	-	-	-

☜ مثالهایی از احتمال شرطی

مثال ۹۳)

تاس را پرتاب میکنیم مشاهده میشود عدد زوج است احتمال اینکه بر ۳ بخش پذیر باشد چقدر است

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$B = \{2,4,6\}$

$A = \{3,6\}$

$A \cap B = \{6\}$

$p(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/6}{3/6} = \dfrac{1}{3}$

۳) تمرین

تاس را پرتاب میکنیم مشاهده میشود بر ۳ بخش پذیر است احتمال اینکه عدد زوج باشد چقدر است؟(۱/۲)

مثال ۹٤)

ظرفی محتوی ۵ گوی قرمز و ۷ گوی سیاه است

از درون ظرف دو گوی را یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم

الف) احتمال اینکه گوی اول قرمز و گوی دوم سیاه باشد چقدر است

ب) احتمال اینکه یک گوی قرمز و یک گوی سیاه باشد چقدر است

الف) ترتیب اهمیت دارد

$P(R1 \cap B2) = P(R1).P(B2 \mid R1) = (5/12).(7/11)$

ب) ترتیب اهمیت ندارد چون در حالت ب دو پیش آمد ناسازگارند با هم جمع میشوند

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

$P[(R1 \cap B2) \cup (B1 \cap R2)] = P(R1 \cap B2) + P(B1 \cap R2) = P(R \cap B) + P(B \cap R) =$

$P(R).P(B \mid R) + P(B).P(R \mid B) = [(5/12).(7/11)] + [(7/12).(5/11)]$

میتوانستیم یک حالت بدست آورده در ۲ ضرب کنیم

ب) برای حالت ب میتوانستیم از فرمول ترکیب استفاده کنیم

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{7}{1}}{\binom{12}{2}}$$

مثال ۹۵)

ظرفی محتوی ۵ گوی قرمز و ۷ گوی سیاه است

از درون ظرف سه گوی را یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم

الف) احتمال اینکه گوی اول قرمز و گوی دوم سیاه و گوی سوم قرمز باشد چقدر است

ب) احتمال اینکه دو گوی قرمز و یک گوی سیاه باشد چقدر است

الف) ترتیب اهمیت دارد

$P(R1 \cap B2 \cap R3) = (5/12).(7/11).(4/10)$

ب) ترتیب اهمیت ندارد چون در حالت ب دو پیش آمد ناسازگارند با هم جمع میشوند

$P(RBR \text{ or } RRB \text{ or } BRR) = 3 * P(RBR) = 3.[(5/12).(7/11)].(4/10)]$

ب) برای حالت ب میتوانستیم از فرمول ترکیب استفاده کنیم

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{7}{1}}{\binom{12}{3}}$$

۹۶) مثال

یک سکه دو بار پرتاب میکنیم احتمال اینکه دفعه اول شیر و دفعه دوم خط بیاید چقدر است
چون دومی مستقل از اولی است

$$P(H \cap T) = P(H).P(T \mid H) = P(H).P(T) = (1/2).(1/2) = 1/4$$

۹۷) مثال

میزی دارای ۳ کشو است کشو اول ۵ سکه طلا و ۷ سکه نقره کشو دوم دارای ۳ سکه طلا و ۳ سکه نقره کشو سوم دارای ۹ سکه طلا و ۲ سکه نقره میباشد یک کشو بتصادف انتخاب و یک سکه بیرون کشیدیم مشاهده شد طلا است احتمال اینکه از کشو دوم باشد چقدر است

5G,7S 3G,3S 9G,2S

E1=پیش آمد انتخاب کشو اول E2=پیش آمد انتخاب کشو دوم E3=پیش آمد انتخاب کشو سوم

A=پیش آمد سکه طلا

$$P(E2 \downarrow A) = \frac{P(E2).P(A\downarrow E2)}{P(E1).P(A\downarrow E1) + P(E2).P(A\downarrow E2) + P(E3).P(A\downarrow E3)}$$

$$= \frac{(1/3)(3/6)}{(1/3)(5/12) + (1/3)(3/6) + (1/3)(9/11)} =$$

۹۸) مثال

در هفته آینده بدلیل تعمیرات یک واحد از پنج واحد نیروگاهی در مدار است (خروج واحد یعنی خاموشی)
پنج روز هفته آینده مناسبتهایی در سطح شهر است که اهمیت محاسبه احتمال خاموشی را نیاز داریم
در روز شنبه احتمال خروج واحد ۷۰٪ در روز یکشنبه و سه شنبه احتمال خروج واحد ۴۰٪
در روز دوشنبه و چهار شنبه احتمال خروج واحد ۲۰٪ میباشد
در یک روز در هفته آینده مشاهده شد خاموشی بوجود آمده احتمال اینکه این روز دوشنبه باشد چقدر است

$$P(E0) = P(E1) = ... = 1/5 = 0.2$$

$$P(E2 \downarrow A) = \frac{P(E2).P(A\downarrow E2)}{P(E0).P(A\downarrow E0) + P(E1).P(A\downarrow E1) + P(E2).P(A\downarrow E2) + P(E3).P(A\downarrow E3) + P(E4).P(A\downarrow E4)}$$

$$= \frac{(0.2)(0.2)}{(0.2)(0.7) + (0.2)(0.4) + (0.2)(0.2) + (0.2)(0.4) + (0.2)(0.2)} =$$

کامپیوتر و توابع اکسل و آمار و احتمالات

تابع میانگین حسابی	=AVERAGE(محدوده)
ترکیب	=COMBIN(تعدادآزمایش,تعداد موفقیت)
تابع محاسبه دو جمله ای	=BINOMDIST(تعدادموفقیت , تعداد آزمایش , احتمال موفقیت, مقـدار منطقی)

۹۹) مثال :

پرتاب یک سکه دو احتمال ۵۰٪ را بدنبال دارد اگر این سکه ۳۰ بار پرتاب شود
کل تعداد حالات که ۱۲ شیر حاصل شود چقدر است

$$\binom{30}{12} = \frac{30!}{(30-12)!12!} = 86493225$$

=COMBIN(30,12)= 86493225

احتمال اینکه ۱۲ بار شیر بیاید چقدر است (مقدار منطقی FALSE)

$$P(x=12) = \binom{30}{12} 0.5^{12} 0.5^{30-12} = 0.08$$

=BINOMDIST(12,30,0.5,FALSE)=0.08

احتمال اینکه حداکثر ۱۲ بار شیر بیاید چقدر است(مقدار منطقی TRUE)

$$P(x \le 12) = \sum_{x=0}^{12} \binom{30}{x} 0.5^{x} 0.5^{30-x} = 0.18$$

=BINOMDIST(12,30,0.5,TRUE)=0.18

☜

تابع محاسبه ضریب همبستگی	=intercept(مجموعه مستقل , مجموعه وابسته)

۱۰۰) مثال

ضریب همبستگی بین دو سری اعداد زیر بدست آورید

x = 1,3,4,6,8,9,11,14
y = 1,2,4,4,5,7, 8, 9

$$y = a + bx$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} \quad , \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \Rightarrow y = a + bx$$

y = a+bx
b = 7/11=0.636
Xavg=7
Yavg=5
a = 5-(7/11)*7=6/11
y = 6/11+(7/11)x
y=0.545+0.637x

اگر سری مستقل x را از a1 تا a8 نوشته و سری وابسته y را از b1 تا b8 آنگاه

=intercept(b1:b8; a1:a8)=0.545

☜

تابع محاسبه فاصله میانگین جامعه	=confidence(آلفا , انحراف معیار , اندازه نمونه)

مثال ۱۰۱)

با آلفا ۵٪ و انحراف معیار ۲.۵ و اندازه نمونه ۵۰ فاصله اطمینان میانگین جامعه را حساب کنید
یک منهای آلفا بیانگر ۹۵٪ اطمینان است

=confidence(0.05,2.5,50)=0.69

☜

تابع محاسبه توزیع دو جمله ای تجمعی مشروط	=critbinom(تعداد تلاشها , احتمال موفقیت , آلفا)

مثال ۱۰۲)

سکه ای را ۱۰ بار پرتاب میکنیم احتمال شیر در هر بار ۵۰٪ میباشد برای اینکه با اطمینان ۷۵٪ بگوییم شیر بیاید حداقل چند پرتاب کنیم

=critbinom (10,0.5,0.75)=6

☜

تابع محاسبه واریانس نمونه	=var (محدوده)

1,3,4,6,8,9,11,14
=var(1,3,4,6,8,9,11,14)=18.85

☜

تابع محاسبه واریانس جامعه	=varp (محدوده)

1,3,4,6,8,9,11,14
=varp(1,3,4,6,8,9,11,14)=16.5

۱۰۳)مثال کمک مثال ۴۸

ظرفی محتوی پنج گوی ۳ گوی قرمز و ۲ گوی سیاه است تمام گویها شماره گذاری شده است
ازدرون ظرف یک گوی را بیرون میاوریم
الف) احتمال قرمز بودن؟ ب) احتمال قرمز شماره ۲ بودن؟
از درون ظرف دو گوی را یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم
ج)احتمال اینکه گوی اول قرمز و گوی دوم سیاه باشد چقدر است
د) احتمال گوی اول قرمز شماره۲ و گوی دوم سیاه شماره ۱ باشد
ه) احتمال اینکه یک گوی قرمز و یک گوی سیاه باشد
و) احتمال اینکه یک گوی قرمز شماره ۲ و یک گوی سیاه شماره ۱ باشد
از درون ظرف یک گوی بیرون آورده و به آن نگاه کرده بداخل ظرف باز میگردانیم سپس گوی دوم را بیرون میاوریم و نگاه میکنیم (با جایگزینی)
ح)احتمال اینکه گوی اول قرمز و گوی دوم سیاه باشد چقدر است
ط) احتمال گوی اول قرمز شماره۲ و گوی دوم سیاه شماره ۱ باشد
ی) احتمال اینکه یک گوی قرمز و یک گوی سیاه باشد
ک) احتمال اینکه یک گوی قرمز شماره ۲ و یک گوی سیاه شماره ۱ باشد

بدون جایگزینی
الف) احتمال قرمز بودن

$S = \{R1, R2, R3, B1, B2\}$

$A = \{R1, R2, R3\}$

$P = 3/5$

ب)احتمال قرمز بودن شماره ۲

$S = \{R1, R2, R3, B1, B2\}$

$A = \{R2\}$

$P = 1/5$

ج)از درون ظرف دو گوی را یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم

S={G1G2,G1G3,G1B1,G1B2 G2G1,G2G3,G2B1,G2B2
G3G1,G3G2,G3B1,G3B2 B1G1,B1G2,B1G3,B1B2 B2G1,B2G2,B2G3,B2B1
}
S=20

احتمال اینکه گوی اول قرمز و گوی دوم سیاه باشد چقدر است
از روی دو مجموعه فوق کلیه حالتهای **GB**

A={G1B1,G1B2,G2B1,G2B2,G3B1,G3B2}
A=6
P(A)=(A/S)=6/20=3/10

روش دیگر

$S1 = \{R1, R2, R3, B1, B2\}$

$A1 = \{R1, R2, R3\}$

$P(R) = 3/5$

$S2 = \{R1, R2, B1, B2\}$

$A2 = \{B1, B2\}$

$P(B) = 2/4$

$$OR \quad P(B) = P(B \mid R) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{P(B).P(R)}{P(R)} = \frac{(2/4).(3/5)}{3/5} = 2/4$$

P(RandB)=(3/5)(2/4)=6/20=3/10

د) احتمال اولی قرمز شماره ۲ دومی سیاه شماره ۱ باشد

از روی دو مجموعه فوق

A={R2B1}
A=1
P(A)=A/S=1/20=0.05

راه دیگر

P(R2andB1)=(1/5).(1/4)=1/20

ه) احتمال اینکه یک گوی قرمز و یک گوی سیاه باشد

از روی مجموعه فوق

A=12
A={R1B1,R1B2,R2B1,R2B2,R3B1,R3B2,B1G1,B1G2,B1G3,B2G1,B2G2,B2G3}
P(A)=A/S=12/20=0.6

راه دیگر

P(RandB) U P(BandR)=(3/5)(2/4)+(2/5)(3/4)=12/20

روش دیگر (ه)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

$P[(R \cap B) \cup (B \cap R)] = P(R \cap B) + P(B \cap R) = P(R \cap B) + P(B \cap R) =$

$P(R).P(B \mid R) + P(B).P(R \mid B) = [(3/5).(2/4)] + [(2/5).(3/4)]$

میتوانستیم یک حالت بدست آورده در ۲ ضرب کنیم

روش دیگر (ه) برای حالت ه میتوانستیم از فرمول ترکیب استفاده کنیم

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}$$

و) احتمال یک گوی قرمز شماره ۲ و یک گوی سیاه شماره ۱ باشد

از روی مجموعه فوق

A={R2B1,B1R2}
A=2
P(A)=A/S=2/20=0.1

روش دیگر

P(R2andB1) U P(B1andR2) = (1/5).(1/4) + (1/5).(1/4)=2/20=1/10

با جایگزینی

از درون ظرف دو گوی را یکی یکی با جایگزینی بیرون میاوریم

S={ G1G1,G1G2,G1G3,G1B1,G1B2 G2G1,G2G2,G2G3,G2B1,G2B2
G3G1,G3G2,G3G3,G3B1,G3B2 B1G1,B1G2,B1G3,B1B1,B1B2
B2G1,B2G2,B2G3,B2B1,B2B2 }

ز)احتمال اینکه گوی اول قرمز و گوی دوم سیاه باشد چقدر است

از روی مجموعه فوق

A={G1B1,G1B2,G2B1,G2B2,G3B1,G3B2 }
A=6
P(A)=6/25

روش دیگر

$S1 = \{R1, R2, R3, B1, B2\}$

$A1 = \{R1, R2, R3\}$

$P(R) = 3/5$

$S2 = \{R1, R2, R3, B1, B2\}$

$A2 = \{B1, B2\}$

$P(B) = 2/5$

$$OR \quad P(B) = P(B \mid R) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{P(B).P(R)}{P(R)} = \frac{(2/5).(3/5)}{3/5} = 2/5$$

P(RandB)=(3/5)(2/5)=6/25

د) احتمال اولی قرمز شماره ۲ و دومی سیاه شماره ۱ باشد

A={R2B1}
A=1
P(A)=A/S=1/25=0.04

روش دیگر

P(R2andB1)=(1/5).(1/5)=1/25

ه) احتمال اینکه یک گوی قرمز و یک گوی سیاه باشد

A={G1B1,G1B2,G2B1,G2B2,G3B1,G3B2,B1G1,B1G2,B1G3,B2G1,B2G2,B2G3}
A=12
P(A)=A/S=12/25=0.48

روش دیگر

P(RandB) U P(BandR)=(3/5)(2/5)+(2/5)(3/5)=12/25

روش دوم ه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

$$P[(R \cap B) \cup (B \cap R)] = P(R \cap B) + P(B \cap R) = P(R \cap B) + P(B \cap R) =$$

$$P(R).P(B \mid R) + P(B).P(R \mid B) = [(3/5).(2/5)] + [(2/5).(3/5)]$$

میتوانستیم یک حالت بدست آورده در ۲ ضرب کنیم

و) احتمال یک گوی قرمز شماره ۲ یک گوی سیاه شماره ۱ باشد

A={R2B1,B1R2}

A=2
P(A)=A/S=2/25=0.08

روش دیگر

P(R2andB1) U P(B1andR2) = (1/5).(1/5) + (1/5).(1/5)=2/25=0.08

فرمولهای احتمال در مجموعه ها

$P(\Phi) = 0$

$P(A') = 1 - P(A)$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$IF \quad A \cap B = \Phi \qquad P(AandB) = P(A).P(B)$

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$IF \quad B \subset A \quad \mathrm{P(A - B) = P(A) - P(B)}$

☜ نمونه سوال میان ترم و حل آنها)

در جدول زیر نمرات ۱۹ نفر از داتشجویان و فراوانی آنها داده شده.

الف – میانه چه عددی است ب- نما چه عددی است ج – صدک ۷۲ چقدر است

د- میانگین چه مقدار است (دورقم اعشار) ه – واریانس و انحراف معیار چقدر است (دورقم اعشار)

۹	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۶	۱۸	X_i	داده
۱	۱	۲	۴	۵	۴	۲	f_i	فراوانی

حل : داده ها از چپ به راست منظم و مرتب میکنیم

داده	X_i	9	11	12	13	14	16	18
فراوانی	f_i	1	1	2	4	5	4	2
فراوانی تجمعی	Fi	1	2	4	8	13	17	19

نما – نما (مود) داده ای که fi آن از دیگر داده ها دارای فراوانی بیشتر است در اینجا داده ه M=14 میباشد

میانه – باید وسط صف منظم داده ها مشخص کنیم چون داده ها دارای فراوانی است نوشتن تمام آنها (نوشتن تمام ۱۹ داده) جدول بزرگتری میخواهد که بهتر است از فرمول استفاده کنیم

$\frac{n}{2} = \frac{\sum f_i}{2} = \frac{19}{2} = 9.5$ ➔ در سطر Fi ➔ 9.5+ ➔ Fi= 13 ➔ m=14

میانه ۱۴ است و در طبقه i=3 است اگر داده ها پیوسته بود از فرمول زیر استفاده میکردیم

که در آن np=19*(1/2)=8.5 میشد و Cفاصله طبقات و Liکران پایین میباشد

$$Q = L_i + \frac{np-F_{i-1}}{f_i} * C=$$

محاسبه میانگین

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i * f_i}{\sum f_i} = \frac{(18*2)+(16*4)+(14*5)+(13*4)+(12*2)+(11*1)+(9*1)}{1+1+2+4+5+4+2} = \frac{266}{19}$$
$$= 14$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}$$

$$\sigma^2 = \\ = \frac{(9-14)^2*1+(11-14)^2*1+(12-14)^2*2+(12-14)^2*2+(13-14)^2*4+(14-14)^2*5+(16-14)^2*4+(18-14)^2*2}{1+1+2+4+5+4+2} \\ = 4.95$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4.95} = 2.22$$

بنابراین میانگین ۱۴ واریانس ۴.۹۵ و انحراف معیار ۲.۲۲ میباشد

تمرین دوم) میانگین موجودی آب زیر زمین شیراز در چند سال گذشته بصورت زیر روند کاهشی داشته است پیش بینی سال ۹۳ چقدر است.

1384	1385	1386	1387	1388	1389	1390	1391	1393
123000	118000	120000	116000	116000	115000	112000	95000	?

حل : ابتدا داده ها را مرتب و ساده ترمیکنیم

مشخص است که سال داده متغیر و مصرف داده وابسته است سال = X و مصرف =Y

x	1384	1385	1386	1387	1388	1389	1390	1391	1393
Y	123000	118000	120000	116000	116000	115000	112000	95000	?

میتوان از داده Xعددی را کم کرد همه X را از ۱۳۸۸ که داده وسطیX است کم میکنیم تا ضرب و تقسیم های بعدی راحت شود

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	5	
Y	123	118	120	116	116	115	112	95	?	
I	1	2	3	4	5	6	7	8		

									جمع	میانگین
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	-4	-0.5
Y	123	118	120	116	116	115	112	95	915	114.4
X*y	-492	-354	-240	-116	0	115	224	285	-578	
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	44	

$$y = a + bx$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}}$$

$\bar{y} = a + b\bar{x}$ ➔ $\bar{y} = \frac{123+118+\cdots..+95}{8} = \frac{915}{8} 114.4$ $\qquad \bar{x} = \frac{-4-3+\cdots..+2+3}{8} = \frac{-4}{8} - 0.5$ $\qquad a = \bar{y} - b\bar{x}$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}} = \frac{[(-4*123)+(-3*118)+(-2*120)+\cdots+(2*112)+(3*95)] - \frac{(-4-3-3-\cdots.+3+4)(123+118+..+112+95)}{8}}{[(-4)^2+(-3)^2+\cdots+(2)^2+(3)^2] - \frac{(-4-3-2\ldots+2+3)^2}{8}}$$

$$b = \frac{-578 - \frac{(-4)*(915)}{8}}{44 - \frac{(-4)^2}{8}} = \frac{-120.5}{42} = -2.87$$

$\bar{y} = a + b\bar{x}$ ➔ 114.375=a+(-2.87)*(-0.5) ➔ a=112.94

$y = a + bx$ ➔ $y = 112.94 - 2.87x$

X=5 ➔ y=98.5

تمرین سوم) شرکتی ده (۱۰) کامپیوتر دارد ۲ کامپیوتر معیوب و قابل بازسازی نیست و ۵ کامپیوتر معیوب ولی قابل تعمیر است و بقیه سالم است ۳ کامپیوتر میخریم محاسبه کنید موارد ذیل را

الف) احتمال اینکه هر ۳ کامپیوتر سالم باشد؟. ب) احتمال اینکه هر ۳ کامپیوتر معیوب باشد؟

ج) احتمال اینکه هر ۳ کامپیوتر معیوب و قابل تعمیر باشد؟

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع احتمال برای کامپیوتر سالم بنویسید و نمودار رسم کنید

الف)هر سه کامپیوتر سالم (G=سالم3تا -- B=معیوب7تا (2+5) -- E=معیوب۵قابل تعمیر --F=۲معیوب غیر قابل تعمیر

در این سوالات ترتیب مهم نیست پس فرمول کلی ترکیب مینویسیم (**بدون جایگزینی و بدون ترتیب)**

$$P_{GGG} = \frac{\binom{3}{3}\binom{7}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{3!}{3!\,(3-3)!} * \frac{7!}{0!\,(7-0)!}}{\frac{10!}{3!\,(10-3)!}} = \frac{1*1}{120} = \frac{1}{120}$$

ب) هر سه کامپیوتر معیوب

$$P_{BBB} = \frac{\binom{3}{0}\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{3!}{0!\,(3-0)!} * \frac{7!}{3!\,(7-3)!}}{\frac{10!}{3!\,(10-3)!}} = \frac{1*35}{120} = \frac{35}{120}$$

ج) هر سه کامپیوتر معیوب قابل تعمیر باشد

$$P_{EEE} = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{3!}{0!\,(3-0)!} * \frac{2!}{0!\,(2-0)!} * \frac{5!}{3!\,(5-3)!}}{\frac{10!}{3!\,(10-3)!}} = \frac{1*1*10}{120} = \frac{10}{120}$$

د) تابع ها کامپیوترهای سالم بتعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ میتواند باشد

$$P_{BBB}=\frac{\binom{3}{0}\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{1*35}{120}=\frac{35}{120}\quad ;;\ P_{GBB}=\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{3*21}{120}=\frac{63}{120}\quad ;;\ P_{GGB}=\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{3*7}{120}=\frac{21}{120}$$

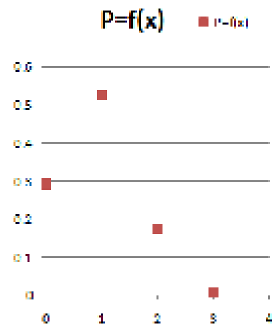
$$P_{GGG}=\frac{\binom{3}{3}\binom{7}{0}}{\binom{10}{3}}=\frac{1*1}{120}=\frac{1}{120}$$

X	0	1	2	3
P=f(x)	35/120	63/120	21/120	1/120
F(x)	35/120	98/120	119/120	120/120

****

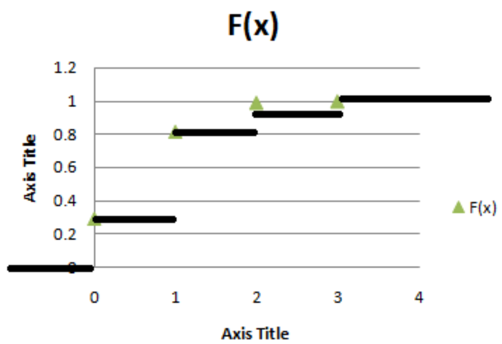
تابع چگالیP=f(x)

X	0	1	2	3
P=f(x)	0.292	0.525	0.175	0.008
F(x)	0.292	0.817	0.992	1.000



****

$$F(x)=\begin{cases}0 & -\infty\le x<0\\ \frac{35}{120} & 0\le x<1\\ \frac{98}{120} & 1\le x<2\\ \frac{119}{120} & 2\le x<3\\ \frac{120}{120} & 3\le x<+\infty\end{cases}$$



تابع توزیع احتمال F(x)

****

نکته‌ها)

نکته ۱ ❋ اگر سوال این بود که احتمال اینکه از این سه کامپیوتر دوتا سالم و یکی معیوب باشد

(بدون جایگزینی و بدون ترتیب)

$P_{GBG}=P_G*P_l$

یا از این فرمول هم میشود

$P(E\cup F)=P($

که در صورت عدم وابستگی و ناسازگاری نوبت ها میتوان نوشت (بدون جایگزینی = بدون وابستگی)

$P(E\cup F)=P($

$P(SSB\cup SBS\,($

نکته ۲ ⁕ اگر سوال این بود که سه کامپیوتر را بصورت یک به یک خارج نموده وپس از مشخص شدن سلامتی و معیوب بودن – آنگاه کامپیوتر دوم خارج میکردیم و .... – آنگاه احتمال اینکه از این سه کامپیوتر بترتیب کامپیوتر اولی سالم و دومی معیوب و کامپیوترسومی سالم باشد

(بدون جایگزینی و با ترتیب)

در این حالت در هر نوبت یک کامپیوتر داریم و از کامپیوترها موجود برای این یک کامپیوتر احتمال را محاسبه میکنیم

در نوبت اول ۱۰ کامپیوتر داریم احتمال یک کامپیوتر سالم را نوشته و در نوبت دوم یک کامپیوتر سفید کم شده بنابراین ۹ کامپیوتر باقیمانده است و احتمال یک کامپیوتر معیوب را نوشته و در نوبت آخر یک کامپیوتر سیاه هم کسر شده و ۸ کامپیوتر باقیمانده و احتمال یک کامپیوتر سفید را حساب میکنیم.

$$P_{1G-2B-3G} = P$$

یا از این روش هم میشود

$$P(A|B) = \frac{P(A}{P}$$

که در صورت عدم وابستگی و ناسازگاری نوبت ها میتوان نوشت (اگر هر نوبت را از نوبت قبلی تفکیک کنیم بدون وابستگی میشود)

$$P(A \cap B) = P$$

$$P(1G \cap 2B \cap$$

نکته ۳ ⁕ اگر سوال این بود که هر بار که مهره را بر میداریم به آن نگاه کرده و مجددا به داخل ظرف مینداختیم احتمال اینکه از این سه کامپیوتر بترتیب کامپیوتر اولی سالم و دومی معیوب و کامپیوترسومی سالم باشد

(با جایگزینی و با ترتیب)

چون در این حالت هر مهره به داخل ظرف اصلی برگشت میکند در هر نوبت مثل این است که از اول شروع میکنیم

$$P_{G-B-G} = P_{1-}$$

یا از این روش هم میشود (چون مهره ها به سرجای اول برگشت میدهیم پس نوبت ها بدون وابستگی است)

$$P(1G \cap 2B \cap$$

تمرین چهارم) سکه ای معیوب داریم که احتمال شیر آن دوبرابر خط است داریم سه بار پرتاب میکنیم تـابع چگـالی احتمال و تابع توزیع احتمال شیر را محاسبه کنید و نمودار رسم کنید

اگر T خط و H شیر باشد و وزن هر خط w باشد وزن هر شیر 2w میشود

										جمع
کل حالات	HHH	HHT	HTH	HTT	THH	THT	TTH	TTT		
تعداد شیر	3	2	2	1	2	1	1	0		
وزن	6W	5W	5W	4W	5W	4W	4W	3W		36W
احتمال	6/36	5/36	5/36	4/36	5/36	4/36	4/36	3/36		

Xتعداد شیر	0	1	2	3
f(x)	3/36	12/36	15/36	6/36
F(x)	3/36	15/36	30/36	36/36

پس از محاسبه تقسیم ها جدول زیر حاصل میشود

Xتعداد شیر	0	1	2	3
f(x)تابع چگالي احتمال	0.083333	0.333333	0.416667	0.166667
F(x)تابع توزیع احتمال	0.083333	0.416667	0.833333	1

$$F(x)=\begin{cases} 0 & -\infty \le x < 0 \\ \frac{3}{36} & 0 \le x < 1 \\ \frac{15}{36} & 1 \le x < 2 \\ \frac{30}{36} & 2 \le x < 3 \\ \frac{36}{36} & 3 \le x < +\infty \end{cases}$$