سیمپلکس تجدید نظر شده:

یکی دیگر از روشهای کارا به منظور حل مسائل برنامه ریزی خطی روش سیمپلکس تجدیدنظر شده است. این روش با استفاده از کلیه اصول و گامهای سیمپلکس و بدون انجام عملیات زائد و ذخیره سازی اطلاعات غیرمفید که حفظ آنها مستلزم بکارگیری حافظه زیاد کامپیوتر است حل مسئله را به انجام می رساند. استفاده از مفاهیم ماتریس ضرورتی اجتناب ناپذیر در روش سیمپلکس تجدیدنظر شده می باشد.

ماتریس

آرایشی است از اعداد و حروف که بصورت زیر نوشته میشود.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

ماتریس نمونه A دارای m سطر و n ستون می باشد و آنرا یک ماتریس از درجه $m*n$ می نامند و بطور خلاصه بصورت A_{m*n} یا $A=[a_{ij}]_{m*n}$ می نویسند که در آن i شماره سطر و j شماره ستون می باشد.

- **جمع و تفریق ماتریسها:**

اگر $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ دو ماتریس با درجه $m*n$ باشند در اینصورت مجموع یا تفاضل آنها قابل تعریف است و حاصل یک ماتریس $m*n$ است که بصورت زیر تعریف می شود.

$A+B=[a_{ij} + b_{ij}]_{m*n}$

$A-B=[a_{ij} - b_{ij}]_{m*n}$

- **ضرب یک عدد در ماتریس:**

اگر یک عدد در یک ماتریس ضرب شود آن عدد در جمیع عناصر آن ماتریس ضرب میشود.

$K.A=K\ [a_{ij}]=[Ka_{ij}]$

- **ضرب ماتریسها:**

برای آنکه ماتریسهای $A=[a_{ij}]_{m*n}$ و $B=[b_{ij}]_{p*q}$ را بتوان در هم ضرب کرد. باید تعداد ستونهای ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد یعنی $n=p$ در اینصورت حاصلضرب دو ماتریس ماتریسی از درجه $m*q$ می باشد.

$(m * n)\ (p * q) \quad \Rightarrow \quad m*q$

❋ مثال

اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد مطلوبست:

الف) $A+B$ ب) $A-B$ ج) $3A$ د) $A.B$

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

ج) $3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 4+0 \\ 0+3 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

- **معکوس یک ماتریس:**

اگر ماتریس $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد معکوس آنرا B^{-1} نمایش داده و از فرمول زیر محاسبه میشود.

$$B^{-1} = \frac{1}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} \begin{bmatrix} \mathrm{d} & -\mathrm{b} \\ -\mathrm{c} & \mathrm{a} \end{bmatrix}$$

❋ مثال

معکوس ماتریس زیر را محاسبه نمائید.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته: معکوس ماتریس واحد همیشه برابر خود ماتریس است.

مراحل روش سیمپلکس تجدید نظر شده:

- مرحله اول: تعیین متغیر ورودی

در این مرحله ضرایب متغییرهای غیراساسی در تابع هدف را با استفاده از رابطه $C_B B^{-1} N - C_N$ پیدا میکنیم. اگر این مقادیر همگی غیرمنفی باشند به جواب بهینه رسیده اید در اینصورت جواب بهینه را با استفاده از روابط زیر محاسبه می کنیم.

$Z = C_B B^{-1} b$

$x_B = B^{-1} b$

در غیراینصورت متغییری را که دارای منفی ترین مقدار است انتخاب می نماییم. این متغیر متغیر ورودی است.

N: Non Basic ماتریس متغییرهای غیراساسی در محدودیتها

B: Basic ماتریس متغییرهای اساسی در محدودیتها

b : اعداد سمت راست

C : تابع هدف

C_N : ضرایب متغییرهای غیراساسی در تابع هدف

C_B : ضرایب متغییرهای اساسی در تابع هدف

B^{-1} : معکوس ماتریس متغییرهای اساسی

- مرحله دوم: تعیین متغیر خروجی

انتخاب متغییر خروجی مستلزم در اختیار داشتن ضرایب متغییر ورودی در محدودیتها و اعداد سمت راست در صورتی که متغییر x_j ورودی باشد a_j ضرایب آنرا نشان داده و بوسیله رابطه زیر محاسبه می شود.

$a_j = B^{-1} \bar{a}_j$

همچنین مقدار اعداد سمت راست از فرمول زیر محاسبه می گردد.

$x_B = B^{-1} b$

آنگاه کمترین مقدار حاصل تقسیم اعداد سمت راست در اعداد ستون لولا (ستون ورودی) متغییر اساسی خروجی را نشان میدهد.

خروجی $Min = \left\{\frac{x_B}{a_j}\right\}$

- مرحله سوم: متغییر اساسی و غیراساسی جدید

متغییرهای اساسی و غیراساسی جدید را تعیین و به گام اول بازگردید.

❋ مثال

$Max\ Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$

$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$ $\qquad$ $3x_1 + x_2 + 3x_3 + S_1 = 30$

$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40$ $\qquad$ $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + S_2 = 40$

مرحله اول

متغیرهای اساسی B

$x_B = [S_1 \quad S_2]$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C_B = [0 \quad 0]$

$b = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}$

متغییرهای غیراساسی N

$X_N = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$

$N = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$C_N = [4 \quad 3 \quad 6]$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

گام اول

$C_B B^{-1} N - C_N$

ورودی

$$[0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} - [4 \quad 3 \quad 6] = \begin{array}{ccc} [-4 & -3 & -6] \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{array}$$

گام دوم

$a_j = B^{-1}\bar{a}_j$

$x_B = B^{-1}b$

$a_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$x_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}$

خروجی

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{30/3} \\ \xrightarrow{40/3} \end{array} \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} 10 \\ 13.3 \end{array}$$

مرحله دوم

$X_N = [x_1 \quad x_2 \quad S_1]$

$x_B = [x_3 \quad S_2]$

$N = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$C_N = [4 \quad 3 \quad 0]$

$C_B = [6 \quad 0]$

$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$b = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}$

$C_B B^{-1} N - C_N$

ورودی

$$[6 \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} - [4 \quad 3 \quad 0] = \begin{array}{ccc} [2 & -1 & 2] \\ x_1 & x_2 & S_1 \end{array}$$

$a_j = B^{-1}\bar{a}_j$

$a_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_B = B^{-1} b$

$x_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{10/_{1/3}} \\ \xrightarrow{10/_{1}} \end{array} \quad \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{cc} x_3 & 30 \\ S_2 & 10 \end{array}$$

خروجی

مرحله سوم

$X_N = [x_1 \quad S_2 \quad S_1]$

$x_B = [x_3 \quad x_2]$

$N = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$C_N = [4 \quad 0 \quad 0]$

$C_B = [6 \quad 3]$

$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$b = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}$

$C_B B^{-1} N - C_N$

$$[6 \quad 3]\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} - [4 \quad 0 \quad 0] = [1 \quad 1 \quad 1]$$

در این مرحله چون تمامی مقادیر غیرمنفی بدست آمد پس متغییر ورودی نداریم و به جواب بهینه رسیده و در نتیجه از فرمولهای زیر مقادیر را محاسبه می کنیم:

$$Z = C_B B^{-1} b \qquad \Longrightarrow \qquad [6 \quad 3]\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} = 70$$

$$x_B = B^{-1} b \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{3} \\ 10 \end{bmatrix}$$

$Z = 70$	$X_3 = \frac{20}{3}$	$X_2 = 10$	$X_1 = 0$	$S_1 = 0$	$S_2 = 0$

سیمپلکس تجدیدنظر شده برای فرمهای غیراستاندارد برنامه ریزی خطی:

❋ مثال

مسئله برنامه ریزی خطی غیراستاندارد زیر را بروش سیمپلکس تجدیدنظر شده حل نمائید.

$Max\ Z = 3x_1 + 3x_2 - MR_2$

$$2x_1 + x_2 \leq 4 \qquad\qquad 2x_1 + x_2 + S_1 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 6 \qquad\qquad x_1 + 2x_2 - S_2 + R_2 = 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad\qquad x_1, x_2, S_1, S_2, R_2 \geq 0$$

مرحله اول

متغیرهای اساسی B

$x_B = [S_1 \quad R_2]$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C_B = [0 \quad -M]$

$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

متغییرهای غیراساسی N

$X_N = [x_1 \quad x_2 \quad S_2]$

$N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$C_N = [3 \quad 2 \quad 0]$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C_B B^{-1} N - C_N$

ورودی

$$[0 \quad -M]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} - [3 \quad 2 \quad 0] = [-3 - M \quad -2M - 2 \quad M]$$

$a_j = B^{-1}\bar{a}_j \qquad\qquad a_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$x_B = B^{-1} b \qquad\qquad x_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{4/1} \\ \xrightarrow{6/2} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}$$

خروجی

مرحله دوم

$$x_B = [S_1 \quad x_2] \qquad X_N = [x_1 \quad R_2 \quad S_2]$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_B = [0 \quad 2] \qquad C_N = [3 \quad -M \quad 0]$$

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} N - C_N$$

ورودی

$$[0 \quad 2]\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} - [3 \quad -M \quad 0] = [-2 \quad 1+M \quad -1]$$

$$a_j = B^{-1}\bar{a}_j \qquad a_j = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1} b \qquad x_B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

خروجی

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{1/(3/2)} \\ \xrightarrow{3/(1/2)} \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \frac{2}{3} \\ 6 \end{array}$$

مرحله سوم

$$x_B = [x_1 \quad x_2] \qquad X_N = [S_1 \quad R_2 \quad S_2]$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_B = [3 \quad 2] \qquad C_N = [0 \quad -M \quad 0]$$

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} N - C_N$$

ورودی

$$[3 \quad 2]\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - [0 \quad -M \quad 0] = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3}+M & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$a_j = B^{-1}\bar{a}_j$

$$a_j = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$$

$x_B = B^{-1}b$

$$x_B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-8}{3} \end{bmatrix}$$

خروجی

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{2/3\,/\,1/3} \\ \xrightarrow{-8/3\,/\,-2/3} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-8}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}$$

مرحله چهارم

$x_B = [S_2 \quad x_2]$

$X_N = [S_1 \quad R_2 \quad x_1]$

$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$C_B = [0 \quad 2]$

$C_N = [0 \quad -M \quad 3]$

$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$C_B B^{-1} N - C_N$

$$[0 \quad 2]\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - [0 \quad -M \quad 3] = [2 \qquad M \quad 1]$$

$$Z = C_B B^{-1} b \qquad \Longrightarrow \qquad [0 \quad 2]\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 8$$

$$x_B = B^{-1} b \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

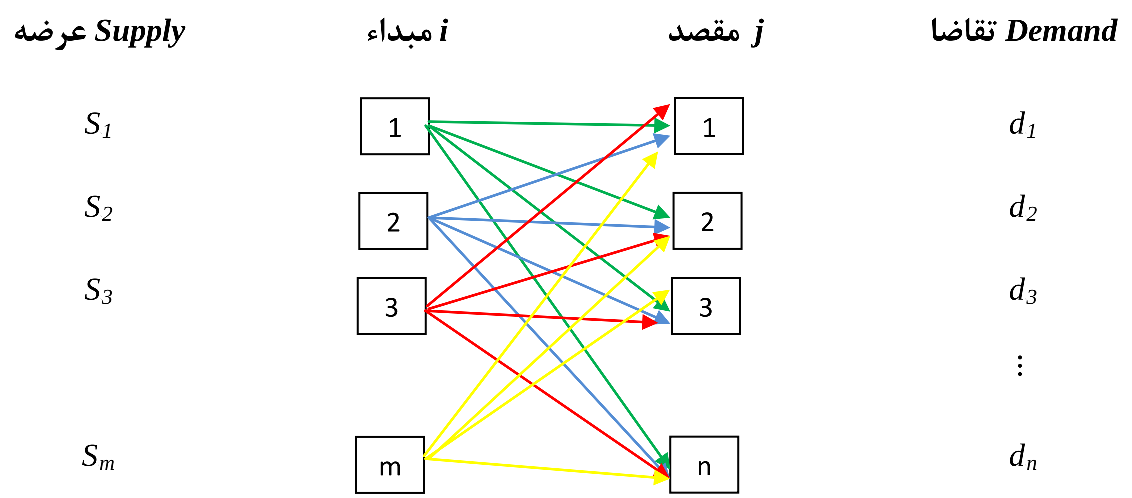
$Z = 8$	$R_2 = 0$	$X_2 = 4$	$X_1 = 0$	$S_1 = 0$	$S_2 = 2$

حمل و نقل:

در این مبحث به نوع خاصی از مسائل برنامه ریزی خطی اشاره خواهد شد که می توان آنرا بروش سیمپلکس حل نکرد. این نوع مسائل را مسائل حمل و نقل می نامند. بخاطر ساختار ویژه این نوع مسائل میتوان آنها را توسط روشهایی حل نمود که محاسباتشان به مراتب کمتر از روش سیمپلکس است. با اینکه مدلهای حمل و نقل را میتوان برای بسیاری از مسائل بکار برد اما کاربرد ویژه حمل و نقل محصولات باعث شده که نام اینگونه مدلها متناسب با کاربردشان باشد. در قلمرو پژوهش عملیاتی حمل و نقل مقدار معینی از یک محصول از m نقطه به عنوان مبداء برای عرضه به n نقطه به عنوان مقصد جهت ارضا (تأمین) تقاضای مقصدها بصورت یک مدل حمل و نقل با توجه به موارد زیر تعریف میگردد.

۱. هزینه حمل معین باشد.

۲. تقاضای مقصدها از طریق عرضه کالا از مبادی (مبداءها) تامین گردد.



اگر x_{ij} بیانگر میزان کالایی باشد که از مبداء i $(i=1,2,3,\dots,m)$ به مقصد j $(j=1,2,3,\dots,n)$ حمل شود مدل برنامه ریزی خطی آن بصورت زیر خواهد بود.

$$Min\ Z = \sum \sum x_{ij} c_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$$

$$x_{ij} \geq 0$$

علاوه بر مطالب فوق فرض بر اینست که $\sum S_i = \sum d_j$

x_{ij} : مقدار کالایی است که از مبداء i به مقصد j حمل میشود

C_{ij} : هزینه حمل هر واحد کالا از مبداء i به مقصد j $(Cost)$

نکته: در مسائل حمل و نقل مهم نیست که تقاضای هر مقصد از کدام مبداء تامین میشود بلکه فقط هزینه حمل و نقل مدنظر ات هدف از مدل حمل و نقل تعیین مقدار کالائی است که باید از مبداء i به مقصد j ارسال شود تا کل هزینه حمل و نقل حداقل گردد.

جدول اصلی مدل حمل و نقل بصورت زیر می باشد.

مقاصد / مبادی	1	2	3	....	n	عرضه
1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	....	C_{1n}	S_1
2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	....	C_{2n}	S_2
3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	....	C_{3n}	S_3
m	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}	....	C_{mn}	S_m
تقاضا	d_1	d_2	d_3	....	d_n	

C_{11} : هزینه حمل هر واحد کالا از مبداء *1* به مقصد *1*

C_{21} : هزینه حمل هر واحد کالا از مبداء *2* به مقصد *1*

C_{32} : هزینه حمل هر واحد کالا از مبداء 3 به مقصد 2

*** مثال**

هدف ارسال محصولی از سه شهر ۱ . ۲ و ۳ به سه شهر B, A و C می باشد. هزینه حمل هر واحد کالا و میزان عرضه و تقاضا در جدول زیر به نمایش درآمده است می خواهیم با حداقل هزینه تقاضای شهرهای فوق را تامین کنیم. این مسئله را بفرم مدل حمل و نقل فرموله نمائید.

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
1	۱۵	۱۲	۲۴	۴۰۰
2	۷	۸	۱۵	۳۰۰
3	۲۷	۱۸	۲۱	۱۰۰
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰	۸۰۰

جدول مدل حمل و نقل را به صورت زیر نمایش میدهند.

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
1	X_{1A} ۱۵	X_{1B} ۱۲	X_{1C} ۲۴	۴۰۰
2	X_{2A} ۷	X_{2B} ۸	X_{2C} ۱۵	۳۰۰
3	X_{3A} ۲۷	X_{3B} ۱۸	X_{3C} ۲۱	۱۰۰
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰	۸۰۰

X_{1A} : مقدار کالایی که از مبداء 1 به مقصد A حمل میشود.

X_{3B} : مقدار کالایی که از مبداء 3 به مقصد B حمل میشود.

تابع هدف : $Z=15X_{1A}+12X_{1B}+24X_{1C}+7X_{2A}+8X_{2B}+15X_{2C}+27X_{3A}+18X_{3B}+21X_{3C}$

: محدودیتهای عرضه

$X_{1A}+X_{1B}+X_{1C}=400$

$X_{2A}+X_{2B}+X_{2C}=300$

$X_{3A}+X_{3B}+X_{3C}=100$

محدودیتهای تقاضا

$X_{1A}+X_{2A}+X_{3A}=360$

$X_{1B}+X_{2B}+X_{3B}=300$

$X_{1C}+X_{2C}+X_{3C}=140$

ساختار مدل حمل و نقل دارای مشخصات زیر است:

۱. ضرایب تمامی متغییرهای تصمیم در محدودیتها یک است.

۲. هر یک از متغییرهای تصمیم در محدودیتها فقط دوبار ظاهر میشود (یکبار در محدودیتهای عرضه و یکبار در محدودیتهای تقاضا)

۳. مجموع عرضه و تقاضا برابر است

مشخصات فوق امکان حل مسائل حمل و نقل را با الگوریتم حمل و نقل فراهم می آورد. جواب بدست آمده از این طریق همواره جوابی موجه است.

مراحل لازم برای حل مسائل حمل و نقل:

گام اول: مطمئن شوید که مقدار عرضه کل و تقاضای کل برابر است. اگر اینگونه نبود مسئله را بروشی که گفته خواهد شد اصلاح کنید.

گام دوم: یک جواب اساسی موجه ابتدائی بدست آورید

گام سوم: تمامی متغییرهای غیراساسی را بدین منظور که کدامیک می تواند موجب بهبود تابع هدف شود ارزیابی کنید (تعیین متغییر ورودی) اگر متغییری برای بهبود تابع هدف نباشد جواب بهینه است, در غیراینصورت متغییری که بهترین اثر در بهبود تابع هدف را دارد انتخاب کنید و به مرحله چهارم بروید.

گام چهارم: یکی از متغییرهای اساسی فعلی را با حفظ شرایط غیرمنفی بودن متغییرها برای خروج انتخاب کنید.

گام پنجم: جواب اساسی موجه جدید را بدست آورید و به گام سوم برگردید.

بدست آوردن جواب اساسی موجه ابتدائی:

روشهای متعددی برای بدست آوردن جواب موجه ابتدائی وجود دارد که از جمله این روشها عبارتند از:

۱. روش گوشه شمال غربی
۲. روش کمترین هزینه
۳. روش تخمین وگل *Vogel*
۴. روش حداقل سطر

- *روش گوشه شمال غربی*

مراحل:

۱. به خانه واقع در گوشه شمال غربی (گوشه چپ بالایی) جدول حمل و نقل حداکثر مقدار ممکن را اختصاص دهید. (باتوجه به اینکه این مقدار نباید از میزان عرضه و تقاضای سطر وستون مربطه تجاوز کند)
۲. در صورت امکان تخصیص به خانه مجاور خانه قبلی بیشترین مقدار ممکن را اختصاص دهید
۳. مرحله ۲ را آنقدر تکرار کنید تا عرضه و تقاضای تمام سطرها و ستونها برآورده شود.

مبادی \ مقاصد	*A*	*B*	*C*	عرضه
1	*360* $\boxed{۱۵}$	*40* $\boxed{۱۲}$	- $\boxed{۲۴}$	۴۰۰
2	- $\boxed{۷}$	*260* $\boxed{۱۲}$	*40* $\boxed{۱۵}$	۳۰۰
3	- $\boxed{۲۷}$	- $\boxed{۱۸}$	*100* $\boxed{۲۱}$	۱۰۰
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰	۸۰۰

*Z: (360*15)+(40*12)+(260*8)+(40*15)+(100*21)=10660*

- روش کمترین هزینه

مراحل:

۱. بیشترین عدد را به خانه ای اختصاص دهید که کمترین هزینه را داشته باشد سپس مقادیر عرضه و تقاضای مربوط به سطر و ستون مربطه را بیابید

۲. مرحله یک را آنقدر ادامه دهید تا مقادیر عرضه و تقاضای تمام سطرها و ستونها برآورده شود.

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
1	60 [۱۵]	300 [۱۲]	40 [۲۴]	۴۰۰
2	300 [۷]	- [۸]	- [۱۵]	۳۰۰
3	- [۲۷]	- [۱۸]	100 [۲۱]	۱۰۰
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰	۸۰۰

*Z: (60*15)+(300*12)+(40*24)+(300*7)+(100*21)=9660*

نکته: تعداد خانه های پر جدول ***m+n-1***

- روش تخمین وگل

مراحل:

۱. جریمه هر سطر و ستون را بدست آوردی. برای محاسبه جریمه ها در هر سطر و ستون اختلاف بین دو کمترین هزینه در هر سطر یاستون را محاسبه نمایید. **(کمترین)**

۲. سطر یا ستونی را انتخاب نمائید که بیشترین جریمه را داشته باشد. **(بیشترین)**

۳. بیشترین عدد را به خانه ای در جدول حمل و نقل اختصاص دهید که سطر یا ستون مربوط به آن خانه بیشترین جریمه را داشته باشد و ضمنا در سطر یا ستون مربوطه دارای کوچکترین هزینه حمل و نقل باشد. **(کمترین)**

۴. مراحل ۱ و ۲ و ۳ را تکرار کنید تا عرضه و تقاضای مربوط به تمامی سطرها و ستونها برآورده شود. **(بیشترین)**

※ مثال

با استفاده از روش تخمین وگل یک جواب موجه ابتدایی برای مدل حمل و نقل زیر بیابید و هزینه کل را محاسبه نمائید.

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه	مرحله۱	مرحله۲	مرحله۳	مرحله۴
1	60 (۱۵)	300 (۱۲)	40 (۲۴)	۴۰۰	3	3	12	24
2	300 (۷)	- (۸)	- (۱۵)	۳۰۰	1			
3	- (۲۷)	- (۱۸)	100 (۲۱)	۱۰۰	3	3	3	21
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰	۸۰۰				
مرحله۱	8	4	6					
مرحله۲	12	6	3					
مرحله۳		6	3					
مرحله۴			3					

*Z: (60*15)+(300*12)+(40*24)+(300*7)+(100*21)=9660*

- *روش حداقل سطر*

مراحل:

۱. خانه ای که دارای کمترین هزینه در سطر اول است را پیدا می کنیم و حداکثر مقدار ممکن را به این خانه تخصیص دهید

۲. اگر مقدار جدید تقاضا برای یک ستون صفر گردد آن ستون و اگر مقدار جدید عرضه برای یک سطر صفر گردد آن سطر را در عملیات بعدی درنظر نگیرید.

۳. گامهای ۱ و ۲ را به ترتیب برای دومین سطر تا آخرین سطر انجام دهید در صورتیکه تمامی مقادیر عرضه و تقاضا برآورده شده باشد عملیات خاتمه یافته در غیراینصورت عمیات را از سطر اول تکرار نمائید.

※ مثال

با استفاده از روش حداقل سطر یک جواب موجه ابتدایی برای مدل حمل و نقل زیر بیابید.

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
1	60 [۱۵]	300 [۱۲]	40 [۲۴]	۴۰۰
2	300 [۷]	- [۸]	- [۱۵]	۳۰۰
3	- [۲۷]	- [۱۸]	100 [۲۱]	۱۰۰
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰	۸۰۰

*Z: (60*15)+(300*12)+(40*24)+(300*7)+(100*21)=9660*

※ مثال

مدل حمل و نقل زیر را درنظر بگیرید.

الف) با استفاده از روش گوشه شمال غربی یک جواب موجه ابتدائی برای مدل بیابید و هزینه کل را محاسبه نمایید.

ب) با استفاده از روش کمترین هزینه یک جواب موجه ابتدائی برای مدل بیابید و هزینه کل را محاسبه نمایید.

ج) با استفاده از روش حداقل سطر یک جواب موجه ابتدائی برای مدل بیابید و هزینه کل را محاسبه نمایید.

روش گوشه شمال غربی

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
1	150 [۶]	- [۸]	- [۱۰]	۱۵۰
2	50 [۷]	100 [۱۱]	25 [۱۱]	۱۷۵
3	- [۴]	- [۵]	275 [۱۲]	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

*Z: (150*6)+(50*7)+(100*11)+(25*11)+(275*12)=5925*

روش کمترین هزینه

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
1	- [۶]	25 [۸]	125 [۱۰]	۱۵۰
2	- [۷]	- [۱۱]	175 [۱۱]	۱۷۵
3	200 [۴]	75 [۵]	- [۱۲]	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

*Z: (25*8)+(125*10)+(175*11)+(200*4)+(75*5)=4550*

روش حداقل سطر

مقاصد / مبادی	A		B		C		عرضه
1	150	۶	-	۸	-	۱۰	۱۵۰
2	50	۷	-	۱۱	125	۱۱	۱۷۵
3	-	۴	100	۵	175	۱۲	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰		۱۰۰		۳۰۰		۶۰۰

*Z: (150*6)+(50*7)+(125*11)+(100*5)+(175*12)=5225*

نکاتی در رابطه با جداول حمل و نقل

نکته۱: در جداول حمل و نقل متغیرهای اساسی آندسته از متغیرهایی هستند که مقادیری به آنها تخصیص یافته است یا به عبارت دیگر خانه های پر و دارای عدد در فاکتور حمل و نقل بیانگر متغیرهای اساسی هستند.

نکته۲: در جداول حمل و نقل متغیرهای غیراساسی آندسته از متغیرهایی هستند که مقادیری به آنها تخصیص نیافته است یا به عبارت دیگر خانه های خالی در تابلوی حمل و نقل بیانگر متغیرهای غیراساسی هستند

نکته۳: تعداد متغیرهای اساسی در تابلوی حمل و نقل باید برابر *m+n-1* باشد

نابرابری عرضه و تقاضا در تابلوی حمل ونقل:

1. *بیشتر بودن کل عرضه از کل تقاضا در تابلوی حمل و نقل*

اگر مقدار کل عرضه از مقدار کل تقاضا بیشتر باشد باید ستونی تحت عنوان ستون مجازی ایجاد کرد. مقدار هزینه های مربوط به ستون مجازی صفر می باشد و متغیرهای مربوط به ستون مجاز را متغیرهای مجازی می نامند. مقادیر تخصیص یافته به متغیرهای مجازی هیچگونه مفهومی ندارند و به معنی عرضه مازادی

است که قابل حمل به مقصد نمی باشد. هزینه حمل و نقل مربوط به متغییرهای مجازی باید صفر باشد. به عبارت دیگر کالای حمل نشده هزینه ای نخواهد داشت

❋ مثال

تابلوی حمل و نقل نامتوازن زیر داده شده است ضمن متعادل کردن آن جواب موجه اولیه آنرا بروش گوشه شمال غربی پیدا کنید.

مقاصد / مبادی	*A*	*B*	*C*	*D* (مجازی)	عرضه
1	*100* [۶]	*20* [۸]	- [۱۰]	- [۰]	۱۲۰
2	- [۷]	*30* [۱۱]	*150* [۱۱]	*0* [۰]	۱۸۰
3	- [۴]	- [۵]	- [۱۲]	*100* [۰]	۱۰۰
تقاضا	۱۰۰	۵۰	۱۵۰	۱۰۰	۴۰۰ / ۳۰۰

نکته: یک متغییر اساسی با مقدار صفر در تابلوی حمل و نقل وجود دارد. این امر بخاطر آنست که بطور همزمان سطر دوم و ستون C صفر شده اند (ظرفیت تکمیل شده) طبق خاصیت بیان شده هرگاه یک سطر و ستون بطور همزمان صفر شوند می بایست بمنظور رعایت تعداد متغییرهای اساسی *(m+n-1)* در تابلوی حمل و نقل یک متغییر اساسی با مقدار صفر تعریف نمود. در صورتیکه تابلوی حمل و نقل دارای متغییر اساسی صفر باشد گفته میشود که مدل حمل و نقل دارای حالت خاص تبهگنی (تباهیدگی) است.

*Z: (100*4)+(20*8)+(30*5)+(150*4)+(0*0)+(100*0)=1310*

۲. *بیشتر بودن کل تقاضا از کل عرضه در تابلوی حمل و نقل*

اگر مقدار کل تقاضا از مقدار کل عرضه بیشتر باشد به منظور متوازن کردن تابلوی حمل و نقل می بایست یک سطر عرضه با مقدار عرضه معادل اختلاف تقاضای کل نبت به عرضه کل به تابلوی حمل و نقل اضافه کرد سطر اضافه شده را سطر مجازی گویند و هزینه حمل تمام متغییرهای آن برابر صفر است.

❊ مثال

تابلوی حمل و نقل نامتوازن زیر داده شده است پس از متوازن ساختن آن جواب موجه ابتدائی آنرا با استفاده از روش کمترین هزینه محاسبه نمائید.

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
1	- ۶	- ۸	50 ۱۰	۵۰
2	- ۷	- ۱۱	120 ۱۱	۱۲۰
3	50 ۴	120 ۵	10 ۱۲	۱۸۰
4 (مجازی)	50 ۰	- ۰	- ۰	۵۰
تقاضا	۱۰۰	۱۲۰	۱۸۰	۳۵۰ / ۴۰۰

$Z: (50*25)+(120*15)+(50*6)+(120*7)+(10*10)+(50*0)=4290$

فنون یافتن جواب بهینه در مدل حمل و نقل:

۱. روش سنگ پله ۲. روش توزیع اصلاح شده

۱. روش سنگ پله

پس از یافتن جواب موجه اولیه یا ابتدائی بوسیله هر یک از روشهای چهارگانه ذکر شده قدم بعدی حل مدل حمل و نقل برای یافتن جواب بهینه است یعنی جوابی که هزینه کل حمل و نقل را حداقل کند. یکی از روشهای متداول برای حل مدل جهت بررسی شرط بهینگی و یافتن جواب بهینه روش سنگ پله است هدف

از بکارگیری روش سنگ پله بررسی میزان تاثیر اختصاص کالا به هر یک از خانه های خالی جدول اولیه مدل حمل و نقل بر روی هزینه کل است. بعبارت دیگر هدف اینست که تاثیر حمل کالا از هر یک از مسیرهایی که براساس جواب موجه اولیه بلااستفاده هستند بررسی شوند. بدین معنی که آیا تخصیص کالا از مسیرهای فعلی به مسیرهای بلااستفاده موجب کاهش هزینه حمل و نقل خواهد شد یا خیر؟ در صورتیکه مسیری پیدا شود که تخصیص کالا به آن مسیر منجر به کاهش هزینه کل شود می بایست حداکثر مقدار ممکن را به آن مسیر اختصاص داد.

مراحل روش سنگ پله:

۱. مسیر سنگ پله کلیه متغییرهای غیراساسی (خانه های خالی) را ترسیم نمائید.
۲. مقدار متغییر در هزینه کل تابلوی حمل و نقل را به ازای تخصیص یک واحد کالا به خانه های خالی با استفاده از مسیر سنگ پله محاسبه نمائید.
۳. در صورتیکه مقادیر بدست آمده از مسیر سنگ پله برای خانه های خالی جدول (+) مثبت یا صفر بودند توقف کنید در غیراینصورت به مرحله بعد بروید.
۴. خانه ای را که دارای منفی ترین مقدار است را به عنوان متغییر ورودی (مسیر جدید حمل و نقل) انتخاب نمائید.
۵. مسیر سنگ پله متغییر ورودی جدید (خانه خالی دارای منفی ترین) را درنظر بگیرید و با توجه به خانه هایی که دارای علامت ۱- هستند و در راس مسیر سنگ پله قرار دارند مقدار تخصیص به متغییر ورودی جدید را معین کنید. حداکثر مقدار ممکن قابل تخصیص به متغییر ورودی جدید از قاعده کوچکترین مقدار مربوط به خانه های با علامت ۱- در مسیر سنگ پله بدست می آید.
۶. با تعیین متغییر خروجی یا خانه ای که مقدار آن باید برابر صفر گردد. علامت انتقال را برای ترسیم تابلوی جدید حمل و نقل انجام دهید. برای ترسیم تابلوی جدید حمل و نقل متغییرهای اساسی خارج از مسیر سنگ پله را عینا بنویسید و در در مسیر سنگ پله به متغییر اساسی جدید حداکثر مقدار ممکن را (کوچکترین مقدار مربوط به خانه های با علامت ۱-) تخصیص دهید و این مقدار را از متغییرهای اساسی دارای علامت ۱- مسیر سنگ پله کم کرده و به خانه های با علامت ۱+ اضافه نمایید تا اینکه مقدار تخصیص متغییر خروجی صفر شود.
۷. مراحل ۱ تا ۶ را آنقدر تکرار کنید تا کلیه مقادیر بدست آمده از مسیرهای سنگ پله برای خانه های خالی غیرمنفی شود.

روش ترسیم مسیر سنگ پله:

۱. مسیر سنگ پله همواره از یک خانه خالی به عنوان مبداء آغاز میشود از یک مسیر بسته و منحصر به فرد از خانه های که دارای عدد هستند می گذرد و در نهایت به همان خانه خالی مبداء ختم میشود.

۲. در ایجاد یک مسیر سنگ پله میتوان از خانه های خالی یا پر عبور کرد ولی محل چرخش مسیر حتما باید یک خانه پر باشد.

۳. پس از هر حرکت افقی باید یک حرکت عمودی و پس از هر حرکت عمودی باید یک حرکت افقی صورت پذیرد. بنابراین در هر سطر و ستون هر واحد افزایش (۱+) باید با یک واحد کاهش (۱-) همراه باشد.

❋ مثال

مبادی \ مقاصد	A	B	C	عرضه
1	- $\boxed{۶}$ +1	25 $\boxed{۸}$ -1	125 $\boxed{۱۰}$	۱۵۰
2	- $\boxed{۷}$	- $\boxed{۱۱}$	175 $\boxed{۱۱}$	۱۷۵
3	200 $\boxed{۴}$ -1	75 $\boxed{۵}$ +1	- $\boxed{۱۲}$	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

1A: 1A → 1B → 3B → 3A → 1A *6-8+5-4=-1*

مبادی \ مقاصد	A	B	C	عرضه
1	- $\boxed{۶}$	25 $\boxed{۸}$ -1	125 $\boxed{۱۰}$ +1	۱۵۰
2	- $\boxed{۷}$ +1	- $\boxed{۱۱}$	175 $\boxed{۱۱}$ -1	۱۷۵
3	200 $\boxed{۴}$ -1	75 $\boxed{۵}$ +1	- $\boxed{۱۲}$	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

2A: 2A → 2C → 1C → 1B→ 3B → 3A→ 2A *7-11+10-8+5-4=-1*

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
1	- ۶	25 ۸ -1	125 ۱۰ +1	۱۵۰
2	- ۷	- ۱۱ +1	175 ۱۱ -1	۱۷۵
3	200 ۴	75 ۵	- ۱۲	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

2B: 2B → 2C → 1C → 1B→ 2B *11-11+10-8=2*

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
1	- ۶	25 ۸ +1	125 ۱۰ -1	۱۵۰
2	- ۷	- ۱۱	175 ۱۱	۱۷۵
3	200 ۴	75 ۵ -1	- ۱۲ +1	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

3C: 3C → 1C → 1B→ 3B → 3C *12-10+8-5=5*

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
1	25 ۶ +1	- ۸ -1	125 ۱۰	۱۵۰
2	- ۷	- ۱۱	175 ۱۱	۱۷۵
3	175 ۴ -1	100 ۵ +1	- ۱۲	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

*Z: (25*6)+(125*10)+(175*4)+(100*5)+(175*11)= 4525*

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
1	25 ۶ -1	- ۸ +1	125 ۱۰	۱۵۰
2	- ۷	- ۱۱	175 ۱۱	۱۷۵
3	175 ۴ +1	100 ۵ -1	- ۱۲	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

1B: 1B → 1A → 3A → 3B→ 1B *8-6+4-5=1*

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
1	25 ۶ -1	- ۸	125 ۱۰ +1	۱۵۰
2	- ۷ +1	- ۱۱	175 ۱۱ -1	۱۷۵
3	175 ۴	100 ۵	- ۱۲	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

2A: 2A → 2C → 1C → 1A→ 2A *7-11+10-6=0*

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
1	25 ۶ -1	- ۸	125 ۱۰ +1	۱۵۰
2	- ۷	- ۱۱ +1	175 ۱۱ -1	۱۷۵
3	175 ۴ +1	100 ۵ -1	- ۱۲	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

2B: 2B → 2C → 1C → 1A→ 3A→ 3B → 2B *11-11+10-6+4-5=3*

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
1	25 ۶ +1	- ۸	125 ۱۰ -1	۱۵۰
2	- ۷	- ۱۱	175 ۱۱	۱۷۵
3	175 ۴ -1	100 ۵	- ۱۲ +1	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

$3C: 3C \rightarrow 3A \rightarrow 1A \rightarrow 1C \rightarrow 3C$ $\qquad$ $12-4+6-10=4$

با توجه به اینکه همه مقادیر مثبت و صفر شده پس جدول حمل و نقل همان طور می ماند و مقدار Z بهینه می باشد.

۲. <u>روش توزیع اصلاح شده</u>

این روش شکل اصلاح شه روش سنگ پله است. در روش توزیع اصلاح شده تغییرات هزینه مربوط به خانه های خالی در جدول حمل و نقل بصورت مجزا و بطور ریاضی حمل میشود. بی آنکه مسیرهای سنگ پله مربوط به آنها رسم شود.

مراحل روش توزیع اصلاح شده:

۱. با استفاده از یکی از روشهای یافتن جواب موجه اولیه یک جواب اولیه برای مدل حمل و نقل پیدا نمایید.

۲. برای هر خانه پایه ای یا اساسی (پر) در جدول حمل و نقل مقادیر u_i و v_j را با استفاده از رابطه $u_i + v_j = C_{ij}$ بیابید

۳. برای هر خانه غیراساسی (خالی) در جدول حمل و نقل تغییر در هزینه را K_{ij} با استفاده از رابطه $K_{ij} = C_{ij} - u_i - v_j$ بیابید.

۴. به آن خانه غیرپایه ای (خالی) که منفی ترین مقدار K_{ij} را داده حداکثر مقدار را اختصاص دهید
سپس براساس روش سنگ پله تخصیص بقیه خانه ها را انجام دهید.

۵. مراحل ۲ تا ۴ را آنقدر تکرار کنید تا تمام مقادیر K_{ij} صفر یا مثبت شود.

❄ مثال

جواب موجه اولیه یک مدل حمل و نقل بشکل زیر می باشد جواب بهینه این مدل را با استفاده از روش توزیع اصلاح شده بیابید.

مقاصد / مبادی	A (V_A)	B (V_B)	C (V_C)	عرضه
1 (U_1)	- ‎[۶]‎ +1	25 ‎[۸]‎ -1	125 ‎[۱۰]‎	۱۵۰
2 (U_2)	- ‎[۷]‎	- ‎[۱۱]‎	175 ‎[۱۱]‎	۱۷۵
3 (U_3)	200 ‎[۴]‎ -1	75 ‎[۵]‎ +1	- ‎[۱۲]‎	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

خانه های پر: $u_i + v_j = C_{ij}$

$\mathbf{1B}:\quad u_1 + v_B = 8 \xrightarrow{\text{فرض } u_1=0} v_B = 8$

$\mathbf{1C}:\quad u_1 + v_C = 10 \xrightarrow{0+v_C=10} v_C = 10$

$\mathbf{2C}:\quad u_2 + v_C = 11 \xrightarrow{u_2+10=11} u_2 = 1$

$\mathbf{3A}:\quad u_3 + v_A = 4 \xrightarrow{-3+v_A=4} v_A = 7$

$\mathbf{3B}:\quad u_3 + v_B = 5 \xrightarrow{u_3+8=5} u_3 = -3$

خانه های خالی: $K_{ij} = C_{ij} - u_i - v_j$

$\mathbf{1A}:\quad \mathbf{6} - u_1 - v_A = 6 - 0 - 7 = -1 \quad \rightarrow \quad v_{1A} = -1$

$\mathbf{2A}:\quad \mathbf{7} - u_2 - v_A = 7 - 1 - 7 = -1 \quad \rightarrow \quad v_{2A} = -1$

$\mathbf{2B}:\quad \mathbf{11} - u_2 - v_B = 11 - 1 - 8 = 2 \quad \rightarrow \quad v_{2B} = 2$

$\mathbf{3C}:\quad \mathbf{12} - u_3 - v_C = 12 + 3 - 10 = 5 \quad \rightarrow \quad v_{3C} = 5$

با توجه به اینکه مقدار $v_{1A} = -1$ شده پس مسیر سنگ پله را برای آن خانه رسم میکنیم و جدول جدید حمل و نقل به صورت زیر تغییر میکند.

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
1	25 (+1) ۶	- ۸	125 (-1) ۱۰	۱۵۰
2	- ۷	- ۱۱	175 ۱۱	۱۷۵
3	175 (-1) ۴	100 ۵	- (+1) ۱۲	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

برای اطمینان از بدست آوردن جوا بهینه مجددا روش توزیع اصلاح شده را ادامه می دهیم.

خانه های پر: $u_i + v_j = C_{ij}$

$\mathbf{1A}$: $u_1 + v_A = 6 \xrightarrow{u_1=0 \text{ فرض}} v_A = 6$

$\mathbf{1C}$: $u_1 + v_C = 10 \xrightarrow{0+v_C=10} v_C = 10$

$\mathbf{2C}$: $u_2 + v_C = 11 \xrightarrow{u_2+10=11} u_2 = 1$

$\mathbf{3A}$: $u_3 + v_A = 4 \xrightarrow{u_3+6=4} u_3 = -2$

$\mathbf{3B}$: $u_3 + v_B = 5 \xrightarrow{-2+v_B=5} v_B = 7$

خانه های خالی: $K_{ij} = C_{ij} - u_i - v_j$

$\mathbf{1B}$: $\mathbf{8} - u_1 - v_B = 8 - 0 - 7 = 1 \rightarrow v_{1B} = 1$

$\mathbf{2A}$: $\mathbf{7} - u_2 - v_A = 7 - 1 - 6 = 0 \rightarrow v_{2A} = 0$

$\mathbf{2B}$: $\mathbf{11} - u_2 - v_B = 11 - 1 - 7 = 3 \rightarrow v_{2B} = 3$

$\mathbf{3C}$: $\mathbf{12} - u_3 - v_C = 12 + 2 - 10 = 4 \rightarrow v_{3C} = 4$

چون تمامی مقادیر مثبت و صفر شده پس همان حالت قبلی حالت بهینه می باشد.

*Z: (25*6)+(125*10)+(175*11)+(175*4)+(100*5)=4525*

نکته: جواب بهینه چندگانه در مدل حمل و نقل

اگر ارزش یکی از خانه های خالی در جدول نهایی حمل و نقل صفر باشد $(k_{ij} = 0)$ مسئله دارای جواب بهینه چندگانه است . به بیان دیگر در مدلهای حمل و نقل هرگاه در جدول نهایی یک یا چند متغییر غیراساسی دارای مشخصه $(k_{ij} = 0)$ باشد مسئله دارای جواب بهینه چندگانه است.

تخصیص (واگذاری):

مدل حمل و نقلی که همواره تعداد عرضه و تقاضا در آن یک واد باشد به مدل تخصیص معروف است این مدل دارای کاربردهای زیادی می باشد که از آن جمله میتوان تخصیص n فرد به n شغل یا n اپراتور به n دستگاه و ... اشاره کرد کلیه مسائل تخصیص دارای ویژگی های اساسی زیر هستند:

۱. موضوعات مورد توجه در مدل تخصیص مانند مشاغل. کارکنان و پروژه ها دارای تعداد محدودی هستند.

۲. تخصیص ها حالت یک به یک دارند به عنوان مثال هر فرد فقط به یک شغل تخصیص می یابد و یک فرد می تواند بیش از یک شغل داشته باشد.

۳. هدف از مدل تخصیص یافتن مناسبترین تخصیص است بطوریکه در آن کل هزینه حداقل و کل سود حداکثر گردد.

روشهای حل مدل تخصیص:

۱. روش شمارش کامل ۲. روش مجارستانی

۱. روش شمارش کامل

فرض کنید در مسئله تخصیص n فرد دارید که می خواهید به n شغل گمارده شود در چنین مسئله ای طبیعی است که با $n!$ جواب مختلف وجود دارد. به عبارت دیگر n شغل را میتوان با $n!$ حالت به n فرد واگذار کرد، یکی از روشهای یافتن جواب بهینه این است که همه جوابها را پیدا کرده و آنها را با یکدیگر از نظر هزینه کل مقایسه کنید. به این روش، روش شمارش کامل گفته میشود.

❊ مثال

مدیر یک سازمان میخواهد به گونه ای کارکنان موجود را در سه شغل بکارگیرد که هزینه استخدام آنها حداقل گردد. تعداد کارکنان موجود در سازمان ۳ نفر میباشد که می بایست هر نفر به یک شغل گمارده شوند. جدول زیر هزینه بکارگیری هر فرد در هر یک از مشاغل را نشان میدهد.

شغل / فرد	G_1	G_2	G_3	عرضه
P_1	15	10	26	۱
P_2	12	11	28	۱
P_3	13	14	22	۱
تقاضا	۱	۱	۱	

حالات	ترکیب	هزینه
1	$P_1G_1 - P_2G_2 - P_3G_3$	15+11+22=48
2	$P_1G_1 - P_2G_3 - P_3G_2$	15+28+14=47
3	$P_1G_3 - P_2G_2 - P_3G_1$	26+11+13=50
4	$P_1G_2 - P_2G_1 - P_3G_3$	10+12+22=44
5	$P_1G_2 - P_2G_3 - P_3G_1$	10+28+13=51
6	$P_1G_3 - P_2G_1 - P_3G_2$	26+12+14=52

۲. روش مجارستانی

این روش، روشی است سریع و کارآمد در حل مسائل تخصیص است و براین قاعده استوار است که اگر مقدار ثابتی از همه عناصر در هر سطر و ستون ماتریس تخصیص کم کرده یا اضافه کنیم هزینه کل به همان اندازه تغییر می کند ولی در تعیین جواب بهینه تخصیص هیچ تغییری ایجاد نمی شود، مراحل روش تخصیص مجارستانی به شرح زیر می باشد:

۱. تشکیل ماتریس هزینه فرصت به شکل زیر:

الف) کوچکترین عدد هر سطر (حتی صفر) عدد هر سطر را از تمام اعداد آن سطر کم کنید و ماتریس جدید را بنویسید.

ب) کوچکترین عدد هر سطر (حتی صفر) عدد هر ستون را از تمام اعداد آن ستون کم کنید و ماتریس جدید را بنویسید.

۲. آزمون بهینگی:

برای انجام آزمون بهینگی لازم است صفرهای ایجاد شده در ماتریس هزینه فرصت را با استفاده از حداقل خطوط افقی و عمودی بپوشانید، این خطوط را خطوط پوششی می نامند که فقط می تواند بصورت افقی و عمودی باشند. چنانچه حداقل خطوط پوششی با بعد ماتریس یعنی n برابر باشد. مسئله حل شده است و میتوان جواب بهینه را بصورت زیر استخراج کنید.

صفری را که در هر سطر وجود دارد انتخاب کنید و آنرا بعنوان یک تخصیص سطر به ستون مربوطه درنظر بگیرید سپس سطر و ستون تخصیص داده شده را از ماتریس هزینه فرصت حذف کنید و این عمل را در مورد سایر سطرها انجام دهید. اما چنانچه حداقل خطوط پوششی کمتر از بعد ماتریس هزینه باشد جواب بهینه هنوز حاصل نشده است و باید ماتریس هزینه فرصت را بهبود داد.

۳. بهبود ماتریس هزینه فرصت:

در این مرحله باید کوچکترین عنصر ماتریس هزینه فر صت که توسط هیچ یک از خطوط پوششی، پوشیده نشده اند را انتخاب کنید و این اعداد را از کلیه اعداد بدون پوشش کم کرده و به اعداد محل تقاطع خطوط پوشش اضافه کنید. سایر اعداد بدون تغییر باقی می ماند در نهایت دوباره به مرحله دوم بازگردید.

شغل / فرد	G_1	G_2	G_3
P_1	10	10	26
P_2	12	11	28
P_3	13	14	22

مرحله اول (کسر سطری)

شغل / فرد	G_1	G_2	G_3
P_1	5	0	16
P_2	1	0	17
P_3	0	1	9

مرحله دوم (کسر ستونی)

شغل / فرد	G_1	G_2	G_3
P_1	5	0	7
P_2	1	0	8
P_3	0	1	0

چون تعداد خطوط پوششی (۲) و بعد ماتریس $n=3$ میباشد و باهم برابر نیستند پس ادامه میدهیم.

شغل / فرد	G_1	G_2	G_3
P_1	4	0	6
P_2	0	0	7
P_3	0	2	0

$n=3$ و خطوط پوششی =۳ پس مسئله حل شده است.

فرد	شغل
P_1	G_2
P_2	G_1
P_3	G_3

برنامه ریزی عدد صحیح:

مدلهای برنامه ریزی عدد صحیح:

سه نوع مختلف مدلهای برنامه ریزی عدد صحیح به شرح زیر است:

۱. مدل عدد صحیح محض
۲. مدل عدد صحیح صفر یا یک
۳. مدل عدد صحیح مختلط

- در مدل عدد صحیح محض تمام متغییرهای تصمیم گیری عدد صحیح هستند
- در مدلهای صفر و یک تمام متغییرهای تصمیم گیری عدد ۰ یا ۱ خواهند بود
- و نهایتا در مدلهای عدد صحیح مختلط برخی از متغییرهای تصمیم گیری عدد صحیح بوده و جوابهای مربوط به این متغییرها باید عدد صحیح باشد.

*** مثال**

در توسعه یک کارگاه تصمیم گرفته شده است تا بر روی خرید ماشینهای پرس و تراش سرمایه گذاری شود برآورده میشود که خرید هر ماشین پرس و هر ماشین تراش سود روزانه را به ترتیب ۱۰۰ و ۱۵۰ ریال افزایش دهند, چون خرید ماشینها به پول نیاز دارند و از سوی دیگر فضای نصب آنها محدود است لذا نمیتوان آنها را به هر مقدار خریداری کرد. قیمت خرید ماشینها و فضای مورد نیاز نصب آنها بصورت زیر است. این مثال را مدلسازی نمائید.

ماشین	فضای مورد نیاز	قیمت خرید
X_1 پرس	۱۵	۸۰۰۰
X_2 تراش	۳۰	۴۰۰۰

بودجه خرید این ماشینها ۴۰۰۰۰ ریال و حداکثر فضایی که برای نصب ماشینهای مذکور وجود دارد ۲۰۰ مترمکعب است. این کارگاه چه تعداد از هر ماشین بخرد تا به حداکثر سود برسد.

$$15x_1 + 30x_2 \leq$$

$$8000x_1 + 400$$

عدد صحیح محض و $x_1, x_2 \geq 0$

چون تعداد دستگاه ها باید عدد صحیح باشد مثلا ۱ دستگاه پرس یا ۲ دستگاه تراش . ولی نمیتوان گفت ۱/۵ دستگاه پرس پس جواب جزء اعداد صحیح محض میباشد ولی اگر مسئله در مورد مقدار هکتار زمین و .... باشد میتوان گفت ۱/۵ هکتار یا ۲/۳ هکتار. در این مورد میتوان گفت جواب جزء اعداد صحیح مختلط میباشد.

❋ مثال

انجمن یک شهر باید درخصوص ساخت امکانات تفریحی تصمیم بگیرند، برای این منظور ۴ امکان تفریحی در نظر گرفته شده است (یک استخر شنا، یک زمین تنیس، یک ورزشگاه، یک سالن ژیمناستیک) انجمن شهر با توجه به محدودیت بودجه و زمینهای موجود در نظر دارد امکاناتی را ایجاد کند که افراد بیشتری از آنها استفاده کنند. تعداد افرادی که از این امکانات استفاده خواهند کرد همراه با هزینه و مقدار زمین مورد نیاز آنها در جدول زیر نشان داده شده است. انجمن شهر برای ایجاد این امکانات ۱۲۰۰۰۰ ریال بودجه و ۱۲ هکتار زمین در اختیار دارند چون زمین مورد استفاده برای ایجاد زمین استخرشنا و زمین تنیس در یک منطقه از شهر قرار دارند لذا فقط یکی از آن دو باید احداث شوند، انجمن شهر کدام یک از این امکانات را ایجاد کند تا روزانه افراد بیشتری از این امکانات برخوردار شوند. این مسئله را فرموله کنید.

مکان تفریحی	تعداد افرادی که دریک روز از این امکانات استفاده میکنند	هزینه برحسب ریال	زمین مورد نیاز برحسب هکتار
X_1 استخرشنا	۳۰۰	۳۵۰۰۰	۴
X_2 زمین تنیس	۹۰	۱۰۰۰۰	۲
X_3 ورزشگاه	۴۰۰	۲۵۰۰۰	۷
X_4 سالن ژیمناستیک	۱۵۰	۹۰۰۰۰	۳

$Max z = 300x_1 + 90x_2 + 400x_3 + 150x_4$

$35000x_1 + 10000x_2 + 25000x_3 + 90000x_4 \leq 120000$

$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 \leq 12$

$x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4 = 0$ یا 1