رئوس مطالب مدار (۲) استاد نادری

۱ـ عناصر تزویج (سلف های تزویج شده) ۲ـ ترانس ها و قضیه تلگان

۳ـ تجزیه و تحلیل شبکه گره ها ۴ـ تجزیه و تحلیل حلقه و کات ست

۵ـ معادلات حالت ۶ـ فرکانس های طبیعی

۷ـ پاسخ فرکانسی ۸ـ قضایای شبکه

۹ـ توابع شبکه ۱۰ـ دوقطبی ها

مراجع: ۱ـ نظریه اساسی مدارها و شبکه ها ارنست کو

۲ـ تحلیل مهندسی مدار ویلیام هیت

امتحان میان ترم هفته اول اردیبهشت ۵ـ۳ نمره شنبه

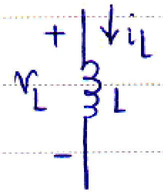
۸۷/۲/۱۴

تکالیف و کار کلاسی ۲ نمره

از فصل آخر جلد اول ارینت کوه.

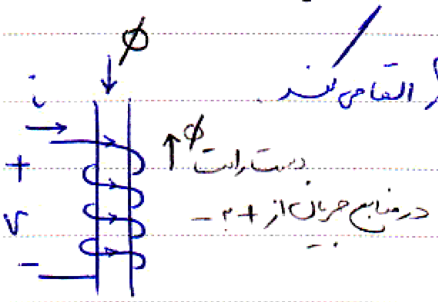
سلف‌های تزویج شده:

در مدارهای الکتریکی (۱) با سلف آشنا شدیم.



$$v_L = \frac{d(Li_L)}{dt} = L\frac{di_L}{dt} + i_L\frac{dL}{dt}$$

در سلف‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان $\frac{dL}{dt} = 0$ ⇐ $v_L = L\frac{di_L}{dt}$



در واقع اگر شار متغیر با زمان $\phi(t)$، سیم پیچی را در بر گیرد در آن ولتاژ القا می‌کند.

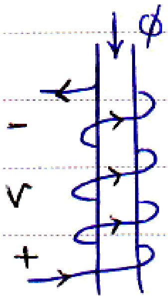
سیم پیچ شکل که هسته با مقدار L ها را می‌دهد.

این سیم پیچ یک سلف L ها را تشکیل می‌دهد. شار پیوندی سلف به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\lambda = Li$$

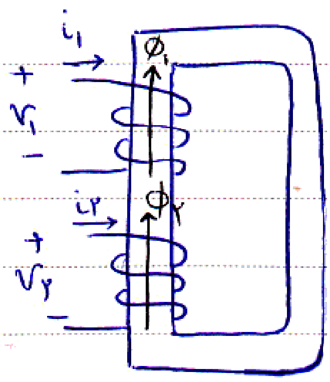
و ولتاژ القایی دو سر سلف عبارت است از: $v = \frac{d\lambda}{dt}$ ⇐ $v = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L\frac{di}{dt}$

پلاریته ولتاژ القایی براساس قانون لنز به نحوی است که جریان عبوری از سیم پیچ سبب تولید شاری شود که با شار به وجود آورنده‌اش مخالفت کند.



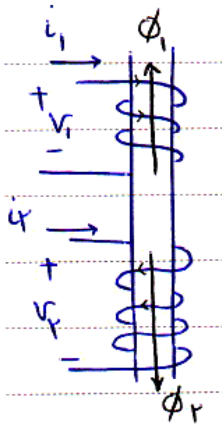
شار $\phi\uparrow$

تذکر 3: با توجه به روابط گفته شده، ولتاژ القایی دو سر یک سلف (سیم پیچ) وابسته به شار عبوری از آن است.



حال دو سیم پیچ را در نظر بگیرید که روی یک هسته بسته شده‌اند.

کل شار عبوری از هر سیم پیچ (شار مشترک) : $\phi = \phi_1 + \phi_2$



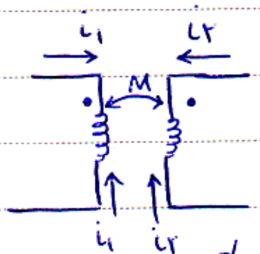
شار مشترک $\phi = \phi_1 - \phi_2$ جهت مثبت به سمت بالا

و می دانیم ولتاژ دو سر هر سلف به شار عبوری از آن ها مربوط است. در مثال های فوق شار عبوری از هر سیم پیچ به سیم پیچ دیگر نیز وابسته است. به چنین حالتی که شار عبوری از سیم پیچ ها به یکدیگر وابسته باشد سلف های تزویج شده می گوییم. تزویج بین سلف ها می تواند به صورت مثبت یا منفی باشد.

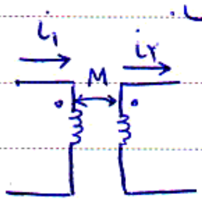
وقتی شار تولید شده توسط یکی موافق با شار تولید شده دیگری باشد تزویج اثر مثبت و در غیر این صورت اثر منفی دارد.

قرارداد در رسم مدار:

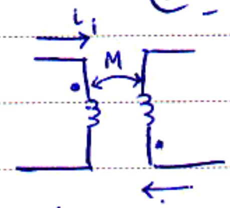
سلف های تزویج شده را با سرهای نقطه دار نشان می دهیم. وقتی ورود یا خروج جریان به سرهای نقطه دار هر دو سلف یکسان باشد تزویج مثبت و در غیر این صورت تزویج منفی است.



$\phi = \phi_1 + \phi_2$



$\phi = \phi_1 - \phi_2$



$\phi = \phi_1 + \phi_2$

در دو سر سلف تزویج شده با ضریب تزویج M شار های عبوری به صورت زیر بیان می شوند:

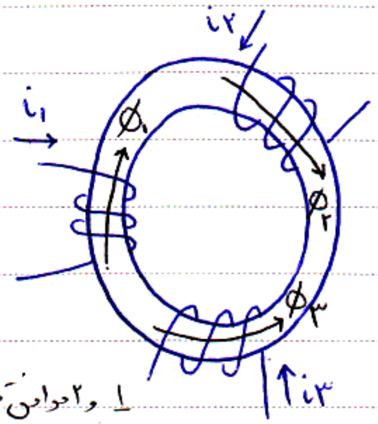
$$\begin{cases} \lambda_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \\ \lambda_2 = \pm M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

$$v = \frac{d\lambda}{dt}$$

$$\begin{cases} V_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} \pm M \dfrac{di_2}{dt} \\ V_2 = \pm M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

مثال) سه سلف تزویج شده زیر را در نظر بگیرید.

ماتریس اندوکتانس به صورت زیر تعریف می‌شود:

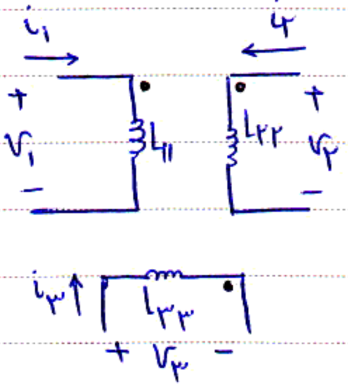


$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix}$$

۱ و ۲ همواره همسو
با ۳ مخالف.

عناصر قطری، اندوکتانس‌های خودی و عناصر غیر قطری، اندوکتانس‌های متقابل است.

با تعیین سرهای نقطه‌دار و رسم مدار، این سه سلف روابط ذکر شده را می‌نویسیم:



$$V_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt} - L_{13}\frac{di_3}{dt}$$

$$V_2 = L_{12}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt} - L_{23}\frac{di_3}{dt}$$

$$V_3 = -L_{13}\frac{di_1}{dt} - L_{23}\frac{di_2}{dt} + L_{33}\frac{di_3}{dt}$$ با ۱ و ۲ مخالف

$$\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$$

مثال روابط در حوزه فازور به صورت زیر خواهد بود:

$$V_1 = (L_{11} j\omega) i_1 + (L_{12} j\omega) i_2 - (L_{13} j\omega) i_3$$

$\vdots$

موازی و جهت جریان خلاف $\lambda_1 = -\lambda_2$

$\lambda_2 = -i_1 + 4i_2 - i_3$

$\lambda_3 = 2i_1 - i_2 + 3i_3$

$$3i_1 - i_2 + 2i_3 = i_1 - 4i_2 + i_3$$

$$\longrightarrow 2i_1 + 3i_2 = -i \quad (1)$$

$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ یا $\lambda = -\lambda_2 + \lambda_3$ سری‌ها

p - 1p اسلاید سیستم ساز برابر اند

$\lambda = 5i_1 - 2i_2 + 5i \quad (2)$

$i = i_1 - i_2 \quad (3) \longrightarrow i_1 = i + i_2$

جایگذاری در (1) و (2)

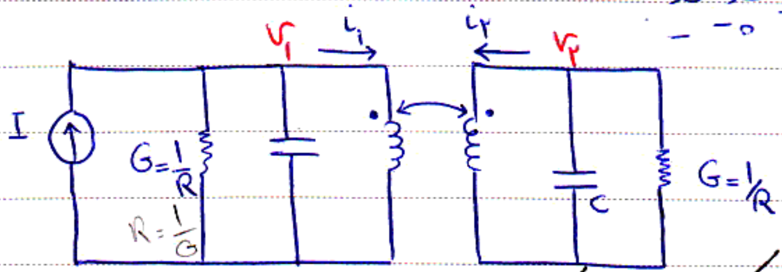
$$2i + 2i_2 + 3i_2 = -i \longrightarrow 3i = -5i_2$$

$$i_2 = -\frac{3}{5}i$$

$$\lambda = 5(\underbrace{i - \tfrac{3}{5}i}_{i_1}) - 2\times\left(-\frac{3}{5}i\right) + 5i \qquad \lambda = 2i + \frac{6}{5}i + 5i$$

$$\lambda = \frac{41}{5}i \longrightarrow L_{eq} = \frac{41}{5}$$

مثال) V_1 و V_2 را با استفاده از آنالیز گره بیابید.



$$L = \begin{bmatrix} L & LK \\ LK & L \end{bmatrix}$$

در سلف‌های موازی راحت‌تریم از ضریب القای معکوس استفاده کنیم.

$$\Gamma = \frac{L}{L^2(1-k^2)}\begin{bmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

حل در حوزه فازور:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{فازور}} j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{فازور}} \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}$$

خازن $C \longrightarrow \frac{1}{Cj\omega}$ $\qquad$ $\lambda \longrightarrow V$ در فازور

$$\Gamma = \frac{1}{j\omega L(1-k^2)} \begin{bmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

در دو سلف تزویج شده

$$\begin{cases} i_1 = \Gamma_{11}(j\omega)V_1 + \Gamma_{12}(j\omega)V_2 \\ i_2 = \Gamma_{12}(j\omega)V_1 + \Gamma_{22}(j\omega)V_2 \end{cases}$$

$$KCL: \quad I = V_1 G + V_1 C\omega j + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}(V_1 - kV_2)$$

$$KCL: \quad V_2 Cj\omega + V_2 G + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}(V_2 - kV_1) = 0$$

$$\begin{cases} I_1 = V_1\left(G + Cj\omega + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\right) - \frac{k}{j\omega L(1-k^2)}V_2 \\ V_2\left(Cj\omega + G + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\right) = \frac{k}{j\omega L(1-k^2)}V_1 \end{cases}$$

دو معادله دو مجهول

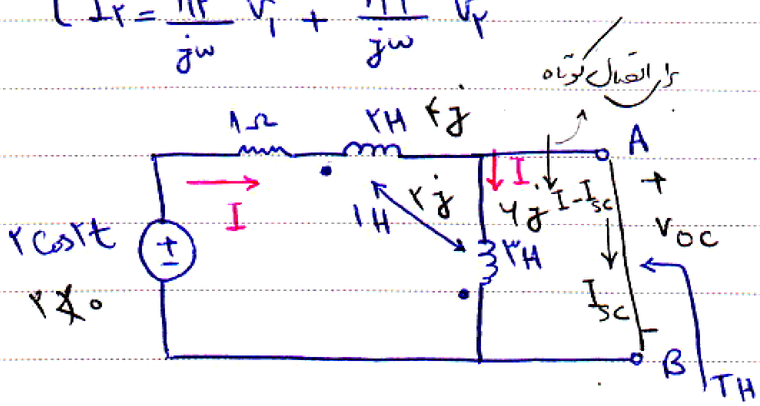
نکته) در حوزه فازور برای دو سلف تزویج شده:

$$\begin{cases} V_1 = L_{11} j\omega I_1 + L_{12} j\omega I_2 \\ V_2 = L_{12} j\omega I_1 + L_{22} j\omega I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\Gamma_{11}}{j\omega}V_1 + \frac{\Gamma_{12}}{j\omega}V_2 \\ I_2 = \frac{\Gamma_{12}}{j\omega}V_1 + \frac{\Gamma_{22}}{j\omega}V_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega}\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

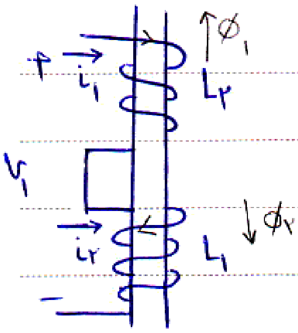
مثال) مدار معادل تونن را بیابید؟



$\omega = 2$

استفاده از معادله دیفرانسیل کامل ترین جواب را می دهد.

مثال) دو سلف تزویج شده سری



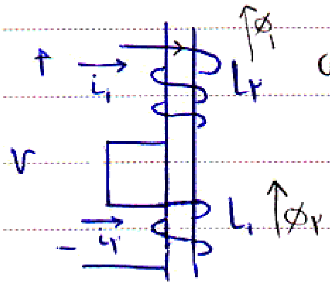
$$i_1 = i_2 = i$$

با توجه به جهت سیم پیچ ها:

$$V = V_1 + V_2$$

$$\begin{cases} V_1 = L_1 \dfrac{di}{dt} - M \dfrac{di}{dt} \\ V_2 = -M \dfrac{di}{dt} + L_2 \dfrac{di}{dt} \end{cases} \rightarrow V = \underbrace{(L_1 + L_2 - 2M)}_{L_{eq}} \frac{di}{dt}$$

تزویج منفی



همه روابط قبلی

$$V = \underbrace{(L_1 + L_2 + 2M)}_{L_{eq}} \frac{di}{dt}$$

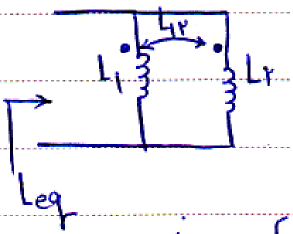
تزویج مثبت

/۱۵/

برای حل هر سوال تستی دارند در فصل زیر:

در دو سلف سری تزویج شده : $L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$

سلف معادل دو سلف تزویج شده موازی:



$$\lambda = Li$$

در دو سلف تزویج شده داریم:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

می توانیم جریان ها را برحسب شارها بنویسیم

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1}}_{\Gamma} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس $\Gamma = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 = \Gamma_{11} \lambda_1 + \Gamma_{12} \lambda_2 \\ i_2 = \Gamma_{12} \lambda_1 + \Gamma_{22} \lambda_2 \end{cases}$$

ضرایب القا معکوس

در سلف های موازی، شارهای پیوندی با هم برابرند.

$$\lambda_1 = \lambda_2 \triangleq \lambda$$

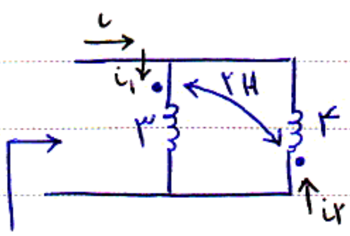
صفحه بعد

$$i_1 = (\Gamma_{11} + \Gamma_{12})\lambda$$

$$i_2 = (\Gamma_{12} + \Gamma_{22})\lambda$$

$$i = i_1 + i_2 = (\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + 2\Gamma_{12})\lambda \qquad i = \underbrace{(\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + 2\Gamma_{12})}_{\Gamma_{eq} = \frac{1}{L_{eq}}}\lambda$$

تمرین)



$L_{eq} = ?$

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \Gamma = \frac{1}{3\times 4 - 2\times 2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 3/8 \end{bmatrix}$$

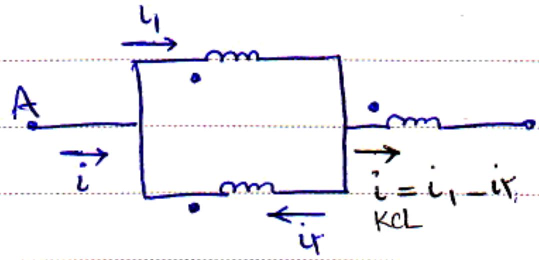
$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda \\ \lambda_2 = -\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_1 = \Gamma_{11}\lambda_1 + \Gamma_{12}\lambda_2 \\ i_2 = \Gamma_{12}\lambda_1 + \Gamma_{22}\lambda_2 \end{cases}$$

چون جهت جریان عکس

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{2}\lambda + (\frac{-1}{4})\times(-\lambda) = \frac{3}{4}\lambda \\ i_2 = (\frac{-1}{4}\times\lambda) + \frac{3}{8}(-\lambda) = -\frac{5}{8}\lambda \end{cases}$$

KCL $\quad i = i_1 - i_2 = (\frac{3}{4} + \frac{5}{8})\lambda = \frac{11}{8}\lambda \qquad i = \frac{11}{8}\lambda \longrightarrow \Gamma_{eq} = \frac{1}{L_{eq}} = \frac{11}{8} \rightarrow L_{eq} = \frac{8}{11}$

مثال) سلف معادل از دو سر AB را بدست آورید.



$$L = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3i_1 - i_2 + 2i_3$$

$i_3 = i$

L_1 و L_3 موافق هردو

با L_2 مخالف

Subject:

Year. Month. Date. تنوع شکل

در حوزه‌ی فازور حل می‌کنیم :

$$KVL: \; 2 = I + 4jI - 2jI + 6jI - 2jI$$

$$V_{oc} = 4jI$$

$$2 = (1+6j)\, I$$

$$I = \frac{2}{1+6j} \qquad V_{oc} = \frac{8j}{1+6j} = 1.29 + 0.21j = 1.307 \angle 9.24^\circ$$

اتصال کوتاه :

$$KVL: \; 2 = I + 4jI - 2j(I - I_{sc})$$

$$2 = I(1+2j) + 2j I_{sc}$$

$$KVL: \; 6j(I - I_{sc}) - 2jI = 0 \longrightarrow 4jI = 6j I_{sc} \longrightarrow \boxed{I = \frac{3}{2} I_{sc}}$$

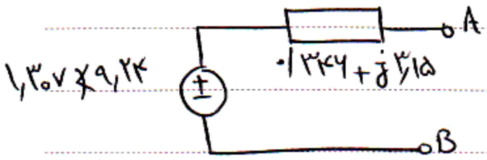
جاگذاری :

$$2 = \left(\frac{3+6j}{2} + 2j\right) I_{sc} = \frac{3+10j}{2} I_{sc}$$

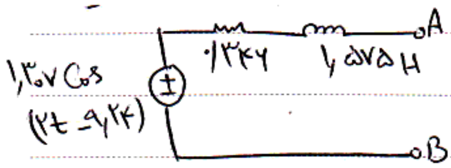
$$I_{sc} = \frac{4}{3+10j} = 0.11 - 0.397j = 0.412 \angle -74.5$$

$$Z_{th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{1.307 \angle 9.24}{0.412 \angle -74.5} = 3.172 \angle 83.74 = 0.344 + j\,3.15$$

مدار معادل تونن :



یا



$$\overset{2}{\downarrow} \; L j\omega = 3.15j$$

مدار معادل T :

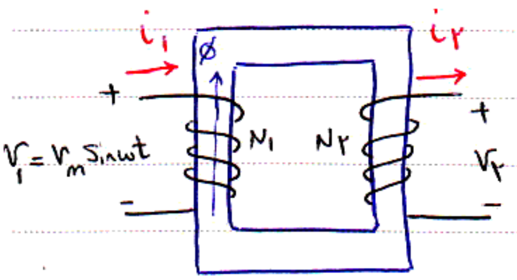
$$\begin{cases} L_a = L_1 - M \\ L_b = L_2 - M \\ L_c = M \end{cases}$$

PAPCO

ضریب تزویج $K = \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$

$(K \leq 1)$

ترانس ایده‌آل :



از یک هسته و دو سیم پیچ تشکیل شده . با اعمال ولتاژ به سیم پیچ اول .

شاری در هسته جاری می‌شود که از رابطه زیر پیروی خواهد کرد :

$$V_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_m}{N_1}\sin\omega t \longrightarrow \phi = \frac{V_m}{N_1\omega}\cos\omega t$$

این شار از سیم پیچ دوم عبور می‌کند و در آن ولتاژ زیر القا می‌شود :

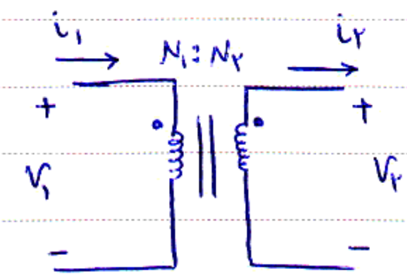
$$V_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{N_2}{N_1}\underbrace{V_m \sin\omega t}_{V_1}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}}$$

$P = Vi$ در ترانس ایده‌آل، تلفات سیستم صفر فرض می‌شود ، بنابراین قدرت لحظه‌ای دو سیم پیچ برابر است

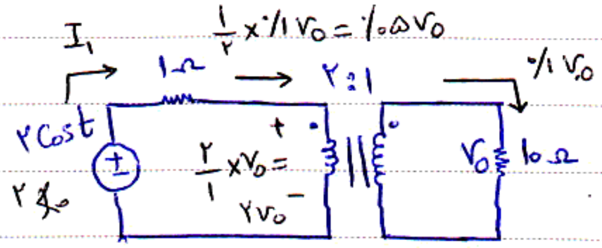
$$V_1 i_1 = V_2 i_2 \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{i_2}{i_1} \longrightarrow \boxed{\frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2}} \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{i_2}{i_1}$$

سمبل گرافیکی :



مثال) قدرت کشیده شده از منبع را به دست آورید ؟
ولتاژ خروجی را ؟ (V_o)

از فازور استفاده نمی‌کنیم چون سلف و خازن نداریم.



در ترانسفورماتورها جهت جریان از سر نقطه‌دار به یکی وارد و از دیگری خارج می‌شود

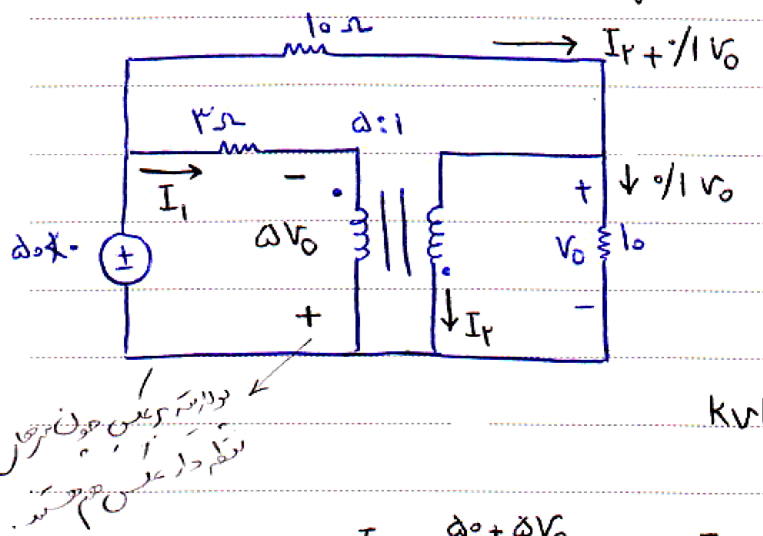
$$KVL:\ 2\cos t = 1\times 0.05\,V_o + 2V_o$$

$$2\cos t = 2.05\,V_o \longrightarrow V_o = 0.975\cos t$$

$$I_1 = 0.05\,V_o = 0.0487\cos t = 0.0487\angle 0 \qquad V_{rms}=\frac{V}{\sqrt{2}} \qquad I_{rms}=\frac{I}{\sqrt{2}}$$

قدرت منبع $P = V_{rms}\times I_{rms} = \frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{0.0487}{\sqrt{2}} = 0.0487\ W$

مثال) V_o را بدست آورید.



$$I_1 = \frac{1}{5}I_2 \longrightarrow I_2 = 5I_1$$

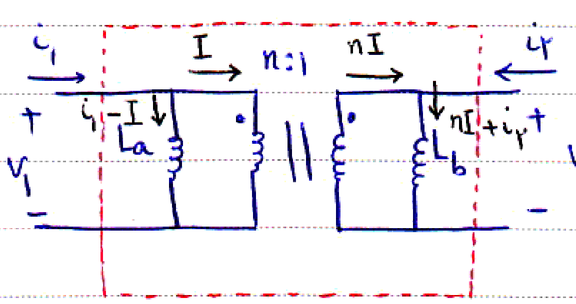
$$KVL:\ 50 = 3I_1 - 5V_o$$

$$I_1 = \frac{50+5V_o}{3} \longrightarrow I_2 = \frac{250+25V_o}{3}$$

$$KVL:\ 50 = 10(I_2 + 0.1V_o) + V_o \longrightarrow 50 = 10I_2 + 2V_o$$

$$50 = \frac{2500+250V_o}{3} + 2V_o \longrightarrow 150 = 2500 + 256\,V_o \longrightarrow V_o = -9.18$$

تمرین) یکی از سرهای نقطه دار را عوض کرده و مجدداً V_o را بدست آورید.



مثال) این مدار را با دو سلف تزویج شده با ماتریس القایی $L=\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}$ معادل می‌شود.

$$v_1 = L_a\frac{d(i_1-I)}{dt} = L_a\frac{di_1}{dt} - L_a\frac{dI}{dt} \quad (1)$$

$$v_2 = L_b \frac{d(nI + i_2)}{dt} = nL_b \frac{dI}{dt} + L_b \frac{di_2}{dt} \qquad ②$$

$$v_1 = nv_2 \longrightarrow L_a \frac{di_1}{dt} - L_a \frac{dI}{dt} = n^2 L_b \frac{dI}{dt} + nL_b \frac{di_2}{dt}$$

$$(n^2 L_b + L_a) \frac{dI}{dt} = L_a \frac{di_1}{dt} - nL_b \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{L_a}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_1}{dt} - \frac{nL_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_2}{dt} \qquad ③$$

③ در ① :

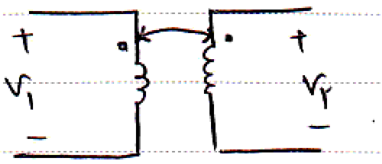
$$v_1 = L_a \frac{di_1}{dt} - \frac{L_a^2}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_1}{dt} + \frac{nL_a L_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_2}{dt}$$

$$\boxed{v_1 = \frac{n^2 L_a L_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_1}{dt} + \frac{nL_a L_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_2}{dt}}$$

③ در ② :

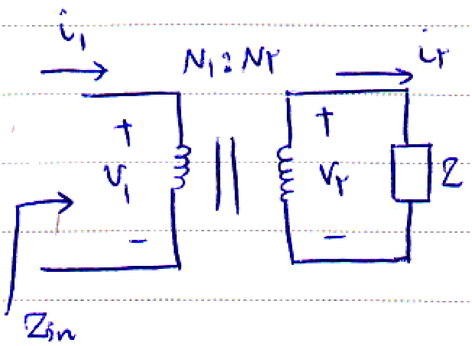
$$v_2 = \frac{nL_a L_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_1}{dt} - \frac{n^2 L_b^2}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_2}{dt} + L_b \frac{di_2}{dt}$$

$$\boxed{v_2 = \frac{nL_a L_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_1}{dt} + \frac{L_a L_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_2}{dt}}$$



$$L = \begin{bmatrix} \frac{n^2 L_b L_a}{n^2 L_b + L_a} & \frac{nL_a L_b}{n^2 L_b + L_a} \\ \frac{nL_a L_b}{n^2 L_b + L_a} & \frac{L_a L_b}{n^2 L_b + L_a} \end{bmatrix}$$

خاصیت ارجاع امپدانس در ترانس ایده‌آل :



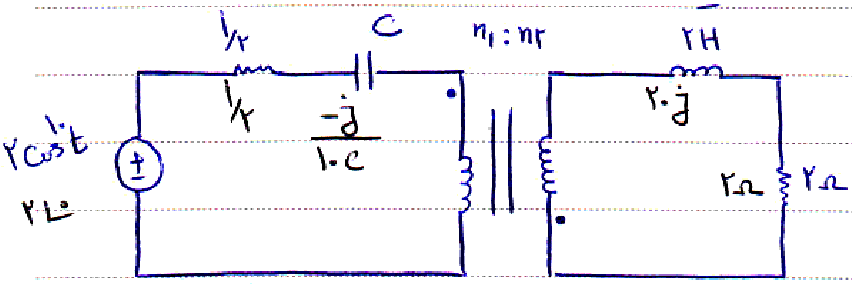
$$Z = \frac{v_2}{i_2}$$

$$Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = ?$$

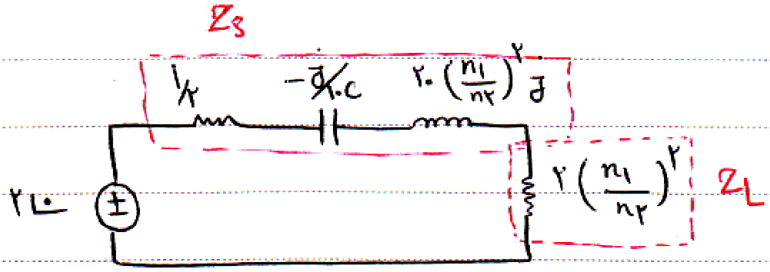
$$Z_{in} = \frac{V_1}{i_1} = \frac{\left(\frac{N_1}{N_2}\right) V_2}{\left(\frac{N_2}{N_1}\right) i_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z$$

$\rightarrow Z_{in} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z \rightarrow$ خاصیت ارجاع امپدانس (ربطی هم به جای نقطه‌ها ندارد که کجا باشند)

مثال) نسبت تبدیل ترانس $\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$ و مقدار خازن را به گونه‌ای پیدا کنید که توان تحویلی به مقاومت ۲Ω حداکثر شود.



به سمت اولیه ارجاع می‌دهیم:



$$\frac{n_1}{n_2} \triangleq n$$

$$Z_S = \frac{1}{2} + j\left(20n^2 - \frac{1}{10C}\right) \qquad Z_L = 2n^2$$

شرط انتقال حداکثر توان: $Z_L = Z_S^*$

$$2n^2 = \frac{1}{2} - j\left(20n^2 - \frac{1}{10C}\right)$$

$$\begin{cases} 2n^2 = \frac{1}{2} \rightarrow n^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{n = \frac{1}{2}} \\ 20n^2 - \frac{1}{10C} = 0 \rightarrow 5 = \frac{1}{10C} \rightarrow \boxed{C = 0/02\ f} \end{cases}$$

فصل دوم : گراف های قضیه تلگان

عناصر فشرده : عناصری می باشند که ابعاد آن ها نسبت به طول موج سیگنالی که آنها را تحریک می کنند کوچک است.

در غیر این صورت قوانین KVL و KCL دیگر برقرار نخواهد بود.

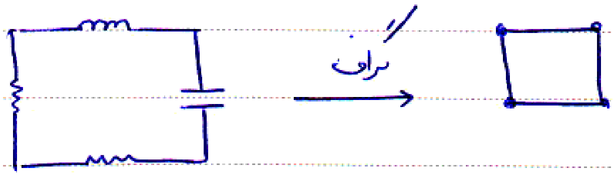
گراف :

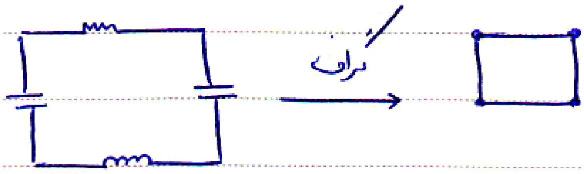
قوانین KVL و KCL ارتباطی به ماهیت

اجزای مدار ندارد و بنابراین به عنوان به جای هر عنصر

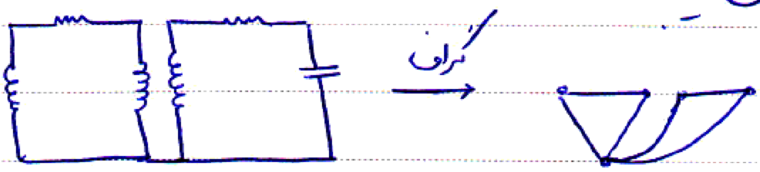
یک شاخه در گراف قرار داد و دو سر هر شاخه را با نقطه ها

مشخص که گره می نامند نشان داد.





* از روی گراف نمی توان تشخیص داد که شاخه ها دارای عناصر تزویج هست یا خیر



زیرگراف :

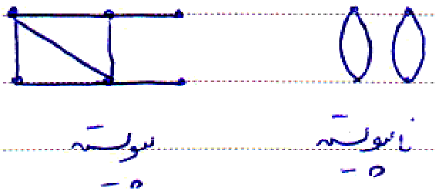
مفهوم زیرگراف به گراف مانند زیرمجموعه به مجموعه است که با حذف بعضی گره ها یا شاخه ها از یک گراف به دست می آید.

شکل های گراف بالا زیرگراف

زیرگراف سره :

زیرگرافی که فقط از یک گره تشکیل شده باشد.

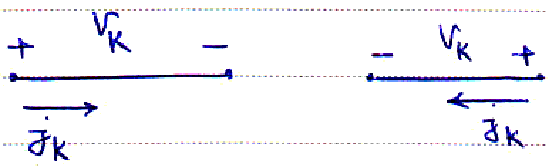
گراف پیوسته: به گرافی پیوسته می‌گوییم که بین هر دو گره دلخواه آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

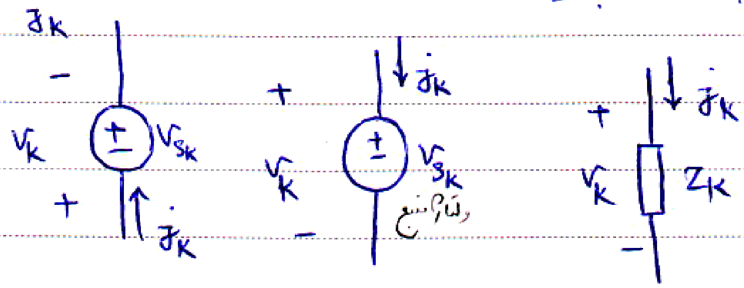


جهت‌های قراردادی جریان:

جهت جریان در شاخه به طور دلخواه انتخاب می‌شود ولی بلافاصله ولتاژ بر اساس جهت انتخاب شده است قطب مثبت ولتاژ

در جهت ورود جریان قرار می‌شود



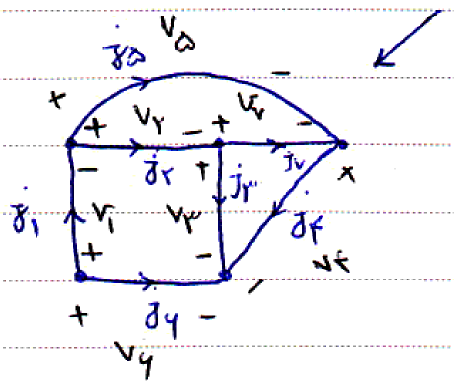


برای عناصر $V_k J_k > 0$

برای منابع $V_k J_k < 0$

گراف جهت‌دار:

گرافی که جریان شاخه‌ها روی آن تعیین شده باشد گراف جهت‌دار است.



ماتریس تلاقی گره و شاخه (Aa):

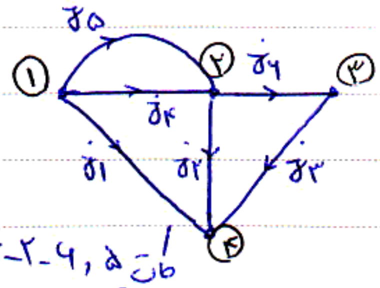
در یک گراف جهت‌دار عناصر ماتریس به صورت زیر فرض می‌شود:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

A_a

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } n \text{ تلاقی داشته و جریان از گره خارج شود.} \\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ و گره } n \text{ تلاقی نداشته باشند.} \\ -1 & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } n \text{ تلاقی داشته و جریان به آن وارد شود.} \end{cases}$$

مثال)

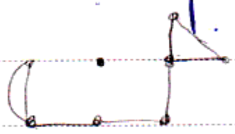


کات ست ۴-۲-۶، ۵

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \Rightarrow \text{شاخه} \\ \text{گره} & \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & A_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

جمع جبری جریان های وارد شده به یک گره صفر است. حال این قانون را تعمیم می دهیم.

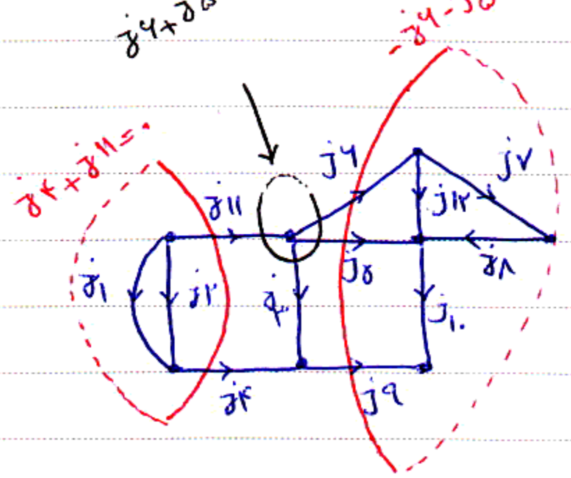
گراف کات ست: دسته ای از شاخه های یک گراف تشکیل کات ست را می دهد اگر دو شرط زیر را باهم داشته باشند:



$j_6 + j_5 + j_3 - j_{11} = 0$

۱) حذف تمام شاخه های این دسته یک گراف ناپیوسته باقی بگذارد.

۲) حذف تمام شاخه ها غیر یکی، گراف را پیوسته کند.



کات ست هایی که می توان تشخیص داد: ۱۱ و ۴،

کات ست ۵ و ۶ و ۹   کات ست ۷ و ۱۲ و ۶

گسترش قانون KCL: برای هر دسته بسته شده در هر لحظه از زمان، مجموع جبری جریان های خارج شده از کات ست صفر است.

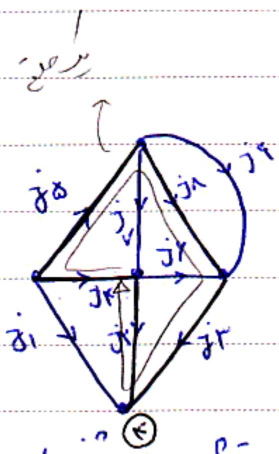
قرارداد: اگر کات ست را با یک سطح گاوسی نشان دهیم، جریان های خارج شونده از کات ست با علامت مثبت و جریان های

وارد شده با علامت منفی هستند. علامت های قرمز در شکل

حلقه و قانون KVL : یک زیرگراف از یک گراف بسته را حلقه می گویند اگر دو شرط زیر را داشته باشند :

۱) زیرگراف بسته باشد.

۲) به هر گره فقط ۲ شاخه متصل باشد.



$$-v_4 + v_5 + v_8 + v_3 - v_2 = 0$$

قضیه تلگان : برای هر شبکه دلخواه که گراف آن دارای b شاخه و n_t گره باشد هرگاه ولتاژ و جریان شاخه ها با j_k و v_k مشخص شده باشند، خواهیم داشت :

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$$

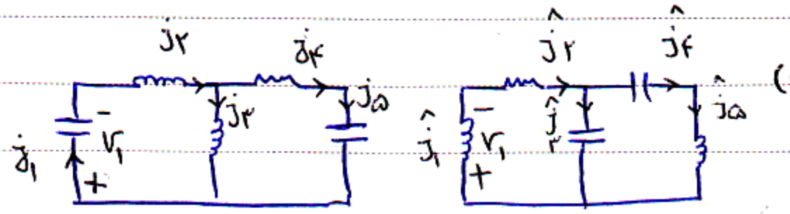
$v_k j_k > 0$ برای عناصر $\qquad$ $v_k j_k < 0$ برای منابع

تبصره : اگر دو شبکه گراف های یکسان داشته باشند وقتی در دو گراف شاخه ها را از لحاظ نامگذاری، شماره و جهت ها هم قرار دادی جریان را یکسان بگیریم، قضیه تلگان روابط زیر را نقض نمی کند :

$$1)\quad \sum_{k=1}^{b} v_k j_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k \hat{j}_k$$

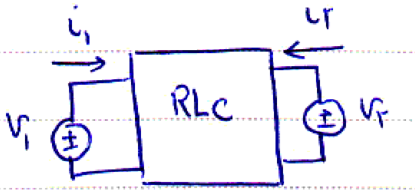
$$2)\quad \sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=1}^{b} v_k \hat{j}_k$$

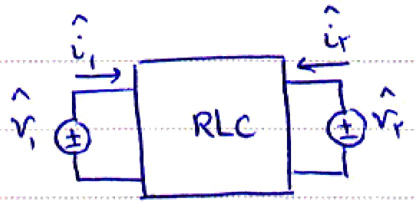
مثال)



به آزمایش زیر در جهت اثبات قضیه تلگان دقت کنید :

یک مدار RLC ثابت در نظر بگیرید که منابع آن را به صورت زیر جابجا می‌کنیم :





می‌خواهیم اثبات کنیم :

$$\hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2 = v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=1}^{b} v_k \hat{j}_k$$

$$\hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{b} \hat{v}_k j_k}_{} = v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{b} v_k \hat{j}_k}_{}$$

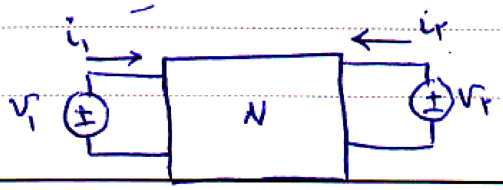
با هم برابرند

$$v_k = Z_k j_k \longrightarrow \sum_{k=3}^{b} v_k \hat{j}_k = \sum_{k=3}^{b} Z_k j_k \hat{j}_k$$

$$\hat{v}_k = Z_k \hat{j}_k \longrightarrow \sum_{k=3}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=3}^{b} Z_k \hat{j}_k j_k$$

$$\Longrightarrow v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2 = \hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2$$

مثال) شبکه N از عناصر RLC خطی و تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده. اندازه‌گیری‌های زیر در آن انجام شده است :



$$V_1 = 4\cos(\omega t + 60) \quad , \quad V_2 = 0$$

$$i_1 = \cos(\omega t + 80) \quad , \quad i_2 = 2\cos(\omega t + 70)$$

$$\hat{V}_1 = \cos(\omega t + 10) \quad , \quad \hat{V}_2 = 2\cos(\omega t + 20) \qquad \hat{i}_1 = ?$$

به حوزه‌ی فازوری می‌بریم :

$$V_1 = 4\angle 60 \qquad i_1 = 1\angle 80 \qquad \hat{V}_1 = 1\angle 10$$

$$V_2 = 0 \qquad i_2 = 2\angle 70 \qquad \hat{V}_2 = 2\angle 20$$

طبق قضیه تلگان :

$$V_1 \hat{i}_1 + V_2 \hat{i}_2 = \hat{V}_1 i_1 + \hat{V}_2 i_2$$

$$4\angle 60 \times \hat{i}_1 + 0 = 1\angle 10 \times 1\angle 80 + 2\angle 20 \times 2\angle 70$$

$$4\angle 60 \; \hat{i}_1 = 1\angle 90 + 4\angle 90$$

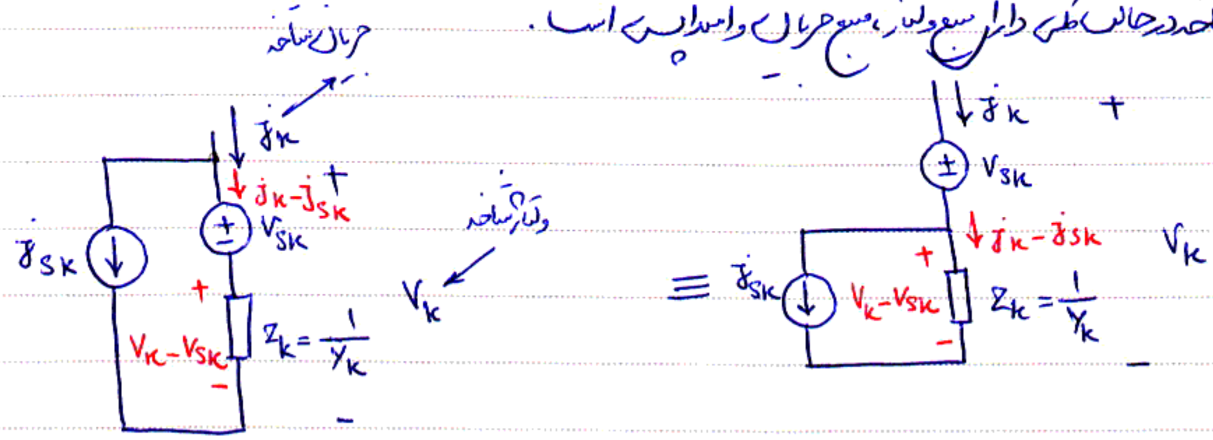
$$\hat{i}_1 = \frac{5\angle 90}{4\angle 60} = \frac{5}{4}\angle 30 \longrightarrow \hat{i}_1 = \frac{5}{4}\cos(\omega t + 30)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل ۳: تجزیه و تحلیل گره و مش

مدل کلی یک شاخه:

یک شاخه در حالت کلی دارای منبع ولتاژ، منبع جریان و امپدانس است.



معادلات KVL و KCL در هر دو یک شاخه نتیجه می‌شود که نشان می‌دهد با هم معادلند.

بیان رابطه شاخه با KCL:

$$j_k = j_{sk} + V_k Y_k - V_{sk} Y_k$$

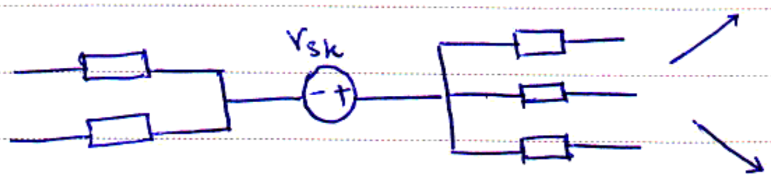
کاربرد در روش گره ولتاژ است.

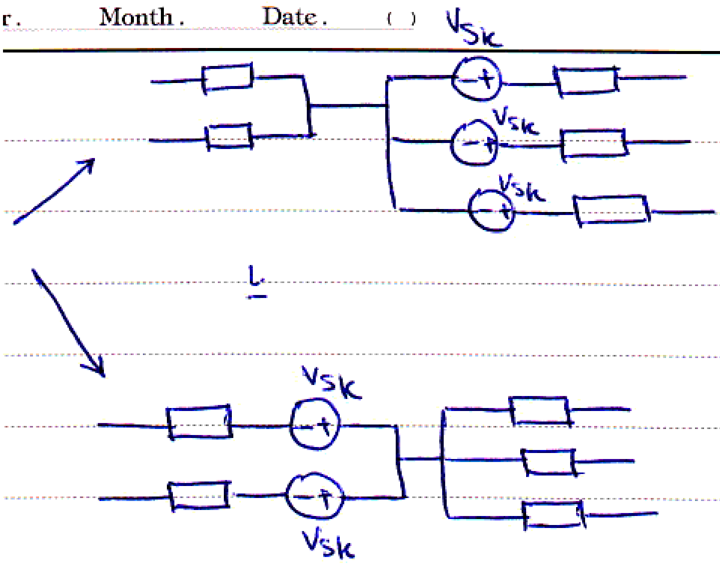
بیان رابطه شاخه با KVL:

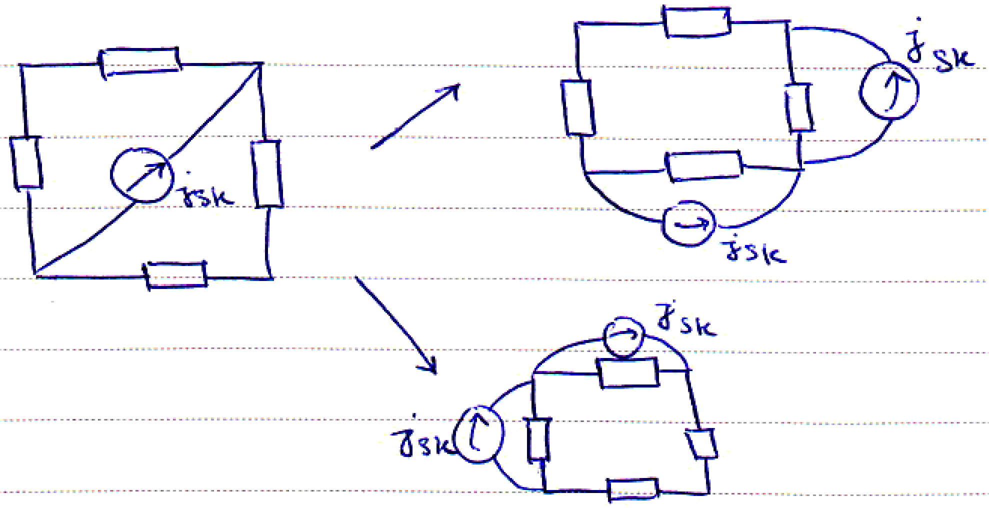
$$V_k = V_{sk} + Z_k j_k - Z_k j_{sk}$$

کاربرد در روش مش یا حلقه اساسی.

- برای اینکه حداکثر تعداد شاخه‌هایی که تنها شامل منابع هستند از شاخه‌های دیگر لازم نباشد، تبدیل را انجام می‌دهیم که تغییری در نتیجه نهایی مدار حاصل نشود.

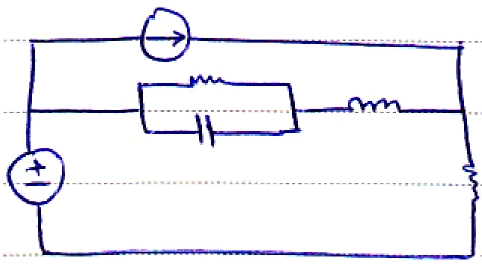


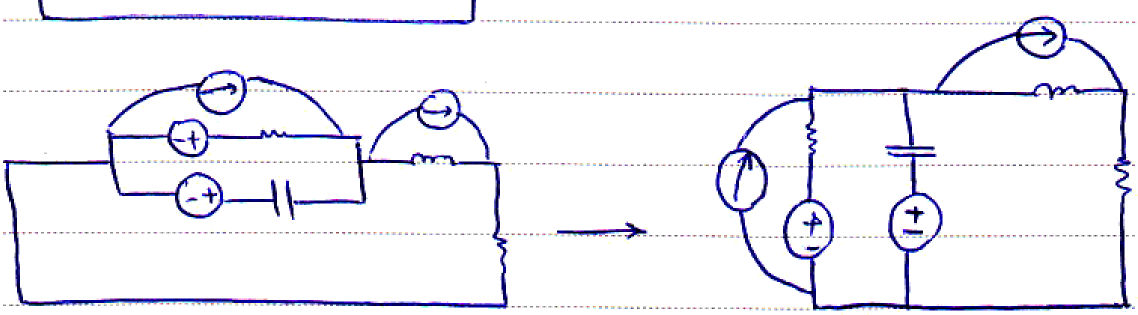




در تبدیل منابع ولتاژ اگر KVL بکار ببریم و در تبدیل منابع جریان اگر KCL بکار ببریم این معادلات ارضا میشود:

به عنوان مثال:





روش‌های تبدیل منابع فوق هم برای منابع مستقل هم برای منابع وابسته برقرار است.

تجزیه و تحلیل گره:

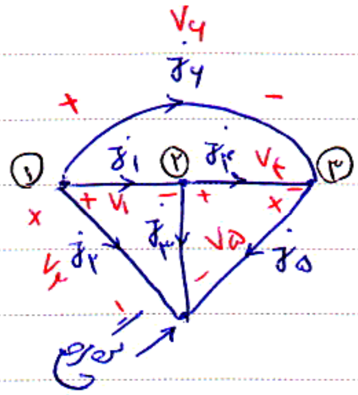
فرض کنید مداری دارای b شاخه باشد، در این صورت بردارهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$j = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}$$ بردار جریان شاخه‌ها

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$$ بردار ولتاژ شاخه‌ها

در روش گره معمولاً گرهی که بیشترین اتصال به آن وجود دارد را به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم. اگر n_t تعداد کل گره‌ها باشد آنگاه: $n_t = n+1$

فرض کنید گراف جهت‌دار مداری به صورت زیر باشد ←



ماتریس تلاقی گره و شاخه در روش گره به صورت زیر است: $A = (A_a)$ بدون گره مبنا

$$A \cdot j = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 + j_2 + j_6 \\ -j_1 + j_3 + j_4 \\ -j_4 + j_5 - j_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ بسط قانون KCL

$$\rightarrow \boxed{A \cdot j = 0}$$

بردار ولتاژ گره‌ها را با e نمایش می‌دهیم.

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

حال می‌توانیم $A^t . e$ را به دست آوریم:

$$A^t . e = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A^t} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 - e_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_2 - e_3 \\ e_3 \\ e_1 - e_3 \end{bmatrix}$$

جای سطرها و ستون‌های ماتریس A را با هم عوض می‌کنیم.

$$= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boxed{A^t . e = v}$$

استنباط KVL

اساس قضیه تلگان:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$$

$$\longrightarrow v_1 j_1 + v_2 j_2 + \dots + v_b j_b = 0$$

$$\sum v_k j_k = [v_1 \; v_2 \; \dots \; v_b] \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} = v^t . j = (A^t . e)^t . j = e^t . A . j = 0$$

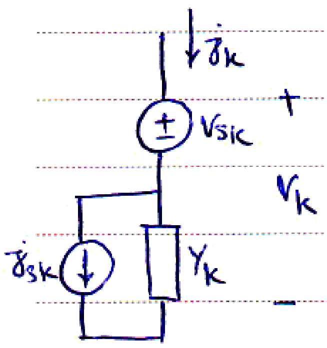
روش تجزیه و تحلیل گره:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$$

سه روش امکان پذیر است: در روش گره، ولتاژ گره‌ها یعنی e مجهول معادلات است.

۱) روش منظم ۲) روش نظری ۳) روش میانبر

۱) روش منظم:



$$j_k = j_{sk} + Y_k v_k - Y_k v_{sk}$$

این رابطه را برای تمام شاخه‌های مدار می‌نویسیم:

$$j_1 = j_{s1} + Y_1 v_1 - Y_1 v_{s1}$$

$$j_2 = j_{s2} + Y_2 v_2 - Y_2 v_{s2}$$

$$\vdots$$

$$j_b$$

$$\xrightarrow{\text{به صورت ماتریسی}} j = j_s + Y v - Y v_s$$

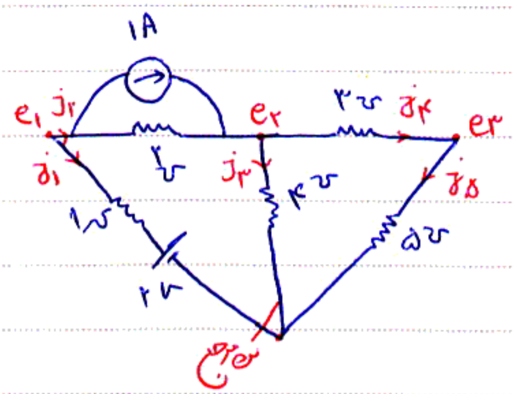
دو طرف را در A ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{A . j}_{0} = A\, j_s + \underbrace{A Y v}_{A^t . e} - A Y v_s$$

$$0 = A j_s + A Y A^t . e - A Y v_s$$

$$\underbrace{A Y A^t}_{Y_n} . e = \underbrace{A Y v_s - A j_s}_{I_s} \quad (A) \longrightarrow Y_n . e = I_s$$

خوبی است معادله A منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل می‌کند.



مثال) یک مدار ساده مقاومتی: $V = ?$

ابتدا استفاده از رول

$$j_k = j_{s_k} + y_k v_k - y_k v_{s_k}$$

j_k ها را می‌نویسیم و سپس بصورت ماتریسی درمی‌آوریم سپس:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$?\ Y_n = A Y A^t$$

$$?\ I_s = A Y v_s - A j_s \Rightarrow Y_n . \underset{?}{e} = I_s \Rightarrow$$

$$V = A^t . e$$ بدست می‌آید.

$$j_1 = 0 + 1 v_1 - 1 \times 2$$

$$j_2 = 1 + 2 v_2 - 2 \times 0$$

$$j_3 = 0 + 4 v_3 - 4 \times 0$$

$$j_4 = 0 + 3 v_4 - 3 \times 0$$

$$j_5 = 0 + 5 v_5 - 5 \times 0$$

برای مثال بعدی ۶   برای مثال بعدی ۶

$$\underbrace{\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix}}_{j} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{j_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{14} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}}_{v} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{14} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_s}$$

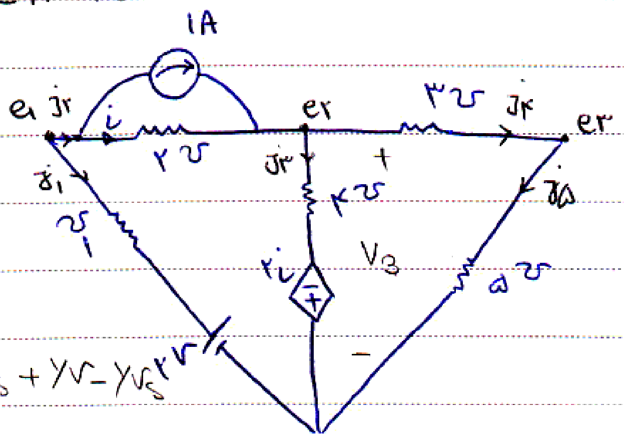
$$Y_n = A Y A^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$I_s = A Y v_s - A j_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_n . e = I_s \qquad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow e$$ بدست می‌آید.

$v = A^t . e$

مثال)



$j = j_s + Yv - Yv_s$

ابتدا [illegible] را بدست می‌آوریم (i).

$i = j_2 - 1$

KCL: $j_2 = i + 1 \Rightarrow i = j_2 - 1$

$j_1 = 0 + 1v_1 - 1 \times 2$

$j_2 = 1 + 2v_2 - 2 \times 0$

$j_3 = 0 + 4(v_3 - (-2i)) = 4(v_3 + 2j_2 - 2) = 4v_3 + 8j_2 - 8 = 4v_3 + 16v_2 + 8 - 8 =$
$0 + 4v_3 + 16v_2 + 0$

$j_4 = 0 + 3v_4 - 3 \times 0$

$j_5 = 0 + 5v_5 - 5 \times 0$

$j_3 = 0 + 4v_3 - 4(-2i) =$
$4(v_3 - (-2i))$

$Y_n = AYA^t = ?$
$I_s = AYv_s - Aj_s = ?$ $\longrightarrow Y_n . e = I_s$

روش گرهی:

در شرایط زیر از روش گرهی استفاده می‌کنیم:

۱) منابع ولتاژ وجود نداشته باشند یا اگر وجود دارند به منابع جریان تبدیل شوند.

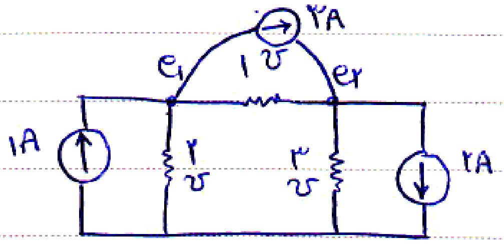
۲) سلف‌های تزویج شده و منابع وابسته وجود نداشته باشند، در این صورت در معادلهٔ $Y_n . e = i_s$

می‌توان Y_n و I_s را مستقیماً به صورت زیر تشکیل داد. $\qquad Y_n \cdot e = i_s$

$$Y_{ij} = \begin{cases} \text{مجموع ادمیتانس‌های متصل به گره i ام} & i = j \\ -(\text{مجموع ادمیتانس‌های متصل بین گره i و j}) & i \neq j \end{cases}$$

$i_{s_i} =$ (مجموع جریان‌های وارد شده به گره (وارد شده با علامت مثبت و خارج شده با علامت منفی))

مثال)



تعداد گره‌ها

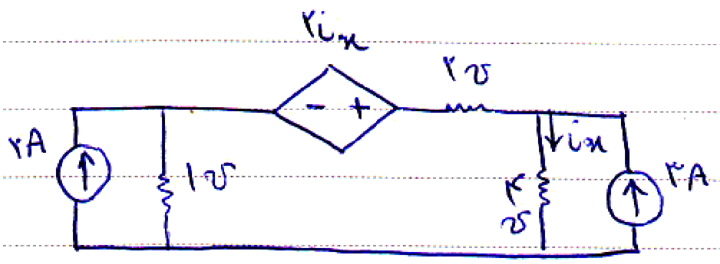
$$Y_n \underset{2\times 2}{=} \begin{bmatrix} 1+2 & -1 \\ -1 & 1+3 \end{bmatrix}$$

$$i_s = \begin{bmatrix} 1-3 \\ 3-2 \end{bmatrix} \qquad Y_n \cdot e = I_s \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

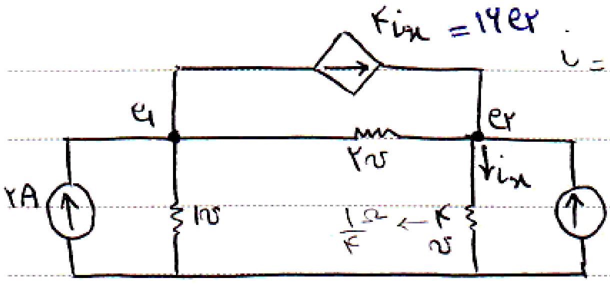
روش میانبر:

همان روش تحلیل گره است، با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند. در این روش، ابتدا منابع وابسته را مانند منابع مستقل در نظر می‌گیریم و معادلات را از روش تحلیل گره می‌نویسیم. در اینجا اثر منابع وابسته را ماتریس Y_n در نظر می‌گیریم.

مثال)



حل : منابع ولتاژ به جریان تبدیل می‌شوند : $i = \frac{2i_x}{1/2} = \frac{8e_2}{1/2} = 16e_2$



در روش گره، ولتاژ گره‌ها یعنی e مجهول معادلات است. وقتی از روش ماتریسی استفاده می‌کنیم، تمام وابسته‌ها برحسب e نوشته می‌شوند

$i_x = \frac{e_2}{1/4} = 4e_2$

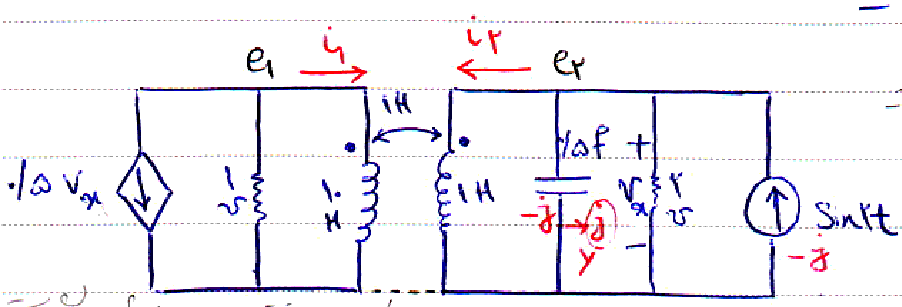
$Y_n \cdot e = I_s \longrightarrow \begin{array}{cc} & +16 \\ \end{array}$
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\cancel{16e_2} \\ 16e_2+3 \end{bmatrix}$$
-16

$$\begin{bmatrix} 3 & 14 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تجزیه و تحلیل گره در حالت دائمی سینوسی :

وقتی منابع موجود در یک مدار در رژیم سینوسی به صورت یک فرکانس باشند می‌توان از تحلیل حالت دائمی استفاده کرد.

مثال : چون سلف تزویج شده داریم باید از تنظیم استفاده کنیم



$\sin 2t = \cos(2t - 90) \to -j$

$$L = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \Gamma = \frac{1}{10-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 & -1/9 \\ -1/9 & 10/9 \end{bmatrix}$$

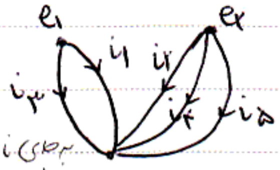
Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\lambda = Li \Rightarrow i = \frac{\lambda}{L} = \lambda\Gamma \xRightarrow{\text{فازور}} I = V\frac{1}{j\omega}\Gamma$$

درحوزه‌ی سینوسی ماندگار :

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega}\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$



بجای $j\omega$ j

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

معادلات گره به روش منظم :

$$j_k = j_{sk} + Y_k V_k - Y_k V_{sk}$$

$$j_3 = 0.5 V_x + 1\times V_3 \,,\quad V_x = V_5 \qquad j_5 = -(-j) + 0 + 2V_5 \longrightarrow j_5 = j + 2V_5$$

$$j_4 = 0 + j\times V_4 \longrightarrow j_4 = jV_4 \qquad j_3 = 0.5\times V_5 + V_3 \longrightarrow j_3 = 0.5V_5 + V_3$$

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad j = j_s + YV - YV_s$$

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \end{bmatrix}}_{j_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{Y_b}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Y_n = AY_bA^t \qquad i_s = \cancelto{0}{AY_bV_s} - Aj_s$$

معادلات انتگرال-دیفرانسیل :

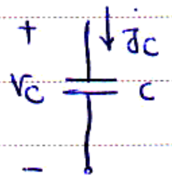
چنانچه بخواهیم پاسخ کامل یک شبکه‌ی معینی را به یک ورودی و حالات اولیه‌ی معلوم محاسبه کنیم معادلات

انتگرال-دیفرانسیل لازم خواهد بود.

اپراتور D ؛ $\frac{d}{dt} \triangleq D$

حال ادمیتانس های سلف، خازن در حوزه ی انتگرال-دیفرانسیل را به دست می‌آوریم:

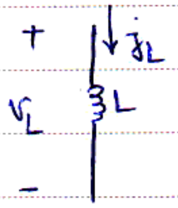
۱- خازن:



$$i_C = C\frac{d}{dt}v_C = CDv_C$$

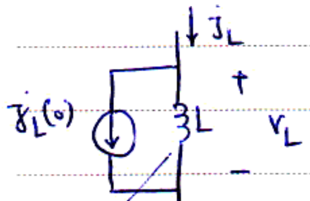
$$\boxed{Y_C = \frac{i_C}{v_C} = CD}$$

۲- سلف:



$$i_L = \frac{1}{L}\int v_L\,dt + i_L(0)$$

جریان اولیه ی سلف $i_L(0)$ را با یک منبع جریان موازی نشان می‌دهیم تا از معادلات حذف شود.

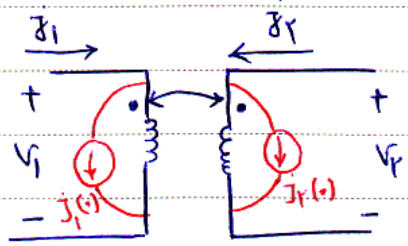


سلف بدون جریان اولیه

$$i = \frac{1}{L}\int v_L\,dt \Rightarrow v_L = L\frac{d}{dt}i$$

$$v_L = LDi \Rightarrow \boxed{Y_L = \frac{i}{v_L} = \frac{1}{LD}}$$

برای سلف های تزویج شده می‌توانیم آن را تعمیم دهیم:



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \end{bmatrix}$$

شرایط اولیه

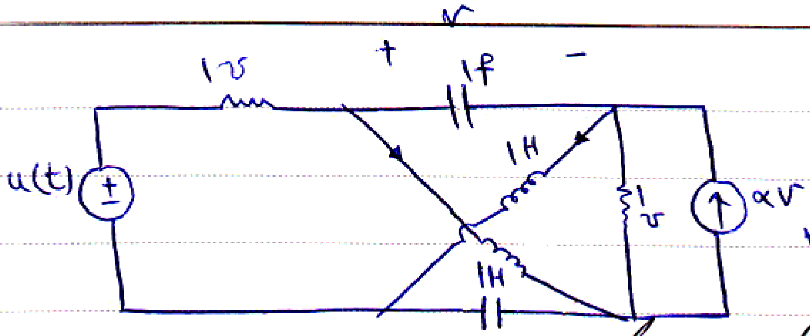
$$\lambda = Li$$

$$i = \lambda\Gamma$$

$$i = v\frac{1}{j\omega}\Gamma = v\frac{1}{D}\Gamma$$

$$i = \frac{1}{D}v\Gamma$$

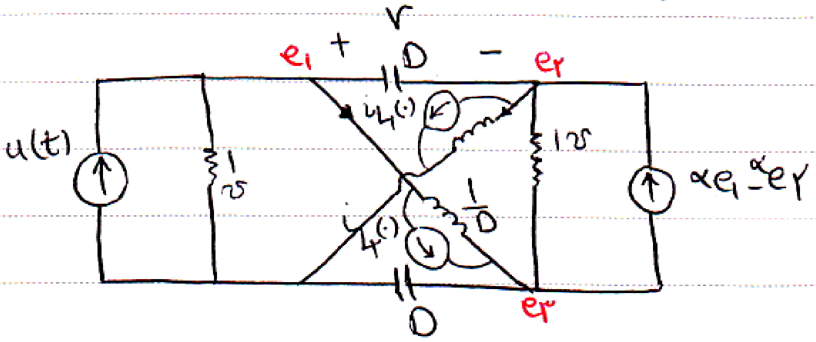
مثال) تمرین ۲۹ کتاب



$v_{C_2}(0), v_{C_1}(0)$ ، $i_{L_1}(0)$ ، $i_{L_2}(0)$

در حوزه‌ی انتگرال دیفرانسیل از روش ماتریس گره استفاده می‌کنیم

به دلیل وجود $u(t)$ ناچاریم از انتگرال دیفرانسیل حل کنیم.

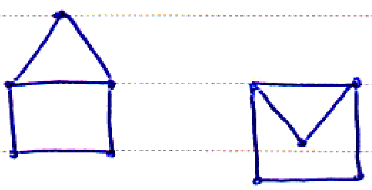


$$\begin{bmatrix} 1+D+\frac{1}{D} & -D & -\frac{1}{D} \\ -D-\alpha & 1+D+\frac{1+\alpha}{D} & -1 \\ -\frac{1}{D}+\alpha & -1-\alpha & 1+\frac{1}{D}+D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t)-i_{L_2}(0) \\ \alpha e_1-\alpha e_2-i_{L_1}(0) \\ -\alpha e_1+\alpha e_2+i_{L_2}(0) \end{bmatrix}$$

تجزیه و تحلیل مش:

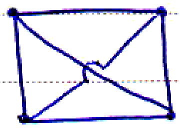
گراف‌های توپولوژیکی: گراف‌هایی هستند که از نظر رسمی تفاوت دارند ولی در واقع یک گراف هستند.

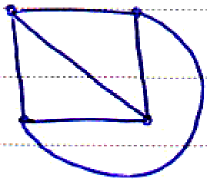
مثال)

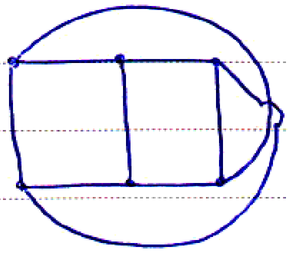


گراف‌های مسطح: به گرافی گفته می‌شود که بتوان آن را در یک صفحه رسم کرد به طوری که هیچ دو شاخه‌ای یکدیگر را قطع نکنند.

مثال)

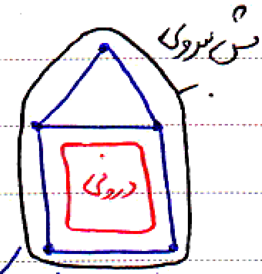




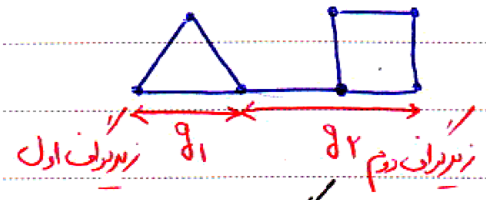


ش درونی و ش بیرونی:

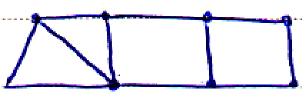
حلقه‌ای که درون آن هیچ ناحیه‌ای وجود نداشته باشد را ش درونی و از این به بعد به اختصار ش می‌گویند و حلقه‌ای که در خارج از آن هیچ ناحیه‌ای وجود نداشته باشد، ش بیرونی است.



گراف‌های لولا دار یا لولا: به گرافی لولا دار می‌گویند که بتوان آن را به دو زیر گراف ناسوده که تنها در یک رأس به هم متصل اند، تفکیک نمود.

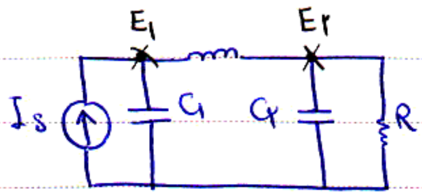


به گرافی بی لولا می‌گویند که هرگاه به دو زیر گراف ناسوده تفکیک شوند، حداقل در دو رأس به هم متصل باشند.

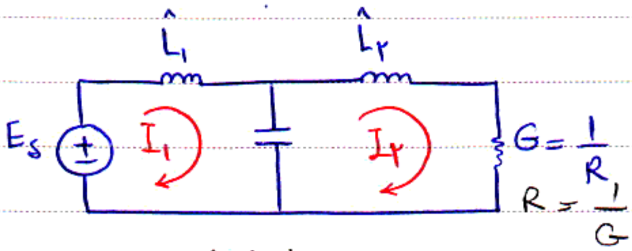


توجه) وقتی در یک مدار، بیشتر منابع جریان داشته باشیم، از KCL استفاده می‌کنیم.
توجه) وقتی در یک مدار، بیشتر منابع ولتاژ داشته باشیم، از KVL استفاده می‌کنیم.

خاصیت دوگان: این خاصیت در گراف‌های مسطح بوسیله دی‌لولا صدق می‌کند. عناصر شبکه باید دوگان باشند. بنابراین عناصری مانند ترانسفورماتور، سلف‌های تزویج شده و غیره را از بحث خارج می‌کنیم. به دو مدار زیر توجه کنید:



مدار (A)



مدار (B)

مدار A:

KCL
$$I_s = E_1 C_1 j\omega + \frac{E_1 - E_2}{Lj\omega}$$

$$\boxed{I_s = E_1\left(C_1 j\omega + \frac{1}{Lj\omega}\right) - E_2 \times \frac{1}{Lj\omega}} \quad (1)$$

KCL
$$\frac{E_1 - E_2}{Lj\omega} = E_2 C_2 j\omega + \frac{E_2}{R}$$

$$\boxed{E_1 \times \frac{1}{Lj\omega} - E_2\left(\frac{1}{Lj\omega} + C_2 j\omega + \frac{1}{R}\right) = 0} \quad (2)$$

مدار B:

KVL
$$E_s = \hat{L}_1 j\omega I_1 + \frac{1}{\hat{C} j\omega}(I_1 - I_2)$$

$$\longrightarrow \boxed{E_s = I_1\left(L_1 j\omega + \frac{1}{\hat{C} j\omega}\right) - I_2 \times \frac{1}{\hat{C} j\omega}} \quad (3)$$

KVL
$$\frac{1}{\hat{C} j\omega}(I_2 - I_1) + \hat{L}_2 j\omega I_2 + R I_2 = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{\hat{C} j\omega} I_1 - I_2\left(\frac{1}{\hat{C} j\omega} + \hat{L}_2 j\omega + R\right) = 0} \quad (4)$$

با مقایسه روابط ① تا ③ و همچنین ② با ④ مشاهده می شود که یک تناظر یک به یک بین روابط وجود دارد .

E ⟷ I — E جانشین را به I داده و برعکس .

C ⟷ L — C جانشین را به L داده و برعکس .

R ⟷ $G=\frac{1}{R}$ — R جانشین را به G داده و برعکس .

* این دو مدار (A و B) دوگان هم هستند به عبارتی اگر مدار A را حل کنیم ، پاسخ آن برای مدار B قابل استفاده است .

گراف های دوگان :

دو گراف g و ĝ را دوگان می گویند ، اگر سه شرط زیر را داشته باشند :

به ازای هر تعداد مش همان تعداد گره

۱- میان مش های ĝ با در نظر گرفتن مش بیرونی و گره های g یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد .

۲- میان مش های g با در نظر گرفتن مش بیرونی و گره های ĝ یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد .

۳- میان شاخه های دو گراف یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد به طوری که هرگاه دو مش یک گراف دارای شاخه ی مشترک باشند ، گره های متناظر با این دو مش در مدار دوگان شاخه ای داشته باشد که این دو گره را به هم وصل می کند .

الگوریتم رسم مدار دوگان :

۱- برای هر یک از مش های g با احتساب (در نظر گرفتن) مش بیرونی ، یک گره از ĝ را اختیار کنیم .

۲- برای هر شاخه ی K از g ، بین مش های i و j مشترک است ، یک شاخه از ĝ اختیار کنیم که گره های i و j

$\hat{g}$ را حاصل کند.

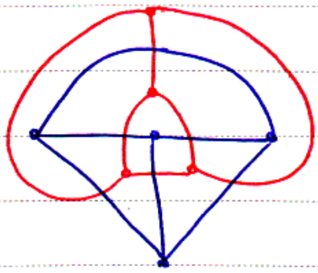
۳- بین عناصر g و $\hat{g}$ تناظر زیر را به وجود می‌آوریم؟

L ⟷ C

R ⟷ G

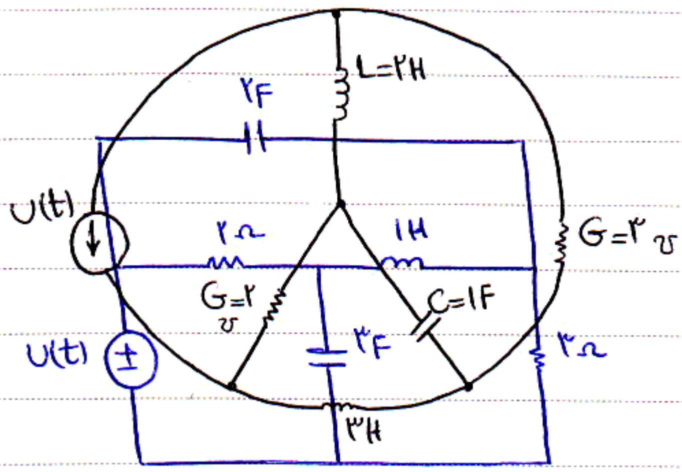
مثل منابع جریان I ⟷ E مثل منابع ولتاژ

مثال) گراف‌های دوگان گراف زیر را به دست آورید؟



متناظر با هر مش سودی که داریم یک گره می‌گذاریم.

مثال) گراف دوگان مدار زیر را به دست آورید.

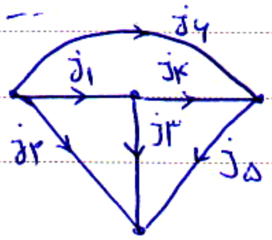


جریان به سر مثبت منبع وارد می‌شود.

تجزیه و تحلیل مش؟

در یک مدار که دارای b شاخه و n_t گره باشد، تعداد مش‌ها عبارت است از؟ $L=b-n_t+1$

در روش مش برای هر یک از مش‌ها جهت عقربه‌های ساعت را به عنوان جهت قراردادی در نظر می‌گیریم.



$L = ۶ - ۴ + ۱ = ۳$

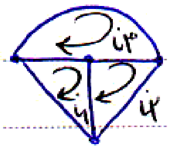
شاخه ، گره

بردار جریان مش‌ها : $i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix}$ $\qquad$ بردار ولتاژ شاخه‌ها : $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_b \end{bmatrix}$

ماتریس M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$M_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه k در مش i ام قرار داشته هم جهت با مش باشد} \\ 0 & \text{اگر شاخه‌ی k در مش i ام نباشد} \\ -1 & \text{اگر شاخه‌ی k در مش i ام قرار داشته مخالف با مش باشد} \end{cases}$$

ماتریس M برای گراف بالا



$$\underset{3\times 6}{M_{ik}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 6}$$

استنباط‌های KVL و KCL :

$$M.V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 - V_2 + V_3 \\ -V_3 + V_4 + V_5 \\ -V_1 - V_4 + V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

استنباط KVL : $\boxed{M.V = 0}$

$M^t . i = ?$

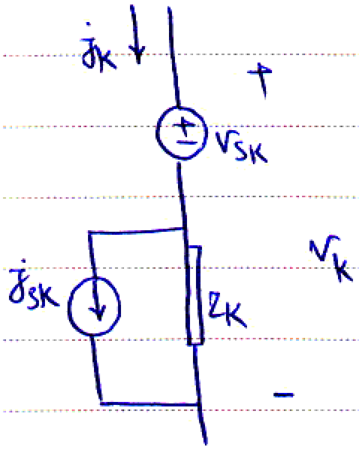
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 - i_3 \\ -i_1 \\ i_1 - i_2 \\ i_2 - i_3 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix}$$

استنباط KCL : $\boxed{M^t . i = j}$

روش آنالیز مش :

سه روش وجود دارد — مستقیم / نظری / تانسور

روش مستقیم :



$$V_k = V_{sk} + Z_k j_k - Z_k j_{sk}$$

وقتی رابطه‌ی فوق را برای تمام شاخه‌ها به صورت ماتریسی نوشته شود :

$$V = V_s + Z_b j - Z_b j_s$$

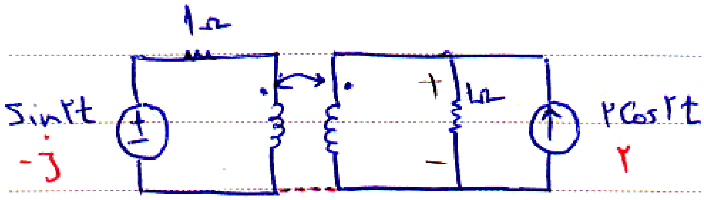
دو طرف را در M ضرب می‌کنیم :

$$\underbrace{M \cdot V}_{0} = M V_s + M Z_b \underbrace{j}_{M^t . i} - M Z_b j_s$$

$$\boxed{\overbrace{M Z_b M^t}^{Z_m} . i = \underbrace{M Z_b j_s - M V_s}_{e_s}} \quad (1) \implies Z_m . i = e_s$$

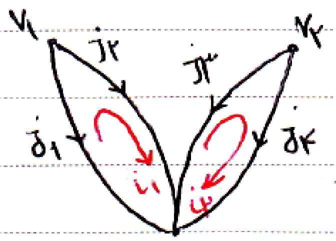
طرف راست معادله‌ی ① که منابع جریان مستقل را منبع ولتاژ تبدیل می‌کند.

مثال ۳)



$$L=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$$

گراف :



$\Rightarrow$

$$M=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

منابع را در برداران نمی‌گیریم.

$$V_k=V_{sk}+Z_kJ_k-Z_kJ_{sk}$$

ابتدا برای سلف‌های تزویج شده می‌نویسیم :

$$\begin{bmatrix}V_2\\V_3\end{bmatrix}=j\omega\begin{bmatrix}L_{11}&L_{12}\\L_{12}&L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_2\\J_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}V_2\\V_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2j&2j\\2j&4j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_2\\J_3\end{bmatrix}$$

$$\boxed{V_1=-j+1\times J_1-1\times 0}$$

$$\boxed{V_4=0+1\times J_4-1\times(-2)}$$

$$\begin{bmatrix}V_1\\V_2\\V_3\\V_4\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}-j\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{V_s}+\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2j&2j&0\\0&2j&4j&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{Z_b}\begin{bmatrix}J_1\\J_2\\J_3\\J_4\end{bmatrix}-\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2j&2j&0\\0&2j&4j&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{Z_b}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-2\end{bmatrix}}_{J_s}$$

$$Z_m\cdot i=e_s$$

$$Z_m=MZ_bM^t=\underbrace{\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2j&2j&0\\0&2j&4j&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}-1&2j&2j&0\\0&-2j&-4j&1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\\0&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2j&-2j\\-2j&1+4j\end{bmatrix}$$

$$e_s=MZ_bJ_s-MV_s$$

$$e_s=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2j&2j&0\\0&2j&4j&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-j\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$e_s=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}j\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}j\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-j\\-2\end{bmatrix}$$

روش نظری :

اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد در معادله‌ی $Z_m \cdot i = e_s$ ماتریس‌های Z_m و e_s را می‌توان مستقیماً تشکیل داد.

۱) منابع جریان وجود نداشته باشند یا اگر دارند به منبع ولتاژ تبدیل شوند. (ضمناً همه‌ی منابع مستقل باشند)

۲) سلف‌های تزویج شده در مدار موجود نباشد. 　　　　تعداد مش‌ها L

$$\begin{bmatrix}Z_{11}&\cdots&Z_{1L}\\\vdots&&\\Z_{L1}&\cdots&Z_{LL}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\\vdots\\i_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_{s_1}\\\vdots\\e_{s_L}\end{bmatrix}$$

$$Z_{ij}=\begin{cases}i=j & \text{مجموع امپدانس‌های موجود در مش } i \text{ ام}\\ i\neq j & -\left(\text{مجموع امپدانس‌های مشترک بین مش } i \text{ و } j\right)\end{cases}$$

$e_{s_i} =$ مجموع جبری منابع ولتاژ موجود در مش i ام. اگر از قطب مثبت منبع وارد شدیم با علامت منفی و اگر از قطب منفی وارد شدیم با علامت مثبت.

روش میانبر :

همان روش نظری است با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند. منابع وابسته را مثل منابع

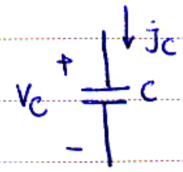
مستقل فرض می‌کنیم و ولتاژ شاخه‌ها را برحسب جریان مش‌ها تعیین می‌کنیم و معادلات را به روش لوپ می‌نویسیم. در اینجا از

ولتاژ شاخه‌ها را به ماتریس Z_m می‌پردازیم.

معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل:

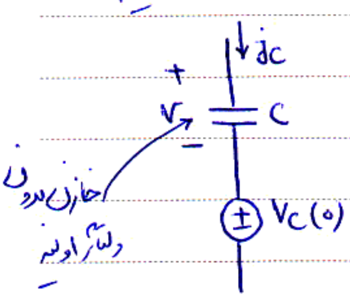
امپدانس های سلف و خازن را در این حوزه به دست می‌آوریم.

۱ـ خازن:



$$v_C = \frac{1}{C}\int j_C \, dt + v_C(0)$$

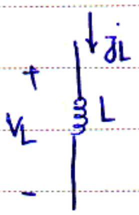
برای جدا کردن شرط اولیه از معادله آن را به صورت یک منبع ولتاژ سری با یک خازن بدون شرط اولیه نشان می‌دهیم



$$V = \frac{1}{C}\int j_C \, dt \Rightarrow C\frac{dV}{dt} = j_C$$

$$CDV = j_C \longrightarrow Z_C = \frac{V}{j_C} \Rightarrow \boxed{Z_C = \frac{1}{CD}}$$

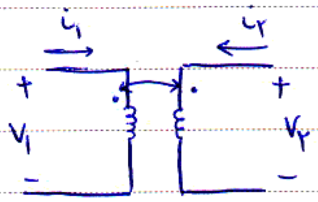
۲ـ سلف:



$$V_L = L\frac{dj_L}{dt} \longrightarrow V_L = LD\, j_L$$

$$Z_L = \frac{V_L}{j_L} \longrightarrow \boxed{Z_L = LD}$$

با تعمیم برای سلف های تزویج شده خواهیم داشت:

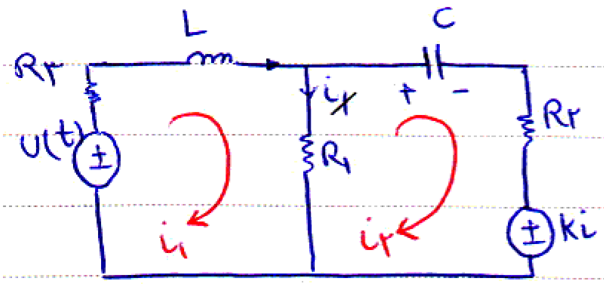


$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = Li \Rightarrow V = Lj\omega i = LDi$$

$$V = LDi$$

مثال)

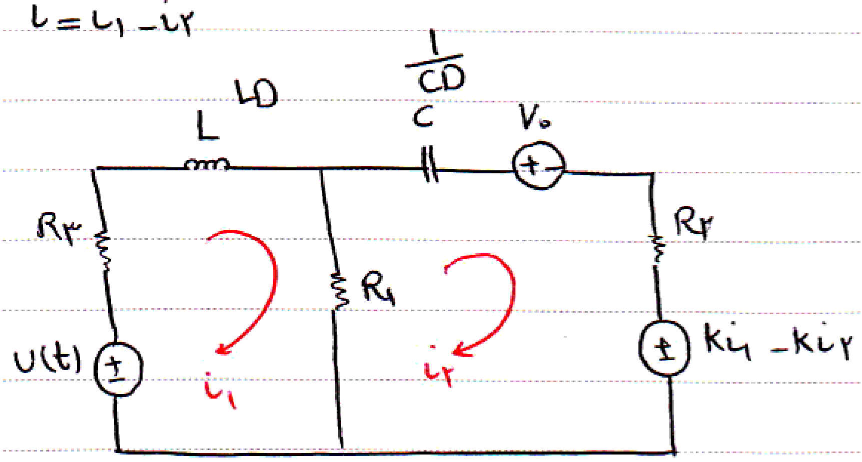


$V_C(0)=V_0$

$i_L(0)=I_0$

حل از روش ماتریس: چون مدار در رژیم سینوسی نیست، دارای سلف و خازن است و شرایط اولیه داده شده باید در حوزه‌ی انتگرال دیفرانسیل حل شود.

$i = i_1 - i_2$



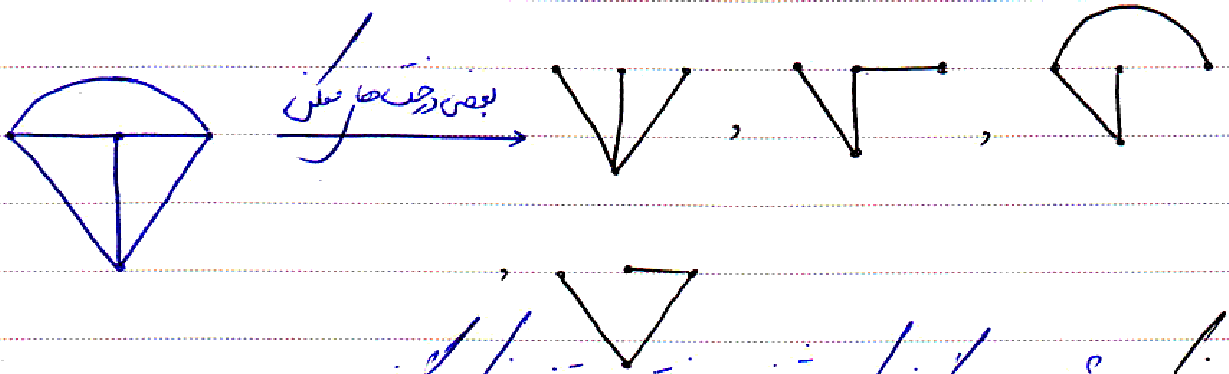
$Z_m \cdot i = e_s$

$$\begin{bmatrix} R_3+LD+R_1 & -R_1 \\ -R_1+K & R_1+\frac{1}{CD}+R_2-K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ -V_0 \cancel{-Ki_1} \cancel{+Ki_2} \end{bmatrix}$$

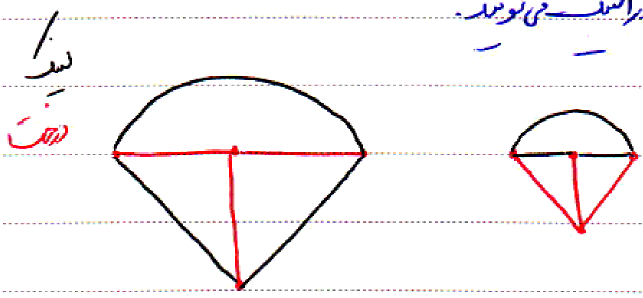
فصل ۱۱ : تجزیه تحلیل حلقه‌ی اساسی و کات‌ست اساسی :

درخت : یک زیرگراف از یک گراف پیوسته را درخت گویند اگر ۳ شرط زیر را دارا باشند :

۱) پیوسته باشد. ۲) تمام گره‌ها را شامل شود ۳) هیچ حلقه‌ای تشکیل ندهد



لینک : شاخه‌های از گراف که از شاخه‌های درخت نیستند را لینک می‌گویند.



قضیه اساسی تئوری گراف :

اگر گراف پیوسته‌ی G و درخت اختیاری T از آن گراف را در نظر بگیریم :

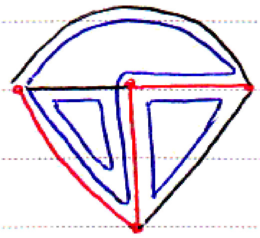
۱) بین هر دو گره‌ی دلخواه از گراف G روی درخت T یک مسیر منحصر به فرد وجود دارد.

$4-1=3$ $\quad$ $6-4+1=3$

۲) تعداد شاخه‌های درخت برابر $n_t - 1$ و تعداد لینک‌ها برابر $b - n_t + 1$ است.

۳) هر لینک درخت T همراه با مسیر منحصر به فرد میان دو گره آن لینک تشکیل یک حلقه می‌دهد به آن حلقه اساسی

متناظر با آن لینک می‌گویند.

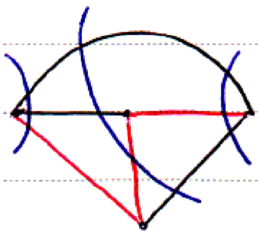


یعنی به تعداد لینک‌ها حلقه‌ی اساسی داریم.

۴) هر شاخه‌ی درخت T و تعدادی از لینک‌ها تشکیل یک کات ست منحصر به فرد را می‌دهد که به آن کات ست اساسی متناظر با آن شاخه‌ی درخت می‌گویند. یعنی به تعداد شاخه‌های درخت، کات ست اساسی داریم.

روش به دست آوردن کات ست اساسی متناظر با شاخه‌ی درخت:

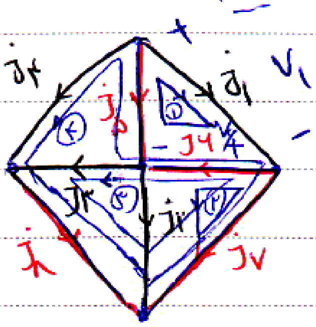
شاخه‌ی درخت مورد نظر را حذف می‌کنیم، درخت به ۲ قسمت مجزا تقسیم می‌شود. لینک‌هایی که این دو قسمت مجزا را هم وصل می‌کنند به همراه آن شاخه‌ی درخت، تشکیل کات ست اساسی متناظر با آن شاخه‌ی درخت را می‌دهند.



تجزیه و تحلیل حلقه‌ی اساسی:

قرارداد ۱) لینک‌ها را از 1 تا l و درخت‌ها را از $l+1$ تا b شماره گذاری می‌کنیم.

قرارداد ۲) جهت حلقه‌ی اساسی متناظر با هر لینک را هم جهت با جریان لینک در نظر می‌گیریم.



فرض کنید لینک‌ها برای درخت انتخابی به شکل زیر باشند:

جهت‌ها اختیاری است.

حلقه‌ی اساسی متناظر با هر لینک را تشکیل می‌دهیم.

استنباط‌های KVL و KCL:

ماتریس B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ بوده و با آن هم‌جهت باشد.} \\ 0 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ نباشد.} \\ -1 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ بوده و با آن خلاف جهت باشد.} \end{cases}$$

ماتریس B برای مثال قبلی:

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

استنباط‌های KVL و KCL:

$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$ بردار ولتاژ شاخه‌ها

$i = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_l \end{bmatrix}$ بردار جریان حلقه‌های اساسی

$j = \begin{bmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}$ بردار جریان شاخه‌ها

$$B \cdot V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_5 + v_6 \\ v_2 + v_6 - v_7 \\ v_3 + v_6 - v_7 + v_8 \\ v_4 - v_5 + v_6 - v_7 + v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\boxed{B \cdot V = 0}$ استنباط KVL

$$B^t . i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ -i_1 - i_4 \\ i_1+i_2+i_3+i_4 \\ -i_2-i_3-i_4 \\ i_3+i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{B^t . i = j}$$

استنباط KCL

معادلات حلقه‌ای اساسی: سه روش داریم: منظم، نظری، ماتریسی

۱- روش منظم

مجدداً تعمیم‌یافته‌ی شاخه‌ای را داریم:

$$V_k = V_{sk} + Z_k j_k - Z_k j_{sk}$$

وقتی رابطه را برای b تا شاخه‌ها بنویسیم به صورت ماتریسی خواهیم داشت:

$$V = V_s + Z_b j - Z j_s$$

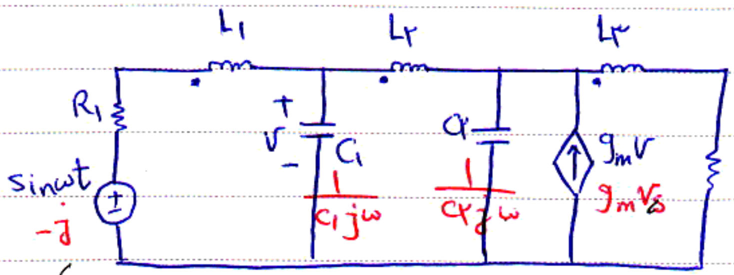
طرفین در B ضرب می‌شود:

$$\underbrace{B . V}_{0} = B V_s + B Z_b \underbrace{j}_{B^t . i} - B Z j_s$$

$$\Rightarrow \underbrace{B Z_b B^t}_{Z_B} . i = \underbrace{B Z_b j_s - B V_s}_{e_s} \quad (A) \Rightarrow \boxed{Z_B . i = e_s}$$

مولفه‌ی $B Z_b j_s$ در طرف راست رابطه‌ی (A)، عمل تبدیل منابع مستقل جریان را به منابع ولتاژ انجام می‌دهد.

مثال: در مدار زیر به روش منظم حلقه‌ای اساسی، ماتریس‌ها را ارائه دهید.



$$L = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

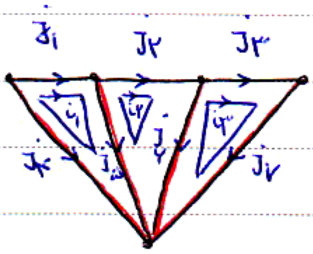
$$\sin \omega t = 1 \cos(\omega t - 90) = 1 \angle -90 = \cos -90 + j \sin(-90) = -j$$

$$\sin \omega t = \cos(\omega t - 90) = e^{-j90} = \cos 90 - j \sin 90 = -j$$

$$\boxed{A \cos(\omega t + \theta) = A e^{j\theta}}$$

در حوزه فازور کار می‌کنیم

گراف :



لینک و درخت :

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

ماتریس همانی ناشی از قراردادهای ۱ و ۲

ابتدا برای سلف‌های تزویج شده :

$\lambda = L i$

$V = L j\omega i$

بردار جریان شاخه‌ها J

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}$$

$$V_K = V_{SK} + Z_K J_K - Z_K J_{SK}$$

$$V_1 = 4j\omega \times J_1 + 2j\omega \times J_2 + j\omega \times J_3$$

$$V_2 = 2j\omega \times J_1 + 4j\omega \times J_2 + 2j\omega \times J_3$$

$$V_3 = j\omega \times J_1 + 2j\omega \times J_2 + 4j\omega \times J_3$$

$$V_4 = -J + R_1 \times J_4 - R_1 x_0$$

$$V_5 = 0 + \frac{1}{C_1 j\omega} \times J_5 - \frac{1}{C_1 j\omega} x_0$$

$$V_6 = 0 + \frac{1}{C_2 j\omega} \times J_6 - \frac{1}{C_2 j\omega} \times (-g_m V_5)$$

$$V_6 = 0 + \frac{1}{C_2 j\omega} J_6 + \frac{g_m}{C_2 j\omega}\left(\frac{1}{C_1 j\omega}\right) J_5 \Rightarrow V_6 = \frac{-g_m}{C_1 C_2 \omega^2} J_5 + \frac{1}{C_2 j\omega} J_6$$

$$V_7 = 0 + R_2\, j_7 - R_2 \times 0$$

به صورت ماتریسی؟

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{V_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4j\omega & 2j\omega & j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2j\omega & 4j\omega & 2j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j\omega & 2j\omega & 4j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1 j\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-g_m}{C_1 C_2 \omega^2} & \frac{1}{C_2 j\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix}}_{Z_b} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{Z_b} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{J_s}$$

$$Z_B = B Z_b B^t$$

$$e_s = B Z_b J_s - B V_s \qquad \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

۲) روش نگاهی: اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد در معادله‌ی $Z_B \cdot i = e_s$ ماتریس‌های Z_B و e_s را می‌توان مستقیماً تشکیل داد.

۱) منابع جریان که وجود داشته باشند اگر دارند به منبع ولتاژ تبدیل شوند.

۲) سلف تزویج شده و منبع وابسته وجود نداشته باشد.

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1L} \\ \vdots & & \\ Z_{L1} & \cdots & Z_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{s_1} \\ \vdots \\ e_{s_L} \end{bmatrix}$$

$$Z_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{مجموع امپدانس‌های موجود در حلقه اساسی i ام} \\ i \neq j & \text{مجموع امپدانس‌های مشترک بین حلقه‌ی اساسی i و j} \end{cases}$$

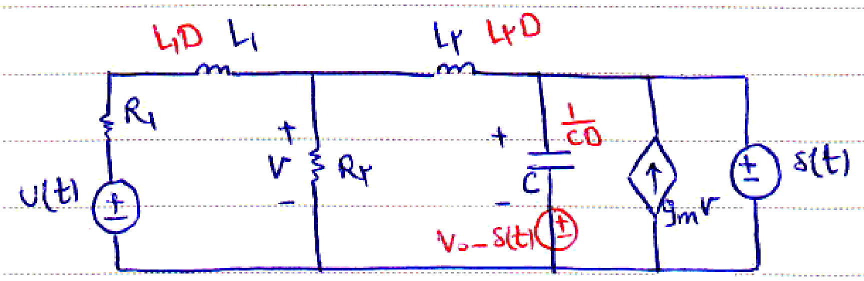
(اگر جهت حلقه‌های اساسی در شاخه‌ی مشترک یکسان بود با علامت مثبت و اگر خلاف بود با علامت منفی جمع می‌زنیم.)

e_{s_i} = مجموع منابع ولتاژ موجود در حلقه‌ی اساسی i ام (اگر از سر منفی وارد شدیم با علامت + و اگر از سر مثبت وارد شدیم با علامت منفی – جمع می‌زنیم.)

۳) روش ماتریسی: همان روش توری است.

با این تفاوت که منابع وابسته نمی‌توانند وجود داشته باشند. وابستگی‌ها را برحسب جریان حلقه‌ها می‌نویسیم و منابع وابسته را مانند منابع مستقل فرض می‌کنیم و معادلات را با روش توری می‌نویسیم. در نهایت اثر وابستگی را در ماتریس Z_B در نظر می‌گیریم.

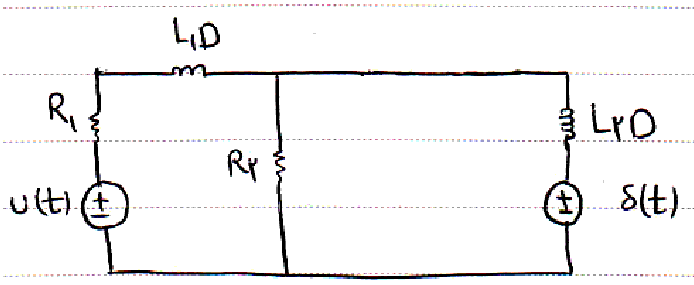
مثال)

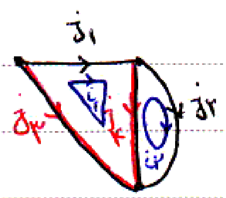


$V_C(0) = V_0$

$i_{L_1}(0) = i_{L_2}(0) = I_0$

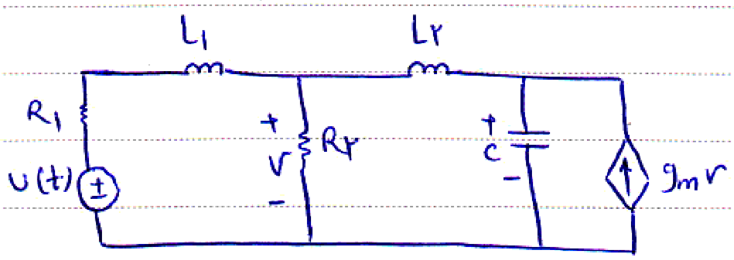
در حوزه‌ی انتگرال-دیفرانسیل حل می‌کنیم:

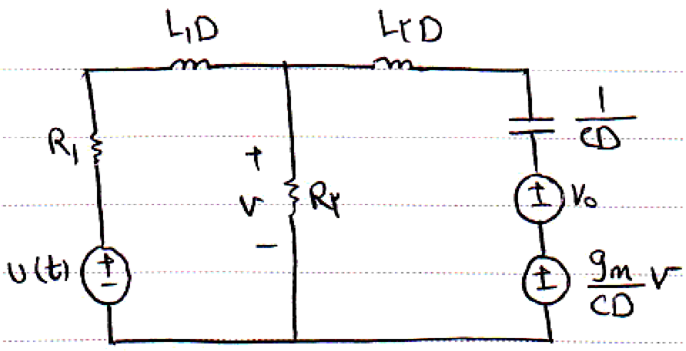


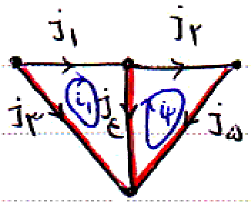


$$\begin{bmatrix} R_1+L_1D+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+L_2D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ -\delta(t) \end{bmatrix}$$

مثال)







$$v = R_2 i_1 - R_2 i_2$$

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+L_1D & -R_2 \\ -R_2+\frac{g_mR_2}{CD} & R_2+L_2D+\frac{1}{CD}-\frac{g_mR_2}{CD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ -V_0 - \cancel{\frac{g_mR_2}{CD}i_1} + \cancel{\frac{g_mR_2}{CD}i_2} \end{bmatrix}$$

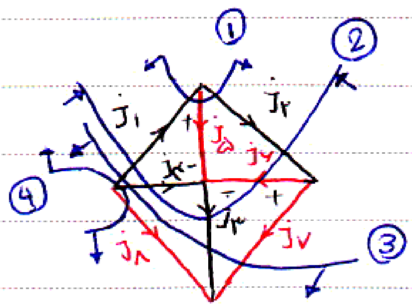
تجزیه و تحلیل کات ست:

با تعیین درخت مناسب در گراف مدار:

قرارداد ۱: لینک‌ها را از 1 تا L و شاخه‌های درخت را از $L+1$ تا b شماره گذاری می‌کنیم.

قرارداد ۲: جهت کات ست را هم جهت با جهت شاخه درخت متناظر در نظر می‌گیریم.

مثال) فرض کنید یک گراف و درخت انتخابی به صورت زیر باشد:



ماتریس Q:

$$Q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات ست } i \text{ بوده و با آن هم جهت باشد.} \\ 0 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات ست } i \text{ نباشد.} \\ -1 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات ست } i \text{ بوده و با خلاف جهت باشد.} \end{cases}$$

در مثال قبل ۸ شاخه داریم.

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ماتریس یکه ناشی از قراردادهای ۱ و ۲

استنباط های KVL و KCL :

بردار جریان شاخه‌ها :
$$j = \begin{bmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}$$

بردار ولتاژ شاخه‌ها :
$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$$

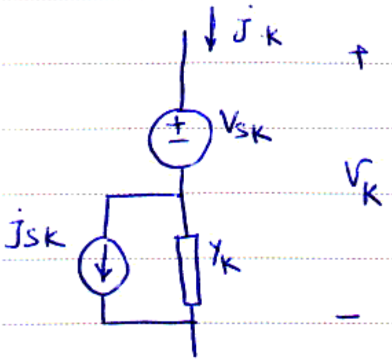
بردار ولتاژ شاخه‌های درخت :
$$e = \begin{bmatrix} e_{L+1} \\ \vdots \\ e_b \end{bmatrix}$$

$$Q \cdot j = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_1 + j_2 + j_5 \\ j_1 - j_2 - j_3 + j_4 + j_6 \\ -j_1 + j_3 - j_4 + j_7 \\ j_1 + j_4 + j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow \quad Q \cdot j = 0$ استنباط KCL

$$Q^t \cdot e = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} \Longrightarrow Q^t \cdot e = v$$

استنباط KVL و



معادلات کات ست اساسی و منظم تعریف می‌کنند

منظم،

تعمیم بعضی از شاخه‌ها را مجدداً در نظر می‌گیریم.

$$j_k = j_{sk} + y_k v_k - y_k v_{sk}$$

وقتی این معادله را برای تمام شاخه‌ها بنویسیم، معادلات ماتریسی زیر حاصل می‌شود:

$$j = j_s + Y_q v - Y_q v_s$$

ضرب طرفین در Q:

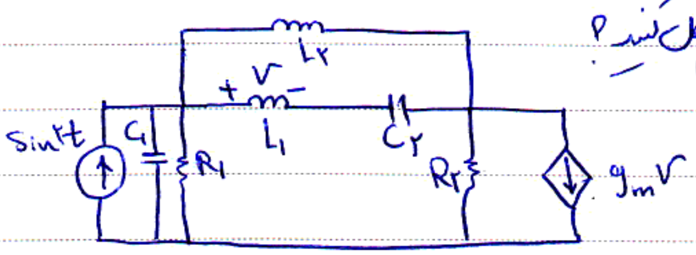
$$\underbrace{Q \cdot j}_{0} = Q j_s + Q Y_q \underbrace{v}_{Q^t \cdot e} - Q Y_q v_s$$

$$\underbrace{Q Y_q Q^t}_{Y_Q} \cdot e = \underbrace{Q Y_q v_s - Q j_s}_{i_s}$$

$$\boxed{Y_Q \cdot e = i_s}$$

تبدیل منابع ولتاژ سری به جریان

مثال) مدار زیر را به روش کات ست اساسی منظم حل کنید؟



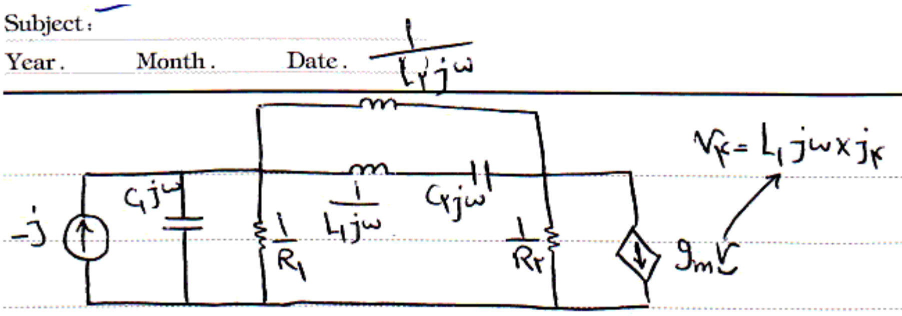
درس کات ست

چون با ادمیتانس سروکار داریم

همه را به Y تبدیل می‌کنیم

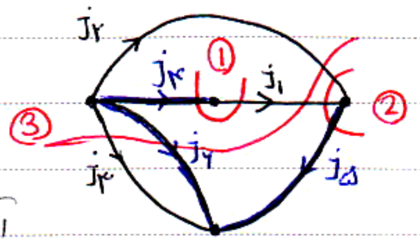
مثلاً $Z_C = \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow Y_C = jC\omega$ و $Z_L = Lj\omega \Rightarrow Y_L = \frac{1}{Lj\omega}$

Subject: Year. Month. Date.



$V_4 = L_1 j\omega \times j_4$

تبدیل به Y ؟



آبی درخت
سیاه لینک

گراف ؛

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$j_1 = 0 + C_2 j\omega \times V_1 - C_2 j\omega \times 0$$
$$j_2 = 0 + \frac{1}{L_2 j\omega} V_2 - \frac{1}{L_2 j\omega} \times 0$$
$$j_3 = -(-j) + C_1 j\omega \times V_3 - C_1 j\omega \times 0$$
$$j_4 = 0 + \frac{1}{L_1 j\omega} \times V_4 - \frac{1}{L_1 j\omega} \times 0$$
$$j_5 = g_m V + \frac{1}{R_2} V_5 - \frac{1}{R_2} \times 0$$

$$j_5 = g_m \times L_1 j\omega \left(\frac{1}{L_1 j\omega}\right) V_4 + \frac{1}{R_2} V_5 \Longrightarrow j_5 = 0 + g_m V_4 + \frac{1}{R_2} V_5$$

$-(-j)$

$$j_6 = 0 + \frac{1}{R_1} V_6 - \frac{1}{R_1} \times 0$$

ادامه به عهده خودتان.

$$j_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad V_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_q = \begin{bmatrix} C_2 j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2 j\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 j\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_1 j\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_m & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Y_Q = Q Y_q Q^t \\ i_s = Q Y_q V_s - Q j_s \end{cases}$$

ادامه به عهده خودتان

PAPCO

۲ـ روش نظری ۲: اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد می‌توان Y_Q و i_s را مستقیماً تشکیل داد:

۱) منابع ولتاژ موجود نباشد و اگر هستند به منبع جریان تبدیل شوند.

۲) سلف تزویج شده و منبع وابسته نداشته باشیم.

$$Y_{ij} = \begin{cases} i=j & \text{مجموع ادمیتانس‌های متصل به کات‌ست i‌ام} \\ i\neq j & \text{مجموع ادمیتانس‌های مشترک کات‌ست i و j} \end{cases}$$

(اگر جهت دو کات‌ست در شاخه مشترک یکسان بود با علامت مثبت و در غیر این صورت با علامت منفی جمع می‌زنیم)

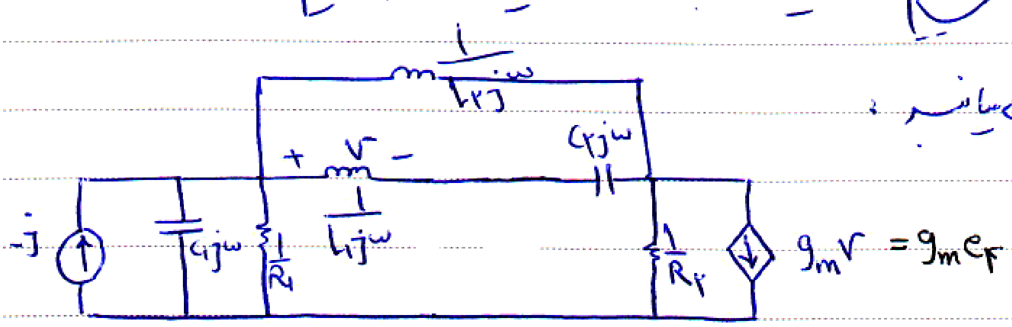
i_{s_i} = مجموع جبری منابع جریان موجود در کات‌ست i‌ام (اگر جهت منبع مخالف جهت کات‌ست بود با علامت مثبت و در غیر این صورت با علامت منفی جمع می‌زنیم)

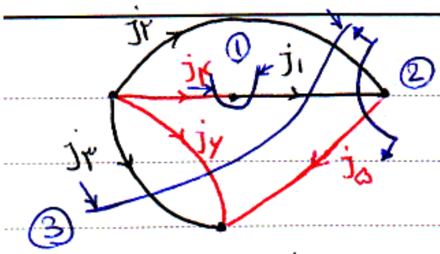
۳ـ روش نیمه نظری: همان روش نظری است با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند.

تمامی وابستگی‌ها را برحسب ولتاژ شاخه‌ها در جهت می‌نویسیم و منابع وابسته را مانند منابع مستقل فرض می‌کنیم.

معادلات را به روش نظری می‌نویسیم و در نهایت اثر وابستگی را به ماتریس Y_Q برمی‌گردانیم.

مثال) مثال قبل به روش نیمه نظری:





$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1 j\omega}+C_3 j\omega & C_3 j\omega & -C_2 j\omega \\ C_2 j\omega+g_m & \frac{1}{L_2 j\omega}+C_3 j\omega+\frac{1}{R_2} & \frac{-1}{L_4 j\omega}-C_2 j\omega \\ -C_2 j\omega & \frac{-1}{L_2 j\omega}-C_2 j\omega & C_1 j\omega+\frac{1}{R_1}+C_2 j\omega+\frac{1}{L_2 j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{0}{\cancel{-j}} \\ \cancel{-g_m e_4} \\ \underset{-j}{\cancel{0}} \end{bmatrix}$$

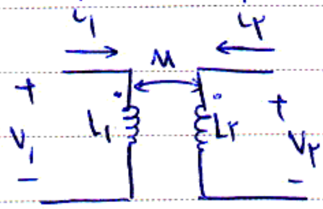
نکات مهم برای حل مسائل:

۱- در روش گره و کات ست اساسی منابع جریان را می‌توان به تنهایی یک شاخه در نظر گرفت.

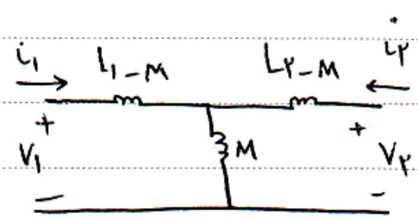
۲- در تجزیه و تحلیل مش و حلقه اساسی، منابع ولتاژ را می‌توان به تنهایی یک شاخه در نظر گرفت.

۳- در تجزیه و تحلیل گره و کات ست و حلقه اساسی، گراف‌ها می‌توانند غیر مسطح باشند اما در روش مش خیر.

۴- در روش حل ماتریسی، گفته بودیم سلف تزویج شده نباید موجود باشد، لکن می‌توان به جای سلف‌های تزویج شده مدار معادل قرار داد و از روش ماتریسی استفاده کرد.

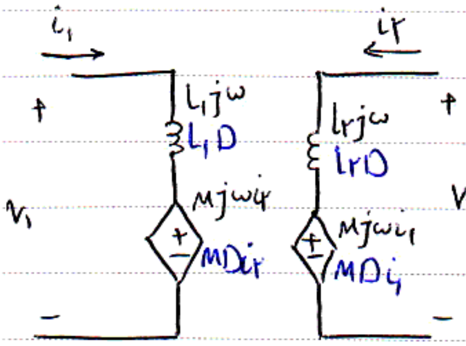


معادل اول: مدار معادل T،



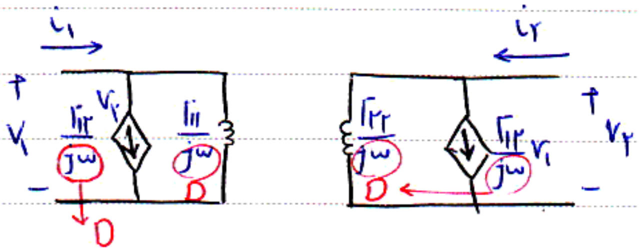
شرط استفاده از این معادل این است که سلف‌ها در مجاورت هم باشند و یا سر مشترک داشته باشند.

معادل دوم:



کاربرد در روش مش و حلقه اساسی.

معادل سوم:



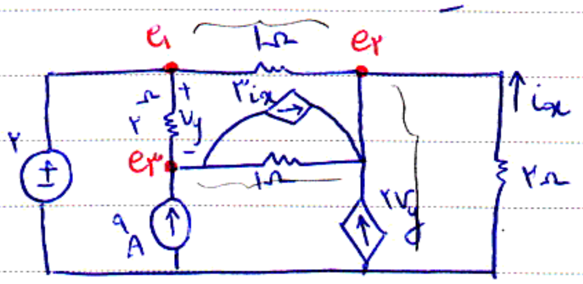
کاربرد در روش گره و کات ست اساسی.

۵ـ در بعضی مدارات در هنگام استفاده از روش‌های تحلیل منابع مستقلی وجود دارد که قابل تبدیل نیستند یا تبدیل آن‌ها به سختی انجام می‌شود. مثلاً منابع جریان در تبدیل‌های مش و حلقه اساسی و منابع ولتاژ در تبدیل‌های گره و کات ست اساسی.

در این موارد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) در تحلیل‌های گره و کات ست اساسی، این منابع (منابع ولتاژ)، ولتاژ گره یا ولتاژ یک شاخه درخت‌اند. در این حالت در روش‌های تحلیل، ولتاژ مشخص شده را در سطر e قرار می‌دهیم، سپس سطر مربوطه را از ماتریس Y_n یا Y_Q حذف می‌کنیم.

مثال) حل از روش پتانسیل گره



با مدار مربوطه e_2

$Y_n \cdot e = I_s \qquad i_x = \frac{-e_2}{2} \longrightarrow 3 i_x = -\frac{3}{2} e_2 \qquad V_y = e_1 - e_3$

$\Rightarrow 2V_y = 2e_1 - 2e_3$

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1-2 & 1+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2} & -1+2 \\ -\frac{1}{2} & -1-\frac{3}{2} & 1+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} e_2 + 2e_1 - 2e_3 \\ -9 + \frac{3}{2} e_2 \end{bmatrix}$$

$9 + \frac{3}{2} e_2$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 4 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$-6 + 4e_2 + e_3 = 0 \longrightarrow 4e_2 + e_3 = 6 \longrightarrow \boxed{e_3 = 6 - 4e_2}$

$-1 - \frac{5}{2} e_2 + \frac{3}{2} e_3 = -9 \longrightarrow -2 - 5e_2 + 3e_3 = -18 \longrightarrow \boxed{3e_3 - 5e_2 = -16}$

$18 - 12e_2 - 5e_2 = -16 \longrightarrow -17e_2 = -34 \longrightarrow \boxed{e_2 = 2} \qquad e_3 = 6 - 4\times 2 = -2 \rightarrow \boxed{e_3 = -2}$

$i_x = -\frac{e_2}{2} = -1$

ب) در تحلیل های مش و حلقه اساسی، این منابع (منابع جریان)، جریان یک مش یا جریان یک حلقه اساسی اند.

در این حالت در روش های تحلیلی، جریان مشخص شده را در بردار قرار می‌دهیم، پس سطر مربوطه را از ماتریس Z_B یا Z_m حذف می‌کنیم.

فصل ۱۲ : معادلات حالت

متغیرهای حالت: کوچکترین دسته از متغیرهای شبکه است به طوریکه بتوان با داشتن آن ها در $t=t_0$ و داشتن منابع در $t>t_0$ بتوان رفتار شبکه را در هر لحظه $t\geq t_0$ تعیین کرد. اگر دست کم n متغیر حالت $x_1(t)$، $x_2(t)$، ...، $x_n(t)$ وجود داشته باشند، بردار حالت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

معادلات حالت: اگر معادلات دیفرانسیل یک شبکه را به صورت زیر بنویسیم می‌گوییم معادلات حالت تشکیل شده.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(\underbrace{x(t)}_{\text{بردار حالت}}, \underbrace{u(t)}_{\text{بردار ورودی های سیستم}}\big) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

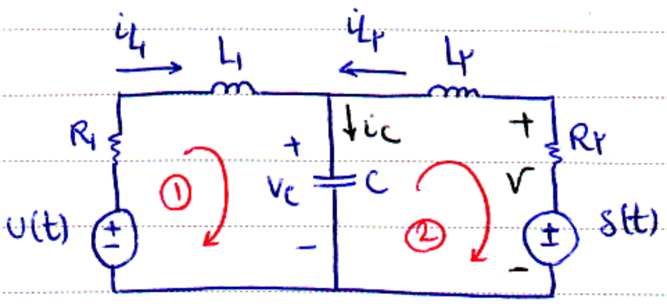
در شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

خروجی های سیستم

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

مثال) مدار زیر را در نظر بگیرید:



KVL (1): $-u(t) + R_1 i_{L_1} + L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + v_C = 0$

$$\rightarrow \boxed{\frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{-R_1}{L_1} i_{L_1} - \frac{1}{L_1} v_C + \frac{1}{L_1} u(t)}$$

$$KVL(2):\quad -V_C - L_2\frac{di_{L_2}}{dt} - R_2 i_{L_2} + \delta(t) = 0$$

$$\boxed{\frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{-R_2}{L_2} i_{L_2} - \frac{1}{L_2}V_C + \frac{1}{L_2}\delta(t)}$$

$$KCL:\quad i_{L_1} + i_{L_2} = C\frac{dV_C}{dt} \longrightarrow \boxed{\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} i_{L_1} + \frac{1}{C} i_{L_2}}$$

دراساس این معادلات می‌توان بردار حالت را به صورت زیر تعریف کرد:

خروجی سیستم به صورت روبرو است:

$$V = -R_2 i_{L_2} + \delta(t)$$

حال:

$$\dot{x} = Ax + BU \qquad y = Cx + DU$$

بردار ورودی‌ها (U) — بردار خروجی‌ها (y)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \\ \dot{V}_C \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ V_C \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} U(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}}_{U}$$

$$V = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -R_2 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ V_C \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} U(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}}_{U}$$

به طور کلی اگر در یک سیستم، n متغیر حالت، m ورودی و k خروجی داشته باشیم، ابعاد ماتریس‌های فضای حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$[\dot{x}]_{n\times1} = [A]_{n\times n}[x]_{n\times1} + [B]_{n\times m}[U]_{m\times1}$$

$$[y]_{k\times1} = [C]_{k\times n}[x]_{n\times1} + [D]_{k\times m}[U]_{m\times1}$$

باید خازن درخت باشد سلف باید لینک باشد.

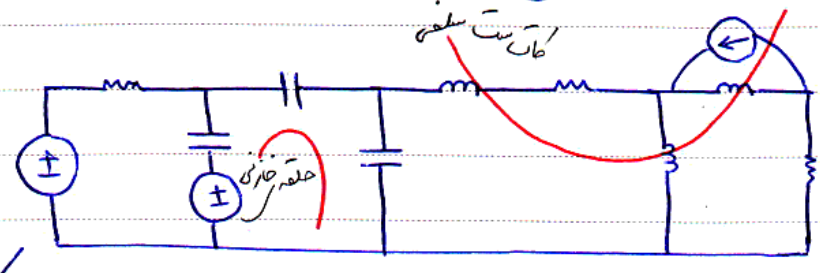
کات ست یک درخت بقیه لینک
حلقه یک لینک با بقیه درخت

الگوریتم معادلات حالت:

۱ـ انتخاب متغیرهای حالت: بر اساس عناصر ذخیره کننده انرژی انجام می‌شود. در مدارهای الکتریکی، معمولاً جریان سلف‌ها و ولتاژ خازن‌ها به عنوان متغیرهای حالت انتخاب می‌شوند. به طور مشابه می‌توان شار سلف‌ها و بار خازن‌ها را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب نمود.

۲ـ انتخاب درخت مناسب: درختی انتخاب می‌کنیم که شامل خازن‌ها بوده و شامل سلف‌ها نباشد.

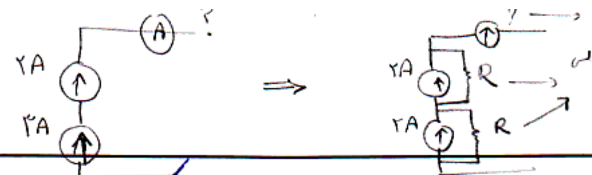
سوال: آیا همیشه امکان‌پذیر است؟ خیر، در شرایطی که حلقه خازنی داریم، یکی از خازن‌ها را درخت انتخاب نمی‌کنیم، همچنین در شرایطی که کات ست سلفی داریم یکی از سلف‌ها را انتخاب نمی‌کنیم. در نتیجه به تعداد حلقه‌های خازنی و کات ست‌های سلفی از معادلات حالت کم می‌شود. حلقه خازنی و کات ست سلفی را با کشتن منابع مستقل می‌توان تشخیص داد.



۶-۱-۱=۴ : تعداد متغیرهای حالت ، ۱ : تعداد حلقه خازنی ، ۱ : تعداد کات ست سلفی ، ۶ : تعداد عناصر ذخیره کننده

۳ـ KCL را در کات ست‌های خازنی می‌نویسیم و سعی می‌کنیم که بر حسب متغیرهای حالت نوشته شود.

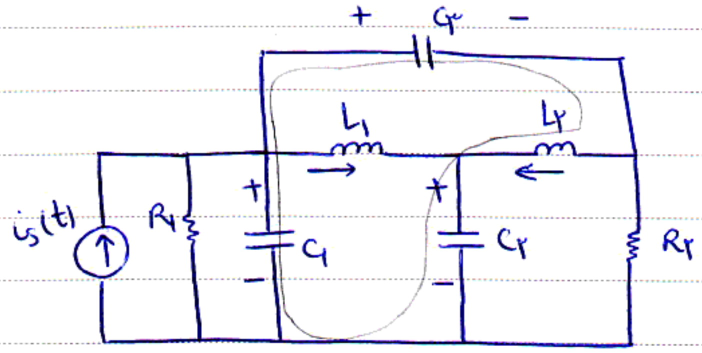
۴ـ KVL را در حلقه‌های اساسی شامل سلف‌ها می‌نویسیم و سعی می‌کنیم که بر حسب متغیرهای حالت نوشته شود.

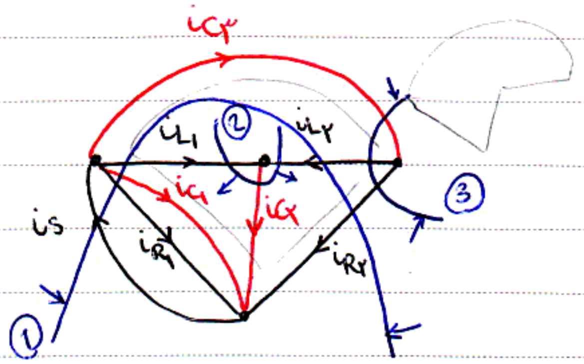


۵- درصورت وجود متغیر غیرحالت در مراحل ۳ و ۴ اگر این متغیر غیرحالت، متغیر یک لینک بود، حلقه اساسی را در آن لینک می‌نویسیم تا متغیر به حالت تبدیل شود.

۶- درصورت وجود متغیر غیرحالت در مراحل ۳ و ۴، درصورتیکه این متغیر مربوط به یک شاخه درخت بود، کات ست اساسی را در آن شاخه درخت می‌نویسیم تا متغیر به حالت تبدیل شود.

مثال) معادلات حالت مدار زیر؟





منبع جریان را به‌عنوان یک شاخه مستقل درنظر بگیریم

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{C_3} \end{bmatrix}$$

$$\text{KCL (1)}: \quad i_{L_1} + i_{L_2} + C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} + i_{R_1} - i_s + i_{R_2} = 0$$

$$\boxed{\frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{-1}{C_1} i_{L_1} - \frac{1}{C_1} i_{L_2} - \frac{1}{C_1} \overset{\text{غیرحالت}}{i_{R_1}} - \frac{1}{C_1} \overset{\text{غیرحالت}}{i_{R_2}} + \frac{1}{C_1} i_s} \quad (1)$$

$$\text{KCL (2)}: \quad C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} - i_{L_1} - i_{L_2} = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{dv_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_{L_1} + \frac{1}{C_2} i_{L_2}}$$

غیرحالت

$$KCL(3):\ C_3\frac{dv_{C_3}}{dt}-i_{L_2}-i_{R_2}=0 \longrightarrow \frac{dv_{C_3}}{dt}=\frac{1}{C_3}i_{L_2}+\frac{1}{C_3}i_{R_2} \quad ②$$

$$KVL(1):\ L_1\frac{di_{L_1}}{dt}+v_{C_2}-v_{C_1}=0 \longrightarrow \frac{di_{L_1}}{dt}=\frac{1}{L_1}v_{C_1}-\frac{1}{L_1}v_{C_2}$$

$$KVL(2):\ L_2\frac{di_{L_2}}{dt}+v_{C_2}-v_{C_1}+v_{C_3}=0 \longrightarrow \frac{di_{L_2}}{dt}=\frac{1}{L_2}v_{C_1}-\frac{1}{L_2}v_{C_2}-\frac{1}{L_2}v_{C_3}$$

$$KVL:\ R_1 i_{R_1}-v_{C_1}=0 \longrightarrow i_{R_1}=\frac{v_{C_1}}{R_1}$$ حذف غیرحالت i_{R_1} :

$$KVL:\ R_2 i_{R_2}-v_{C_1}+v_{C_3}=0 \longrightarrow$$ حذف غیرحالت i_{R_2} :

$$i_{R_2}=\frac{1}{R_2}v_{C_1}-\frac{1}{R_2}v_{C_3}$$

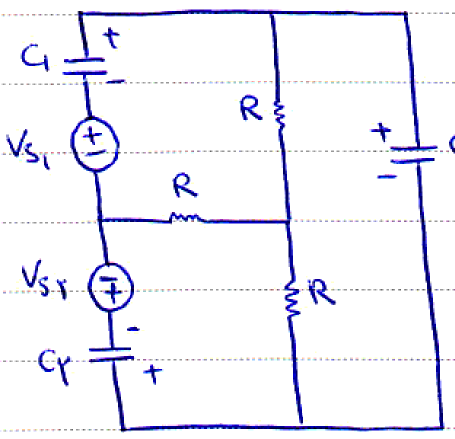
بازنویسی ① و ②

$$\frac{dv_{C_1}}{dt}=-\frac{1}{C_1}i_{L_1}-\frac{1}{C_1}i_{L_2}-\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_{C_1}-\frac{1}{R_2}v_{C_3}+\frac{1}{C_1}i_s$$

$$\frac{dv_{C_3}}{dt}=\frac{1}{C_3}i_{L_2}+\frac{1}{C_2}\frac{v_{C_1}}{R_2}-\frac{1}{C_3R_2}v_{C_3}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{i}_{L_1}\\ \dot{i}_{L_2}\\ \dot{v}_{C_1}\\ \dot{v}_{C_2}\\ \dot{v}_{C_3}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{L_1}&\frac{-1}{L_1}&0\\ 0&0&\frac{1}{L_2}&\frac{-1}{L_2}&\frac{-1}{L_2}\\ \frac{-1}{C_1}&\frac{-1}{C_1}&\frac{-1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)&0&\frac{-1}{R_2}\\ \frac{1}{C_2}&\frac{1}{C_2}&0&0&0\\ 0&\frac{1}{C_3}&\frac{1}{C_3R_2}&0&\frac{-1}{C_3R_2}\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}i_{L_1}\\ i_{L_2}\\ v_{C_1}\\ v_{C_2}\\ v_{C_3}\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\ \frac{1}{C_1}\\0\\0\end{bmatrix}}_{B}i_s(t)$$

مثال) قبلاً گفتیم اگر متغیرهای حالت به هم چسب نوشته شوند از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود مانند حلقه‌ی خازنی که ولتاژ سورس است



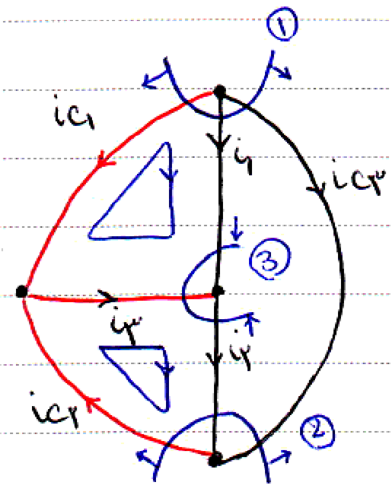
مثلاً:

$$V_{C2}+V_{S2}-V_{S1}-V_{C1}+V_{C3}=0$$

$$V_{C3}=V_{C1}-V_{C2}+V_{S1}-V_{S2}$$

یعنی از متغیرهای حالت یکی کم می‌شود. از بین سه متغیر موجود

۲ تا را به دلخواه انتخاب می‌کنیم.



$$x=\begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}$$

غیرحالت   غیرحالت

$$KCL(1):\quad C_1\frac{dV_{C1}}{dt}+i_1+i_{C3}=0 \longrightarrow \dot{V}_{C1}=\frac{-1}{C_1}i_1-\frac{1}{C_1}i_{C3} \quad ①$$

غیرحالت   غیرحالت

$$KCL(2):\quad C_2\frac{dV_{C2}}{dt}-i_2-i_{C3}=0 \longrightarrow \dot{V}_{C2}=\frac{1}{C_2}i_2+\frac{1}{C_2}i_{C3} \quad ②$$

حذف غیرحالت i_1 : i_1 متغیر لینک است حلقه‌ی اساسی این لینک را می‌نویسیم.

$$KVL:\quad Ri_1-Ri_3-V_{S1}-V_{C1}=0 \longrightarrow i_1=i_3+\frac{1}{R}V_{C1}+\frac{1}{R}V_{S1} \quad Ⓐ$$

غیرحالت

i_3 مربوط به یک شاخه درخت است. کات‌ست اساسی این شاخه را می‌نویسیم.

$$KCL(3):\quad i_3+i_1-i_2=0 \longrightarrow i_3=i_2-i_1$$

جایگذاری در $\textcircled{A}$

$$2i_1 = i_2 + \frac{1}{R}V_{C_1} + \frac{1}{R}V_{S_1}$$

غیرحالت

$$\longrightarrow \boxed{i_1 = \frac{1}{2} i_2 + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}} \quad \textcircled{B}$$

i_2 متغیر یک لینک است. حلقه‌ی اساسی این لینک را می‌نویسیم.

$$KVL(2): \; Ri_2 + V_{C_2} + V_{S_2} + Ri_3 = 0 \longrightarrow i_2 = \underbrace{-i_3}_{i_1 - i_2} - \frac{1}{R}V_{C_2} - \frac{1}{R}V_{S_2}$$

$$2i_2 = i_1 - \frac{1}{R}V_{C_2} - \frac{1}{R}V_{S_2} \longrightarrow \boxed{i_2 = \frac{1}{2}i_1 - \frac{1}{2R}V_{C_2} - \frac{1}{2R}V_{S_2}} \quad \textcircled{C}$$

جایگذاری $\textcircled{C}$ در $\textcircled{B}$:

$$i_1 = \frac{1}{4}i_1 - \frac{1}{4R}V_{C_2} - \frac{1}{4R}V_{S_2} + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}$$

$$\frac{3}{4}i_1 = \frac{-1}{4R}V_{C_2} - \frac{1}{4R}V_{S_2} + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}$$

$$\boxed{i_1 = \frac{-1}{3R}V_{C_2} - \frac{1}{3R}V_{S_2} + \frac{2}{3R}V_{C_1} + \frac{2}{3R}V_{S_1}} \quad \textcircled{E}$$

با جایگذاری $\textcircled{E}$ در $\textcircled{C}$، i_2 نیز برحسب متغیرهای حالت بیان می‌شود.

$$i_2 = \frac{-1}{6R}V_{C_2} - \frac{1}{6R}V_{S_2} + \frac{1}{3R}V_{C_1} + \frac{1}{3R}V_{S_1} - \frac{1}{2R}V_{C_2} - \frac{1}{2R}V_{S_2}$$

$$\boxed{i_2 = \frac{1}{3R}V_{C_1} - \frac{2}{3R}V_{C_2} - \frac{2}{3R}V_{S_2} + \frac{1}{3R}V_{S_1}} \quad \textcircled{F}$$

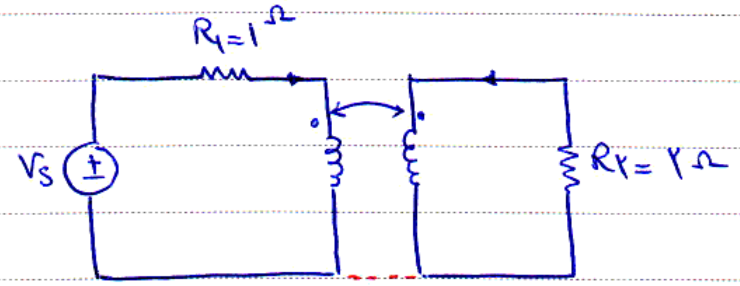
i_1 و i_2 طبق روابط E و F، به متغیرهای حالت تبدیل شوند.

حذف غیرحالت i_{C_3}: $\quad V_{C_3} = V_{C_1} - V_{C_2} + V_{S_1} - V_{S_2}$: داشتیم

$$i_{C3} = C_3 \dot{v}_{C3} \longrightarrow i_{C3} = C_3 \dot{v}_{C1} - C_3 \dot{v}_{C2} + C_3 \dot{V}_{S1} - C_3 \dot{V}_{S2} \quad (9)$$

با جایگذاری 9 در ① و ② و استفاده از سایر روابط نامبرده شده، معادلات حالت به‌دست می‌آید. ادامه به‌عهدهٔ دانشجو!

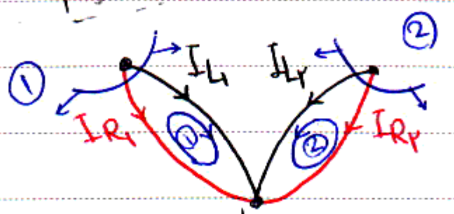
مثال)



$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

خودمان سیم در نظر می‌گیریم.

گراف:



برای هر یک از سلف‌ها حلقهٔ اساسی را می‌نویسیم.

$$\lambda_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \xrightarrow{d/dt} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$$

$$\text{KVL}(1): \quad 1 \times \frac{dI_{L_1}}{dt} + 1\,\frac{dI_{L_2}}{dt} - V_S - 1 \times I_{R_1} = 0$$

غیرحالت

$$\dot{I}_{L_1} + \dot{I}_{L_2} = I_{R_1} + V_S \quad ①$$

غیرحالت

$$\text{KVL}(2): \quad 2\,\frac{dI_{L_2}}{dt} + 1 \times \frac{dI_{L_1}}{dt} - 2 I_{R_2} = 0 \longrightarrow 2\dot{I}_{L_2} + \dot{I}_{L_1} = 2 I_{R_2} \quad ②$$

حذف غیرحالت i_{R_1}: i_{R_1} متغیر یک شاخهٔ درخت است، کات‌ست اساسی متناظر با آن شاخه را می‌نویسیم.

$$\text{KCL}(1): \quad I_{L_1} + I_{R_1} = 0 \longrightarrow I_{R_1} = -I_{L_1} \quad (A)$$

حذف غیرحالت I_{R_2}: متغیر یک شاخه درخت است، کات ست اساسی آن را می‌نویسیم.

$$\text{kcl (2)}: \quad I_{L_2} + I_{R_2} = 0 \longrightarrow \boxed{I_{R_2} = -I_{L_2}} \quad \text{(B)}$$

جایگذاری (A) در (1) و (B) در (2):

$$\begin{cases} \dot I_{L_1} + \dot I_{L_2} = -I_{L_1} + V_s \longrightarrow \dot I_{L_1} = -I_{L_1} - \dot I_{L_2} + V_s & (3) \\ 2\dot I_{L_2} + \dot I_{L_1} = -2I_{L_2} & (4) \end{cases}$$

جایگذاری (3) در (4):

$$2\dot I_{L_2} - I_{L_1} - \dot I_{L_2} + V_s = -2I_{L_2} \longrightarrow \boxed{\dot I_{L_2} = I_{L_1} - 2I_{L_2} - V_s} \quad (5)$$

جایگذاری (5) در (3):

$$\dot I_{L_1} = -I_{L_1} - I_{L_1} + 2I_{L_2} + V_s + V_s$$

$$\boxed{\dot I_{L_1} = -2I_{L_1} + 2I_{L_2} + 2V_s} \quad (6)$$

از (5) و (6):

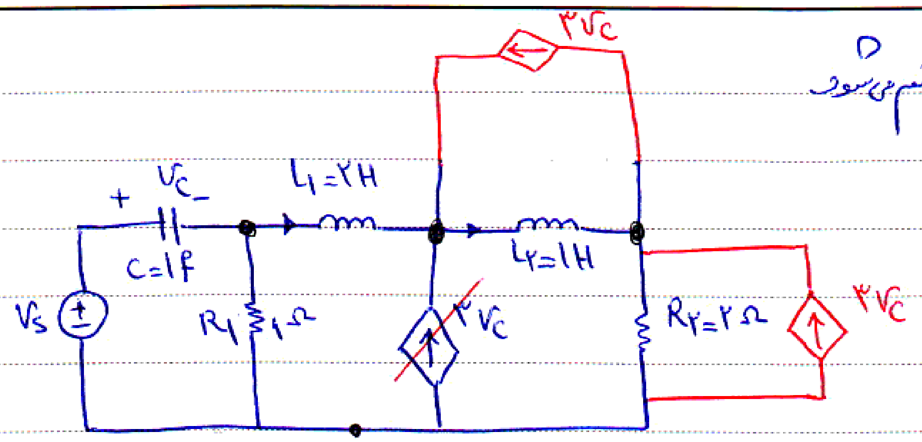
$$\begin{bmatrix} \dot I_{L_1} \\ \dot I_{L_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} I_{L_1} \\ I_{L_2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B} V_s$$

نکته) در شرایطی که حلقه خازنی و کات ست سلفی داشته باشیم، به دلیل اینکه متغیرهای حالت وابسته هم نوشته می‌شوند، از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود.

وجود منابع وابسته نیز علاوه بر شرایط فوق، ممکن است متغیرهای حالت را وابسته به هم کند، در این صورت

باز هم از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود

مثال)



تعداد عناصر ذخیره کننده انرژی ۳ است. به نظر می‌رسد ۳ متغیر حالت داشته باشیم ولی اگر دقت کنیم مشاهده می‌کنیم که

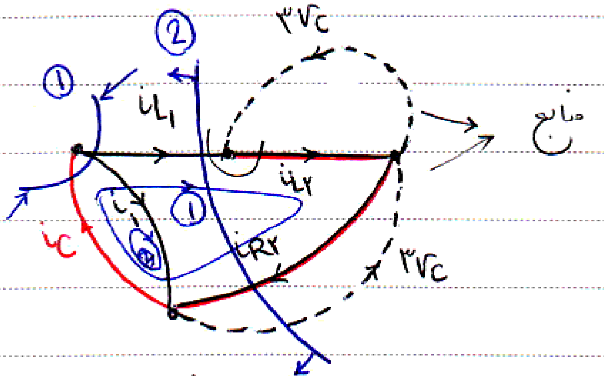
KCL : $3V_C = i_{L_2} - i_{L_1}$

یعنی یکی از متغیرهای حالت برحسب بقیه بیان می‌شود، در نتیجه ۲ متغیر حالت داریم. از ۳ متغیر موجود ۲ تا را به دلخواه انتخاب می‌کنیم

$$x = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ V_C \end{bmatrix}$$

حال متغیرهای حالت را بدست می‌آوریم:

گراف:



غیرحالت

KCL (1) : $C\frac{dV_C}{dt} - i_1 - i_{L_1} = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{V}_C = \frac{1}{C} i_{L_1} + \frac{1}{C} i_1}$ ①

KVL (1) : $L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} + R_2 i_{R_2} - V_s + V_C = 0$

غیرحالت

$L_1 \dot{i}_{L_1} + L_2 \dot{i}_{L_2} + R_2 i_{R_2} - V_s + V_C = 0$ ②

غیرحالت

حذف غیرحالت i_1: i_1 متغیر لینک است، حلقه اساسی آن را می‌نویسیم.

$$KVL(2):\ R_1 i_1 - V_s + V_c = 0 \longrightarrow \boxed{i_1 = \frac{-1}{R_1}V_c + \frac{1}{R_1}V_s} \quad (A)$$

حذف غیرحالت i_{R_2}: i_{R_2} متغیر شاخه درخت است. کات ست اساسی این شاخه را می‌نویسیم.

$$KCL(2):\ i_{R_2} - i_{L_1} - 3V_c = 0 \longrightarrow i_{R_2} = i_{L_1} + 3V_c \quad (B)$$

حذف غیرحالت i_{L_2}:

داشتیم: $i_{L_2} = i_{L_1} + 3V_c \longrightarrow \boxed{\dot{i}_{L_2} = \dot{i}_{L_1} + 3\dot{V}_c} \quad (C)$

جایگذاری (A)، (B) و (C) در (1) و (2)

$$\boxed{\dot{V}_c = \frac{1}{C} i_{L_1} - \frac{1}{R_1 C} V_c + \frac{1}{C R_1} V_s} \quad (3)$$

$$L_1 \dot{i}_{L_1} + L_2 \dot{i}_{L_1} + 3L_2 \dot{V}_c + R_2 i_{L_1} + 3R_2 V_c - V_s + V_c = 0$$

$$(L_1 + L_2)\dot{i}_{L_1} + \underbrace{\frac{3L_2}{C} i_{L_1} - \frac{3L_2}{R_1 C} V_c + \frac{3L_2}{R_1 C} V_s}_{3L_2 \dot{V}_c} + R_2 i_{L_1} + 3R_2 V_c - V_s + V_c = 0$$

$$\boxed{(L_1 + L_2)\dot{i}_{L_1} + \left(\frac{3L_2}{C} + R_2\right) i_{L_1} + \left(1 + 3R_2 - \frac{3L_2}{R_1 C}\right)V_c + V_s\left(\frac{3L_2}{R_1 C} - 1\right)V_s = 0}$$

عددگذاری:

$$\boxed{\dot{V}_c = i_{L_1} - V_c + V_s}$$

$$3\dot{i}_{L_1} + 5 i_{L_1} + 4V_c + 2V_s = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{i}_{L_1} = -\frac{5}{3} i_{L_1} - \frac{4}{3} V_c - \frac{2}{3} V_s}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4/3 & -5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix} v_s$$

نکته) در صورت لزوم می‌توان منابع را به عنوان یک شاخه مستقل در نظر گرفت، در این صورت سعی می‌شود منابع ولتاژ جزء شاخه‌های درخت و منابع جریان جزء لینک‌ها باشند.

فصل ۱۳ : تبدیلات لاپلاس

از این روش برای آنالیز مدارات خطی و تغییر ناپذیر با زمان استفاده می‌شود.

ابتدا مروری بر روابط لاپلاس :

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \qquad \mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha} \qquad \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[\sin\beta t] = \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \qquad \mathcal{L}[\cos\beta t] = \frac{s}{s^2+\beta^2}$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n$$

مثال)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3!}\cdot\frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{6}t^3$$

* در بسیاری از مواقع، معکوس گیری از لاپلاس و یا لاپلاس گیری از توابع از خواص تبدیل لاپلاس استفاده می‌شود.

مروری بر خواص :

۱) $$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t} f(t)\right] = F(s-\alpha)$$

مثال)

$$\mathcal{L}\left[e^{-2t}\cos(3t)\right] = ?$$

$$\mathcal{L}\{\cos(3t)\} = \frac{s}{s^2+9}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-2t}\cos 3t\right] = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

(۲ $$L\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(S)$$

مثال) $$L\left[t^2 e^{3t}\right] = ? \quad (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-3}\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-3)^2}\right) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

(۳ $$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = SF(S) - f(0^-)$$

$2 = 2 \times 1 \longrightarrow L\{\delta(t)\}$

حکم ضربه دارد.

(۴ $$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(S) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f(0^-) - \dots - s f(0^-) - f(0^-)$$

مشتقات ضربه $\quad L\left[\delta^{(n)}(t)\right] = s^n$

نکته: باید هنگام استفاده از قاعده مشتق‌گیری، ضربه‌های ناشی از $f(0^-)$ که ظاهر می‌شود را فراموش نشود.

قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی:

قضیه مقدار نهایی:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(S)$$

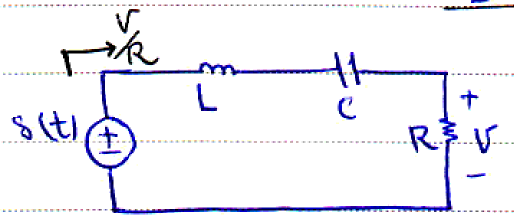
قضیه مقدار اولیه:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(S)$$

شرایط اولیه صفر

یادآوری: پاسخ پله و پاسخ ضربه یک مدار، همان پاسخ حالت صفر است.

مثال) در مدار زیر با استفاده از تبدیل لاپلاس، پاسخ ضربه سیستم را به دست آورید. (تابع تبدیل سیستم؟)



پاسخ ضربه ⇐

شرایط اولیه صفر

$$\delta(t) = L\frac{d}{dt}\left[\frac{v}{R}\right] + \frac{1}{C}\int \frac{v}{R}\,dt + \cancel{v_c(0)} + v$$

هدف بدست آوردن v است.

$$\delta(t) = \frac{L}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}\int v\,dt + v \xrightarrow{\mathcal{L}} 1 = \frac{L}{R}\left[sV(s) - \cancel{v(0^-)}\right] + \frac{1}{RCs}V(s) + V(s)$$

$$1 = V(s)\left[\frac{Ls}{R} + \frac{1}{RCs} + 1\right]$$

$$1 = V(s)\left[\frac{LCs^2 + 1 + RCs}{Rsc}\right] \longrightarrow V(s) = \frac{RCs}{LCs^2 + 1 + RCs} \Rightarrow V(s) = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

* برای بدست آوردن پاسخ در حوزه زمان باید عکس تبدیل لاپلاس را انجام داد.

بسط به کسرهای جزئی:

$$F(S) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{P(S)}{Q(S)} \qquad m \leq n$$

ریشه‌های صورت $\quad P(S) = 0 \xrightarrow{\text{صفرها}} z_1, z_2, \ldots, z_m$

ریشه‌های مخرج $\quad Q(S) = 0 \xrightarrow{\text{قطب‌ها}} p_1, p_2, \ldots, p_n$

۱- قطب‌ها حقیقی و ساده

$$Q(s) = (s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\ldots(s-p_n)$$

$$F(S) = \sum_{j=1}^{n}\frac{K_j}{(s-p_j)} \qquad K_j = (s-p_j)F(S)\Big|_{s=p_j}$$

مثال)

$$F(S) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1 = (s+1)F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2}{s+2}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$K_2=(S+2)F(S)\Big|_{S=-2}=\frac{2}{S+1}\Big|_{S=-2}=-2$$

$$f(t)=\left[2e^{-t}-2e^{-2t}\right]u(t)$$

۲- قطب‌های حقیقی ولی تکراری:

$$Q(S)=(S-P_1)^{n_1}(S-P_2)^{n_2}(S-P_3)^{n_3}\cdots(S-P_r)^{n_r}$$

$$F(S)=\frac{K_{11}}{(S-P_1)}+\frac{K_{12}}{(S-P_1)^2}+\cdots+\frac{K_{1n_1}}{(S-P_1)^{n_1}}+$$

$$\frac{K_{21}}{(S-P_2)}+\frac{K_{22}}{(S-P_2)^2}+\cdots+\frac{K_{2n_2}}{(S-P_2)^{n_2}}+$$

$$\vdots$$

$$\frac{K_{r1}}{(S-P_r)}+\frac{K_{r2}}{(S-P_r)^2}+\cdots+\frac{K_{rn_r}}{(S-P_r)^{n_r}}$$

$$K_{in_i}=(S-P_i)^{n_i}F(S)\Big|_{S=P_i}$$

$$K_{in_{i-1}}=\frac{d}{dS}\left[(S-P_i)^{n_i}F(S)\right]\Big|_{S=P_i}$$

$$K_{in_{i-2}}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dS^2}\left[(S-P_i)^{n_i}F(S)\right]\Big|_{S=P_i}$$

$$K_{in_{i-3}}=\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dS^3}\left[(S-P_i)^{n_i}F(S)\right]\Big|_{S=P_i}$$

$$\vdots$$

مثال

$$F(S)=\frac{1}{(S+1)^3S^2}$$

$$= \frac{K_{11}}{(s+1)} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)^3} + \frac{K_{21}}{s} + \frac{K_{22}}{s^2}$$

$$K_{13} = (s+1)^3 F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s^2}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds}\Big[(s+1)^3 F(s)\Big]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\Big[\frac{1}{s^2}\Big]\Big|_{s=-1} = \frac{-2}{s^3}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$K_{11} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\Big[(s+1)^3 F(s)\Big]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\Big[-\frac{1}{s^3}\Big]\Big|_{s=-1} = \frac{3}{s^4}\Big|_{s=-1} = 3$$

$$K_{22} = \Big[s^2 F(s)\Big]\Big|_{s=0} = \frac{1}{(s+1)^3}\Big|_{s=0} = 1$$

$$K_{21} = \frac{d}{ds}\Big[s^2 F(s)\Big]\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\Big[\frac{1}{(s+1)^3}\Big]\Big|_{s=0} = \frac{-3}{(s+1)^4}\Big|_{s=0} = -3$$

$$f(t) = \Big[3e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t} + t - 3\Big]u(t)$$

۳ـ قطب‌ها زوج:

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{K_2}{s-(\alpha-j\beta)}$$

تمرین) نشان دهید K_1 و K_2 زوج مزدوج‌اند.

$$K_1 = |K| \angle \theta_K$$

$$K_2 = |K| \angle -\theta_K \qquad F(s) = \frac{K}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{K^*}{(s-(\alpha-j\beta))}$$

$$f(t) = Ke^{(\alpha+j\beta)t} + K^* e^{(\alpha-j\beta)t}$$

$$f(t) = |K| e^{j\theta_K} \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{j\beta t} + |K| e^{-j\theta_K} \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{-j\beta t}$$

$$f(t) = |k|\, e^{\alpha t}\left[e^{j(\beta t+\theta_k)} + e^{-j(\beta t+\theta_k)} \right]$$

$$\boxed{f(t) = 2|k|\, e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta_k)}$$

مثال) $F(s) = \dfrac{s^2+3s+7}{(s^2+4s+8)(s+1)}$ $\qquad P: -2+2j\,,\ -2-2j\,,\ -1$

$$F(s) = \frac{k}{(s-(-2+2j))} + \frac{k^*}{(s-(-2-2j))} + \frac{k_1}{s+1}$$

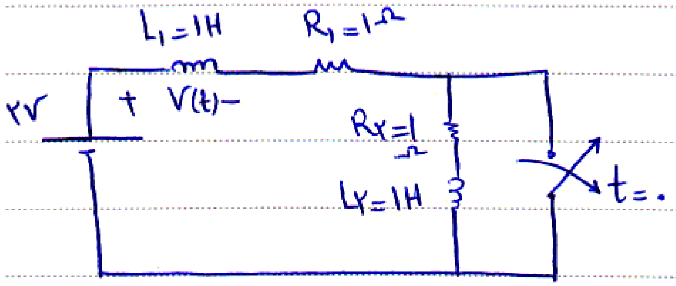
$$k = (s-(-2+2j))\,F(s)\Big|_{s=-2+2j} = \frac{(-2+2j)^2+3(-2+2j)+7}{(-2+2j+2+2j)(-2+2j+1)} = \frac{j}{4} = \frac{1}{4}\angle 90$$

$$\begin{cases} |k| = \dfrac{1}{4} \\ \theta_k = 90 \end{cases}$$

$$k_1 = (s+1)\,F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{s^2+3s+7}{s^2+4s+8}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$\longrightarrow f(t) = \left[\frac{1}{2} e^{-2t}\cos(2t+90) + e^{-t}\right] u(t)$$

مثال) در مدار زیر با استفاده از آنالیز در حوزه‌ی لاپلاس، $v(t)$ را به دست آورید.



توضیحی در مورد مدارهای کلید دار:

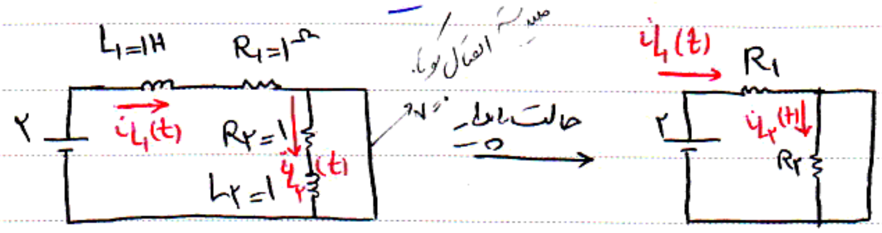
اگر در لحظه‌ی $t=t_0$ ، کلید تغییر وضعیت دهد آنالیز را در سه مرحله‌ی زیر انجام می‌دهیم:

۱) $t\le t_0$ فرض می‌شود که مدار در وضعیت پایدار خود قرار دارد، یعنی در رژیم DC، سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها اتصال باز فرض می‌شوند و اگر در رژیم سینوسی باشیم از فازور استفاده می‌کنیم.

۲) $t=t_0$ در معادلات بخش قبل با قرار دادن $t=t_0$ شرایط اولیه را برای مرحله بعد به دست می‌آوریم.

۳) $t>t_0$ با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادلات حاکم بر مدار را به دست می‌آوریم.

حل مثال) $t\le t_0$

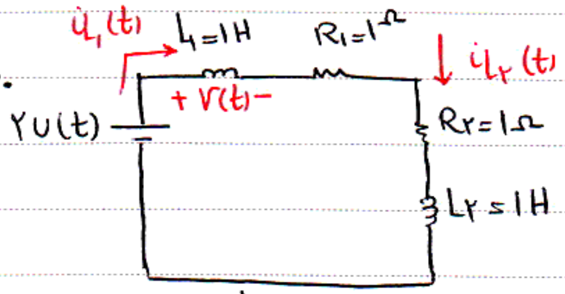


$$i_{L_1}(t)=\frac{2}{R_1}=\frac{2}{1}=2A\quad,\quad i_{L_2}(t)=0\quad,\quad v(t)=0$$

اتصال کوتاه

$$t=0\longrightarrow\begin{cases}i_{L_1}(0)=2\\ i_{L_2}(0)=0\end{cases}$$

$t>t_0$



$$KVL:\quad 2u(t)=L_1\frac{di_{L_1}(t)}{dt}+R_1 i_{L_1}(t)+R_2 i_{L_2}(t)+L_2\frac{di_{L_2}}{dt}$$

$$2u(t)=\frac{di_{L_1}(t)}{dt}+i_{L_1}(t)+i_{L_2}(t)+\frac{di_{L_2}(t)}{dt}$$

نکته: اگرچه $i_{L_1}(t)=i_{L_2}(t)$ اما طبق شرایط اولیه آن‌ها فرق می‌کنند از مساوی قرار دادن آن‌ها حاصل از اتصال به حوزه لاپلاس پرهیز می‌کنیم.

به حوزه لاپلاس می‌بریم:

$$\frac{2}{s} = s I_{L_1}(s) - \underbrace{i_{L_1}(0^-)}_{2} + I_{L_1}(s) + I_{L_2}(s) + s I_{L_2}(s) - \underbrace{i_{L_2}(0^-)}_{0}$$

$$I_{L_1}(s) = I_{L_2}(s) \triangleq I_L(s)$$

$$\frac{2}{s} = I_L(s)(2s+2) - 2 \longrightarrow \frac{2}{s} + 2 = 2 I_L(s)(s+1)$$

$$\frac{2(s+1)}{s} = 2(s+1) I_L(s) \longrightarrow I_L(s) = \frac{1}{s}$$

نکته: تا رسیدن به جواب نهایی، استفاده از حوزه لاپلاس را ادامه می‌دهیم

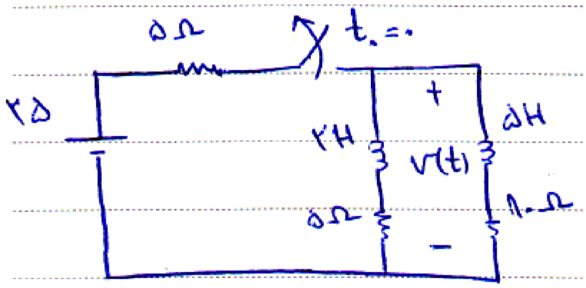
$$\begin{cases} i_{L_1}(t) = u(t) \\ v(t) = L_1 \dfrac{di_{L_1}(t)}{dt} = 1 \times \dfrac{d}{dt}(u(t)) = \delta(t) \end{cases} \qquad \times \quad \text{اشتباه}$$

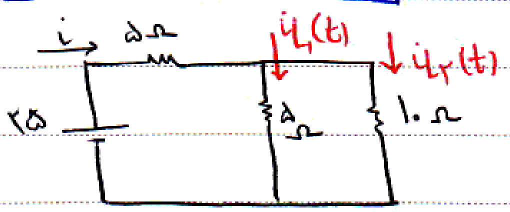
حالا:

$$v(t) = L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} \xrightarrow{L} V(s) = L_1\left(s I_L(s) - i_{L_1}(0)\right) = 1 \times \left(s \times \frac{1}{s} - 2\right) = -1$$

$$V(s) = -1 \Rightarrow \boxed{v(t) = -\delta(t)}$$

مثال) مدار زیر را با استفاده از آنالیز در حوزه لاپلاس حل کرده و $v(t)$ را به دست آورید؟

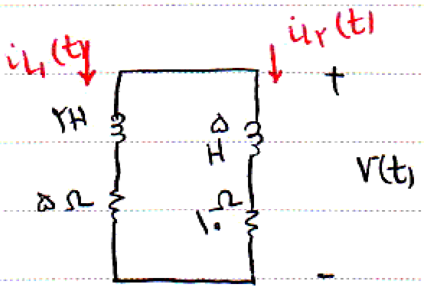




$t < 0$

$i = \dfrac{۲۵}{۵+(۵\|۱۰)} = ۳A \qquad i_{L_1}(t) = ۳\times\dfrac{۱۰}{۱۵} = ۲A \qquad i_{L_2}(t) = ۳\times\dfrac{۵}{۱۵} = ۱A$

$i_{L_1}(0^-) = ۲A \;,\; i_{L_2}(0^-) = ۱A$ $\qquad t=0$



$t>0$

$$KVL: \; ۲\frac{di_{L_1}(t)}{dt} + ۵\, i_{L_1}(t) - ۱۰\, i_{L_2}(t) - ۵\frac{di_{L_2}(t)}{dt} = 0$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} ۲\left[sI_{L_1}(s) - i_{L_1}(0^-)\right] + ۵I_{L_1}(s) - ۱۰I_{L_2}(s) - ۵\left[sI_{L_2}(s) - i_{L_2}(0^-)\right] = 0$$

$i_{L_1}(0^-) = ۲ \;,\; i_{L_2}(0^-) = ۱ \;,\; I_{L_2}(s) = -I_{L_1}(s)$

$$۲sI_{L_1}(s) - ۴ + ۵I_{L_1}(s) + ۱۰I_{L_1}(s) + ۵sI_{L_1}(s) + ۵ = 0$$

$$I_{L_1}(s)\,(۷s+۱۵) = -۱ \Rightarrow I_{L_1}(s) = \frac{-۱}{۷s+۱۵} = \frac{-۱/۷}{s+\frac{۱۵}{۷}}$$

$$\begin{cases} i_{L_1}(t) = \dfrac{-۱}{۷}e^{-\frac{۱۵}{۷}t}\,u(t) \\ i_{L_2}(t) = \dfrac{۱}{۷}e^{-\frac{۱۵}{۷}t}\,u(t) \end{cases} \qquad i_{L_1}(0^+) = -\frac{۱}{۷} \;,\; i_{L_2}(0^+) = \frac{۱}{۷}$$

دقت کنید جریان سلف‌ها تغییر ناگهانی داشته یعنی در ولتاژ دو سر آن‌ها ایجاد ضربه خواهد شد.

$$V(t) = ۲\frac{di_{L_1}(t)}{dt} + ۵\, i_{L_1}(t)$$

دست کنید که از هم ز $i_{L_1}(t)$ را مستقیماً استفاده کنیم، به حوزه لاپلاس می‌بریم:

$$V(s) = 2\left[sI_{L_1}(s) - i_{L_1}(0^-)\right] + 5I_{L_1}(s)$$

$$V(s) = (2s+5)I_{L_1}(s) - 4 \longrightarrow V(s) = \frac{-(2s+5)}{7s+15} - 4 = \frac{-25-5-28s-60}{7s+15}$$

$$V(s) = \frac{-30s-45}{7s+15}$$

حال لاپلاس معکوس می‌گیریم:

$$F(s) = \frac{-30}{7s+15} = \frac{-30/7}{s+15/7} \xrightarrow{L^{-1}}$$

$$\frac{-30}{7} e^{-15/7\, t} u(t) = f(t)$$

طبق خواص داشتیم:

$$sF(s) - f(0^-) \xrightarrow{L^{-1}} \frac{df(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow sF(s) \xrightarrow{L^{-1}} \frac{df(t)}{dt} + f(0^-)$$

$$\frac{-30s}{7s+15} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{d}{dt}\left(\frac{-30}{7} e^{-15/7\, t} u(t)\right) - \frac{30}{7} e^{-15/7 \times 0} u(0^-) =$$

$$\frac{-30}{7} \times \left(-\frac{15}{7}\right) e^{-15/7\, t} u(t) - \underbrace{\frac{30}{7} e^{-15/7\, t} \delta(t)}_{\frac{-30}{7}\delta(t)}$$

$$* \; f(t)\,\delta(t-T_0) = f(T_0)\,\delta(t-T_0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{-30s}{7s+15} \xrightarrow{L^{-1}} \dfrac{450}{49} e^{-15/7\, t} u(t) - \dfrac{30}{7}\delta(t) \\ \dfrac{-45}{7s+15} \xrightarrow{L^{-1}} \dfrac{-45}{7} e^{-15/7\, t} u(t) \end{cases}$$

$$v(t)=\frac{450}{49}e^{-\frac{15}{7}t}u(t)-\frac{30}{7}\delta(t)-\frac{65}{7}e^{-\frac{15}{7}t}u(t)$$

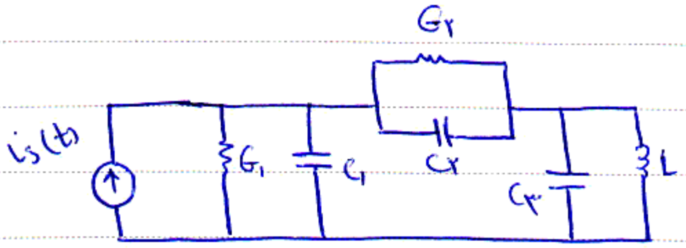
$$v(t)=\frac{-30}{7}\delta(t)-\frac{5}{49}e^{-\frac{15}{7}t}u(t)\implies$$ $v(t)$ دارای ضربه است.

تنظیم کردن معادلات جبر خطی:

هدف انتقال معادلات حوزه انتگرال ـ دیفرانسیل به حوزه لاپلاس است.

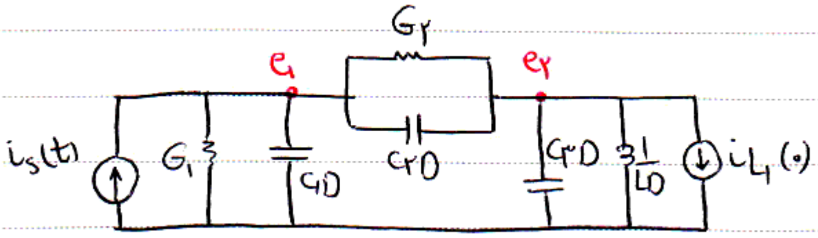
با یک مثال مسئله را بررسی می‌کنیم.

مثال) معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل مدار زیر را در حوزه انتگرال ـ دیفرانسیل به روش گره به دست آورید.



$v_{C_1}(0), v_{C_2}(0), v_{C_3}(0)$ و $i_L(0)$

حوزه انتگرال ـ دیفرانسیل



از روش ماتریس:

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+C_1D+C_2D & -G_2-C_2D \\ -G_2-C_2D & G_2+C_2D+C_3D+\frac{1}{LD} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_s(t) \\ -i_L(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} D f(t) \xrightarrow{L} sF(s)-f(0^-) \\ \frac{1}{D}f(t) \xrightarrow{L} \frac{F(s)}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_1 e_1 + G_2 e_1 + C_1 D e_1 + C_2 D e_1 - G_2 e_2 - C_2 D e_2 = i_s(t) \\ -G_2 e_1 - C_2 D e_1 + G_2 e_2 + C_2 D e_2 + C_3 D e_2 + \frac{1}{LD} e_2 = -i_{L_1}(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (G_1+G_2) e_1 + (C_1+C_2) D e_1 - G_2 e_2 - C_2 D e_2 = i_s(t) \\ -G_2 e_1 - C_2 D e_1 + G_2 e_2 + (C_2+C_3) D e_2 + \frac{1}{LD} e_2 = -i_{L_1}(0) \end{cases}$$

باانتقال به حوزه لاپلاس :

$$(G_1+G_2)E_1(s) + (C_1+C_2)\left[sE_1(s) - e_1(0^-)\right] - G_2E_2(s)$$

$$-C_2\left[sE_2(s) - e_2(0^-)\right] = I_s(s)$$

$$① \rightarrow \boxed{E_1(s)\left(G_1+G_2+C_1 s+C_2 s\right) + E_2(s)\left(-G_2 - C_2 s\right) = I_s(s) + \overset{V_{C_1}(0^-)}{C_1 e_1(0^-)} + \overset{V_{C_2}(0^-)}{C_2\left(e_1(0^-) - e_2(0^-)\right)}}$$

$$-G_2 E_1(s) - C_2\left[sE_1(s) - e_1(0^-)\right] + G_2E_2(s) + (C_2+C_3)\left[sE_2(s) - e_2(0^-)\right] + \frac{1}{Ls}E_2(s)$$

$$= -\frac{i_{L_1}(0)}{s}$$

$$② \boxed{E_1(s)\left(-G_2 - C_2 s\right) + E_2(s)\left(G_2 + C_2 s + C_3 s + \frac{1}{Ls}\right) = -\frac{i_L(0)}{s} - \overset{V_{C_1}(0^-)}{C_2 e_1(0^-)} + \overset{V_{C_3}(0^-)}{C_2 e_2(0^-)} + \underset{V_{C_3}(0^-)}{C_3 e_2(0^-)}}$$

معادلات را به صورت ماتریسی می نویسیم :

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+C_1 s+C_2 s & -G_2 - C_2 s \\ -G_2 - C_2 s & G_2 + C_2 s + C_3 s + \frac{1}{Ls} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} =$$

بردار شرایط اولیه

$$\begin{bmatrix} I_s(s) \\ \\ -\frac{i_L(0)}{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 e_1(0) + C_2\left(e_1(0) - e_2(0)\right) \\ C_1 v_{C_1}(0) + C_2 v_{C_2}(0) \\ -C_2 e_1(0) + C_2 e_2(0) + C_3 e_2(0) \\ -C_2 v_{C_1}(0) + C_2 v_{C_2}(0) + C_3 v_{C_2}(0) \end{bmatrix}$$

اما در تشکیل معادلات فوق راه حل مستقیمی به صورت زیر وجود دارد؟

حوزه انتگرال دیفرانسیل

روش گره $\quad Y_n . e = i_s \xrightarrow{L} Y_n(s)\ E(s) = I_s(s) + \alpha \quad$ بردار شرایط اولیه

روش مش $\quad Z_m . i = e_s \xrightarrow{L} Z_m(S) . I(S) = E_s(S) + \alpha$

روش حلقه اساسی $\quad Z_B . i = e_s \xrightarrow{L} Z_B(S) . I(S) = E_s(S) + \alpha$

روش کات ست اساسی $\quad Y_Q . e = i_s \xrightarrow{L} Y_Q(S) . E(S) = I_s(S) + \alpha$

در روش های گره و کات ست اساسی، بردار شرایط اولیه شامل ولتاژ اولیه خازن ها است.

در روش های مش و حلقه اساسی، بردار شرایط اولیه شامل جریان اولیه سلف ها است.

$\frac{1}{D} \to \frac{1}{s}$

$D \to S$

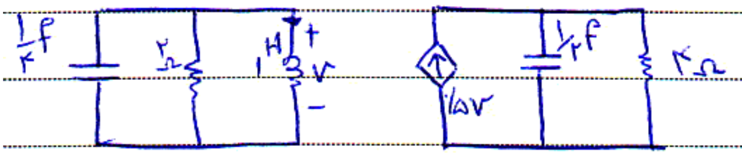
برای تبدیل معادلات انتگرال دیفرانسیل به حوزه لاپلاس در طرف چپ معادلات اول ابتدا D ها را به S تبدیل می کنیم و هر جا $\frac{1}{D}$ داریم (به جای $\frac{1}{D}$) به جای علامت و هر جا ضرب، شرایط اولیه را در بردار α جمع می کنیم.

فرض کنید معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل یک مدار در ماتریس به صورت زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} 2D+\frac{1}{D} & -D & 3 \\ -D & 3D+2 & D \\ 3 & D & 5D+\frac{1}{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \\ \delta(t) \end{bmatrix}$$

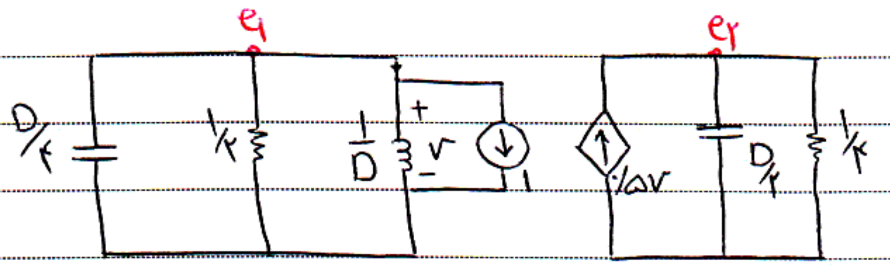
$$\begin{bmatrix} 2s+\frac{1}{s} & -s & 3 \\ -s & 3s+2 & s \\ 3 & s & 5s+\frac{1}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} 2i_1(0^-)-i_2(0^-) \\ -i_1(0^-)+3i_2(0^-)+i_3(0^-) \\ i_2(0^-)+5i_3(0^-) \end{bmatrix}}_{\alpha}$$

مثال) در مدار زیر مقدار V را بیابید؟ (در حوزه لاپلاس)



$i_L(0^-)=1A \qquad V_{C_1}(0^-)=2V \qquad V_{C_2}(0^-)=1V$

ابتدا معادلات انتگرال-دیفرانسیل را در یکی از روش‌ها مثلاً گره می‌نویسیم.



$$\begin{bmatrix} \frac{D}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{D} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}+\frac{D}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ \cancel{0.5e_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{s}{۴}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{s} & ۰ \\ \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{۴}+\frac{s}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱/s \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} e_1(0^-) \\ \frac{۱}{۲} e_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$$e_1(0^-) \longrightarrow v_{C_1}(0^-)=۲ \qquad e_2(0^-) \longrightarrow v_{C_2}(0^-)=۱$$

$$\begin{bmatrix} \frac{s^۲+۲s+۴}{۴s} & ۰ \\ -۱/۲ & \frac{۲s+۱}{۴} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-۲}{۲s} \\ ۱/۲ \end{bmatrix}$$

$$E_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{s-۲}{۲s} & ۰ \\ ۱/۲ & \frac{۲s+۱}{۴} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{s^۲+۲s+۴}{۴s} & ۰ \\ -۱/۲ & \frac{۲s+۱}{۴} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{(s-۲)(۲s+۱)}{۸s}}{\frac{(s^۲+۲s+۴)(۲s+۱)}{۱۶s}}$$

$$E_1(s) = \frac{۲s-۴}{s^۲+۲s+۴}$$

$$P_1, P_2 = -۱ \pm j\sqrt{۳} \qquad E_1(s) = \frac{K}{(s-(-۱+j\sqrt{۳}))} + \frac{K^*}{(s-(-۱-j\sqrt{۳}))}$$

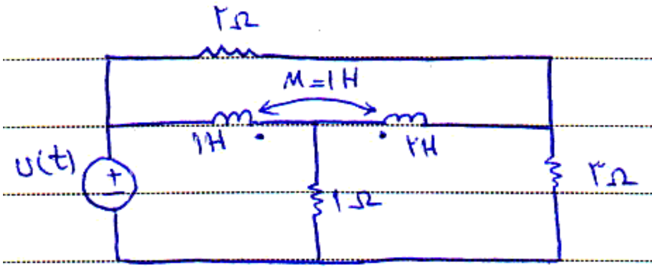
$$K = (s-(-۱+j\sqrt{۳}))\, E_1(s)\Big|_{s=-۱+j\sqrt{۳}} = \frac{۲s-۴}{s+۱+j\sqrt{۳}}\Big|_{s=-۱+j\sqrt{۳}} = \frac{-۲+۲j\sqrt{۳}-۴}{۲j\sqrt{۳}} = \frac{-۳+j\sqrt{۳}}{j\sqrt{۳}}$$

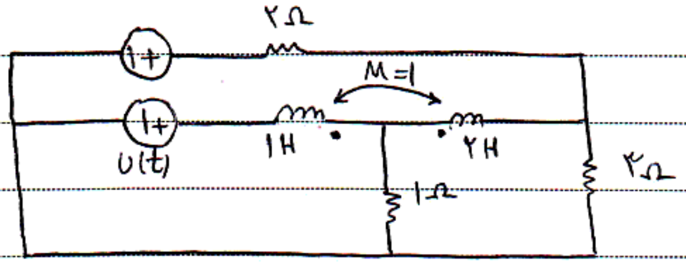
$$= \frac{۲\sqrt{۳}\angle ۱۵۰}{\sqrt{۳}\angle ۹۰} = ۲\angle ۶۰ \quad \begin{cases} |K| = ۲ \\ \angle K = ۶۰ \end{cases}$$

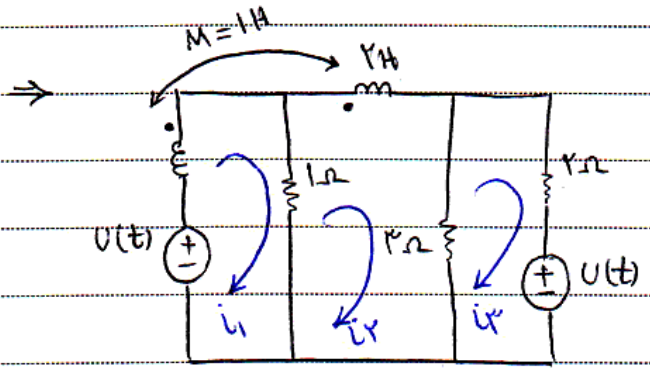
$$v(t) = ۲|K| e^{\alpha t} \cos(\beta t + \angle K)$$

$$= ۴ e^{-t} \cos(\sqrt{۳}\, t + ۶۰)$$

مثال) با استفاده از روش لاپلاس، مدار زیر را آنالیز کنید؟

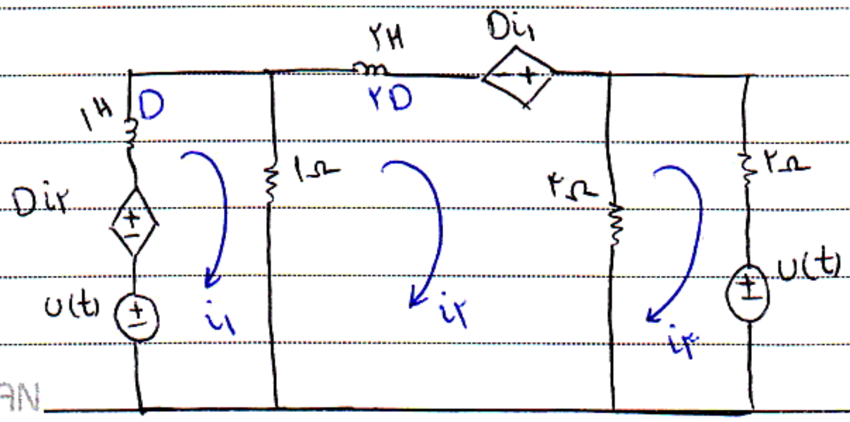


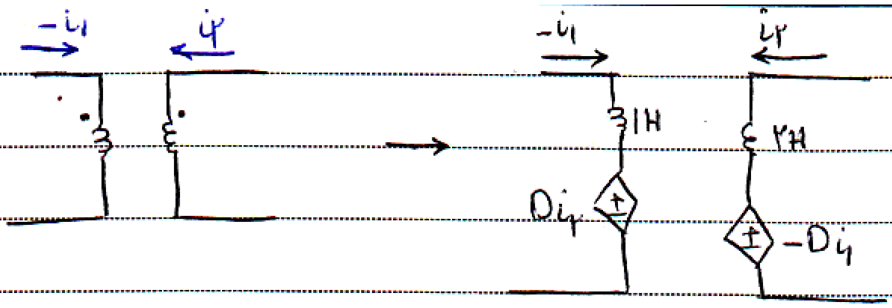




روش مش را استفاده می‌کنیم.

برای استفاده از روش مش باید مدار معادل سلف‌های تزویج شده استفاده می‌کنیم.





$$\begin{bmatrix} D+1 & -1-D & 0 \\ -1-D & 2D+4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t)+\cancel{Di_2} \\ \cancel{Di_1} \\ -v(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \quad i_{L_1}(0^-) \quad\quad i_{L_2}(0^-) \\ \begin{bmatrix} s+1 & -1-s & 0 \\ -1-s & 2s+4 & -3 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \frac{1}{s} + i_1(0^-) - i_2(0^-) \\ 0 - i_1(0^-) + 2i_2(0^-) \\ -\frac{1}{s} \end{bmatrix} \end{array}$$

معادلات حالت و تبدیلات لاپلاس :

در معادلات حالت داشتیم :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\xrightarrow{L} sX(s) - x(0^-) = AX(s) + BU(s)$$

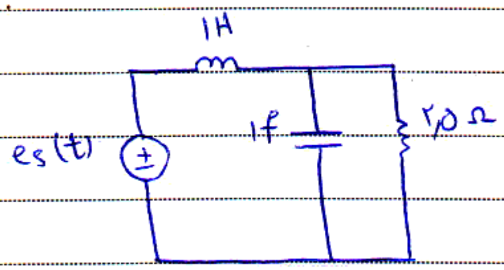
$$X(s)(sI-A) = +BU(s) + x(0) \rightarrow \boxed{X(s) = (sI-A)^{-1}\left[BU(s) + x(0)\right]}$$

پاسخ حالت صفر $x(s) = (sI-A)^{-1} BU(s)$

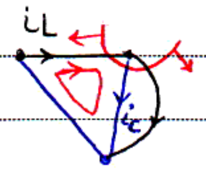
پاسخ ورودی صفر $X(s) = (sI-A)^{-1} x(0^-)$

* پاسخ پله و پاسخ ضربه یک مدار همان پاسخ حالت صفر است.

مثال: با استفاده از معادلات حالت پاسخ پله و پاسخ ضربه مدار زیر را بدست آورید.



گراف:



KCL: $C\dfrac{dv_C}{dt}+\dfrac{v_C}{۲٫۵}-i_L=0$

$$\dot{v}_C=-\frac{1}{۲٫۵}v_C+i_L$$

KVL: $L\dfrac{di_L}{dt}+v_C-e_s=0 \Longrightarrow \dot{i}_L=-v_C+e_s$

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_C\\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{-1}{۲٫۵} & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}v_C\\ i_L\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{B}e_s$$

$$SI-A=\begin{bmatrix}S & 0\\ 0 & S\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{-1}{۲٫۵} & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۲٫۵S+1}{۲٫۵} & -1\\ 1 & S\end{bmatrix}$$

ماتریس واحد

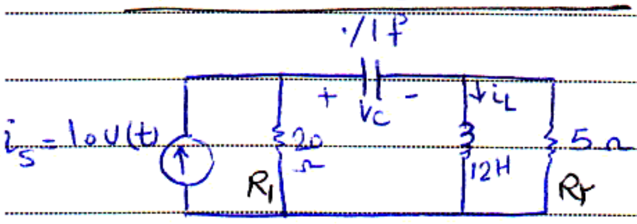
$$(SI-A)^{-1}=\frac{1}{\dfrac{۲٫۵S^2+S+۲٫۵}{۲٫۵}}\begin{bmatrix}S & 1\\ -1 & \frac{۲٫۵S+1}{۲٫۵}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{۲٫۵S}{۲٫۵S^2+S+۲٫۵} & \dfrac{۲٫۵}{۲٫۵S^2+S+۲٫۵}\\ \dfrac{-۲٫۵}{۲٫۵S^2+S+۲٫۵} & \dfrac{(۲٫۵S+1)}{(۲٫۵S^2+S+۲٫۵)}\end{bmatrix}$$

پاسخ ضربه $e_s(t)=\delta(t)\longrightarrow E_s(S)=1$

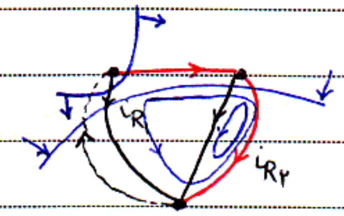
$$x(s)=\begin{bmatrix} V_C(s) \\ I_L(s) \end{bmatrix} = \left[(sI-A)^{-1}\right]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\times 1$$

(پاسخ حالت صفر)

مثال) در مدار زیر، معادلات حالت را بدست آورید سپس پاسخ به ورودی را با شرایط اولیه صفر حساب کنید؟



گراف:



غیرحالت

$$KCL:\ 0/1\frac{dv_C}{dt}+i_{R_1}-10u(t)=0 \longrightarrow \frac{dv_C}{dt}=-10\,i_{R_1}+10\,i_S \quad ①$$

$$KVL:\ 0/2\frac{di_L}{dt}=5\,i_{R_2}\longrightarrow \frac{di_L}{dt}=25\,i_{R_2} \quad ②$$ غیرحالت

$$KVL:\ 20\,i_{R_1}-5\,i_{R_2}-v_C=0\longrightarrow i_{R_1}=\frac{1}{4}i_{R_2}+\frac{1}{20}v_C \quad Ⓐ$$ ، رفع غیرحالت i_{R_1}

غیرحالت

$$\dot{v}_C=\frac{-10}{4}i_{R_2}-\frac{1}{2}v_C+10\,i_S \quad ③$$ Ⓐ در ①:

$$KCL:\ i_{R_2}+i_L+i_{R_1}-i_S=0$$ رفع غیرحالت i_{R_2}:

$$i_{R_2}=-i_L-i_{R_1}+i_S$$

$$i_{R_2}=-i_L-\frac{1}{4}i_{R_2}-\frac{1}{20}v_C+i_S$$ Ⓐ را در معادله بالا جاگذاری میکنیم:

$$\frac{5}{4} i_{R_2} = -i_L - \frac{1}{20} v_C + i_s$$

$$i_{R_2} = -\frac{4}{5} i_L - \frac{1}{25} v_C + \frac{4}{5} i_s \quad (B)$$

(B) را در (2) و (3) قرار می‌دهیم تا معادلات حالت تولید شود.

(B) در (2) :

$$\dot{i}_L = -20 i_L - v_C + 20 i_s \qquad \text{معادله حالت}$$

(B) در (3) :

$$\dot{v}_C = 2 i_L + 0.1 v_C - 2 i_s - \frac{1}{2} v_C + 10 i_s$$

$$\dot{v}_C = 2 i_L - 0.4 v_C + 8 i_s \qquad \text{معادله حالت}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 \\ 2 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} i_s$$

محاسبه روابط i_L و v_C :

یک راه استفاده از معادلات انتگرال دیفرانسیل در حوزه، یکی از ۴ روش موجود، با استفاده از معادلات لاپلاس و یک راه استفاده از حوزه‌ی لاپلاس با استفاده از ماتریس A است.

داریم که :

$$X(S) = (SI - A)^{-1} \left[BU(S) + x(0^-) \right]$$

با شرایط اولیه صفر :

$$X(S) = (SI - A)^{-1} BU(S) = \begin{bmatrix} S+20 & 1 \\ -2 & S+0.4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} \overset{U(S)}{\left(10 \times \frac{1}{S} \right)}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+20)(s+0.4)+2}\begin{bmatrix} s+0.4 & -1 \\ 2 & s+20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{200}{s} \\ \frac{80}{s} \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_C(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{200s}{s(s^2+20.4s+10)} \\ \dfrac{80s+2000}{s(s^2+20.4s+10)} \end{bmatrix}$$

$$I_L(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+0.505)} + \frac{K_3}{(s+19.895)}$$

$$K_1 = \left.\frac{200s}{s^2+20.4s+10}\right|_{s=0} = 0$$

$$K_2 = \left.\frac{200s}{s(s+19.895)}\right|_{s=-0.505} = 10.31 \qquad K_3 = \left.\frac{200s}{s(s+0.505)}\right|_{s=-19.895} = -10.31$$

$$\boxed{i_L(t) = 10.31\left(e^{-0.505t} - e^{-19.895t}\right)u(t)}$$

[illegible]

فصل ۱۴: فرکانس‌های طبیعی

سیستمی مانند سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$x(t) = 3\cos 3t + e^{-2t}$ → [سیستم] → $y(t) = \sin 3t + \cos(5t + 30) + 0.2e^{-2t} + 3e^{-4t}$

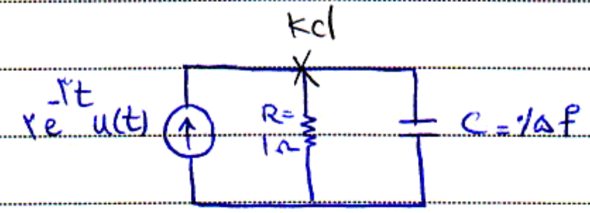
فرکانس‌های $3t$ و $2t$ که در خروجی ظاهر شده‌اند ممکن است ناشی از ورودی باشند. اما فرکانس‌های $5t$ و $4t$ ناشی از وضعیت سیستم در خروجی ظاهر شده است و ارتباطی با ورودی ندارد.

بنابراین با توجه به توضیحات فوق:

✓ نکته: فرکانس‌های طبیعی در پاسخ ورودی صفر سیستم ظاهر می‌شوند.

یک راه این است که معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار را بنویسیم. ریشه‌های معادله‌ی مشخصه همان فرکانس‌های طبیعی هستند.

مثال:



$v_c(0) = 2V$

می‌خواهیم پاسخ کامل v_c را بدست آوریم؟

پاسخ کامل v_c:

$$2e^{-3t} = 0.5\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{1}$$

معادله دیفرانسیل مدار:

$$\boxed{\frac{dv_c}{dt}+2v_c=4e^{-3t}}$$

پاسخ عمومی $\quad v_c(t)=Ke^{-2t}$

پاسخ خصوصی $\quad v_c(t)=Ae^{-3t} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} -3Ae^{-3t}+2Ae^{-3t}=4e^{-3t} \longrightarrow \boxed{A=-4}$

پاسخ کامل $\quad v_c(t)=\underbrace{v_c(t)}_{\text{عمومی}}+\underbrace{v_c(t)}_{\text{خصوصی}} \longrightarrow v_c(t)=Ke^{-2t}-4e^{-3t}$

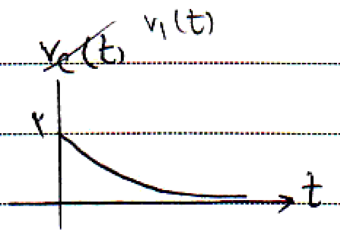
$v_c(0)=2 \longrightarrow K-4=2 \longrightarrow K=6$

$$\boxed{v_c(t)=(6e^{-2t}-4e^{-3t})\,u(t)}$$

با توجه به جواب مسأله، $S=-2$ فرکانس طبیعی سیستم است، اما $S=-3$ نباید فرکانس طبیعی باشد شاید یعنی لزوماً نبودی باشد. در حالیکه اگر معادله مشخصه را بررسی کنیم:

$\frac{dv_c}{dt}+2v_c=0 \longrightarrow S+2=0 \longrightarrow \boxed{S=-2}$

پس فقط $S=-2$ فرکانس طبیعی سیستم است.



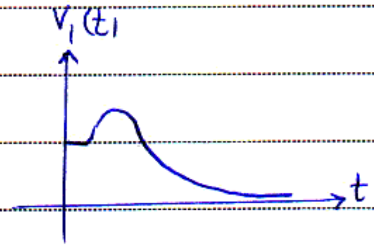
حال فرض کنید ورودی به صورت زیر باشد و مدار را با فرکانس طبیعی خودش تحریک کنیم:

$v_c(0)=2V$

پاسخ کامل v_C،

$$e^{-2t} = 0/5\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{1}$$

$$\frac{dv_c}{dt} + 2v_c = 2e^{-2t}$$



پاسخ عمومی $v_c(t) = kte^{-2t}$

پاسخ خصوصی $v_c(t) = Ae^{-2t} \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} -2Ae^{-2t} + 4Ae^{-2t} = 2e^{-2t} \longrightarrow \boxed{A=1}$

کامل $v_c(t) = \underset{\text{عمومی}}{v_c(t)} + \underset{\text{خصوصی}}{v_c(t)} \Rightarrow v_c(t) = kte^{-2t} + e^{-2t} \longrightarrow v_c(t) = e^{-2t}(1+kt)$

مثال: معادله مشخصه یک مدار به صورت زیر است،

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 4i_L + 3 = 0$$

$$s^2 + 4s + 3 = 0 \quad \begin{cases} s = \frac{-4+2}{2} = -1 \\ s = \frac{-4-2}{2} = -3 \end{cases}$$

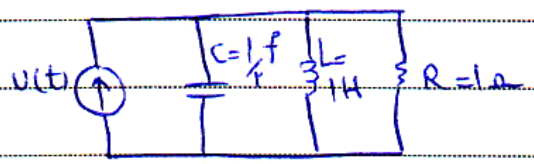
کاملاً میرا است.

انواع فرکانس‌های طبیعی ⟵ فرکانس‌های طبیعی متغیرهای شبکه

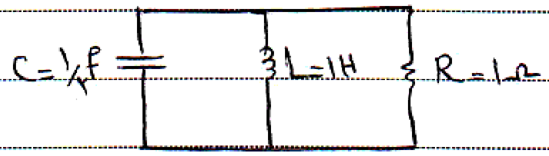
⟵ فرکانس‌های طبیعی کل شبکه

یعنی ممکن است یک یا تعدادی از فرکانس‌های طبیعی کل شبکه در ولتاژ یا جریان یک شاخه ظاهر نشوند.

مثال: فرکانس‌های طبیعی ولتاژ خازن را به دست آورید.



منبع را می‌بندیم تا مدار در شرایط ورودی صفر قرار گیرد.



$$i_C + i_L + i_R = 0$$

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L}\int v_C\,dt + i_L(0) + \frac{v_C}{R} = 0 \longrightarrow \text{معادله مدار}$$

$$C\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{1}{L}v_C + \frac{1}{R}\frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$0/5\,\frac{d^2v_C}{dt^2} + v_C + \frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + 2\frac{dv_C}{dt} + 2v_C = 0 \longrightarrow s^2 + 2s + 2 = 0 \quad \text{معادله مشخصه}$$

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4j^2}}{2} \left\langle \begin{matrix} -1+j \\ -1-j \end{matrix} \right\rangle \text{فرکانس‌های طبیعی}$$

می‌توان نشان داد قطب‌های تابع تبدیل در حوزه لاپلاس همان فرکانس‌های طبیعی سیستم هستند.

در ادامه: $C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L}\int v_C\,dt + i_L(0) + \frac{v_C}{R} = 0$

$$\frac{dv_C}{dt} + 2\int v_C\,dt + 2v_C + 2i_L(0) = 0 \xrightarrow{L} sV_C(s) - v_C(0) + \frac{2}{s}V_C(s) + 2V_C(s) + \frac{2i_L(0)}{s} = 0$$

$$V_C(s)\left(s + \frac{2}{s} + 2\right) = v_C(0) - \frac{2}{s}i_L(0)$$

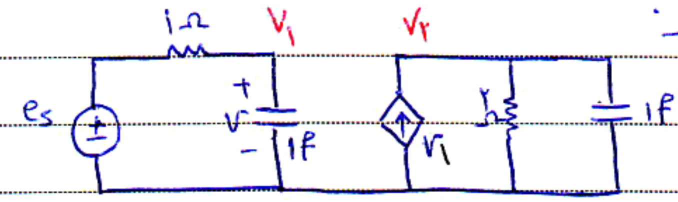
$$V_C(s) = \frac{v_C(0) - 2/s\; i_L(0)}{s + \frac{2}{s} + 2}$$

$$V_C(S) = \frac{SV_C(0) - 2i_L(0)}{S^2 + 2S + 2}$$

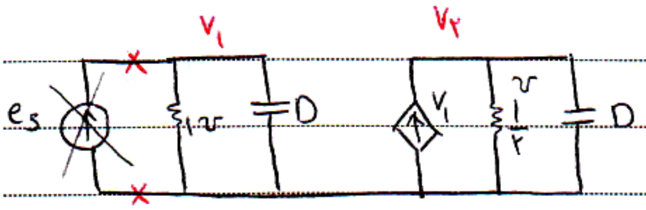
قطب‌ها: $s = -1 + j$ ، $s = -1 - j$

یعنی:

مثال ۲) فرکانس‌های طبیعی V_1 و V_2 را بدست آورید؟



در حالت ورودی صفر، مدار را از راه گره تحلیل می‌کنیم.



$$\begin{bmatrix} D+1 & 0 \\ -1 & D+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} S+1 & 0 \\ -1 & S+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(S) \\ V_2(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(0^-) \\ V_2(0^-) \end{bmatrix} \begin{array}{l} V_{C_1}(0^-) \\ V_{C_2}(0^-) \end{array}$$

$$V_1(S) = \frac{\begin{vmatrix} V_1(0^-) & 0 \\ V_2(0^-) & S+\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{(S+1)(S+\frac{1}{2})} = \frac{V_1(0^-)(S+\frac{1}{2})}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}$$

$$V_1(S) = \frac{V_1(0^-)}{S+1} \xrightarrow{\text{فرکانس طبیعی}} \boxed{S = -1}$$

$$V_2(S) = \frac{\begin{vmatrix} S+1 & V_1(0^-) \\ -1 & V_2(0^-) \end{vmatrix}}{(S+1)(S+\frac{1}{2})} \Longrightarrow \boxed{V_2(S) = \frac{V_2(0^-)(S+1) + V_1(0^-)}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}}$$

فرکانس‌های طبیعی: $S = -1$ ، $S = -\frac{1}{2}$

۱- $s=-1$ و $s=-1/2$ فرکانس طبیعی‌های مدار بوده ولی $s=-1/2$ در پاسخ V_1 ظاهر نشده.

مثال) در مثال قبل پاسخ به ورودی‌های زیر را بدست آورید؟

$$\begin{cases} e_s(t)=u(t) \\ e_s(t)=e^{-t}\,u(t) \end{cases}$$

شرایط اولیه: $v_{C_1}(0^-)=v_{C_2}(0^-)=1$

$$\begin{bmatrix} D+1 & 0 \\ -1 & D+1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \cancel{v_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \overset{1}{v_{C_1}(0^-)}+E_s \\ \overset{1}{v_{C_2}(0^-)} \end{bmatrix}$$

$$V_1(s)=\frac{\begin{vmatrix} 1+E_s & 0 \\ 1 & s+1/2 \end{vmatrix}}{(s+1)(s+1/2)}=\frac{(1+E_s)(s+1/2)}{(s+1)(s+1/2)}=\frac{1+E_s}{(s+1)}$$

$$V_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} s+1 & 1+E_s \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{(s+1)(s+1/2)}=\frac{s+2+E_s}{(s+1)(s+1/2)}$$

الف) $E_s=\dfrac{1}{s}$

$$V_1(s)=\frac{1+1/s}{s+1}=\frac{\frac{s+1}{s}}{s+1}=\frac{1}{s}$$

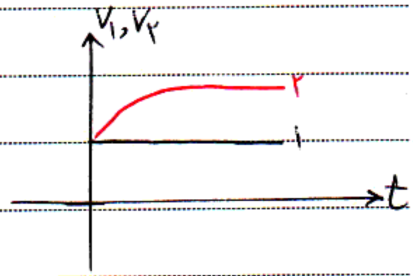
$$\Rightarrow \boxed{v_1(t)=u(t)}$$

$$V_2(s)=\frac{s+2+1/s}{(s+1)(s+1/2)}=\frac{s+1}{s\quad(s+1/2)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1/2}$$

$$K_1 = \frac{s+1}{s+1/2}\bigg|_{s=0} = 2$$

$$K_2 = \frac{s+1}{s}\bigg|_{s=-1/2} = -1$$

$$V_2(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1/2} \longrightarrow \boxed{V_2(t) = \left(2 - e^{-1/2\, t}\right) u(t)}$$



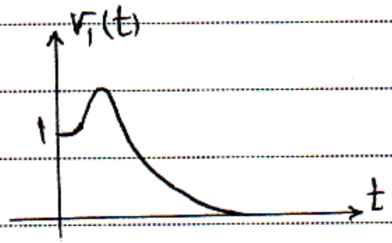
ب) $E_s = \dfrac{1}{(s+1)}$: این ورودی، فرکانس طبیعی مدار را تحریک می‌کند.

$$V_1(s) = \frac{1 + \frac{1}{s+1}}{s+1} = \frac{s+2}{(s+1)^2}$$

$$V_1(s) = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2}$$

$$K_{12} = (s+2)\Big|_{s=-1} = 1 \qquad K_{11} = \frac{d}{ds}\Big[(s+2)\Big]_{s=-1} = 1$$

$$\boxed{V_1(t) = \left(e^{-t} + t e^{-t}\right) u(t)} \Longrightarrow \boxed{V_1(t) = e^{-t}(1+t)\, u(t)}$$



$$V_2(s) = \frac{(s+2) + \frac{1}{s+1}}{(s+1)(s+1/2)} = \frac{\frac{s^2+3s+3}{s+1}}{(s+1)(s+1/2)}$$

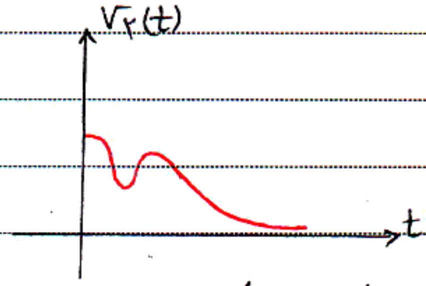
$$V_2(s) = \frac{s^2+3s+3}{(s+1)^2(s+1/2)} = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_2}{s+1/2}$$

$$K_{12} = \frac{s^2+3s+3}{s+1/2}\bigg|_{s=-1} = \frac{1-3+3}{-1/2} = -2$$

$$K_{11} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+3s+3}{s+1/2}\right]_{s=-1} = \left[\frac{(2s+3)(s+1/2) - s^2-3s-3}{(s+1/2)^2}\right]_{s=-1} = \frac{1\times(-1/2)-1+3-3}{1/4} = -6$$

$$K_2 = \frac{s^2+3s+3}{(s+1)^2}\Bigg|_{s=-1/2} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+3}{\frac{1}{4}} = 7$$

$$v_{c2}(t) = \left(-6e^{-t} - 2te^{-t} + 7e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t)$$



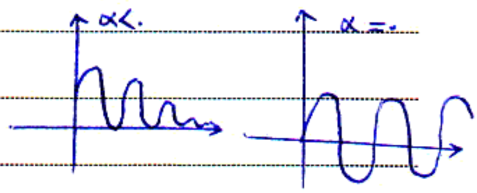
حالت‌های ممکن برای فرکانس‌های طبیعی:

$$f(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + k_3 e^{s_3 t} + \dots$$

۱) اگر حقیقی باشند دارای علامت منفی و اگر مختلط باشند زوج با قسمت حقیقی منفی‌اند. فرکانس‌های طبیعی مختلط به صورت نوسانی در جواب ظاهر می‌شوند. (به صورت Sin و Cos)

$$S_{1,2} = \alpha \pm j\omega$$

$$f(t) = e^{(\alpha+j\omega)t} + e^{(\alpha-j\omega)t} = e^{\alpha t}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$



$$f(t) = 2e^{\alpha t}\cos \omega t$$

α: قسمت حقیقی (ضریب میرایی)

ω: قسمت موهومی فرکانس طبیعی (فرکانس نوسان)

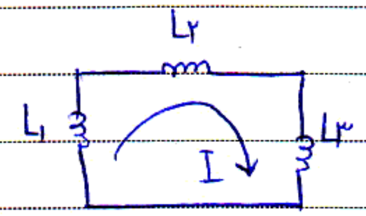
۲) هرگاه تغییر شکل موردنظر جریان یک سلف باشد و این سلف در حلقه‌ای قرار نگرفته باشد که این حلقه فقط از تعدادی سلف تشکیل شده، چون سلف‌ها ایده‌آل فرض می‌شوند ممکن است جریان ثابت I_0 در آن باقی بماند یعنی:

$$\frac{I_0}{s} \xrightarrow{L^{-1}} I_0 e^{0t} u(t)$$

۲) برای هر حلقه‌ی سلفی، یک فرکانس طبیعی صفر خواهیم داشت.

بنابراین $S=0$ فرکانس طبیعی جریان سلف خواهد بود.

مثال)



$$KVL:\quad L_1\frac{dI_{L_1}}{dt}+L_2\frac{dI_{L_2}}{dt}+L_3\frac{dI_{L_3}}{dt}=0$$

$$L_1\left(sI_{L_1}(s)-I_{L_1}(0^-)\right)+L_2\left(sI_{L_2}(s)-I_{L_2}(0^-)\right)+L_3\left(sI_{L_3}(s)-I_{L_3}(0^-)\right)=0$$

$$I_{L_1}(s)=I_{L_2}(s)=I_{L_3}(s)\triangleq I_L(s)$$

$$I_L(s)=\overbrace{+\frac{L_1I_{L_1}(0^-)+L_2I_{L_2}(0^-)+L_3I_{L_3}(0^-)}{s(L_1+L_2+L_3)}}^{I_0}=\frac{I_0}{s}$$

اگر $S=0$ فرکانس طبیعی جریان سلف باشد، فرکانس طبیعی ولتاژ سلف نخواهد بود.

$$v_L(t)=L\frac{dI_L(t)}{dt}\longrightarrow V_L(s)=L\Big(s\underbrace{I_L(s)}_{\frac{I_0}{s}}-i_L(0^-)\Big)$$

۳) هرگاه متغیر شبکه مورد نظر، ولتاژ یک خازن باشد و این خازن فقط در حلقات سری با خازن تشکیل شده قرار داشته باشد، چون خازن‌ها ایده‌آل فرض می‌شوند معلوم است ولتاژ ثابت V_0 در دو سر آن خازن‌ها قرار دارد.

در این صورت،
$$V(s)=\frac{V_0}{s}\xrightarrow{L^{-1}}V_0e^{0t}u(t)$$

$i_C = C\dfrac{dV}{dt} \xrightarrow{L}$

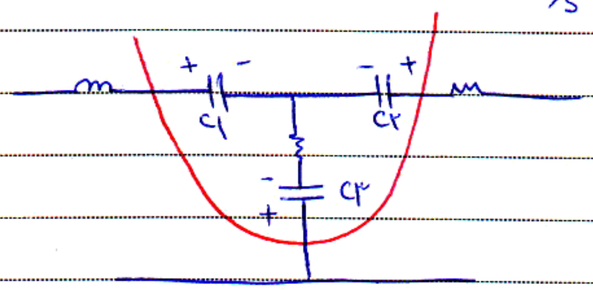
Subject:

Year. Month. Date. ( )

* اگر $S=0$ فرکانس طبیعی ولتاژ حذف باشد، فرکانس طبیعی جریان حذف نخواهد بود.

$$I_C(S) = CS\underbrace{V_C(S)}_{1/S} - CV_C(0^-) = C\left(1 - V_C(0^-)\right)$$

و $S=0$ فرکانس طبیعی ولتاژ حذف خواهد بود.

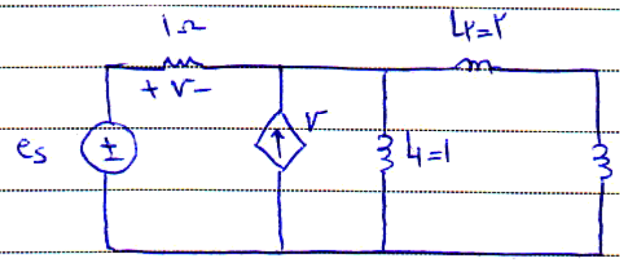


✓ به تعداد حلقه‌های سلفی و کات‌ست‌های خازنی فرکانس طبیعی صفر داریم

$$C_1\frac{dV_{C_1}}{dt} + C_2\frac{dV_{C_2}}{dt} + C_3\frac{dV_{C_3}}{dt} = 0$$

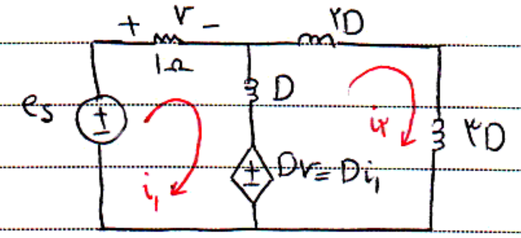
$$C_1SV_{C_1}(S) - C_1V_{C_1}(0) + C_2SV_{C_2}(S) - C_2V_{C_2}(0^-) + C_3SV_{C_3}(S) - C_3V_{C_3}(0^-) = 0$$

مثال ۵) فرکانس طبیعی جریان سلف‌ها را بدست آورید؟

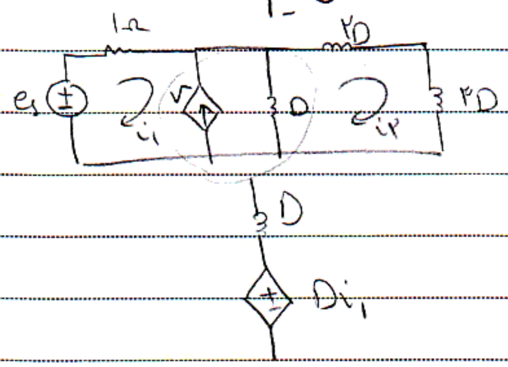


$I_{L_1}(0^-) = 1$

$I_{L_2}(0^-) = I_{L_3}(0^-) = 3$



از روش مش حل می‌کنیم.



$V = 1 \times i_1 = i_1$

$$\begin{bmatrix} D+1+D & -D \\ -D-D & 4D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s - \cancel{D}i_1 \\ \cancel{D}i_1 \end{bmatrix}$$

$I_{L_1}(0^-) + I_{L_2}(0^-) + I_{L_1}(0^-) = 5$

$$\begin{bmatrix} 2S+1 & -S \\ -2S & 4S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(S) \\ I_2(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s + 2i_1(0^-) - i_2(0^-) \\ -2i_1(0^-) + 4i_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$-2I_{L_1}(0^-) - 2I_{L_2}(0^-) + 4I_{L_2}(0^-) = 10$

$$i_1(0^-) - i_2(0^-) = I_{L_1}(0^-) \longrightarrow i_1(0^-) = I_{L_1}(0^-) + I_{L_2}(0^-)$$

$$i_2(0^-) = I_{L_2}(0^-) = I_{L_3}(0^-)$$

$$\begin{bmatrix} 2s+1 & -s \\ -2s & 6s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Es+5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} Es+5 & -s \\ 10 & 6s \end{vmatrix}}{(2s+1)6s - 2s^2} = \frac{6s(Es+5)+10s}{12s^2+6s-2s^2}$$

$$\boxed{I_1(s) = \frac{6s(Es+5)+10s}{s(10s+6)}}$$

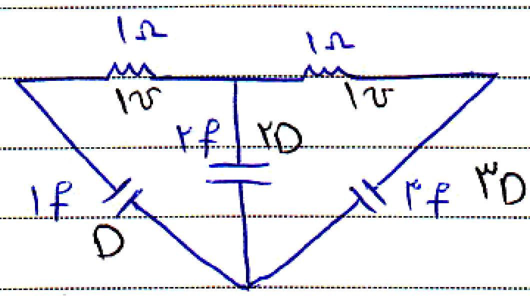
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2s+1 & Es+5 \\ -2s & 10 \end{vmatrix}}{(2s+1)6s - 2s^2} = \frac{10(2s+1)+2s(Es+5)}{s(10s+6)}$$

$$I_{L_1}(s) = I_1(s) - I_2(s) = \frac{\bigcirc}{s(10s+6)}$$

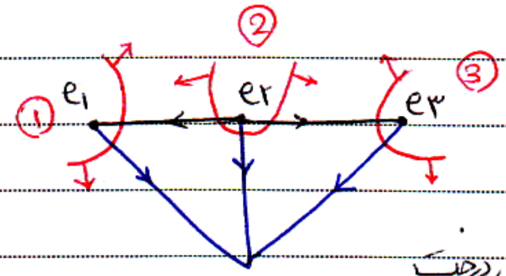
$$I_{L_2}(S) = I_{L_3}(S) = \frac{10(2s+1)+2s(Es+5)}{s(10s+6)}$$

$S=0$, $S=\frac{-6}{10}$ فرکانس طبیعی جریان سلف‌ها است.

مثال) فرکانس طبیعی ولتاژ خازن‌ها را بدست آورید.



از روش [illegible] استفاده می‌کنیم.



مدار خود در شرایط ورودی صفر است. (ورودی نداریم)

بردار ولتاژ شاخه‌ها در جهت

$$\begin{bmatrix} D+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2D+2 & -1 \\ 0 & -1 & 3D+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2s+2 & -1 \\ 0 & -1 & 3s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{C_1}(0^-) \\ 2v_{C_2}(0^-) \\ 3v_{C_3}(0^-) \end{bmatrix}$$

صورت کسر = A

$$E_1 = \frac{\begin{vmatrix} v_{C_1}(0^-) & -1 & 0 \\ 2v_{C_2}(0^-) & 2(s+1) & -1 \\ 3v_{C_3}(0^-) & -1 & (3s+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2(s+1) & -1 \\ 0 & -1 & 3s+1 \end{vmatrix}} = \frac{v_{C_1}(0^-)\left[2(s+1)(3s+1)-1\right] + \left(2v_{C_2}(0^-)(3s+1) + 3v_{C_3}(0^-)\right)}{s+1\left[2(s+1)(3s+1)-1\right] - (-1)\times(-3s-1)}$$

$$= \frac{A}{2(s+1)^2(3s+1) - (s+1) - 3s - 1} = \frac{A}{2(s+1)^2(3s+1) - 4s - 2} =$$

$$\frac{A}{(2s^2+4s+2)(3s+1) - 4s - 2} = \frac{A}{6s^3 + 2s^2 + 12s^2 + 4s + 6s + 2 - 4s - 2}$$

$$= \frac{A}{6s^3 + 14s^2 + 6s} = \frac{A}{s(6s^2 + 14s + 6)}$$

$s=0$ ریشه صفر ولتاژ خازن C_1 است یعنی ولتاژ مقدار نهایی‌اش یک مقدار ثابت خواهد بود.

$$e_1(\infty) = \lim_{s\to 0} sE_1(s) = \frac{v_{c1}(0^-)+2v_{c2}(0^-)+3v_{c3}(0^-)}{6}$$

e_2 و e_3 به عهده خودتان.

فرکانس‌های طبیعی کل مدار ≡ (فرکانس‌های طبیعی موجود در شبکه)

فرکانس‌های طبیعی شبکه اجتماع ۴ فرکانس‌های طبیعی شاخه‌ها می‌باشد. ثابت می‌شود برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی شبکه لازم نیست همه فرکانس‌های طبیعی ۴ شاخه‌ها را به دست آوریم، زیرا اگر $S \neq 0$ فرکانس طبیعی جریان شاخه باشد، فرکانس طبیعی ولتاژ شاخه هم خواهد بود.

۱) شاخه مقاومت باشد.

$$j_k = I e^{st}$$

$$v_k = R j_k = \overset{v}{RI}\, e^{st} = v e^{st}$$

۲) شاخه سلف باشد.

$$v_k = L\frac{dj_k}{dt} = L\frac{d}{dt}\left[I e^{st}\right] = \overset{v}{LIs}\, e^{st} = v e^{st}$$

۳) شاخه خازن باشد.

$$v_k = \frac{1}{C}\int j_k\,dt + v_c(0^-) = \frac{1}{C}\int_0^t I e^{st}\,dt + v_c(0^-)$$

$$= \underset{v}{\frac{I}{C}\times\frac{1}{s}}\, e^{st} - \frac{I}{Cs} + v_c(0^-) = v e^{st} + v_c(0^-) - v$$

به طور مشابه می‌توان اثبات کرد اگر $S \neq 0$ فرکانس طبیعی ولتاژ شاخه باشد، فرکانس طبیعی جریان شاخه هم خواهد بود.

$S=0$ ممکن است فرکانس طبیعی ولتاژ شاخه باشد ولی فرکانس طبیعی جریان همان شاخه نباشد [illegible]؟

وبالعکس.　ولتاژ　جریان

تعمیم: فرکانس‌های طبیعی غیر صفر هر شبکه خطی و تغییرناپذیر با زمان همان ریشه‌های غیر صفر معادله دترمینان $p(s)$

است که $p(s)$ ماتریسی است که در یکی از ۴ روش، معادلات مدار را توصیف می‌کند.

در روش گره: $Y_n(s)E(s) = I_s(s) + \alpha \longrightarrow p(s) = Y_n(s)$

در روش مش: $Z_n(s)I(s) = E_s(s) + \alpha \longrightarrow p(s) = Z_n(s)$

در روش حلقه اساسی: $Z_B(s)I(s) = E_s(s) + \alpha \longrightarrow p(s) = Z_B(s)$

در روش کات ست اساسی: $Y_Q(s) \cdot E(s) = I_s(s) + \alpha \longrightarrow p(s) = Y_Q(s)$

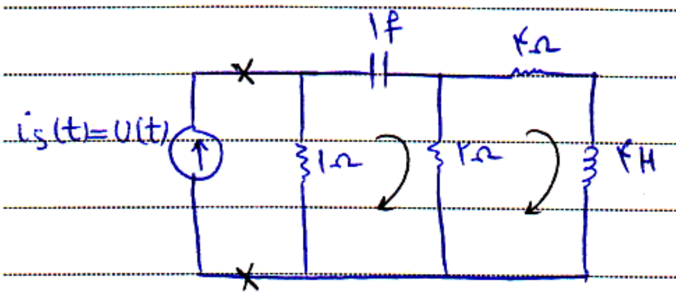
اثبات) مثلاً در روش گره:

$$E(s) = Y_n^{-1}(s)\left(I_s(s) + \alpha\right)$$

$$E(s) = \frac{\text{ماتریس دترمینان‌های کهاد}}{\det(Y_n(s))}\left[I_s(s) + \alpha\right]$$

ریشه‌های آن فرکانس‌های طبیعی را می‌دهد.

مثال) فرکانس‌های طبیعی شبکه را به دست آورید؟



ورودی را صفر می‌کنیم دو مش داریم.

$$Z_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{D} + ۳ & -۲ \\ -۲ & ۲ + ۴D + ۴ \end{bmatrix}$$

$$Z_n(S)=\begin{bmatrix}\frac{3S+1}{S} & -2\\ -2 & 4S+6\end{bmatrix}$$

$$\det(Z_n(S))=\frac{(3S+1)(4S+6)-4S}{S}=\frac{12S^2+18S+6}{S}=\frac{6(2S^2+3S+1)}{S}$$

$$|Z_n(S)|=0 \longrightarrow \begin{cases}S=-\frac{1}{2}\\ S=-1\end{cases} \qquad \frac{-3\pm 1}{4}$$

مرتبه‌ی مدار و تعداد فرکانس‌های طبیعی:

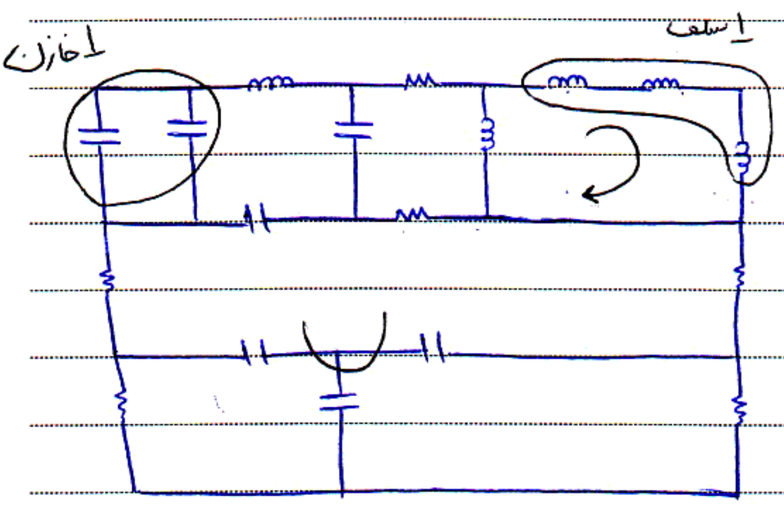
با توجه به درجه دترمینان P(S) (|P(S)|)، ~~دترمینان~~ (مرتبه‌ی) مدار می‌توان به معادله [illegible]:

(تعداد کات‌ست‌های سلفی) − (تعداد حلقه‌های خازنی) − (تعداد عناصر ذخیره‌کننده انرژی)

که برابر با تعداد فرکانس‌های طبیعی نیز هست. تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر:

(تعداد حلقه‌های سلفی) − (تعداد کات‌ست‌های خازنی) − (مرتبه‌ی مدار)

مثال)



تعداد عناصر ذخیره کننده = ۹
تعداد حلقه های خازنی = ۰
کات ست سلفی = ۰
→ مرتبه مدار: ۹

تعداد فرکانس های طبیعی = ۹
تعداد فرکانس های غیرصفر = ۷

تعداد کات ست خازنی = ۱
حلقه سلفی = ۱

فرکانس های طبیعی و معادلات حالت:

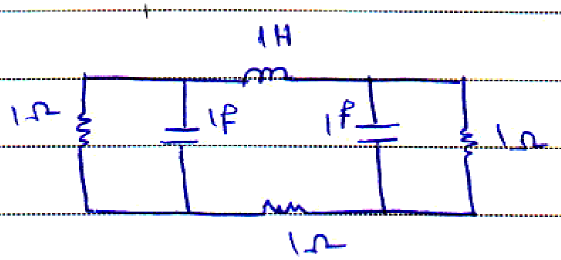
در معادلات حالت داشتیم: $X(s) = (sI - A)^{-1}\left[BU(s) + X(0^-)\right]$

در فرکانس های طبیعی → ورودی صفر $\quad X(s) = (sI - A)^{-1} X(0^-)$

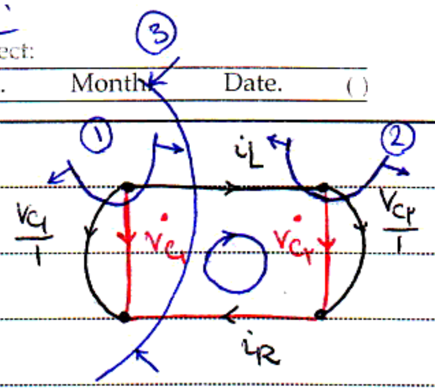
روش دیگر به دست آوردن فرکانس های طبیعی: $|(sI - A)| = 0$

ضمناً مرتبه مدار و معادله از درجه $(sI - A)$ است یعنی درجه $|(sI - A)|$ در s یکسان

مثال) با استفاده از معادلات حالت، فرکانس های طبیعی را پیدا کنید؟



وقتی از طریق معادلات حالت می خواهیم فرکانس های طبیعی را پیدا کنیم به ماتریس B نیاز نیست یعنی حتی اگر مدار دارای ورودی باشد می توانیم ورودی ها را بکشیم. منابع وابسته را نمی توانیم بکشیم



$$\text{kcl}: \dot v_{C_1} + v_{C_1} + i_L = 0 \longrightarrow \dot v_{C_1} = -v_{C_1} - i_L$$

$$\text{kcl}: \dot v_{C_2} + v_{C_2} - i_L = 0 \longrightarrow \dot v_{C_2} = -v_{C_2} + i_L$$

$$\text{kvl}: \dot i_L + v_{C_2} + i_R \times 1 - v_{C_1} = 0 \longrightarrow \dot i_L = v_{C_1} - v_{C_2} - i_R$$

$$\text{kcl}: i_R - i_L = 0 \longrightarrow i_R = i_L \qquad \dot i_L = v_{C_1} - v_{C_2} - i_L$$

حال می‌توانیم ماتریس A دترمینان $(SI-A)$ را محاسبه کنیم

$$\begin{bmatrix} \dot v_{C_1} \\ \dot v_{C_2} \\ \dot i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$SI - A = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S+1 & 0 & 1 \\ 0 & S+1 & -1 \\ -1 & 1 & S+1 \end{bmatrix}$$

$$\det(SI - A) = 0 \longrightarrow \text{فرکانس‌های طبیعی}$$

$$|SI - A| = (S+1)\left[(S+1)^2 + 1\right] + (S+1)$$

$$= (S+1)\left[S^2 + 2S + 2\right] + (S+1) = (S+1)(S^2 + 2S + 3) \quad \begin{cases} S_1 = -1 \\ S_2 = -1 + j\sqrt{2} \\ S_3 = -1 - j\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\frac{-2 \pm 2\sqrt{2}\, j}{2}$$

تفاوت با استفاده از ۳ روش پاسخ دائم

فصل ۱۵ : توابع شبکه

به طور کلی تابع شبکه به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$H(S) = \frac{\mathcal{L}[\text{پاسخ حالت صفر}]}{\mathcal{L}[\text{منبع ورودی}]}$$

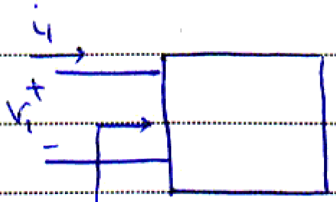
معمول است که در بررسی تابع شبکه، منبع ورودی را تابع ضربه در نظر می‌گیرند

$$H(S) = \frac{\mathcal{L}[h(t)]}{\mathcal{L}[\delta(t)]} = \mathcal{L}[h(t)]$$

$h(t)$ پاسخ ضربه می‌باشد

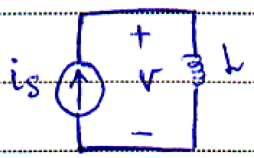
انواع تابع شبکه :

۱) امپدانس نقطه تحریک : (Z_S)



$$H(S) = Z(S) = \frac{V_1(S)}{I_1(S)}$$

مثال)

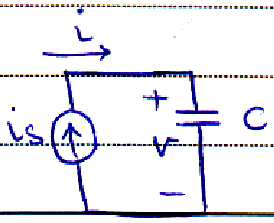


$$v = L\frac{di_s}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} LSI_s(S) - \cancel{Li_L(0^-)}$$

گفتیم که تابع شبکه در حالت صفر محاسبه می‌شود

$$\Rightarrow Z_S = \frac{V(S)}{I(S)} = LS$$

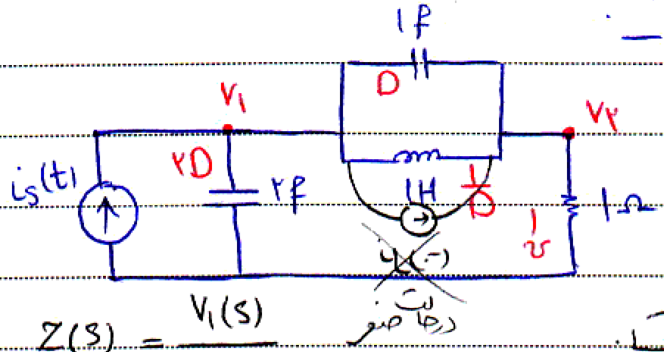
مثال)



$$v = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_s dt + \cancel{v_C(0^-)}$$

$$V(s)=\frac{1}{Cs}I(s)\longrightarrow Z(s)=\frac{1}{Cs}$$

مثال) در مدار زیر امپدانس نقطه تحریک را بدست آورید؟



$$Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)}$$

از روش گره حل می‌کنیم. هدف بدست آوردن $Z(s)$ است.

شرایط اولیه نداریم مستقیماً معادلات حوزه لاپلاس را می‌نویسیم (D را به s تبدیل می‌کنیم.)

$$\begin{bmatrix} 2s+s+\frac{1}{s} & -(s+\frac{1}{s}) \\ -(s+\frac{1}{s}) & s+\frac{1}{s}+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_s \\ 0 \end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} 2V_1(0^-)+\_\_ \\ \_\_\quad\_\_ \end{bmatrix}}_{\text{بردار شرایط اولیه}\ =0}$$

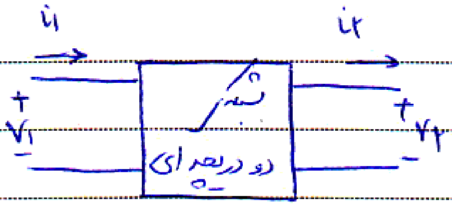
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3s+1 & -\frac{s^2+1}{s} \\ -\frac{s^2+1}{s} & \frac{s^2+s+1}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1=\frac{\frac{s^2+s+1}{s}I_s}{\frac{(3s^2+1)(s^2+s+1)}{s^2}-\frac{(s^2+1)^2}{s^2}}\Rightarrow Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)}=\frac{s(s^2+s+1)}{(3s^2+1)(s^2+s+1)-(s^2+1)^2}$$

تعریف توابع شبکه با استفاده از دو قطبی ها؟

برخی توابع شبکه را با استفاده از شبکه های دو دریچه ای تعریف می‌کنیم

۱) امپدانس نقطه تحریک: (وقتی تحریک از ورودی اعمال شود)



$$H(S)=Z(S)=\frac{V_1(S)}{I_1(S)}$$

۲) امپدانس انتقالی:

$$H(S)=\frac{V_2(S)}{I_1(S)}$$

۳) ادمیتانس انتقالی:

$$H(S)=\frac{I_2(S)}{V_1(S)}$$

۴) نسبت انتقال ولتاژ:

$$H(S)=\frac{V_2(S)}{V_1(S)}$$

۵) نسبت انتقال جریان:

$$H(S)=\frac{I_2(S)}{I_1(S)}$$

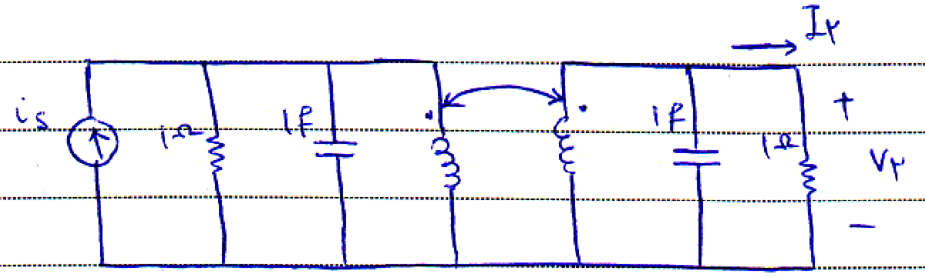
گاهاً از ترکیب این توابع استفاده می‌کنیم

مثال

$$\frac{\left(\frac{I_1}{V_2}\right)}{\frac{V_1}{V_2}}=\frac{I_1}{V_1}$$ ادمیتانس نقطه تحریک

مثال) در مدار زیر توابع شبکه زیر را حساب کنید.

الف) امپدانس نقطه تحریک $\frac{V_1}{I_1}$ ب) امپدانس انتقالی $\frac{V_2}{I_1}$ ج) نسبت انتقال ولتاژ $\frac{V_2}{V_1}$



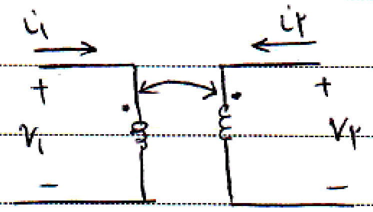
$$L=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

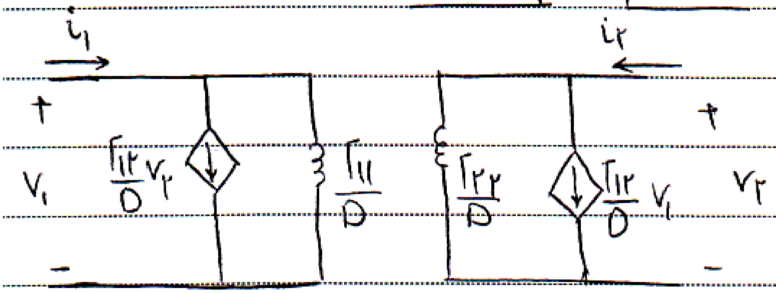
با توجه به ماهیت المان‌ها که به طور موازی‌اند، از یکی از روش‌های گره‌ها طبق بسته استفاده می‌کنیم

آزمون میانترم گروه ۲

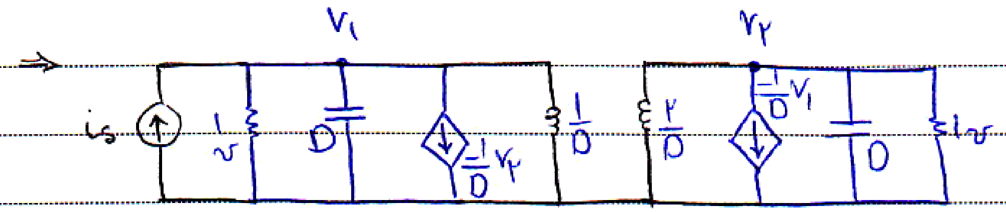
$$L=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}\rightarrow \Gamma=L^{-1}=\frac{1}{2-1}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Gamma=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}$$





$\Rightarrow$



$$\begin{bmatrix}s+\frac{1}{s}+1 & 0\\ 0 & \frac{2}{s}+s+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_s+\frac{1}{D}V_2\\ \frac{1}{D}V_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{s^2+s+1}{s} & \frac{-1}{s}\\ -1/s & \frac{s^2+s+2}{s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_s\\0\end{bmatrix}$$

$$Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)}\qquad H_1(s)=\frac{V_2(s)}{I_s(s)}\qquad H_2(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{H_1(s)}{Z(s)}$$

$$V_1(s)=\frac{\frac{s^2+s+1}{s}I(s)}{\frac{(s^2+s+1)(s^2+s+2)}{s^2}-\frac{1}{s^2}}\Rightarrow \boxed{Z(s)=\frac{s(s^2+s+1)}{(s^2+s+1)(s^2+s+2)-1}}$$

$$V_2(s) = \frac{\frac{1}{s} I_s(s)}{\frac{(s^2+s+1)(s^2+s+2)}{s^2} - \frac{1}{s^2}} \Rightarrow H_1(s) = \frac{s}{(s^2+s+1)(s^2+s+2)-1}$$

$$H_2(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

تشکیلات قطب و صفر :

این یک روش تابع تبدیل توابع و رسم آن در صفحه مختلط طرح می‌کنند.

تابع $H(S)$ را در نظر بگیرید   فرم کلی تابع تبدیل :

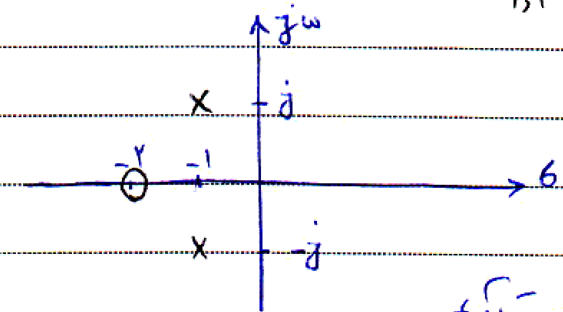
$$H(S) = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0} \qquad m \leq S \qquad m < n$$

در صفحه مختلط (σ و $j\omega$) صفرهای تابع تبدیل را با علامت O و قطب‌ها را با X نمایش می‌دهیم.

برای شکل به دست آمده تشکیلات قطب و صفر می‌نویسیم.

تابع تبدیل زیر دریافت شده :

$$H(S) = \frac{K(S+2)}{S^2+2S+2} \quad \begin{cases} z_1 = -2 \\ P_{1,2} = -1 \pm j \end{cases}$$



از روی شکل می‌توانیم به تابع تبدیل برسیم ولی K را نمی‌توانیم به دست آوریم.

برای به دست آوردن K باید در یک نقطه مشخص مقدار تابع تبدیل را داشته باشیم.

$$H(j\omega)=\frac{K(2+j\omega)}{2-\omega^2+2j\omega}$$ فرض کنید $H(j0)=2$

$$H(j0)=\frac{2K}{2}=2 \rightarrow K=2 \Rightarrow H(S)=\frac{2(S+2)}{S^2+2S+2}$$

تابع شبکه در حالت دائمی سینوسی: ورودی Sin, Cos است

$X(S) \longrightarrow \boxed{H(S)} \longrightarrow Y(S)$ ورودی را ضربه در نظر بگیریم

$$\boxed{H(S)=\frac{Y(S)}{X(S)}} \qquad H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \qquad Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$$

$$|Y(j\omega)|\angle Y(j\omega)=|X(j\omega)|\angle X(j\omega)\times|H(j\omega)|\angle H(j\omega)$$

$$|Y(j\omega)|\angle Y(j\omega)=|X(j\omega)||H(j\omega)|\angle\left(\angle X(j\omega)+\angle H(j\omega)\right)$$

$$\cancel{X(j\omega)}\ x(t)=A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow X(j\omega)=A\angle\phi$$ در حوزه دائمی سینوسی:

$$|Y(j\omega)|\angle Y(j\omega)=A|H(j\omega)|\angle\phi+\angle H(j\omega)$$

$$\xrightarrow{\text{انتقال به رژیم سینوسی}} y(t)=A|H(j\omega)|\cos(\omega t+\phi+\angle H(j\omega))$$

مثال) فرض کنید

$$y(t)=?\Leftarrow x(t)=\cos t\,u(t),\quad H(S)=\frac{S^2+4}{(S+2)(S^2+3S+4)}$$

راه حل سخت:

$$X(S)=\frac{S}{S^2+1}$$

$$Y(S)=X(S)H(S)\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

$$x(t)=A\cos(\omega t+\theta) \Rightarrow X(j\omega)=A\angle\theta$$

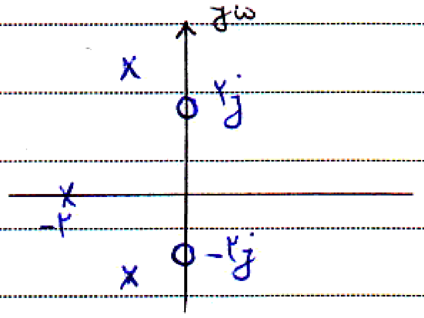
راه حل آسان: چون ورودی در سیستم سینوسی یک فرکانس است از تحلیل سینوسی حالت ماندگار استفاده می‌کنیم.

$\omega = 1$

$$H(j1) = \frac{4-1}{(2+j1)(4-1+3j\omega)} = \frac{3}{(2+j1)(3+3j\omega)} = \frac{1}{(2+j)(1+j)}$$

$$H(j1) = \frac{1}{1+3j} = \frac{1}{\sqrt{10}\angle 71.5^\circ} = \frac{1}{\sqrt{10}} \angle -71.5^\circ$$

$$X(j1) = 1 \angle 0$$



$$Y(j1) = 1 \times \frac{1}{\sqrt{10}} \angle (0 + (-71.5)) = \frac{1}{\sqrt{10}} \angle -71.5^\circ$$

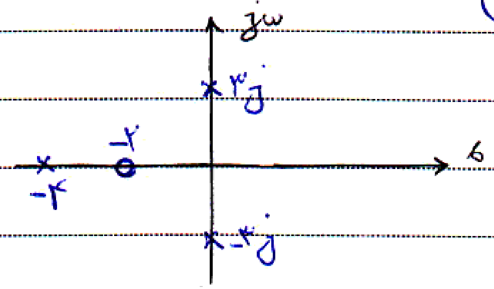
$$\rightarrow y(t) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cos(t - 71.5^\circ)$$

تمرین) اگر $x(t) = \cos 2t \leftarrow y(t) = ?$

$$H(j\omega) = \frac{4-\omega^2}{(2+j\omega)(4-\omega^2+3j\omega)}$$

$$H(j2) = 0 \longrightarrow Y(j2) = 0 \longrightarrow y(t) = \cancel{x}\ 0$$

تمرین) $x(t) = \cos 3t \qquad H(s) = \frac{s+2}{(s^2+9)(s+4)} \quad , y(t) = ?$



$$H(j\omega) = \frac{2+j\omega}{(9-\omega^2)(4+j\omega)} \longrightarrow H(j3) = \infty$$

$$\longrightarrow Y(j3) = \infty \longrightarrow y(t) = \infty$$

✓ اگر صفر در تابع تبدیل روی محور $j\omega$ قرار داشته باشد پاسخ حالت دائمی سینوسی به ازای آن فرکانس صفر است

✓ اگر قطبی روی محور $j\omega$ قرار داشته باشد پاسخ حالت دائمی سینوسی به ازای آن فرکانس بی‌نهایت است.

این حالت به معنای تحریک هارمونی که در فرکانس طبیعی است.

پاسخ فرکانسی:

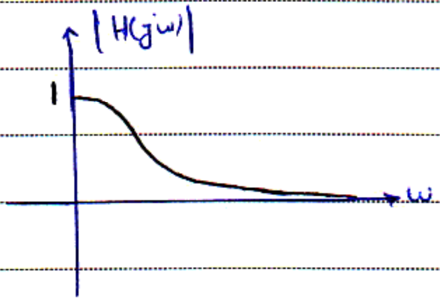
$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle H(j\omega)$$

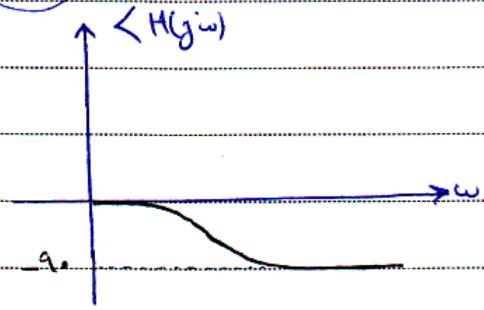
به اطلاعات بدست آمده $|H(j\omega)|$ و $\angle H(j\omega)$، پاسخ فرکانسی می‌گوییم.

مثال)

$$H(S) = \frac{1}{S+1}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{\sqrt{1}\angle 0}{\sqrt{1+\omega^2}\angle \operatorname{tg}^{-1}\omega} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}}_{|H(j\omega)|} \angle \underbrace{-\operatorname{tg}^{-1}\omega}_{\angle H(j\omega)}$$





در این درس به دنبال $|H(j\omega)|$ و $\angle H(j\omega)$ در یک امگای مشخص هستیم. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) قطب‌ها و صفرهای تابع را معین می‌کنیم.

$$H(S) = \frac{K\prod_{j=1}^{m}(S-Z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(S-P_j)}$$

یعنی:

$$H(j\omega) = \frac{K(j\omega)\prod_{j=1}^{m}(j\omega-Z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(j\omega-P_j)}$$

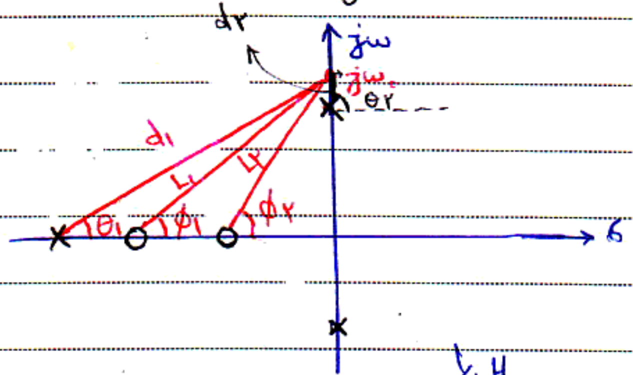
TABAN

$$|H(j\omega)| = |K(j\omega)| \cdot \sum_{j=1}^{m} |j\omega - z_j| \Big/ \sum_{j=1}^{n} |j\omega - p_j|$$

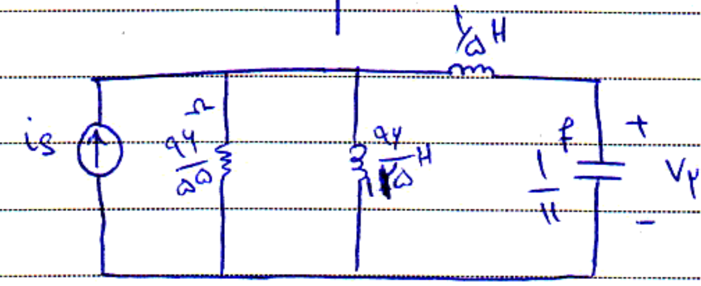
$$\angle H(j\omega) = \angle K(j\omega) + \sum_{j=1}^{m} \angle (j\omega - z_j) - \sum_{j=1}^{n} \angle (j\omega - p_j)$$

۲) قطب‌ها و صفرها را در صفحه s مشخص می‌کنیم و از قطب‌ها و صفرها به نقطه $j\omega_0$ یعنی نقطه‌ای که می‌خواهیم اندازه و فاز را در آن به دست آوریم، خطوطی را رسم می‌کنیم. هرگاه اندازه بردارهایی که از صفرها رسم می‌شوند را با L_1 ، L_2 ، ... ، L_m و زوایای این بردارها را با محور حقیقی با ϕ_1 ، ϕ_2 ، ... ، ϕ_m نشان دهیم و همچنین اندازه بردارهایی را که از قطب‌ها رسم می‌شوند با d_1 ، d_2 ، ... ، d_n نشان دهیم و زوایای این بردارها را با محور حقیقی با θ_1 ، θ_2 ، ... ، θ_n نمایش دهیم:

$$|H(j\omega_0)| = \frac{|K(j\omega)| \prod_{j=1}^{m} L_j}{\prod_{j=1}^{n} d_j} \quad , \quad \angle H(j\omega_0) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j - \sum_{j=1}^{n} \cancel{\phi_j}\ \theta_j$$



مثال) برای حل، چون H(s) در حالت صفر محاسبه می‌شود پس شرایط اولیه نداریم.



الف) $H(S) = \dfrac{V_2(S)}{I_S(S)}$

ب) خروجی برابر: $i_S(t) = 15\cos(4t - 30)$

الف) حل از

$$\begin{bmatrix} \frac{55}{96} + \frac{125}{96s} + \frac{5}{s} & \frac{-5}{s} \\ \frac{-5}{s} & \frac{5}{s} + \frac{s}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(S) \\ V_2(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_S(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{525 + 55s}{96s} & \frac{-5}{s} \\ \frac{-5}{s} & \frac{s^2 + 55}{11s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(S) \\ V_2(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(S) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2(S) = \frac{\frac{5}{s} I(S)}{\frac{(55s + 525)(s^2 + 55)}{96 \times 11 s^2} - \frac{25}{s^2}}$$

$$\frac{V_2(S)}{I_S(S)} = \frac{96 s}{(s+5)(s^2 + 6s + 25)}$$

$Z = 0$

$P_1 = -5$

$P_{2,3} = -3 \pm 4j$

$I_S(j\omega) = 15 \angle -30 \Rightarrow I_S(j4) = 15 \angle -30$

ب) حل از روش فازوری:

$I_S(S) = 15 \angle -30 \qquad \omega_0 = 4$

$$H(j4) = \frac{96 \times 4j}{(5+4j)(9+24j)} = 2.22 - 0.727j = 2.336 \angle -18.13$$

$I_S(j4) = 15 \angle -30$

$\longrightarrow V_2(j4) = 2.336 \times 15 \ \angle -30 - 18.13 \Rightarrow V_2(j4) = 35.04 \angle -48.13$

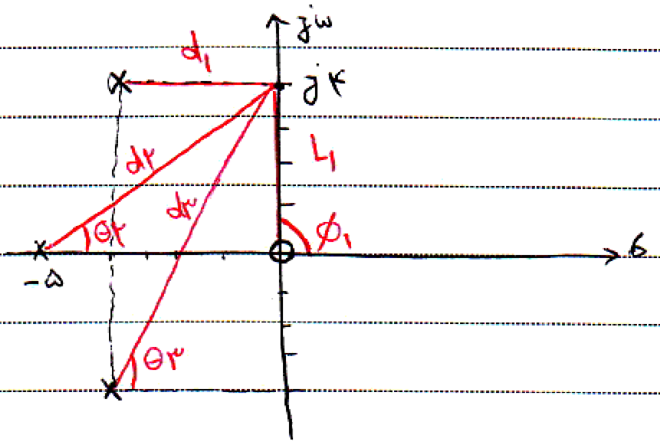
$\longrightarrow v_۲(t) = ۳۵٫۰۴ \cos(۴t - ۴۸٫۱۳)$

حل از راه حل دوم: از شکل قطب و صفر استفاده می‌کنیم

$$H(s) = \frac{V_۲(s)}{I_s(s)} = \frac{۹۶ s}{(s+۵)(s^۲+۶s+۲۵)}$$

$Z \longrightarrow s = ۰$

$P \longrightarrow -۵ \,,\, -۳ \pm ۴j$



$$\begin{cases} d_۱ = ۳ \\ \theta_۱ = ۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} d_۲ = \sqrt{۵^۲ + ۴^۲} = ۶٫۴ \\ \theta_۲ = tg^{-۱} \frac{۴}{۵} = ۳۸٫۶۸ \end{cases} \qquad \begin{cases} d_۳ = \sqrt{۸^۲ + ۳^۲} = ۸٫۵۴ \\ \theta_۳ = tg^{-۱} \frac{۸}{۳} = ۶۹٫۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_۱ = ۴ \\ \phi_۱ = ۹۰ \end{cases} \qquad |H(j۴)| = \frac{|k|\, L_۱}{d_۱ d_۲ d_۳} = \frac{۹۶ \times ۴}{۶٫۴ \times ۳ \times ۸٫۵۴} = ۲٫۳۴$$

$$\angle H(j۴) = \phi_۱ - \theta_۱ - \theta_۲ - \theta_۳ + \angle k = ۹۰ - ۳۸٫۶۸ - ۶۹٫۵ = -۱۸٫۱۸$$

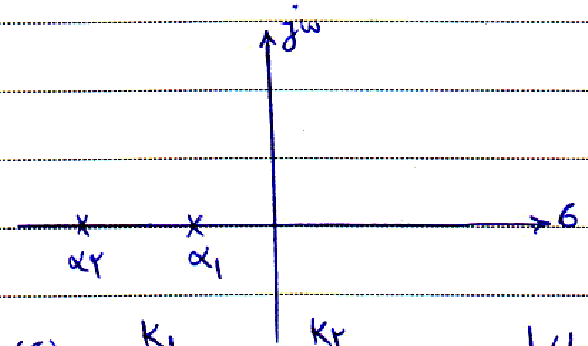
$$H(j۴) = ۲٫۳۴ \angle -۱۸٫۱۸$$

$$V_۲(j۴) = ۱۵ \angle -۳۰ \times ۲٫۳۴ \angle -۱۸٫۱۸ = ۳۵ \angle -۴۸٫۱۸$$

$$v_۲(t) = ۳۵ \cos(۴t - ۴۸٫۱۸)$$

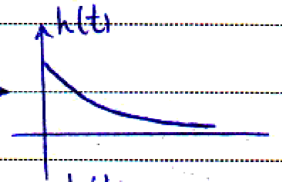
بررسی قطب‌های تابع تبدیل:

الف) قطب‌های حقیقی:



$$H(S) = \frac{K_1}{S-\alpha_1} + \frac{K_2}{S-\alpha_2} \Rightarrow h(t) = K_1 e^{\alpha_1 t} + K_2 e^{\alpha_2 t}$$

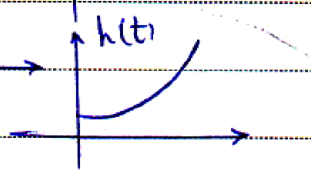
$\alpha_1 < 0 \,,\, \alpha_2 < 0 \longrightarrow$



تابع پایدار است.

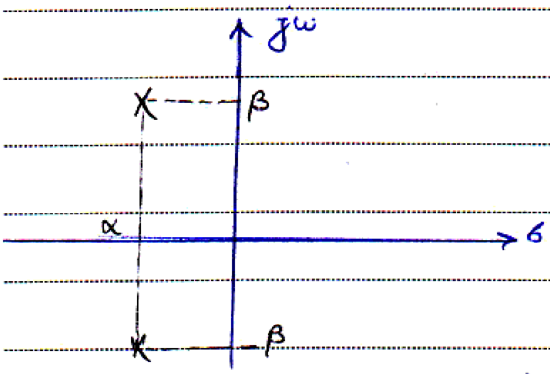
$\alpha_1 > 0$ یا $\alpha_2 > 0 \longrightarrow$

اگر یکی مثبت باشد



ناپایدار

ب) قطب‌های مزدوج:



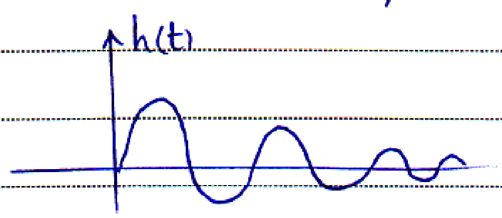
$$S_{1,2} = \alpha \pm j\omega$$

$$H(S) = \frac{K}{S-(\alpha+j\beta)} + \frac{K^*}{S-(\alpha-j\beta)}$$

$$h(t) = 2|K| e^{\alpha t} \cos(\beta t + \angle K)$$

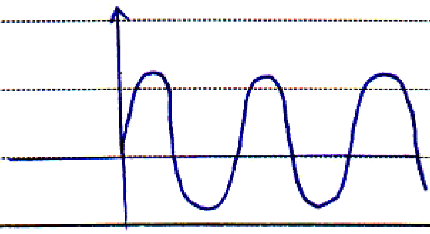
به صورت نمایی بر حسب α و بر اساس β نوسان می‌کنیم.

$\alpha < 0$



قطب‌ها سمت چپ محور $j\omega$ $\longrightarrow$ وضعیت پایدار

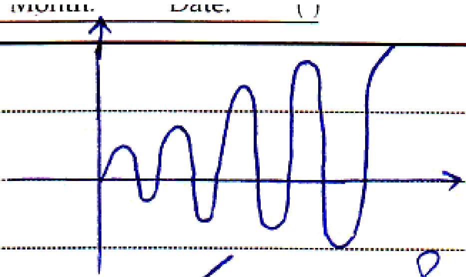
$\alpha = 0$



قطب‌ها روی محور $\longrightarrow$ وضعیت مرز پایدار

(در عمل امکان‌پذیر نیست)

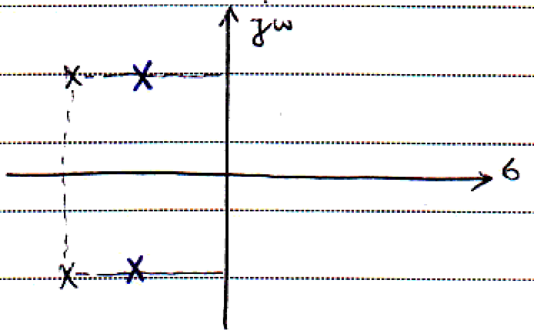
$\alpha > 0$

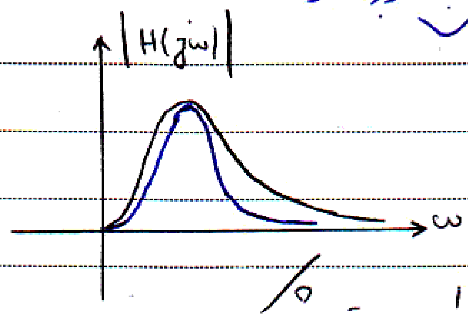


قطب‌ها سمت راست ← وضعیت ناپایدار

✓ به طور کلی هر قطبی چه حقیقی چه مزدوج اگر سمت راست محور $j\omega$ باشد ایجاد ناپایداری می‌کند

✓ وجود قطب مزدوج (مختلط) در پاسخ فرکانسی تابع شبکه ایجاد پیک‌ها و نوسان‌ها می‌کند هرچه این قطب‌ها از محور دورتر باشند پهنای باند بزرگتر است





فرکانس‌های طبیعی و قطب‌های تابع شبکه؟

فرکانس‌های طبیعی را از یکی از روابط‌های زیر به دست می‌آوریم؟

$|Y_n(s)| = 0$

یا

$|Z_m(s)| = 0$

یا

$|Z_B(s)| = 0$

یا

$|Y_Q(s)| = 0$

قابل توجه است که هر قطب تابع شبکه، فرکانس طبیعی شبکه نیز هست، اما ممکن است یک فرکانس طبیعی، قطب تابع شبکه نباشد.

خاصیت تقارن در تابع شبکه :

فرم کلی تابع شبکه :

$$H(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad m \leq n$$

در حوزه پایدار $\quad s \longrightarrow j\omega$

$$(j\omega)^2 = -\omega^2 \qquad\qquad (j\omega) = j\omega$$

$$(j\omega)^4 = \omega^4 \qquad\qquad (j\omega)^3 = -j\omega^3$$

$$(j\omega)^6 = -\omega^6 = (j\omega)^4 \times (j\omega)^2 \qquad\qquad (j\omega)^5 = j\omega^5 = (j\omega)^3 \times (j\omega)^2$$

$$(j\omega)^8 = \omega^8 = (j\omega)^6 \times (j\omega)^2 \qquad\qquad (j\omega)^7 = -j\omega^7$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$H(j\omega)=\frac{(b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots) + j\omega(b_1 - b_3\omega^2 + b_5\omega^4 - \dots)}{(a_0 - a_2\omega^2 - a_4\omega^4 \dots) + j\omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 \dots)}$$

$$H(j\omega)=\frac{(\text{چندجمله‌ای از } \omega^2) + j\omega(\text{چندجمله‌ای از } \omega^2)}{(\text{چندجمله‌ای از } \omega^2) + j\omega(\text{چندجمله‌ای از } \omega^2)}$$

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = |H(-j\omega)| \\ Re[H(j\omega)] = Re[H(-j\omega)] \end{cases} \qquad \begin{cases} \angle H(j\omega) = -\angle H(-j\omega) \\ Im[H(j\omega)] = -Im[H(-j\omega)] \end{cases}$$

مثال) اطلاعات زیر از یک تابع شبکه داده شده، حداقل تعداد قطب و صفرها چیست؟

$$|H(j0)| = 1$$

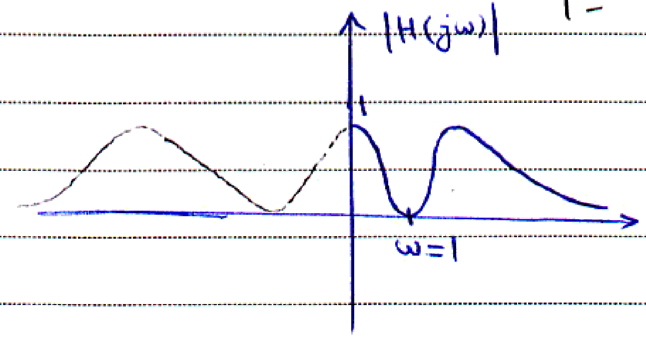
$$|H(j1)| = 0 \qquad\qquad |H(j\infty)| = 0$$

با توجه به خاصیت تقارن ؛ $|H(-j1)| = 0$

پس حداقل دو صفر داریم $s = j$, $s = -j$

با توجه به اینکه $|H(j\infty)| = 0$ یعنی درجه مخرج از درجه صورت حداقل یکی بالاتر است یعنی حداقل ۳ قطب داریم. حتماً یکی از قطب ها حقیقی است و ممکن است دو قطب دیگر مزدوج باشند

$$H(s) = \frac{(s-j)(s+j) = (s^2+1)}{(s-\gamma)(s-(\alpha+j\beta))(s-(\alpha-j\beta))}$$



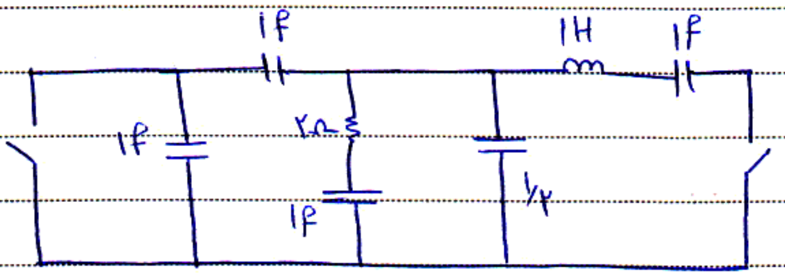
A) در مدار شکل زیر در دو حالت باز بودن کلیدها و بسته بودن کلیدها کدام گزینه صحیح است؟

۱) تعداد فرکانس های طبیعی در هر دو حالت ۵ است.

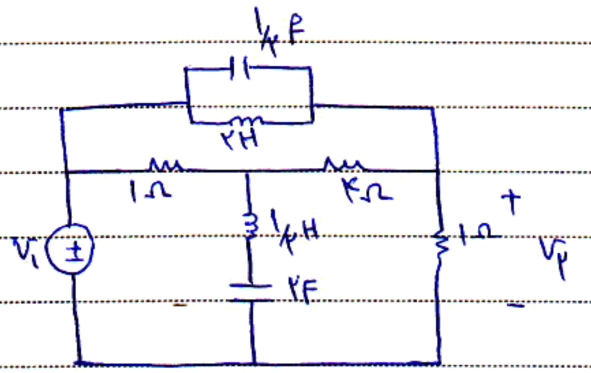
۲) تعداد فرکانس های طبیعی غیر صفر در یک حالت برابر ۱ است.

۳) تعداد فرکانس های طبیعی صفر در یک حالت برابر تعداد فرکانس های طبیعی غیر صفر در حالت دیگر است.

۴) موارد ۲ و ۳.



B) در مدار زیر تابع شبکه $\frac{V_2}{V_1}$ کدام است؟



۱) $\frac{2(s^2+1)}{(s+1)^2}$

۲) $\frac{s^2+1}{(s+2)^2}$

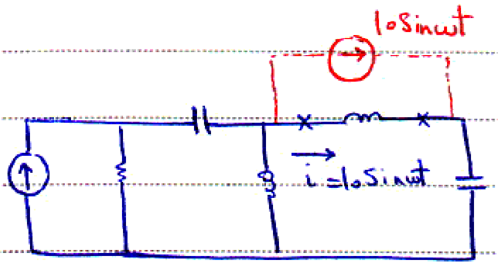
۳) $\frac{s^2+1}{s^2+s+1}$

۴) $\frac{s^2+1}{(s+1)^2}$

"فضای شبکه"

تفسیر جانشینی: کاربرد در شبکه‌های خطی، غیرخطی، تغییرپذیر و تغییرناپذیر با زمان

قضیه: هرگاه در شبکه N با مشخصات داده شده، عنصری را جدا مانند k که تزویجی با سایر عناصر شبکه ندارد در نظر بگیریم، جوابی یکتا، ولتاژ این شاخه برابر با $v_k(t)$ و جریان شاخه برابر با $j_k(t)$ بوده و معادلات تغییرات آن مشخص باشد، می‌توان به جای شاخه k، منبع ولتاژی که معادله تغییرات آن برابر با $v_k(t)$ یا منبع جریانی که معادله تغییرات آن برابر با $j_k(t)$ باشد قرار داد.



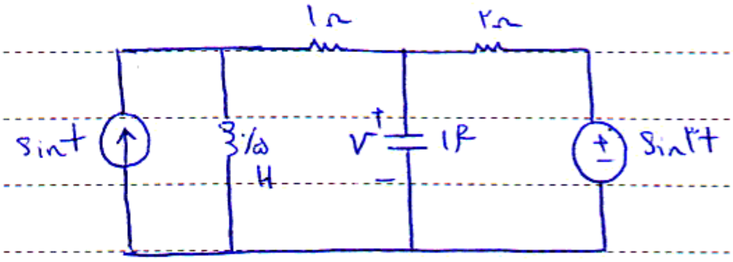
تفسیر جمع آثار: کاربرد در شبکه‌های خطی (تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان)

هرگاه شبکه N با مشخصات داده شده، فرض شود که این شبکه توسط تعدادی منبع مستقل تحریک شود، پاسخ حالت صفر شبکه برابر است با جمع جبری پاسخ‌های حالت صفر ناشی از اعمال هر یک از منابع مستقل در صورتی که به تنهایی به شبکه اعمال شوند.

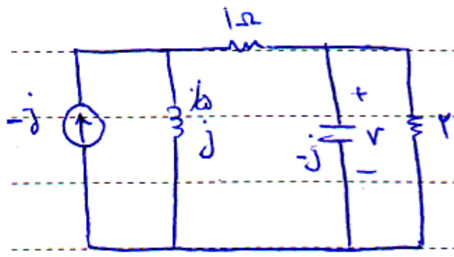
تفسیر فرعی: هرگاه شبکه N خطی و تغییرناپذیر با زمان در حالت دائمی سینوسی باشد، پاسخ حالت صفر (یا پاسخ حالت دائمی) ناشی از اعمال یک تعداد منابع سینوسی مستقل (حتی با فرکانس‌های متفاوت) برابر است با،

مجموع جبر پاسخ‌های دائمی سینوسی ناشی از اعمال هر یک از منابع وقتی به تنهایی به شبکه اعمال می‌شوند.

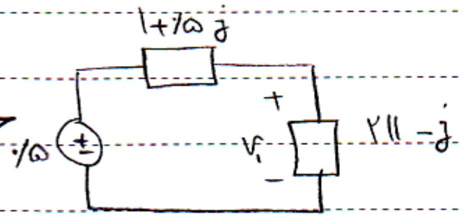
مثال) $v(t)$ را در مدار زیر بدست آورید؟

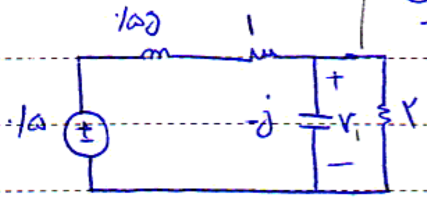


حل: از جمع آثار استفاده می‌کنیم و از تحلیل سینوسی حالت ماندگار.



$\omega = 1$



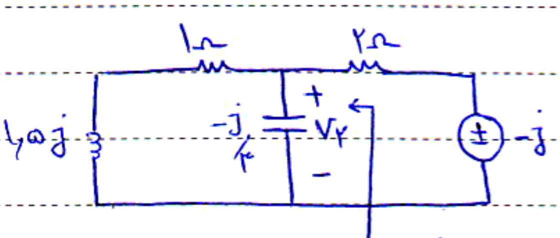


v_1 ناشی از منبع جریان

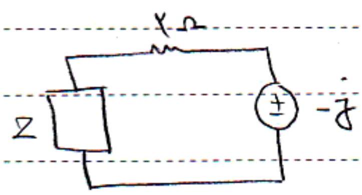
$$v_1 = \frac{(2 \| -j)}{0.5j + 1 + (2 \| -j)} \times 0.5 = \frac{0.4 - 0.8j}{0.5j + 1 + 0.4 - 0.8j} \times 0.5$$

$$v_1 = \frac{8}{41} - \frac{10}{41} j = 0.31 \angle -51.34$$

$$\Rightarrow v_1(t) = 0.31 \cos(t - 51.34)$$



$\omega = 3$



$$Z = (1 + 1.5j) \| (-j/3) = 0.047 - 0.388j$$

v_2 ناشی از منبع ولتاژ

$$v_2 = -j \times \frac{(0.047 - 0.388j)}{2 + (0.047 - 0.388j)} = -0.178 - 0.0598j = 0.187 \angle 197.7$$

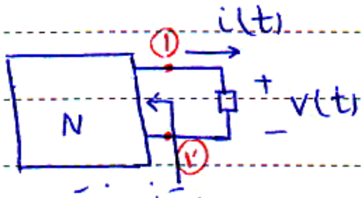
$v_2(t) = 0.187\cos(3t + 197.7)$

$v(t) = v_1(t) + v_2(t) =$ چون فرکانس‌ها متفاوت اند مجبوریم در حوزه‌ی زمان آن‌ها را با هم جمع کنیم.

$v(t) = 0.31\cos(t - 51.34) + 0.187\cos(3t + 197.7)$

قضیه‌ی شبکه‌های معادل تونن و نورتن: کاربرد در شبکه‌های خطی، تغییر پذیر یا تغییر ناپذیر با زمان

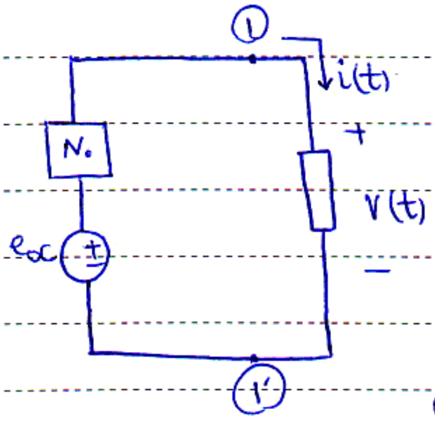
براساس این قضایا اگر شبکه‌ی N را با یک شبکه‌ی معادل تونن یا نورتن تعویض کنیم، هیچگونه تغییری در شکل موج جریان (یعنی $i(t)$) و شکل موج ولتاژ (یعنی $v(t)$) در مدار بوتر شکل زیر حاصل نمی‌شود.



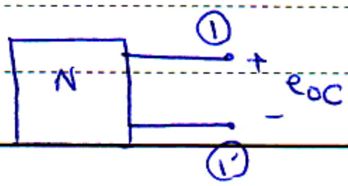
معادل تونن یا نورتن

شرط این است که بار هیچ‌گونه کوپلاژی با سایر عناصر شبکه نداشته باشد.

تفسیر شبکه‌ی معادل تونن: هر شبکه با مشخصات فوق را می‌توان با شبکه‌ی زیر معادل نمود که در آن شبکه N_0 شبکه در حالت استراحت یا شبکه‌ی معادل ورودی صفر و حالت صفر شبکه‌ی اولیه است.

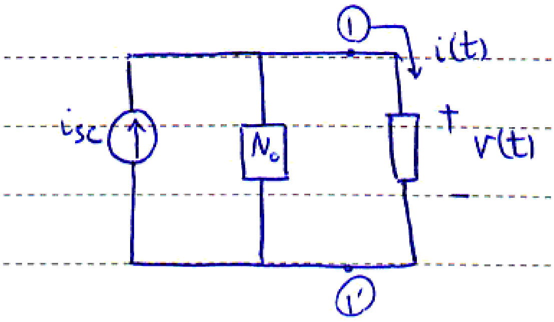


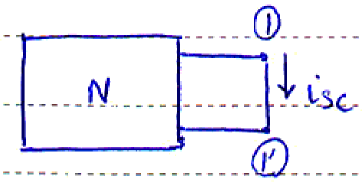
منبع ولتاژ e_{oc}، ولتاژ مدار باز دو سر ① و ② است که به وسیله‌ی منابع مستقل شبکه و شرایط اولیه به وجود می‌آید.



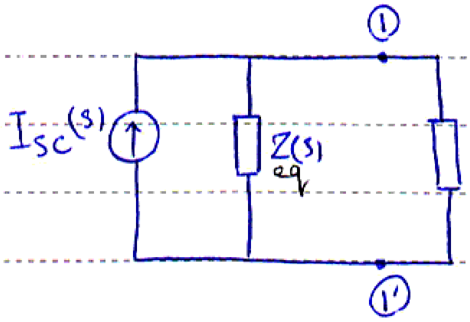
تفسیر شبکه معادل نورتن: هر شبکه با مشخصات فوق را می‌توان با شبکه‌ی معادل زیر که در آن شبکه N_0

شبکه N در حالت قبل است و I_{sc} جریان اتصال کوتاه دو سر (1)(1') ناشی از منابع مدار و شرایط اولیه آن است.

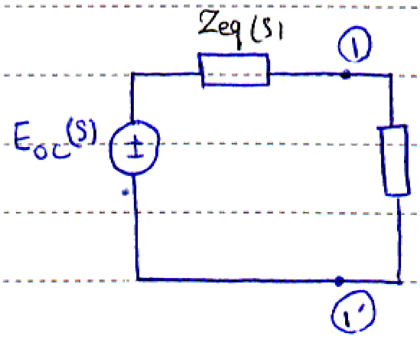




تفسیر دوم: هرگاه شبکه N خطی و تغییرناپذیر با زمان باشد، می‌توان از تبدیل لاپلاس استفاده نمود و مدارهای معادل تونن و نورتن را به صورت زیر حاصل کرد



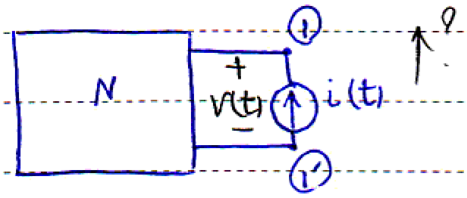
$$Z_{eq}(S) = \frac{E_{oc}(S)}{I_{sc}(S)}$$



روش‌های به دست آوردن $Z_{eq}(S)$:

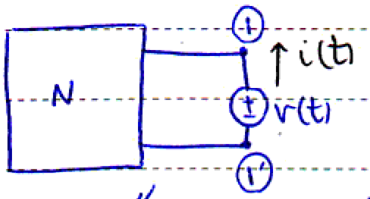
1) روش اعمال منبع: یکی از دو روش زیر عمل می‌کنیم:

الف) یک منبع جریان $i(t)$ به دو سر (1)(1') اعمال می‌کنیم و ولتاژ دو سر آن را مانند شکل زیر به دست می‌آوریم



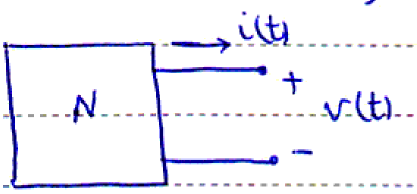
$$Z_{eq} = \frac{v(t)}{i(t)}$$

ب) یک منبع ولتاژ $v(t)$ به دو سر اعمال می‌کنیم جریان آن را مانند شکل زیر بدست می‌آوریم :



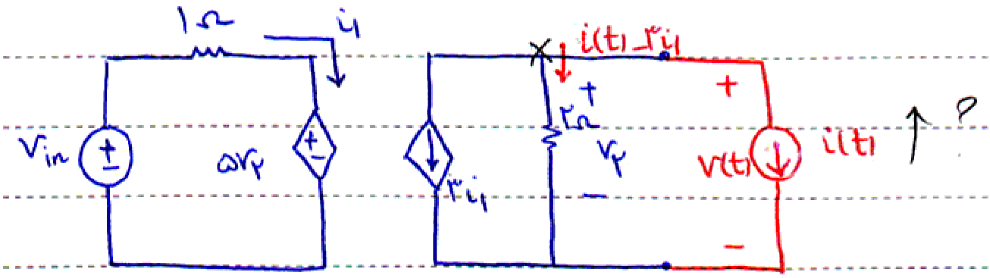
$$Z_{eq} = \frac{v(t)}{i(t)}$$

۲) معادله ولتاژ و جریان دو سر ۱ و ۱' را به صورت زیر بدست می‌آوریم (eoc و isc را احتیاطاً بدست می‌آوریم)



$$V(t) = e_{oc} - Z_{eq}\, i(t)$$

مثال: معادل تونن از دو سر ۱ و ۱'



حل: از روش اعمال منبع : منبع جریان اعمال می‌کنیم

$v_2 = v(t) = 2(+i(t) - 3i_1)$

$\boxed{v(t) = +2i(t) - 6i_1}$ (1)

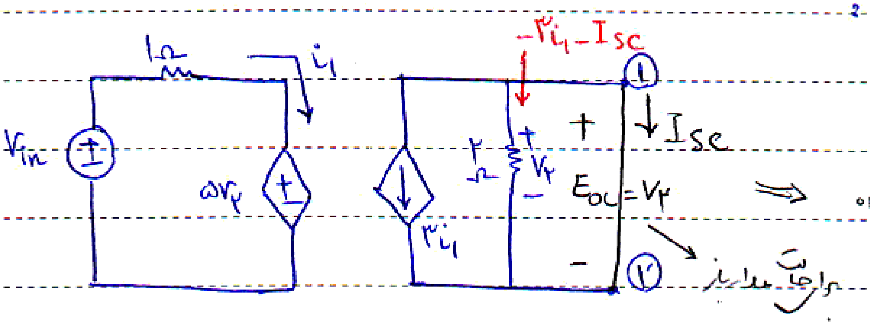
$KVL:\ V_{in} = i_1 + 5v(t) \longrightarrow \boxed{i_1 = V_{in} - 5v(t)}$ (2)

(1) و (2) : $v(t) = \cancel{-}+2i(t) - 6V_{in} + 30v(t) \Rightarrow 29v(t) = 6V_{in} \cancel{+} - 2i(t)$

$$v(t) = \underbrace{\frac{6}{29} V_{in}}_{E_{oc}} \cancel{+} - \underbrace{\frac{2}{29}}_{Z_{eq}} i(t)$$

حل از طریق بدست آوردن معادل :

(روش دوم)



$V_2 = -2\times 3 i_1 = -6 i_1$ $\qquad i_1 = \frac{V_{in} - 5V_2}{1} = V_{in} - 5(-6 i_1)$

$i_1 = V_{in} + 30 i_1 \longrightarrow i_1 = \frac{-V_{in}}{29}$ $\qquad V_2 = \overset{E_{oc}}{\frac{6}{29}} V_{in} \xrightarrow{V_2 = e_{oc}} E_{oc} = \frac{6}{29} V_{in}$

$V_2 = 0 \longrightarrow 2(-3 i_1 - I_{sc}) = 0 \Rightarrow -6 i_1 - 2 I_{sc} = 0 \longrightarrow \boxed{I_{sc} = -3 i_1}$

KVL : $i_1 = V_{in} - \cancel{5V_2} \Rightarrow i_1 = V_{in} \longrightarrow \boxed{I_{sc} = -3 V_{in}}$

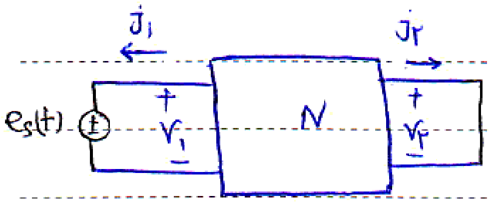
$$Z_{eq} = \frac{E_{oc}}{I_{sc}} = \frac{6/29}{-3} = -2/29$$

قضیه هم پاسخی : کاربرد در شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، بدون منابع وابسته و مستقل و بدون عنصری

بنام ژیراتور و شرایط اولیه صفر. این قضیه سه نوع بیان دارد :

بیان ۱) اگر به شبکه N با مشخصات ذکر شده در شکل‌های الف و ب منابع زیر را اعمال کنیم خواهیم داشت :

$$j_2(t) = \hat{j}_1(t)$$

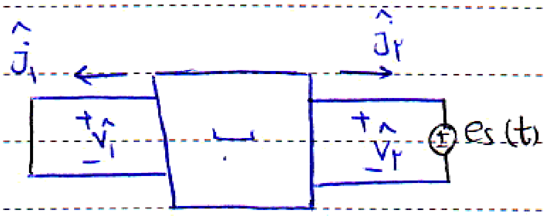


(الف)

اصل تعمیمی تلگان :

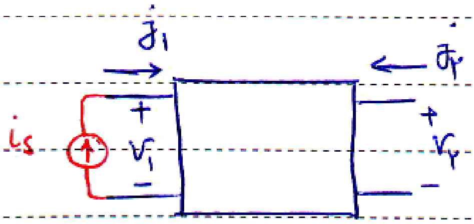
$$\underbrace{v_1}_{e_s}\hat{j}_1 + \underbrace{v_2}_{0}\hat{j}_2 = \underbrace{\hat{v}_1}_{0} j_1 + \underbrace{\hat{v}_2}_{e_s} j_2$$

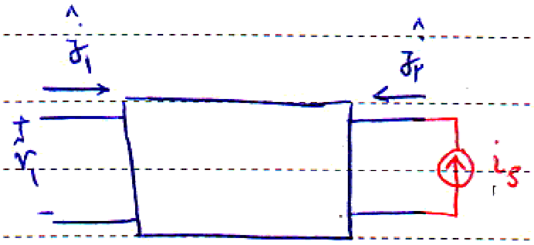
$$e_s \hat{j}_1 = e_s j_2 \longrightarrow \hat{j}_1 = j_2$$



سؤال ۲)

اصل تعمیمی تلگان :

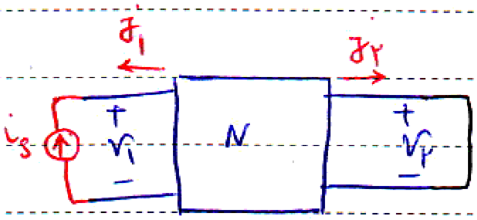




$$\underbrace{v_1}_{0}\hat{j}_1 + v_2 \underbrace{\hat{j}_2}_{i_s} = \hat{v}_1 \underbrace{j_1}_{i_s} + \hat{v}_2 \underbrace{j_2}_{0}$$

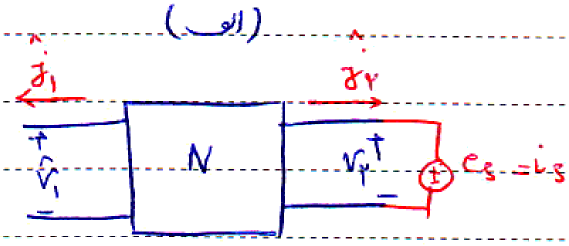
$$v_2 i_s = \hat{v}_1 i_s \longrightarrow \boxed{v_2 = \hat{v}_1}$$

سؤال سوم : با استفاده از تعمیمی تلگان می توان نشان داد :



(الف)

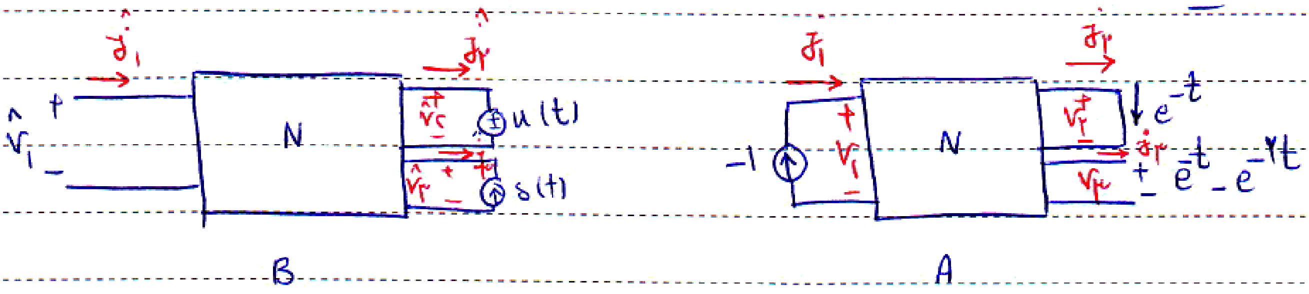
$$\underbrace{v_1}_{0}\hat{j}_1 + \underbrace{v_2}_{0}\hat{j}_2 = \hat{v}_1 \underbrace{j_1}_{-i_s} + \underbrace{\hat{v}_2}_{e_s} j_2$$



$$-\hat{v}_1 i_s + i_s j_2 = 0 \longrightarrow \boxed{\hat{v}_1 = j_2}$$

(ب)

مثال) در مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان شکل A، اطلاعات زیر داده شده. اگر مدار را به صورت B در بیاوریم، ولتاژ $\hat{V}_1$ چیست؟



چون قضیه‌ی هم‌پاسخی تحت شرایط خطی و تغییرناپذیر بودن با زمان است می‌توان برای آن قضیه‌ی تلگان را در حوزه‌ی لاپلاس بکار برد.

$$V_1\hat{j}_1+V_2\hat{j}_2+V_3\hat{j}_3=\hat{V}_1 j_1+\hat{V}_2 j_2+\hat{V}_3 j_3$$

$$0+0+\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right)\times(-1)=\hat{V}_1\left(-\frac{1}{s}\right)+\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)+0$$

$$\frac{-1}{(s+1)(s+2)}=\hat{V}_1\times\frac{-1}{s}+\frac{1}{s(s+1)}$$

$$\frac{\hat{V}_1}{s}=\frac{1}{s(s+1)}+\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{s+2+s}{s(s+1)(s+2)}$$

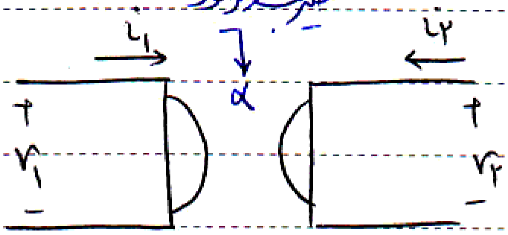
$$\hat{V}_1=\frac{2}{s+2}\longrightarrow \hat{v}_1(t)=2e^{-2t}u(t)$$

ترابرد:

تعریف: هر شبکه‌ای که در قضیه‌ی هم‌پاسخی صدق کند شبکه‌ی متقابل گفته می‌شود.

$$\begin{cases} Z_{ij}=Z_{ji} \\ Y_{ij}=Y_{ji} \end{cases}$$

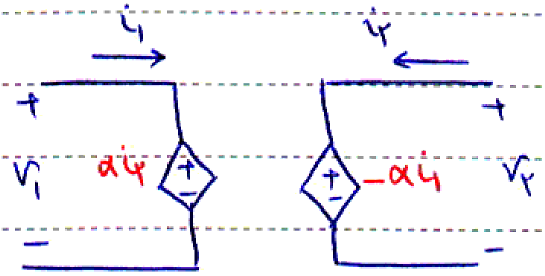
ژیراتور: یک عنصر غیرخطی و تغییرناپذیر با زمان است.



$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_2 \\ v_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_2 = \frac{1}{\alpha} v_1 \\ i_1 = \frac{-1}{\alpha} v_2 \end{cases}$$

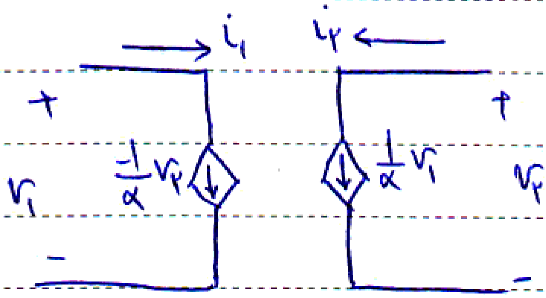
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

مدل کاربردی ژیراتور برای روش‌های مش و حلقه‌ی اساسی:



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\alpha} \\ 1/\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

مدل کاربردی ژیراتور برای روش‌های گره و کات‌ست اساسی:

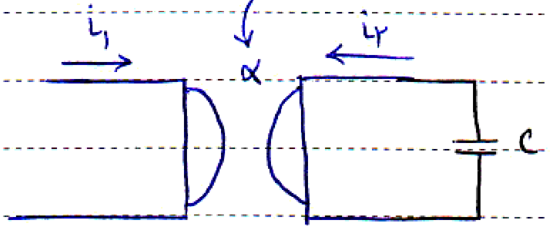


در ژیراتور:

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 = \alpha i_2 i_1 - \alpha i_2 i_1 = 0$$

مفهوم این رابطه این است که ژیراتور به شکل سلف دیده می‌شود [best reading] — ضریب ژیراتور

مثال) عملکرد مدار زیر را بررسی کنید.



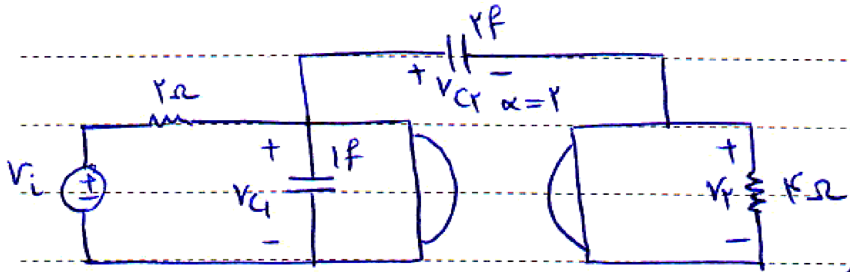
$$\begin{cases} V_1 = \alpha i_2 \\ V_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow -i_2 = C\frac{dV_2}{dt}$$

$$\longrightarrow i_2 = -C\frac{dV_2}{dt}$$

$$\begin{cases} V_1 = \alpha i_2 = -\alpha C\frac{dV_2}{dt} \\ V_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow V_1 = -\alpha C\frac{d}{dt}(-\alpha i_1)$$

$$\longrightarrow V_1 = \underbrace{\alpha^2 C}_{L}\frac{di_1}{dt}$$

مثال) در مدار زیر:



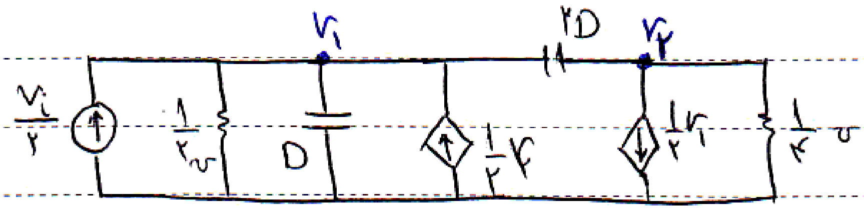
الف) فرکانس‌های طبیعی سیستم را پیدا کنید.

ب) تابع شبکه $\frac{V_o}{V_i}$ را پیدا کنید.

ج) اگر $V_i = 2\sin(t-40)$ باشد، $V_o(t)$ را پیدا کنید.

(از روش سیاه‌برگه استفاده می‌کنیم.)

NADERI



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+3D & -\frac{1}{2}-2D \\ -2D+\frac{1}{2} & 2D+\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_i}{2}+\cancel{\frac{1}{2}V_2} \\ \cancel{-\frac{1}{2}V_1} \end{bmatrix}$$

$2V_{C_2}(0^-)+V_{C_1}(0^-)$

$$\begin{bmatrix} 3s+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-2s \\ -2s+\frac{1}{2} & 2s+\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_i}{2}+3V_1(0^-)-2V_2(0^-) \\ -2V_1(0^-)+2V_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$-2V_{C_2}(0^-)$

$V_1(0^-)-V_2(0^-)=V_{C_2}(0^-) \qquad V_1(0^-)=V_{C_1}(0^-)$

شرایط اولیه

$$\begin{bmatrix} \frac{6s+1}{2} & -\frac{4s+1}{2} \\ -\frac{4s-1}{2} & \frac{8s+1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_i}{2}+2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس حالت صفر

$$\frac{(6s+1)(8s+1)}{8}-\frac{(4s+1)(4s-1)}{4}=0$$

$$(6s+1)(8s+1)-2(4s+1)(4s-1)=0$$

$$48s^2+14s+1-16s^2+2=0 \longrightarrow 32s^2+14s+3=0 \begin{cases} s_1= \\ s_2= \end{cases}$$

برای به دست آوردن تابع شبکه شرایط اولیه را صفر می‌کنیم