بسم الله الرحمن الرحیم

مدارهای الکتریکی ۱

(بخش اول)

استاد عادلی

تمرین ۱۵٪ نمره   میان ترم ۳۰٪ نمره   پایان ترم ۵۵٪ نمره

مرجع : نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها چارلز دسور و ارنست کوه، ترجمه دکتر جبه دار

سرفصل‌ها :

۱ـ مدارهای فشرده و قوانین کیرشهف   ۵ـ مدارهای مرتبه دوم

۲ـ اجزاء مدار   ۶ـ خواص مدارهای LTI

۳ـ مدارهای ساده   ۷ـ تجزیه تحلیل دائمی سینوسی

۴ـ مدارهای مرتبه اول   ۸ـ مدارهای سه فاز

مباحث میان ترم برای پایان ترم حذف نمی‌شوند

مدارهای فشرده و قوانین کیرشهف :

کمیت‌هایی که در مدار با آنها سر و کار داریم : $p(t)$ ، $v(t)$ ، $i(t)$

جریان $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ (q → بار کولن ، dt → sec)   ولتاژ $v(t) = \frac{dw}{dq}$ ژول

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \times \frac{dq}{dt} = v(t)\,i(t) \qquad p(t) = v(t)\,i(t)$$

if $p(t) < 0$ توان تولید کرده   active

if $p(t) > 0$ توان مصرف کرده   passive

مدار الکتریکی : مجموعه‌ای است از اجزای الکتریکی (شامل منابع)

انواع مدار : { مدارهای فشرده ، مدارهای گسترده distributed }

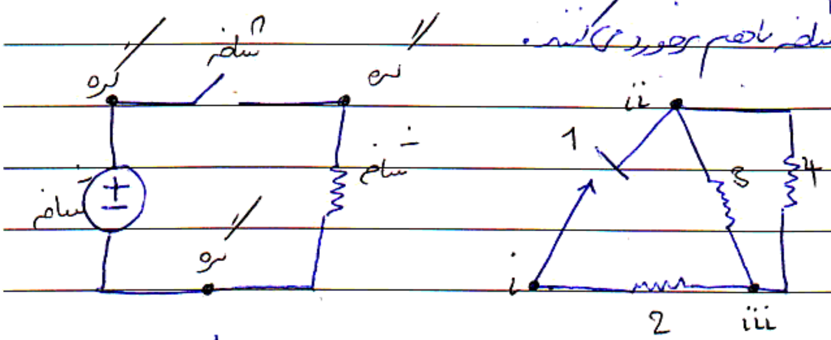
Subject:
Year. Month. Date.

مدار فشرده : ابعاد فیزیکی اجزا مدار بسیار کوچک‌تر از طول موج است.

مدارهای گسترده : ابعاد فیزیکی اجزا مدار قابل مقایسه با طول موج است.

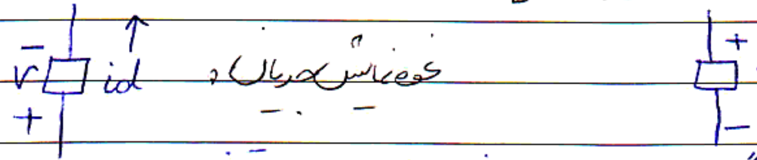
شاخه: (Branch) هر عنصر الکتریکی دو سر (دو پایانه) را می‌توان یک شاخه در نظر گرفت.

گره : محلی است که دو یا چند شاخه با هم برخورد می‌کنند.



نحوه نمایش ولتاژ : vd

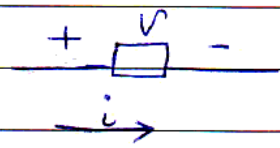
نحوه نمایش جریان : id



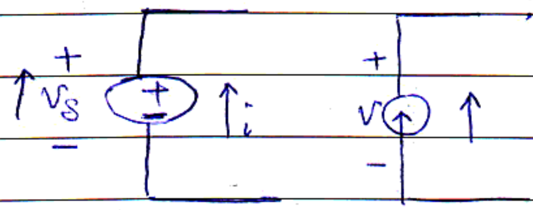
نکته : جهت‌های در نظر گرفته شده برای ولتاژ و جریان کاملاً مستقل از هم هستند.

جهت‌های قراردادی شاخه :

$p(t)=v(t)\times i(t)$



برای منابع جهت‌های قراردادی برعکس‌اند.



قوانین مدار :

قوانین کیرشهف و روش‌های گسترده‌تر.

قانون جریان کیرشهف (KCL) : در هر گره از مدار الکتریکی فشرده، مجموع جبری جریان‌های ورودی

۱) در اجرای قانون دوم کیرشهف اگر در جهت جریان از قطب مثبت عبور کنیم کاهش ولتاژ داریم و برعکس.

۲) 〃 〃 〃 〃 اگر از منفی به مثبت یعنی حرکت کنیم افزایش ولتاژ داریم و برعکس.

Subject:

Year. Month. Date.

(ورودی و خروجی) برابر صفر است. $\sum_k i_k(t)=0$

قانون ولتاژ کیرشهف (KVL):

در هر حلقه از مدار الکتریکی بسته، مجموع جبری ولتاژها برابر صفر است. $\sum v(t)=0$

مثال) $i_4+i_3-i_1-i_2=0$

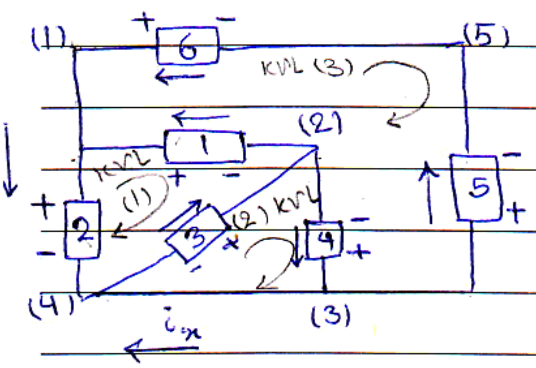
مجموع جریان های خروجی

$i_1+i_2-i_4-i_3=0$ مجموع جریان های ورودی

$\Rightarrow i_1+i_2=i_3+i_4$ جمع جبری جریان های ورودی = جمع جبری جریان های خروجی

قرارداد: برای راحتی، جریان های ورودی را مثبت می‌گیریم و جریان های خروجی را منفی در نظر می‌گیریم.

مثال)



KCL (1): $i_6-i_2+i_1=0$

KCL (2): $i_3-i_4-i_1=0$

KCL (3): $i_4-i_5-i_x=0$

KCL (4): $i_2+i_x-i_3=0 \rightarrow i_4-i_5+i_2-i_3=0$

KCL (5): $i_5-i_6=0$

$i_2-i_3+i_4-i_5=0$

برای حلقه‌هایی KVL می‌نویسیم که درون آنها حلقه‌ی دیگری نباشد. ← mesh

جهت حلقه: جهت عقربه‌های ساعت

قرارداد: اگر جهت عقربه با جهت قراردادی عناصر یکی بود، ولتاژ آنها مثبت و در غیر این صورت ولتاژ آن به صورت منفی است.

$$\begin{cases} KVL\ (1): & -V_2+V_1+V_3=0 \\ KVL\ (2): & -V_3-V_4=0 \\ KVL\ (3): & V_6-V_5+V_4-V_1=0 \end{cases} \longrightarrow -V_2+V_1-V_4=0$$

وابستگی زمانی،
مسأله را حل می‌کنیم.
RCL مدارات مشترک
مدارهای فشرده و گسترده:
← از لحاظ فیزیکی تفاوتشان در طول موج مدارات.

فصل دوم: اجزاء مدار

۱ـ مقاومت ۲ـ خازن ۳ـ سلف ۴ـ عناصر فیزیکی دیگر

۱ـ مقاومت Resistor: مقاومت، عنصری است که در هر لحظه از زمان، ولتاژ دو سر آن $v(t)$ و جریان گذرنده از آن $i(t)$ در صفحه‌ی vـi تشکیل یک منحنی می‌دهند، و این منحنی مشخصه را مقاومت گویند.

۱ـ خطی بودن ۲ـ تغییرپذیری با زمان

$$x(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y(t)$$

خطی ← ۱ـ جمع‌پذیری
۲ـ همگن

$$\begin{cases} x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \end{cases}$$

جمع‌پذیری: $x_1(t)+x_2(t) \longrightarrow y_1(t)+y_2(t)$

همگن: $\alpha x_1(t) \longrightarrow \alpha y_1(t)$

مشخصه‌ی یک سیستم خطی یک خط است که از مبدأ بگذرد.
$y(t) = 2x(t)+1$
خطی نیست

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = 2x_1(t) + 1$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = 2x_2(t) + 1$

$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_3(t) = 2\left(x_1(t) + x_2(t)\right) + 2 \rightarrow$ خطی نیست.

$y(t) = 2x(t) \rightarrow$ خطی $y(t) = \sin t \; x(t) \rightarrow$ خطی، تغییرپذیر با زمان

ـ اگر داشتیم $y(t) = t x(t)$ تغییرپذیر با زمان می‌شود.

ـ اگر t به صورت صحیح در الگو وجود داشته باشد تغییرپذیر با زمان است.

برای الکترونیک ۴ حالت پیش می‌آید:

1) linear _ time invariant → LTI خطی ـ تغییرناپذیر با زمان

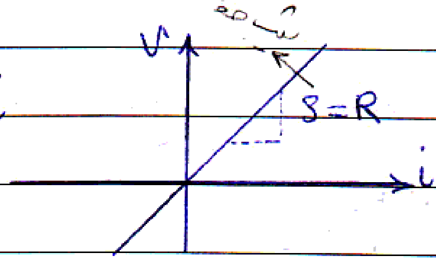
2) " _ " Variant

3) Nonlinear _ " invariant

4) " _ " Variant

اهم R

$V = Ri$



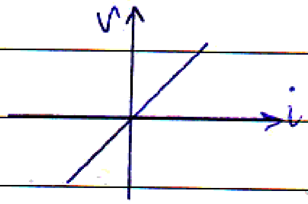
۱ـ مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان: (LTI)

تمرین سری اول از فصل ۱ کتاب ۵ـ۶ـ۷ـ۱۳

تاریخ تحویل: ۸۶/۷/۱۴

رسانایی $G \triangleq \frac{1}{R}$ $\frac{V}{S}$ mho آمو

واحد رسانایی = زیمنس یا mho

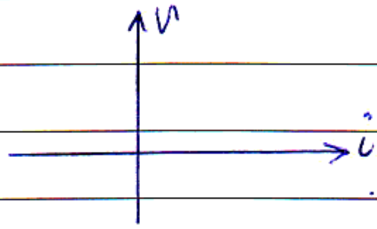


۱ـ مقاومت LTI:

$V = Ri$

← مقاومت

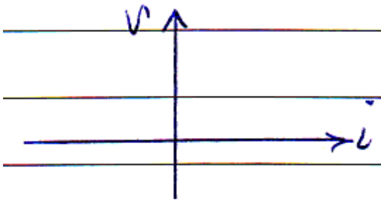
حالت خاص:



۱) $R=0$ ← اتصال کوتاه short circuit

$G=\infty$ ، $v=0$

منطبق بر محور افقی است.



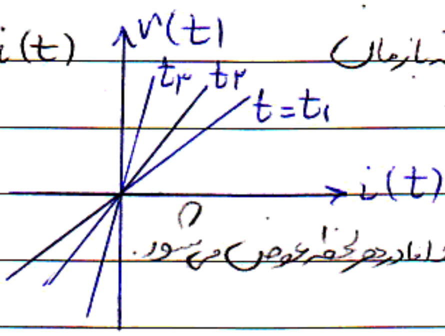
۲) مدار باز $R=\infty$ open circuit

$G=0$ ، $i=0$ ، $v=\cdot$

منطبق بر محور عمودی

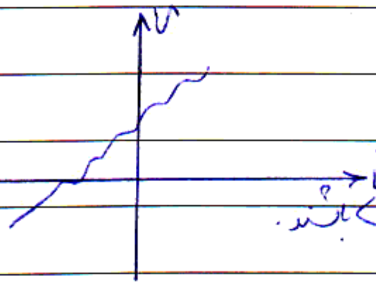
۲_ مقاومت خطی وابسته به زمان $v(t)=R(t)\,i(t)$

← تابع غیرخطی از زمان باشد.



مقاومت خطی از زمان که اندازه در هر لحظه عوض می‌شود.

۳_ مقاومت‌های غیرخطی:

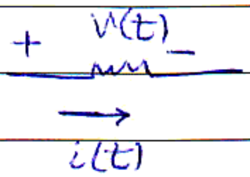


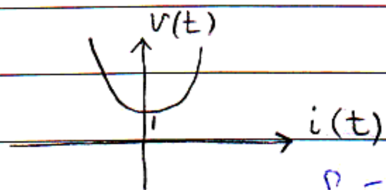
می‌توانند هم تغییرپذیر و هم تغییرناپذیر با زمان باشند.

$v(t)=f\left(i(t),t\right)$ غیرخطی

اگر t به صورت صریح در رابطه فوق وجود داشته باشد ← تغییرپذیر با زمان

گونه‌های خاص مقاومت:





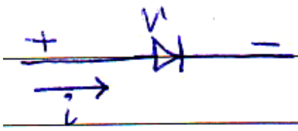
مثال) $v(t)=i^2(t)+1$

۱) آیا خطی است؟ خیر

۲) آیا تغییرناپذیر با زمان است؟ بله

پارامتر t به صورت صریح در رابطه وجود ندارد

۲_ دیود $i=I_S\left(e^{\frac{v(t)}{V_T}}-1\right)$ → $V_T=25\,mV$



جریان اشباع معکوس ←

رابطه جریان و ولتاژ یک رابطه نمایی است، پس غیرخطی است و تغییرناپذیر با زمان.

مثال) $v(t)=2\,t\,i(t)$ تغییر پذیر با زمان خطی است چون می‌توان رابطه را به صورت زیر نوشت

$v(t)=R(t)\,i(t)$

اثبات خطی بودن رابطه بالا:

$i_1(t) \to v_1(t)=2t\,i_1(t)$

$i_2(t) \to v_2(t)=2t\,i_2(t)$

$i_1+i_2 \to v_3=2t(i_1+i_2)=2t\,i_1(t)+2t\,i_2(t)$

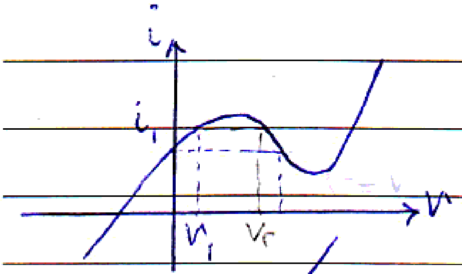
$\underbrace{v_1(t)}+v_2(t)$ خاصیت اول برقرار است.

اگر دو ویژگی برقرار باشد سیستم خطی است:

$$\begin{matrix} x_1 \to y_1 \\ x_2 \to y_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ x_1+x_2 \to y_1+y_2 \\ 2)\ \alpha x_1 \to \alpha y_1 \end{cases}$$

بررسی خاصیت دوم: $\alpha\, i_1(t) \to v_4(t)$ $\quad v_4(t)=2t\left(\alpha\, i_1(t)\right)=\alpha\left(2t\, i_1(t)\right)=\alpha v_1(t)$

⇐ خاصیت دوم هم برقرار است پس سیستم خطی است.



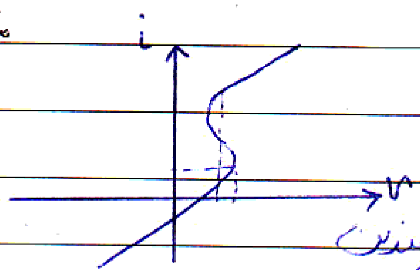
کنترل شونده با ولتاژ و جریان:

۱- کنترل شونده با ولتاژ: برای یافتن جریان، داشتن ولتاژ کافی است ولی عکس آن صادق نیست.

$i=f(v)$ متغیر مستقل

۲- کنترل شونده با جریان:

$v=f(i)$ متغیر مستقل



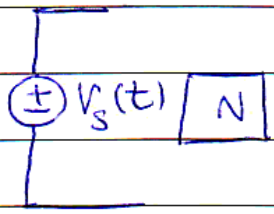
به ازای یک ولتاژ ممکن است چندین جریان وجود داشته باشد.

دانستن i برای یافتن v کافی است ولی عکس آن صادق نیست.

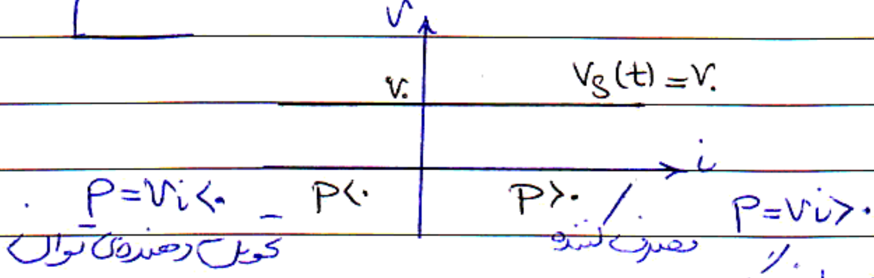
$v(t)=i^2+4i+3$ کنترل شونده با جریان

منابع { ۱- مستقل (ثابت)
۲- وابسته (کنترل شده)

۱- منبع ولتاژ مستقل: عنصری است دو سر که ولتاژ معینی را در دو سر خود تأمین می‌کند. این منبع مستقل از مداری است که به آن متصل شده است.



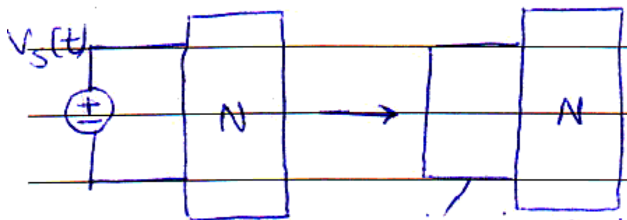
مثال) منبع ولتاژ مستقیم dc



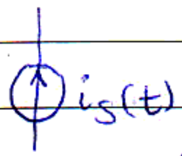
در حالت کلی غیرخطی است چون که از مبدأ نمی‌گذرد.
به ازای هر جریان ولتاژ ثابت است <= کنترل نشونده با جریان

استثناء: اتصال کوتاه

نکته: حذف منبع ولتاژ $(V=0)$ در مدار معادل با اتصال کوتاه کردن آن است.

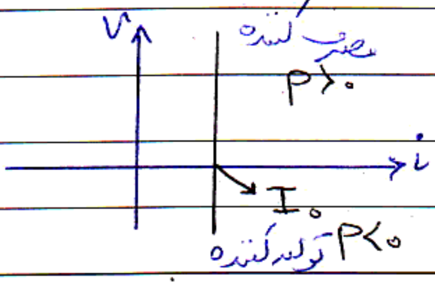


۲- منبع جریان مستقل: عنصری است دو سر که جریان معینی را تأمین می‌کند.
این منبع مستقل از مداری است که به آن متصل است.



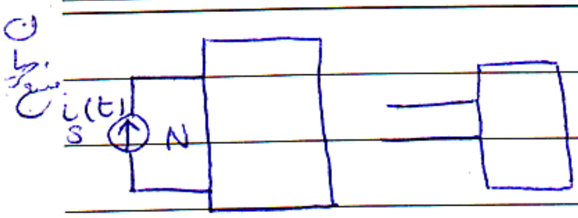
استثناء: مدار باز (جریانی ایجاد نمی‌شود)

مثال) منبع جریان مستقیم dc : $i_s(t)=I_0$



غیرخطی - کنترل نشونده با ولتاژ - تغییرناپذیر با زمان

نکته: حذف منبع جریان در مدار معادل باز کردن مدار است.



منابع وابسته:

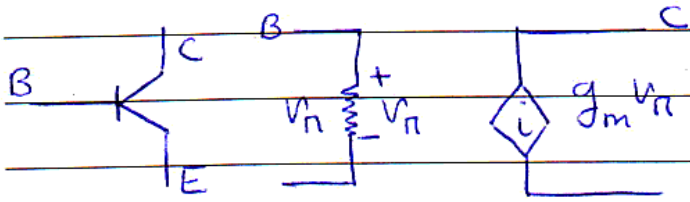
۱- منبع ولتاژ وابسته:  این منبع وابسته به ولتاژ یا جریان یک عنصر دیگر است.

$$v_s(t) = f\left(v(t), i(t), t\right)$$

۲- منبع جریان وابسته: وابسته به جریان یا ولتاژ یک عنصر دیگر است.

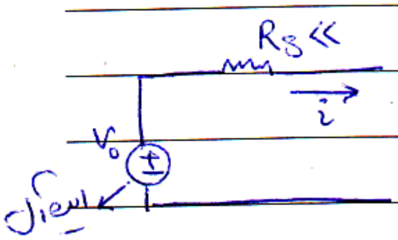
$$i_s(t) = f\left(v(t), i(t), t\right)$$

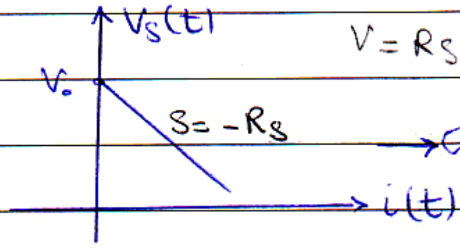
مثال) منبع جریان وابسته:



منبع ولتاژ واقعی:

$V = R_S i$

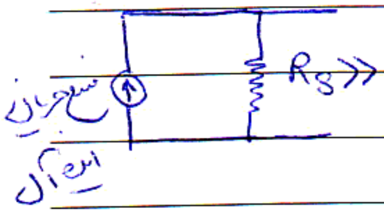


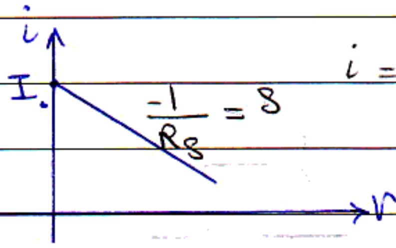


مدل یک منبع واقعی

منبع جریان واقعی:

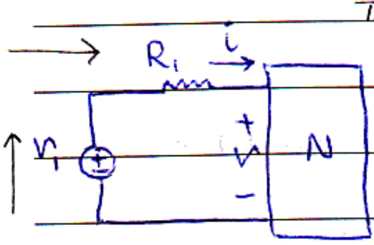
$$i = \frac{1}{R_S} v$$



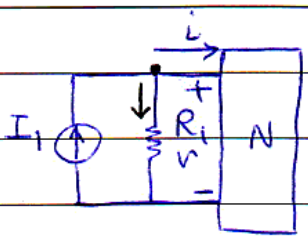


تبدیل منابع:

معادلهای تونن و نورتن: thevenin & Norton Equivalents



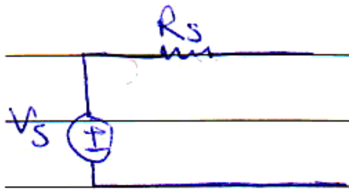
$$V = V_1 - R_1 i \quad (1)$$



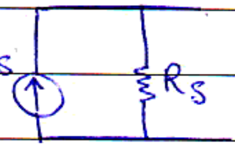
KCl

$I_1 - \frac{V}{R_1} - i = 0 \longrightarrow V = R_1 I_1 - R_1 i \quad (۲)$

(۱) , (۲) $\quad V_1 - R_1 i = R_1 I_1 - R_1 i \longrightarrow V_1 = R_1 I_1$



$\equiv$ معادل



$I_S = \frac{V_S}{R_S}$

معادل تونن — معادل نورتن

توابع سیگنال در تجزیه و تحلیل مدارها :

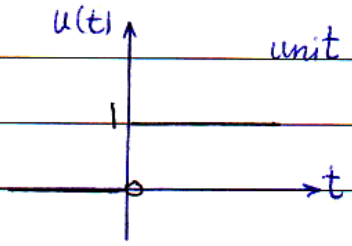
۱_ $f(t) = k$ مقدار ثابت k

۲_ تابع سینوسی $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ — A دامنه Amplitude

$\omega = 2\pi f$ فرکانس — φ فاز phase

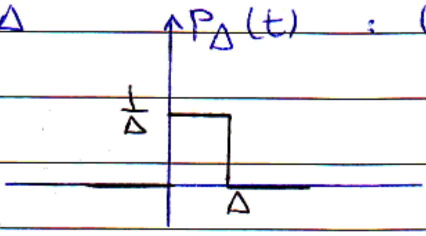
۳_ تابع پله واحد unit step function

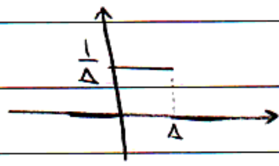
$$f(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



۴_ تابع پالس : (pulse) $P_\Delta(t)$

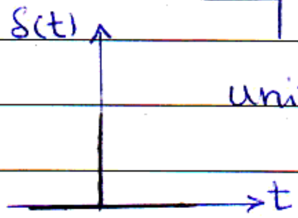
$$P_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$





۵_ تابع ضربه واحد : unit impulse function

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} P_\Delta(t)$$



خواص $\delta(t)$:

۱) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$ مساحت سطح زیر منحنی

11 /

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)\,d\lambda$$
$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\lambda)\,d\lambda$$

Subject:
Year. Month. Date.

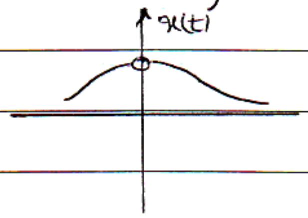
$$\left.\begin{aligned} &۲)\ u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)\,d\lambda \\ &۳)\ \delta(t)=\frac{du(t)}{dt}\end{aligned}\right\}$$ روابط مشتق و انتگرال تابع $u(t)$

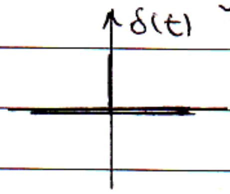
تمرین) ثابت کنید:

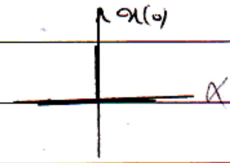
$$\begin{cases} x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t) \longrightarrow ? \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)\,dt = x_0 \longrightarrow \text{اصل کی} \end{cases}$$

$$\underbrace{\int x(t)\delta(t)}_{x_0}=\int x(0)\delta(t) = x_0\underbrace{\int\delta(t)}_{1} \Rightarrow x_0 = x_0$$

$$\int x(t)\delta(t) = \int x(0)\delta(t)\,dt = x(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt = x(0)\cancel{\delta(t)}$$

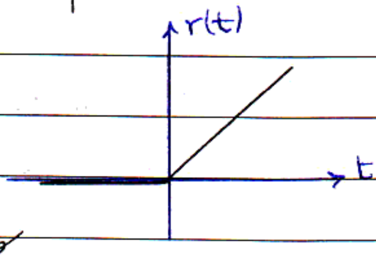






۴- تابع شیب واحد:

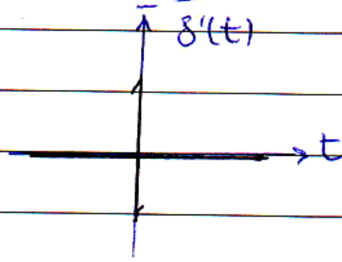
$$r(t)=\begin{cases} t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

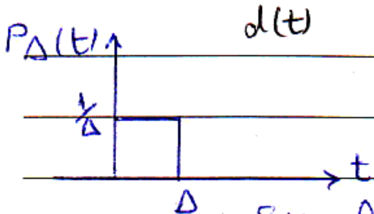


تمرین) رابطه‌ی بین $r(t)$ و $u(t)$ را بدست بیاورید؟ $r(t)$ انتگرال از تابع پله $r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\lambda)\,d(\lambda)$

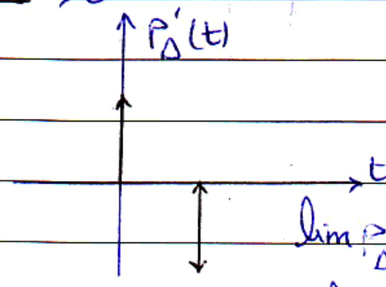
۷- تابع دوبلت

$$\delta'(t)=\frac{\delta(t)}{d(t)}$$



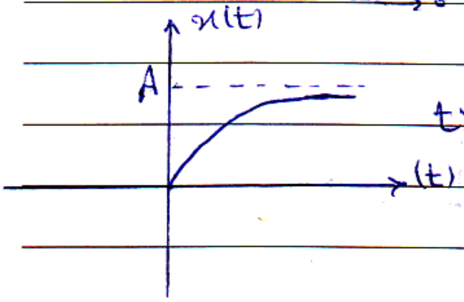


$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}P_\Delta(t)$$

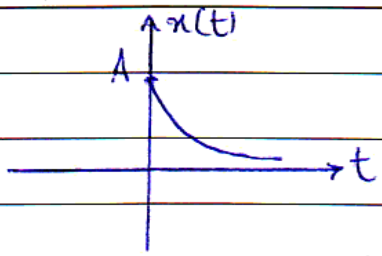


$$\lim_{\Delta\to 0}P'_\Delta(t)$$

۸- تابع نمایی



$t\geq 0$ $\quad x(t)=A(1-e^{-t/\tau})$ $\quad t\geq 0$

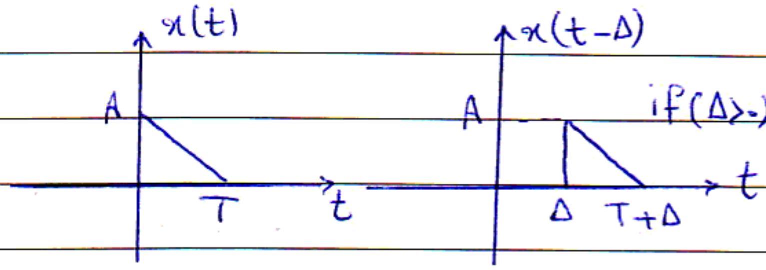


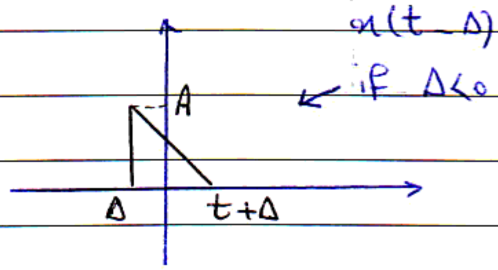
$$x(t)=A\,e^{-t/\tau}$$

تبدیلات توابع :

۱_ انتقال تابع یا Shifting

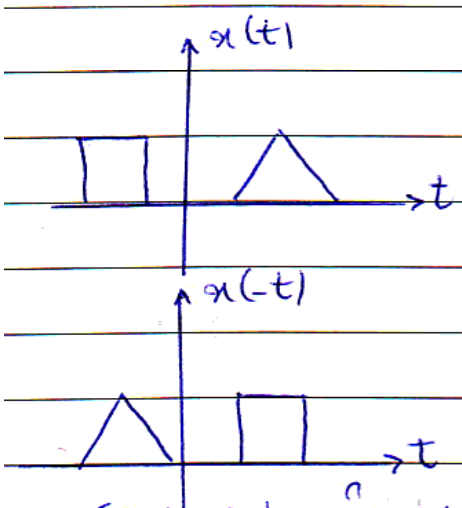
if $(\Delta>0)$





۲_ معکوس کردن تابع یا Time invertion

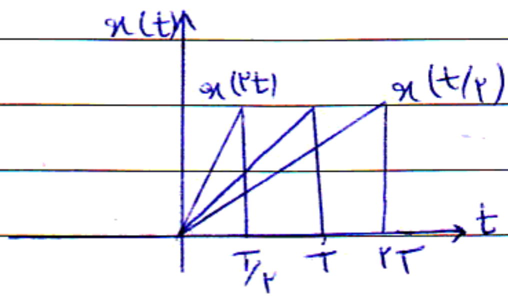
$$x(t)\to x(-t)$$



۱۸۰° چرخش حول محور عمودی

۳_ Scaling $\quad x(t)\to x(at)$

if $\begin{cases} a>1 \to \text{فشرده سازی} \\ a<1 \to \text{گسترده سازی} \end{cases}$

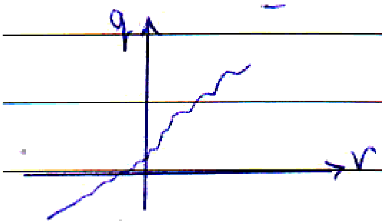


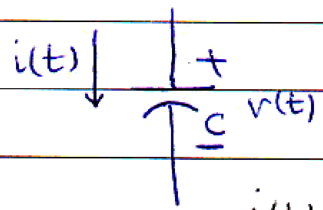
تمرین های ۱ و ۲

در ۴۷ و ۴۸

خازن Capacitor

عنصری است دو پایانه که ارتباط بین ولتاژ $(v(t))$ دو سر خود و بار ذخیره شده $q(t)$ در هر لحظه توسط یک منحنی در صفحه $q-v$ نشان می‌دهند





→ نحوه نمایش خازن

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

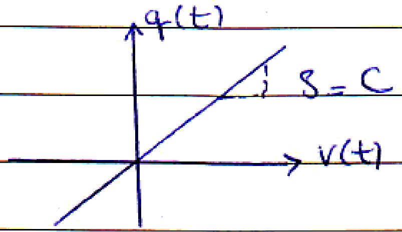
خواص: ۱ـ خطی بودن

۲ـ متغیر یا تغییر ناپذیر با زمان بودن

۱ـ خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان (LTI): $q(t) = C\,v(t)$ ولت

کولن (کولمب)

C: ظرفیت خازن (فاراد) $1F = 1\frac{C}{V}$



$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\big(C\,v(t)\big) = C\frac{dv}{dt} \qquad i(t) = C\frac{dv}{dt}$$

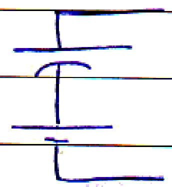
$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \rightarrow dv = \frac{1}{C}i(t)\,dt \rightarrow \int_{t_0}^{t} \Rightarrow v(t) - v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt$$

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\lambda)\,d\lambda$$

اگر $t_0 = 0$, $V(0) \triangleq V_0$:

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\lambda)\,d(\lambda)$$

مدل سازی یک خازن با بار اولیه:



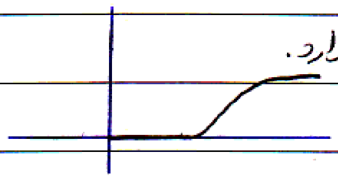
نکات مهم:

۱ـ خازن در مقابل جریان DC مثل مدار باز عمل می‌کند.

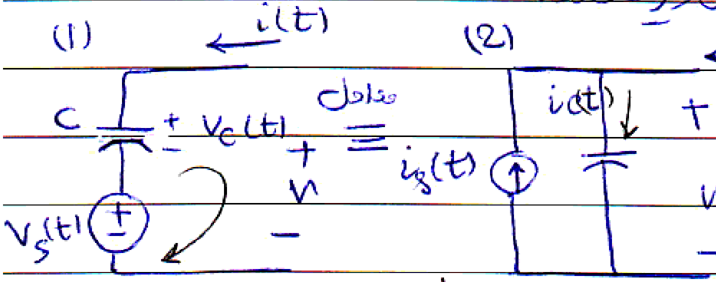
جریان DC = جریان مستقیم

۲- ولتاژ خازن پرش ندارد مگر اینکه جریان آن ضربه داشته باشد. $\delta(t)$

$$v(t^-) = v(t^+)$$



۳- برای یک خازن LTI با ولتاژ اولیه صفر مدارهای زیر معادلند:



$$i_s(t) = C\,\frac{dv_s(t)}{dt}$$

$$(1):\ -v_s(t) - v_c(t) + v(t) = 0$$

$$v(t) = v_s(t) + v_c(t)$$

$$(1):\ v(t) = v_s(t) + \frac{1}{c}\int_0^t i(t)\,dt$$

$$(2):\ KCL:\ i(t) + i_s(t) = i_c(t)$$

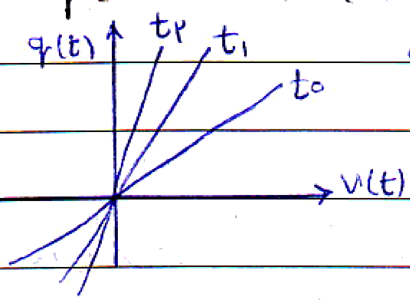
$$i(t) = C\,\frac{dv_s(t)}{dt} + i_s(t) = C\,\frac{dv_c}{dt} \xrightarrow{\int c} v_s(t) + \int i_s(t)\,dt =$$

$v_s = v_c = v$

$$c\,(v_c(t) - v_c(0)) \Rightarrow v_c(t) = v_s(t) + \frac{1}{c}\int i_s(t)\,dt$$

خازن خطی تغییرپذیر با زمان:

$$q(t) = c(t)\,v(t)$$



$C(t)$ تابع مشخصی از زمان

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\big(c(t)\,v(t)\big)$$

$$i(t) = c(t)\,\frac{dv}{dt} + v(t)\,\frac{dc}{dt}$$

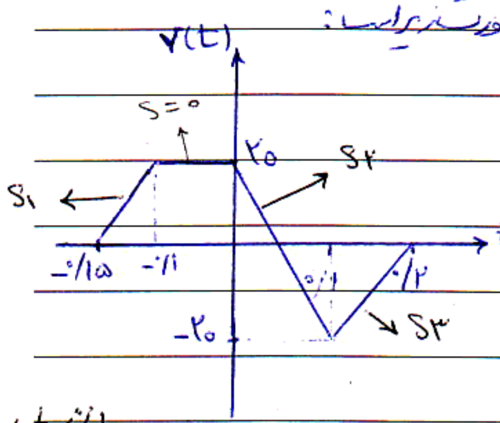
توابع غیرخطی : $q(t)=f\left(v(t),t\right)$

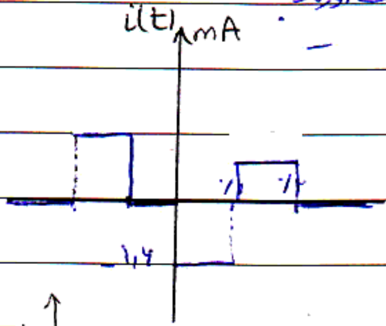
اگر t به صورت صریح وجود داشت تغییرپذیر با زمان، در غیر این صورت ← غیرخطی

مثال) برای یک خازن $C=4\mu F$ ولتاژ بر حسب زمان به صورت زیر است:

الف) تغییر جریان

ب) منحنی توان خازن را بدست آورید؟





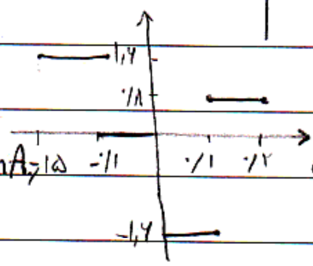
$$i(t)=C\frac{dv}{dt}$$

$$v(t)=S_1t+\alpha$$

$$\frac{dv}{dt}=S_1 \rightarrow \text{شیب}$$

$0<t<0.1$

$$\frac{dv}{dt}=S_2=\frac{-40}{0.1}=-400$$



$$\text{شیب } S_1=\frac{20}{0.05}=400$$

$$i=-400\times4\times10^{-6}=-1.6\,mA$$

$$CS_1=400\times4\times10^{-6}=1600\times10^{-6}=1.6\,mA$$

سطح آسیر

$$\frac{dv}{dt}=S_3=\frac{20}{0.1}=200$$

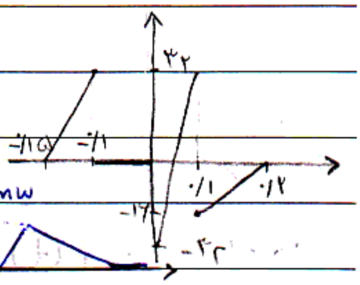
ب) منحنی توان :

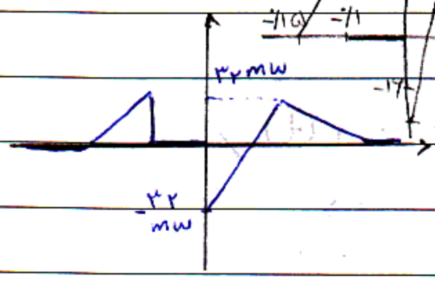
$$i=200\times4\times10^{-6}=800\times10^{-6}=0.8\,mA \qquad p(t)=v(t)\,i(t)$$

$-0.15<t<-0.1 \rightarrow i_1=1.6\,mA \begin{cases} V_2=20 & P_2=32 \\ V_1=0 & P_1=0 \end{cases}$

$0<t<0.1 \rightarrow i_2=-1.6\,mA \begin{cases} V_2=-20 & P_2=32 \\ V_1=20 & P_1=-32 \end{cases}$

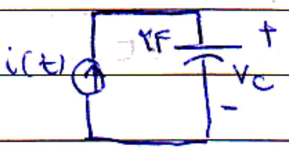
$0.1<t<0.2 \rightarrow i_3=0.8 \begin{cases} V_2=0 & P_2=0 \\ V_1=-20 & P_1=-16 \end{cases}$



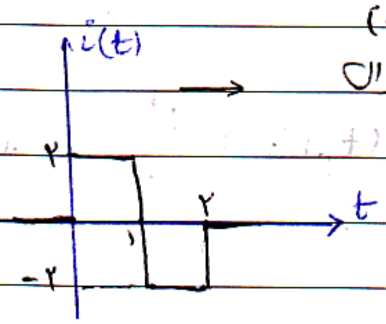


مثال)

صورت سوال



$$v_C(0^-)=-\frac{1}{2}\,V$$



$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\lambda)\,d\lambda$$

$$t_0 = 0 \longrightarrow v_C(t) = -\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t i(\lambda)\,d\lambda$$

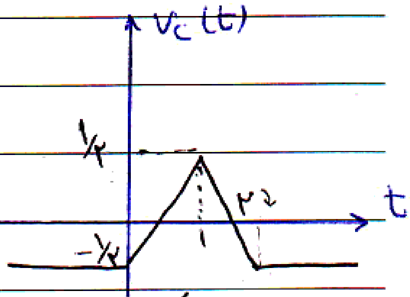
$$\text{if } 0 < t < 1 \quad v_C(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t 2\,d\lambda = t - \tfrac{1}{2}$$

$$v_C(1^-) = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$1 < t < 2 \quad v_C(t) = v_C(1) + \frac{1}{2}\int_1^t i(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^t (-2)\,d\lambda = \tfrac{3}{2} - t$$

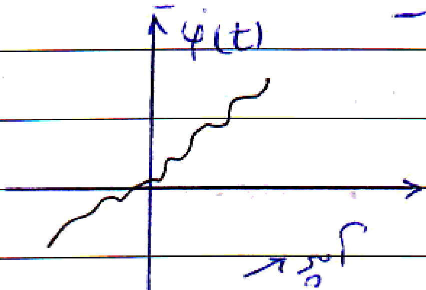
$$v_C(2) = \tfrac{3}{2} - 2 = -\tfrac{1}{2}$$

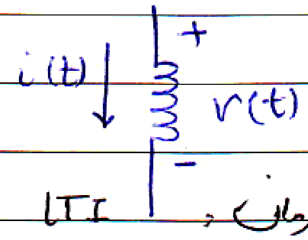
$$t > 2 \longrightarrow v_C(t) = v_C(2) + \frac{1}{2}\int_2^t (0)\,d\lambda = -\tfrac{1}{2}$$



سلف (القائی) :

تعریف : سلف عنصری است دوپایانه که رابطه بین شار مغناطیسی $\varphi(t)$ و جریان گذرنده $i(t)$ در هر لحظه از زمان در صفحه φ – i تشکیل یک منحنی می‌دهند





$$v(t) = \frac{d\varphi}{dt}$$

سلف خطی تغییرناپذیر با زمان ،

$$\varphi(t) = L\, i(t)$$

آمپر

واحد شار : وبر wb

اندوکتانس

واحد H هانری

$$1\,H \triangleq 1\,\frac{wb}{A}$$

$$v(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\big(L\, i(t)\big) = \frac{L\, d(i(t))}{dt} \qquad v(t) = L\,\frac{d(i(t))}{dt}$$

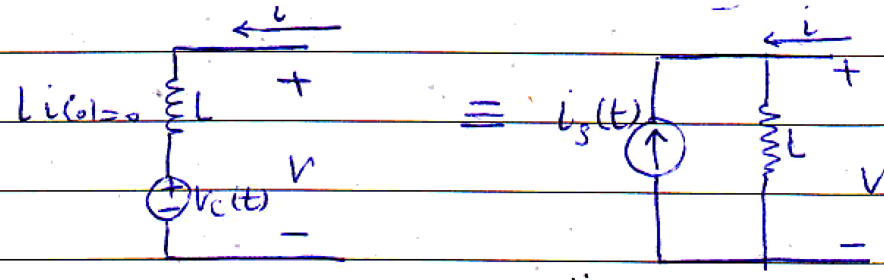
$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

خواص سلف LTI :

۱ـ اگر جریان سلف dc باشد ← سلف مانند اتصال کوتاه عمل می‌کند

۲ـ جریان سلف نمی‌تواند جهش داشته باشد مگر اینکه ولتاژ دارای ضربه باشد $Li(t^-)=Li(t^+)$

۳ـ برای یک سلف با $i_L(0)=0$ مدارهای زیر معادلند :



$$V_s(t)=L\frac{di_s(t)}{dt}$$

سلف خطی تغییرپذیر با زمان :

$$\varphi(t)=L(t)\,i(t)$$

$$v(t)=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d}{dt}\big(L(t)\,i(t)\big)=L(t)\frac{di(t)}{dt}+i(t)\frac{dL(t)}{dt}\longrightarrow v(t)=L(t)\frac{di(t)}{dt}+i(t)\frac{dL(t)}{dt}$$

سلف‌های غیرخطی :

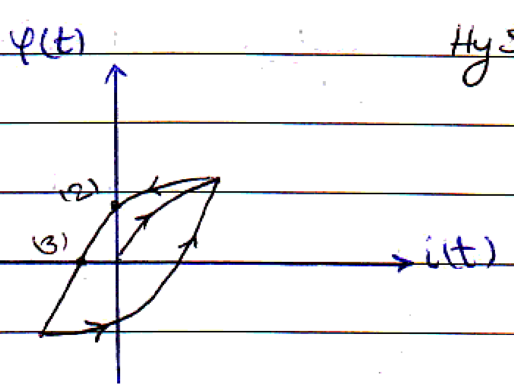
غیرخطی

$$\varphi(t)=f(i(t),t)$$

اگر t به صورت صریح وجود داشته باشد ← تغییرپذیر با زمان

" " " نداشته باشد ← تغییرناپذیر با زمان

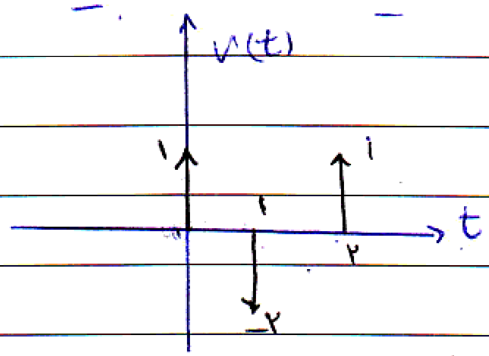
خاصیت هیسترزیس : Hysteresis



نقطه (۲) : شار پسماند

نقطه (۳) : جریان نیروی الزامی

مثال) یک سلف با القاء تنش $L=2H$ ، $i(t)=2A$ ولتاژ زیر اعمال می‌شود. منحنی جریان سلف را بدست آورید؟



$$i(t)=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\lambda)\,d\lambda$$

$$t_0=0 \longrightarrow i(t)=2+\frac{1}{2}\int_{0}^{t} v(\lambda)\,d\lambda$$

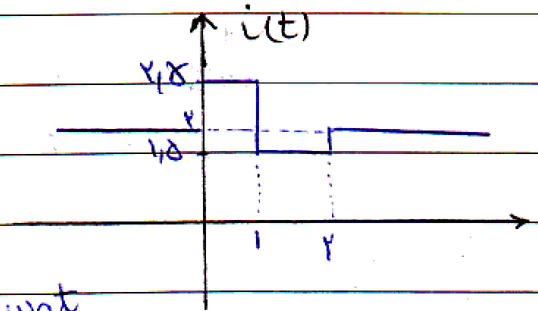
$$0^-<t<1^+ \quad i(t)=2+\frac{1}{2}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)+\frac{1}{2}\int_{0^+}^{t}(0)\,dt=2+\frac{1}{2}=2.5$$

$1^-<t<2^-$

$$i(t)=i(1^-)+\frac{1}{2}\int_{1^-}^{2^-}v(\lambda)\,d\lambda=2.5+\frac{1}{2}\int_{1^-}^{1^+}-2\,\delta(t-1)\,dt+\frac{1}{2}\int_{1^+}^{t}(0)\,d\lambda=2.5-1=1.5$$

$$t>2^- \quad i(2^-)=1.5 \quad i(t)=i(2^-)+\frac{1}{2}\int_{2^-}^{t}v(\lambda)\,d\lambda=$$

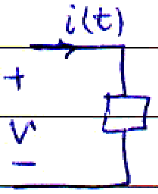
$$1.5+\frac{1}{2}\int_{2^-}^{2^+}\delta(\lambda-2)\,d\lambda+\frac{1}{2}\int_{2^+}^{t}(0)\,d\lambda$$



انرژی و توان ـ [illegible]؟

wat

$p(t)=v(t)\,i(t)$



جریان از سر مثبت شروع به حرکت کرده باشد داریم $p(t)=v(t)\,i(t)$

$P(t)$ توان لحظه‌ای

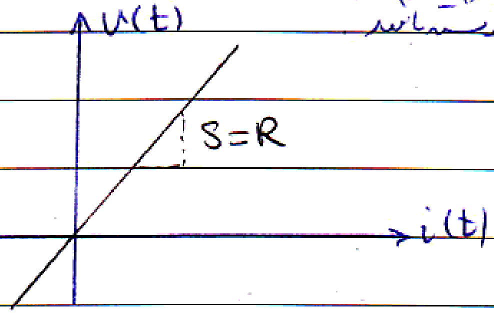
وقتی از سر منفی حرکت کرده داریم: $p(t)=-v(t)\,i(t)$

انرژی از $w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\lambda)\, d\lambda$

t تا t_0

اکتیو: عنصری است که امکان تحویل توان به مدار را داشته باشد.

پسیو: " " " " " نداشته باشد.



$$\begin{cases} p(t) = v(t)\, i(t) \\ v(t) = R\, i(t) \end{cases} \Longrightarrow p(t) = R\, i^2(t)$$

یا

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} > 0$$ مقاومت عنصر passive

ممکن است غیرخطی باشد.

خازن، $v = f(q)$ $\qquad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ $\qquad p(t) = v(t)\, i(t)$

$$p(t) = f(q)\frac{dq}{dt} \qquad w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} f(q)\, dq$$

برای خازن LTI: $\quad q = cv \qquad f(q) = \frac{q}{c}$

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \frac{q}{c}\, dq = \frac{1}{2c}\left(q^2(t) - q^2(t_0)\right)$$

فرض $q(0) = 0$ ، $t_0 = 0$ $\qquad w(0, t) = w(t) = \frac{1}{2c} q^2(t) = \frac{1}{2} c v^2(t)$

سلف، $i = f(\varphi)$ $\qquad p(t) = v(t)\, i(t) = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) i(t) =$

ممکن است غیرخطی ...

$$f(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} \Longrightarrow p(t) = f(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}$$

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} f(\varphi)\, d\varphi$$

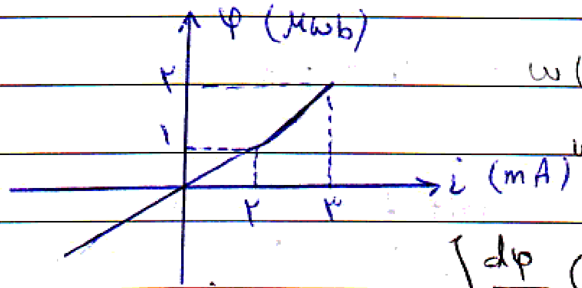
برای یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان: $v(t)=L\frac{di}{dt}$

$\varphi(t)=Li(t)$ $\quad i(t)=\frac{\varphi(t)}{L}\longrightarrow f(\varphi)=\frac{\varphi(t)}{L}$

$$w(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}\frac{\varphi(t)}{L}\,d\varphi=\frac{1}{2L}\left(\varphi^2(t)-\varphi^2(t_0)\right)$$

$w(t)=\frac{1}{2L}\varphi^2(t)=\frac{1}{2}Li^2(t)$ $\quad \varphi(0)=0\longrightarrow t_0=0$

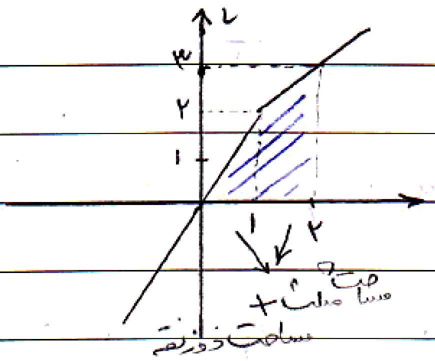
مثال: مشخصه یک سلف غیرخطی تغییرناپذیر با زمان به صورت شکل زیر است. انرژی ذخیره شده در سلف از لحظه‌ای که $i=0$ تا $i=3mA$ است را بدست آورید.



$w(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}p(t)dt=\int_{t_0}^{t}f(\varphi)d\varphi$

$w(t)=\int p(t)dt=\int v(t)\,i(t)\,dt=$

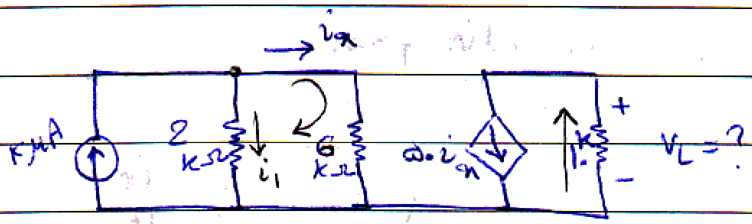
$\int\frac{d\varphi}{dt}(i(t))dt=\int_{t_0}^{t}i(t)\,d\varphi=3.5$

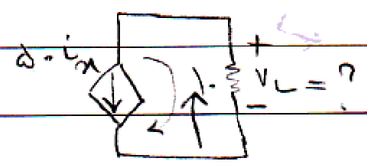


$w(t)=\int_0^2 f(\varphi)d\varphi=3.5\times10^{-9}$

$\varphi<1$ $\quad i(\varphi)=2\varphi$ $\quad i(\varphi)=\varphi+1$ $\quad 1<\varphi<2$

مثال: ولتاژ روی سلف $V_L=?$





$-V_L-50i_x\times10=0$

$-2i_1+6i_x=0\longrightarrow i_1=3i_x$

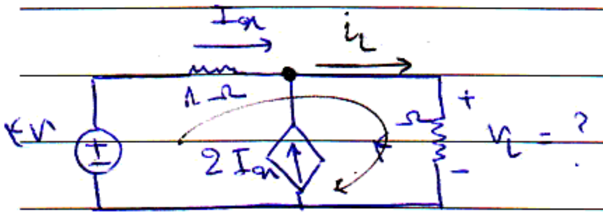
$-V_L=50i_x\times10$

KCL: $4=i_1+i_x=4i_x\longrightarrow i_x=1\ \mu A$

$V_L=-50i_x\times10$

$V_L = (-50 \cdot i_{x})10^{k} = -50 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^{3} = -0/5\,V$

مثال ۴)

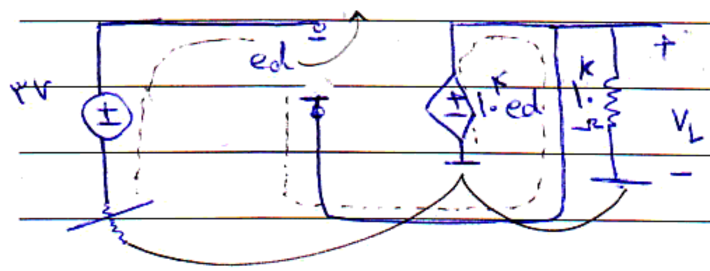


$KCL: \; I_x + 2I_x - i_L = 0 \longrightarrow i_L = 3 i_x$

$KVL: \; -4 + 8I_x + 4i_L = 0$

$-4 + 8I_x + 12 I_x = 0 \longrightarrow I_x = 1/5 \qquad V_L = 4 i_L = 12 I_x = 12 \times \frac{1}{5} = 2/4$

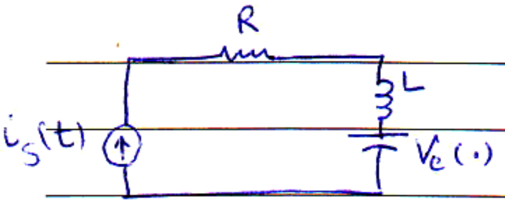
مثال ۵)

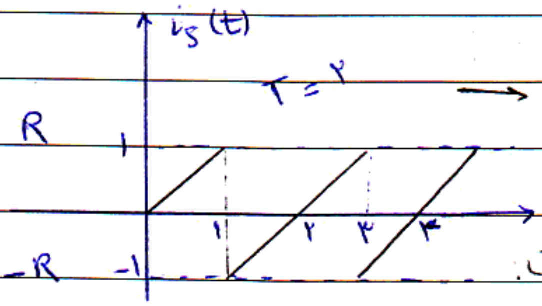


$KVL: \; -3 - e_d + 10^{4} e_d = 0 \qquad (10^{4} - 1)e_d = 3 \longrightarrow e_d \simeq 10^{-4} \times 3$

$V_L = 10^{4} e_d = 10^{4} \times 3 \times 10^{-4} \simeq 3\,V$

مثال ۶) اگر $i_s(t)$ مطابق شکل زیر تغییر کند، ولتاژهای دو سر سلف و مقاومت و خازن را بدست آورید و رسم کنید.





$T = 2 \longrightarrow$ صورت سوال

شیب دارد.

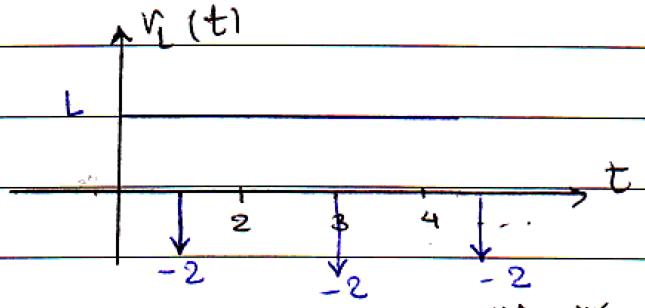
تناوب آن ۲ است.

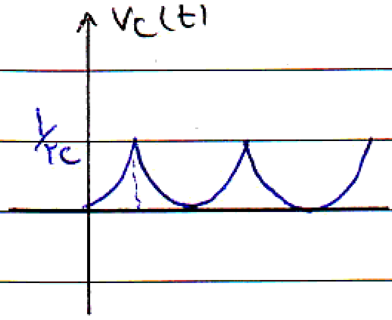
$V_R(t) = R i_S(t) \qquad i_S(t) = T$

$0 < T < 1 \qquad I(t) = T$

$V_R(T) = RT$

$V_L = L \frac{di_S}{dt}$



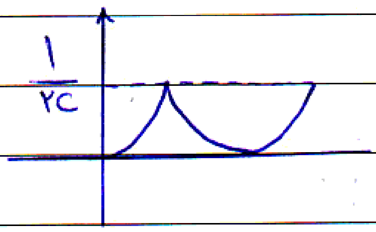


تمرین : ۵-۶-۹-۱۱-۱۲-۱۵-۱۹-۲۴-۲۸

$$v_c(t) = v_c(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_s(\lambda)\, d\lambda$$

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_s(\lambda)\, d\lambda \Rightarrow 0<t<1 \longrightarrow v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} \lambda\, d\lambda = \frac{t^2}{2C}$$

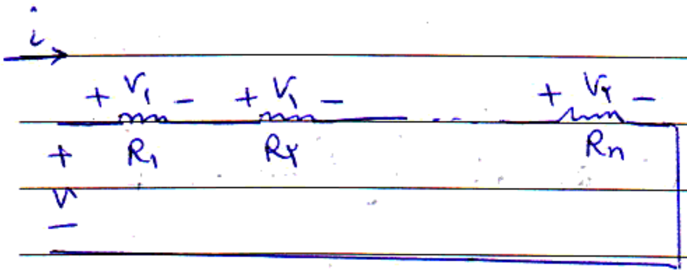
$$1<t<2 \longrightarrow v_c(t) = v_c(1) + \frac{1}{C}\int_{1}^{t} i_s(t)\, d\lambda$$



فصل سوم: مدارهای ساده

مقاومت‌ها:

ترکیب سری مقاومت‌ها یا مقاومت‌های سری:

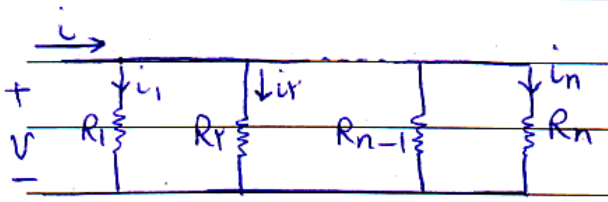


$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$v = R_1 i + R_2 i + \dots + R_n i$$

$$\frac{v}{i} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \qquad R_{eq} = \frac{v}{i} = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

مقاومت‌های موازی:



$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \dots + \frac{v}{R_n} \longrightarrow i = v\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{i}{v} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \Rightarrow R_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1} \frac{1}{R_i}}$$

خازن:

برای خازن‌های موازی: $C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$

برای خازن‌های سری: $C_{eq} = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$

فصل دوم مدار

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = x(0) \qquad t=0$$

ـه

$$I = \int_{-2}^{4} (t^3+4)\left[\delta(t) + 4\delta(t-2)\right] dt =$$

$$\int_{-2}^{4} (t^3+4)\,\delta(t)\,dt + \int_{-2}^{4} 4(t^3+4)\,\delta(t-2)\,dt = (t^3+4)\Big|_{t=0} + 4(t^3+4)\Big|_{t=2}$$

توجه داریم $t=0$ و $t=2$ که صفرهای آرگومان توابع دلتا هستند در محدوده انتگرال گیری معین قرار دارند لذا داریم:

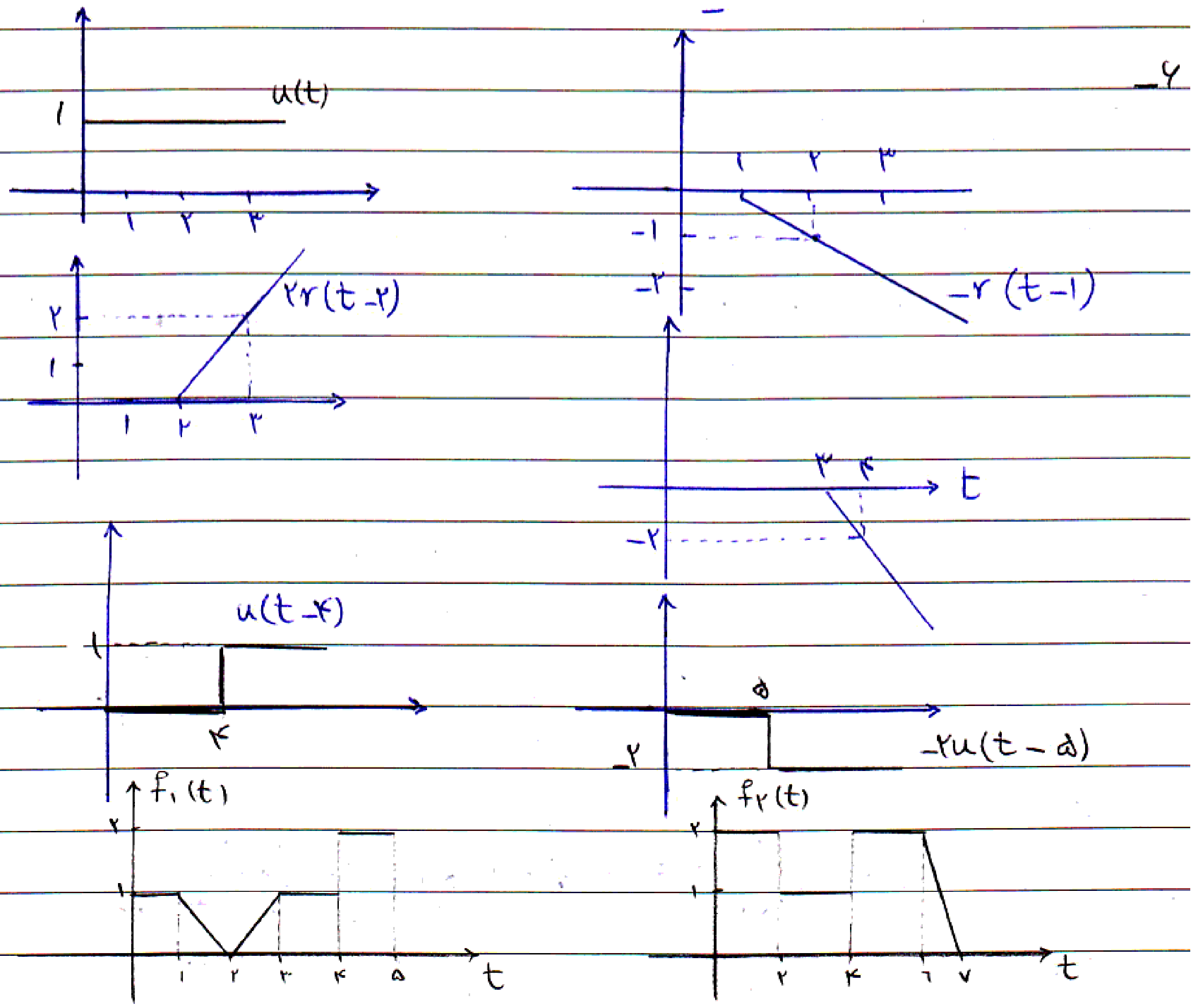
$$I = \left((0)^3+4\right) + 4\left(2^3+4\right) = 52$$

$$I=\int_{-3}^{4} t^2\left[\delta(t)+\delta(t+2/5)+\delta(t-5)\right]dt = \int_{-3}^{4} t^2\delta(t)\,dt + \int_{-3}^{4} t^2\delta(t+2/5)\,dt + \int_{-3}^{4} t^2\delta(t-5)\,dt = t^2\Big|_{t=0} + t^2\Big|_{t=-2/5} + \cancel{t^2\Big|_{t=5}}$$

عدد $t=5$ در عبارت سوم از حاصل جمع درون در محدوده انتگرال گیری نبوده لذا عبارت سوم از جملات برون محدوده صفر خواهد بود. بنابراین داریم:

$$I = 0^2 + (-2/5)^2 = 6/25$$

۶ـ

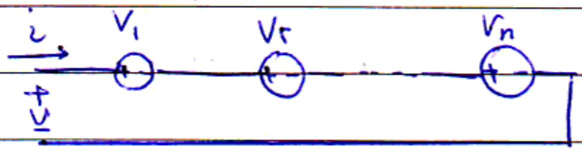


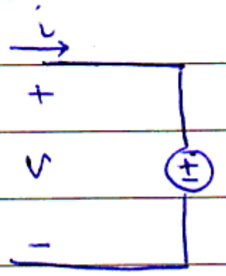
مسئله ۲:

ترکیب سری: $L_{eq} = \sum_{i=1}^{N} L_i$

ترکیب موازی: $L_{eq} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{L_i}}$

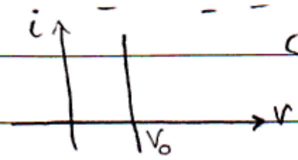
ترکیب سری منابع ولتاژ ایده‌آل:





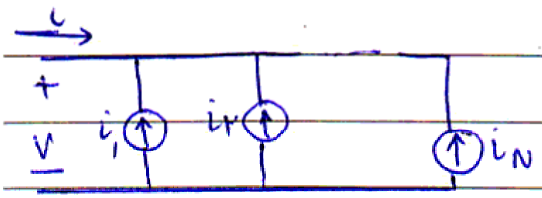
$V_{eq} = \sum_{i=1}^{N} v_i$

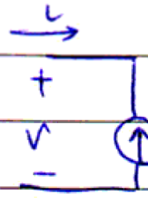
منبع ولتاژ ایده‌آل یک دوسر است که الزاماً یک ولتاژ مشخص
با کاراکتریستیک نمودار آن



* منابع ولتاژ ایده‌آل را زمانی می‌توان به صورت موازی بست که مقدار آن‌ها با هم برابر باشد.

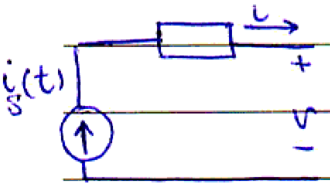
ترکیب موازی منابع جریان ایده‌آل:

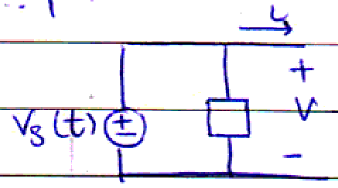




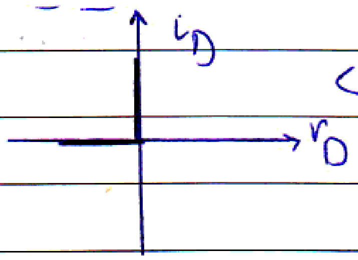
$i_{eq} = \sum_{i=1}^{N} i_i$

* منابع جریان ایده‌آل را زمانی می‌توان سری بست که مقدار آن‌ها با هم برابر باشد.

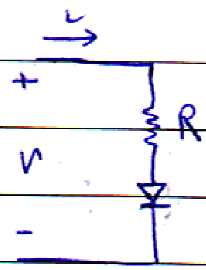




مثال) مشخصه‌ی دیود ایده‌آل مطابق شکل داده شده. در این صورت مشخصه‌ی $I - V$ دیود ایده‌آل

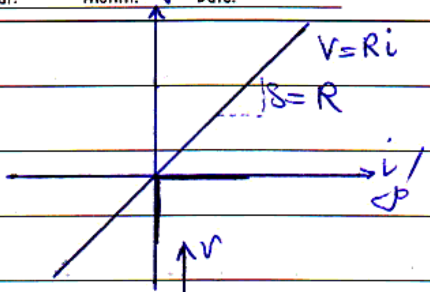


مشخصه‌ی دیود ایده‌آل

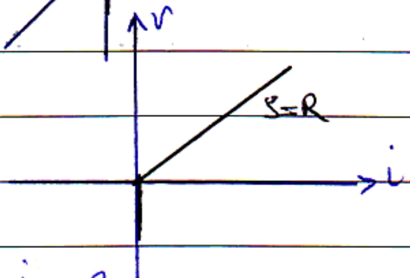


نمودار را بدست آورید

Subject:
Year. Month. Date.

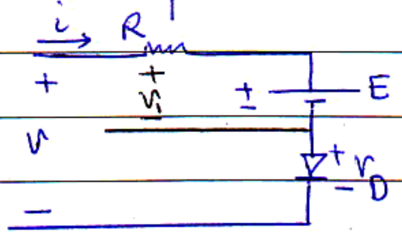


حل:

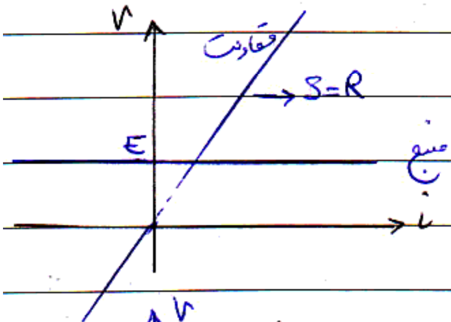


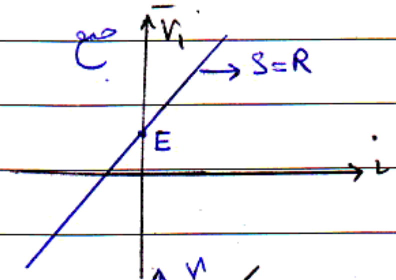
دیود جریان های منفی را حذف می کند بنابراین داریم:

مثال) مشخصه i - V ؟



حل: چون سری هستند جریانی که از آن ها می گذرد با هم برابر است.

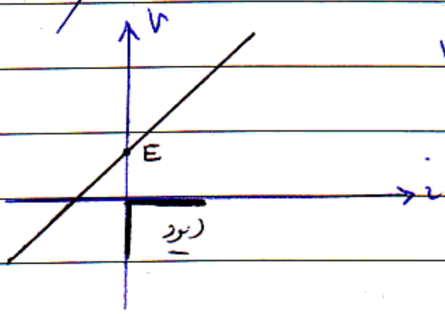




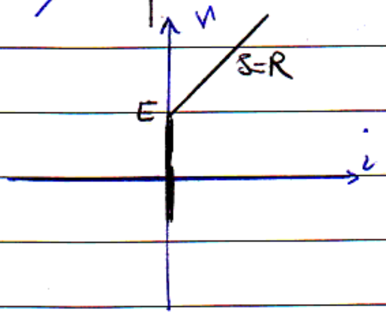
$V_1' = E$

$V_1' = Ri$

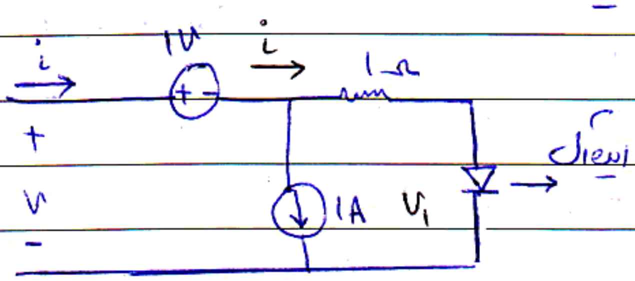
$V_1 = E + Ri$



جمع

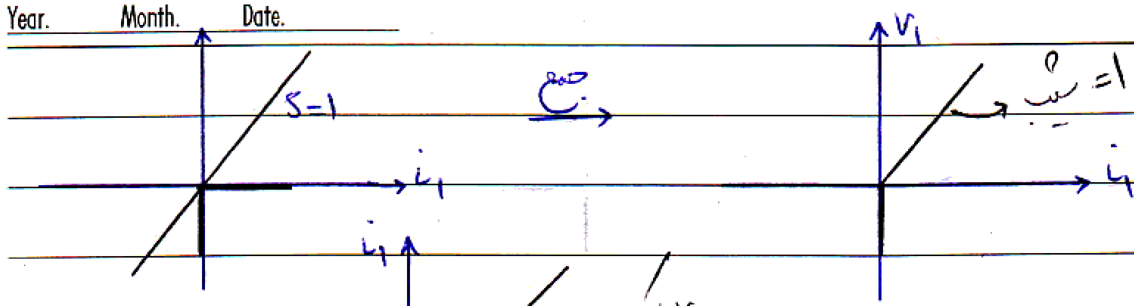


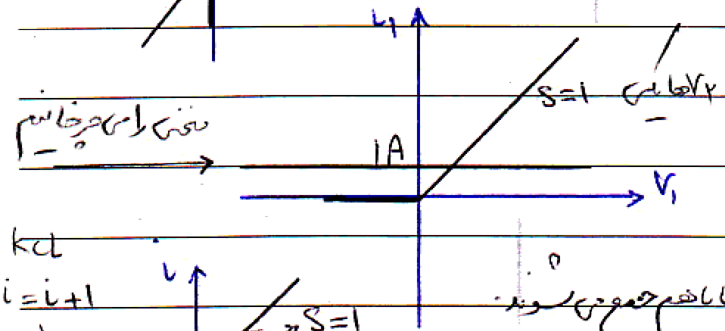
مثال) مشخصه V - i این مدار را به دست آورید؟ (دیود ایده آل است.)



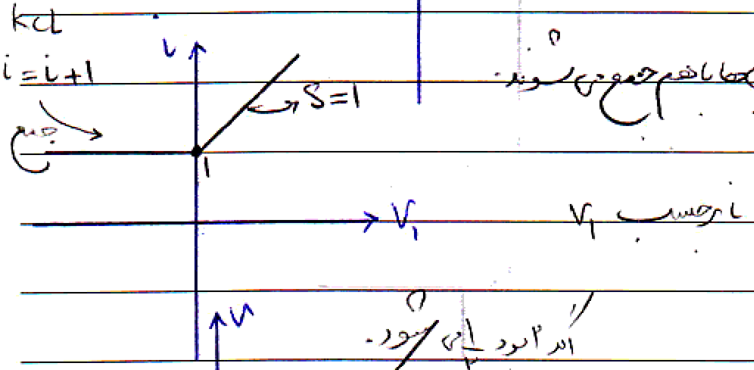
Year. Month. Date.

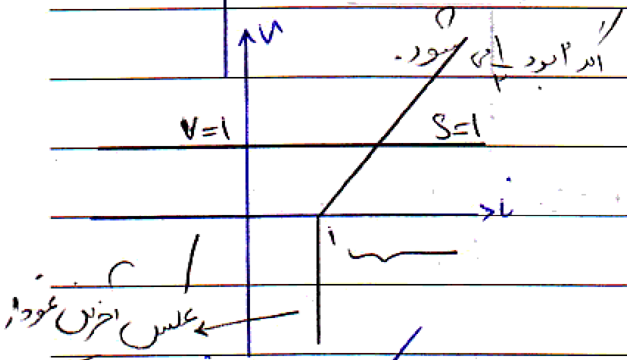
حل:

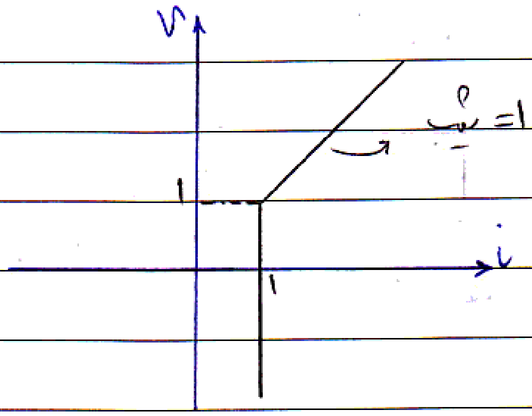


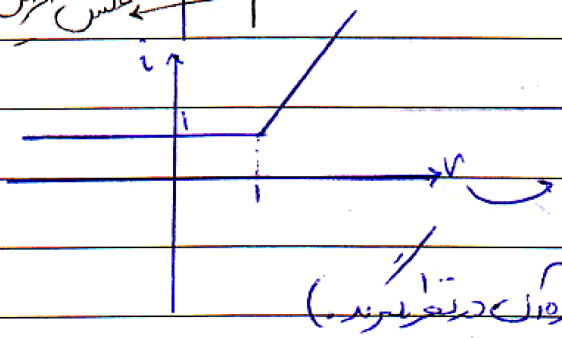


ولتاژهایی هستند موازی را ولتاژ می‌گیریم و جریان‌ها با هم جمع می‌شوند.



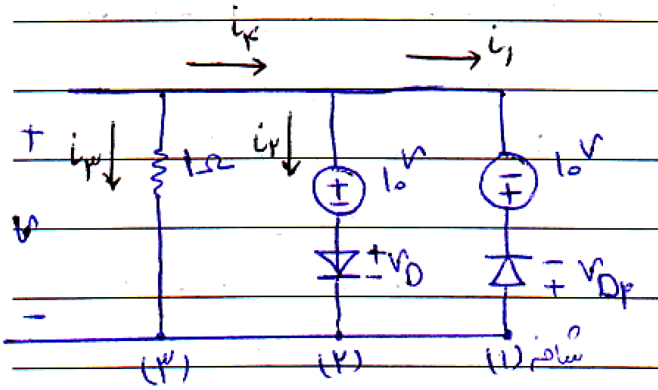




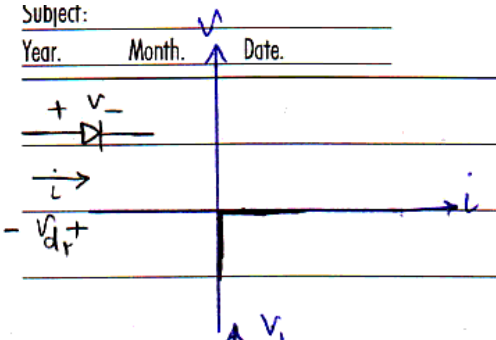


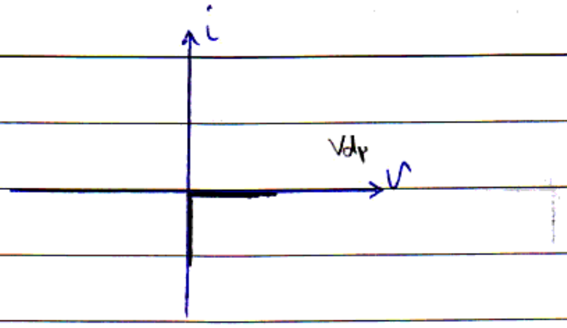
مشخصه $v - i$ مدار

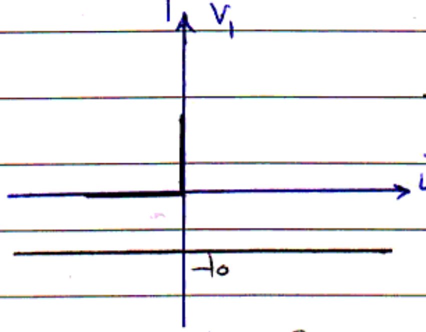
مثال) مشخصه $v - i$ مدار روبرو را رسم کنید. (دیودها را ایده‌آل در نظر بگیرید.)



حل :

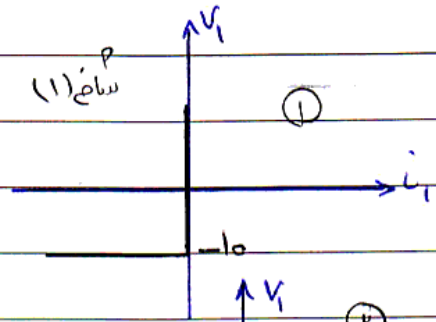


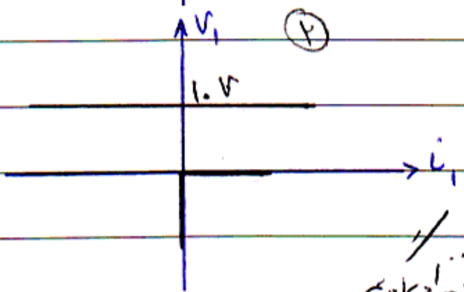




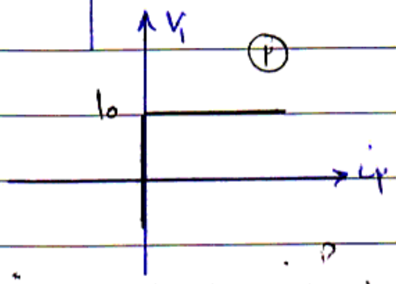
جمع

ساختار (۱)

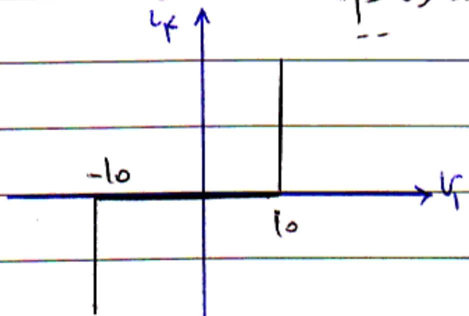


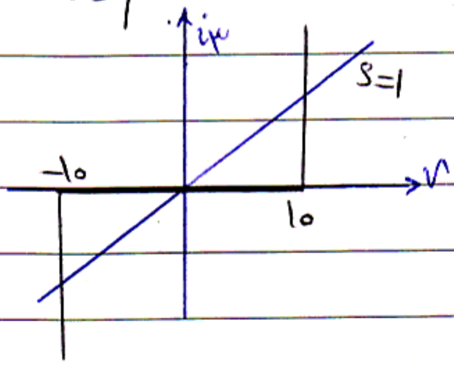


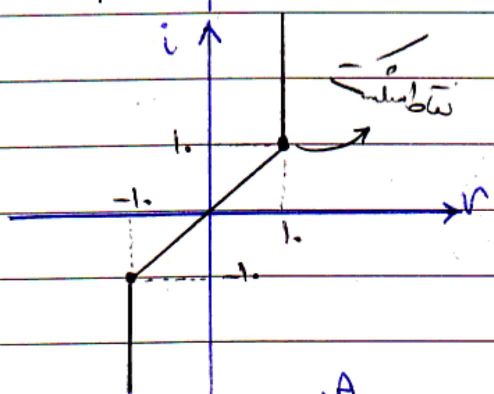
جمع



ساختار ۱ و ساختار ۲ باهم موازی اند. محور افقی را V در نظر میگیریم





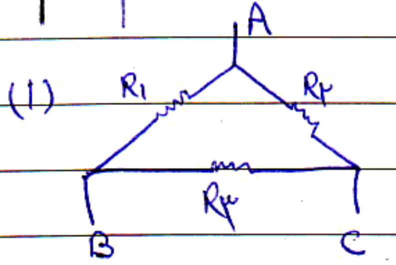


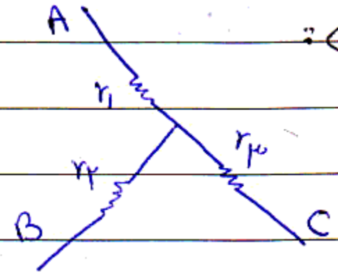
تعداد نقاط شکست در نمودارها معمولاً برابر با تعداد دیودهاست.

در اینجا ۲ نقطه‌ی شکست داریم = ۲ دیود

تبدیل ستاره و مثلث و برعکس :

(۱)





$$R_{AB}(1) = R_{AB}(2)$$

$$R_{AC}(1) = R_{AC}(2)$$

$$R_{BC}(1) = R_{BC}(2)$$

مثلث Δ → Y ستاره

$$r_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_3 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

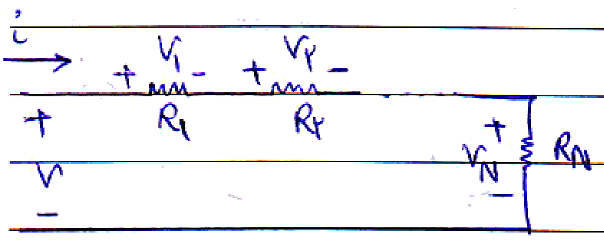
ستاره Y → Δ مثلث

$$R_1 = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1}$$

$$R_2 = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_2}$$

$$R_3 = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_3}$$

تقسیم ولتاژ و جریان:



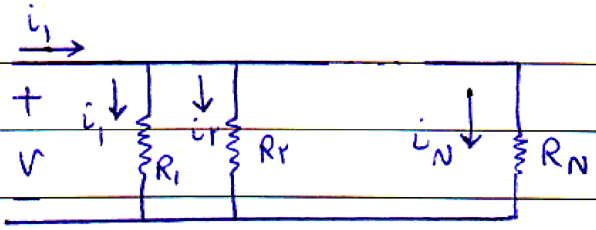
فرض کنید n مقاومت را سری بسته ایم. داریم:

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} V$$

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} V$$

$$\vdots$$

$$V_N = \frac{R_N}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} V$$



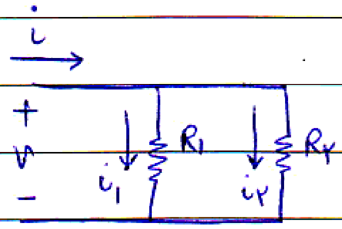
$$i_1 = \frac{G_1}{G_1+G_2+\cdots+G_N}\, i$$

$$i_2 = \frac{G_2}{G_1+G_2+\cdots+G_N}\, i$$

$$\vdots$$

$$i_N = \frac{G_N}{G_1+G_2+\cdots+G_N}\, i$$

در حالتیکه دو مقاومت داشته باشیم:



$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}\, i \\ i_2 = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}\, i \end{cases}$$

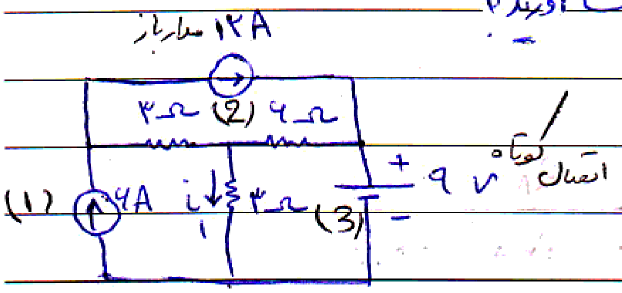
اصل جمع آثار (برهم نهی):

در یک مدار خطی که شامل چندین منبع ولتاژ و جریان مستقل است، پاسخ مدار برابر است با مجموع پاسخ‌های مدار به هریک از منابع مستقل، وقتی سایر منابع مستقل صفر شوند.

مدار خطی: مداری است که شامل اجزای خطی باشد مثل مقاومت‌ها، خازن خطی، سلف خطی، و خازن خطی و ...

صفر کردن منابع: اگر منبع ولتاژ باشد ← اتصال کوتاه
اگر منبع جریان باشد ← مدار باز

مثال) با استفاده از اصل جمع آثار، جریان i را بدست آورید.



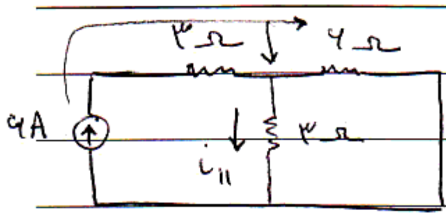
بسم الله الرحمن الرحیم

مدارهای الکتریکی ۱

(بخش دوم)

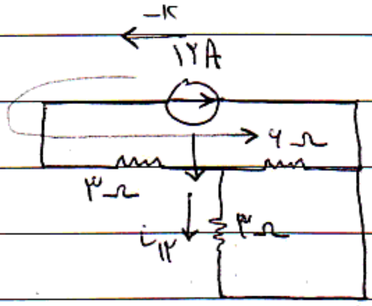
استاد عادلی

صفر بودن منبع ۲ و ۳



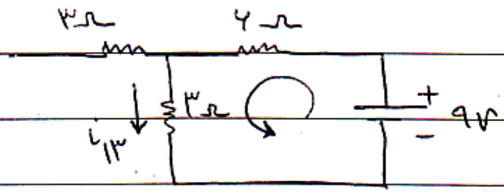
$$i_{11} = \frac{6}{9} \times 6^{A} = 4A$$

منبع (۱) و (۳) صفر



$$i_{12} = \frac{6}{3+6} \times (-12)^{A} = -8\ A$$

منبع (۱) و (۲) صفر

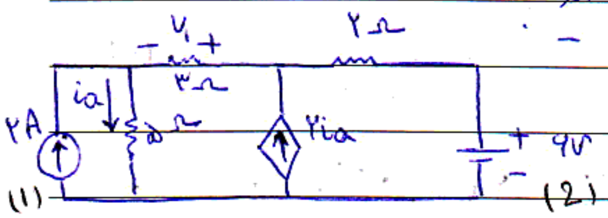


$$KVL: \ -9 + 6i_{13} + 3i_{13} = 0 \longrightarrow i_{13} = 1A$$

$$i_1 = i_{11} + i_{12} + i_{13} = 4 + (-8) + 1 = -3A$$

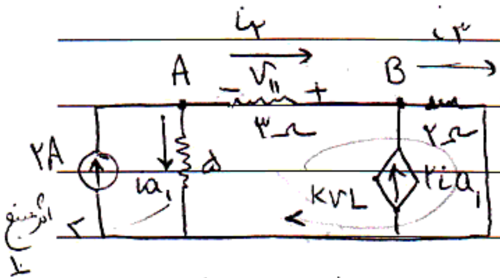
نکته: منابع وابسته را هیچ وقت برابر صفر نمی‌کنیم.

مثال) با استفاده از قضیه‌ی جمع آثار v_1 و i_a را بدست آورید؟



ملاحظه است چون منبع وابسته داریم

منبع (۲) را صفر می‌کنیم.



$$V_{11} = -3i_2$$

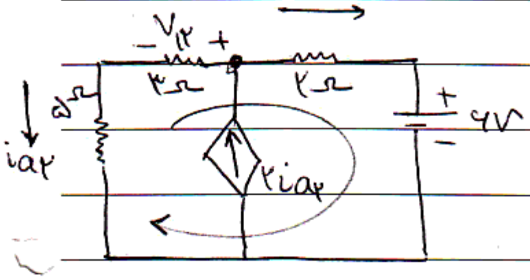
$$KCL\ (A): \ 2 = i_{a_1} + i_2$$

$$KCL\ (B): \ i_2 + 2i_{a_1} = i_3$$

$$KVL: \ -5i_{a_1} + 3i_2 + 2i_3 = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} V_{11} = -1 \\ i_{a_1} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Year. Month. Date.



منبع ۱ صفر

KCl : $i_{a2}+i_3=2i_{a2} \rightarrow i_3=i_{a2}$

KVL: $-5i_{a2}-3i_{a2}+2i_{a2}+6=0$

$i_{a2}=1A \qquad V_{12}=3V$

$$\begin{cases} i_a=i_{a1}+i_{a2}=\frac{8}{3}\,A \\ v_1=v_{11}+v_{12}=2V \end{cases}$$

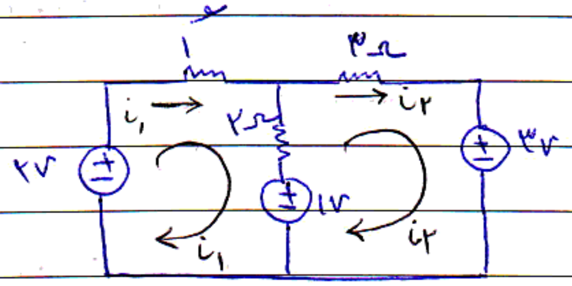
روش جریان خانه mesh

روش ولتاژ گره

روش تجزیه و تحلیل جریان خانه: برای هر خانه یک جریان در نظر می‌گیریم (n مش ← n جریان باید بدست آوریم.)

برای نوشتن KVL ، جهت خانه را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر می‌گیریم. اگر جریان در جهت خانه باشد آن را با علامت مثبت و اگر خلاف جهت خانه باشد آن را با علامت منفی در نظر می‌گیریم.

مثال ۱) ۲ مش داریم. ۲ جریان در نظر می‌گیریم.



KVL (1): $-2+i_1+2(i_1-i_2)+1=0$

KVL(2): $-1+2(i_2-i_1)+3i_2+3=0$

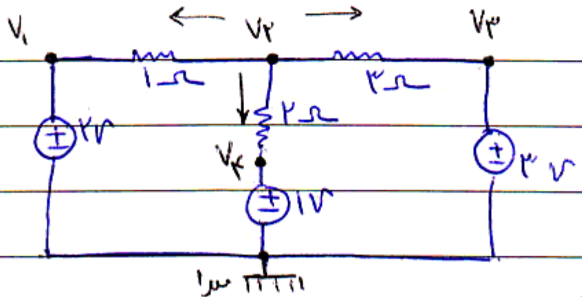
روش کرامر:

$$\begin{cases} 3i_1-2i_2=1 \\ -2i_1+5i_2=-2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$i_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{3}{13} \qquad i_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} & \end{vmatrix}}=\frac{-4}{13}$$

تجزیه و تحلیل ولتاژ گره : یک گره را زمین فرض می‌کنیم و ولتاژهای گره‌های دیگر را بدست می‌آوریم، در این صورت اگر n گره داشته باشیم (n−1) ولتاژ را محاسبه می‌کنیم.

مثال) تجزیه و تحلیل ولتاژ گره را برای این مدار حل کنید.

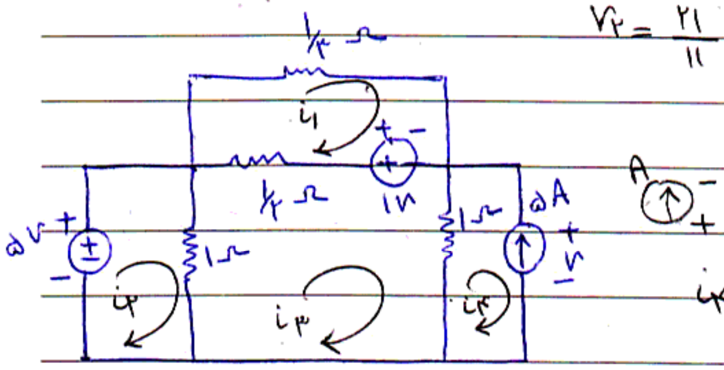


$V_1 = 2 \qquad V_4 = 1V \qquad V_3 = 3V$

$$KCL(2):\ \frac{V_2 - V_1}{1} + \frac{V_2 - V_4}{2} + \frac{V_2 - V_3}{3} = 0$$

$$V_2 = \frac{21}{11} V$$

مثال) تجزیه و تحلیل جریان حلقه مقدار V را بیابید.



$i_4 = -5A$ ۴ مش داریم.

$V = i_3 - i_4$

$-V + (i_4 - i_3) = 0$

$V = i_3 - i_4$

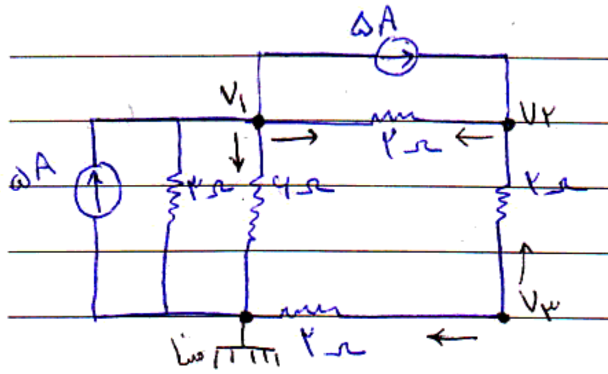
$$KVL(1):\ \frac{1}{3} i_1 - 1 + \frac{1}{2}(i_1 - i_3) = 0$$

$$KVL(2):\ -5 + (i_2 - i_3) = 0$$

$$KVL(3):\ (i_3 - i_2) + \frac{1}{2}(i_3 - i_1) + 1 + (i_3 - i_4) = 0 \quad (i_4 = -5)$$

$$i_1 = 1A \qquad i_2 = \frac{14}{3} A \qquad i_3 = \frac{-1}{3} A$$

مثال)



$$KCL(1):\ 5 = \frac{V_1}{3} + \frac{V_1}{6} + \frac{V_1 - V_2}{2} + 5$$

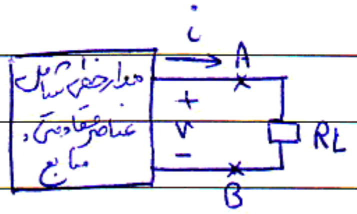
$$KCL(2):\ 5 = \frac{V_2 - V_1}{2} + \frac{V_2 - V_3}{2}$$

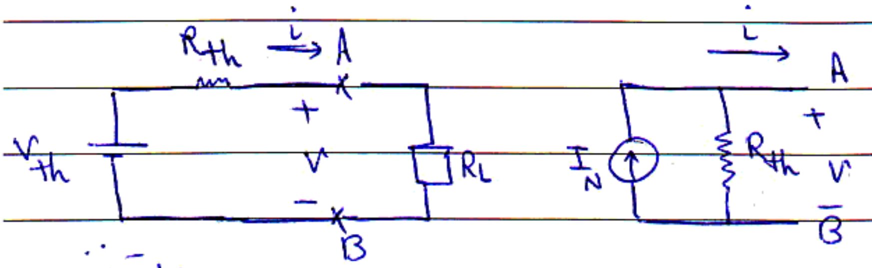
$$KCL(3):\ \frac{V_3 - V_2}{2} + \frac{V_3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow V_1 = 5V \qquad i_4 = \frac{V_1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\begin{cases} V_2 = 10V \\ V_3 = 5V \end{cases}$$

معادلهای تونن و نورتن:





معادل تونن

$$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}}$$

برای بدست آوردن V_{th} در دو سر A و B را مدار باز می‌کنیم، در این صورت (V_{OC} ولتاژ مدار باز)،

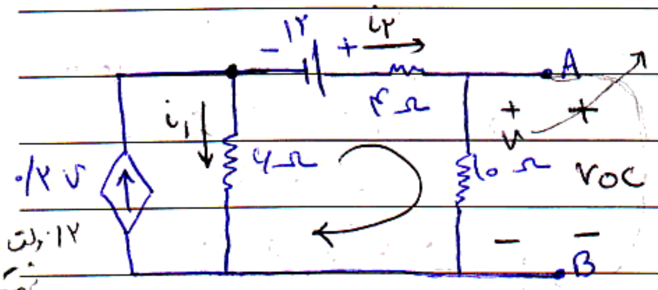
$$V_{OC}(AB) = V_{th}$$

برای بدست آوردن I_N در دو سر A و B را اتصال کوتاه می‌کنیم، در این صورت جریانی از این اتصال کوتاه می‌گذرد (I_{SC}) ؛ $I_{SC}(AB) = I_N$

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_N} = \frac{V_{OC}(AB)}{I_{SC}(AB)}$$

ولتاژ دو سر مقاومت ۱۰

مثال) معادل تونن و نورتن را از دو سر AB بدست آورید.



دو سر AB را مدار باز می‌کنیم :

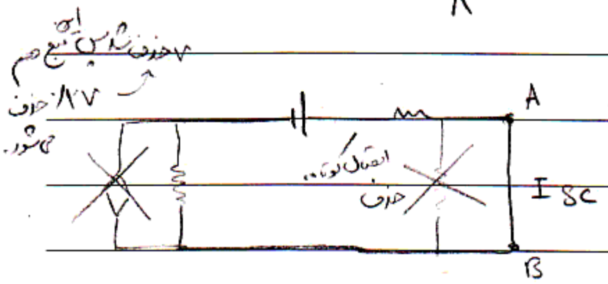
$$KCL:\ 0/2V = i_1 + i_2$$
$$\left.\begin{aligned} & \\ & i_2 = \frac{V}{10} = 0/1V \end{aligned}\right\} i_1 = 0/1V$$

$$KVL:\ -6i_1 - 12 + 4i_2 + 10i_2 = 0$$
$$8i_2 = 12 \rightarrow i_2 = \frac{12}{8}$$
$$V_{OC} = 10\,i_2 = \frac{120}{8} = 15V$$

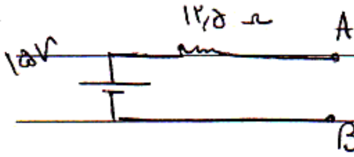
$$V_{th} = 15\ V$$

حال جریان $I_{SC} = I_N$

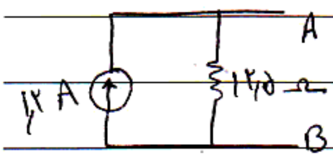
دو سر AB را اتصال کوتاه می‌کنیم.



$$KVL:\ \overset{-6I_{SC}}{(6I_{SC})} - 12 + 4I_{SC} = 0$$
$$I_{SC} = 1/2A$$
$$I_N = I_{SC} = 1/2\ A$$
$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_N} = \frac{15}{1/2} = 12/5\ \Omega$$



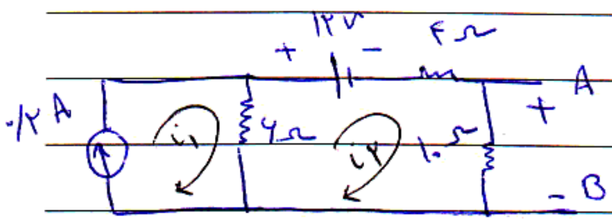
معادل تونن



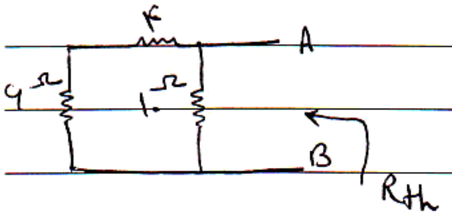
معادل نورتن

نکته : اگر در مدار منبع وابسته نداشته باشیم R_{th} را با صفر کردن منابع مستقل و محاسبه‌ی مقاومت معادل از دو سر مورد نظر حساب می‌کنیم.

مثال) مدار معادل تونن و نورتن را بدست آورید.



منبع وابسته نداریم



محاسبه‌ی R_{th} : منابع مستقل را صفر می‌کنیم

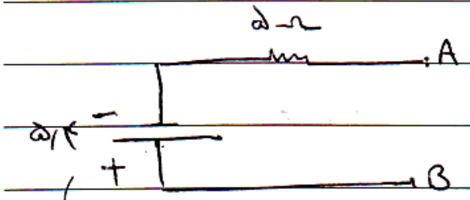
$R_{th} = 5\ \Omega$

جزء دوم: تحلیل جریان خانه : $KVL(2):\ 6(i_2-i_1)+12+4i_2+10i_2=0$ $\qquad i_1 = 0.2$

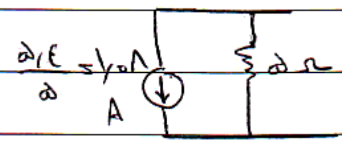
$$i_2 = \frac{-10.8}{20}$$

$$V_{AB(oc)} = 10\, i_2 = -5.4\,V$$

$$V_{th} = V_{AB(oc)} = -5.4\ V$$



چون ۵٫۴- است پس بالا منفی و پایین را مثبت می‌بریم.



تمرین سری سوم : ۲ ـ ۵ ـ ۹ (الف) ـ ۲۴ ـ ۳۲ ـ ۳۵

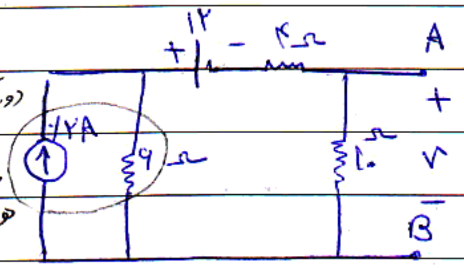
۴۰ ـ ۴۳ ـ ۴۴ ـ ۴۶ ـ ۵۴ ـ ۶۶ ـ ۸۹

۲ هفته‌ی دیگر

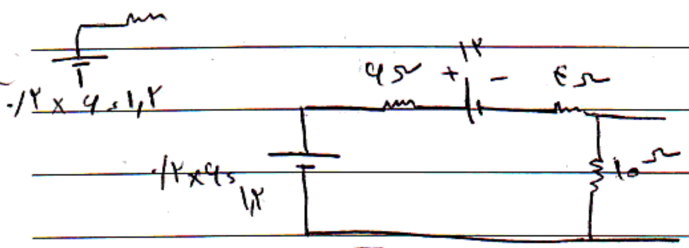
روش دوم روش تبدیل منابع :

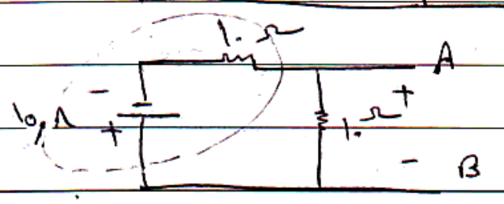
دو منبع موازی اند

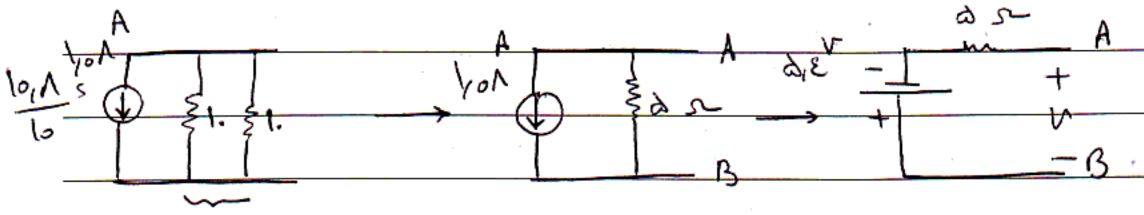
معادل هستند

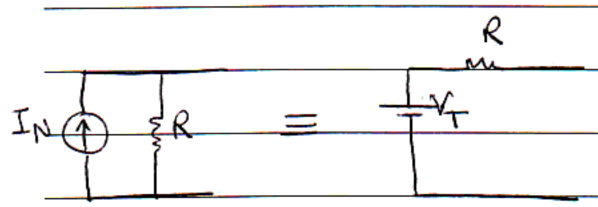


با تبدیل منابع معادل تونن کل مدار را بدست آورید





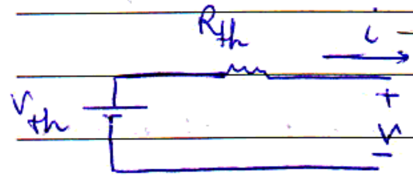




نورتن

$V_T = I_N R$ تونن

یک روش مفید: بدست آوردن مشخصه ی V-I دوسر مورد نظر: (همیشه می توان استفاده کرد.)

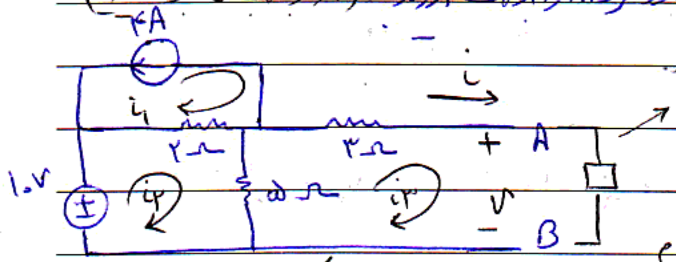


$i \rightarrow$ جریان خروجی

$$v = V_{th} - R_{th}\, i$$

اگر ولتاژ V دوسر مورد نظر را برحسب جریان خروجی آن نوشت از رابطه ی مذکور V_{th} و R_{th} بدست می آید

مثال) با استفاده از مشخصه ی V-I معادل تونن دوسر AB را بدست آورید؟ (V را برحسب i بنویسید)



مجهول [illegible] می شود.

عنصر دلخواه با جریان i

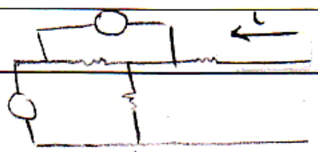
$$\begin{cases} i_1 = -4\,A \\ i_3 = i \end{cases}$$

چون هر دو از شاخه ی ۳Ω می گذرند

$$KVL(2):\ -10 + 2(i_2 - i_1) + 5(i_2 - i_3) = 0 \quad *$$

$$KVL(3):\ 5(i_3 - i_2) + 3(i_3 - i_1) + v = 0$$

$$*\quad i_2 = \frac{2 + 5i}{7}$$



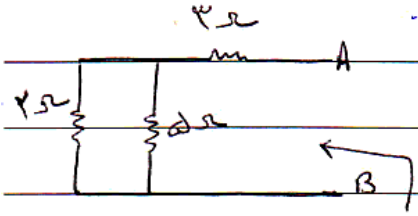
$\overleftarrow{i} \Rightarrow v = V_{th} + R_{th}\, i$

اگر داشتیم

$$5\left(i - \frac{2+5i}{7}\right) + 3(i+4) + V = 0 \longrightarrow V = \frac{-74}{7} - \frac{31}{7} i$$

$$V = V_{th} - R_{th} i \qquad V_{th} = \frac{-74}{7} \qquad R_{th} = \frac{-31}{7}$$

مثال) در شکل مقابل با صفر کردن منابع مستقل، R_{th} را به دست آورید؟

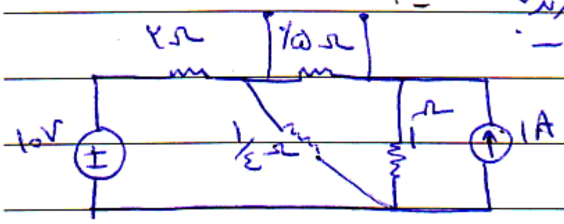


$$R_{th} = 2 \| 5 + 3 = \frac{10}{7} + 3 = \frac{31}{7}\ \Omega$$

تمرین) در همین مدار با مدار باز کردن دو سر AB، V_{th} را به دست آورید؟

(ترکیب تونن)

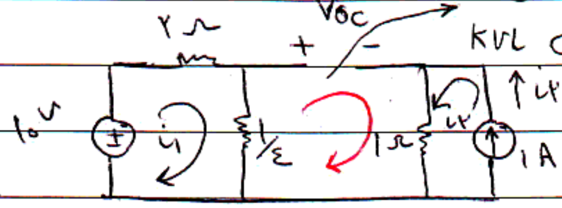
مثال) معادل تونن دو سر مقاومت ۰/۵ را به دست آورید؟



دو سر مدار را مدار باز می‌نمایم (برای محاسبه V_{th})

جریان در این شاخه صفر است

ولتاژ V_{oc} را به صورت ... پس KVL می‌نویسیم.

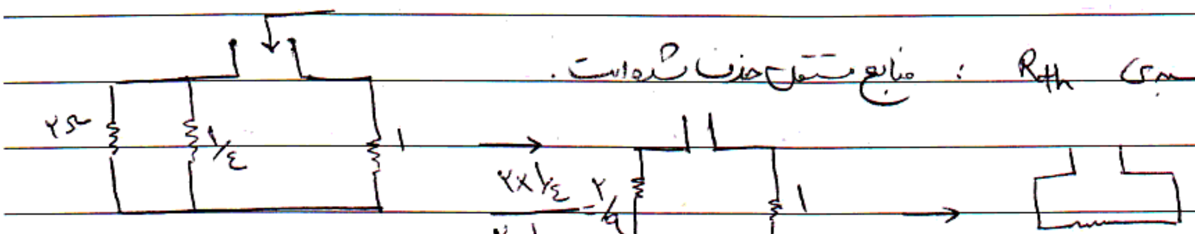


$i_2 = 1A$ یا $i_2 = -1A$

$$-10 + 2i_1 + \frac{1}{4} i_1 = 0 \rightarrow i_1 = \frac{40}{9} A$$

$$KVL: -\frac{1}{4} i_1 + V_{oc} + i_2 = 0 \longrightarrow V_{oc} = \frac{1}{4} \times \frac{40}{9} - 1 = \frac{1}{9} V \qquad V_{th} = \frac{1}{9} V$$

محاسبه R_{th}: منابع مستقل حذف شده است.

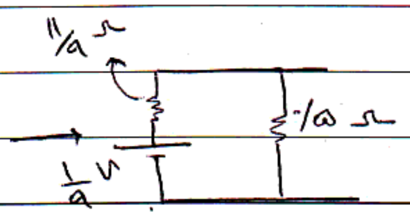


$$\frac{2 \times 1/4}{2 + 1/4} = \frac{2}{9}$$

(دو مقاومت سری)

$$1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}\ \Omega$$

$$R_{th} = \frac{11}{9}\ \Omega$$



تمرین) با تبدیل منابع، معادل تونن مثال قبل را بدست آورید؟

خلاصه: ۱) مدار باز کردن ← V_{th}

اتصال کوتاه ← I_N

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_N}$$

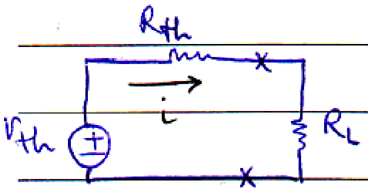
۲) تبدیل منابع

۳) بدست آوردن منحنی‌های V-I

۴) ترکیب کردن

قضیه انتقال توان:

در مدار زیر، اگر بخواهیم بیشترین توان به بار R_L تحویل داده شود باید: $R_L = R_{th}$ باشد.



اثبات:

$$i = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_L}$$

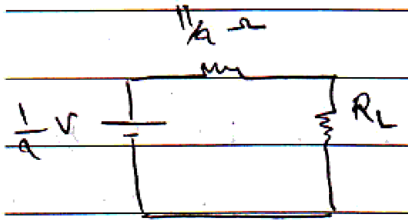
می‌خواهیم max شود پس مشتق می‌گیریم

$$P_L = R_L i^2 = V_{th}^2 \times \frac{R_L}{(R_L + R_{th})^2}$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = V_{th}^2 \times \frac{(R_L+R_{th})^2 - 2R_L(R_L+R_{th})}{(R_L+R_{th})^4}$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = V_{th}^2 \times \frac{R_L + R_{th} - 2R_L}{(R_L+R_{th})^3} = 0 \longrightarrow -R_L + R_{th} = 0 \Longrightarrow R_L = R_{th}$$

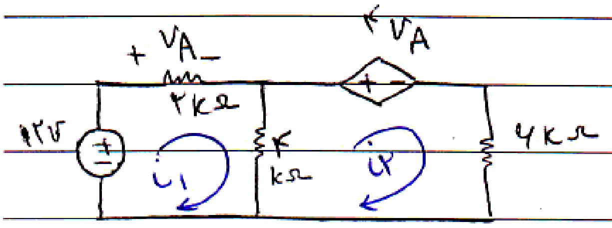
مثال) در مثال قبل مقاومت ۰/۵ Ω را با R_L تعویض می‌کنیم. R_L چقدر باشد تا بیشترین توان به آن تحویل داده شود؟



$$R_L = \frac{11}{9}\,\Omega$$

تمرین دوره‌ای از فصل سوم:

۱) در مدار زیر V_A را به دست آورید؟



تجزیه تحلیل جریان خانه

معمولاً اگر تعداد منابع ولتاژ بیشتر باشد از KVL استفاده می‌کنیم و اگر تعداد منابع جریان بیشتر باشد از KCL استفاده می‌کنیم

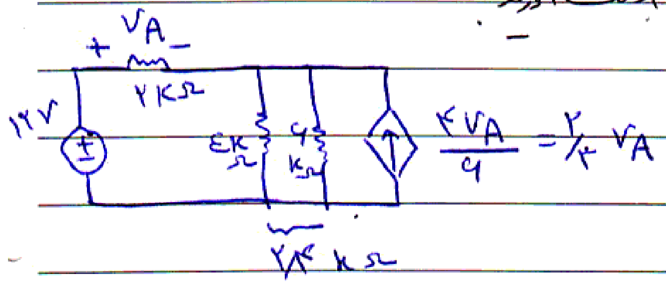
$$KVL(1):\ -12+2i_1+4(i_1-i_2)=0$$

$$KVL(2):\ 4(i_2-i_1)+4V_A+6i_2=0 \qquad V_A=2i_1$$

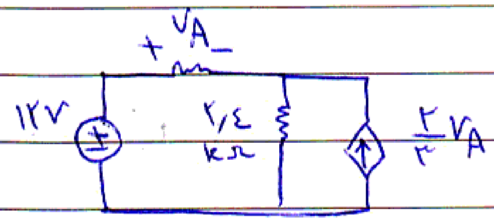
$$\Rightarrow \begin{cases} 6i_1-4i_2=12 \\ 4i_1+10i_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1=\frac{30}{11}\,mA \\ i_2=\frac{-12}{19}\,mA \end{cases}$$

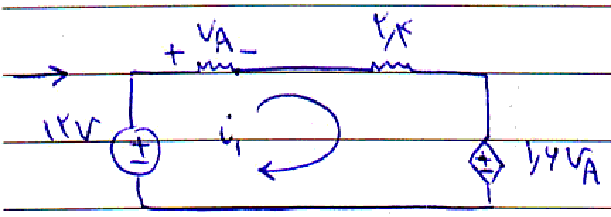
$$V_A=2\times\frac{30}{11}=\frac{60}{11}\,V$$

۲) در مثال قبل با استفاده از تبدیل منابع V_A را به دست آورید؟



$$\frac{4V_A}{6}=\frac{2}{3}V_A$$





$$KVL:\ -12+2i_1+2.4i_1+1.6V_A=0$$

$$V_A=2i_1 \rightarrow i_1=0.5V_A$$

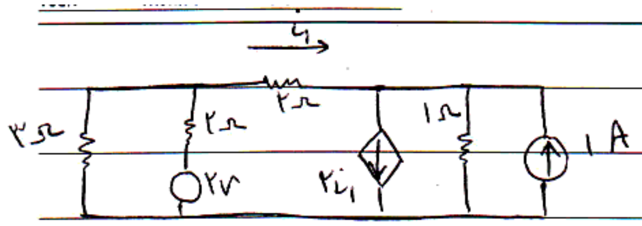
$$-12+V_A+1.2V_A+1.6V_A=0 \rightarrow 3.8V_A=12$$

$$V_A=\frac{12}{3.8}$$

تمرین) i_1 را به دست آورید.

الف) از روش تحلیل ولتاژ گره

ب) از روش تبدیل منابع



فصل چهارم : مدارهای مرتبه اول : مدارهای RL و RC

پاسخ Response : به رفتار متغیری از شبکه مانند ولتاژ یا جریان یک شاخه خاص از مدار گفته می شود.

پاسخ ورودی صفر zero input Resp : پاسخ مدار به شرایط اولیه می گویند.

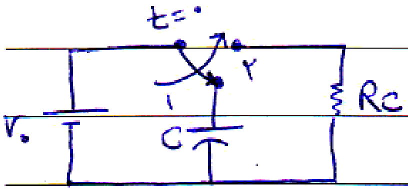
پاسخ حالت صفر zero state Res. : پاسخ مدار هنگامی که شرایط اولیه مدار صفر است. (یا پاسخ به ورودی)

پاسخ گذرا Transient Resp. : بخشی از پاسخ که با گذشت زمان صفر می شود.

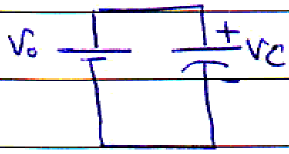
پاسخ ماندگار : Stedy state Resp. : بخشی از پاسخ که با گذشت زمان از بین نمی رود.

پاسخ کامل : پاسخ مدار هنگامی که هم ورودی داریم و هم شرایط اولیه.
Compelete Resp

پاسخ ورودی صفر مدار RC :

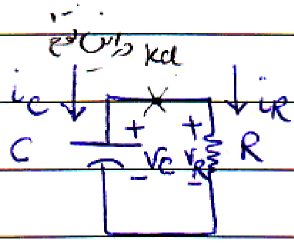


در $t<0$



$$v_C(t) = V_0 \quad , \quad t<0$$
$$v_C(0^-) = V_0$$

در زمان‌های $t>0$



$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = V_0$$

$$KVL: \; -v_C + v_R = 0$$
$$KCL: \; i_R + i_C = 0$$
$$i_R = -i_C = -C\frac{dv_C}{dt}$$

$$-v_C + R i_R = 0$$
$$-v_C - RC\frac{dv_C}{dt} = 0$$
$$\rightarrow \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = 0$$

جواب : جواب معادله بالا به صورت روبرو است :

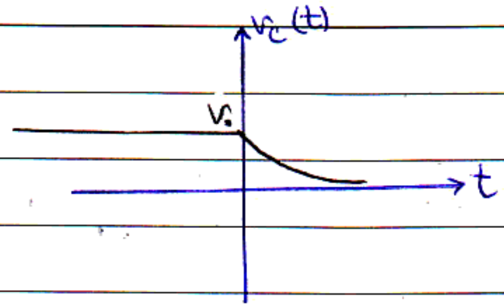
$$v_C(t) = Ae^{st}$$
$$Ase^{st} + \frac{1}{RC}Ae^{st} = 0 \longrightarrow Ae^{st}\left(S + \frac{1}{RC}\right) = 0$$

$$\underbrace{S + \frac{1}{RC} = 0}_{\text{معادله مشخصه مدار}} \longrightarrow \underbrace{S = \frac{-1}{RC}}_{\text{فرکانس طبیعی}}$$

$$v_C(t) = Ae^{-t/RC} \quad t>0$$
$$v_C(0^+) = V_0 = A$$

$A = V_0$

$$\boxed{v_C(t) = V_0 e^{-t/RC}}$$



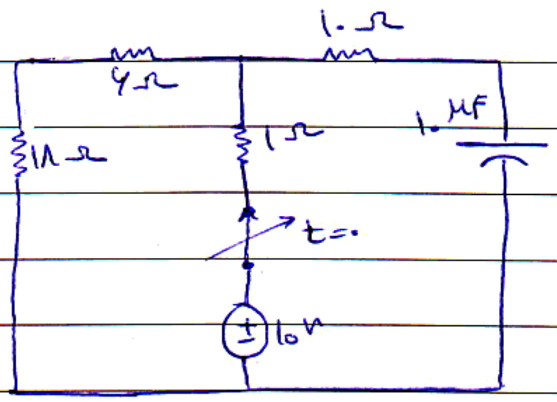
$\tau \triangleq RC \longrightarrow$ ثابت زمانی

معادله جریان خازن:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(V_0 e^{-t/RC}\right)$$

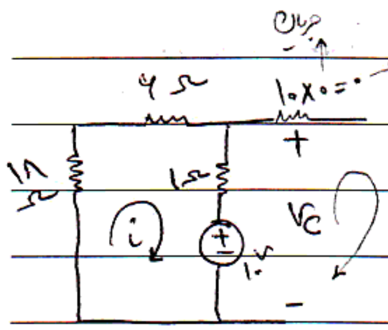
$$i_C = -\frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \qquad t>0$$

مثال) در مدار روبرو کلید به مدت زمان طولانی بسته بوده است در لحظه $t=0$ باز می‌شود. ولتاژ دو سر خازن را در تمام زمان‌ها بدست آورید.



خازن که باردار شده و ما می‌توانیم آن را مدار باز در نظر بگیریم. (جریان صفر)
ولی ولتاژ خازن وجود دارد.

$t<0$



$$KVL: 18i + 6i + i + 10 = 0$$

$$i = \frac{-10}{25} = -0.4\,A$$

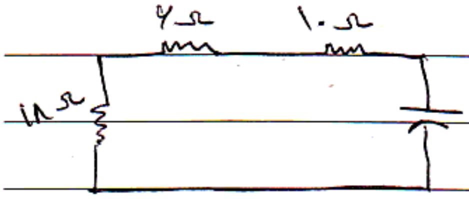
$$v_C(t) = i + 10 = -0.4 + 10 = 9.6\ V$$

$$v_C(t) = 9.6\,V \qquad t<0$$

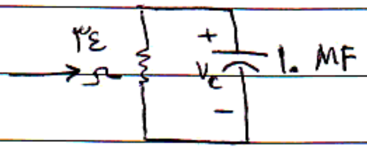
با مدار:
$$v_C(0^-) = 9.6\ V$$

(روش دوم)

$$-10 - i + 0 + V_C = 0$$



برای $t>0$: کلید باز شده است.



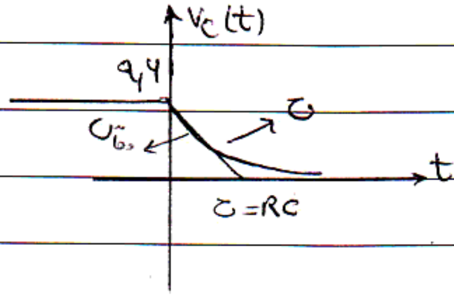
ولتاژ خازن پرش ندارد بنابراین در لحظه صفر داشته باشیم

$V_C(0^+) = V_C(0^-) = 9.6$

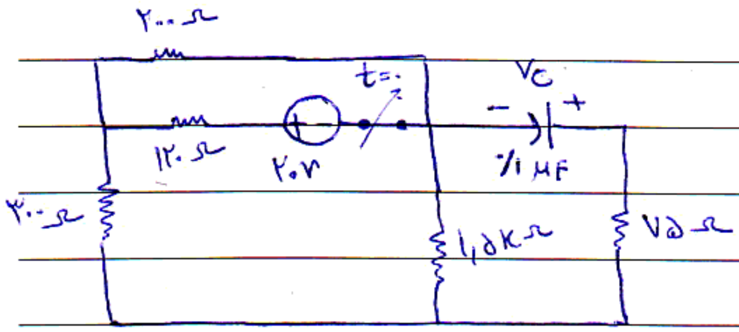
$V_C(t) = V_0 e^{-t/Re}$

$\tau = RC = 34 \times 10 \times 10^{-6}$

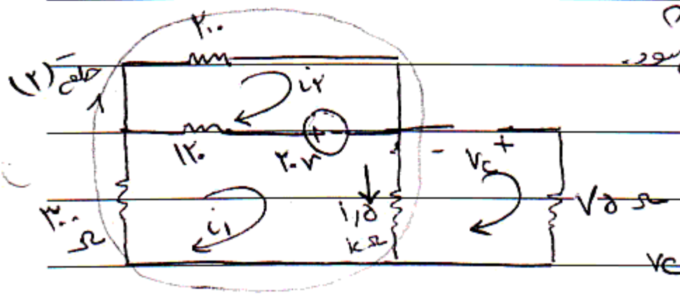
$V_C(t) = 9.6 \times e^{-t/c}$



مثال: کلید مدت طولانی در وضعیت بسته بوده است و در زمان $t=0$ باز می‌شود. ولتاژ دو سر خازن را برای تمام زمان‌ها بدست آورده و رسم کنید؟



برای $t<0$ کلید بسته است. خازن مدار باز می‌شود.



[illegible] جریان خازن داریم:

$V_C = -1.5^{k}\, i_1 = -1500 i_1$

$-V_C + 75\times 0 - 1.5 i_1 = 0$ (kΩ)

$-V_C - 1500 i_1 = 0$

KVL (1) : $300 i_1 + 120(i_1 - i_2) + 20 + 1500 i_1 = 0$

$\xrightarrow{(1)}$ $1920 i_1 - 120 i_2 = -20$

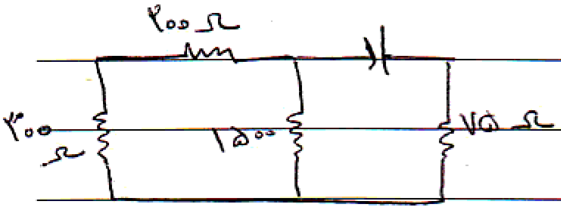
(2) $200 i_2 + 1500 i_1 + 300 i_1 = 0$

(2) $i_2 = -9 i_1$

(1) , (2) : $1920 i_1 - 120(-9 i_1) = -20 \to i_1 = \frac{-20}{3} \times 10^{-3}$

$V_C = -1500 \times \left(\frac{-20}{3} \times 10^{-3}\right) = 10V$ $t<0$ $V_C(0^-) = 10V$

برای $t>0$ مدار زیر می‌شود



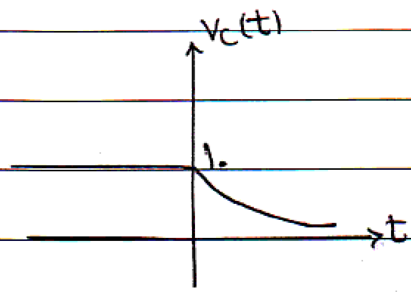
$۵۰۰ \parallel ۱۵۰۰ = ۳۷۵\ \Omega$

$V_C(0^+) = V_C(0^-) = 10\,V$

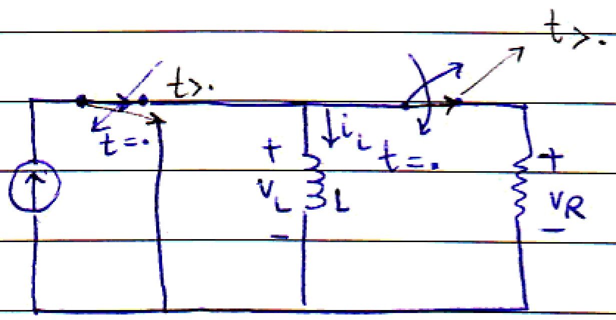
$V_C(t) = V_0\, e^{-t/RC}$

$\tau = RC = ۴۵۰ \times ۰/۱ \times ۱۰^{-۶} \qquad \tau = ۴۵\ \mu s$

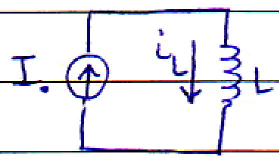
$V_C(t) = 10\, e^{-t/\tau}$



پاسخ ورودی صفر مدار RL :



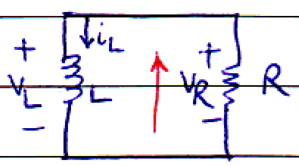
برای $t<0$ (۲ شاخه مدار زیر می‌شود)



$i_L(t) = I_0 \qquad t<0$

$i_L(0^-) = I_0$

برای $t>0$ (با مدار)



$I_L(0^+) = I_L(0^-) = I_0$

$v_R = v_L$

$$\begin{cases} v_R = -R i_L \\ v_L = L \dfrac{di_L}{dt} \end{cases} \qquad -R i_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$L \frac{di_L}{dt} + R i_L = 0 \longrightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = 0$$

حل معادله :

$$di_L + \frac{R}{L} i_L \, dt = 0$$

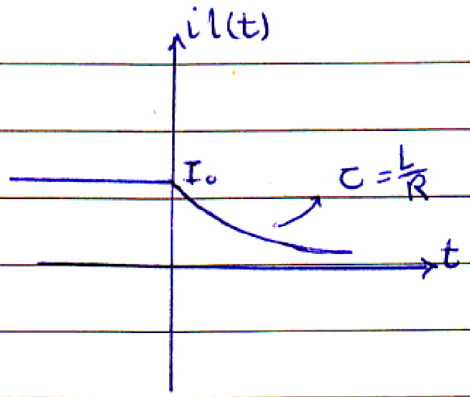
$$\frac{di_L}{i_L} + \frac{R}{L} dt = 0 \xrightarrow{\int} \int \frac{di_L}{i_L} + \int \frac{R}{L} dt = c$$

$$\ln(i_L) + \frac{R}{L} t = c \longrightarrow \ln i_L = -\frac{R}{L} t + c$$

$$i_L(t) = e^{-\frac{R}{L}t + c} = \underbrace{e^{c}}_{K} \times e^{-R/L \, t}$$

$$i_L(t) = K e^{-\frac{R}{L}t} \qquad t > 0$$

$$\begin{cases} S = -\dfrac{R}{L} \quad \text{فرکانس طبیعی} \longrightarrow \text{قرینه عکس ثابت زمانی} \\ \tau = \dfrac{L}{R} \quad \text{ثابت زمانی} \end{cases}$$



$t = 0^+ \rightarrow i_L(0^+) = I_0$

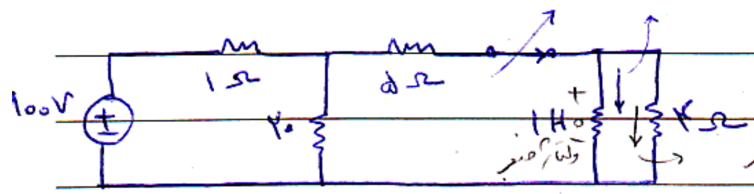
$K \times e^0 = I_0 \rightarrow K = I_0$

$$i_L(t) = I_0 e^{-R/L \, t} \qquad t > 0$$

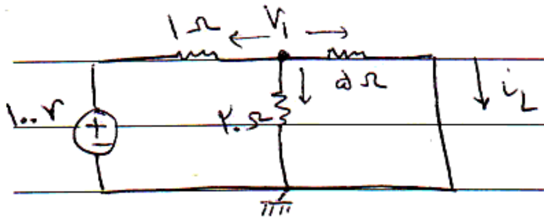
$$v_L = L \frac{di_L}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(I_0 e^{-R/L \, t} \right)$$

$$\boxed{v_L = -R I_0 e^{-R/L \, t} \qquad t > 0}$$

مثال ۲) $i_L(t)$ را برای همه‌ی زمان‌ها بدست آورده و رسم کنید.



در لحظه‌ی $t=0$ کلید باز می‌شود برای $t<0$ کلید بسته است:

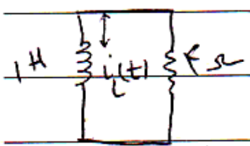


تحلیل ولتاژ گره

$$KCL(1):\ \frac{V_1-100}{1}+\frac{V_1}{20}+\frac{V_1}{5}=0 \longrightarrow V_1=80\,V$$

$$i_L(t)=\frac{V_1}{5}=\frac{80}{5}=16\ A \quad t<0 \Longrightarrow i_L(0^-)=16A$$

برای $t>0$:

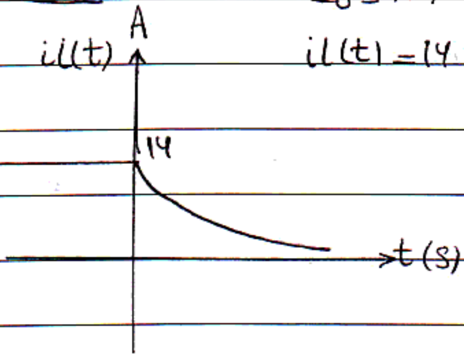


$$i_L(0^+)=I_0$$

$$i_L(t)=I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$I_0=16\ A$$

$$i_L(t)=16e^{-\frac{4}{1}t}=16e^{-4t} \quad t>0$$



ثابت زمانی مدار $=\frac{1}{4}$

پاسخ کامل: پاسخ مدار هنگامی که هم ورودی و هم شرایط اولیه داریم. برای مدارهای خطی معمولاً:

پاسخ کامل = پاسخ حالت صفر + پاسخ ورودی صفر

برای مدارهای مرتبه‌ی (۱) LTI:

$$(1)\begin{cases} Ay'(t)+By(t)=f(t) \\ y(0)=M \end{cases}$$

$y(0)=M$ ⟵ شرط اولیه؛ $f(t)$: ورودی مدار

در صورت حل، پاسخ کامل بدست می‌آید.

پاسخ حالت صفر
$$\begin{cases} A y_1'(t) + B y_1(t) = f(t) & (۲) \\ y_1(0) = 0 \end{cases}$$

پاسخ ورودی صفر
$$\begin{cases} A y_2'(t) + B y_2(t) = 0 & (۳) \\ y_2(0) = M \end{cases}$$

$$(۲) + (۳) \longrightarrow \begin{cases} A\left(y_1'(t) + y_2'(t)\right) + B\left(y_1(t) + y_2(t)\right) = f(t) \\ y_1(0) + y_2(0) = M \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(y_1 + y_2)' + B(y_1 + y_2) = f(t) \\ y_1(0) + y_2(0) = M \end{cases}$$

پاسخ کامل ← ، پاسخ حالت صفر ، پاسخ ورودی صفر

$$\begin{cases} y(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ y(0) = y_1(0) + y_2(0) = M \end{cases}$$

پاسخ مدار به ورودی : (پاسخ حالت صفر)

۱- هر شکل موج ها را می توان به صورت زیر نوشت،

$$y(t) = y(+\infty) + \left(y(0^+) - y(+\infty)\right) e^{-t/\tau}$$ → ثابت زمانی

$$y(t) = y(+\infty) + \left(y(t_0^+) - y(+\infty)\right) e^{-\frac{(t - t_0)}{\tau}}$$

۲- برای مدارهای RL ، $\tau = \frac{L}{R_{eq}}$ ، R_{eq} مقاومت دیده شده از دو سر سلف است.

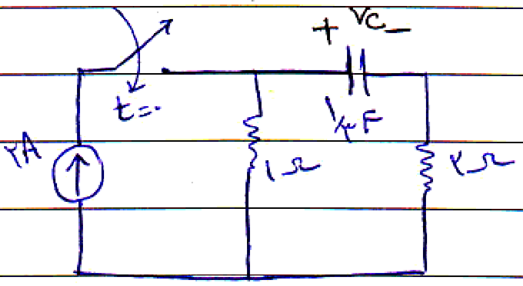
به واسطه تابع اصلی فرض کنیم

۳- برای شبکه‌های RC، $\tau = R_{eq} C$ مقاومت دیده شده از دو سر خازن است زمانیکه منابع صفر است.

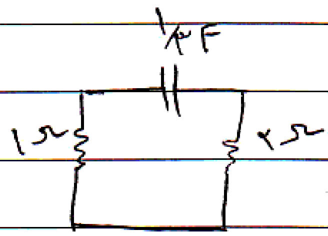
۴- برای تعیین $y(0^+)$، خازن‌ها را مدار باز و سلف‌ها را اتصال کوتاه می‌کنیم.

۵- برای تعیین $y(+\infty)$ خازن‌ها را مدار باز و سلف‌ها را اتصال کوتاه می‌کنیم.

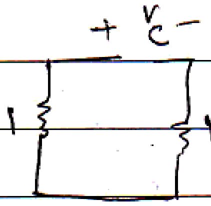
مثال) کلید مدت زمان طولانی باز بوده است و در زمان $t=0$ بسته می‌شود. ولتاژ خازن را برای $t>0$ بدست آورید؟



برای $t<0$ (کلید بسته نشده)



محاسبه V_c $t=0$

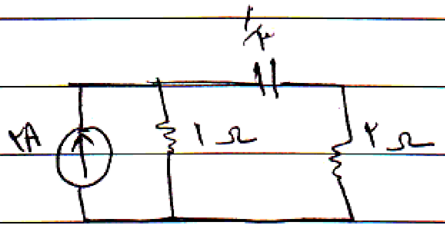


ولتاژ خازن برابر ولتاژ دو سر مقاومت‌هاست. (خازن مدار باز می‌شود)

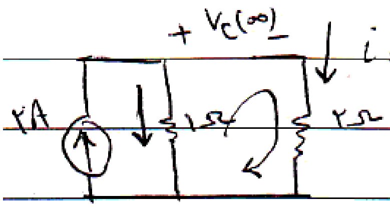
$V_C(0^-)=0$

$V_C(0^+)=0$

$t>0$

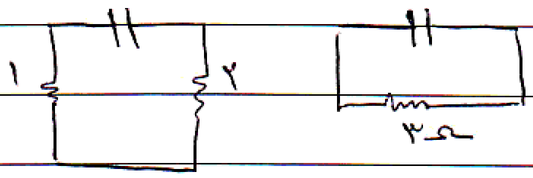


محاسبه $V_C(+\infty)$ (مدار باز می‌شود)



$-1\times2+V_c(\infty)+2\times0=0 \rightarrow V_c(\infty)=2V$

محاسبه τ :



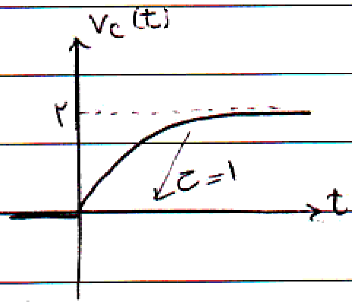
محاسبه R_{eq}

$R_{eq}=3$

$\tau=R_{eq}\times C=3\times\frac{1}{3}=1\ sec$ $\qquad \Omega\times F=S$

$v_c(t)=v_c(+\infty)+(v_c(0^+)-v_c(+\infty))e^{-t/\tau}$

$v_c(t)=2+(0-2)e^{-t/1}=2-2e^{-t}$

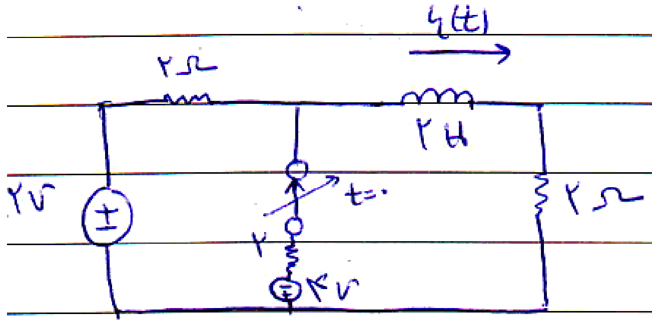


$v_c(\infty)\simeq2$

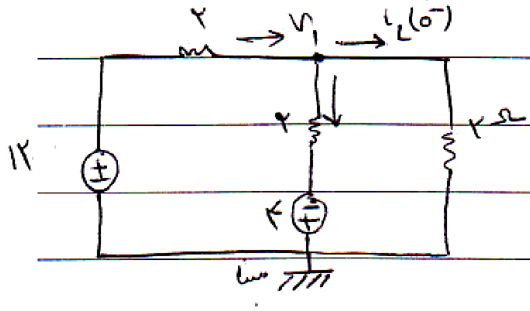
$v_c(5\tau)=2$ $\qquad 5\tau=5s$ $\qquad$ ∞ در اینجا معادل 5s است.

$u(t)$ سوئیچ باطری است.

مثال) کلید مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=0$ باز می‌شود $i_L(t)$ را برای $t>0$ محاسبه کرده، بدقت رسم کنید.



برای $t=0^-$ سلف (اتصال کوتاه می‌شود)



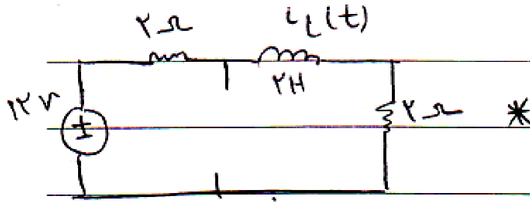
$$V_1-(-4)$$

$$\frac{V_1-12}{2} = \frac{V_1+4}{2} + \frac{V_1}{2} = 0$$

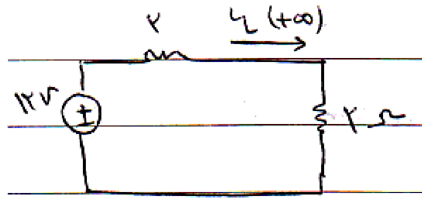
$$V_1 = \frac{8}{3} V$$

$$i_L(0^-) = \frac{V_1}{2} = \frac{8/3}{2} = \frac{4}{3} \longrightarrow i_L(0^+) = \frac{4}{3}$$

برای $t>0$ (سلف در مدار باقی می‌ماند)

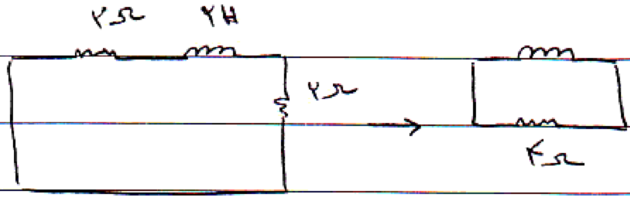


$t=+\infty$



$$i_L(+\infty) = \frac{12}{4} = 3A$$

محاسبه R_{eq}:



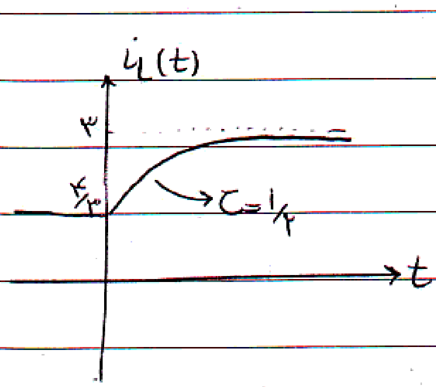
در * منبع را صفر می‌کنیم

$R_{eq} = 4\Omega$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\ \text{sec}$$

$$i_L(t) = i_L(+\infty) + \left(i_L(0^+) - i_L(+\infty)\right) e^{-t/\tau}$$

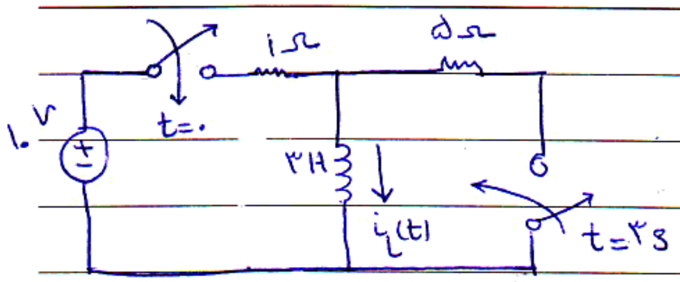
$$i_L(t) = 3 + \left(\frac{4}{3} - 3\right) e^{-2t} = 3 - \frac{5}{3} e^{-2t}$$



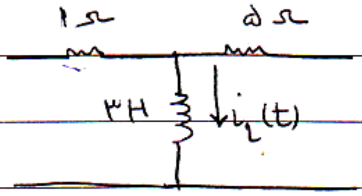
$\tau = \frac{1}{2} \longrightarrow$ فرکانس طبیعی $= -2$

سوال: $i_L(t)$ را برای $t>0$ محاسبه و رسم کنید.

کلید اول در $t=0$، کلید دوم در $t=3$ بسته می‌شود.



برای $t<0$

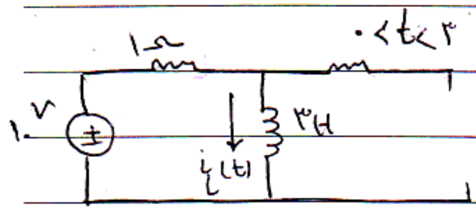


$i_L(t)=0$

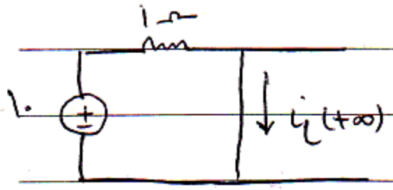
$\rightarrow i_L(0^-)=0$

$i_L(0^+)=0$

$0<t<3$

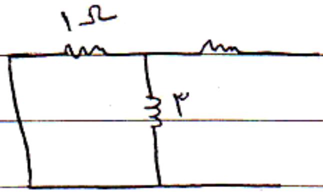


محاسبه‌ی جریان $i_L(+\infty)$



$i_L(+\infty)=10\ A$

محاسبه‌ی τ



$R_{eq}=1\ \Omega$

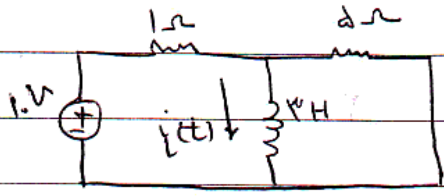
$\tau=\dfrac{L}{R}=\dfrac{3}{1}=3\ sec$

$i_L(t)=i_L(+\infty)+\left(i_L(0)-i_L(+\infty)\right)e^{-t/\tau}$ $\quad i_L(t)=10-10\,e^{-t/3}$

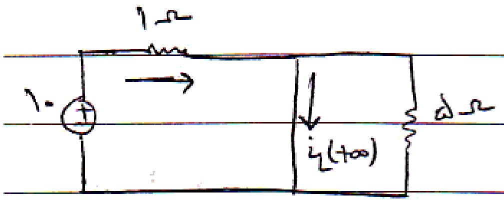
$i_L(3^-)=10-10\,e^{-3/3}=6.3\ A$

برای $t>3$

$i_L(3^+)=6.3\ A$

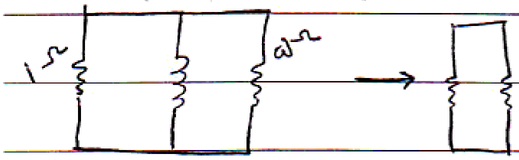


محاسبه‌ی $i_L(+\infty)$:



$$i_L(+\infty) = \frac{۱۰}{۱} = ۱۰\,A$$

محاسبه‌ی τ :



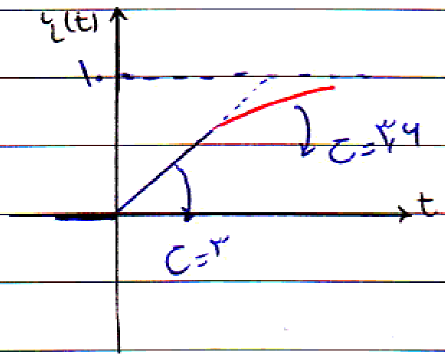
$$۱ \parallel ۵ = \frac{۵}{۶} \qquad R_{eq} = \frac{۵}{۶}\ \Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{۳}{۵/۶} = ۳٫۶\,S$$

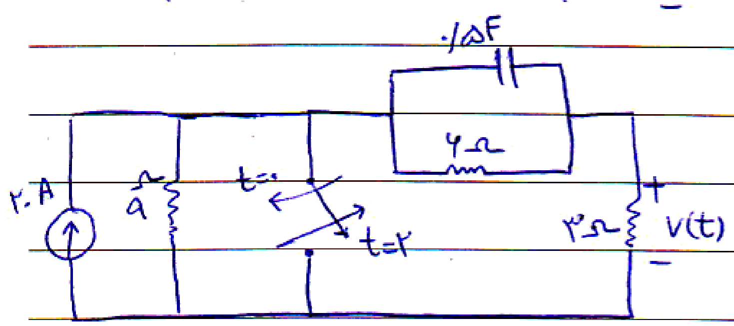
$$i_L(t) = i_L(+\infty) + \left(i_L(t_0^+) - i_L(\infty)\right) e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

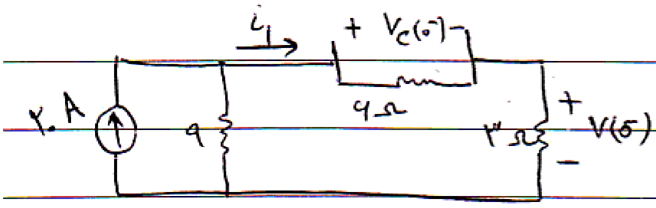
$t_0 = ۳$

$$i_L(t) = ۱۰ + (۶٫۴ - ۱۰)\, e^{-\frac{(t-۳)}{۳٫۶}} \longrightarrow i_L(t) = ۱۰ - ۳٫۶\, e^{-\frac{(t-۳)}{۳٫۶}} \qquad t > ۳$$



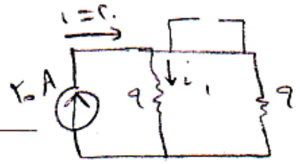
مثال) کلید پیش از بسته شدن در لحظه‌ی $t=0$ مدت زمان زیادی باز بوده است. ولتاژ $v(t)$ را برای تمام زمان‌ها بدست آورید. کلید در $t=0$ بسته می‌شود و در $t=۲$ باز می‌شود.





برای $t<0$

تقسیم جریان



$$i_1 = \frac{9}{9+9} \times 20$$

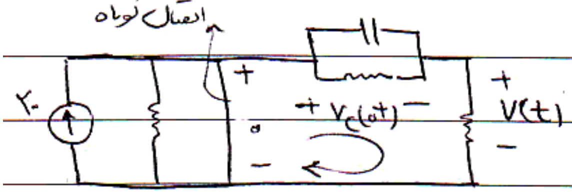
$$i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2} \times i$$

Subject:
Year. Month. Date.

$i_1 = \frac{9}{9+9} \times 20 = 10\ A$ $\qquad v(0^-) = 3 i_1 = 30V$ $\qquad v_C(0^-) = 6 i_1 = 60V$

اتصال کوتاه

برای $0<t<2$

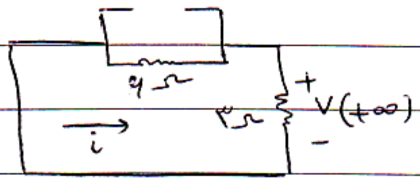


$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 60$

$v_C(0^+) + v(0^+) = 0 \longrightarrow v(0^+) = -60V$

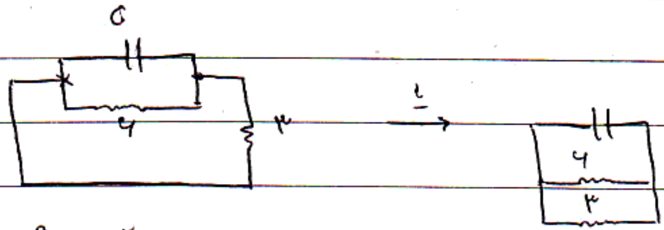
در لحظه $t=+\infty$ خازن را اتصال باز می کنیم

طبق بالا است

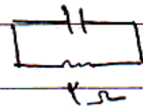


$i = 0 \longrightarrow v(+\infty) = 0$

محاسبه C :



$3 \| 6 = 2$

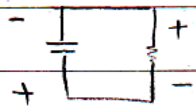


$R_{eq} = 2\Omega$

$\tau = R_{eq} C = 0.5 \times 2 = 1$

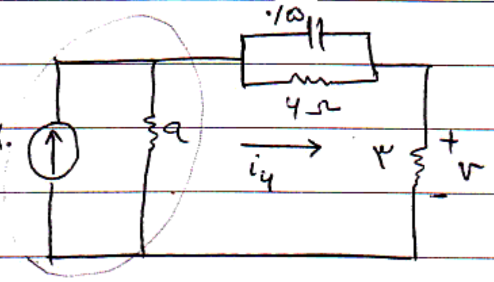
$$v(t) = v(+\infty) + \left(v(0^+) - v(+\infty)\right) e^{-t/\tau} \qquad v(t) = -60 e^{-t}$$

$v(2^-) = -60 \times e^{-2} = -8.12\ V$ $\qquad v_C(2^-) = +8.12\ V$



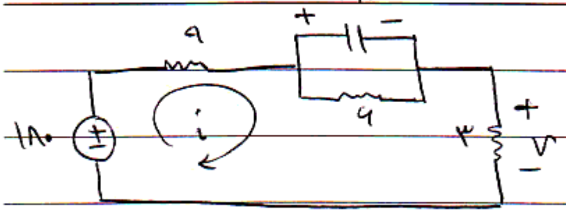
+ $V_C(2^+)$ −

برای $t>2$:



$V_C(2^+) = 8.12$ $\qquad$ برای $t=2^+$

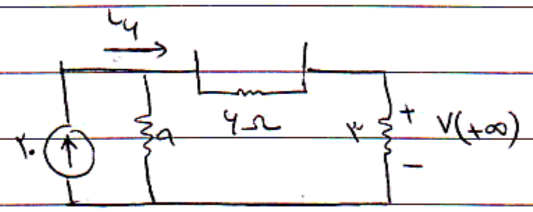
Year. Month. Date. ۸/۳



$-180 + 9i + 8.12 + 3i = 0$

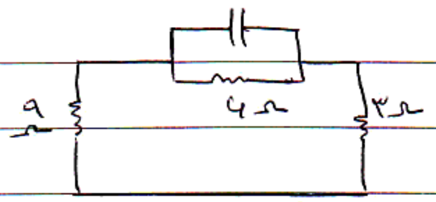
$i \approx 14.32\ A$

$v(2^+) = 3i = 3 \times 14.32 \approx 43V$



برای $t = \infty$

$i_6 = 10\ A \rightarrow v(+\infty) = 3 i_6 = 30V$



محاسبه‌ی τ :

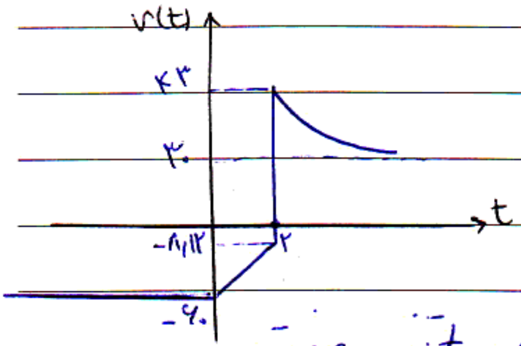
$R_{eq} = 12 \,\|\, 6 = 4\ \Omega$

$\tau = C R_{eq} = 4 \times 0/5 = 2$ sec

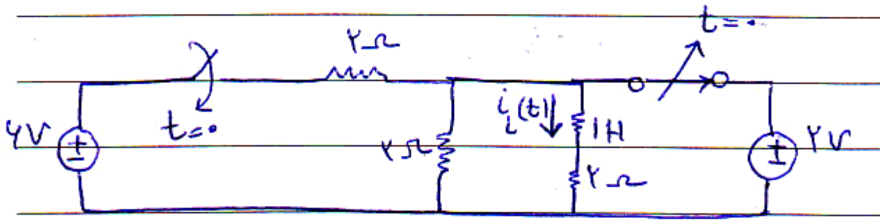
$$v(t) = v(+\infty) + \left(v(2^+) - v(\infty)\right) e^{-\frac{(t-2)}{\tau}}$$

$$v(t) = 30 + (43 - 30) e^{-\frac{(t-2)}{2}} = 30 + 13 e^{-\frac{(t-2)}{2}} \qquad t > 2$$

مقدار نهایی $t \to \infty \rightarrow v(t) = 30$

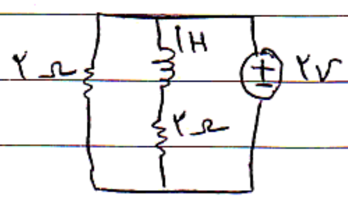


مثال ۲) کلیدها مدت طولانی در وضعیت معلوم بوده و در لحظه‌ی $t=0$ تغییر وضعیت می‌دهد.



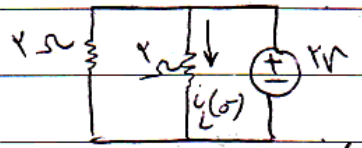
$\frac{di_L}{dt}(0^+) = ?$ $\quad i_L(t) = ?$

$i_L(0^+) = ?$



برای $t < 0$

در $t=0^-$

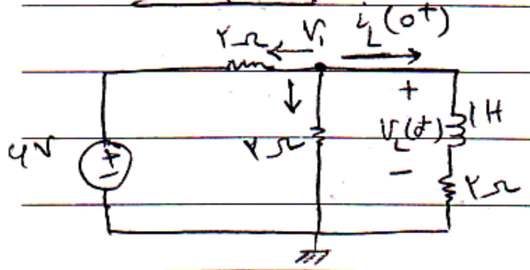


$i_L(0^-) = \frac{2}{2} = 1A$

$i_L(0^+) = 1A$

برای $t>0$

کلید اول بسته و کلید دوم باز



ولتاژ گره

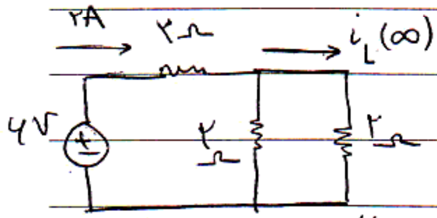
در لحظهٔ $t=0^+$ مدار را تحلیل می‌کنیم،

$KCL(1)$, $\frac{V_1-4}{2}+\frac{V_1}{2}+1=0 \longrightarrow V_1=2V$

$V_1 = V_L(0^+)+2i_L(0^+) \longrightarrow V_L(0^+) = 2-2\times1=0$

$L\frac{di_L}{dt}(0^+)=0 \longrightarrow \frac{di_L}{dt}(0^+)=0$

برای $t=\infty$ (سلف را به صورت اتصال کوتاه فرض می‌کنیم)



$i_L(\infty)=1A$

مقاومت معادل = ۳ $\longrightarrow I = \frac{4}{3} = 2$

$i_L(t) = i_L(\infty)+\left(i_L(0^+)-i_L(\infty)\right)e^{-t/\tau} \longrightarrow i_L(t)=1A \quad t>0$

در این مدار جریان ثابت از ابتدا بوده است.

$? = \frac{di_L}{dt}(0^+)$, $\frac{dv_C}{dt}(0^+)=?$

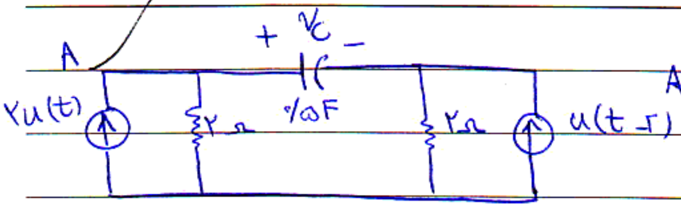
$v_L(0^+)=L\frac{di_L}{dt}(0^+)$ را محاسبه می‌کنیم

$i_C(0^+)=C\frac{dv_C}{dt}(0^+)$ را محاسبه می‌کنیم

مثال) در این مدار می‌خواهیم ولتاژ خازن را در تمامی زمان‌ها محاسبه کنیم؟ $V_C(t)=?$

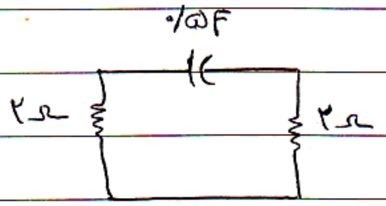
در زمان ۰ همان توضیحات

Subject:
Year. Month. Date.

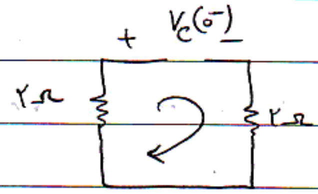


در زمانهای کمتر از ۲ هیچ جریانی نداریم و در زمانهای دو ثانیه به بعد منبع جریان A مدار اعمال میشود.

برای زمانهای $t<0$



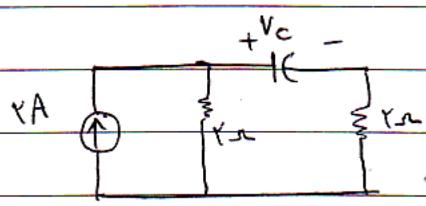
برای $t=0^-$



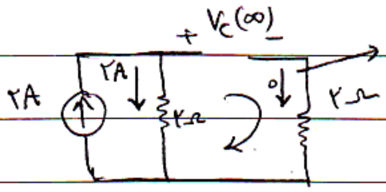
$i=0$

$V_C(0^-)=0 \qquad V_C(0^+)=0$

برای $0<t<2$



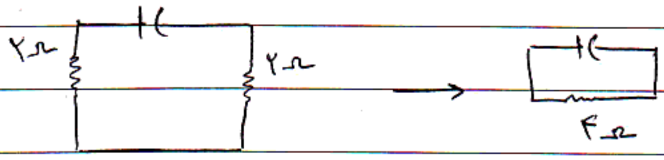
برای $t=\infty$



جریان صفر است چون مدار باز است

$$-2\times2+V_C(\infty)+2\times0=0 \rightarrow V_C(\infty)=4\ V$$

محاسبه τ :



$R_{eq}=4\ \Omega$

$\tau=R_{eq}\times C=4\times 0/5=2\ s$

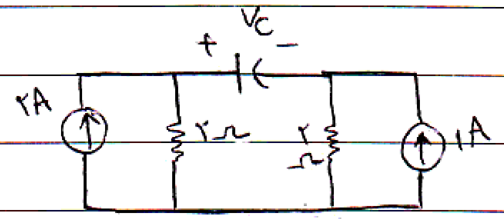
~~ماکور~~

$$V_C(t)=V_C(\infty)+\big(\underbrace{V_C(0^+)}_{0}-V_C(+\infty)\big)e^{-t/\tau}$$

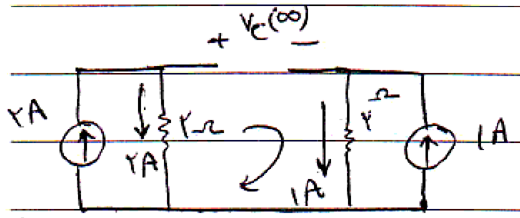
$$V_C(t)=4\left(1-e^{-t/2}\right)$$

$$v_C(2^-) = 4(1-e^{-2/2}) = 4(1-e^{-1}) = 2.53\ V \longrightarrow v_C(2^+) = 2.53\ V$$

برای $t>2$

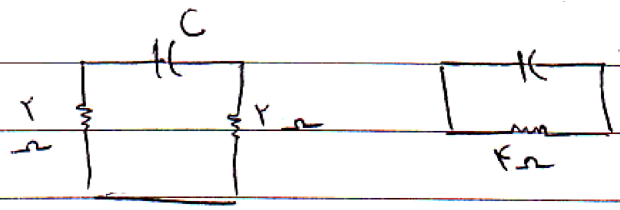


حالت $t=\infty$ (خازن را مدار باز در نظر می‌گیریم.)



$$KVL: \; -2\times 2 + v_C(+\infty) + 2\times 1 = 0 \longrightarrow v_C(+\infty) = 2\ V$$

محاسبه τ :



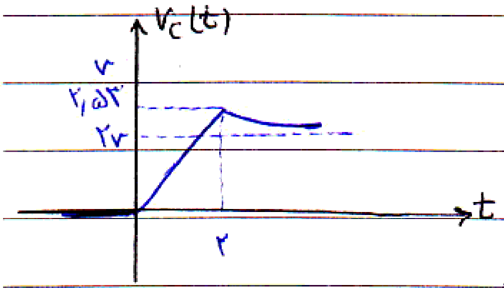
$$R_{eq} = 4$$

$$\tau = 4 \times 0.5 = 2\ s$$

$$v_C(t) = v_C(+\infty) + \left(v_C(t_0^+) - v_C(+\infty)\right) e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

$$t_0 = 2$$

$$v_C(t) = 2 + (2.53 - 2)\, e^{-\frac{(t-2)}{2}} \longrightarrow v_C(t) = 2 + 0.53\, e^{-\frac{(t-2)}{2}}$$



مقدار نهایی ولتاژ خازن در $t=\infty$ ، ۲ ولت است.

پاسخ پله : Step Response پاسخ حالت صفر مدار به ورودی پله $(u(t))$ است. معمولاً

با $s(t)$ نمایش داده می‌شود $\longleftarrow (s(t))$

پاسخ ضربه : impulse Resp. پاسخ حالت صفر مدار به ورودی ضربه $(\delta(t))$ است $\longleftarrow$
$h(t)$

قضیه: در مدارهای LTI، پاسخ ضربه، مشتق زمانی پاسخ پله است.

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad \text{یا} \quad s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\lambda)\, d\lambda$$

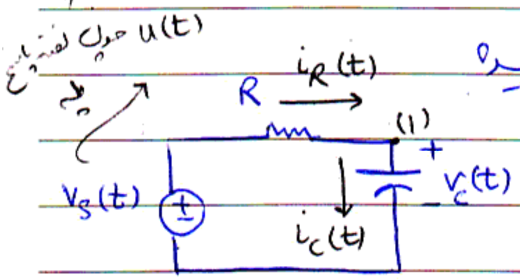
محاسبه‌ی پاسخ ضربه:

۱_ استفاده از پاسخ پالس

۲_ استفاده از پاسخ پله (مشتق‌گیری از پاسخ پله)

۳_ تعیین شرایط اولیه صفر مثبت

مثال) یک مدار RC به صورت روبرو داریم. پاسخ پله‌ی مدار را محاسبه کنید و با مشتق‌گیری از آن پاسخ ضربه را معین کنید.



$$KCL(1): \quad i_R(t) = i_C(t) \longrightarrow \frac{v_S(t) - v_C(t)}{R} = C\frac{dv_C(t)}{dt} \longrightarrow$$

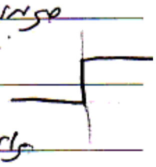
$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{v_S(t)}{RC}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

از $v_S(t) = u(t)$،

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C = 0 \qquad t<0$$

$$t=0^- \longrightarrow 0 + \frac{1}{RC}v_C(0^-) = 0 \longrightarrow v_C(0^-) = 0 \Rightarrow v_C(0^+) = 0$$ ضربه نداریم



پرش دارد، ضربه ندارد

برای $t>0$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{1}{RC}$$

$$t=+\infty \searrow 0 + \frac{1}{RC}v_C(+\infty) = \frac{1}{RC} \Rightarrow v_C(+\infty) = 1$$

معادله‌ی مشخصه $\quad s + \frac{1}{RC} = 0 \Rightarrow s = \frac{-1}{RC} \longrightarrow \tau = \frac{-1}{s} = RC$

$$v_C(t) = v_C(+\infty) + \left(v_C(0^+) - v_C(+\infty)\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \longrightarrow \begin{cases} v_C(t) = 1 - e^{-t/RC} & t>0 \\ v_C(t) = 0 & t<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_C(t) = \left(1 - e^{-t/RC}\right) u(t) = s(t)$$

اصلاحیه

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) + \underbrace{\left(1 - e^{-t/RC}\right) \delta(t)}_{0}$$

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) \qquad \begin{cases} x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \\ x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \end{cases}$$

$\delta(t) \longrightarrow$ تابع ضربه

مثال) مدار قبلی را با تغییر شرایط اولیه و پاسخ ضربه حل کنید. $h(t) = ?$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = \frac{v_S(t)}{RC}$$

$$v_S(t) = \delta(t) \longrightarrow v_C(t) = h(t) \qquad \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = \frac{\delta(t)}{RC} \qquad *$$

برای $t<0$

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC} v_C = 0$$

در لحظه‌ی $t=0^-$

$$0 + \frac{1}{RC} v_C(0^-) = 0 \Rightarrow v_C(0^-) = 0$$

برای $t=0$: طرفین $*$ را در dt ضرب می‌کنیم

ولتاژ خازن ضربه ندارد.

$$dv_C(t) + \frac{1}{RC} v_C(t)\,dt = \frac{\delta(t)}{RC}\,dt \xrightarrow{\int_{0^-}^{0^+}}$$

$$v_C(t)\Big|_{0^-}^{0^+} + \frac{1}{RC} \cancel{\int_{0^-}^{0^+} v_C(t)\,dt}^{\,0} = \frac{1}{RC} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt$$

چون ضربه ندارد

$$v_C(0^+) - \underbrace{v_C(0^-)}_{0}{}^{\uparrow 0} = \frac{1}{RC} \Rightarrow v_C(0^+) = \frac{1}{RC}$$

بسم الله الرحمن الرحیم

مدارهای الکتریکی ۱

(بخش سوم)

استاد عادلی

برای $t>0$: $\quad \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = 0$

$0 + \frac{1}{RC} v_C(+\infty) = 0 \qquad t=\infty$

$\to v_C(+\infty) = 0$

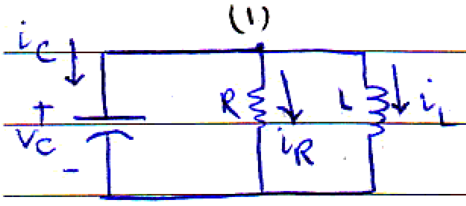
مقدار τ ، $\tau = RC$

$$v_C(t) = v_C(+\infty) + \left(v_C(0^+) - v_C(+\infty)\right) e^{-t/\tau}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \qquad t>0$$

فصل ۵ : مدارهای مرتبه دوم

مدار RLC موازی : پاسخ ورودی



$v_C(0^-) = V_0 \qquad i_L(0^-) = I_0$

* $KCL(1): i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) = 0$

۱) $i_L(t)$ را بعنوان متغیر می‌گیریم

۲) $v_C(t)$ " "

۱- جریان سلف را در نظر می‌گیریم.

$v_C = v_L = L\frac{di_L}{dt} \longrightarrow i_C = C\frac{dv_C}{dt}$

$i_C = C\frac{d}{dt}\left(L\frac{di_L}{dt}\right) = LC\frac{d^2 i_L}{dt^2}$

$i_R(t) = \frac{v_C(t)}{R} = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}$

* با جایگذاری در رابطه

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$$

$$V_C(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \longrightarrow V_C(0^+) = L\frac{di_L}{dt}(0^+)$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{V_C(0^+)}{L} = \frac{V_0}{L}$$

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$ * جایگذاری در

$$\begin{cases} i_L(0^+) = I_0 \\ \dfrac{di_L}{dt}(0^+) = \dfrac{V_0}{L} \end{cases}$$

حالت ۲) $V_C(t)$ به عنوان متغیر

$$i_R(t) = \frac{V_C(t)}{R}$$

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

$$V_C = V_L = L\frac{di_L}{dt} \xrightarrow{\int_0^t} i_L(t) = I_0 + \frac{1}{\ell}\int V_C(t)\,dt$$

$$\frac{V_C}{R} + C\frac{dV_C}{dt} + I_0 + \frac{1}{\ell}\int V_C\,dt = 0 \xrightarrow{d/dt} \frac{1}{R}\frac{dV_C}{dt} + C\frac{d^2V_C}{dt^2} + 0 + \frac{1}{\ell}V_C = 0$$

$$\xrightarrow{\times \ell} \ell C\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dV_C}{dt} + V_C = 0$$

محاسبه‌ی شرایط اولیه: $V_C(0^+) = ?$ $\quad \frac{dV_C}{dt}(0^+) = ?$

$V_C(0^+) = V_C(0^-) = V_0$ چون ولتاژ خازن پرش ندارد

$$i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) = 0 \xrightarrow{t=0^+} i_R(0^+) + i_C(0^+) + i_L(0^+) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{V_C(0^+)}{R} + i_C(0^+) + I_0 = 0$$

$$i_C(0^+) = -I_0 - \frac{v_C(0^+)}{R} = -I_0 - \frac{v_C(0^+)}{R}$$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} \qquad i_C(0^+) = C\frac{dv_C}{dt}(0^+) \qquad \frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C}$$

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{-1}{C}\left(I_0 + \frac{V_0}{R}\right)$$

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0 \Rightarrow v_C(0^+) = V_0 \Rightarrow \frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{-1}{C}\left(I_0 + \frac{V_0}{R}\right)$$

$i_L(t) = i_L$ $i_L(t)$ به عنوان متغیر

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = 0$$

ω_0 را اینطور می‌نویسیم

$\frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}}$ فرکانس تشدید   Resonanse frequency

$\alpha \triangleq \frac{1}{2RC}$ ضریب استهلاک   damping constant

$$\begin{cases} \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha\frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0 \\ i_L(0^+) = I_0 \\ \frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{V_0}{L} \end{cases}$$

$ax^2+bx+c=0$

$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$ معادله‌ی مشخصه

$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ ⟶ فرکانس های طبیعی

حالت ۱) $\alpha > \omega_0$ ⟵ ریشه ها حقیقی و متمایز (هر دو منفی) : حالت فوق میرا (میرای شدید)

overdamped

$$i_L(t) = K_1e^{s_1t} + K_2e^{s_2t}$$

$$i_L(0^+) = K_1e^0 + K_2e^0 = K_1 + K_2 = I_0$$

k_1 و k_2 از شرایط اولیه:

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = I_0 \\ K_1 S_1 + K_2 S_2 = \dfrac{V_0}{L} = \dfrac{di_L}{dt}(0^+) \end{cases}$$

حالت دوم) $\alpha = \omega_0$ ← ریشه‌ها مضاعف و حقیقی ← میرایی بحرانی critically damped

$$S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$i_L(t) = K_1 e^{S_1 t} + K_2 t e^{S_1 t}$$

حالت سوم) $\alpha < \omega_0$ ← ریشه‌ها مختلط اند (مزدوج همدیگر) Conjugate ← زیر میرا (میرایی ضعیف) under damped

$$S = -\alpha \pm j\omega$$

$$\omega_d \triangleq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \qquad i_L(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

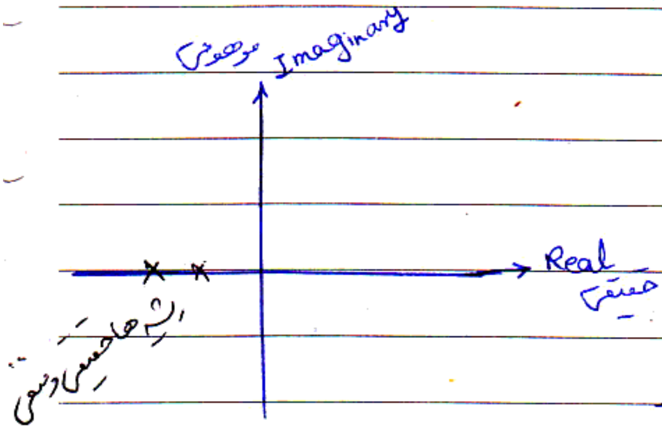
$$i_L(t) = K_1 e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \theta)$$

K_1 و θ مجهول اند و بر اساس شرایط اولیه محاسبه می‌شوند.

حالت چهارم) $\alpha = 0$ ← ریشه‌ها موهومی خالص (مزدوج همدیگر) ← حالت بدون اتلاف lossles

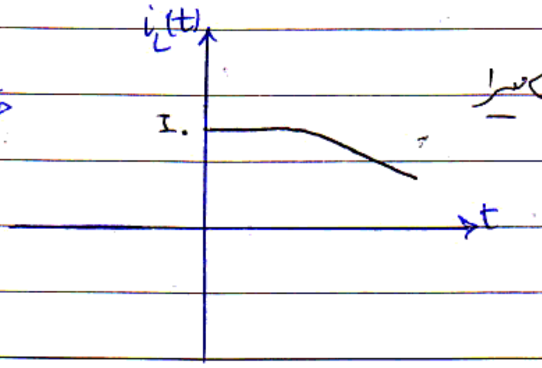
$$i_L(t) = K_1\cos(\omega_0 t + \theta)$$

θ و K_1 از روی شرایط اولیه بدست می‌آیند.

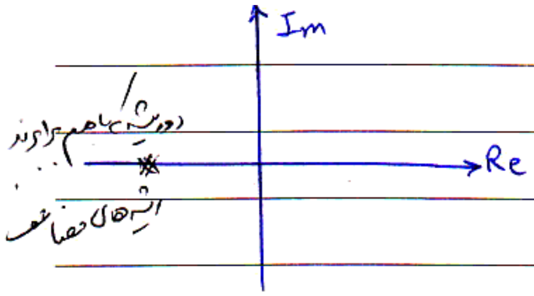


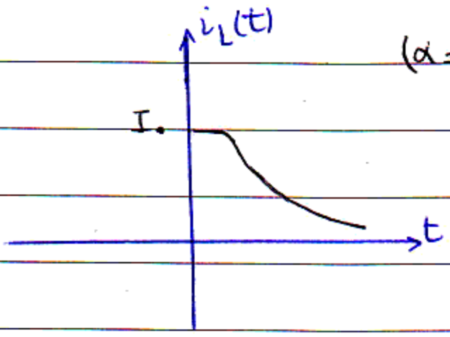
بررسی وضعیت‌ها در صفحه مختلط:

۱ ـ فوق میرا



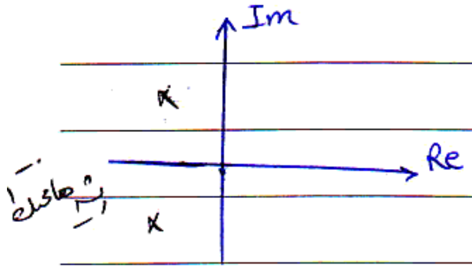
۲ـ میرای بحرانی $(\alpha = \omega_0)$

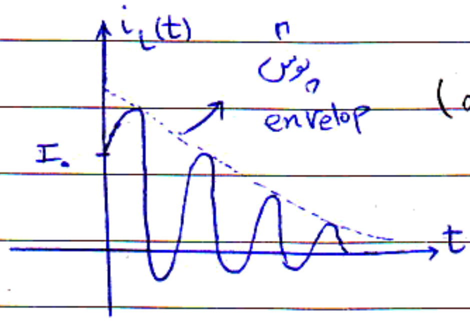




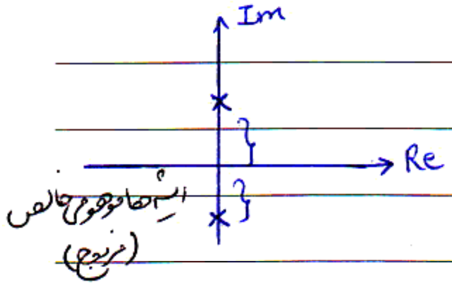
زمان بیشتری طول می کشد تا میرا شود

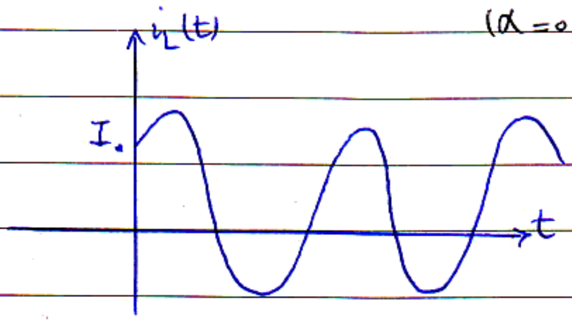
۳ـ زیرمیرا $(\alpha < \omega_0)$





۴ـ بی اتلاف $(\alpha = 0)$





ضریب کیفیت : Quality factor $\quad Q \triangleq \dfrac{\omega_0}{2\alpha}$

معادله مشخصه $\quad s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$

برای مدار موازی RLC

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad 2\alpha = \frac{1}{RC}$$

$$Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{1}{RC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

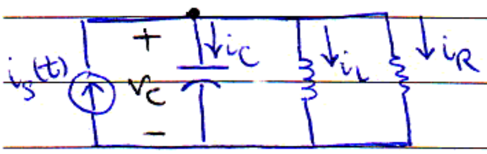
الف) میرای بحرانی $\alpha = \omega_0 \longrightarrow Q = \frac{1}{2}$

ب) زیرمیرا $\omega_0 > \alpha \longrightarrow Q > \frac{1}{2}$

ج) فوق میرا $\omega_0 < \alpha \longrightarrow Q < \frac{1}{2}$

حالت بدون اتلاف $\alpha = 0 \rightarrow Q = \infty$

مدار RLC موازی: پاسخ حالت صفر



$V_C(0^-) = 0 \qquad i_L(0^-) = 0$

KCL: $i_s(t) = i_C(t) + i_R(t) + i_L(t)$

$i_L(t)$ را به عنوان متغیر در نظر می‌گیریم.

$$V_C(t) = V_L(t) = L\frac{di_L}{dt}$$

$$i_R(t) = \frac{V_C(t)}{R} = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}$$

$$i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(L\frac{di_L}{dt}\right) = LC\frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L(t) = i_s(t) \longrightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \underbrace{\frac{1}{RC}}_{2\alpha}\frac{di_L}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} i_L(t) = \frac{i_s(t)}{LC}$$

$i_L(0^+) = ? \qquad \frac{di_L}{dt}(0^+) = ?$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \qquad V_C(t) = L\frac{di_L}{dt} \Rightarrow V_C(0^+) = L\frac{di_L}{dt}(0^+) = 0$

$$\rightarrow \frac{di_L}{dt}(0^+) = 0 \qquad \begin{cases} \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{i_s}{LC} \\ i_L(0^+) = 0 \\ i_L'(0^+) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha\frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = \frac{i_s(t)}{LC} \\ i_L(0^+) = 0, \quad \frac{di_L}{dt}(0^+) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{پاسخ پله مدار RLC موازی} \leftarrow i_s(t) = u(t)}$

(فرض می‌کنیم در حالت فوق میرا هستیم. یعنی معادله مشخصه دو ریشه حقیقی دارد.)

S_1, S_2

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \longrightarrow s_1, s_2$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = u(t)\,\omega_0^2$$

$$t>0 \quad \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = \omega_0^2 \qquad u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

$$i_L(t) = \underbrace{i_h(t)}_{\text{همگن}} + \underbrace{i_p(t)}_{\text{خاص}}$$

۱) محاسبه‌ی پاسخ همگن:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = 0$$

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \longrightarrow s_1, s_2 \qquad i_h(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

۲- محاسبه‌ی پاسخ خاص:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = \omega_0^2$$

$$i_p(t) = A$$

جایگذاری $i_p(t)$ در معادله:

$$0 + 2\alpha \times 0 + \omega_0^2 \times A = \omega_0^2 \longrightarrow A = 1$$

$$i_p(t) = 1$$

$$\longrightarrow \boxed{i_L(t) = 1 + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad t>0}$$

برای اینکه شرط $t>0$ را حذف کنیم. $i_L(t) = (1 + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t})\,u(t)$

$$\begin{cases} i_L(0^+) = \boxed{1 + K_1 + K_2 = 0} \\ i_L'(t) = K_1 s_1 e^{s_1 t} + K_2 s_2 e^{s_2 t} \\ i_L'(0^+) = \boxed{K_1 s_1 + K_2 s_2 = 0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} K_1 = \dfrac{s_2}{s_1 - s_2} \\ K_2 = \dfrac{-s_1}{s_1 - s_2} \end{cases}$$

پاسخ ضربه مدار RLC موازی با استفاده از تغییر شرایط اولیه در صفر مثبت

$i_s(t) = \delta(t)$

$$\begin{cases} \underbrace{i_L''(t)}_{\delta''(t)} + 2\alpha \underbrace{i_L'(t)}_{\delta'(t)} + \omega_0^2 \underbrace{i_L(t)}_{\delta(t)} = \dfrac{1}{LC}\,\delta(t) \quad * \\ i_L(0^-) = 0 \\ i_L'(0^-) = 0 \end{cases}$$

یک بار انتگرال نامعین می‌گیریم

$$i_L'(t) + 2\alpha i_L(t) + \omega_0^2 \int i_L(t)\,dt = \frac{1}{LC}\,u(t)$$

$$\xrightarrow{\int_{0^-}^{0^+}} i_L(t)\Big|_{0^-}^{0^+} + 2\alpha \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} i_L(t)\,dt}_{0} + \omega_0^2 \int_{0^-}^{0^+}\left(\int i_L(t)\,dt\right) = \frac{1}{LC}\int_{0^-}^{0^+} u(t)\,dt$$

$\int i_L \to \delta(t)$ چون ۰

$i_L \to \delta'(t)$

$i_L(0^+) - i_L(0^-) + 0 + 0 = 0$

می‌دانیم چون سمت راست * ضربه نیست. بنابراین $\int i_L(t)$ ۰ (انتگرال اول)

$\rightarrow i_L(0^+) = 0$

از دو طرف معادله اصلی (رابطه *) $\int_{0^-}^{0^+}$ می‌گیریم

$$i_L'(t)\Big|_{0^-}^{0^+} + 2\alpha\, i_L(t)\Big|_{0^-}^{0^+} + \omega_0^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} i_L(t)\,dt}_{0} = \frac{1}{LC}\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt$$

$$i_L'(0^+) - \underbrace{i_L'(0^-)}_{0} + 2\alpha\Big(\underbrace{i_L(0^+)}_{0} - \underbrace{i_L(0^-)}_{0}\Big) + 0 = \frac{1}{LC} \Rightarrow i_L'(0^+) = \frac{1}{LC}$$

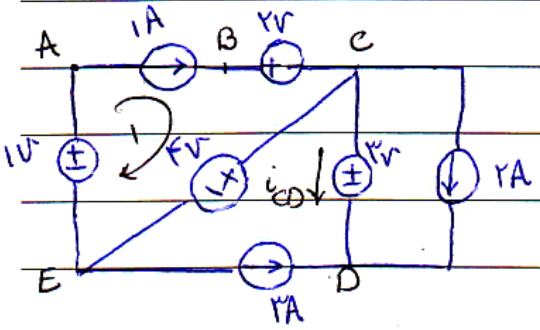
برای $t>0$

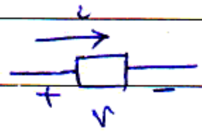
$$\begin{cases} i_L''(t) + 2\alpha i_L'(t) + \omega_0^2 i_L(t) = 0 \\ i_L(0^+) = 0 \\ i_L'(0^+) = \dfrac{1}{LC} \end{cases}$$

$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$

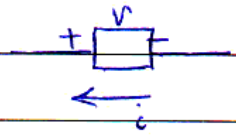
حل تمرین ۲

تمرین ۱۳ (فصل ۱)





$P = vi$



$P = -vi$

$KCL(D): \; i_{CD} + ۲ + ۳ = ۰ \Rightarrow i_{CD} = -۵A$

$KVL(1): \; -۱ + V_{AB} + ۲ + ۴ = ۰ \Rightarrow V_{AB} = -۵V$

$KCL(C): \; ۱ = i_{CE} + ۲ - ۵ \Rightarrow i_{CE} = ۴A$

$P_{AB} = V_{AB} \times ۱ = -۵ \times ۱ = -۵\,W$ تولید کننده توان

توان منبع ۱V $= V_{AE} \times (-۱) = ۱ \times (-۱) = -۱\,w$

توان منبع ۴V $= V_{CE}\, i_{CE} = ۴ \times ۴ = ۱۶\,w$ گیرنده توان

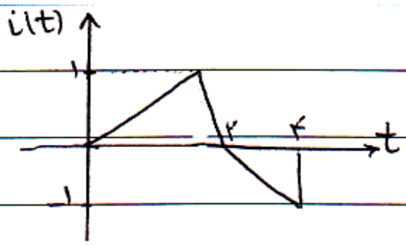
و تعیین الکل که ما هم جمع می‌شود.

تمرین ۹ (فصل ۲) $\frac{df(t)}{dt} = ?$

$f(t) = (1 - te^{-t})u(t)$

$\frac{df(t)}{dt} = (-e^{-t} + te^{-t})u(t) + \underbrace{(1 - te^{-t})}_{۰}\delta(t)$ $\quad [x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)]$

$\frac{df}{dt} = (t-1)e^{-t}u(t) + \delta(t)$



تمرین ۱۱ فصل ۲

$i(t) \longrightarrow u(t), r(t)$

$$i(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{2}t & 0\leq t\leq 2 \\ -\frac{1}{2}t+1 & 2<t\leq 4 \\ 0 & t>4 \end{cases}$$

$$i(t)=\frac{1}{2}t\left(u(t)-u(t-2)\right)+\left(\frac{-1}{2}t+1\right)\left(u(t-2)-u(t-4)\right)$$

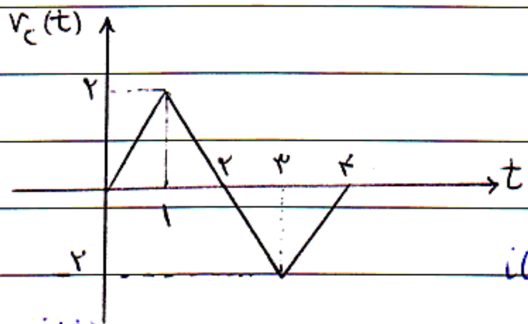
$$=\frac{1}{2}\underbrace{t\,u(t)}_{r(t)}-\frac{t}{2}u(t-2)+\frac{1}{2}t\,u(t-4)+u(t-2)-u(t-4)$$

توضیح $\quad r(t)=t\,u(t) \longrightarrow r(t-2)=(t-2)u(t-2)$

$\frac{t}{2}u(t-2)$

$\frac{1}{2}(t-2+2)u(t-2)$

$\frac{1}{2}(t-2)u(t-2)+u(t-2) \Rightarrow \frac{1}{2}r(t-2)+u(t-2)$ $\quad$ تعمیم به جمع ترتیب تبدیل می‌شوند.

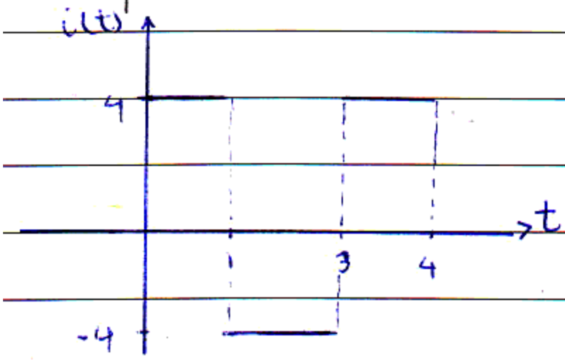


تمرین ۱۲ فصل ۲

$C=2F$

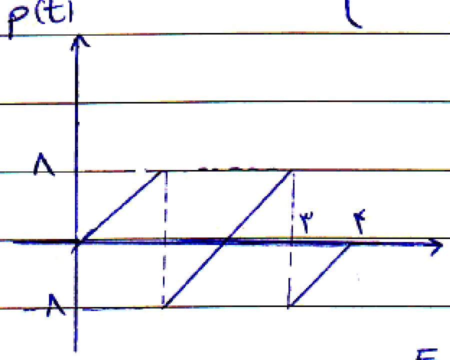
$i(t)=?\quad q(t)=?\quad p(t)=?\quad E(t)=?$

$$i(t)=C\frac{dv_C}{dt}=2\frac{dv_C}{dt}=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 2\times 2=4 & 0<t<1 \\ 2\times(-2)=-4 & 1<t<3 \\ 2\times 2=4 & 3<t\leq 4 \\ 0 & t>4 \end{cases}$$



$q(t)=Cv_C(t)=2v_C(t)$ $\quad$ شبیه $v_C(t)$ با تغییر مقیاس ضریب ۲

$$p(t) = v(t)\,i(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ (2t)\times 4 = 8t & 0<t<1 \\ (-2t+4)(-4) & 1\leq t<3 \\ (2t-8)\times 4 & 3<t<4 \\ 0 & t>4 \end{cases}$$

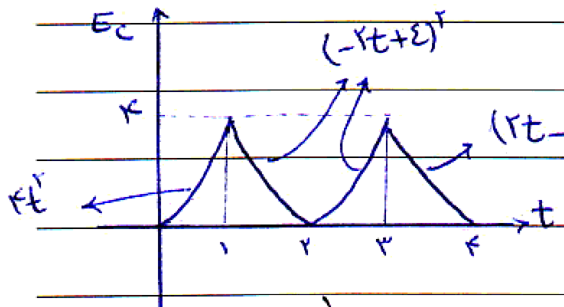


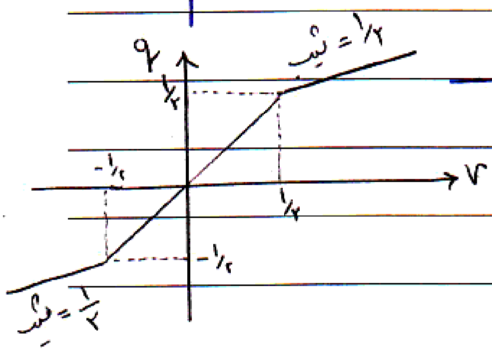
$$v_c(0) = 0$$

$$E = \int p(t)\,dt = \int v(t)\,i(t)\,dt$$

$$E_c = \int v(t)\,c\,\frac{dv_c}{dt} \times dt = c\int_0^t v_c\,dv_c$$

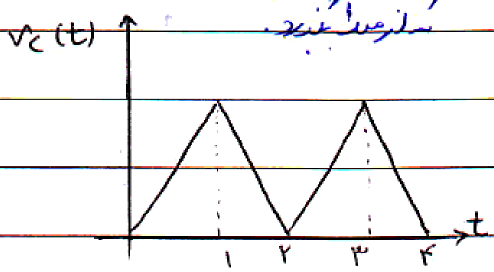
$$\longrightarrow E_c = \frac{1}{2}c\left(v_c^2(t) - v_c^2(0)\right) = \frac{1}{2}c\,v_c^2(t) \Rightarrow E_c = v_c^2(t)$$





$\longrightarrow$ عین ۲۴ ص ۲) حفظ است چون یک خطش نیست

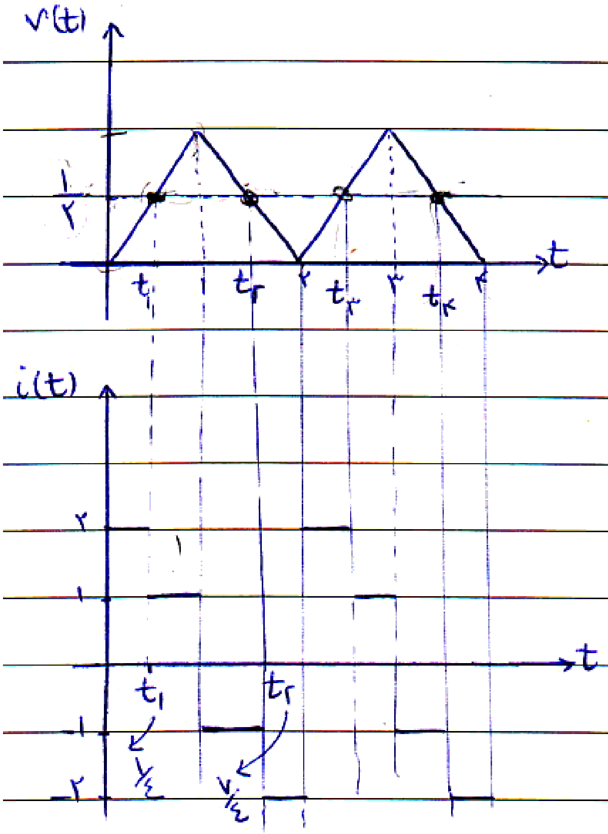
... بزنید.



$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dv} \times \frac{dv}{dt}$$

$$q(v) = \begin{cases} \frac{1}{2}v + \frac{1}{4} & v > \frac{1}{2} \\ v & -\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}v - \frac{1}{4} & v < -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \frac{dq}{dv} = \begin{cases} \frac{1}{2} & v > \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & v < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$v(t)=\begin{cases} ۲t & ۰<t<۱ \\ -۲t+۴ & ۱<t<۲ \\ ۲t-۴ & ۲<t<۳ \\ -۲t+۸ & ۳<t<۴ \\ ۰ & \text{else} \end{cases} \qquad \frac{dv}{dt}=\begin{cases} ۲ & ۰<t<۱ \\ -۲ & ۱<t<۲ \\ ۲ & ۲<t<۳ \\ -۲ & ۳<t<۴ \\ ۰ & \text{else} \end{cases}$$



$۰<t<t_۱$

$\frac{dq}{dv}=۱ \;,\; \frac{dv}{dt}=۲$

$t_۱<t<۱$

$\frac{dq}{dv}=\frac{۱}{۲} \;,\; \frac{dv}{dt}=۲ \qquad i(t)=۲\times\frac{۱}{۲}=۱$

$۱<t<t_۲ \qquad \frac{dq}{dv}=\frac{۱}{۲} \qquad \frac{dv}{dt}=-۲ \qquad i(t)=-۱$

$t_۲<t<۲$

$\frac{dq}{dv}=۱ \qquad \frac{dv}{dt}=-۲ \qquad i(t)=-۲$

محاسبه $t_۱$

$v(t)=۲t$

$v=\frac{۱}{۲} \longrightarrow ۲t=\frac{۱}{۲}$

$t=\frac{۱}{۴} \longrightarrow t_۱$

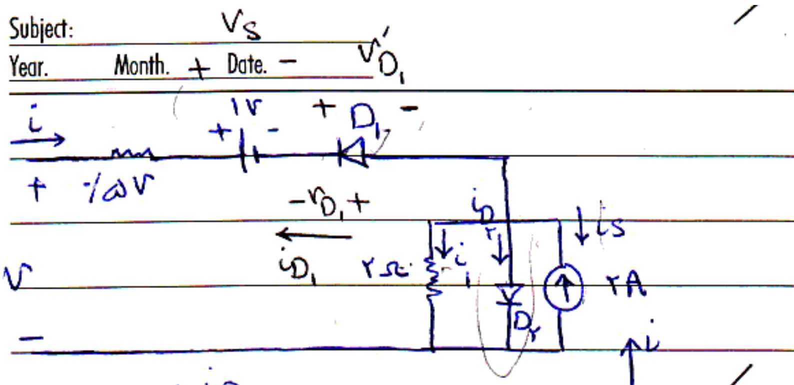
محاسبه $t_۲$ ،

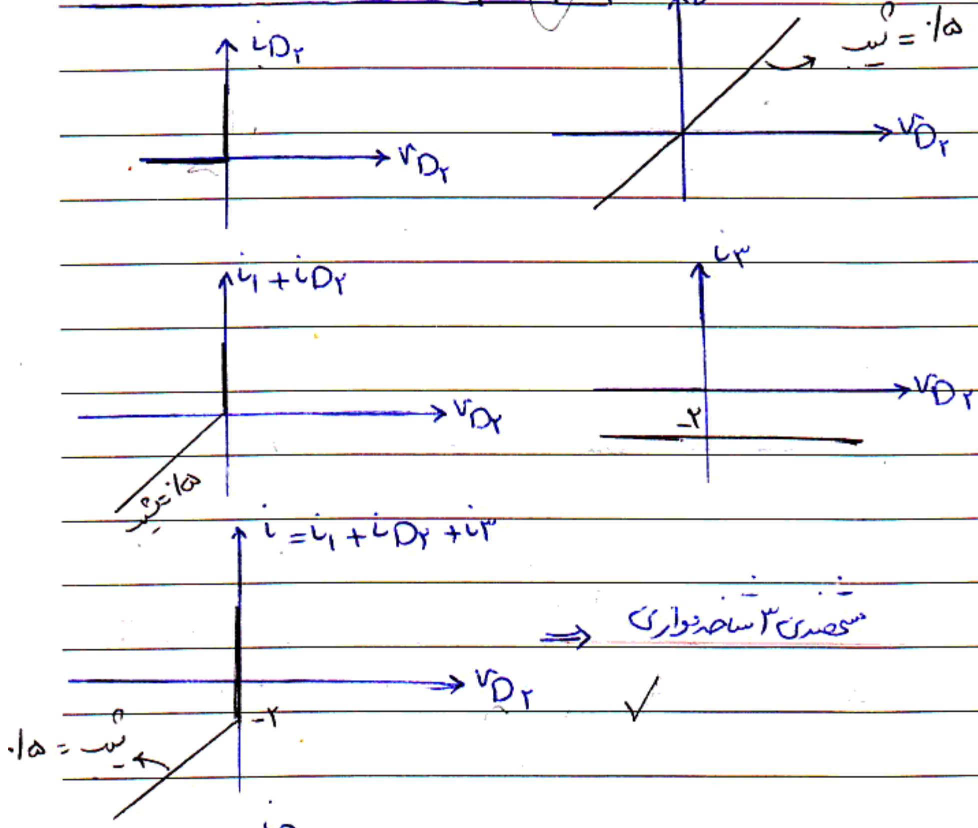
$v(t)=-۲t+۴$

$v(t)=\frac{۱}{۲}$

$-۲t+۴=\frac{۱}{۲} \longrightarrow t_۲=\frac{۷}{۴}$

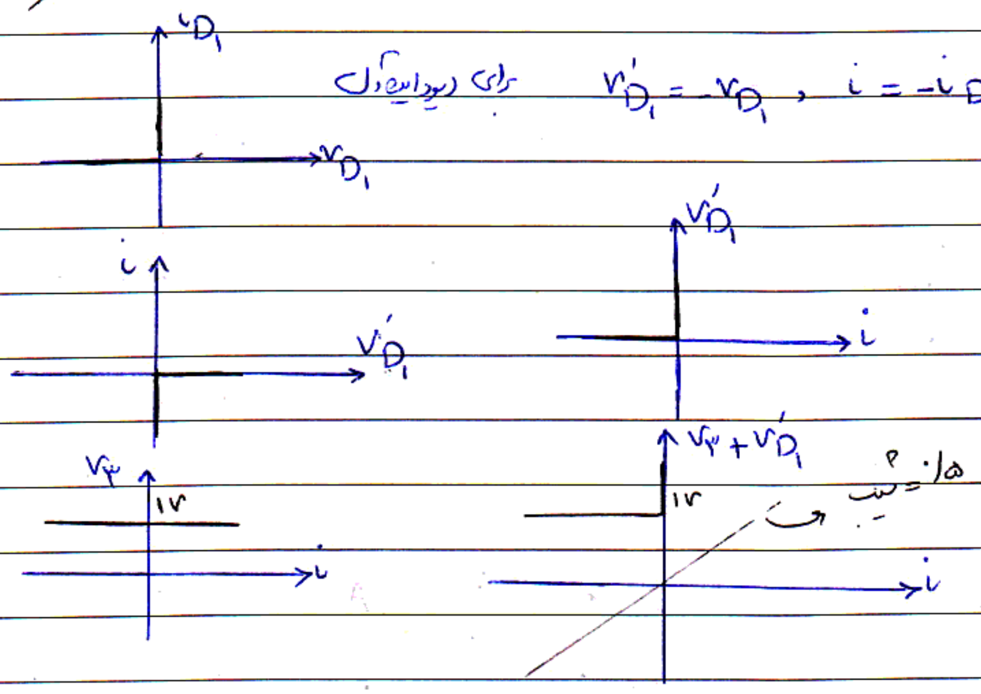
تمرین ۹ فصل ۳



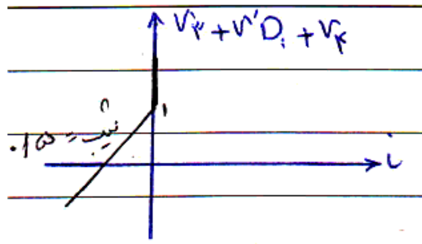


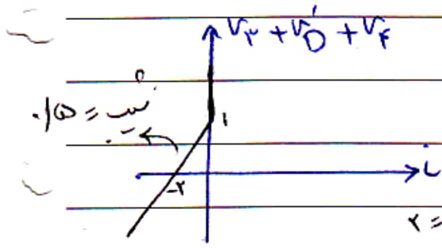
⇒ منحنی ۳ ساخته دیواری

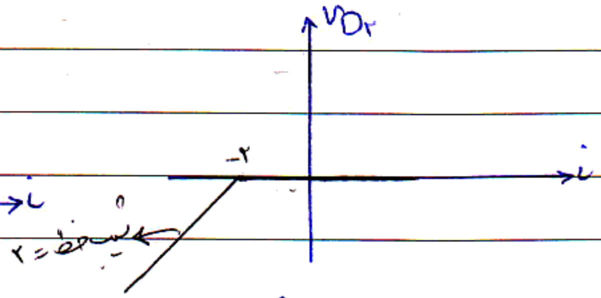
برای دیود ایده‌آل $v'_{D_1} = -v_{D_1}$, $i = -i_{D_1}$

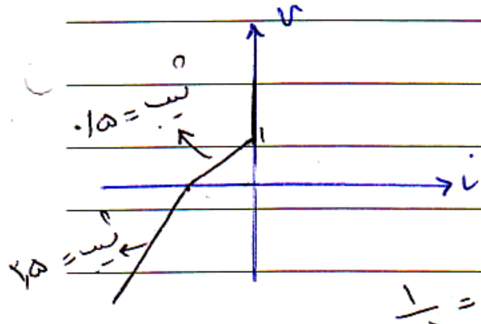


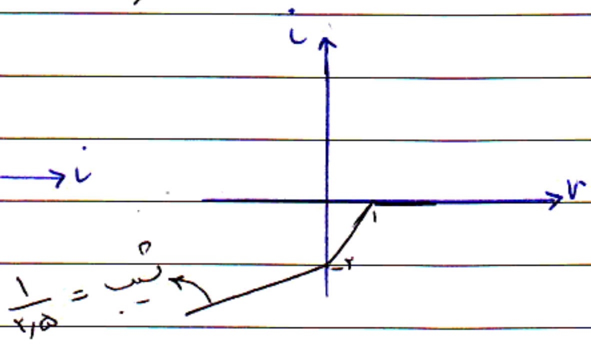
مشخصه سه شاخه سری





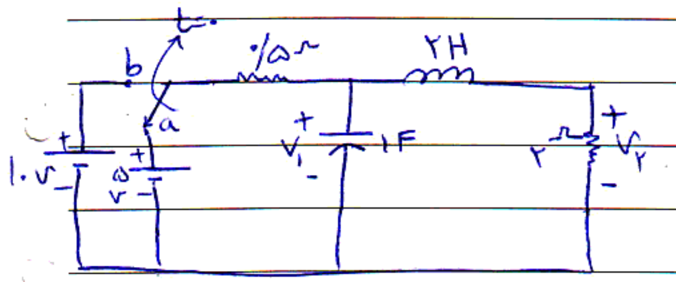






حل ۲ مثال از فصل ۵:

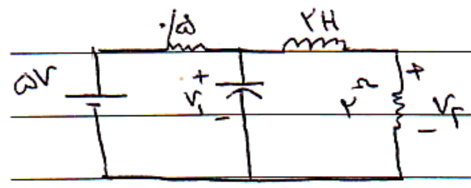
مثال) در مدار زیر پس از آنکه کلید که مدت طولانی در وضع a بوده است در $t=0$ به b منتقل می‌شود.



مقادیر زیر را بدست آورید؟

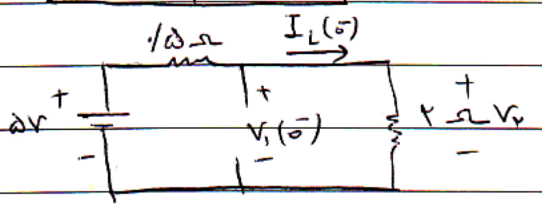
$v_1(0^+)$ ، $v_2(0^+)$ ، $v_1'(0^+)$ ، $v_2'(0^+)$

برای $t<0$



مدار به حالت دائمی رسیده. خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه می‌شود.

برای $t=0^-$



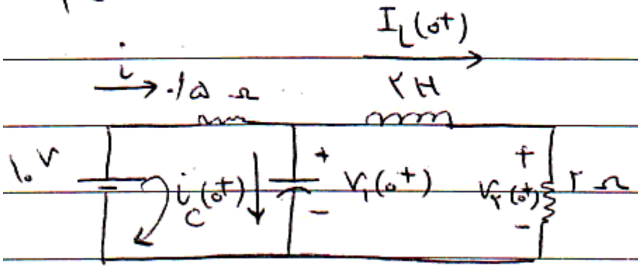
$$I_L(0^-) = \frac{5}{2/5} = 2\,A$$

$$v_1(0^-) = v_2(0^-) = 2\times 2 = 4\ v \qquad v_1(0^-) = 2I_L(0^-) = 4v$$

$$\Rightarrow v_1(0+) = v_2(0+) = 4\ v$$

$V_2(0^-) = 4V$

برای $t>0$ (کلید در وضعیت b قرار دارد.)



$t=0^+$

$I_L(0^+) = I_L(0^-) = 2A \qquad V_1(0^+) = V_1(0^-) = 4V$

$V_2(0^+) = 2\, I_L(0^+) = 4V$

V_2 در لحظه‌ی $t=0^+$ پرش ندارد.

$i(0^+) = \dfrac{10 - V_1(0^+)}{0/5} = \dfrac{10-4}{0/5} = 12\,A \qquad KVL:\ -10 + 0/5\, i + V_1(0^+) = 0$

$KCL:\ i(0^+) = I_L(0^+) + i_C(0^+) \qquad 12 = 2 + i_C(0^+) \longrightarrow i_C(0^+) = 10\,A$

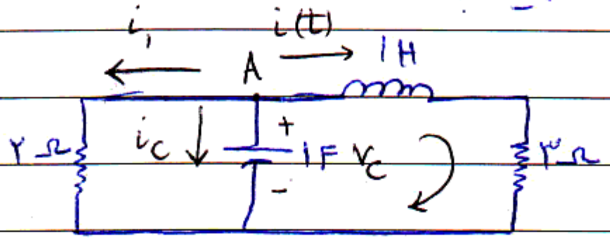
$i_C(t) = C\dfrac{dV_1}{dt} \qquad i_C(0^+) = C\dfrac{dV_1}{dt}(0^+) \longrightarrow \dfrac{dV_1}{dt}(0^+) = \dfrac{10}{1} \Rightarrow V_1'(0^+) = 10\,V$

$V_2(t) = 2\, I_L(t) \Rightarrow V_2'(t) = 2\, I_L'(t)$

$KVL:\ V_1(0^+) = V_L(0^+) + V_2(0^+) \longrightarrow 4 = V_L(0^+) + 4 \Rightarrow V_L(0^+) = 0$

$\Rightarrow L\dfrac{dI_L}{dt}(0^+) = 0 \Rightarrow \dfrac{dI_L}{dt}(0^+) = 0 \qquad V_2'(0^+) = 2\, I_L'(0^+) = 0$

مثال) شرایط اولیه را طوری بیابید تا فرکانس طبیعی کوچکتر در پاسخ $i(t)$ ظاهر نشود؟



$$\begin{cases} i_L(0^-) = I_0 \\ V_C(0^-) = V_0 \end{cases}$$

$KCL\ (A):\quad i_1 + i_C + i = 0$

$i_1 = \frac{v_C}{2} \qquad i_C = C\frac{dv_C}{dt} = \frac{dv_C}{dt} \longrightarrow 0/5\, v_C + \frac{dv_C}{dt} + i(t) = 0 \quad *$

$KVL:\ -v_C + v_L(t) + 3i(t) = 0 \longrightarrow v_C(t) = v_L(t) + 3i(t) = \frac{di}{dt} + 3i(t)$

$\xrightarrow{*}\ 0/5\left(\frac{di}{dt} + 3i(t)\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{di}{dt} + 3i(t)\right) + i(t) = 0$

$\Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + 3/5\frac{di}{dt} + 2/5\, i(t) = 0 \Longrightarrow s^2 + 3/5\, s + 2/5 = 0 \Longleftarrow$ معادله مشخصه

$\begin{cases} s_1 = -2/5 \\ s_2 = -1 \end{cases}$

پاسخ طبیعی مدار $i(t) = \underbrace{K_1}e^{-t} + \underbrace{K_2}e^{-2/5t}$

مجهول

(1)

$\boxed{i_L(0^+) = i(0^+) = I_0} \qquad v_C(0^+) = \overset{1}{L}\frac{di}{dt}(0^+) + 3i(0^+)$

(2)

$\Rightarrow V_0 = \frac{di}{dt}(0^+) + 3I_0 \Longrightarrow \boxed{\frac{di}{dt}(0^+) = V_0 - 3I_0}$

(از روی رابطه درس که میره) $i(0^+) = K_1 + K_2 = I_0$

$\frac{di(t)}{dt} = -K_1e^{-t} - 2/5K_2e^{-2/5t} \qquad \frac{di}{dt}(0^+) = -K_1 - 2/5K_2 = V_0 - 3I$

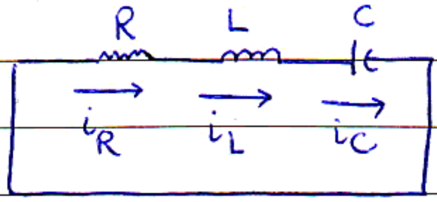
$\begin{cases} K_1 + K_2 = I_0 \\ -K_1 - 2/5K_2 = V_0 - 3I \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1 = \frac{V_0 - 0/5I_0}{1/5} \\ K_2 = \frac{2I_0 - V_0}{1/5} \end{cases}$

برای اینکه نوسانی که حالت ترمولوگ نشود باید $K_2 = 0$ (s_1 باید حذف شود)

$K_2 = \frac{2I_0 - V_0}{1/5} = 0 \Longrightarrow V_0 = 2I_0 \qquad K_2 = 0,\ K_1 = \frac{2I_0 - 0/5I_0}{1/5} = I_0$

$i(t) = I_0 e^{-t} \quad t>0$ (با این شرط اولیه مدار مرتبه ۲ مانند مدار مرتبه ۱ عمل می‌کند)

پاسخ ورودی صفر مدار RLC سری:



$v_C(0^-) = V_0$

$i_L(0^-) = I_0$

متغیر v_C را برای نوشتن معادله دیفرانسیل مدار انتخاب می‌کنیم.

$i_C = i_R = i_L$

KVL : $v_R + v_L + v_C = 0 \qquad i_C = C\dfrac{dv_C}{dt} \longrightarrow i_R = i_L = i_C$

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dv_C}{dt}\right) = LC\frac{d^2v_C}{dt^2}$$

$$v_R = Ri_R = RC\frac{dv_C}{dt} \Longrightarrow RC\frac{dv_C}{dt} + LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + v_C = 0$$

تقسیم بر LC $\longrightarrow \dfrac{d^2v_C}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dv_C}{dt} + \dfrac{v_C}{LC} = 0 \longrightarrow$ معادله دیفرانسیل مدار

محاسبه‌ی شرایط اولیه:

$v_C(0^+) = v_C(0^-) = V_0$

$$\begin{cases} i_C(0^+) = C\dfrac{dv_C}{dt}(0^+) \\ i_C(0^+) = i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0 \end{cases} \qquad \frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{I_0}{C}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v_C}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dv_C}{dt} + \dfrac{v_C}{LC} = 0 \longrightarrow s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC} = 0 \\ v_C(0^+) = V_0 \qquad\qquad \omega_0^2 \triangleq \dfrac{1}{LC} \qquad \boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}} \\ \dfrac{dv_C}{dt}(0^+) = \dfrac{I_0}{C} \end{cases}$$

$2\alpha = \frac{R}{L} \qquad \boxed{\alpha = \frac{R}{2L}} \qquad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Duality دوگانی (همزادی)

اگر معادلات حاکم بر یک مدار با معادلات حاکم بر یک مدار دیگر شبیه باشند، این دو مدار، دوگان یکدیگر هستند.

معادله دیفرانسیل مدار RLC موازی

$$\begin{cases} \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L(t)}{LC} = 0 \\ i_L(0^+) = I_0 \\ \frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{V_0}{L} \end{cases}$$

کمیت اصلی: KVL - جریان - حلقه - سری - خازن - مقاومت R - منبع ولتاژ - مدار باز

کمیت دوگان: KCL - ولتاژ - گره - موازی - سلف - مقاومت $\frac{1}{R}$ - منبع جریان - اتصال کوتاه

کمیت اصلی بار الکتریکی

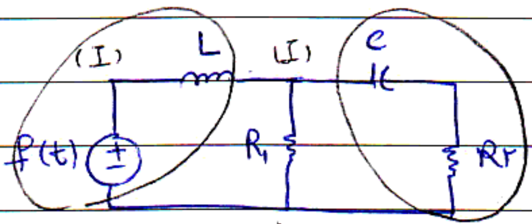
کمیت دوگان شار مغناطیسی

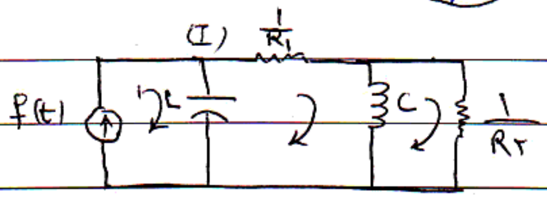
مثال) دوگان KCL را بنویسید.

KCL: جمع جبری جریان‌ها در یک گره برابر صفر است.

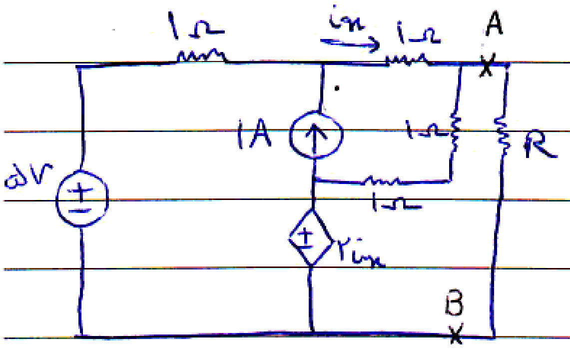
KVL: جمع جبری ولتاژها در یک حلقه برابر صفر است.

مثال) دوگان مدار زیر را بیابید.

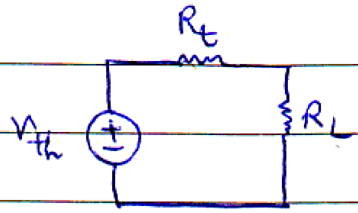




تمرین ۴۹ فصل ۳)

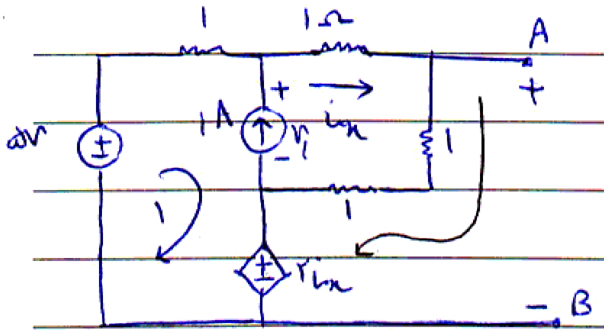


مقصود انتقال توان ماکزیمم



اگر $R_t = R_L$ ← بیشترین توان را جذب می‌کند.

معادل تونن دو سر R را بدست می‌آوریم:



برای محاسبه‌ی V_{th} دو سر مقاومت R را از مدار برمی‌داریم،

$V_{AB} = V_{th}$

KCL: $i_1 + 1 = i_x \rightarrow i_1 = i_x - 1$

KVL: $-5 + i_1 + V_1 + 2i_x = 0$

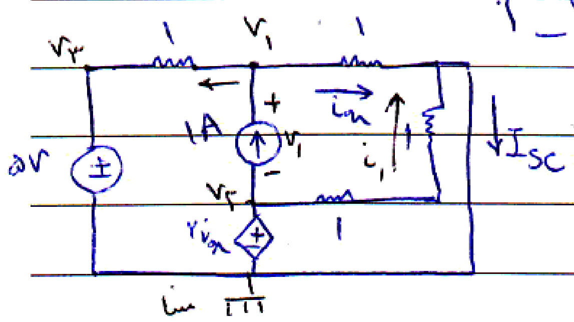
KVL: $-V_1 + 3i_x = 0 \rightarrow V_1 = 3i_x$

$-5 + i_x - 1 + 3i_x + 2i_x = 0$

$6i_x - 6 = 0 \Rightarrow i_x = 1\,A$

$V_{AB} = i_x + i_x + 2i_x = 4i_x \Rightarrow V_{AB} = 4V \Rightarrow V_{th} = 4V$

برای محاسبه‌ی I_N، مقاومت R را اتصال کوتاه می‌کنیم



$V_3 = 5V \qquad V_2 = 2i_x$

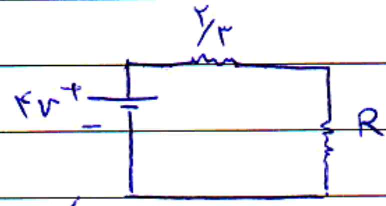
KCL(1): $1 = \frac{V_1 - 5}{1} + \frac{V_1 - 0}{1}$

$\Rightarrow 2V_1 = 6 \Rightarrow V_1 = 3V \qquad i_x = \frac{V_1}{1} = 3A$

$v_2 = 2i_x = 2\times 3 = 6V$ $\qquad i_1 = \frac{v_2 - 0}{2} = \frac{6}{2} = 3A$

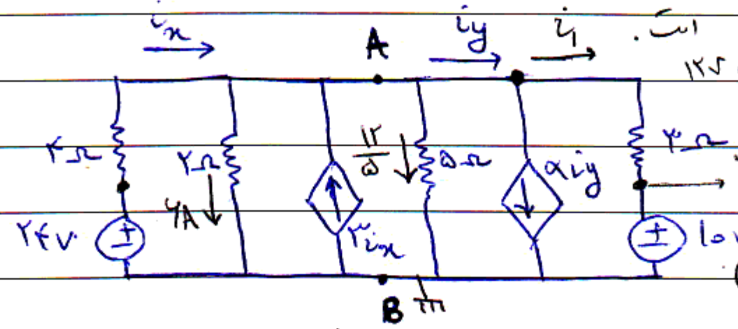
KCL: $i_1 + i_x = I_{sc} \longrightarrow I_{sc} = 6A \Rightarrow I_N = 6A$

$V_{th} = 4 \qquad I_N = 6 \Rightarrow R_{th} = \frac{V_{th}}{I_N} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$



شرط انتقال توان ماکزیمم : $R = \frac{2}{3}\,\Omega$

۴۳/۳ : if $V_{AB} = 12V \quad \alpha = ?$



چون همه با هم موازی اند ولتاژ دو سر همه ی شاخه ها ۱۲V است.

چون ولتاژ این سر مشخص است دیگر آن را در محاسبات منظور نمی‌کنیم

دو روش بکار برید ،

الف) تحلیل گره

ب) معادل نورتن سمت راست دو سر AB

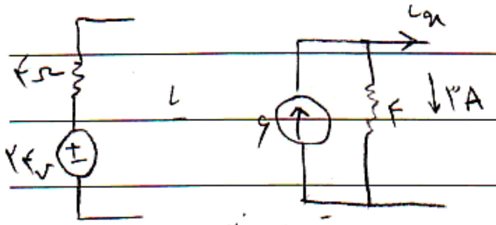
الف) $i_x = \frac{24 - V_{AB}}{4} = 3A \qquad i_1 = \frac{V_{AB} - 10}{3} = \frac{2}{3}A$

KCL: $-i_y + \alpha i_y + i_1 = 0 \longrightarrow i_y(\alpha - 1) = -i_1 \Rightarrow i_y = \frac{2}{3(1-\alpha)}$

KCL(A): $-i_x + 6 - 3i_x + i_y + \frac{12}{5} = 0 \qquad \underbrace{-4(3) + 6}_{-6} + \frac{12}{5} + \frac{2}{3(1-\alpha)} = 0$

-18

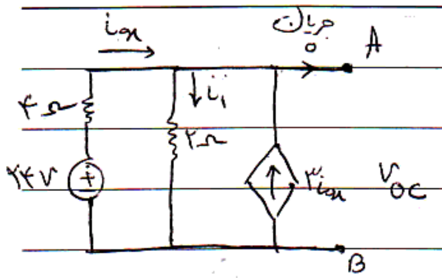
$\frac{-30 + 12}{5} = \frac{-2}{3(1-\alpha)} \longrightarrow \frac{27}{5} = \frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{22}{27}$



تبدیل منابع

Subject: چون دو سر مدار باز است.

Year. Month. Date.



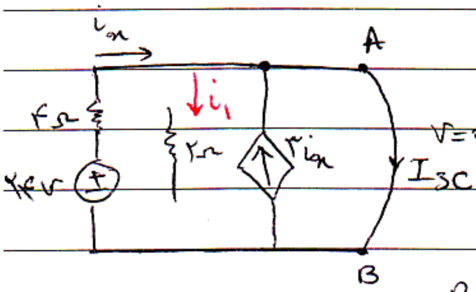
ب) ابتدا سمت چپ مدار: V دو سر AB دیگر ۱۲V نیست.

$$i_1 = \frac{V_{oc}}{2}$$

$$V_{oc} = -4i_x + 24$$

$$KCL: -i_x - 3i_x + i_1 = 0 \Rightarrow 4i_x = i_1 \Rightarrow 4i_x = \frac{V_{oc}}{2} \Rightarrow i_x = \frac{V_{oc}}{8}$$

$$V_{oc} = \frac{-V_{oc}}{2} + 24 \Rightarrow V_{oc} = 16$$



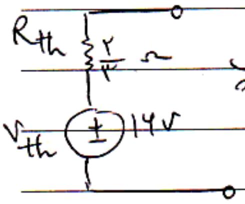
$i_1 = 0$

$$KVL: -24 + 4i_x = 0 \Rightarrow i_x = 6A$$

$$KCL: i_x + 3i_x = I_{s.c} \Rightarrow I_{sc} = 24A$$

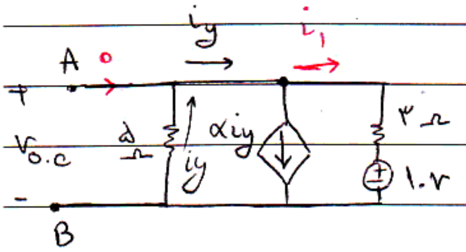
$$V_{oc} = 16V$$

$$R_{th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}\,\Omega$$



معادل تونن سمت چپ

حال سمت راست مدار:



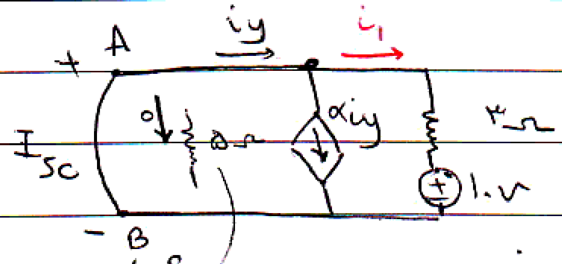
$$① \; KVL: 5i_y + 3i_1 + 10 = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{-10 - 5i_y}{3}$$

$$② \; KCL: i_y = i_1 + \alpha i_y \Rightarrow i_y(1-\alpha) = i_1$$

$$①, ② \Rightarrow i_y(1-\alpha) = \frac{-10 - 5i_y}{3} \Rightarrow 3i_y(1-\alpha) = -10 - 5i_y$$

$$i_y(3 - 3\alpha + 5) = -10$$

$$V_{oc} = -5i_y = \frac{50}{8 - 3\alpha}$$



تأثیر در معادلات وجود ندارد

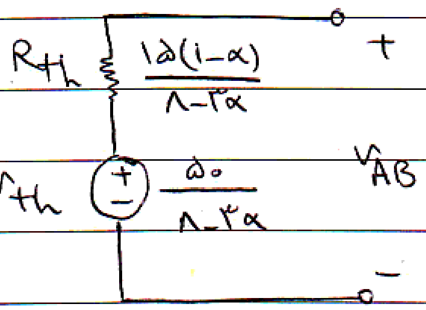
$KVL: \; 3i_1 + 10 = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{-10}{3}$

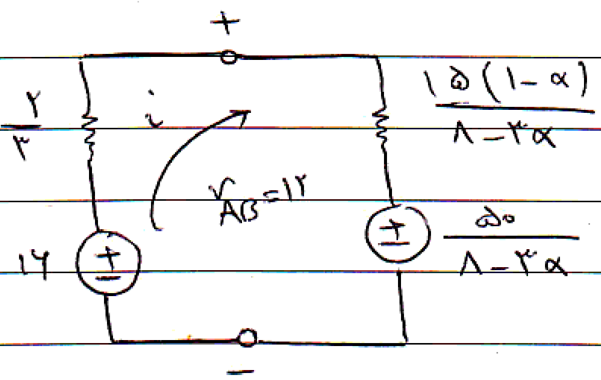
$KCL: \; -i_y + \alpha i_y + i_1 = 0$

$i_y(\alpha - 1) = -i_1 \Rightarrow i_y = \frac{-i_1}{(\alpha-1)} = \frac{+10}{3(\alpha-1)}$

$I_{sc} = -i_y = \frac{-10}{3(\alpha-1)}$ $\qquad V_{oc} = -5 i_y = \frac{50}{8-3\alpha}$

$$R_{th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{\frac{50}{8-3\alpha}}{\frac{-10}{3(\alpha-1)}} = \frac{15(1-\alpha)}{8-3\alpha}$$





دو سمت مدار را هم جمع می‌بندیم :

$-14 + \frac{2}{3} i + V_{AB} = 0$

$\frac{2}{3} i = 4 \Rightarrow i = \frac{12}{2} = 6A$

$$\underbrace{V_{AB}}_{12V} = \frac{15(1-\alpha)}{8-3\alpha} \underbrace{i}_{6A} + \frac{50}{8-3\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{22}{27}$$

معادلات حالت :

از دو متغیر استفاده می‌شود ، ولتاژ خازن V_C

جریان سلف i_L

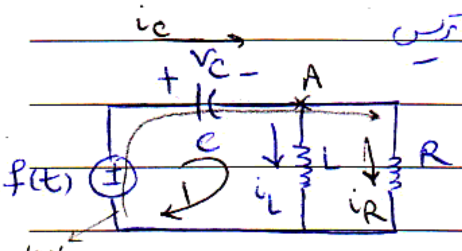
بردار حالت $x = \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix}$

$x(0) = \begin{bmatrix} i_L(0) \\ V_C(0) \end{bmatrix}$

ورودی

$x' = Ax + Bf(t)$

ماتریس



$\frac{f(t)-V_C}{R}$

مثال) معادلات حالت را برای این مدار بدست آورید؟

$V_C(0) = V_0 \ , \ i_L(0) = I_0$

$KVL(1): \ -f(t) + V_C + L\frac{di_L}{dt} = 0 \quad *$

$KCL(A): \ i_C = i_L + i_R$

$C\frac{dV_C}{dt} = i_L + \frac{f(t)-V_C}{R} \quad *$

$L\frac{di_L}{dt} = -V_C + f(t) \qquad \frac{di_L}{dt} = -\frac{V_C}{L} + \frac{f(t)}{L} \quad (1)$ از * اول بدست آمد

$\frac{dV_C}{dt} = -\frac{V_C}{RC} + \frac{i_L}{C} + \frac{f(t)}{RC} \quad (2)$

(1) و (2) را به صورت ماتریسی می‌نویسیم ، ضرایب $f(t)$ ، ضرایب V_C ، ضرایب i_L

$$\begin{pmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dV_C}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ V_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{RC} \end{pmatrix} f(t)$$

صورت سوال فرض ، $f(t) = u(t) \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad R = \frac{1}{3} \ , \ C = 1F \ , \ L = \frac{1}{2}H$

$x' = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \xrightarrow{L}$ (ضمیمه بعد)

نکته ، $L(x) = X(S) \qquad x' = Ax + Bf(t) \xrightarrow{L}$

$L(x') = SX(S) - X(0) \qquad SX(S) - X(0) = AX(S) + BF(S)$

$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=1$

Subject:

Year. Month. Date.

$\mathcal{L}(u(t))=\frac{1}{s}$

مثلاً:

$\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s^2+1)(s-1)}=$

$L^{-1}\ \frac{As+B}{(s^2+1)}+\frac{C}{(s-1)}$

$$sX(s)-AX(s)=X(0)+BF(s)$$

$$(sI-A)X(s)=X(0)+BF(s)$$

ماتریس همانی $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\longrightarrow X(s)=(sI-A)^{-1}(X(0)+BF(s))\xrightarrow{L^{-1}} X=$

حل معادله: $X'=\begin{pmatrix}0&-2\\1&-3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}u(t)\xrightarrow{L}$

$$sX(s)-X(0)=\begin{bmatrix}0&-2\\1&-3\end{bmatrix}X(s)+\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

$$sX(s)-\begin{bmatrix}0&-2\\1&-3\end{bmatrix}X(s)=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\frac{1}{s}+X(0)$$

از $X(s)$ فاکتور:

$$\left(sI-\begin{bmatrix}0&-2\\1&-3\end{bmatrix}\right)X(s)=\begin{bmatrix}\frac{2}{s}\\\frac{3}{s}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

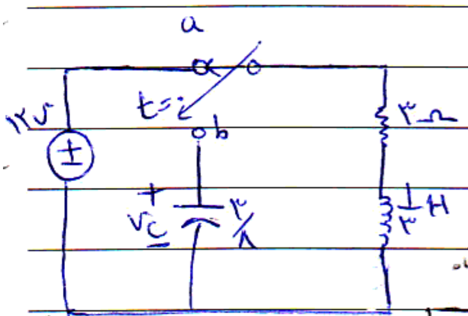
$$\begin{pmatrix}s&2\\-1&s+3\end{pmatrix}X(s)=\begin{pmatrix}\frac{s+2}{s}\\\frac{s+3}{s}\end{pmatrix}\qquad sI=\begin{pmatrix}s&0\\0&s\end{pmatrix}$$

$$X(s)=\begin{bmatrix}s&2\\-1&s+3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{s+2}{s}\\\frac{s+3}{s}\end{bmatrix}\longrightarrow X(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s+3&-2\\1&s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+2}{s}\\\frac{s+3}{s}\end{bmatrix}$$

$$X(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\\\frac{s^2+4s+2}{s(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}\xrightarrow{L^{-1}} X=\begin{bmatrix}i_L\\v_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t}\\1+e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

مثال) در مدار شکل زیر مدت طولانی در وضعیت a بوده است. در لحظه $t=0$ کلید به وضعیت b می‌رود.

$v_C(0^-)=0$

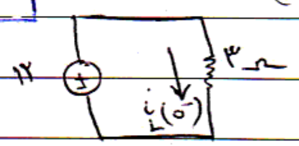


الف) ولتاژ خازن را برای $t\geq 0$ بدست آورید؟

ب) پارامترهای α، ω_0 و Q را بدست آورید؟

برای $t=0^+$ (خازن در مدار وجود ندارد) سلف اتصال کوتاه / خازن مدار باز

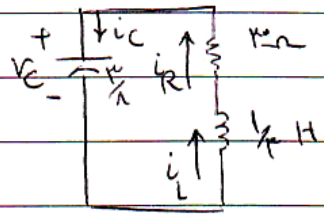
برای $t=0^-$ ⟵ مدار در حالت دائمی



$$i_L(0^-)=\frac{12}{3}=4A$$

در مدار صفحه قبل داریم : شرایط اولیه $v_C(0^+)=0$ و $i_L(0^+)=4A$

برای $t>0$ کلید در وضعیت b قرار دارد و ساختار سمت چپ مدار باز می‌شود.



$$v_C+\frac{1}{4}\frac{di_L}{dt}+3i_R=0$$

$$i_L=i_C=i_R=C\frac{dv_C}{dt}=\frac{3}{8}\frac{dv_C}{dt}$$

$$v_C+\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{8}\frac{dv_C}{dt}\right)+3\times\frac{3}{8}\frac{dv_C}{dt}=0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2v_C}{dt^2}+9\frac{dv_C}{dt}+8v_C=0 \longrightarrow s^2+9s+8=0 \quad \begin{cases} s_1=-1 \\ s_2=-8 \end{cases}$$ حالت فوق میرا

$$\Rightarrow v_C(t)=K_1e^{-t}+K_2e^{-8t}$$ k_1 و k_2 به کمک با استفاده از شرایط اولیه تعیین می‌شود.

$$i_C(0^+) \underset{\downarrow}{=} i_L(0^+)=-4 \longrightarrow C\frac{dv_C}{dt}(0^+)=-4 \longrightarrow \frac{dv_C}{dt}(0^+)=\frac{-4}{C}=\frac{-32}{3}$$

چون در مدار شکل جهت $i_L(0^+)$ را پایین فرض کردیم

$$\begin{cases} v_C(0^+)=K_1+K_2=0 \\ v_C'(0^+)=-K_1-8K_2=\frac{-32}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} K_1=\frac{32}{21} \\ K_2=-\frac{32}{21} \end{cases} \Rightarrow v_C(t)=\frac{32}{21}\left(e^{-t}-e^{-8t}\right) \quad t\geqslant 0$$

$\alpha=\frac{R}{2L}$ سری RLC

$2\alpha=9 \longrightarrow \alpha=4.5$

$\omega_0^2=8 \longrightarrow \omega_0=2\sqrt{2}$

$Q=\frac{\omega_0}{\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{9}$

$$*\ \mathcal{L}(e^{at})=\frac{1}{s-a} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s-a}=e^{at}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=? \quad \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}$$

$$\Rightarrow A=2 ,\ B=-1$$

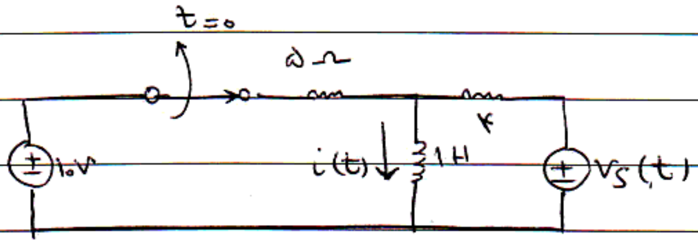
$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\frac{2}{s+1}+\mathcal{L}^{-1}\frac{-1}{s+2}$$

$$=2e^{-t}-e^{-2t}$$

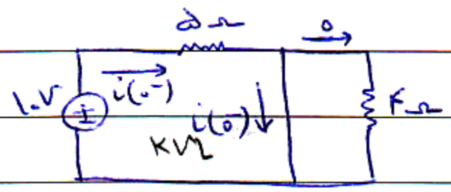
پاسخ تمرینات فصل چهارم ، مدارهای مرتبه اول

۱۰- الف) اگر $V_s(t)=10e^{-2t}u(t)$

ب) $V_s(t)=10e^{-4t}u(t)$



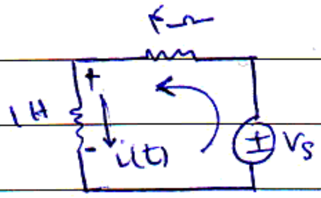
برای $t=0^-$



$i(0^-)=\frac{10}{5}=2A$

$i(0^+)=i(0^-)=2A$ (چون سلف جریان پیوسته دارد و چون منبع $u(t)$ هست $\delta(t)$ نداریم)

برای $t>0$



معادله دیفرانسیل مدار را برحسب $i(t)$ بدست می‌آوریم:

$$KVL:\ -V_s(t)+4i(t)+1\times\frac{di}{dt}=0$$

$$\frac{di}{dt}+4i(t)=V_s(t)\ ,\ t>0$$

$$\frac{di}{dt}+4i=10e^{-2t}\quad t>0 \qquad i(t)=\underbrace{i_h(t)}_{\text{همگن}}+\underbrace{i_p(t)}_{\text{خاص}}$$

محاسبه $i_h(t)$:

$$\frac{di}{dt}+4i=0 \qquad i(t)=Ae^{st}$$

$$\to \underbrace{s+4=0}_{\text{معادله مشخصه}} \Rightarrow s=-4 \Rightarrow \boxed{i_h(t)=Ae^{-4t}}$$

جواب خاص: $i_p(t)=ke^{-2t} \Rightarrow \frac{di_p}{dt}+4i_p=10e^{-2t}$

$$\Rightarrow -2ke^{-2t}+4ke^{-2t}=10e^{-2t} \to k=5 \qquad i_p(t)=5e^{-2t}$$

$i(t) = Ae^{-4t} + 5e^{-2t} \quad , t>0$

$i(0^+) = 2 \qquad t=0 \longrightarrow A + 5 = 2 \longrightarrow A = -3$

$i(t) = -3e^{-4t} + 5e^{-2t} \qquad t>0$

برای اینکه شرط $t>0$ را در تمام معادلات بیاوریم $u(t)$ می‌توانیم ضرب کنیم.

ب)
$$\frac{di}{dt} + 4i = 10e^{-4t} \qquad t>0$$

$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \longrightarrow i_h(t) = Ae^{-4t} \qquad s+4=0$

۴- ریشه معادله مشخصه است پس t در $i_p(t)$ ضرب می‌شود

پاسخ خاص: $i_p(t) = Kte^{-4t}$

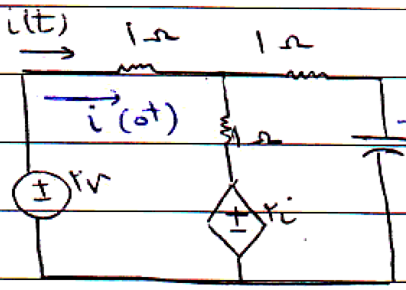
$Ke^{-4t} - 4Kte^{-4t} + 4Kte^{-4t} = 10e^{-4t} \Longrightarrow \boxed{K=10}$

$i(t) = 10te^{-4t} + Ae^{-4t} \quad , t>0$

$i(0^+) = 2 \Longrightarrow A + 0 = 2 \Longrightarrow A = 2 \qquad i(t) = (10te^{-4t} + 2e^{-4t})u(t)$

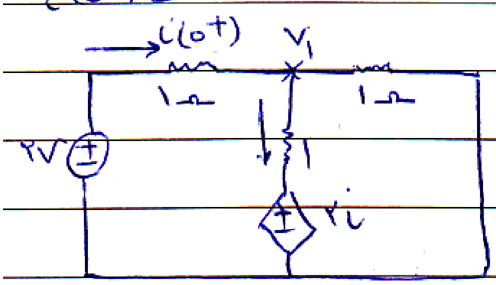
۱۳- $v_c(0^-) = 0$

$t \geq 0 \quad , i(t) = ?$



در $t=0^+$

$v_c(0^+) = 0$

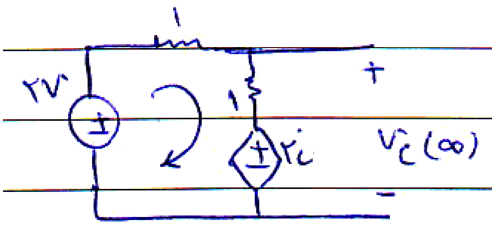


محاسبه $i(0^+) = ?$

$$KCL(1), \quad i(0^+) = \frac{v_1 - 2i(0^+)}{1} + \frac{v_1}{1}$$

$$\boxed{v_1 = \frac{2}{3}i(0^+) + \frac{2}{3}}$$

$$i(0^+)=\frac{۲-v_1}{۱}=۲-\left(\frac{۲}{۳}i(0^+)+\frac{۲}{۳}\right)\Rightarrow \boxed{i(0^+)=۰/۸\ A}$$



محاسبه $v_C(+\infty)$:

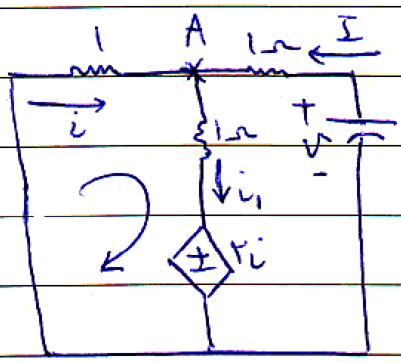
خازن مدار باز می‌شود، شار مستقیم در مدار برقرار است

$$-۲+i+i+۲i=0 \longrightarrow i=\frac{۱}{۲}$$

$$v_C(+\infty)=i+۲i=\frac{۳}{۲}$$

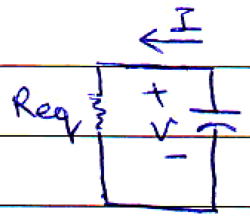
$$\Rightarrow i(0^+)=۰/۸\ A$$

$$i(+\infty)=\frac{۱}{۲}\ A$$



محاسبه τ : محاسبه R_{eq}

$$\frac{v}{I}=R_{eq}$$



$$\frac{v}{I}=R_{eq}$$

$$KCL(A): i+I=i_1$$

$$KVL: i+i_1+۲i=0 \Rightarrow i_1=-۳i$$

$$\begin{cases} i=\dfrac{-I}{۴} \\ i_1=\dfrac{۳I}{۴} \end{cases}$$

$$KVL: ۲i-i_1-I+v=0$$

$$-۲\left(\frac{-I}{۴}\right)-\left(\frac{۳I}{۴}\right)-I+v=0 \longrightarrow v=\frac{۵}{۴}I$$

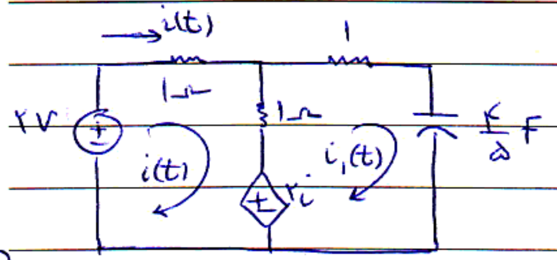
$$R_{eq}=\frac{v}{I}=\frac{۵}{۴}\ \Omega \qquad \tau=R_{eq}C=\frac{۵}{۴}\times\frac{۴}{۵}=۱\ sec$$

$$i(t)=۰/۵+(۰/۸-۰/۵)e^{-t} \qquad i(t)=۰/۵+۰/۳e^{-t} \quad t>0$$

$$v(t)=\frac{1}{c}\int_0^t i_1(\lambda)\,d\lambda$$

Subject:
Year. Month. Date.

روش دوم حل: حل به وسیله معادلات دیفرانسیل



① KVL(1): $-2+i(t)+i(t)-i_1(t)+2i(t)=0$

② KVL(2): $-2i(t)+i_1(t)-i(t)+0+\frac{1}{4/5}\int_0^t i_1(\lambda)\,d\lambda+i_1(t)=0$

① $\to \boxed{i_1(t)=4i(t)-2}$ ② $\to -3i(t)+2i_1(t)+\frac{5}{4}\int_0^t i_1(\lambda)\,d\lambda=0 \xrightarrow{\frac{d}{dt}}$

$$-3\frac{di}{dt}+2\frac{di_1(t)}{dt}+\frac{5}{4}i_1(t)=0$$

$$-3\frac{di}{dt}+2\frac{d}{dt}\left(4i(t)-2\right)+\frac{5}{4}\left(4i(t)-2\right)=0$$

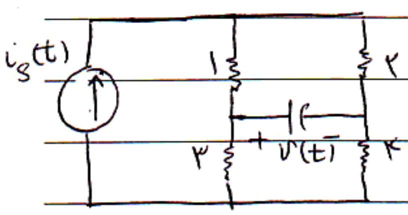
محاسبه $i_h(t)$:

$\frac{di}{dt}+i=\frac{1}{2}$ $\quad i(t)=i_h(t)+i_p(t)$ $\quad \frac{di}{dt}+i=0$ $\quad S+1=0 \to S=-1$

$i_h(t)=Ae^{-t}$

محاسبه $i_p(t)$: $i_p(t)=C \to 0+C=\frac{1}{2} \Rightarrow C=\frac{1}{2} \Rightarrow i_p(t)=\frac{1}{2}$

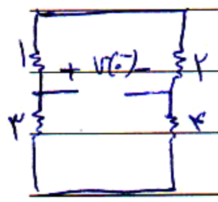
۳۲- پاسخ صفر و پاسخ پله مدار را محاسبه کنید؟



$v(t)=?$

الف) $i_s(t)=u(t)$

$t<0$ مدار بی‌منبع

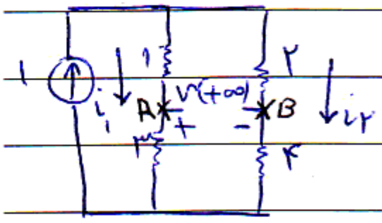


$v(0^-)=0$

$t=0^-$ خازن به حالت دائمی می‌رسد می‌توان مدار باز آن را در نظر گرفت.

$v(0^+) = v(0^-) = 0$

برای $t=+\infty$

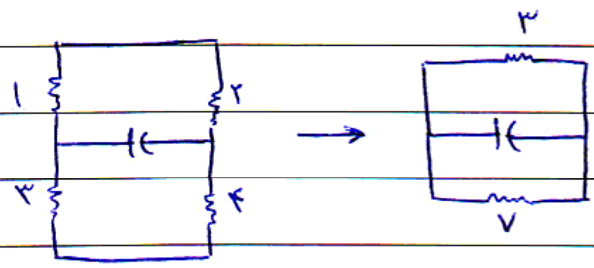


$$i_1 = \frac{6}{10} \times 1 = 0/6$$
$$i_2 = \frac{4}{10} \times 1 = 0/4$$

$$\begin{cases} V_A = 3 i_1 = 1/8 V \\ V_B = 4 i_2 = 1/6 V \end{cases}$$

$$v(+\infty) = V_A - V_B = 0/2 \ V$$

محاسبه‌ی R_{eq} : منبع را صفر کرده و مقاومت دو سر خازن را حساب می‌کنیم.

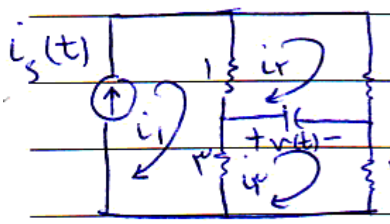


$$R_{eq} = 3 \| 7 = 2/1 \ \Omega$$
$$R_{eq} C = 2/1 \times 1 = 2/1 \ \mathrm{Sec}$$

$$v(t) = 0/2 + (0 - 0/2) e^{-t/2/1}$$
$$v(t) = 0/2 \left(1 - e^{-t/2/1}\right) u(t)$$

برای اینکه شرط $t>0$ را صرف کنیم.

پاسخ ضربه را با استفاده از معادله‌ی دیفرانسیل مدار محاسبه می‌کنیم.



محاسبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل مدار بر حسب $v(t)$:

$$i_1 = i_s(t)$$

$$KVL(2): \ 2 i_2 - v(t) + i_2 - i_s = 0$$

$$KVL(3) = v + 4 i_3 + 3 (i_3 - i_s) = 0$$

$$\begin{cases} i_2 = \dfrac{v + i_s}{3} \\ i_3 = \dfrac{3 i_s - v}{7} \end{cases}$$

بسم الله الرحمن الرحیم

مدارهای الکتریکی ۱

(بخش چهارم)

استاد عادلی

(ازدرون $\qquad \int v\,dt = 0 \qquad i_C = i_۴ - i_۲$

$\delta(t) \qquad \delta \qquad \delta \qquad \delta' \quad$ س

$$1 \swarrow C\frac{dv}{dt} = \frac{۳ i_s - v}{۷} - \frac{v + i_s}{۳} \Longrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{۱۰}{۲۱} v = \frac{۲}{۲۱} i_s(t) = \frac{۲}{۲۱}\delta(t)$$

در طرفین ضربه داریم پس باید $v(0^+)$ ناپیوسته شود ؟ $\qquad v(0^-) = 0$

$$\int_{0^-}^{0^+} v'(t)\,dt + \frac{۱۰}{۲۱}\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} v\,dt}_{0} = \frac{۲}{۲۱}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)$$

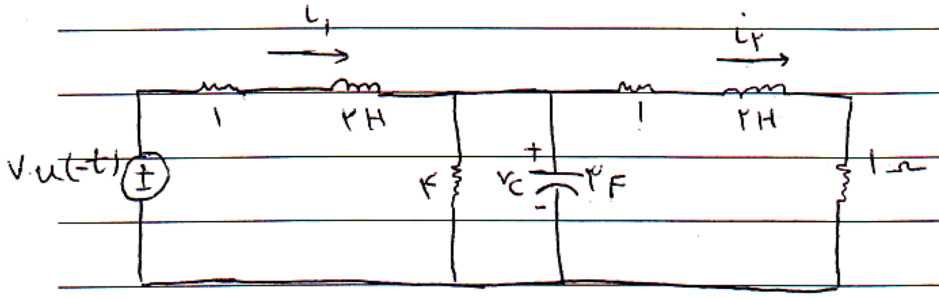
$$v(0^+) - \overset{0}{v(0^-)} + 0 = \frac{۲}{۲۱} \Longrightarrow \boxed{v(0^+) = \frac{۲}{۲۱}}$$

برای $t>0$
$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{۱۰}{۲۱} v = 0 \\ v(0^+) = \dfrac{۲}{۲۱} \end{cases}$$

$$S + \frac{۱۰}{۲۱} = 0 \Longrightarrow S = \frac{-۱۰}{۲۱} \qquad v(t) = Ae^{st} = Ae^{-\frac{۱۰}{۲۱}t}$$

$$v(0^+) = \frac{۲}{۲۱} = A \longrightarrow A = \frac{۲}{۲۱} \qquad v(t) = \frac{۲}{۲۱}e^{-\frac{۱۰}{۲۱}t} \quad t>0$$

$$v(t) = \frac{۲}{۲۱}e^{-\frac{۱۰}{۲۱}t}u(t)$$



۲V

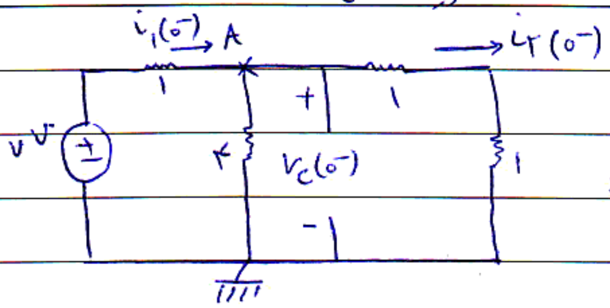
الف) $i_1(0^+)$, $i_۲(0^+)$, $v_C(0^+)$ = ؟

ب) $\frac{di_1}{dt}(0^+)$, $\frac{di_۲}{dt}(0^+)$, $\frac{dv_C}{dt}(0^+)$ = ؟

ج) $\frac{d^2 i_1}{dt^2}(0^+)$, $\frac{d^2 i_۲}{dt^2}(0^+)$, $\frac{d^2 v_C}{dt^2}(0^+)$ = ؟

$t=0^-$ در

$t<0$ در



KCL(A): $\dfrac{V_C(0^-)}{4}+\dfrac{V_C(0^-)}{1+1}+\dfrac{V_C(0^-)-7}{1}=0$

$\longrightarrow V_C(0^-)=4V$

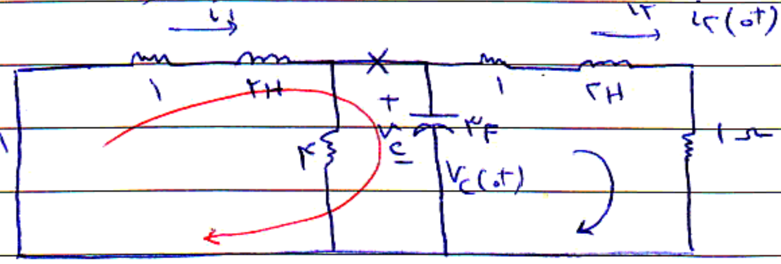
$i_1(0^-)=\dfrac{7-V_C(0^-)}{1}=3A \qquad i_2(0^-)=\dfrac{V_C(0^-)}{2}=\dfrac{4}{2}=2A$

الف) در محاسبه بالا داریم:

$v_C(0^+)=4 \quad , i_1(0^+)=3A \quad , i_1(0^-)=2A$

ب) $t=0^+$

اتصال کوتاه



$v_C(0^+)=i_2(0^+)+2\dfrac{di_2}{dt}(0^+)+i_2(0^+)$

$4=2\times 2+2\dfrac{di_2}{dt}(0^+) \longrightarrow \boxed{\dfrac{di_2}{dt}(0^+)=0}$

$v_C(0^+)=-i_1(0^+)-2\dfrac{di_1}{dt}(0^+)$

$4=-3-2\dfrac{di_1}{dt}(0^+) \longrightarrow \boxed{\dfrac{di_1}{dt}(0^+)=-3/5}$

$i_1(0^+)=i_2(0^+)+\underbrace{C\dfrac{dv_C}{dt}(0^+)}_{i_C(0^+)}+\dfrac{v_C(0^+)}{4}$

$3=2+3\dfrac{dv_C}{dt}(0^+)+\dfrac{4}{4} \longrightarrow \dfrac{dv_C}{dt}(0^+)=0$

ج) از معادله بدست آمده مشتق میگیریم.

$v_C=2i_2+2\dfrac{di_2}{dt} \xrightarrow{d/dt}$

$\dfrac{dv_C}{dt}=\dfrac{2di_2}{dt}+2\dfrac{d^2i_2}{dt^2} \Longrightarrow \underbrace{\dfrac{dv_C}{dt}(0^+)}_{0}=2\dfrac{di_2}{dt}(0^+)+2\dfrac{d^2i_2}{dt^2}(0^+) \ , \ t=0^+$

$$0 = 2\times 0 + 2\frac{d^2 i_2}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 i_2}{dt^2}(0^+) = 0$$

$$v_C = -i_1 - 2\frac{di_1}{dt} \xrightarrow{d/dt} \frac{dv_C}{dt} = -\frac{di_1}{dt} - 2\frac{d^2 i_1}{dt^2}$$

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+) = -\frac{di}{dt}(0^+) - 2\frac{d^2 i_1}{dt^2}(0^+) \qquad , t=0^+ \Rightarrow$$

$$0 = -(-3.5) - 2\frac{d^2 i_1}{dt^2}(0^+) \Rightarrow \frac{d^2 i_1(0^+)}{dt^2} = 1.75 = \left(\frac{7}{4}\right)$$

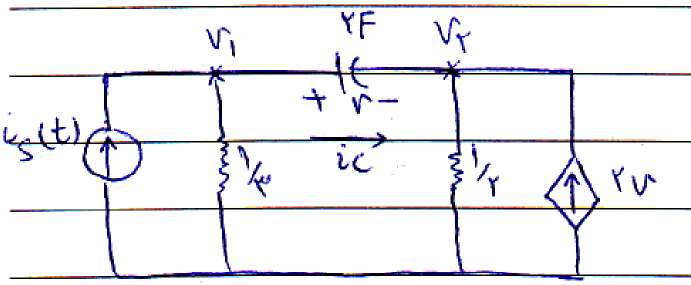
$$\text{KCL} \quad i_1 = \frac{v_C}{4} + \underbrace{i_C}_{2\frac{dv_C}{dt}} + i_2 \longrightarrow \frac{d}{dt}$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{4}\frac{dv_C}{dt} + 2\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{di_2}{dt}$$

$$t=0^+ \quad \frac{di_1}{dt}(0^+) = \frac{1}{4}\frac{dv_C}{dt}(0^+) + 2\frac{d^2 v_C}{dt^2}(0^+) + \frac{di_2}{dt}(0^+)$$

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2}(0^+) = \frac{-3.5}{2}$$

۱۴)



$$\text{KCL (1)}: \quad i_s(t) = \frac{v_1}{1/3} + \frac{2dv}{dt} = 3v_1 + \frac{2dv}{dt} \longrightarrow v_1 = \frac{1}{3}i_s - \frac{2}{3}\frac{dv}{dt}$$

$$\text{KCL (2)}: \quad i_C + 2v = \frac{v_2}{1/2} \longrightarrow v_2 = \frac{dv}{dt} + v$$

$$v = v_1 - v_2 \qquad v = \left(\frac{1}{3}i_s - \frac{2}{3}\frac{dv}{dt}\right) - \left(\frac{dv}{dt} + v\right)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6}{5}v = \frac{1}{5}i_s$$ معادله دیفرانسیل مدار

ب) پاسخ پله و پاسخ ضربه: پاسخ پله: $i_s(t)=u(t)$

$$\frac{dv}{dt}+\frac{4}{5}v=\frac{1}{5}u(t)$$

برای $t<0$ $\frac{dv}{dt}+\frac{4}{5}v=0$

در $t=0^-$ ← v خازن ثابت $\boxed{0+\frac{4}{5}v(0^-)=0 \rightarrow v(0^-)=0}$

منبع ضربه ندارد ← $v(0^+)=0$

برای $t>0$: $\frac{dv}{dt}+\frac{4}{5}v=\frac{1}{5}$

$$v(t)=v_h(t)+v_p(t)$$

$v_h(t)=?$

$$\frac{dv}{dt}+\frac{4}{5}v=0 \longrightarrow s+\frac{4}{5}=0 \longrightarrow s=-\frac{4}{5}$$

$v_h(t)=Ae^{-\frac{4}{5}t}$ $v_p(t)=K$ $\boxed{0+\frac{4}{5}K=\frac{1}{5} \Rightarrow K=\frac{1}{4}}$

$$v(t)=\frac{1}{4}+Ae^{-\frac{4}{5}t} \longrightarrow v(0^+)=\frac{1}{4}+A=0 \Rightarrow A=-\frac{1}{4}$$

$$v(t)=\frac{1}{4}\left(1-e^{-\frac{4}{5}t}\right)u(t)$$

پاسخ ضربه: $i_s(t)=\delta(t)$ $\frac{dv}{dt}+\frac{4}{5}v=\frac{1}{5}\delta(t) \longrightarrow \int_{0^-}^{0^+}$

برای $t<0$، $\frac{dv}{dt}+\frac{4}{5}v=0$
$v(0^-)=0$

مسئله را به 0^+ می‌بریم؟

$$\int_{0^-}^{0^+} v'(t)dt+\frac{4}{5}\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} v\,dt}_{0}=\frac{1}{5}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt$$

$$v(0^+) - \underbrace{v(0^-)}_{0} + 0 = \frac{1}{5} \Rightarrow v(0^+) = \frac{1}{5}$$

برای $t>0$:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{4}{5}v = 0 \\ v(0^+) = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$v(t) = Ae^{st} \qquad s + \frac{4}{5} = 0 \longrightarrow s = -\frac{4}{5}$$

$$\begin{cases} v(t) = Ae^{-\frac{4}{5}t} \\ v(0^+) = \frac{1}{5} = A \end{cases} \longrightarrow \boxed{v(t) = \frac{1}{5}e^{-\frac{4}{5}t}\, u(t)}$$

حل مجدد با استفاده از تبدیل لاپلاس :

$$sV(s) - \overset{0}{v(0^-)} + \frac{4}{5}V(s) = \frac{1}{5} \xrightarrow{\mathcal{L}(\delta(t)) = 1}$$

$$\left(s + \frac{4}{5}\right)V(s) = \frac{1}{5} \longrightarrow V_s = \frac{1/5}{s + 4/5} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} v(t) = \frac{1}{5}e^{-\frac{4}{5}t} \quad t>0$$

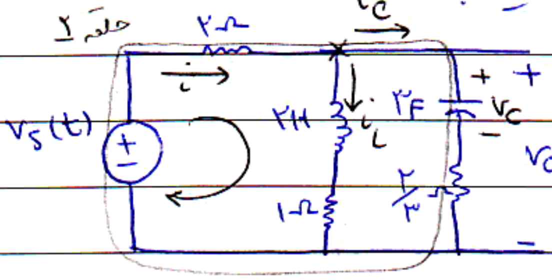
مثال) در مدار زیر و :

الف) معادلات حالت را بنویسید!

ب) ولتاژ خروجی $v_o(t)$ را برحسب متغیرهای حالت بیان کنید؟

ج) مقدار شرایط اولیه ی i_L و v_C ، $v_o(t)$ را حساب کنید؟

v_C و i_L متغیرها هستند.



ورودی

$$x=\begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} \qquad x' = Ax + Bf(t)$$

$$KVL: -v_s(t)+2i+2\frac{di_L}{dt}+i_L=0 \quad , \quad KCL: i=i_L+i_C=i_L+3\frac{dv_C}{dt}$$

$$\Rightarrow -v_s(t)+2\left(i_L+3\frac{dv_C}{dt}\right)+2\frac{di_L}{dt}+i_L=0$$

$$\boxed{6\frac{dv_C}{dt}+2\frac{di_L}{dt}=v_s(t)-3i_L} \ **$$

$$\frac{2}{3}i_C=\frac{2}{3}\times 3\frac{dv_C}{dt}$$

حلقه ۲ KVL ، $-v_s+2\left(i_L+3\frac{dv_C}{dt}\right)+v_C+2\frac{dv_C}{dt}=0$

$$\boxed{8\frac{dv_C}{dt}=v_s-2i_L-v_C \Rightarrow \frac{dv_C}{dt}=\frac{-1}{4}i_L-\frac{1}{8}v_C+\frac{1}{8}v_s} \ *$$

$$6\left(\frac{-1}{4}i_L-\frac{1}{8}v_C+\frac{1}{8}v_s\right)+2\frac{di_L}{dt}=v_s(t)-3i_L$$

$$\boxed{\frac{di_L}{dt}=\frac{-3}{4}i_L+\frac{3}{8}v_C+\frac{1}{\cancel{4}8}v_s}$$

wikipedia.com

Laplace Transform

Subject:
Year. Month. Date.

ضرایب i_L ضرایب v_C

$$x' = \begin{pmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_C}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} v_s$$

تمرین) درصورتیکه $V_s(t)=\delta(t)$ (الف) معادلات حالت را نوشته و $i_L(t)$ و $V_C(t)$ را بدست آورید؟
ب) $V_s(t)=u(t)$ تعیین

خروجی $V_o(t)$ را برحسب متغیرهای حالت بدست آورید؟ بعد از آن تساوی i_L و V_C و $V_o(t)$ را حساب کنید؟

تست سوال قبل)

$$v_o = v_C + \frac{2}{3} i_C = v_C + \frac{2}{3} \times 3 \frac{dv_C}{dt}$$

$$v_o = v_C + 2\frac{dv_C}{dt} = v_C + 2\left(-\frac{1}{4} i_L - \frac{1}{8} v_C + \frac{1}{8} v_s\right)$$

$$\boxed{v_o = -\frac{1}{2} i_L + \frac{3}{4} v_C + \frac{v_s}{4}} \qquad v_o = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \frac{1}{4} v_s$$

فصل ۶ : خواص سیستمهای LTI

روابط خطی و تغییرناپذیری را بررسی کنید؟

ملاحظه تمرین) خطی بودن و تغییرناپذیر بودن با زمان را برای روابط روبرو بدست آورید؟ (ورودی و خروجی را به ترتیب v_1 و i در نظر بگیرید) $(i - v_1)$

$$\begin{cases} i(t) = v_1(t) v_2(t) + v_1(t) \\ i(t) = t^2 v_1(t) \\ i(t) = (2\sin t + 1) v_1(t) \end{cases}$$

سیستم LTI در فرم کلی : معادله دیفرانسیل مدار LTI یک معادله خطی است با ضرایب ثابت. این معادله با ضرایب ثابت هستند.

ناشی از خطی بودن سیستم

ناشی از تغییرناپذیر بودن با زمان

$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t)$

ورودی   خروجی

مشتق ام y مشتق ام x

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = b_m x^{(m)} + b_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + b_1 x^{(1)} + b_0 x(t)$$

$$\delta''(t) \quad \delta'(t) \quad \delta(t) \quad \delta(t) \Rightarrow$$ پس $y(t)$ شامل ضربه نیست.

مثال) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید؟

$$* \quad 2y''(t) + 4y'(t) + 10y(t) = \delta(t)$$

$$y(0^-) = y'(0^-) = 0$$

تعریف شرایط صفر مثبت؟

ابتدا انتگرال نامعین از رابطه * :

$$2y'(t) + 4y(t) + 10\int y(t)\,dt = u(t)$$

$$\xrightarrow{\int_{0^-}^{0^+}} 2\int_{0^-}^{0^+} y'(t)\,dt + 4\cancel{\int_{0^-}^{0^+} y(t)} + 10\cancel{\int_{0^-}^{0^+}\left(\int y(t)\,dt\right) dt} = \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} u(t)\,dt}_{r(t)\big|_{0^-}^{0^+} = 0}$$

چون $y(t)$ شامل ضربه نیست.

$$2\left(y(0^+) - y(0^-)\right) = \left(\underset{\text{تابع شیب واحد}}{t\,u(t)}\right)\Big|_{0^-}^{0^+} = 0$$

$$y(0^+) = y(0^-) = 0$$

$\int y\,dt \longrightarrow$ ضربه دارد

$\int y\,dt \quad \delta(t)$

$y(t) \quad \delta'(t)$

$y' \quad \delta''$

$y'' \quad \delta'''$

$y'(0^+) = ? \longleftarrow$ از رابطه اصلی (*) از $\int_{0^-}^{0^+}$ انتگرال می‌گیریم:

$$2\int_{0^-}^{0^+} y''\,dt + 4\int_{0^-}^{0^+} y'\,dt + 10\cancel{\int_{0^-}^{0^+} y(t)\,dt} = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt$$

$$2\left(y'(0^+) - y'(0^-)\right) + 4\left(y(0^+) - y(0^-)\right) + 0 = 1 \Rightarrow 2y'(0^+) = 1$$

$$y'(0^+) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 2y''(t) + 4y'(t) + 10y(t) = 0 & t > 0 \\ y(0^+) = 0 \\ y'(0^+) = \frac{1}{2} \end{cases}$$ معادله همگن

معادله مشخصه: $2s^2+4s+10=0 \longrightarrow s^2+2s+5=0 \Rightarrow s=-1\pm 2j$

$y(t)=Ke^{-t}\cos(\overset{\omega_d}{2}t+\theta)$

$K, \theta = ?$

$y(0^+)=0 \longrightarrow K\cos\theta=0 \Rightarrow \begin{cases} K=0 \text{ غ ق} \longrightarrow \\ \cos\theta=0 \longrightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ نمی‌تواند صفر باشد چون در این صورت $y(t)$ کلاً صفر می‌شود اما دنبال جواب غیرصفر هستیم.

$y'(t)=-Ke^{-t}\cos(2t+\theta)-2Ke^{-t}\sin(2t+\theta)$

$y'(0^+)=-K\cancel{\cos\theta}-2K\cancel{\sin\theta}=\frac{1}{2} \Rightarrow -2K=\frac{1}{2} \Rightarrow K=\frac{-1}{4}$

$y(t)=\frac{-1}{4}e^{-t}\cos(2t+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{4}e^{-t}\sin 2t$

$s=-1\pm 2j \qquad e^{(-1+2j)t}, e^{(-1-2j)t}$

قسمت های حقیقی و موهومی هر جواب یک جواب معادله همگن خواهد بود.

$e^{-t}e^{2jt}=e^{-t}(\cos 2t+j\sin 2t)=\underbrace{e^{-t}\cos 2t}_{\text{حقیقی}}+j\underbrace{e^{-t}\sin 2t}_{\text{موهومی}}$

قضیه اویلر $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$

$\boxed{y(t)=Ke^{-t}\cos 2t+K'e^{-t}\sin 2t} \qquad K=0, K'=\frac{1}{4}$

$y(t)=e^{-t}(A\cos 2t+B\sin 2t)$ اگر شرایط اولیه اعمال شود؟

$a_0y^{(m)}+a_1y^{(m-1)}+a_2y^{(m-2)}+\dots+a_my=b_0x^{(N)}+b_1x^{(N-1)}+\dots+b_Nx$

حالت خاص if $M>N \qquad h(t)=(K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}+\dots+K_me^{s_mt})u(t)$

$S_1, S_2, \dots, S_M$ ریشه‌های معادله مشخصه همگن معادله

حالت‌های اساسی

$$\begin{cases} M=N \rightarrow h(t)=(k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}+\dots+k_me^{s_mt})u(t)+A\delta(t) \\ M<N \rightarrow h(t)=(\qquad\qquad)u(t)+A\delta(t)+B\delta'(t)+\dots \end{cases}$$

بالاترین مرتبه مشتق $\delta(t)$ برابر با تفاضل M و N

مثال) پاسخ ضربه سیستم با معادله زیر را به دست آورید؟

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3x'''(t)+2x''(t)+x(t)$$

$(M<N)$

$$\text{if}\quad x(t)=\delta(t)\longrightarrow y(t)=h(t)$$

$$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=3\delta''(t)+2\delta''(t)+\delta(t)$$

ابتدا ریشه‌های معادله مشخصه را پیدا می‌کنیم :

معادله مشخصه $\quad s^2+5s+6=0 \begin{cases} s_1=-2 \\ s_2=-3 \end{cases}$

مشتق اول در دو جمله + مشتق دوم دارد

$$h(t)=(k_1e^{-2t}+k_2e^{-3t})u(t)+A\delta(t)+B\delta'(t)$$

حالت سوم

$$\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$$

$$h'(t)=(-2k_1e^{-2t}-3k_2e^{-3t})u(t)+(k_1e^{-2t}+k_2e^{-3t})\delta(t)+A\delta'(t)+B\delta''(t)$$

t=0 می‌گذاریم

$$h'(t)=(\qquad\qquad)u(t)+(k_1+k_2)\delta(t)+$$

$$h''(t)=(4k_1e^{-2t}+9k_2e^{-3t})u(t)+(-2k_1e^{-2t}-3k_2e^{-3t})\delta(t)+$$

t=0 می‌گذاریم

$$(k_1+k_2)\delta'(t)+A\delta''(t)+B\delta'''(t)$$

ضرایب

$\delta(t):\quad -2k_1-3k_2+5k_1+5k_2+6A=1$

$\delta'(t):\quad k_1+k_2+5A+6B=0$

$\delta''(t):\ A + 5B = 2 \longrightarrow A = -13$

$\delta'''(t):\ B = 3$

$$\begin{cases} k_1 = -15 \\ k_2 = 42 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(t) = (-15e^{-2t} + 42e^{-3t})u(t) - 13\delta(t) + 3\delta'(t)$$

مثال ۲) پاسخ ضربه‌ی سیستم با معادله‌ی زیر را به دست آورید؟

$y'' + y' + y = x'(t) + x(t)$

$\text{if } x(t) = \delta(t) \rightarrow y(t) = h(t)$

$$h''(t) + h'(t) + h(t) = \delta'(t) + \delta(t) \quad *$$

$h''(t) + h'(t) + h(t) = 0 \qquad h(t) = 0 \quad t<0$ برای $t<0$

$h(0^-) = 0 \ , \ h'(0^-) = 0$

شرایط اولیه را صفر در نظر می‌گیریم ، از رابطه‌ی * انتگرال نامعین می‌گیریم :

$$\int \longrightarrow h'(t) + h(t) + \int h(t)\,dt = \delta(t) + u(t) \Rightarrow \int_{0^-}^{0^+}$$

$$\int_{0^-}^{0^+} h'\,dt + \cancel{\int_{0^-}^{0^+} h(t)\,dt} + \cancel{\int_{0^-}^{0^+}\int h(t)\,dt} = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) + \int_{0^-}^{0^+} u(t)\,dt$$

صفر می‌شود

$h(0^+) - h(0^-) + 0 + 0 = 1 + 0 \qquad \left(t\,u(t)\right)\Big|_{0^-}^{0^+} = 0$

$h(0^+) = h(0^-) + 1 = 0 + 1 \longrightarrow h(0^+) = 1$

$$\int_{0^-}^{0^+} * \text{ از } \Rightarrow h'(0^+) - \overset{0}{h'(0^-)} + \overset{1}{h(0^+)} - \overset{0}{h(0^-)} + 0 = 0 + 1 \Rightarrow h'(0^+) = 0$$

چونکه :

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta'(t)\,dt = \delta(t)\Big|_{0^-}^{0^+} = 0$$

پاسخ $h(t)$ را در حالت کلی، ضرایب A و B را بیابید؟

برای $t>0$:

$$\begin{cases} h''(t)+h'(t)+h(t)=0 \\ h(0^+)=1 \\ h'(0^+)=0 \end{cases}$$

$$s^2+s+1=0 \qquad s=\frac{-1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad h(t)=Ke^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\theta\right)u(t)$$

محاسبه k و θ :

$$h(0^+)=K\cos\theta=1$$

$$h'(t)=\frac{-1}{2}Ke^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\theta\right)-K\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\theta\right)$$

$$h'(0^+)=\frac{-1}{2}K\cos\theta-K\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=0 \Rightarrow tg\theta=\frac{-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{\theta=\frac{-\pi}{6}}$$

$$K\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)=1 \rightarrow \boxed{K=\frac{2}{\sqrt{3}}} \qquad h(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$h(t)=\left(K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}\right)u(t)$$

$$K_1e^{-\frac{1}{2}t}e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t}+K_2e^{-\frac{1}{2}t}e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}$$

$$e^{-\frac{1}{2}t}\left(K_1e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t}+K_2e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right)u(t)$$

$$e^{-\frac{1}{2}t}\left(K_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+K_1 i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+K_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-K_2 i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

$$h(t)=\left(\underbrace{(K_1+K_2)}_{A}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\underbrace{(K_1-K_2)}_{B}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

$$h(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

تمرین با دانشجو

محاسبه پاسخ حالت صفر در LTI به ورودی دلخواه :

انتگرال کانولوشن

$$\text{ورودی}\quad x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t)\quad\text{خروجی}$$

if $x(t)=\delta(t) \longrightarrow y(t)=h(t)$

تغییرناپذیر بودن با زمان TI : if $x(t) = \delta(t - t_0) \longrightarrow y(t) = h(t - t_0)$

خطی بودن L : if $x(t) = a\,\delta(t) \longrightarrow y(t) = a\,h(t)$

LTI : if $x(t) = a\,\delta(t - t_0) \longrightarrow y(t) = a\,h(t - t_0)$

$$y(t) = \underbrace{x(t)}_{\text{ورودی}} \underbrace{*}_{\text{convolution}} \underbrace{h(t)}_{\text{پاسخ ضربه}} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

: $y(t)$ ، پاسخ حالت صفر ورودی $x(t)$

خواص کانولوشن :

۱ـ جابجایی Commutative

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

۲ـ توزیع‌پذیری Distributive

$$x(t) * \big(h_1(t) + h_2(t)\big) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

۳) شرکت‌پذیری Associative

$$x(t) * \big(h_1(t) * h_2(t)\big) = \big(x(t) * h_1(t)\big) * h_2(t)$$

۴) کانولوشن هر تابعی با تابع ضربه، خودش می‌شود.

$$\begin{cases} x(t) * \delta(t) = x(t) \\ x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \end{cases}$$

۵) $$\frac{d}{dt}\big(x(t) * h(t)\big) = \frac{dx(t)}{dt} * h(t) = x(t) * \frac{dh(t)}{dt}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

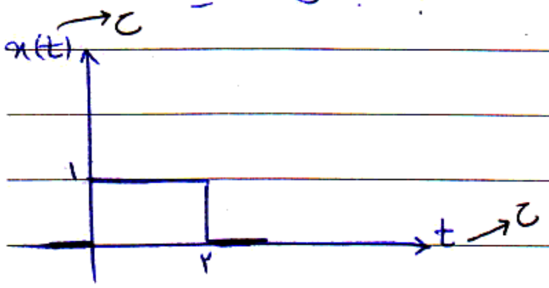
در صورتیکه از رابطه‌ی فوق تبدیل لاپلاس بگیریم:

$$Y(S) = H(S)\, X(S)$$

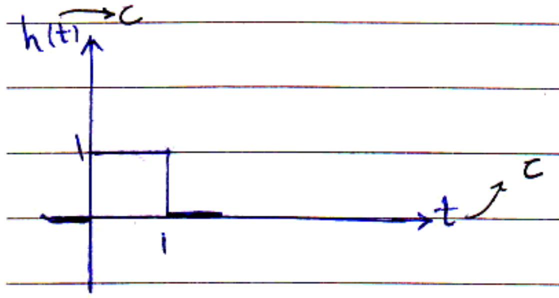
$$Y(S) = \mathcal{L}\left(y(t)\right)$$

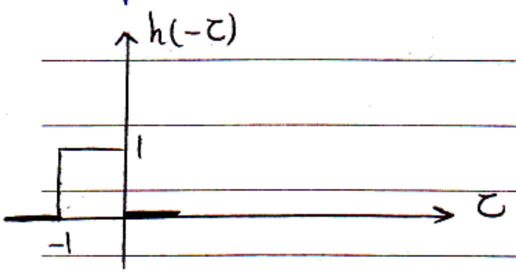
$$X(S) = \mathcal{L}\left(x(t)\right) \quad , \quad H(S) = \mathcal{L}\left(h(t)\right)$$

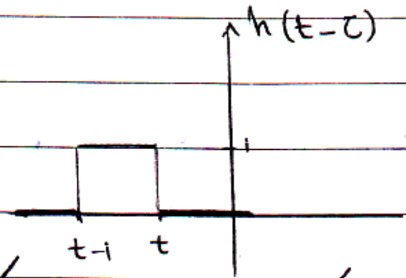
مثال) در یک سیستم LTI، ورودی $x(t)$ و پاسخ ضربه $h(t)$ مطابق شکل‌های زیر داده شده است. خروجی $y(t)$ را محاسبه کنید؟



با توجه به تعریف: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

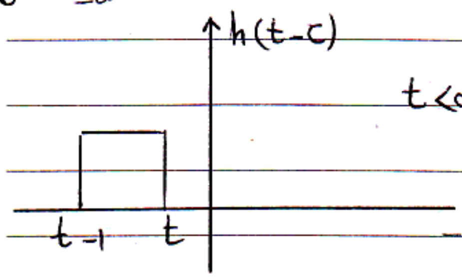






$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

t را از $-\infty$ تا ∞ تغییر می‌دهیم و انتگرال کانولوشن را محاسبه می‌کنیم.



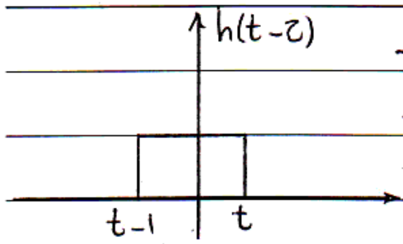
$t < 0 \longrightarrow y(t) = 0$

$\longrightarrow$ شکل سمت چپ محور و شکل $x(t)$ سمت راست محور

$$\Rightarrow x(\tau)\, h(t-\tau) = 0$$

$$\Rightarrow \int \cdots = 0$$

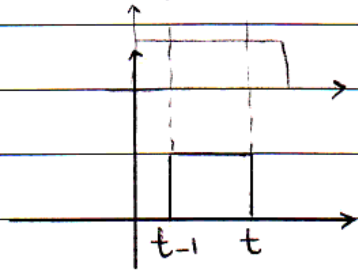
۱۵ – سمت چپی را shift می‌دهیم.



$t>0$, $t-1<0$ $\overset{\text{۱–۲ اشتراک}}{\Longrightarrow}$ $0<t<1$

$$y(t)=\int_0^t 1\times 1\, d\tau = t$$

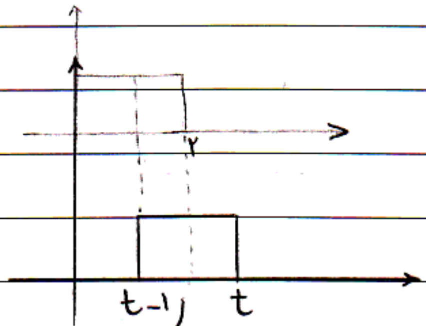
$y(t)$ در تمامی نقاط صفر.



$$\begin{cases} t-1>0 \\ t<۲ \end{cases} \overset{\text{۱–۲ اشتراک}}{\Longrightarrow} 1<t<۲$$

$$y(t)=\int_{t-1}^{t} (1\times 1)\, d\tau = t-(t-1)=1$$

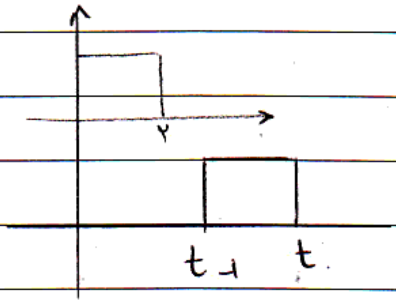
اشتراک روی این محدوده غیر صفر است



$t-1<۲$, $t>۲ \Longrightarrow ۲<t<۳$

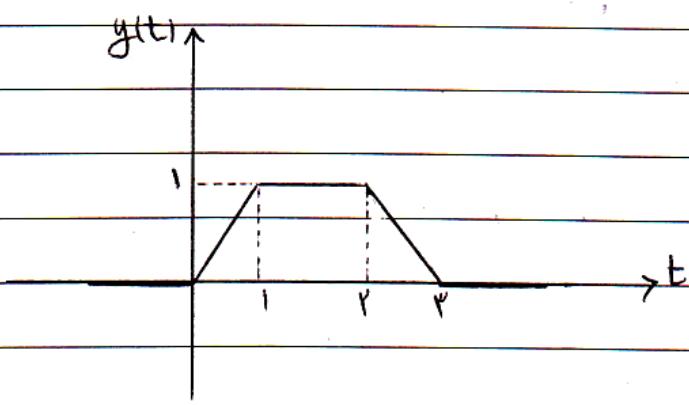
$$y(t)=\int_{t-1}^{۲} (1\times 1)\, d\tau = ۲-t$$

روی این محدوده اشتراک غیر صفر



$t-1>۲ \Longrightarrow t>۳$

$$y(t)=\int 0 = 0$$



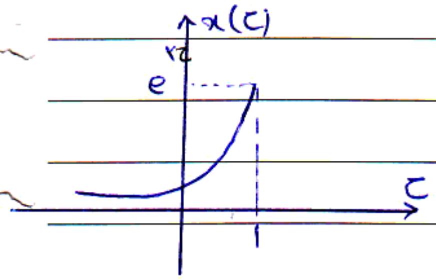
$$x(t) = \begin{cases} e^{\cdots} & t<1 \\ 0 & t>1 \end{cases}$$

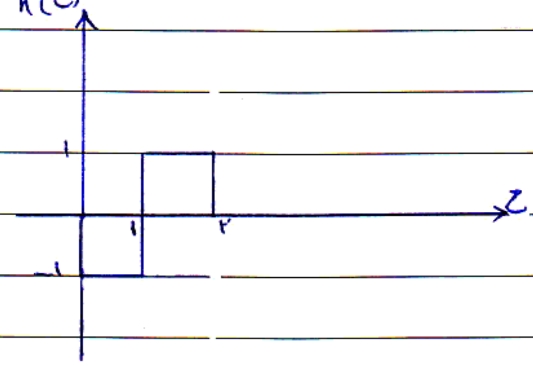
Subject:

Year. Month. Date.

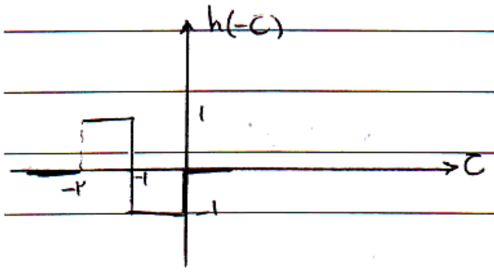
مثال ۵) برای یک سیستم LTI، $x(t)$ و $h(t)$ مطابق با شکل‌های زیر داده شده است. خروجی $y(t)$ را محاسبه کنید؟

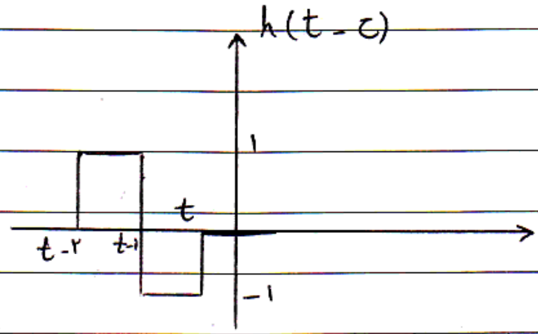
$x(t) = e^{2t}u(1-t)$





$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

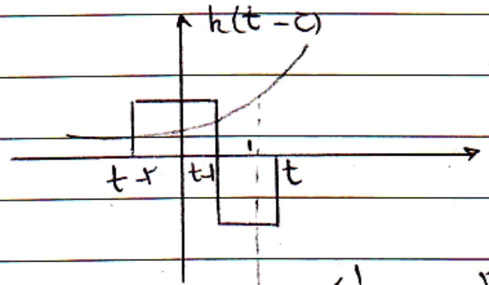




$$t<1 \quad y(t) = \int_{t-2}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-2}^{t-1} 1\times e^{2\tau}d\tau + \int_{t-1}^{t} (-1)e^{2\tau}d\tau$$

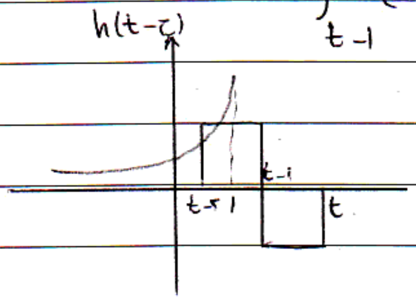
سطح $h(t-\tau)$ هم‌پوشانی با $x(\tau)$

$$= \frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_{t-2}^{t-1} + \left(\frac{-1}{2}e^{2\tau}\right)\Big|_{t-1}^{t} = \ldots$$



$t>1 \ , \ t-1<1 \Rightarrow 1<t<2$

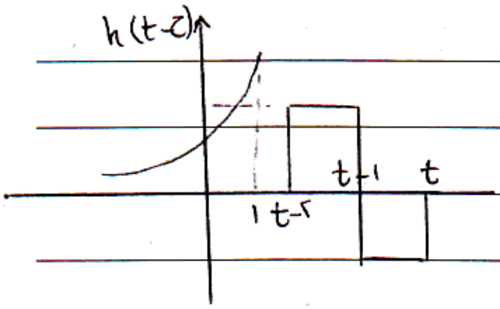
$$y(t) = \int_{t-2}^{1} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-2}^{t-1} 1\times e^{2\tau}d\tau + \int_{t-1}^{1} (-1)\times e^{2\tau}d\tau = \ldots$$



$t-2<1$
$t-1>1$ $\Rightarrow 2<t<3$

t ها پیوسته هستند از اول تا انتها

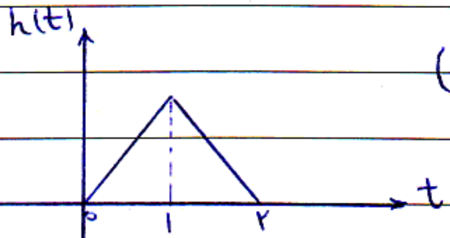
$$y(t)=\int_{t-2}^{1}x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau=\int_{t-2}^{1}(1)e^{2\tau}\,d\tau==\frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_{t-2}^{1}=\frac{1}{2}\left[e^{2}-e^{2(t-2)}\right]$$



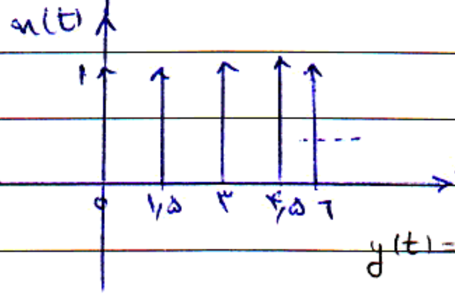
$t-2>1$ یا $t>3$

$$y(t)=\int \_\, d\tau=0$$

مثال) کانولوشن $x(t)$ و $h(t)$ را بدست آورید؟ (خروجی $y(t)$)



$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$



$x(t)$ شامل ضربه‌هایی با ارتفاع ۱ است.

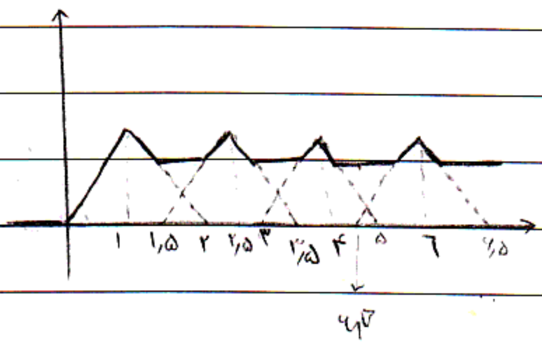
$$x(t)=\delta(t)+\delta(t-1.5)+\delta(t-3)+\delta(t-4.5)+\dots$$

$$y(t)=h(t)*x(t)=h(t)*\big(\delta(t)+\delta(t-1.5)+\delta(t-3)+\dots\big)$$

$$y(t)=h(t)*\delta(t)+h(t)*\delta(t-1.5)+h(t)*\delta(t-3)+\dots$$

خواص
$$\begin{cases}x(t)*\delta(t)=x(t)\\ x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)\end{cases}$$

$$y(t)=h(t)+h(t-1.5)+h(t-3)+h(t-4.5)+\dots$$



~~حضور مثلثی ترتیب در حضور هم رسم کرده؟~~

فصل ۷ : تجزیه و تحلیل حالت ماندگار سینوسی :

۱- موج سینوسی ساده‌ترین موجی است که با بازدهی بالایی قابل تولید است.

۲- تجزیه و تحلیل سینوسی‌ها ساده است. (مشتق و انتگرال سینوسی، سینوسی است.)

۳- مدارهای LTI دارای تحریک سینوسی پاسخ دارای فرکانس برابر با فرکانس منبع است.

۴- به کمک سری فوریه می‌توان پاسخ هر موج متناوب را یافت.

اعداد مختلط : Complex Numbers

$Z = x + iy$ $\quad x = Re(Z)$ قسمت حقیقی
Real

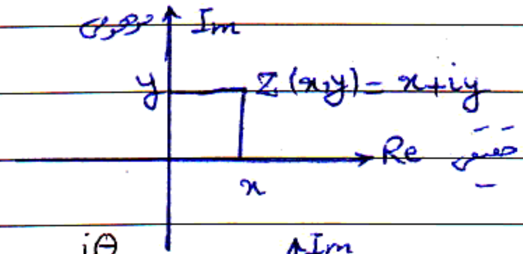
$y = Im(Z)$ قسمت موهومی
Imaginary

$i = j$ یکه موهومی
واحد موهومی

$i^2 = -1 \quad j^2 = -1$

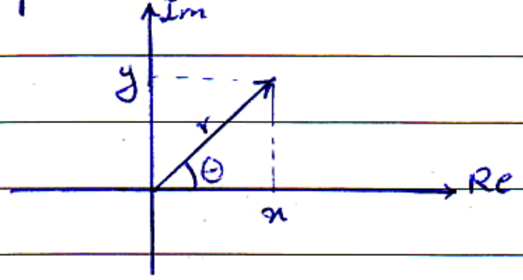
$i^3 = -i \quad j^3 = -j$

نمایش دکارتی :



۱- نمایش قطبی :

$Z = re^{i\theta}$



$$\begin{cases} x = Re(Z) = r\cos\theta \\ y = Im(Z) = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = tg^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

رابطه اویلر: Euler's formula $\quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos\theta = \mathrm{Re}\{e^{i\theta}\} \qquad \sin\theta = \mathrm{Im}\{e^{i\theta}\}$$

مزدوج مختلط: $\quad z = x + iy \longrightarrow \bar{z} = x - iy$

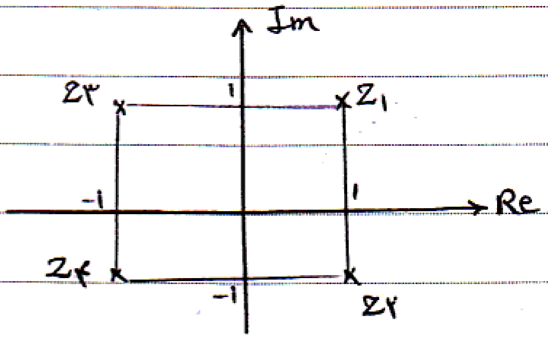
$$z = re^{i\theta} \longrightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}$$

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$z\bar{z} = |z|^2 = x^2+y^2$$
$$z + \bar{z} = 2x = 2\,\mathrm{Re}\{z\}$$
$$z - \bar{z} = i2y = i2\,\mathrm{Im}\{z\}$$

مثال) اعداد زیر را به شکل قطبی بنویسید.

$Z_1 = 1 + j \qquad Z_2 = 1 - j$

$Z_3 = -1 + j \qquad Z_4 = -1 - j$



نکته: نمایش $z=a+jb$ به صورت قطبی: $r=\sqrt{a^2+b^2}$

الف) $\theta' = tg^{-1}\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$

ب)

1- در صورتیکه z در ناحیه اول باشد $\theta=\theta'$

2- در صورتیکه z در ناحیه دوم باشد $\theta=\pi-\theta'$ یا $\theta^\circ = 180-\theta'$

3- در صورتیکه z در ناحیه سوم باشد $\theta=-\pi+\theta'$ ، $\theta^\circ = -180+\theta'^\circ$

4- در صورتیکه z در ناحیه چهارم باشد $\theta=-\theta'$

پاسخ مثال:

$z=re^{i\theta}$

$z_1=r_1e^{i\theta_1}$

$r_1=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ $\quad \theta'=tg^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{4}$ $\quad \theta=\frac{\pi}{4}$ $\quad \Rightarrow z_1=\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$

$z_4=r_4e^{i\theta_4}$ $\quad r_4=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ $\quad \theta'=tg^{-1}\left(\frac{|-1|}{|-1|}\right)=\frac{\pi}{4}$ $\quad \theta_4=-\pi+\theta'=-\frac{3\pi}{4}$

$\rightarrow z_4=\sqrt{2}\,e^{-j3\pi/4}$ $\quad z_2=\sqrt{2}\,e^{-j\pi/4}$ $\quad z_3=\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z=5e^{i\pi/3}=5\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow z=2.5+2.5\sqrt{3}\,i$

$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_1=r_1e^{i\theta_1}$, $z_2=r_2e^{i\theta_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2)\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

مثال ۵

$$z = \frac{1+j}{1-j}$$

$$z = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2}$$

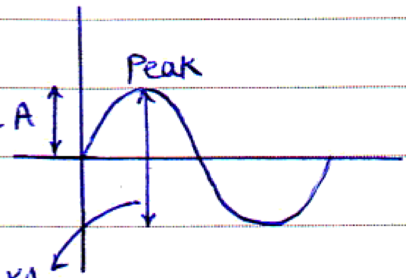
$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta) \longrightarrow \boxed{\vec{x} = A\angle\theta}$$

دامنه

فرکانس زاویه ای

فاز phase (rad)

$\omega = 2\pi f$ فرکانس بر



$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{A e^{j(\omega t + \theta)}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\underline{Ae^{j\theta}} \cdot e^{j\omega t}\right\} = \boxed{\mathrm{Re}\left\{\vec{x}\, e^{j\omega t}\right\}}$$

فازور $\vec{x} \triangleq Ae^{j\theta}$

phasor : phase vector

$$\vec{x} = Ae^{j\theta} = A\angle\theta$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{x} &= A\angle\theta\\ \vec{y} &= B\angle\varphi\end{aligned}\right\}\ \vec{x}\vec{y} = (Ae^{j\theta})(Be^{j\varphi}) = ABe^{j(\theta+\varphi)} = AB\angle\theta+\varphi$$

$$\frac{\vec{x}}{\vec{y}} = \frac{Ae^{j\theta}}{Be^{j\varphi}} = \frac{A}{B}e^{j(\theta-\varphi)} = \frac{A}{B}\angle\theta-\varphi$$

مثال: جمع دو جریان $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را بدست آورید.

$$i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + \alpha)$$

$$i_2(t) = I_2 \cos(\omega t + \beta)$$

$$\vec{I_1} = I_1 \measuredangle \alpha \quad \text{یا} \quad I_1 e^{j\alpha} \qquad\qquad i_1(t) = Re\{\underbrace{\vec{I_1}}_{I_1 e^{j\alpha}} e^{j\omega t}\}$$

$$\vec{I_2} = I_2 \measuredangle \beta \quad \text{یا} \quad I_2 e^{j\beta} \qquad\qquad i_2(t) = Re\{\vec{I_2} e^{j\omega t}\}$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = Re\{\vec{I_1} e^{j\omega t}\} + Re\{\vec{I_2} e^{j\omega t}\} = Re\{\vec{I_1} e^{j\omega t} + \vec{I_2} e^{j\omega t}\}$$

$$= Re\{(\vec{I_1} + \vec{I_2}) e^{j\omega t}\}$$

فرض: $i(t) = Re\{\vec{I} e^{j\omega t}\}$ $\qquad Re\{\vec{I} e^{j\omega t}\} = Re\{(\vec{I_1} + \vec{I_2}) e^{j\omega t}\}$

$$\vec{I} \cancel{\cos\omega t} = (\vec{I_1} + \vec{I_2}) \cancel{\cos\omega t}$$

$$\underbrace{\vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_2}}_{\text{مجموع فازورها}}$$

پس قانون KCL برای فازورها برقرار است.

ـ در حالت دائمی سینوسی:

۱ـ KVL و KCL برقرار است. (روش‌های جریان خانه و ولتاژ گره)

۲ـ اصل جمع آثار برقرار است (فقط برای حالت دائمی)

۳ـ توان در مورد آن برقرار است.

مثال)

$$i_1(t) = 5\cos(\omega t + \frac{\pi}{3}) \qquad i_2(t) = 2\cos(\omega t + \frac{\pi}{5})$$

$$i_s(t) = ? \qquad i_m(t) = ?$$

ماشین حساب در $\underbrace{\text{Deg}}$ (درجه) تنظیم شود.

$\vec{I_1} = 5 \measuredangle \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $\vec{I_2} = 2 \measuredangle \frac{\pi}{5}$

$i_s(t)$ مجموع i_1 , i_2

$$\vec{I_s} = \vec{I_1} + \vec{I_2} = 5\measuredangle\frac{\pi}{3} + 2\measuredangle\frac{\pi}{5} = 5\cos\frac{\pi}{3} + j5\sin\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{\pi}{5} + j2\sin\frac{\pi}{5}$$

$$= 6.875 \measuredangle 53.2^\circ \longrightarrow i_s(t) = 6.875\cos(\omega t + 53.2^\circ)$$

I_s فازور i_s

به رادیان تبدیل شود: $53.2 \times \frac{\pi}{180}$

$$\vec{I_M} = \vec{I_1} - \vec{I_2} = (\overbrace{5\cos\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{5}}^{x}) +$$ $\qquad$ $i_m(t) = i_1(t) - i_2(t) = ?$

$$j(\overbrace{5\sin\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{5}}^{y}) = \underbrace{3.2755}_{r=\sqrt{x^2+y^2}} \measuredangle 74^\circ \quad \searrow \theta = tg^{-1}\frac{y}{x}$$

$$i_m(t) = 3.2755\cos(\omega t + 74^\circ)$$

خواص تابع $Re(\ )$:

۱- خاصیت خطی بودن $\qquad$ $\forall\ a,b$ real

$$Re\{a z_1(t) + b z_2(t)\} = a\, Re\{z_1(t)\} + b\, Re\{z_2(t)\}$$

۲- مشتق‌گیری:

$$\frac{d}{dt} Re\{\vec{A} e^{j\omega t}\} = Re\{\frac{d}{dt}(\vec{A}e^{j\omega t})\}$$

$$= Re\{(\vec{A} j\omega) e^{j\omega t}\}$$

مثال) پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از فازورها بدست آورید؟

$$0.5y'' + 1.5y' + y = \cos 2t$$

$$\cos 2t = Re\{e^{j2t}\}$$

پاسخ خصوصی $y_p(t) = Re\{\vec{Y}\, e^{j2t}\}$

$$0/5\, y_p'' + 1/5\, y_p' + y_p = \cos 2t$$

$$0/5\, Re\{\vec{Y}(j2)^2 e^{j2t}\} + 1/5\, Re\{\vec{Y}(j2)\, e^{j2t}\} + Re\{\vec{Y} e^{j2t}\} = Re\{e^{j2t}\}$$

$$Re\{0/5(j2)^2 \vec{Y} e^{j2t} + 1/5(j2)\vec{Y} e^{j2t} + \vec{Y} e^{j2t}\} = Re\{e^{j2t}\}$$

$$Re\{(0/5 \times (-4) + 1/5(j2) + 1)\vec{Y} e^{j2t}\} = Re\{e^{j2t}\}$$

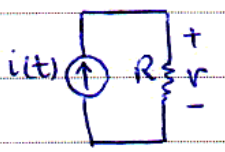
$$(-2 + 3j + 1)\vec{Y} = 1 \longrightarrow (-1 + 3j)\vec{Y} = 1 \Longrightarrow \vec{Y} = \frac{1}{-1+3j} = \frac{1\, e^{j0}}{\sqrt{10}\, e^{j(1/884)}} = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{j(-1/884)}$$

$0/314$

$\vec{Y} = 0/314 \angle -108/4^\circ$ $\qquad y_p(t) = 0/314 \cos(2t - 108/4^\circ)$

مدلسازی عناصر مداری برای تجزیه و تحلیل حالت ماندگار سینوسی:

۱- مقاومت



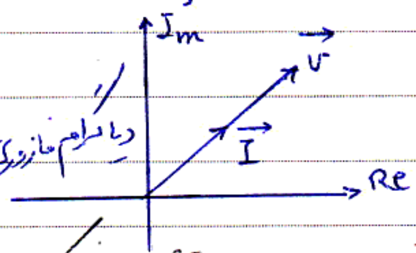
$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$

$i(t) = Re\{I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}\}$ $\qquad \vec{I} = I_m e^{j\varphi}$

$Re\{\vec{V} e^{j\omega t}\} = v(t) = R\, i(t) = R I_m \cos(\omega t + \varphi) = Re\{R I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}\}$

$\vec{V} = R I_m e^{j\varphi} = R\vec{I}$ $\qquad$ فازور ولتاژ $\vec{V} = R\vec{I}$ فازور جریان

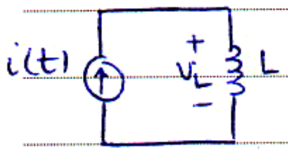
دیاگرام فازوری



$|\vec{V}| = R|\vec{I}|$ / $\angle\vec{V} = \angle\vec{I}$

در مقاومت، فازور ولتاژ و جریان هم‌فاز است.

۲ـ سلف :



$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta)$

$\vec{I} = I_m \measuredangle \theta = I_m e^{j\theta}$

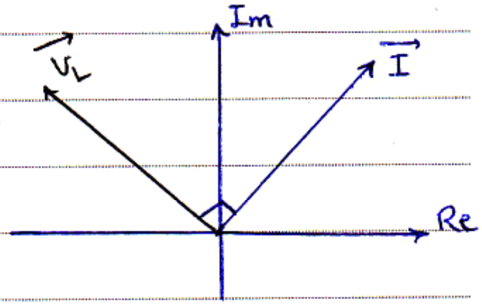
$v_L(t) = L \frac{di}{dt}$ $\qquad$ $i(t) = Re\{\vec{I} e^{j\omega t}\}$

$v_L = L \frac{d}{dt} Re\{\vec{I} e^{j\omega t}\} = L\, Re\{\vec{I} (j\omega) e^{j\omega t}\} = Re\{(j\omega L)\vec{I} e^{j\omega t}\}$

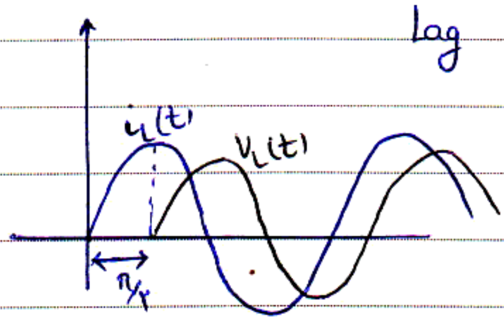
$v_L \triangleq Re\{\vec{V_L} e^{j\omega t}\}$ $\qquad$ فازور ولتاژ $\vec{V_L} = (j\omega L)\vec{I}$ فازور جریان

امپدانس سلف $X_L = j\omega L$ $\qquad$ $\vec{V} = X_L \vec{I}$

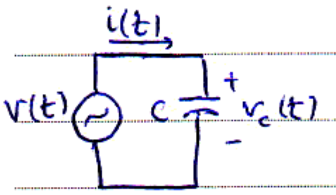
$|\vec{V_L}| = \omega L |\vec{I}|$ $\qquad$ $\measuredangle \vec{V_L} = \frac{\pi}{2} + \measuredangle \vec{I}$



ولتاژ نسبت جریان به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ تأخیر فاز دارد. (پس فاز) lag



۳ـ خازن :



$v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$

$\vec{V} = V_m \measuredangle \varphi = V_m e^{j\varphi}$

$\vec{V_C} = ?$

$i(t) = C \frac{dv_c}{dt}$

$$\begin{cases} i(t) = i_c(t) \\ v(t) = v_c(t) = Re\left\{\vec{V}\, e^{j\omega t}\right\} \end{cases}$$

$$i_c(t) = Re\left\{\vec{I}\, e^{j\omega t}\right\} \qquad Re\left\{\vec{I}\, e^{j\omega t}\right\} = C\frac{d}{dt}\left\{Re\left\{\vec{V}\, e^{j\omega t}\right\}\right\}$$

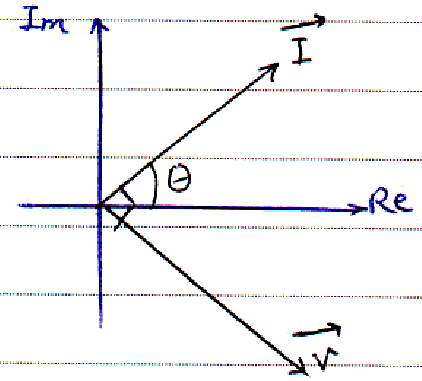
$$Re\left\{\vec{I}\, e^{j\omega t}\right\} = C\, Re\left\{\vec{V}(j\omega)\, e^{j\omega t}\right\} = Re\left\{\vec{V}(j\omega C)\, e^{j\omega t}\right\}$$

$\vec{I} = (j\omega C)\vec{V}$ یا $\underbrace{\vec{V}}_{\text{فازور ولتاژ خازن}} = \dfrac{\overbrace{\vec{I}}^{\text{فازور جریان خازن}}}{j\omega C}$ امپدانس خازن $x_C \triangleq \dfrac{1}{j\omega C}$

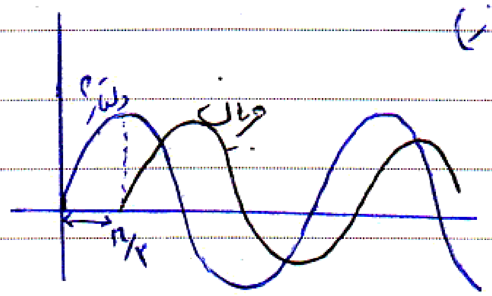
یا $\vec{V} = x_C \vec{I}$

$$|\vec{V}| = \frac{1}{C\omega}|\vec{I}|$$

$$\measuredangle\vec{V} = \measuredangle\vec{I} - \pi/2$$



ولتاژ نسبت جریان به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ تأخیر فاز دارد. (پس فاز)



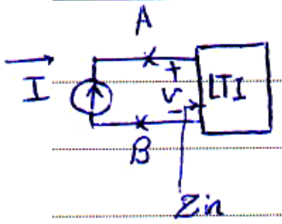
خلاصه:

$+\ \vec{V}\ -$, R, $\vec{I}$ $\qquad \vec{V} = R\vec{I}$

$+\ \vec{V}\ -$, L, $\vec{I}$ $\qquad \vec{V} = (j\omega L)\vec{I} = x_L \vec{I} \qquad x_L = j\omega L$

$+\ V_c\ -$, $\vec{I_c}$ $\qquad \vec{V_c} = \dfrac{\vec{I}}{j\omega C} = x_C \vec{I_c} \qquad x_C = \dfrac{1}{j\omega C}$

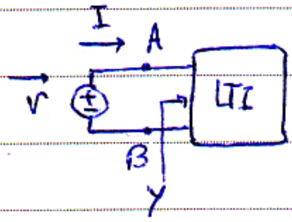
تعریف امپدانس: Impedance



$Z_{in}(j\omega) \triangleq \dfrac{\vec V}{\vec I}$ امپدانس دیده شده از دو سر A, B

واحد امپدانس اهم است.

تعریف ادمیتانس: Admittance



$Y_{in}(j\omega) \triangleq \dfrac{\vec I}{\vec V}$ ← ادمیتانس دیده شده از دو سر B, A

امپدانس و ادمیتانس توابعی از نیز هستند.

واحد ادمیتانس مهو ($\mho$) یا زیمنس (S).

$Z = R + jX$

R: مقاومت — X: راکتانس Reactance

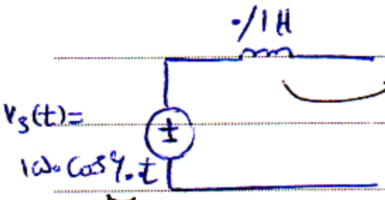
$$\begin{cases} X > 0 & \text{راکتانس القایی} \\ X < 0 & \text{راکتانس ظرفیتی (خازنی)} \end{cases}$$

$Y = G + jS$

G: رسانایی (هدایت) — S: سوسپتانس susceptance

$$\begin{cases} S < 0 & \text{سوسپتانس القایی} \\ S > 0 & \text{سوسپتانس ظرفیتی} \end{cases}$$

مثال) معادل تونن و نورتن:

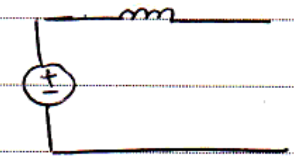


$X_L = j\omega L = j\,600 \times 0/1 = j60$

$\omega = 600$

$\vec V_s = 150\angle 0$

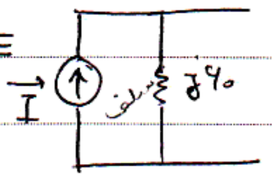
معادل مدار در حوزه‌ی فازورها:



Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\vec{V} = X_L \vec{I} \Rightarrow \vec{I} = \frac{\vec{V}}{X_L}$$

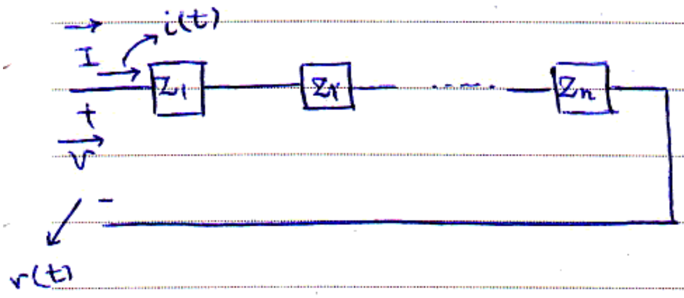
مدار صفحه قبل $\equiv$



$$\vec{I} = \frac{۱۵۰ \angle ۰}{j۶۰} = \frac{۱۵۰ \angle ۰}{۶۰ \angle \pi/۲} = ۲٫۵ \angle -\frac{\pi}{۲}$$

نکته:
$$j۶۰ = ۶۰ \angle \frac{\pi}{۲}$$
$$-j۶۰ = ۶۰ \angle -\frac{\pi}{۲}$$

اتصال سری:

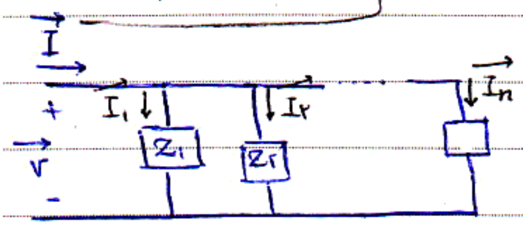


$$\boxed{\vec{V} = \vec{I} \sum_{i=1}^{n} Z_i}$$

$$\vec{V} = Z_1 \vec{I} + Z_۲ \vec{I} + \dots + Z_n \vec{I} = (Z_1 + Z_۲ + \dots + Z_n)\vec{I} = \vec{I} \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

$$\boxed{Z_{eq} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} = \sum_{i=1}^{n} Z_i} \qquad Z = \frac{1}{Y} \qquad \boxed{\frac{1}{Y_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Y_i}}$$

اتصال موازی:



$$KCL: \vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_۲} + \dots + \vec{I_n}$$

$$Y = \frac{\vec{I}}{\vec{V}}$$

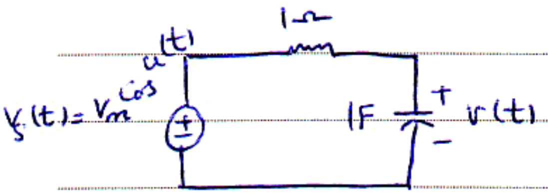
$$\vec{I} = Y_{eq} \vec{V} \qquad Y_{eq} \vec{V} = Y_1 \vec{V} + Y_۲ \vec{V} + \dots + Y_n \vec{V} = (Y_1 + Y_۲ + \dots + Y_n)\vec{V}$$

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_۲ + \dots + Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\boxed{Y_{eq} = \sum_{i=1}^{n} Y_i} \quad , \quad \boxed{\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Z_i}}$$

گذار از حوزه زمان به حوزه‌ی فازور :

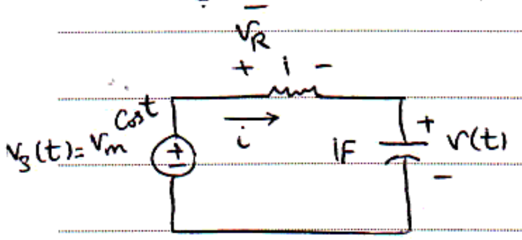
مثال) فرض $v_C(0^-)=V_0$



پاسخ کامل مدار را به دست آورید؟

نیازی به بررسی مدار در حالت $t<0$ نداریم چون شرایط اولیه داده شده و همچنین در مدار ضربه نداریم پس : $v_C(0^+)=V_0$

برای $t>0$:



KVL: $-v_S+v_R+v_C=0$

$$v_C(t)=v(t)\longrightarrow\begin{cases}i_R=i_C=C\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dt}\\ v_R=Ri_R=\dfrac{dv}{dt}\end{cases}$$

$$\frac{dv}{dt}+v=v_s(t)=V_m\cos t\implies\frac{dv}{dt}+v=V_m\cos t$$

$$v(t)=\underbrace{v_h(t)}_{\text{همگن}}+v_p(t)$$

محاسبه‌ی $v_h(t)$:

$$\frac{dv}{dt}+v=0\qquad v_h(t)=Ae^{st}$$

$$s+1=0\longrightarrow s=-1\implies \boxed{v_h(t)=Ae^{-t}}\ *$$

قسمت خاص $v_p(t)$:

$$\frac{dv}{dt}+v=V_m\cos t$$

$$\boxed{v_p(t)=B\cos t+C\sin t}\longrightarrow$$

دقت: در معادله اصلی یک جمله cos دارد، پاسخ خاص به صورت روبرو است.

$$\frac{dv_p}{dt}+v_p=V_m\cos t$$

$$\Rightarrow -B\sin t + C\cos t + B\cos t + C\sin t = V_m\cos t$$

$$(B+C)\cos t + (C-B)\sin t = V_m\cos t$$

$$\begin{cases} B+C = V_m \\ C-B = 0 \end{cases} \Rightarrow B = C = \frac{V_m}{2}$$

$$v_p(t) = \frac{V_m}{2}(\cos t + \sin t)$$

پاسخ کامل $\quad v(t) = Ae^{-t} + \frac{V_m}{2}(\cos t + \sin t)$

محاسبه‌ی A ، $t>0$

$$v(0^+) = V_0 \longrightarrow A + \frac{V_m}{2}(1+0) = V_0$$

$$A = V_0 - \frac{V_m}{2} \qquad v(t) = \underbrace{\left(V_0 - \frac{V_m}{2}\right)e^{-t}}_{\text{پاسخ گذرا}} + \underbrace{\frac{V_m}{2}(\cos t + \sin t)}_{\text{پاسخ ماندگار (دائمی)}}$$

پاسخ گذرا (سریع به سمت صفر میل می‌کند)

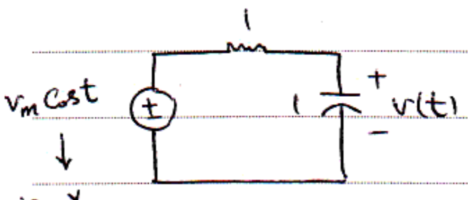
پاسخ ماندگار (دائمی)

تا ∞ نوسان می‌کند.

مثال: در مثال قبل با استفاده از فازورها پاسخ حالت دائمی را بدست آورید.

$$\begin{cases} \frac{1}{j} = -j \\ \frac{1}{i} = -i \end{cases}$$

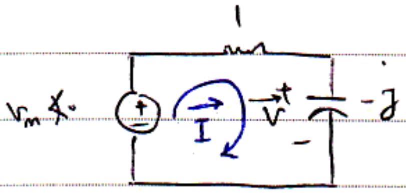
$t>0$



$$X_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{j} = -j$$

$\omega = 1 \qquad C = 1$

معادل مدار در حوزه‌ی فازور



$$\text{KVL}: \ -V_m\angle 0 + \vec{I} + \underbrace{(-j)\vec{I}}_{\vec{V}_C = X_C\vec{I}} = 0 \longrightarrow (1-j)\vec{I} = V_m\angle 0 \longrightarrow \vec{I} = \frac{V_m\angle 0}{1-j}$$

$$\vec{V} = (-j)\vec{I} = \underbrace{\left(\frac{-j}{1-j}\right)}_{\text{به قطبی تبدیل می‌کنیم}} V_m\angle 0 \qquad \frac{-j}{1-j} = \frac{1\angle -\pi/2}{\sqrt{2}\angle -\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\angle -\frac{\pi}{4}$$

به قطبی تبدیل می‌کنیم