

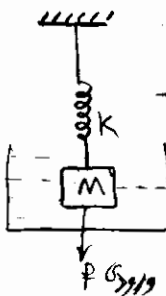
معادلات حالت ونحوه نمایش مدارهای الکتریکی :

حالت : مجموعه ای از چند متغیر است  $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$  (که هر کدام را یک متغیر

حالت نامند) که با داشتن مقادیر آنها در لحظه  $t_0$  ورودی به ازاد  $t > t_0$  ، بتوان خروجی را

به ازاد  $t > t_0$  تعیین نمود.

مثال ۱ :

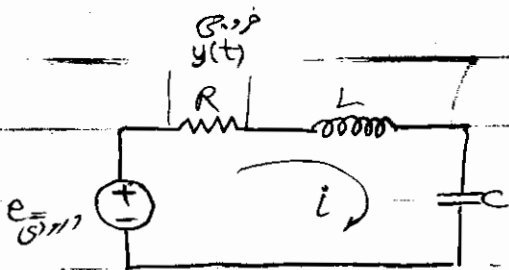


$$P = M \frac{d^2 y}{dt^2} + B \frac{dy}{dt} + Ky$$

$$y(t_0), \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0}$$

پس حالت سیستم  $\{y(t), \dot{y}(t)\}$

مثال ۲ :



حالت سیستم  $\{i(t), v_C(t)\}$

بردار حالت : برداری است که هر عنصر آن یک متغیر حالت است.

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

تذکره : حالت (بردار حالت) یک سیستم منحصر به فرد نیست.

$$\begin{cases} z_1(t) = 5y(t) + 4\dot{y}(t) \\ z_2(t) = 4y(t) - 3\dot{y}(t) \end{cases}$$

مثلاً در مثال سیستم مکانیکی

$\{z_1, z_2\}$  نیز یک حالت دیگر از همان سیستم مکتبی است.

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \quad (\det T \neq 0)$$

ماتریس  $T$  دلخواه است. پس ما بینهایت حالت (بیرد حالت) برای یک سیستم می توانیم تعریف کنیم.

معادلات حالت: دو معادله (ماتریسی، برداری) به فرم زیر است که رابطه بین ورودی و خروجی را در یک سیستم تعیین می کند.

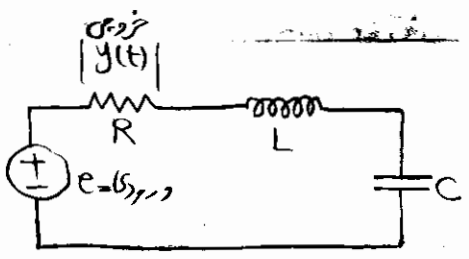
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + d \cdot u$$

تعداد متغیرهای حالت:  $n$

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + d \cdot u \end{cases}$$

$(n \times n) : A$   
 $(n \times 1) : B$   
 $(1 \times n) : C$   
 $(1 \times 1) : d$



نمایش مدارهای الکتریکی به فرم معادلات حالت:

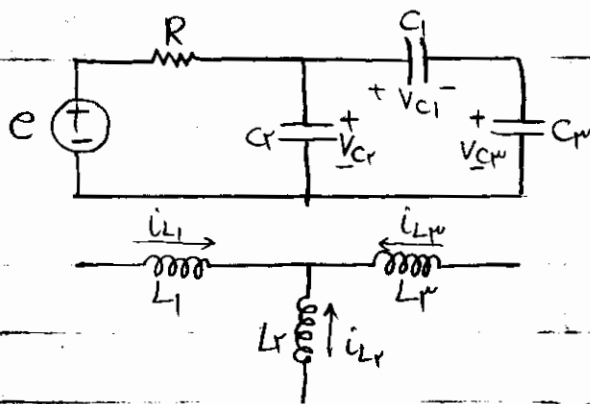
قدم ۱: جریان سلف و ولتاژ خازن‌ها را به عنوان متغیرهای حالت تعریف می‌کنیم.

$$n = \text{تعداد سلفها} + \text{تعداد خازن‌ها}$$

تصوره (حالت خاص)\*

الف: در یک حلقه تماماً خازن قرار داشته باشد.

ب: در تمام شاخه‌های منتهی به یک گره سلف وجود داشته باشد.



مثال ۱ =

مثال ۲ =

قدم ۲: سعی می‌کنیم مشتق متغیرهای حالت را بر حسب متغیرهای حالت ورودی بنویسیم.

$$\dot{x}_1 = f_1(x, u)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x, u)$$

⋮

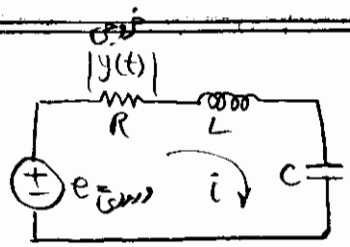
$$\dot{x}_n = f_n(x, u)$$

قدم ۳: خروجی را بر حسب متغیرهای حالت و ورودی بنویسیم.

$$y = g(x, u)$$

قدم ۴: آنها را به فرم معادلات حالت مرتب کنیم.

در مدار RLC مقابل =



$$\begin{cases} x_1 = i_L \\ x_2 = V_C \end{cases}$$

$$u = R \overset{x_1}{i} + L \frac{\overset{x_1}{di}}{dt} + \overset{x_2}{V_C}$$

$$\rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{R}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2 + \frac{1}{L} u$$

$$\overset{x_2}{V_C} = C \frac{\overset{x_2}{dV_C}}{dt} = C \dot{x}_2$$

$$\rightarrow \dot{x}_2 = \frac{1}{C} x_1$$

$$y = R \cdot i = R \cdot x_1$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

روشهای مختلف بیست آوردن معادلات حالت برای یک مدار:

۱- استفاده از تئوری گراف

۲- استفاده از تابع تبدیل سیستم

۳- استفاده از معادله دیفرانسیل بین ورودی و خروجی

الف- استفاده از تئوری گراف =

۱- درختی را تعیین می کنیم که در آن تمام خازنها وجود داشته باشند و هیچ سلفی وجود

نداشته باشد.

نکته: اگر در حالت خزر نباشیم این کار حتماً امکان پذیر است.

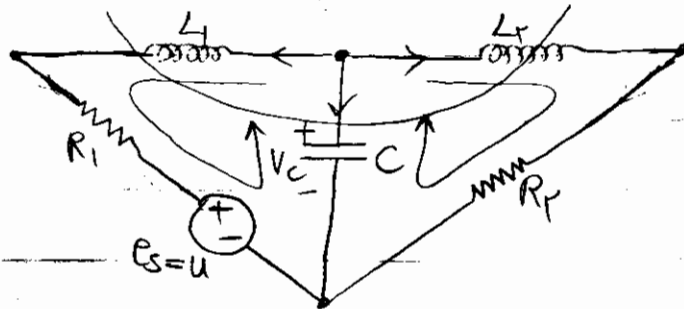
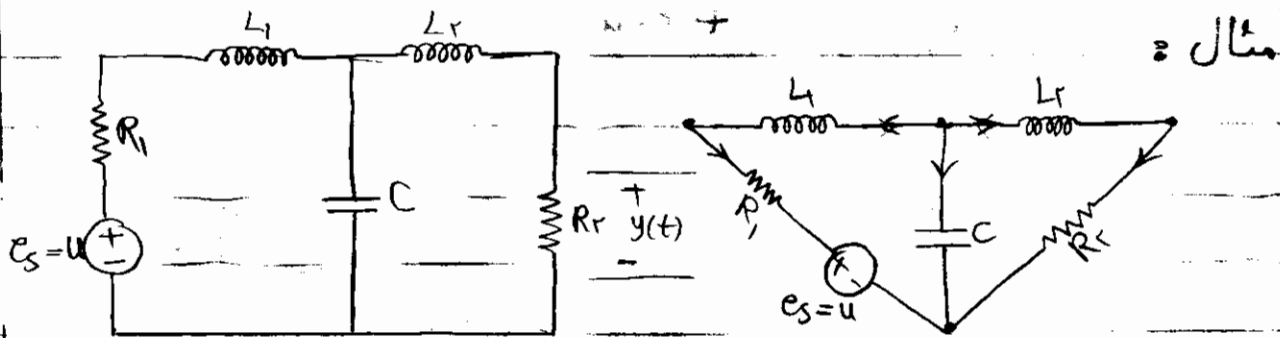
۲- ولتاژ خازنها و جریان سلفها را به عنوان متغیر حالت تعریف می کنیم.

۳- برای هر شاخه رفت که از خازن تشکیل شده است یک معادله کات است اساسی می نویسیم

و برای هر لینک که از سلف تشکیل شده است یک معادله حلقه اساسی می نویسیم.

۴- خروجی را بر حسب متغیرهای حالت و ورودی می نویسیم.

۵- معادلات بند ۳ و ۴ را به شکل معادلات حالت مرتب می نویسیم.



$$\underline{x} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$C \frac{dv_C}{dt} + i_{L_1} + i_{L_2} = 0 \longrightarrow \dot{x}_1 = -\frac{1}{C} x_2 - \frac{1}{C} x_3$$

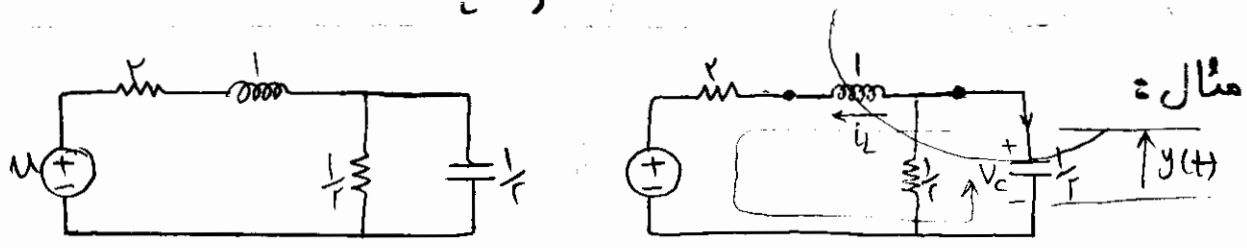
$$L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + R_1 i_{L_1} + u - v_C = 0 \longrightarrow \dot{x}_2 = -\frac{R_1}{L_1} x_2 + \frac{1}{L_1} x_1 - \frac{1}{L_1} u$$

$$L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} + R_2 i_{L_2} - v_C = 0 \longrightarrow \dot{x}_3 = -\frac{R_2}{L_2} x_3 + \frac{1}{L_2} x_1$$

$$y = R_2 i_{L_2} = R_2 x_3$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



$i_L = x_1$   
 $v_C = x_2$

جریان از ولتاژ و جریان

$$\frac{dv_C}{dt} + r v_C + i_L = 0$$

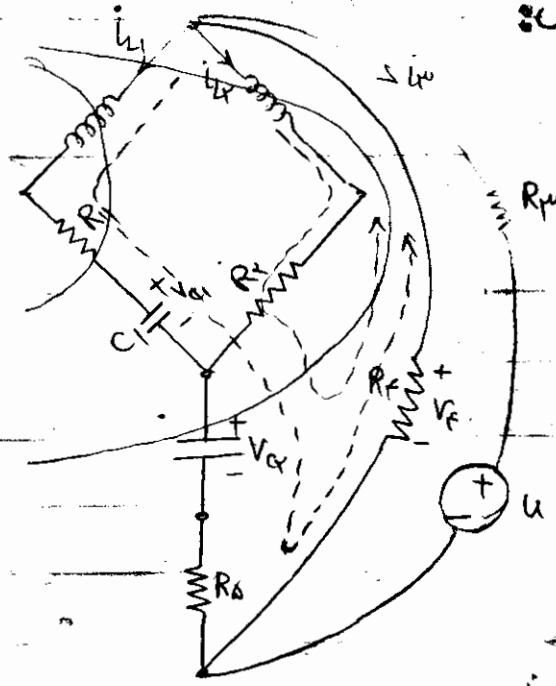
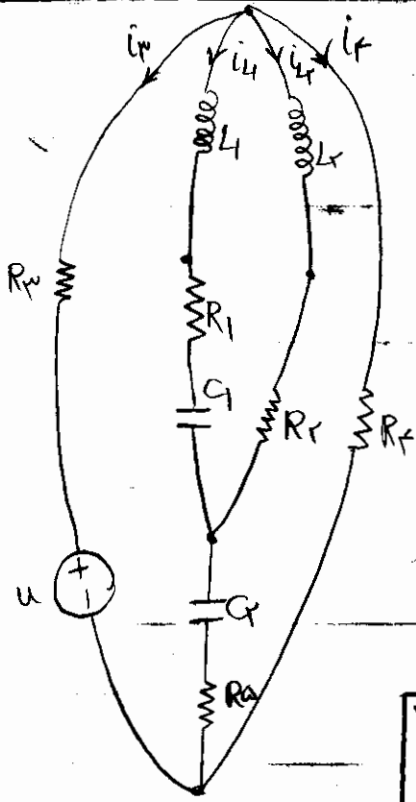
$$\longrightarrow \dot{x}_2 = -r x_2 - x_1$$

$$\frac{di_L}{dt} + r i_L + u - v_C = 0 \longrightarrow \dot{x}_1 = -r x_1 + x_2 - u$$

$$y = x_2 \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r & 1 \\ -r & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

مثال



$$\begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{Cr} \\ i_{L1} \\ i_{Lr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$-V_f = R_f \left[ i_{L1} + i_{Lr} + \frac{V_f - U}{R_p} \right]$$

$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} - i_{L1} = 0 \rightarrow \dot{x}_1 = \frac{1}{C_1} x_3$$

$$C_r \frac{dv_{Cr}}{dt} = i_{L1} + i_{Lr} \rightarrow \dot{x}_2 = \frac{1}{C_r} x_3 + \frac{1}{C_r} x_4$$

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} + R_1 i_{L1} + V_{C1} + V_{Cr} + R_A (i_{L1} + i_{Lr}) - V_f = 0$$

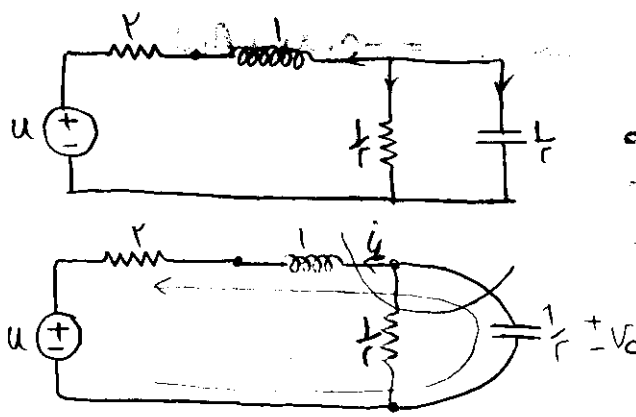
$$L_r \frac{di_{Lr}}{dt} + R_r i_{Lr} + V_{Cr} + R_A (i_{L1} + i_{Lr}) - V_f = 0, \quad y = V_f$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_r} & \frac{1}{C_r} \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_1+R_A}{L_1} & -\frac{R_A}{L_1} \\ 0 & -\frac{1}{L_r} & -\frac{R_A}{L_r} & -\frac{R_r+R_A}{L_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_r} \end{bmatrix} U$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{R_p R_E}{R_p + R_E} & -\frac{R_p R_E}{R_p + R_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \frac{R_E}{R_p + R_E} U$$

$$R = R_0 + \frac{R_p R_E}{R_p + R_E}$$

یادآوری مثل جلسه قبل:



$$\begin{cases} \frac{1}{f} \frac{dv_C}{dt} + v_C + i_L = 0 \\ 1 \frac{di_L}{dt} + r i_L + u - v_C = 0 \end{cases}, \quad x_1 = v_C, \quad x_2 = i_L$$

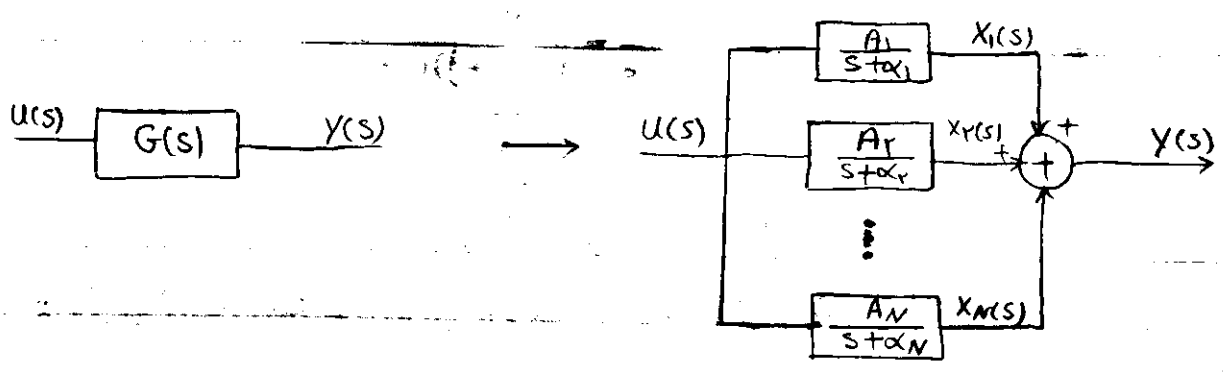
$$\begin{cases} \dot{x}_1 + r x_1 + x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 + r x_2 + u - x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -r x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - r x_2 + u \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r & -1 \\ 1 & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

روش استفاده از تبدیل لاپلاس:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_r s^r + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_r s^r + \dots + a_n s^n} \quad \text{می دانیم که:}$$

$$= \frac{A_1}{s + \alpha_1} + \frac{A_r}{s + \alpha_r} + \dots + \frac{A_N}{s + \alpha_N}$$

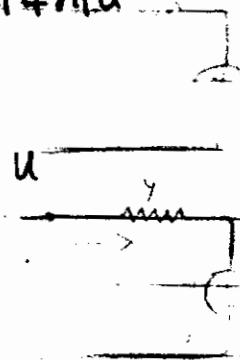


$$X_1(s) = \frac{A_1}{s + \alpha_1} U(s) \quad \rightarrow \quad s X_1(s) + \alpha_1 X_1(s) = A_1 U(s)$$



$$\dot{x}_1 + \alpha_1 x_1 = A_1 u \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + A_1 u$$

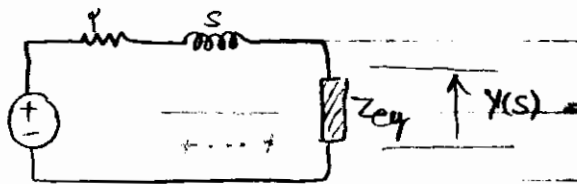
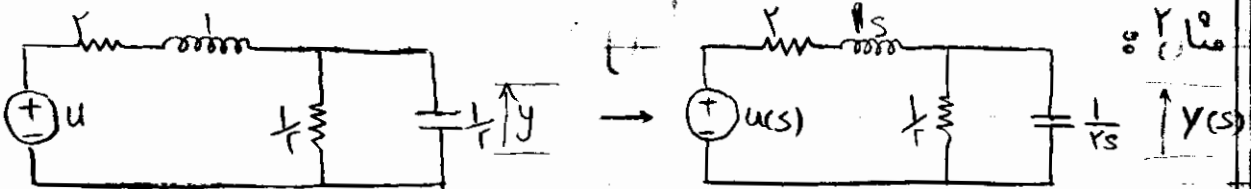
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_r \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_r \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} u$$



$$y = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{y}{s^2 + r s + r} = \frac{y}{(s+1)(s+r)} = \frac{y}{s+1} - \frac{y}{s+r}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ -r \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \end{bmatrix}$$



$$Z_{eq} = \frac{r \times \frac{1}{s}}{\frac{1}{s} + r} = \frac{r}{s+r}$$

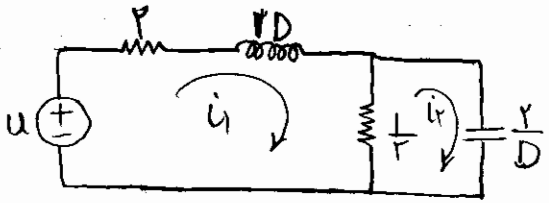
$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\frac{r}{s+r}}{s+r + \frac{r}{s+r}} = \frac{r}{s^2 + r s + 1} = \frac{r}{(s+r+j)(s+r-j)} = \frac{j}{s+r+j} - \frac{j}{s+r-j}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(r+j) & 0 \\ 0 & -(r-j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j \\ -j \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \end{bmatrix}$$

نکته: اگر ریشه‌های مخرج تابع تبدیل مجزا باشد ماتریس A منمأقطری است.

تکرین: اگر ریشه‌های تکراری داشته باشیم چه تفاوتی در نوشتن معادلات حالت خواهیم داشت.

روش استفاده از معادله دیفرانسیل بین ورودی و خروجی:



در مثال قبل:

$$\begin{cases} u = r i_1 + D \dot{i}_1 + \frac{1}{r} (i_1 - i_r) \\ 0 = \frac{1}{r} (i_r - i_1) + \frac{r}{D} i_r \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} r + D & -\frac{1}{r} \\ -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} + \frac{r}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{r}{D} i_r = \frac{r}{D} \cdot \frac{\begin{vmatrix} r + D & u \\ -\frac{1}{r} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r + D & -\frac{1}{r} \\ -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} + \frac{r}{D} \end{vmatrix}} \rightarrow (D^2 + rD + 1)y = r u$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + r \frac{dy}{dt} + 1 y = r u$$

به طور کلی اگر رابطه ورودی و خروجی را به فرم معادله دیفرانسیل زیر داشته باشیم:

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \dots + a_N \frac{d^N y}{dt^N} = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

(با فرض \$a\_N \equiv 1\$) تعریف متغیرهای حالت:

$$x_1 \triangleq y, \quad x_2 \triangleq \frac{dy}{dt}$$

$$\vdots$$

$$x_N \triangleq \frac{d^{(N-1)} y}{dt^{(N-1)}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{N-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

نکته: معادلات بالابرای  $M < N$  نوشته شده است.

تمرین: اگر  $M = N$  باشد چه تفاوتی در معادلات پیش می آید.

مثال: رابطه ورودی و خروجی در یک مدار الکتریکی به فرم معادله دیفرانسیل زیر بدست آمده است

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + y = 3u + 4 \frac{d^2 u}{dt^2}$$

آن را به شکل معادلات نمایش دهید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

مثال: در مدار الکتریکی مثال قبل

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 10y = 2u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

نکته ۱: دیدیم که برای یک مدار خاص از هر روش یک معادله حالت متفاوت بدست آوردیم. ولی

می توان اثبات کرد که این تفاوتها ظاهری است. به عبارت دیگر رابطه ورودی و خروجی در تمام آنها یکی است.

$$G(s) = C(SI - A)^{-1} B + D$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$\longrightarrow (SI - A)X(s) = BU(s)$$

$$\longrightarrow Y(s) = \underbrace{[C(SI - A)^{-1} B + D]}_{G(s)} U(s)$$

نکته ۱: هر چند ماتریسهای  $A, B, C, D$  از نظر ظاهر متفاوت هستند ولی وقتی در رابطه  $G(s)$  گذاشته شود

همگی نتیجه یکسانی را می دهند.

نکته ۲: اگر هر ماتریس دلخواه  $T$  ( $\det T \neq 0$ ) تعریف سوری توان یک معادله حالت دیگر نیز برای

همان مدار تعریف کرد.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}, \quad \underline{q} = T \cdot x$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x} = A'q + B'u \\ y = C'q + D'u \end{cases} \rightarrow \dot{q} = T\dot{x} = T(Ax + Bu) = (TAT^{-1})q + (TB)u$$

$$\rightarrow A' = TAT^{-1}, \quad B' = TB$$

$C' = CT^{-1}$   $D' = D$  و به همین ترتیب می توان ثابت کرد که:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \text{حل معادلات حالت:}$$

نکته ۱: محاسبه خروجی ( $y$ ) با داشتن ورودی از روی تابع تبدیل و معادله دیفرانسیل به صورت

دستی ساده است.

نکته ۲: حل یک یک مدار الکتریکی به صورت معادلات حالت عبارتند از کامپیوتر بسیار مناسب تر است.

$$y = \underbrace{C}_{(1 \times n)} \underbrace{e^{At}}_{n \times n} \underbrace{x_0}_{n \times 1} + \int_0^t \underbrace{C}_{1 \times n} \underbrace{e^{A(t-\tau)}}_{n \times n} \underbrace{B}_{n \times 1} u(\tau) d\tau + Du(t)$$

و با معلوم بودن  $A, B, C, D, x_0, u(t)$  (برای  $t > 0$ ) کابل معاسیه است.

اثبات (برای  $A$  اسکالر):

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \rightarrow \begin{cases} sX(s) - x_0 = aX(s) + bu(s) \\ Y(s) = cX(s) + du(s) \end{cases}$$

$$\rightarrow (s-a)X(s) = x_0 + bu(s)$$

$$\rightarrow X(s) = \frac{1}{s-a} x_0 + \frac{1}{s-a} bu(s)$$

$$\rightarrow x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

$$\rightarrow y(t) = c e^{at} x_0 + \int_0^t c e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau + d u(t)$$

$$e^{At} \longleftrightarrow (sI - A)^{-1}$$

قسمت اصلی معاسیه و معاسیه  $e^{At}$  است:

چند روش:

۱- استفاده از تبدیل لاپلاس  $(sI - A)^{-1}$  ۳- قطری کردن ماتریس  $A$

۲- استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ۴- روش کیلی - هامیلتون

معاسیه  $e^{At}$  با استفاده از تبدیل لاپلاس (در قالب مثال):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow (SI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{2}{s+2} - \frac{2}{s+1} & \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} ye^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ ye^{-2t} - ye^{-t} & ye^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \quad A$$

نکته: اگر ماتریس A قطری باشد کار بسیار ساده تر است.

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & & & \\ & -\alpha_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & -\alpha_N \end{bmatrix} \rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-\alpha_1 t} & & & \\ & e^{-\alpha_2 t} & & \\ & & \dots & \\ & & & e^{-\alpha_N t} \end{bmatrix}$$

یادآوری: برای هر ماتریس  $n \times n$  (A) با مرتبه n، مقدار ویژه و بردار ویژه قابل تعریف

$$A \cdot \underset{\substack{\text{مقدار ویژه} \\ \downarrow}}{V_i} = \lambda_i \underset{\substack{\text{بردار ویژه} \\ \downarrow}}{V_i}$$

است که در رابطه زیر صدق میکند.

مثال =  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$  ،  $Z = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$AZ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$AZ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{حال اگر } Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نحوه محاسبه مقدار و بردار ویژه:

مقادیر ویژه ریشه‌های معادله مشخصه  $|\lambda I - A| = 0$  می‌باشند.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{bmatrix}, \quad |\lambda I - A| = 0$$

$$\rightarrow \lambda(\lambda - 3) + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$A \cdot \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$$

محاسبه بردارهای ویژه:

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_{12} = v_{11} \\ -2v_{11} + 3v_{12} = v_{12} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{11} = 1 \\ v_{12} = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = P Q P^{-1}, \quad P = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n]$$

قضیه:

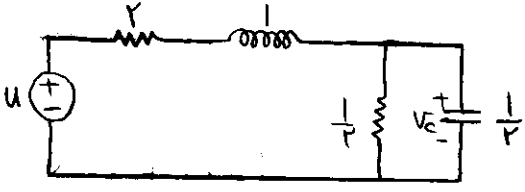
$$P = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \dots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & & v_{nn} \\ \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & & \underline{v}_n \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

در مثال قبل:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^t & -e^t \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$



مثال = ابتدا مدار زیر را به فرم معادلات حالت بنویسید

به ازاء ورودی پله و  $x_0 = [1]$  خروجی را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r & -r \\ 1 & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \end{bmatrix}$$

$$(SI - A)^{-1} \longleftrightarrow e^{At}$$

$$SI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -r & -r \\ 1 & -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+r & r \\ -1 & s+r \end{bmatrix}$$

$$(SI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+r-1}{s^2+4s+1} & \frac{-r}{s^2+4s+1} \\ \frac{1}{s^2+4s+1} & \frac{s+r+1}{s^2+4s+1} \end{bmatrix}$$

$$s^2+4s+1 = (s+r)^2 + 1$$

$$\frac{s+r}{(s+r)^2+1} \longleftrightarrow e^{-rt} \cos t$$

$$\frac{1}{(s+r)^2+1} \longleftrightarrow e^{-rt} \sin t$$

$$e^{At} = e^{-rt} \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & -r \sin t \\ \sin t & \cos t + \sin t \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \underbrace{C e^{At} x_0}_{\text{اسکالر ی}} + \int_0^t \underbrace{C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{\text{اسکالر ی}} d\tau$$



$$y_1 = e^{-\gamma t} [\cos t - \gamma \sin t]$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{1r}(t) \\ a_{r1}(t) & a_{rr}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}(t) + a_{1r}(t) \\ a_{r1}(t) + a_{rr}(t) \end{bmatrix} = a_{11}(t) + a_{1r}(t)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}(t-\tau) & a_{1r}(t-\tau) \\ a_{r1}(t-\tau) & a_{rr}(t-\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -a_{1r}(t-\tau) = \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} \sin(t-\tau)$$

$$y_r = \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \sin(t-\tau) d\tau, \quad t-\tau = \theta$$

$$y_r(t) = \gamma \int_0^t e^{-\gamma\theta} \sin\theta d\theta = \gamma e^{-\gamma\theta} \left( \frac{-\gamma \sin\theta - \cos\theta}{-\gamma^2} \right) \Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{\Delta} (-e^{-\gamma t} \cos t - \gamma e^{-\gamma t} \sin t + 1)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_r(t)$$