، R_{ii} : جمع مقاومتهای حلقهٔ iام R_{ij} : ± مقاومتهای مشترک حلقهٔ iام و jام

قضیه ۲: اگر $P_t = I^T R I$ را نسبت به I حداقل کنیم مقدار I که P_t را حداقل می‌کند همان جواب مسئله است.

قضیه ۳: اگر مداری شامل مقاومت داشته باشیم که فقط با منبع ولتاژ V_s تغذیه شوند حال اگر ولتاژی را به دلخواه بین دو گره انتخاب کنیم در آن صورت: $|V| \leq |V_s|$

قضیه ۴: اگر مداری شامل مقاومت داشته باشیم که فقط با منبع جریان i_s تغذیه می‌شود حال اگر جریان شاخهٔ kام را j_k بنامیم $|j_k| \leq |i_s|$

آنالیز حساسیت در مدارهای الکتریکی:

در مدارهای الکتریکی مثل بسیاری از سیستم‌های دیگر تغییراتی در پارامترها وجود دارد:

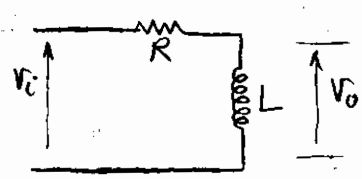
عامل تغییرات: ۱- خطای ساخت در تولید   ۲- شرایط محیطی   ۳- کارکرد

آنالیز حساسیت: تابع تبدیل یک سیستم چه مقدار نسبت به تغییرات یک پارامتر خاص (K) حساس است؟

$$S_K^G = ?$$

مثال:

$$G(s) = \frac{LS}{R+LS}$$



$$S_R^G = ?$$

راه کلی : یک تعریف $S_R^G = \frac{\Delta G}{\Delta R}$

$R' = R + \Delta R \leftarrow$ معلوم

$G' = G + \Delta G \leftarrow$ مجهول

$$G' = \frac{LS}{R'+LS}$$

$$\Delta G = G'-G = \frac{LS}{(R+\Delta R)+LS} - \frac{LS}{R+LS} = \frac{-LS\,\Delta R}{(R+LS)(R+\Delta R+LS)}$$

$$\longrightarrow \frac{\Delta G}{\Delta R} \simeq \frac{-LS}{(R+LS)^2}$$

مثلاً اگر $L=1^H$, $R=1^\Omega$, $S=j5$ آنگاه:

$$\frac{\Delta G}{\Delta R} = \frac{-j5}{(1+j5)^2} = \frac{5}{26}\angle -90^\circ - tg^{-1}5$$

تعریف دوم : $S_R^G \triangleq \frac{dG}{dR}$

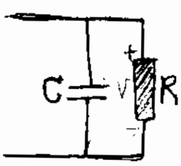
درمثال قبلی $S_R^G = \frac{-LS}{(R+LS)^2}$

فرمول اصلی : $S_K^G = \frac{dG}{dK}\cdot\frac{K}{G}$ و یا $S_K^G = \frac{\frac{\Delta G}{G}}{\frac{\Delta K}{K}}$

برای وقتی که مقدار نامی یک پارامتر صفر است حساسیت به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S_K^G = \frac{dG}{dK}\cdot\frac{1}{G}$$

مثال: $Z_{eq} = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1+j\omega RC} = R$ اگر R کوچک باشد



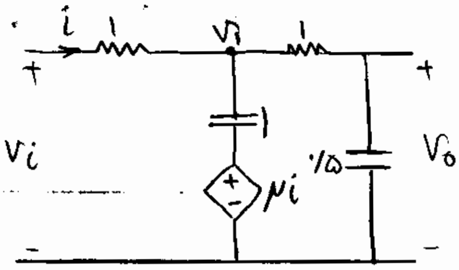
اگر مثلاً $C=10^{-12}$ و $\omega=10^{13}$ آنگاه:

$$Z_{eq} = \frac{R}{1+j10R}$$

اگر قطبهای تابع تبدیل یک سیستم را P_i بنامیم در این صورت حساسیت قطب P_i نسبت به تغییرات یک پارامتر:

$$S_K^{P_i} = \frac{\partial P_i}{\partial K} \cdot \frac{K}{P_i}$$

مثال: ۱- تابع تبدیل $\frac{V_O(s)}{V_I(s)}$ را محاسبه کنید.



۲- حساسیت این تابع تبدیل نسبت به μ چقدر است.

($\mu_0=2$ و $s=j2$) ۳- به ازاء $\mu=1$ قطبهای و صفرهای تابع تبدیل را محاسبه و آن را رسم کنید.

۴- حساسیت قطبها نسبت به μ چقدر است؟

$$\begin{cases} \frac{V_1-V_i}{1} + \frac{V_1-\mu i}{1/s} + \frac{V_1-V_o}{1} = 0 \\ \frac{V_o-V_1}{1} + \frac{V_o}{2/s} = 0 \end{cases} , \quad i = V_i - V_1$$

در روابط بالا V_1 را حذف و $\frac{V_o}{V_I}$ را محاسبه می‌کنیم.

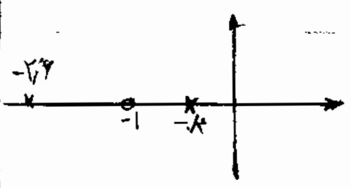
$$G(s) = \frac{V_o}{V_I} = \frac{2(1+\mu s)}{(\mu+1)s^2+2(\mu+2)s+2} , \quad S_\mu^G = \frac{\partial G}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu}{G}$$

$$S_\mu^G = \frac{2s\left[(\mu+1)s^2+2(\mu+2)s+2\right]-(s^2+2s)2(\mu s+1)}{\left[(\mu+1)s^2+2(\mu+2)s+2\right]^2} \cdot \frac{\mu}{\frac{2(1+\mu s)}{(\mu+1)s^2+2(\mu+2)s+2}}$$

به ازاء $s=j2 , \mu_0=2$ $\longrightarrow S_\mu^G = 0/37 \angle 15/72$

$$\mu=1 \longrightarrow G(s) = \frac{2(1+s)}{2s^2+6s+2} = \frac{s+1}{s^2+3s+1}$$

یک صفر در ۱- داریم و قطب در $-1/5 \pm \sqrt{2/25-1}$ $\left\{ \begin{matrix} -2/6 \\ -0/4 \end{matrix} \right.$

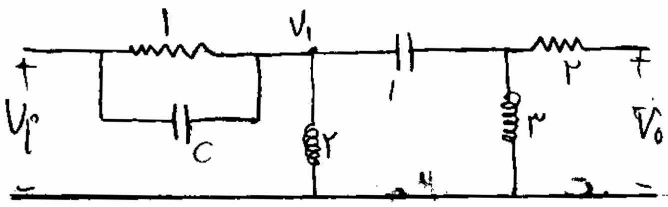


$$G(s) = \frac{2(1+\mu s)}{(\mu+1)s^2+2(\mu+2)s+2}$$

$$P_{1,2}=\frac{-(\mu+2)\pm\sqrt{\mu^2+2\mu+2}}{1+\mu}\;\Big\langle\; P_1=\frac{-(\mu+2)+\sqrt{\mu^2+2\mu+2}}{1+\mu},\quad P_2=\frac{-(\mu+2)-\sqrt{\mu^2+2\mu+2}}{1+\mu}$$

$$S_{\mu}^{P_i}=\frac{\partial P_i}{\partial \mu}\cdot\frac{\mu}{P_i}$$

مثال ۳: الف- $G(s)=\frac{V_o}{V_I}=?$



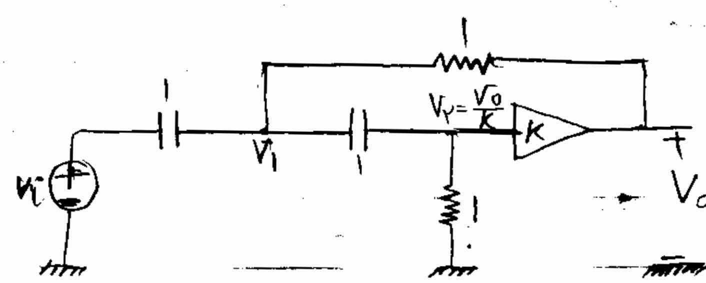
ب- حساسیت $G(s)$ نسبت به خازن

پارازیتی C چقدر است؟

$$G=\frac{V_o}{V_I}=\frac{2(1+3s^2)(1+Cs)}{2(6Cs^2+6s+1)}$$

$$S_C^G=\frac{\partial G}{\partial C}\cdot\frac{1}{G}=\frac{2s(1+3s^2)D-6s\times 2(1+3s^2)(1+Cs)}{D^2}\times\frac{D}{2(1+3s^2)(1+Cs)}=\dots$$

مثال ۴:



حساسیت قطبها نسبت به $k=?$ $\quad V_o=kV_2$

$$\begin{cases}\frac{V_1-V_i}{1/s}+\frac{V_1-V_o/k}{1/s}+\frac{V_1-V_o}{1}=0\\ \frac{V_o/k-V_1}{1/s}+\frac{V_o/k}{1}=0\end{cases}$$

در دو رابطهٔ مقابل V_1 را حذف می‌کنیم.

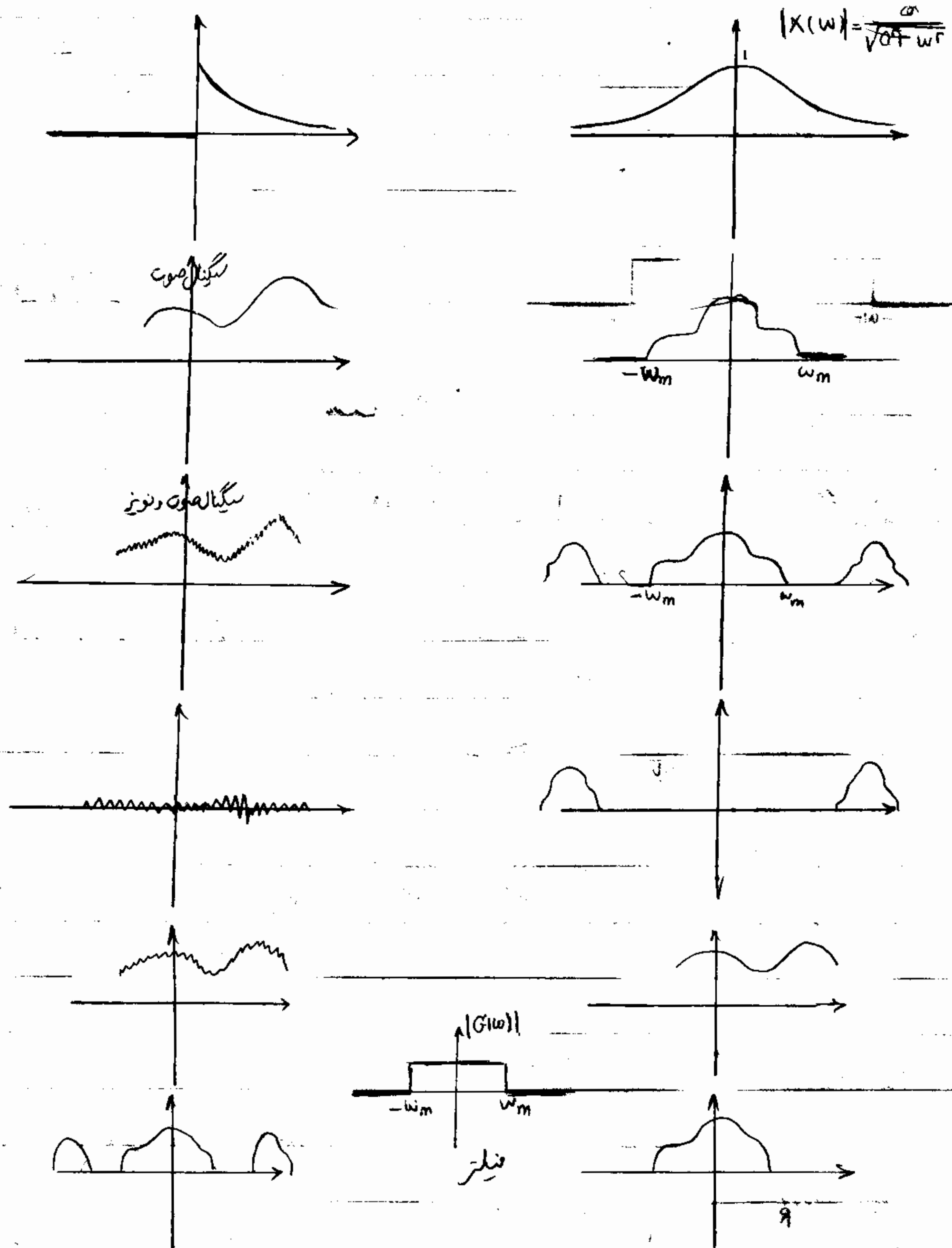
$$\rightarrow \frac{V_o}{V_I}=\frac{\quad}{s^2+(3-k)s+1},\qquad P_{1,2}=\frac{-(3-k)\pm\sqrt{(3-k)^2-4}}{2},\qquad s=j1,\ k_0=2$$

$$S_k^{P_1}=1.1547\angle -90^\circ,\qquad S_k^{P_2}=1.1547\angle 90^\circ$$

فیلتر: یعنی جدا کردن بعضی فرکانسهای خاص از یک سگنال .

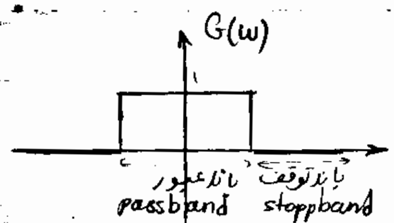
$x(t) \longrightarrow X(\omega)$

$e^{-at}u(t) \longrightarrow X(\omega) = \frac{a}{a+j\omega}$

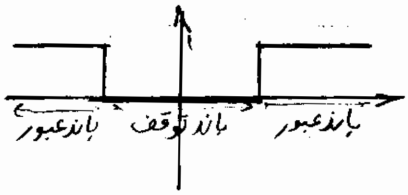


فیلترها چند نوع هستند:

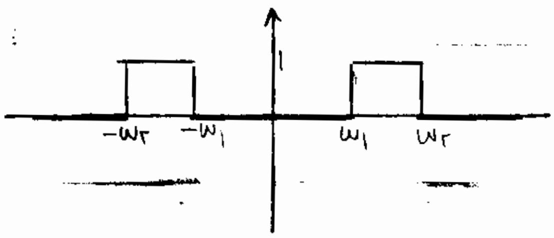
۱- فیلتر پائین گذر:



۲- فیلتر بالاگذر:



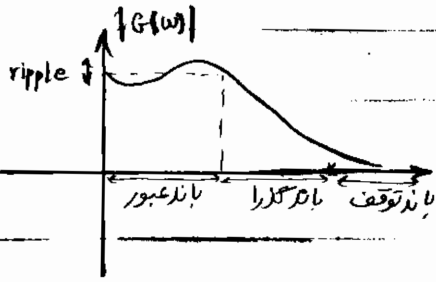
۳- فیلتر میان گذر:



کار فیلتر به همان سادگی مثال قبل نیست چون

۱- فرکانسهای سیگنال و نویز هم پوشانی دارند ۲- ساخت سیستمی با مشخصات گفته شده غیر ممکن است

مثال از فیلتر غیر ایده آل:

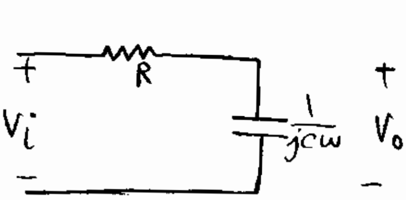


هدف از طراحی فیلتر ساخت یک مدار الکتریکی به فرمی که $|G(\omega)|$ تا حد ممکن به فیلتر ایده آل نزدیک باشد.

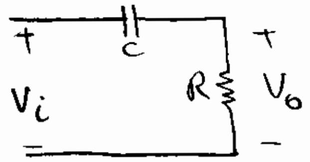
(به عبارت دیگر باند گذرا و ripple کم باشد).

مثال از فیلتر غیر ایده آل (تک مدار RC):

مثال: $G_1(S)$

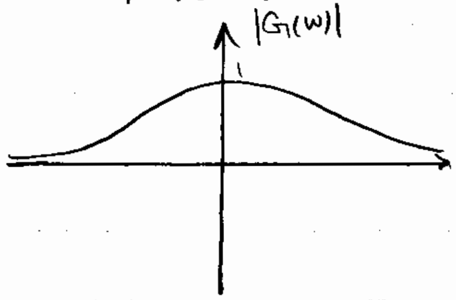


مثال ۲: $G_2(s)$



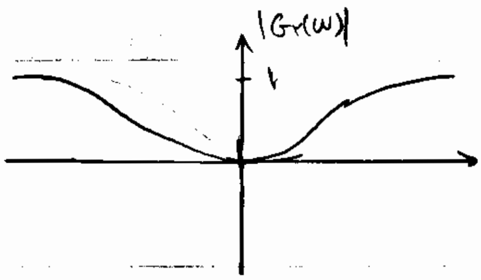
$$G_2(s)=\frac{R}{R+\frac{1}{Cs}}=\frac{RCs}{1+RCs} \quad , \quad G_1(s)=\frac{\frac{1}{Cs}}{R+\frac{1}{Cs}}=\frac{1}{1+RCs}$$

$$|G_1(\omega)|=\left|\frac{1}{1+jRC\omega}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$



یک مدار RC به شکل مثال ۲ یک فیلتر بالاگذر غیرایده آل است.

$$|G_2(\omega)|=\frac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$



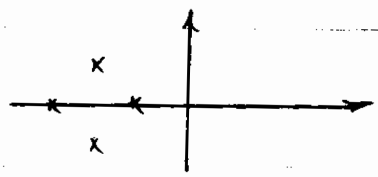
$$|G(j\omega)|^2 = G(s).G(-s)\big|_{s=j\omega}$$

مثال : $G(s)=\frac{1}{s+1}$

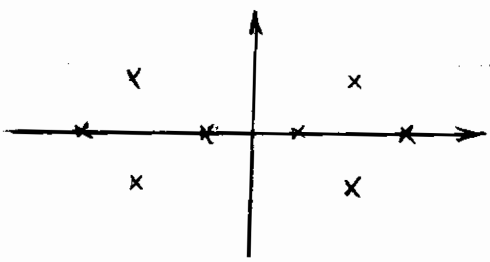
$$\longrightarrow G(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1} \quad , \quad |G(j\omega)|^2=\frac{1}{\omega^2+1}$$

$$G(s).G(-s)\big|_{s=j\omega}=\frac{1}{1+s}\cdot\frac{1}{1-s}\Big|_{s=j\omega}=\frac{1}{1-s^2}\Big|_{s=j\omega}=\frac{1}{1+\omega^2}$$

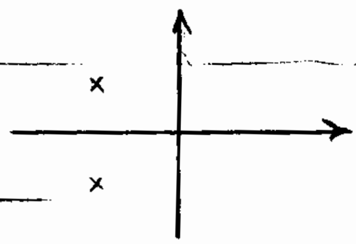
نکته ۱: اگر قطبهای $G(s)$ به فرم زیر باشد



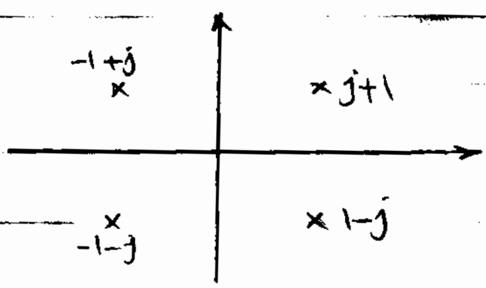
در آن صورت قطبهای $H(s)=G(s).G(-s)$ به صورت زیر است.



مثال: $G(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}$

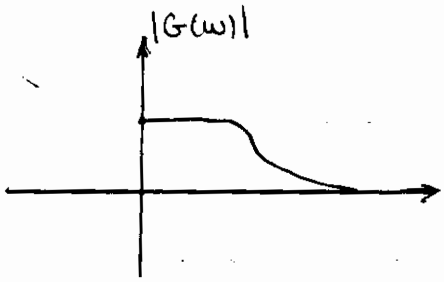


قطبهای $G(s)$



قطبهای $H(s)=G(s).G(-s)$

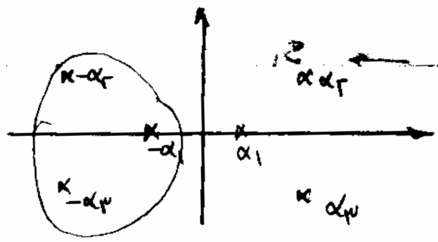
الگوریتم کلی طراحی یک فیلتر با معلوم بودن $|G(\omega)|$:



$$G(S) = K\frac{1}{a_n S^n + \cdots + a_1 S + 1}$$

۱- $G(s).G(-s) = |G(j\omega)|^2_{\omega=\frac{s}{j}}$

۲- قطبهای $G(s).G(-s)$ را معلوم می‌کنیم



۳- $G(s) = K\frac{1}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)(s+\alpha_3)+\cdots}$

دو پیشنهاد

۱- Butterworth $\qquad |G_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2n}}$

۲- chebychev $\qquad |G_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega)} \qquad 0<\varepsilon<1$

نکته: $n=1,2,3,\ldots$ ، n را هرچقدر بیشتر کنیم (انتخاب) درجه فیلتر بالا می‌رود و در نتیجه ساخت و کار با آن مشکل‌تر است. ولی در عوض فیلتر به سمت فیلتر ایده‌آل نزدیکتر می‌شود.

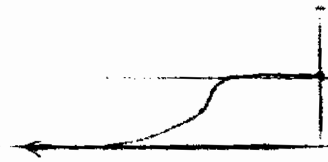
طراحی فیلتر Butterworth :

۱- روی پیچیدگی مدار فیلتر (n) تصمیم می‌گیریم. (مثال: $n=2$)

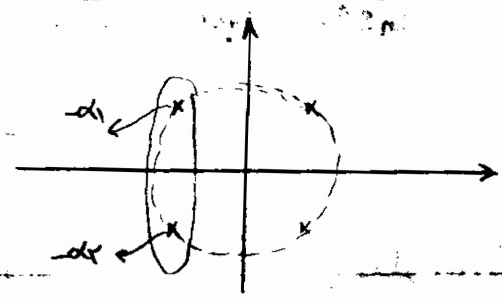
۲- قرار می‌دهیم: $|G(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2n}} \qquad \left(|G(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^4}\right)$

۳- به جای ω، $\frac{s}{j}$ می‌گذاریم و $H(s)=G(s).G(-s)$ را بدست می‌آوریم:

$$H(s)=G(s).G(-s)=\frac{1}{1+(\frac{s}{j})^4}=\frac{1}{1+s^4}$$



۴- قطبهای $H(s)$ را محاسبه می‌کنیم:



$$1+s^4=0 \longrightarrow s^4=-1$$

$$\longrightarrow s_1, s_2, s_3, s_4$$

$$G(s)=\frac{1}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}=$$

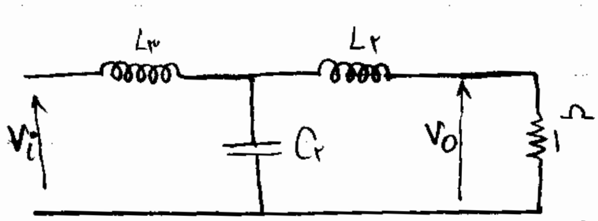
جدول فیلتر Butterworth:

n	$G(s)$
1	$\frac{1}{s+1}$
2	$\frac{1}{s^2+1.4s+1}$
3	$\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$
4	$\frac{1}{s^4+2.6s^3+3.4s^2+2.6s+1}$
5	$\frac{1}{s^5+3.24s^4+5.24s^3+5.24s^2+3.24s+1}$

سنتز فیلتر:

مثال: $n=3$

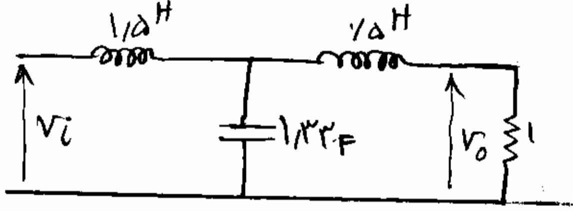
$$G_3(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$



$$G_3(s)=\frac{1}{s^3 L_2L_3C_2+s^2L_3C_2+s(L_2+L_3)+1}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} L_2L_3C_2=1 \\ L_3C_2=2 \\ L_2+L_3=2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} L_2=0.5 \\ L_3=1.5 \\ C_2=1.33 \end{cases}$$

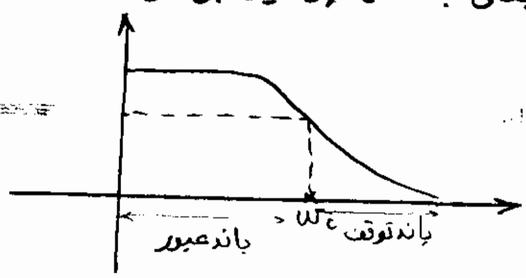
:

→ 

دونکته :

۱- مقدار مقاومت ۱ اهمی (R_L) ممکن است مقداری مخالف ۱ باشد.

۲- فرکانس قطع (ω_c) در مدارهای بالا ۱ (رادیان بر ثانیه) است.



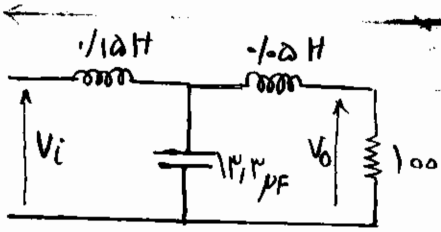
در یک طراحی فیلتر اگر R_L و ω_c معلوم باشند، در آن صورت عناصر مدار بدست آمده باید به شکل زیر تغییر نمایند :

مقاومت 1Ω $\longrightarrow$ R_L

$L_i \longrightarrow L_i \times \frac{R_L}{\omega_c}$

$C_i \longrightarrow C_i \times \frac{1}{R_L \cdot \omega_c}$

به عنوان مثال اگر $R_L=100\Omega$ و $\omega_c=1000$ آن گاه :



تمرین از فیلتر Butterworth: می خواهیم یک فیلتر پائین گذر با فرکانس $\omega_c=10^4$ بسازیم و قرار است این فیلتر به بار $R_L=50\Omega$ متصل گردد. درجه فیلتر را ۴ بگیرید. مدار فیلتر لازم را رسم کنید.

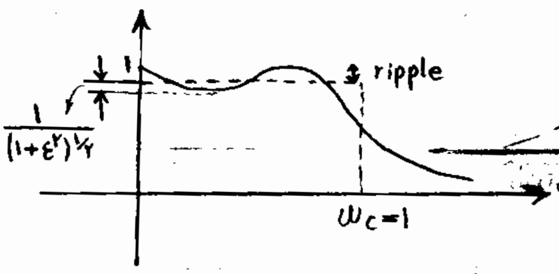
فیلتر chebychev:

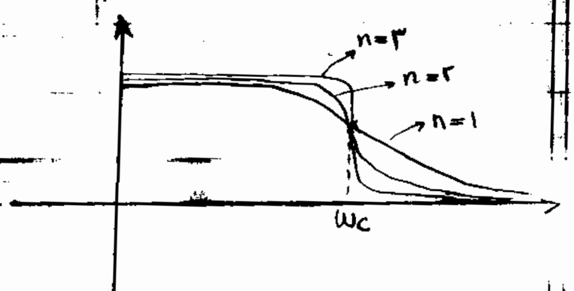
$$|G(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n(j\omega)^2}$$

جدول $C_n(j\omega)$:

n	$C_n(j\omega)$
1	ω
2	$2\omega^2-1$
3	$4\omega^3-3\omega$
4	$8\omega^4-8\omega^2+1$
5	$16\omega^4-20\omega^3+5\omega$

فیلتر Butterworth: فیلتر chebychev:





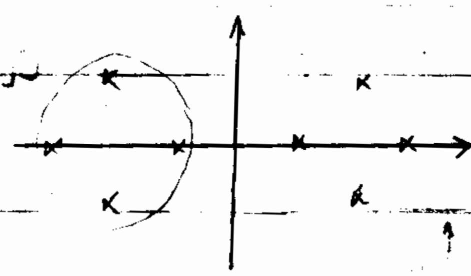
محاسبه $|G_n(j\omega)|^2$ از روی $G(s)$:

قطبهای $H(s)=G(s)\cdot G(-s)$ از رابطه زیر قابل محاسبه است:

قطب $H(s)$ ← $S = \sin a \sinh b + j\cos a \cosh b$

$$b = \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\varepsilon}$$

$$a = \pm\frac{\pi}{2n}, \pm\frac{3\pi}{2n}, \pm\frac{5\pi}{2n}, \dots$$



مثال: می خواهیم یک فیلتر chebychev با مشخصات زیر بسازیم:

۱- $n=2$ ۲- $R_L=600\,\Omega$ ۳- $f_c=8800\ \mathrm{rad/s}$ ۴- $\varepsilon=0.5$

۱- سه فاز   ۲- سری و تبدیل فوریه   ۳- اندوکتانس متقابل

جبر دار ۹- ۱۰- ۱۱- ۱۳   ۱۲

۱۶م پایانی - ۱۷ - میلر

$$\longrightarrow \left|G_2(j\omega)\right| = \frac{1}{1+0.25(2\omega^2-1)}$$

$$\longrightarrow b = \frac{1}{2}\sinh^{-1}\frac{1}{0.5} = 0.714 \quad , \quad a = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$$

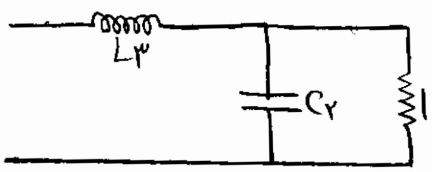
$$\longrightarrow S_1 = \sin\frac{\pi}{4}\sinh 0.714 + j\cos\frac{\pi}{4}\cosh(0.714) = 0.548 + j\,0.895$$

$$S_2 = 0.548 - j\,0.895 \quad , \quad S_3 = -0.548 + j\,0.895$$

$$S_4 = -0.548 - j\,0.895$$

$$\longrightarrow G(s) = \frac{1}{(s+0.548+j0.895)(s+0.548-j0.895)} = \frac{1}{s^2+1.096s+1.1}$$

$$= \frac{1/1.1}{0.908s^2+0.996s+1}$$



$$, \quad G(s) = \frac{1}{L_3C_2s^2+L_3s+1}$$

$$\begin{cases} L_3C_2 = 0.908 \\ L_3 = 0.996 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} L_3 = 0.996 \\ C_2 = 0.912 \end{cases}$$

$$\frac{0.996\times 400}{8800} = 0.0479\ H$$

$$\longrightarrow \quad \frac{0.912}{400\times 8800} = 0.173\ \mu F$$