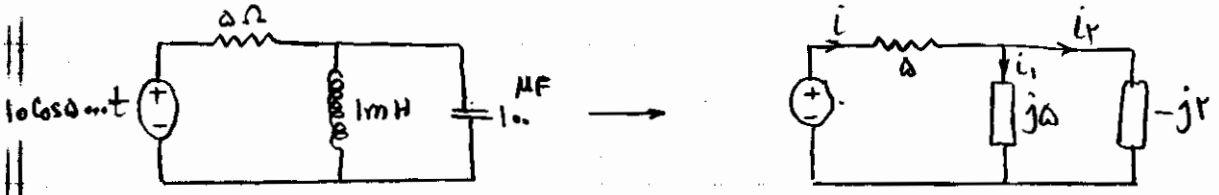
بسم الله الرحمن الرحیم

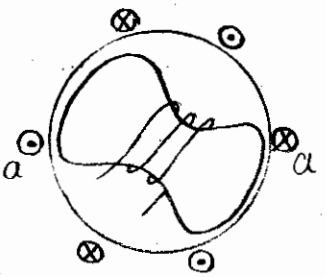
مدارهای الکتریکی II

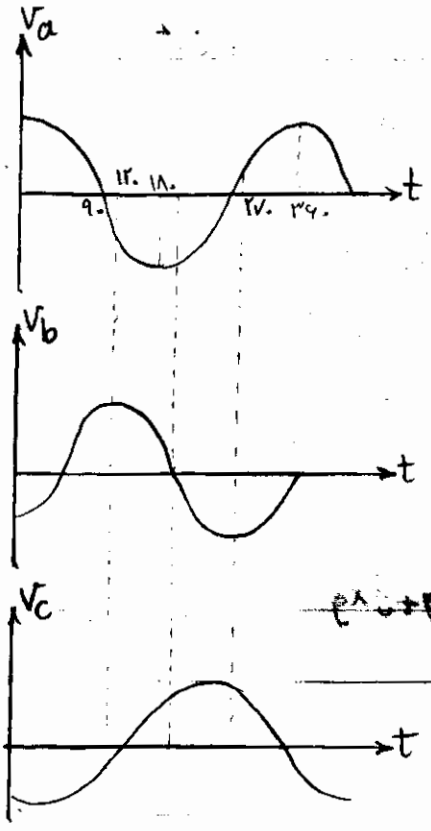
مدارهای سه فاز

قبلاً مسائلی را بررسی کردیم که با منابع سینوسی تک فاز تحریک می شدند و فقط دنبال جواب خصوصی بودیم.



$$\longrightarrow I = \frac{10\angle 0}{5 + \frac{10}{j3}}$$





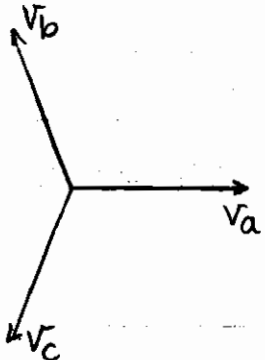
اگر

$V_a = V_m \cos \omega t$

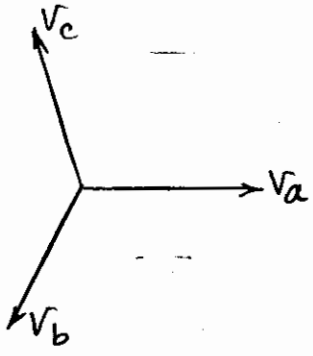
$V_b = V_m \cos(\omega t + 120)$

$V_c = V_m \cos(\omega t - 120)$

آنگاه:



ترتیب یا توالی acb، منفی، معکوس



ترتیب یا توالی abc، مثبت، مستقیم

چند نکته

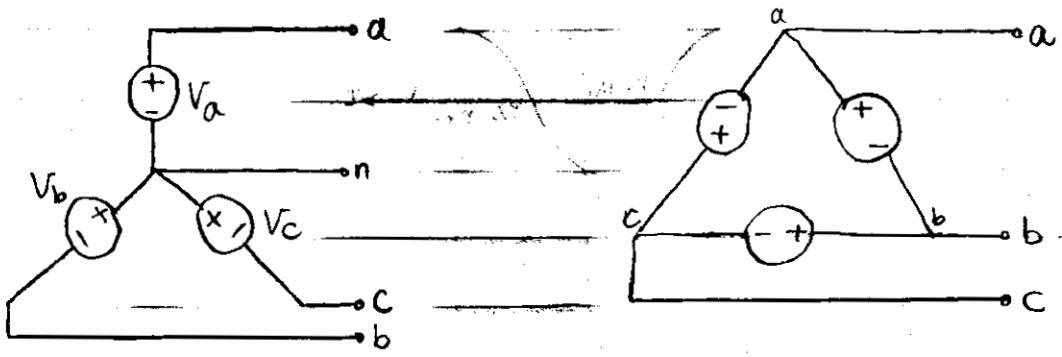
همواره
- (در حوزه‌ی بردار) $V_a + V_b + V_c = 0$
- (در حوزه‌ی زمان) $v_a + v_b + v_c = 0$

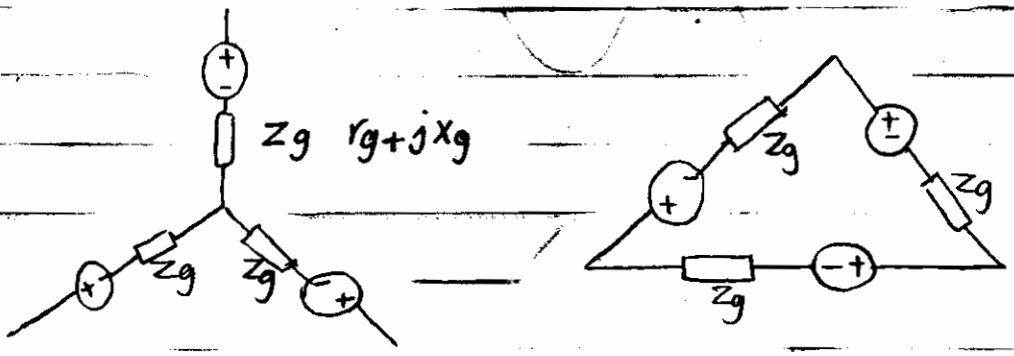
در مدارهای سه فاز وقتی یکی از ولتاژها و ترتیب معلوم باشد دو ولتاژ دیگر معلوم است.

مثال: در یک ژنراتور سه فاز، $V_a = 220 \cos(\omega t + 50)$ و ترتیب مثبت است مطلوبست V_b، V_c

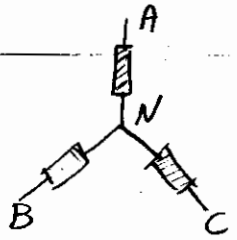
$\longrightarrow V_b = 220 \cos(\omega t - 70)$ ، $V_c = 220 \cos(\omega t + 170)$

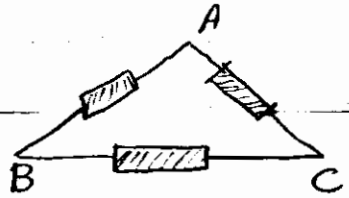
این ۶ سر به دو فرم ستاره یا مثلث بسته می‌شوند:





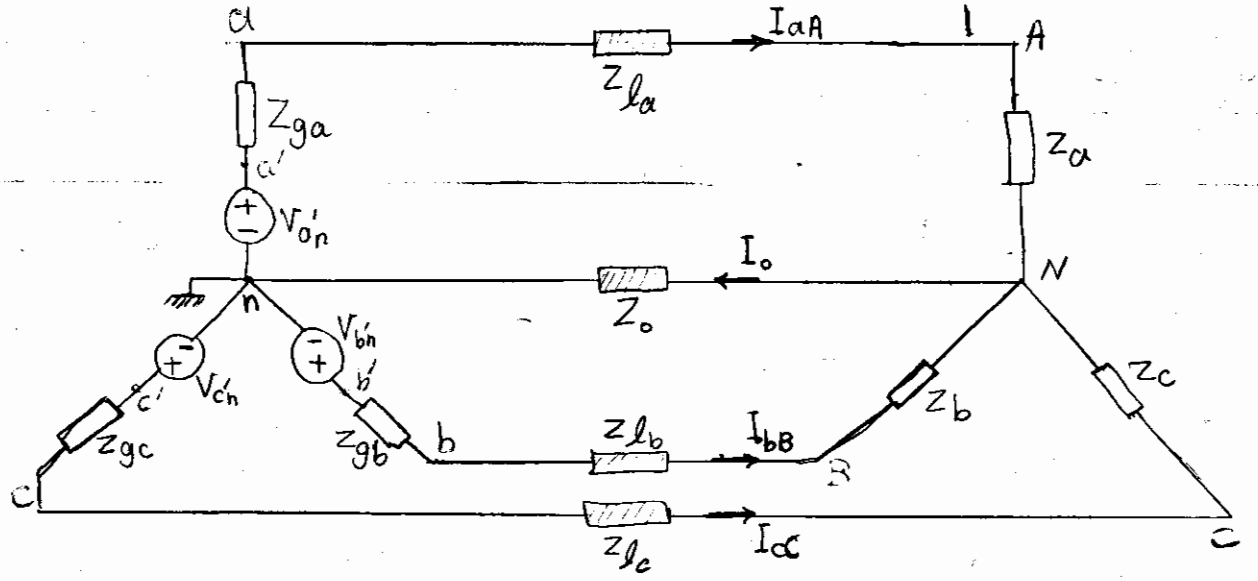
بار (مصرف کننده) را نیز می‌توانیم به فرم ستاره یا مثلث در نظر بگیریم:





نتیجه: ۴ نوع مدار سه فاز داریم: ۱- ستاره - ستاره ۲- ستاره - مثلث
۳- مثلث - ستاره ۴- مثلث - مثلث

۱- تحلیل مدارهای ستاره - ستاره:



نکته مهم: تحلیل مدارهای سه فاز کاملاً از همان روشهای گفته شده در مدار ۱ انجام می شود با این تفاوت که در این مدارها سه منبع داریم.

$$Z_{\varphi_a} \triangleq Z_{g_a} + Z_{l_a} + Z_a$$

$$Z_{\varphi_b} \triangleq Z_{g_b} + Z_{l_b} + Z_b$$

$$Z_{\varphi_c} \triangleq Z_{g_c} + Z_{l_c} + Z_c$$

$$\longrightarrow \frac{V_N}{Z_o} = \frac{V_{a'n} - V_N}{Z_{\varphi_a}} + \frac{V_{b'n} - V_N}{Z_{\varphi_b}} + \frac{V_{c'n} - V_N}{Z_{\varphi_c}}$$

$$\longrightarrow V_N = \frac{V_{a'n} \cdot Y_{\varphi_a} + V_{b'n} \cdot Y_{\varphi_b} + V_{c'n} \cdot Y_{\varphi_c}}{Y_{\varphi_a} + Y_{\varphi_b} + Y_{\varphi_c} + Y_o}$$

$$\longrightarrow I_{aA} = \frac{V_{a'n} - V_N}{Z_{\varphi_a}} \quad , \quad I_{bB} = \frac{V_{b'n} - V_N}{Z_{\varphi_b}} \quad , \quad I_{cC} = \frac{V_{c'n} - V_N}{Z_{\varphi_c}}$$

مدار سه فاز متعادل : وقتی می گوئیم مدار سه فاز متعادل است که :

$$\begin{cases} Z_{ga}=Z_{gb}=Z_{gc} \\ Z_{la}=Z_{lb}=Z_{lc} \\ Z_a=Z_b=Z_c \end{cases} \longrightarrow Z_{\varphi a}=Z_{\varphi b}=Z_{\varphi c}$$

$$, \quad Y_{\varphi a}=Y_{\varphi b}=Y_{\varphi c}$$

با فرض متعادل بودن مدار سه فاز :

$$V_N=\frac{Y_\varphi [V'_{an}+V'_{bn}+V'_{cn}]}{3Y_\varphi+Y_0}=0$$

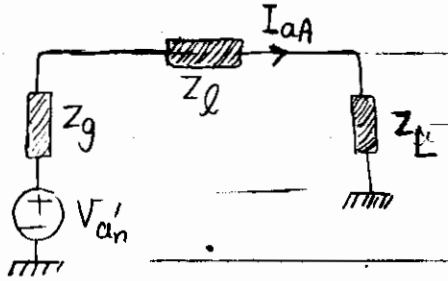
در این حالت :

$$\begin{cases} I_{aA}=Y_\varphi \cdot V'_{an} \\ I_{bB}=Y_\varphi \cdot V'_{bn} \\ I_{cC}=Y_\varphi \cdot V'_{cn} \end{cases}$$

چون V'_{an} ، V'_{bn} ، V'_{cn} از نظر قدر مطلق برابر هستند و فقط اختلاف فاز 120° دارند، پس I_{aA} ، I_{bB} ، I_{cC} نیز از نظر قدر مطلق برابر خواهند بود و فقط 120° اختلاف فاز خواهند داشت.

در نتیجه کافی است I_{aA} را محاسبه کنیم.

مدار معادل تک فاز :



قبل از پرداختن به مثال عددی با چند اصطلاح آشنا می شویم :

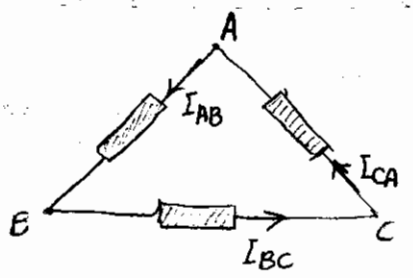
۱- V_{an} ، V_{bn} ، V_{cn} را اصطلاحاً ولتاژهای خط به خنثی (فاز) در سر مولد نامند.

۲- V_{AN} ، V_{BN} ، V_{CN} را اصطلاحاً ولتاژهای خط به خنثی (فاز) در سر بار نامند.

۳- V_{ab} ، V_{bc} ، V_{ca} را اصطلاحاً ولتاژهای خط به خط (خط) در سر مولد نامند.

۴- V_{AB} ، V_{BC} ، V_{CA} را اصطلاحاً ولتاژهای خط به خط (خط) در سر بار نامند.

۵- I_{aA} ، I_{bB} ، I_{cC} را اصطلاحاً جریانهای خط نامند.



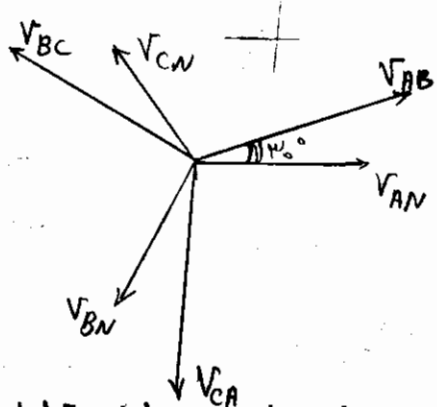
۶- I_{AB} ، I_{BC} ، I_{CA} را " جریانهای فاز در بار نامند.

۷- I_{ab} ، I_{bc} ، I_{ca} را " جریانهای فاز در مولد نامند.

در مدارهای سه فاز متعادل :

$$\begin{cases} V_{ab} = \sqrt{3}\angle 30^\circ \cdot V_{an} \\ V_{AB} = \sqrt{3}\angle 30^\circ \cdot V_{AN} \end{cases}$$

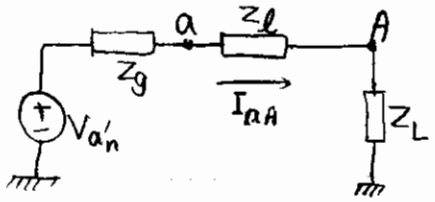
اثبات برداری :



$$V_{AB} = V_{AN} - V_{BN}$$

اثبات ریاضی بعهده شما

الگوریتم مدارهای سه فاز ستاره متعادل :



۱- مدار تک فاز معادل را رسم می کنیم.

۲- از روی آن I_{aA} را محاسبه می کنیم. $\quad I_{aA} = I_l \angle \theta$

۳- I_{bB} ، I_{cC} را محاسبه می کنیم: $\quad I_{bB} = I_l \angle \theta - 120^\circ \quad , \quad I_{cC} = I_l \angle \theta + 120^\circ$

۴- V_{an} ، V_{AN} را محاسبه می کنیم:

$$V_{AN} = Z_L \cdot I_{aA}$$

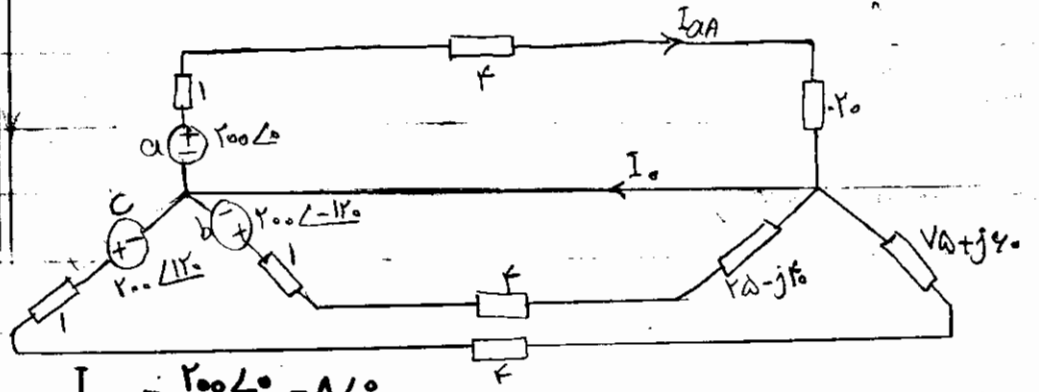
$$V_{an} = (Z_L + Z_l) \cdot I_{aA} = V_{a'n} - Z_g \cdot I_{aA}$$

۵- V_{bn} ، V_{BN} ، V_{cn} ، V_{CN} را محاسبه می کنیم.

۶- V_{AB} ، V_{ab} را محاسبه می‌کنیم: $V_{AB}=\sqrt{3}\angle 30^\circ \times V_{AN}$ ، $V_{ab}=\sqrt{3}\angle 30^\circ \times V_{an}$

۷- V_{BC} ، V_{CA} ، V_{bc} ، V_{ca} را نیز محاسبه می‌کنیم.

مثال از حالت بار نامتعادل :



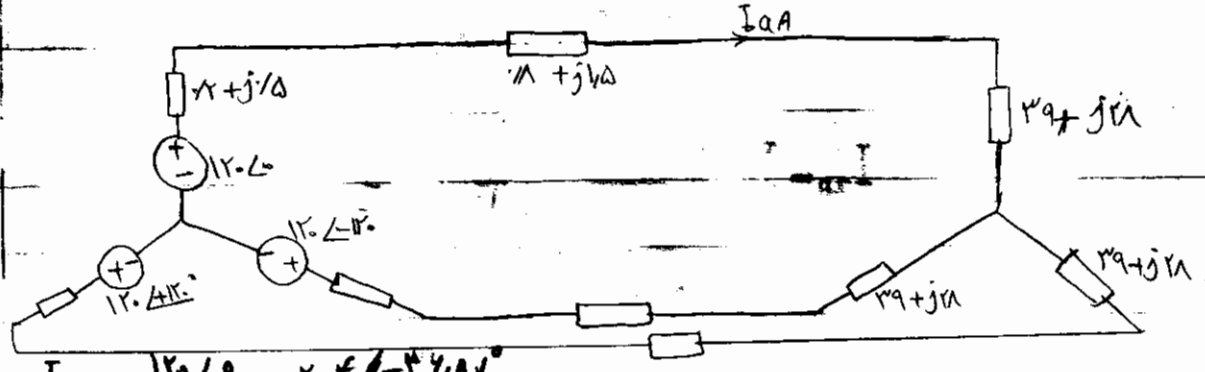
$$I_{aA}=\frac{200\angle 0^\circ}{25}=8\angle 0^\circ$$

$$I_{bB}=\frac{200\angle -120^\circ}{30-j40}=4\angle -173.13^\circ \longrightarrow I_o=I_{bB}+I_{cc}+I_{aA}=9.94\angle -9.79^\circ$$

$$I_{cC}=\frac{200\angle 120^\circ}{80+j60}=2\angle 83.13^\circ$$

$$V_{AN}=20\times 8\angle 0^\circ=140\angle 0^\circ \quad , \quad \text{ولتاژ خازن در بار } V_{BN}=(25-j40)(4\angle -173.13^\circ)=$$

مثال از حالت بار متعادل :



$$I_{aA}=\frac{120\angle 0^\circ}{40+j30}=2.4\angle -36.87^\circ$$

$$I_{bB}=2.4\angle -156.87^\circ$$

$$I_{cC}=2.4\angle 83.13^\circ$$

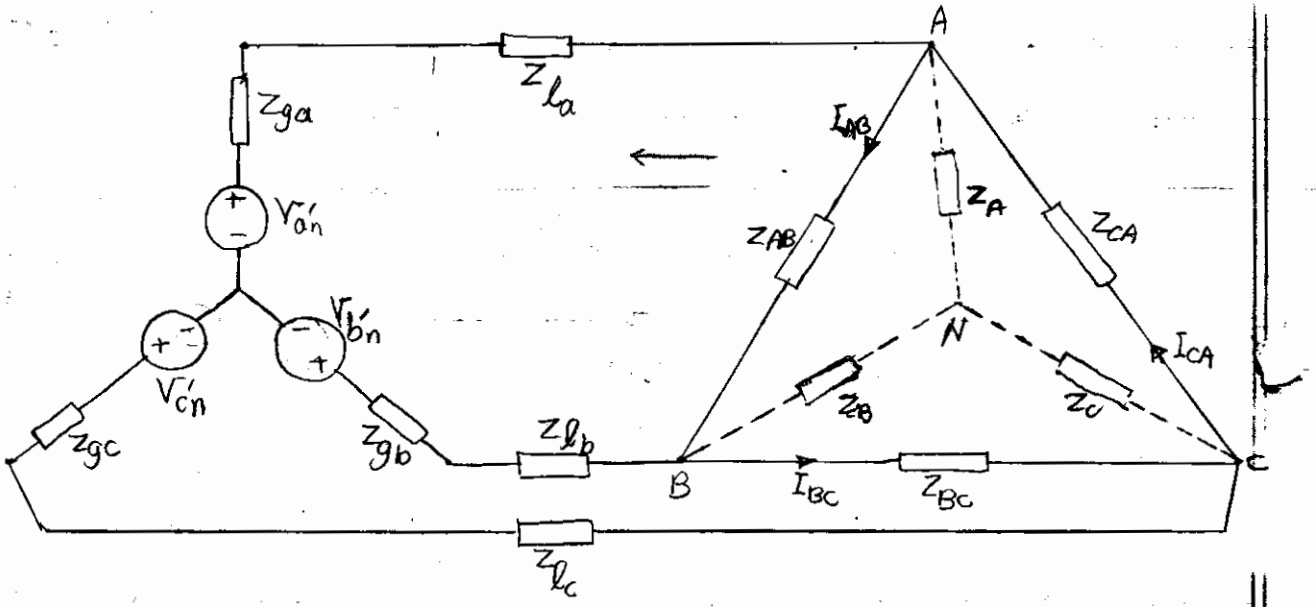
$$V_{AN}=(39+j28)\times 2.4\angle -36.87^\circ=115.22\angle -1.19^\circ$$

$$V_{BN}=115.22\angle -121.19^\circ \quad , \quad V_{CN}=115.22\angle 118.81^\circ$$

$$\rightarrow \quad V_{AB} = \sqrt{3}\angle 30^\circ (115{,}22\angle -1{,}19^\circ) = 199{,}58 \angle 28{,}81^\circ$$

$$\rightarrow \quad V_{BC} = 199{,}58 \angle -91{,}19^\circ \quad , \quad V_{CA} = 199{,}58 \angle 148{,}81^\circ$$

تحلیل مدار سه فاز ستاره-مثلث :



$$Z_A = \frac{Z_{AC} \cdot Z_{AB}}{Z_{AC}+Z_{AB}+Z_{BC}} \quad , \quad Z_B = \frac{Z_{BC} \cdot Z_{BA}}{Z_{AC}+Z_{AB}+Z_{BC}} \quad , \quad Z_C = \frac{Z_{AC} \cdot Z_{BC}}{Z_{AC}+Z_{AB}+Z_{BC}}$$

با این تبدیل در واقع مدار به یک مدار ستاره ستاره تبدیل می شود و از همان طریق حل می شود.

نکته : در این حالت علاوه بر محاسبهٔ ولتاژهای خط در بار، ولتاژهای فاز در بار، ولتاژهای خط در مولد ، ولتاژهای فاز در مولد و جریانهای خط باید جریان های فاز در بار I_{AB} ، I_{BC} ، I_{CA} را نیز محاسبه کنیم.

نحوهٔ محاسبهٔ جریانهای فاز در بار در اتصال ستاره مثلث :

الف- بار نامتعادل :

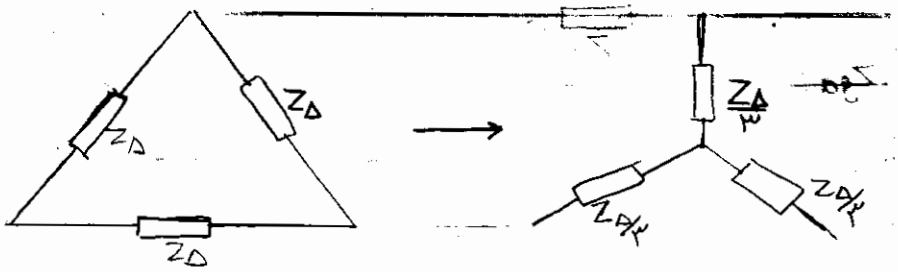
$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_{AB}} \quad , \quad I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_{BC}} \quad , \quad I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_{CA}}$$

ب ـ بار متعادل :

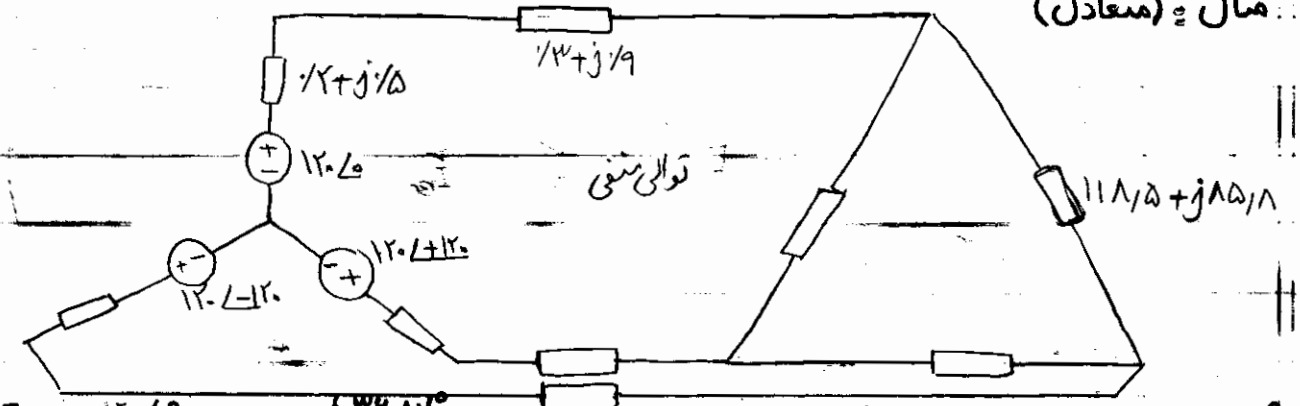
$$I_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ \, I_{aA}$$

به عنوان تمرین ثابت کنید اگر $I_{AB} = I_p \angle \theta$ آن گاه : $I_{BC} = I_p \angle \theta - 120^\circ$, $I_{CA} = I_p \angle \theta + 120^\circ$

نکته : در بار متعادل



مثال : (متعادل)



$$I_{aA} = \frac{120\angle 0}{30+j20} = 2/4 \angle -36/87^\circ \quad , \quad I_{bB} = 2/4 \angle 83/13^\circ \quad , \quad I_{cC} = 2/4 \angle -156/87^\circ$$

$$V_{AN} = (39/5 + j28/6)(2/4 \angle -36/87^\circ) = 117 \angle -1/92^\circ \longrightarrow V_{BN} = 117 \angle 119/04^\circ$$

$$V_{CN} = 117 \angle -120/92^\circ$$

$$V_{an} = 118/9 \angle -1/32^\circ \longrightarrow V_{bn} = 118/9 \angle 119/68^\circ$$

$$V_{cn} = 118/9 \angle -120/32^\circ$$

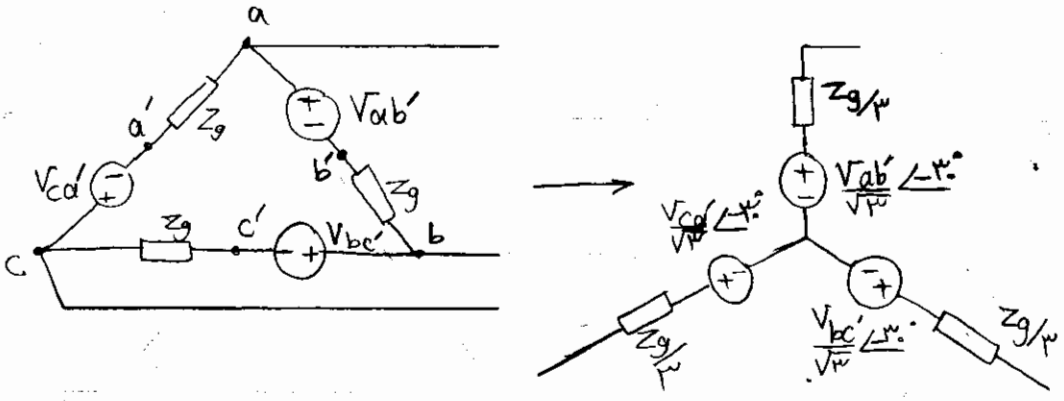
$$V_{AB} = \sqrt{3} \angle -30^\circ \, V_{AN} = 202/72 \angle -30/92^\circ \text{ , به همین ترتیب : } V_{BC} = 202/72 \angle 89/08^\circ$$

$$V_{CA} = 202/72 \angle -150/92^\circ$$

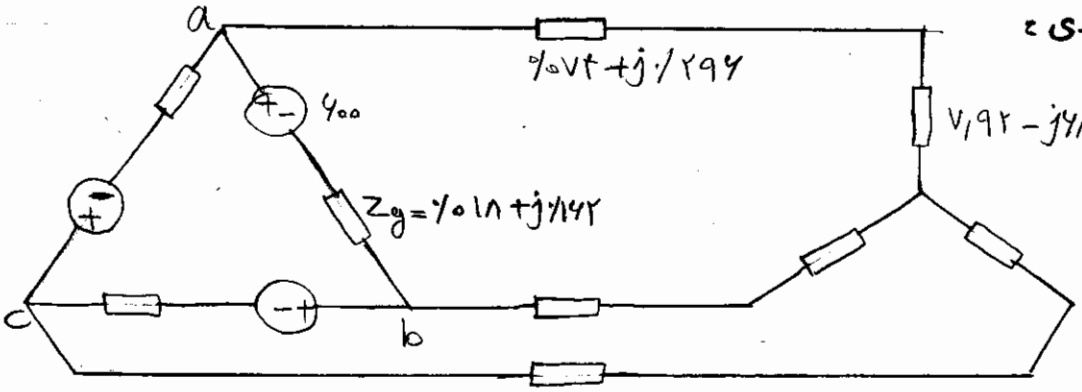
برای محاسبهٔ I_{AB} از یکی از دو روش زیر استفاده می کنیم :

$$I_{AB} = \begin{cases} \frac{V_{AB}}{Z_{AB}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \cdot I_{aA} \end{cases}$$

تحلیل مدارهای سه‌فاز مثلث ستاره و مثلث ـ مثلث :



مثال عددی :



$$I_{aA} = \frac{346.41 \angle +30°}{8 - j6} = 34.6 \angle 66.87°$$

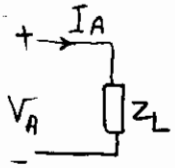
جریانهای I_{ba} ، I_{ac} ، I_{cb} را اصطلاحاً جریانهای فاز در مولد نامند.

$$I_{ba} = \frac{1}{\sqrt{3}} \angle -30° \; I_{aA}$$

(تواِلی منفی)

توان در مدارهای سه‌فاز :

۱ـ در مدار تک فاز



V_A, I_A در حوزه فازبردار و مقدار موثر

$$\rightarrow \quad S = P + jQ = V_A I_A^* \quad , \quad P = |V_A||I_A| \cos(\theta_v - \theta_i)$$
$$Q = |V_A||I_A| \sin(\theta_v - \theta_i)$$

۲- در مدارهای سه فاز متعادل

الف- با معلوم بودن ولتاژ و جریان فاز a و ترتیب، می توان ولتاژ و جریان فازهای b و c را محاسبه کرد.

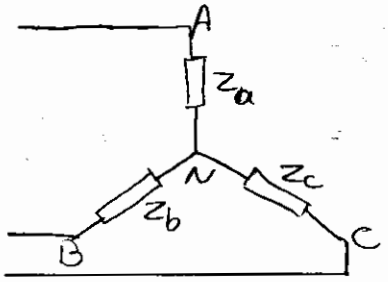
ب- اندازهٔ ولتاژ خط $\sqrt{3}$ برابر اندازهٔ ولتاژ فاز است و زاویهٔ آن $\pm 30^\circ$ متفاوت است.

ج- در حالت بار مثلث اندازهٔ جریان خط $\sqrt{3}$ برابر جریان فاز است و زاویهٔ آن $\pm 30^\circ$ متفاوت است.

بحث توان در مدار سه فاز به دو قسمت تقسیم می شود: ۱- محاسبهٔ توان ۲- اندازه گیری توان

محاسبهٔ توان دو حالت متعادل و نامتعادل دارد که هر کدام ستاره یا مثلث می توانند باشند.

محاسبه توان در مدار سه فاز ستاره نامتعادل:

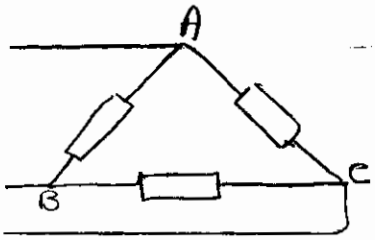


$$S = V_{an}\cdot I_{aA}^{*} + V_{bn}\cdot I_{bB}^{*} + V_{cn}\cdot I_{cC}^{*}$$

$$P = |V_{AN}||I_{aA}|\cos(\theta_{v_A} - \theta_{i_A}) + |V_{BN}||I_{bB}|\cos(\theta_{v_B} - \theta_{i_B}) + |V_{CN}||I_{cB}|\cos(\theta_{v_C} - \theta_{i_C})$$

$$Q = |V_{AN}||I_{aA}|\sin(\theta_{v_A} - \theta_{i_A}) + |V_{BN}||I_{bB}|\sin(\theta_{v_B} - \theta_{i_B}) + |V_{CN}||I_{cN}|\sin(\theta_{v_C} - \theta_{i_C})$$

محاسبهٔ توان در مدار سه فاز مثلث نامتعادل:



$$S = V_{AB}\cdot I_{AB}^{*} + V_{BC}\cdot I_{BC}^{*} + V_{CA}\cdot I_{CA}^{*}$$

$$P = |V_{AB}||I_{AB}|\cos(\theta_{V_{AB}} - \theta_{i_{AB}}) + |V_{BC}||I_{BC}|\cos(\theta_{V_{BC}} - \theta_{i_{BC}}) + |V_{CA}||I_{CA}|\cos(\theta_{V_{CA}} - \theta_{i_{CA}})$$

$$Q = |V_{AB}||I_{AB}|\sin(\theta_{v_{AB}} - \theta_{i_{AB}}) + |V_{BC}||I_{BC}|\sin(\theta_{v_{BC}} - \theta_{i_{BC}}) + |V_{CA}||I_{CA}|\sin(\theta_{v_{CA}} - \theta_{i_{CA}})$$

محاسبه توان در بار ستاره متعادل:

$$\rightarrow \quad |V_{AN}| = |V_{BN}| = |V_{CN}| = V_\varphi$$
$$|I_{aA}| = |I_{bB}| = |I_{cC}| = I_\varphi$$
$$\theta_{v_A} - \theta_{i_A} = \theta_{v_B} - \theta_{i_B} = \theta_{v_C} - \theta_{i_C} = \theta_\varphi$$

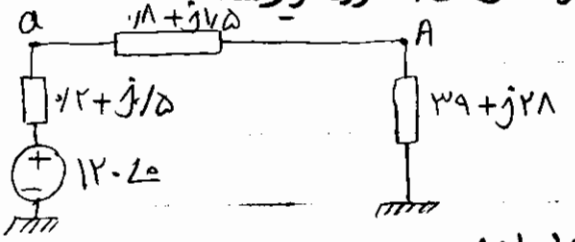
$$\rightarrow \begin{cases} P_T = 3 V_\varphi . i_\varphi \cos\theta_\varphi \\ Q_T = 3 V_\varphi . i_\varphi \sin\theta_\varphi \\ S_T = 3 V_\varphi . I_\varphi^* \end{cases}$$

در بار ستاره: $i_\varphi = i_l \ , \ V_l = \sqrt{3} V_\varphi$

$$\begin{cases} P_T = \sqrt{3} . V_l . i_l \cos\theta_\varphi \\ Q_T = \sqrt{3} . V_l . i_l \sin\theta_\varphi \\ S_T = \sqrt{3} V_l . I_l \angle\theta_\varphi \end{cases}$$

تمرین: ثابت کنید در حالت مثلث متعادل نیز همین روابط برقرار است.

مثال: مدار سه فازی داریم که مدار تک فاز معادل آن به صورت زیر است.



مطلوبست محاسبه توان مصرفی بار، خط، مولد و همچنین تحقیق اصل بقای انرژی

$$I_{aA} = 2{,}1 \angle -36{,}87^\circ$$

$$V_{AB} = 199{,}58\angle \quad , \quad V_{AN} = 115{,}22 \angle 1{,}19^\circ$$

$$P_{بار} = 3\times(115{,}22)(2{,}4)\cos[35{,}78^\circ]$$

$$= \sqrt{3}\,(199{,}58)(2{,}4)\cos[35{,}78^\circ] = 224{,}64$$

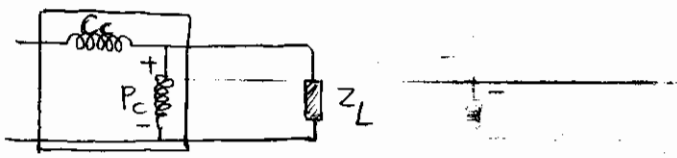
$$P_{خط} = 3(0{,}8)(2{,}4)^2 = 13{,}824 \quad , \quad P_{ترانزیستور} = 3(0{,}2)(2{,}4)^2 = 3{,}456$$

$$\longrightarrow P_{\text{مصرفی کل}} = 991{,}2 \qquad \text{و به همین ترتیب : } Q_{\text{کل}} = 518{,}4$$

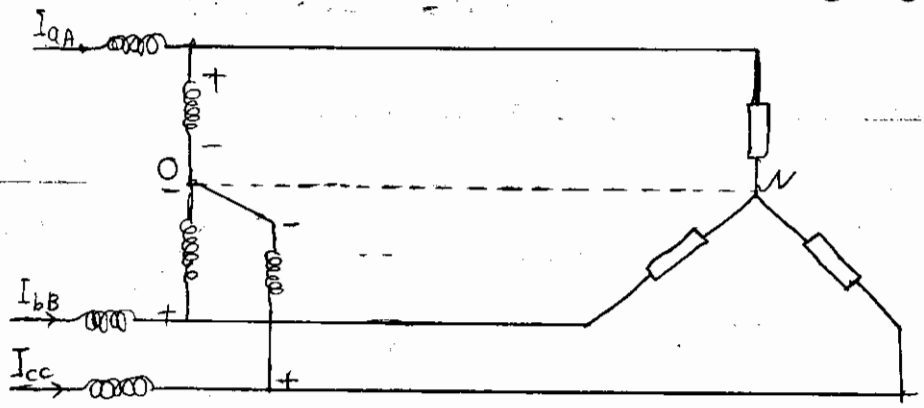
$$\text{مولد } S = -120\angle 0^\circ \times 2{,}4\angle 36{,}87^\circ = -991{,}2 - j518{,}4$$

اندازه‌گیری توان در مدار سه‌فاز با وات‌متر:

در مدار تک فاز



همین ترکیب در مدار سه‌فاز (ستاره)



$$S = V_{AN}\cdot I_{aA}^{*} + V_{BN}\cdot I_{bB}^{*} + V_{CN}\cdot I_{cc}^{*}$$

چند نکته‌ٔ جالب:

۱- نقطه‌ٔ O به هر نقطه‌ای وصل شود تفاوتی در قرائت وات‌مترها نخواهد داشت (در مدار سه‌سیمه)

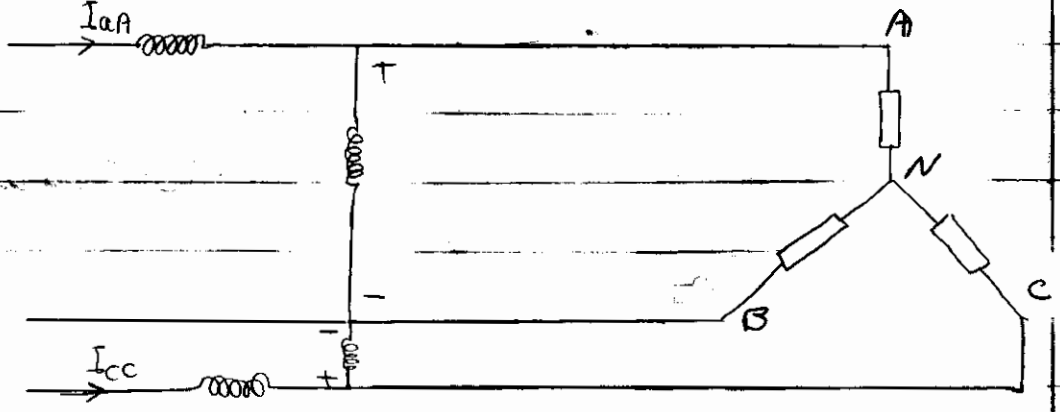
$$S' = (V_{AN}-V_0)\,I_{aA}^{*} + (V_{BN}-V_0)\,I_{bB}^{*} + (V_{CN}-V_0)\,I_{cc}^{*}$$

$$S' = S - V_0\left[I_{aA}^* + I_{bB}^* + I_{cC}^*\right]$$

چون : $I_{aA} + I_{bB} + I_{cC} = 0$

$$\longrightarrow S' = S$$

۲- در مدار سه فاز (سه سیمه) می‌توان با دو واتمتر توان کل را اندازه گرفت.



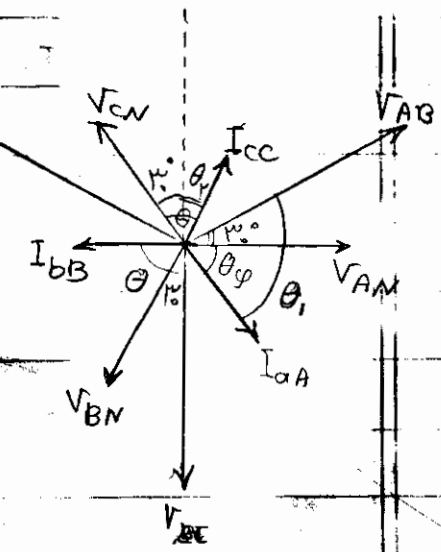
$$V_0 = V_{BN} \longrightarrow S' = S = (V_{AN} - V_{BN}).I_{aA}^* + (V_{CN} - V_{BN}).I_{cC}^*$$

$$\longrightarrow S = V_{AB}.I_{aA}^* + V_{CB}.I_{bB}^*$$

قرائت توان در مدار سه فاز متعادل با دو واتمتر:

$$W_1 = V_l . i_l \cos(\theta_\varphi + 30^\circ)$$

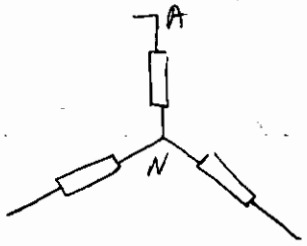
$$W_2 = V_l . i_l \cos(\theta_\varphi - 30^\circ)$$



با دقت در شکل پی به نحوهٔ اثبات می‌برید.

$V_{AN}=120\angle 0^\circ$

مثال: قرائت واتمترهای W_1 و W_2 را در حالتهای زیر محاسبه کنید:



۱- $Z_L=8+j6$ ۲- $Z_L=8-j6$

۳- $Z_L=5+j5\sqrt{3}$ ۴- $Z_L=10\angle -76^\circ$

حل ۱:

$\theta_\varphi=36{,}87^\circ$

$V_\varphi=120^\circ$ $\longrightarrow$ $I=\dfrac{120\angle 0^\circ}{10\angle 36{,}87^\circ}=\underbrace{12\angle -36{,}87^\circ}_{i_\varphi=i_l}$

$V_l=120\sqrt{3}$

① $W_1=120\sqrt{3}\times 12\cos[36{,}87^\circ+30^\circ]=976$

$W_2=120\sqrt{3}\times 12\cos[36{,}87^\circ-30^\circ]=2476$

به همین ترتیب:

② $W_1=$ $W_2=$

③ $W_1=$ $W_2=$

④ $W_1=$ $W_2=$

نکته: در قرائت واتمترها در مدار سه فاز متعادل

۱- اگر زاویه بار از 60° کوچکتر باشد ($\cos\theta_\varphi>1/5$) باشد هر دو واتمتر وات مثبت قرائت می‌کنند.

۲- اگر زاویه بار برابر 60° باشد یکی از دو واتمتر صفر قرائت می‌کند.

۳- اگر زاویه بار از 60° بزرگتر باشد یکی از دو واتمتر منفی قرائت می‌کند.