فرکانسهای طبیعی : Natural Frequencies

فرکانس طبیعی برای مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان LTI تعریف می شود.

فرکانس طبیعی برای مدارهایی تعریف می‌شود که شامل منابع مستقل باشد.

فرکانس طبیعی برای ۱- یک متغیر شبکه (مدار) ۲- خود شبکه (مدار) قابل تعریف است.

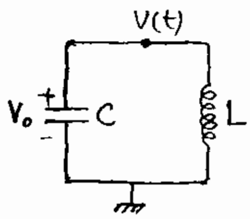
متغیر شبکه:
- ولتاژ
  - یک شاخه
  - یک گره
- جریان
  - یک شاخه
  - یک حلقه

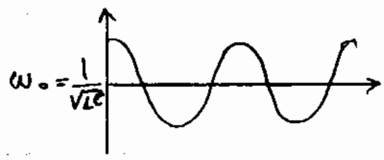
در یک مدار LTI که با شرایط اولیه کار می کند، اگر $x(t)$ یک متغیر شبکه باشد در آن صورت :

$$x(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \dots + K_n e^{s_n t}$$

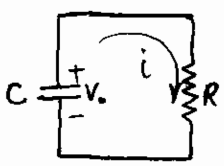
که S_1 و S_2 و ... و S_K را فرکانسهای طبیعی متغیر $x(t)$ نامند.

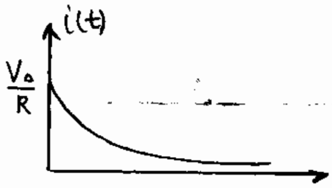
مثال ۱ :





مثال ۲ :

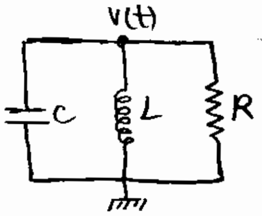




$$i(t) = \underbrace{\frac{V_0}{R}}_{K_1} e^{\overbrace{\frac{-1}{RC}}^{S_1} t}$$

فرکانس طبیعی $\longrightarrow \quad S_1 = \frac{-1}{RC}$

مثال ۳:



$$V(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} \quad , \quad s_{1,2} = \frac{-1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

الف: $R = \frac{1}{6} \quad , \quad C = 1 \quad , \quad L = \frac{1}{25} \longrightarrow \begin{matrix} s_1 = -3 + j \\ s_2 = -3 - j \end{matrix}$

ب: $R = \frac{1}{6} \quad , \quad C = 1 \quad , \quad L = \frac{1}{5} \longrightarrow \begin{matrix} s_1 = -5 \\ s_2 = -1 \end{matrix}$

ج: $R = \frac{1}{6} \quad , \quad C = 1 \quad , \quad L = \frac{1}{9} \longrightarrow \begin{matrix} s_1 = -3 \\ s_2 = -3 \end{matrix}$

$$V(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 t e^{-3t}$$

در این صورت می گوییم متغیر شبکه دارای فرکانس طبیعی ۳- از مرتبهٔ ۲ می باشد.

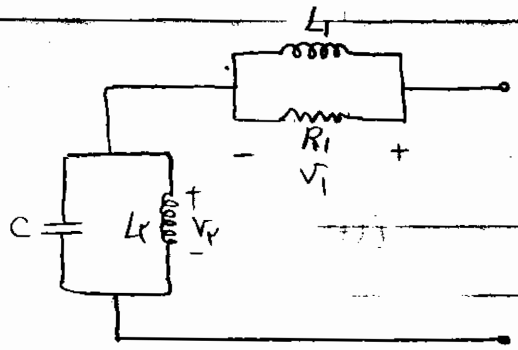
تعریف فرکانس طبیعی یک شبکه (مدار):

s_k را فرکانس طبیعی یک شبکه نامند چنانچه s_k فرکانس طبیعی یکی از متغیرهای شبکه باشد.

نکته ۱: در اکثر مدارها فرکانس طبیعی کلیه متغیرها و خود شبکه یکسان است.

نکته ۲: در بعضی موارد فرکانسهای طبیعی مدار با متغیرهای شبکه یکسان نیست.

مثال:



فرکانس طبیعی V_1: $s = -\frac{R_1}{L_1}$

فرکانس طبیعی V_2: $\frac{-j}{\sqrt{L_2 C}} , + \frac{j}{\sqrt{L_2 C}}$

فرکانس طبیعی شبکه: $\frac{-R_1}{L_1} , \frac{+j}{\sqrt{L_2 C}} , \frac{-j}{\sqrt{L_2 C}}$

نحوهٔ محاسبهٔ فرکانسهای طبیعی یک متغیر شبکه (غیر از محاسبهٔ مستقیم):

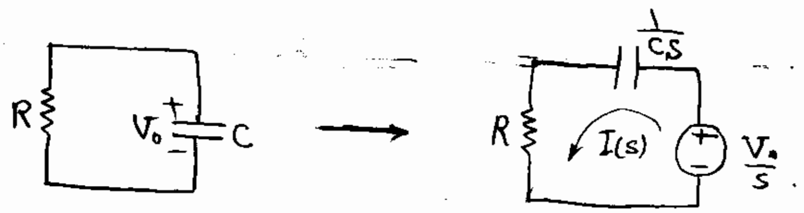
۱_ استفاده از تبدیل لاپلاس $x(t)$ ، $[X(s)]$

اگر $X(s)$ به صورت زیر باشد:

$$X(s)=\frac{b_0+b_1 s+\cdots+b_m s^m}{a_0+a_1 s+\cdots+a_N s^N}$$

ریشه‌های مخرج (قطبها) همان فرکانسهای طبیعی $x(t)$ هستند.

مثال:



$$I(s)=\frac{\frac{V_0}{s}}{R+\frac{1}{Cs}}=\frac{CV_0}{1+RCs}\longrightarrow 1+RCs=0\longrightarrow s=\frac{-1}{RC}$$

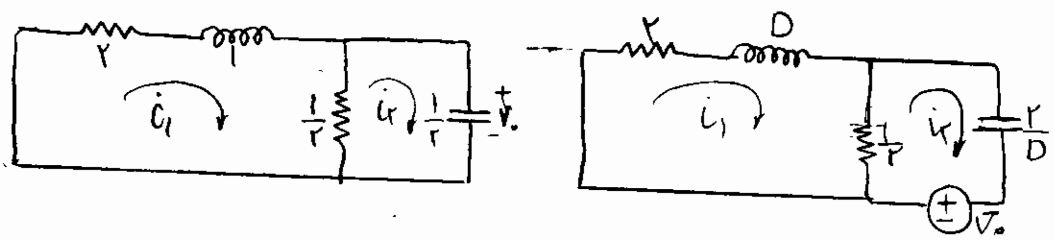
۲_ استفاده از معادلات انتگرو دیفرانسیلی:

اگر معادلات انتگرو دیفرانسیلی یک مدار را بنویسیم به شکل زیر در می‌آید:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) & \cdots & P_{1n}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) & \cdots & P_{2n}(D) \\ \vdots & & & \\ P_{n1}(D) & & & P_{nn}(D) \end{bmatrix}}_{P(D)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}}_{\underline{f}}$$

$$\longrightarrow \quad P(D)\cdot \underline{x}=\underline{f}$$

مثال:



$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2}+D & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{2}{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -V_0 \end{bmatrix}$$

نکته: اگر معادلهٔ دیفرانسیل $x(t)$ را به شکل زیر داشته باشیم:

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0)\, x(t) = f'(t)$$

در آن صورت ریشه‌های معادلهٔ $D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0 = 0$

همان فرکانسهای طبیعی هستند.

نکته: در معادلهٔ بالا، باید معادلهٔ دیفرانسیل دارای حداقل درجهٔ ممکن باشد. (معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال)

الگوریتم کار:

۱ـ معادلات انتگرو دیفرانسیلی را طوری جابجا کنیم که x_n (متغیر آخری)، متغیری باشد که قرار است فرکانسهای طبیعی آن را محاسبه کنیم.

۲ـ ماتریس $P(D)$ را به صورت یک ماتریس بالا مثلثی در می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_{11}(D) & \hat{P}_{12}(D) & \cdots & \hat{P}_{n1}(D) \\ 0 & \hat{P}_{22}(D) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \hat{P}_{nn}(D) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_N \end{bmatrix}$$

۳- درآن صورت ریشه‌های معادلهٔ $\hat{P}_{nn}(D)=0$ همان فرکانسهای طبیعی $x_n(t)$ هستند.

یادآوری یک مثال ساده عددی: حل یک دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &: \quad 2x_1+x_2=11 \\ \varepsilon_2 &: \quad 3x_1+5x_2=34 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 \\ 34 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1' &: \varepsilon_1 : \quad 2x_1+x_2=11 \\ \varepsilon_2' &: \varepsilon_2-\tfrac{3}{2}\varepsilon_1 : \quad 3.5x_2=17.5 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 \\ 17.5 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow 3.5x_2=17.5 \longrightarrow x_2=5$$

$$\longrightarrow 2x_1+5=11 \longrightarrow x_1=3$$

درمدار مثال قبل:

$$\varepsilon_1 : \left(\tfrac{5}{2}+D\right)i_1-\tfrac{1}{2}i_2=0$$

$$\varepsilon_2 : -\tfrac{1}{2}i_1+\left(\tfrac{D+4}{2D}\right)i_2=-V_0$$

$$\longrightarrow \varepsilon_1'=\varepsilon_1+(5+2D)\varepsilon_2 : \quad \left[\frac{(D+4)(5+2D)}{2D}-\frac{1}{2}\right]i_2=-(5+2D)V_0$$

$$\varepsilon_2'=\varepsilon_2 : \quad -\tfrac{1}{2}i_1+\left(\tfrac{D+4}{2D}\right)i_2=-V_0$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \frac{(D+4)(5+2D)-D}{2D} \\ -\frac{1}{2} & \frac{D+4}{2D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -(5+2D)V_0 \\ -V_0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{D+4}{2D} \\ 0 & \frac{(D+4)(5+2D)-D}{2D} \end{bmatrix}}_{\hat{P}_{nn}(D)}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -V_0 \\ -(5+2D)V_0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow (D+4)(5+2D)-D=0 \quad \rightarrow 2D^2+13D+20-D=0$$

$$\rightarrow D^2+6D+10=0 \quad \rightarrow \begin{matrix} S_1=-3+j \\ S_2=-3-j \end{matrix}$$

الگوریتم کتاب جبه‌دار برای بالا مثلثی کردن ماتریس $P(D)$:

۱ـ در ستون اول ساده ترین عنصر را انتخاب می کنیم (از نظر درجه) .

نکته۱ : $P_{ij}(D)$ یا از درجه صفر یا از یک و یا از دو است .

نکته۲ : اگر دو یا چند عنصر هم درجه (در پائین ترین درجه) داشته باشیم یکی را به دلخواه انتخاب می کنیم . $P_{k1}(D)$

۲ـ برای $i \neq k$ این معادله را می نویسیم :

$$\frac{P_{i1}(D)}{P_{k1}(D)} = \underline{\underline{q_{i1}(D)}} + \frac{r_{i1}(D)}{P_{k1}(D)}$$

۳ـ دستگاه معادلات را به شکل زیر جایگزین کنیم :

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_1 - q_{11}(D)\cdot\varepsilon_k$$

$$\varepsilon_2' = \varepsilon_2 - q_{21}(D)\cdot\varepsilon_k$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_k' = \varepsilon_k$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_n' = \varepsilon_n - q_{n1}(D)\cdot\varepsilon_k$$

۴ـ مراحل ۱ و ۲ و ۳ را آن قدر تکرار می کنیم تا فقط یکی از عناصر ستون اول صفر نباشد .

۵ـ ردیف غیر صفر را به اول می بریم

نتیجه بعد از بند ۵:

$$\begin{bmatrix} P'_{11}(D) & P'_{12}(D) & \cdots & P'_{1n}(D) \\ 0 & P'_{22}(D) & & P'_{2n}(D) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & P'_{n2}(D) & & P'_{nn}(D) \end{bmatrix}$$

۶- سطر و ستون اول را حذف کنیم.

$$\begin{bmatrix} P'_{22}(D) & \cdots & P'_{2n}(D) \\ P'_{32}(D) & & \vdots \\ \vdots & & \\ P'_{n2}(D) & & P'_{nn}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_2 \\ f'_3 \\ \vdots \\ f'_n \end{bmatrix}$$

۷- مراحل ۱ تا ۶ را آن قدر ادامه می‌دهیم تا $\hat{P}_{nn}(D)$ را بدست آوریم.

مثال ص ۳۰۳ کتاب جبه‌دار:

$$(D^2+2D+1)\, i_1 - (D+1)\, i_2 = 0$$
$$-(D^2+D)\, i_1 + (3D+1)\, i_2 = e_s$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \varepsilon_1=\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} \begin{bmatrix} D^2+2D+1 & -(D+1) \\ -(D^2+D) & (3D+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_s \end{bmatrix}$$

در مرحله‌ی اول $k=1$ انتخاب می‌شود:

$$\frac{-(D^2+D)}{D^2+2D+1} = \underbrace{(-1)}_{q_{21}(D)} + \frac{D+1}{D^2+2D+1}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \varepsilon'_1=\varepsilon_1 \\ \varepsilon'_2=\varepsilon_2+\varepsilon_1 \end{array} \begin{bmatrix} D^2+2D+1 & -(D+1) \\ D+1 & 2D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_s \end{bmatrix}$$

در مرحله‌ی دوم $k=2$ انتخاب می‌شود:

$$\frac{D^2+2D+1}{D+1} = D+1 + \frac{0}{D+1}$$

$$\varepsilon_1'' = \varepsilon_1' - (D+1)\varepsilon_2' \qquad \varepsilon_2'' = \varepsilon_2'$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -(D+1)(2D+1) \\ D+1 & 2D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(D+1)e_s \\ e_s \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} D+1 & 2D \\ 0 & \underbrace{-(D+1)(2D+1)}_{\hat{P}_{nn}(D)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s \\ -(D+1)e_s \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{?} \quad S_1 = -1 \quad S_2 = \frac{-1}{2}$$: فرکانسهای طبیعی i_2

نحوهٔ محاسبهٔ فرکانسهای طبیعی یک شبکه :

نکته : برای محاسبهٔ فرکانسهای طبیعی شبکه نیازی به محاسبهٔ تمامی فرکانسهای طبیعی متغیرهای شبکه نیست.

راه محاسبه :

۱ــ ریشه های معادلهٔ $\det\left[P(D)\right] = 0$

۲ــ مقادیر ویژهٔ ماتریس A