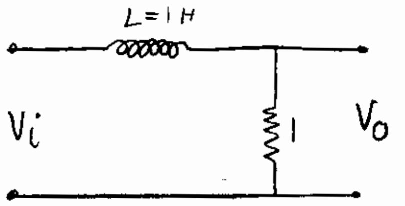
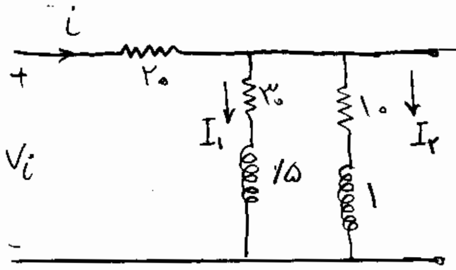
تابع تبدیل :

تعریف : نسبت دو متغیر در یک سیستم (مدار) در حوزهٔ لاپلاس (با فرض اینکه شرایط اولیه صفر است)

مثال:



$$\frac{V_o(s)}{V_I(s)} = \frac{1}{1+s}$$



$$\frac{I}{V_I} = \frac{1}{20 + \frac{(30+0.5s)(0.5+s)}{40+1.5s}} = \frac{30s+800}{s^2+130s+2200}$$

$$\frac{I_1}{I} = \frac{10+s}{40+1.5s}$$

$$\frac{I_1}{V_I} = \frac{I_1}{I} \times \frac{I}{V_I} = \frac{(10+s)(30s+800)}{(40+1.5s)(s^2+130s+2200)}$$

چند تعریف :

۱ـ امپدانس : تابع تبدیل ولتاژ به جریان.

۲ـ ادمیتانس : تابع تبدیل جریان به ولتاژ.

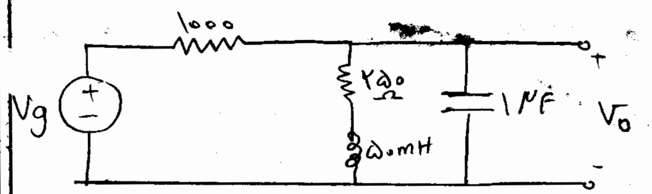
امپدانس یا ادمیتانس

انتقال Transfer

نقطهٔ تحریک Driving point

مثال :

$$\frac{V_o}{V_g} = ?$$



$$\frac{V_o}{V_g} = \frac{Z_{eq}}{1000 + Z_{eq}} \quad , \qquad Z_{eq} = \frac{\frac{10^6}{s}(250 + 0.05s)}{\frac{10^6}{s} + 250 + 0.05s}$$

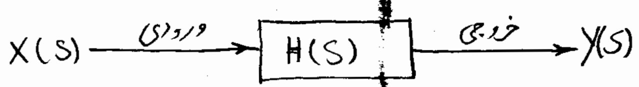
$$\rightarrow \frac{V_o}{V_g} = \frac{1000(S+5000)}{s^2 + 6000 + 25\times10^6}$$

چند تعریف :

۱- صفر: مقداری از s است که تابع تبدیل را صفر می کند.

۲- قطب: مقداری از s است که تابع تبدیل را ∞ می کند

به عبارت دیگر :



$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{N(S)}{D(S)}$$

صورت تابع تبدیل

مخرج تابع تبدیل

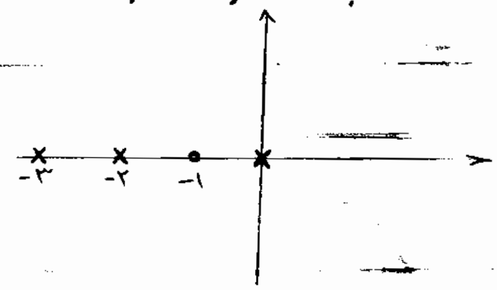
صفرهای تابع تبدیل همان ریشه های معادلهٔ $N(S)=0$ است و قطبهای تابع تبدیل ریشه های معادلهٔ $D(S)=0$ است.

نکته: عموماً صفر را با (o) و قطب را با (x) در صفحهٔ s نمایش می دهند.

مثال: صفر و قطبهای تابع تبدیل زیر را محاسبه نموده و آن را در صفحهٔ s نمایش دهید.

$$H(S) = \frac{S+1}{S(S+2)(S+3)}$$

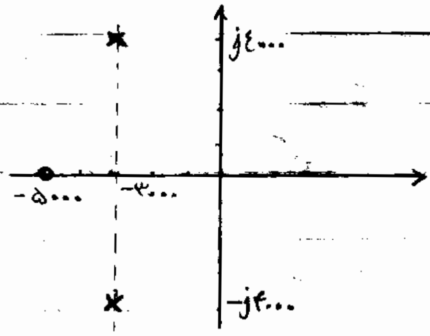
صفر : -1 ، قطب: $0 , -2 , -3$



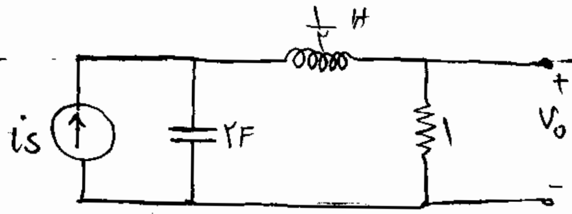
مثال :

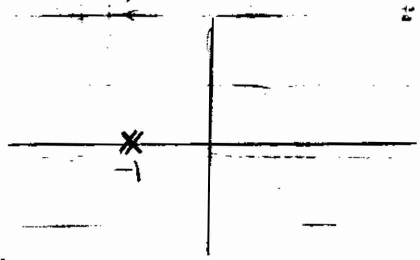
$$H(s) = \frac{1000(s+5000)}{s^2+6000s+25\times10^6}$$

صفر: -5000 قطب : $-3000 \pm j4000$



مثال :

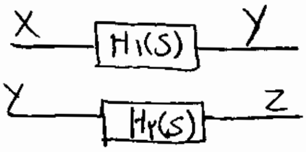




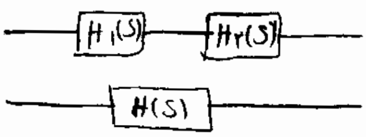
$$\frac{V_o}{I_s} = \frac{\frac{1}{2s}}{\frac{1}{2s}+\frac{1}{2}s+1} = \frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

اشاره‌ای به ساده‌سازی بلوک دیاگرام‌ها :

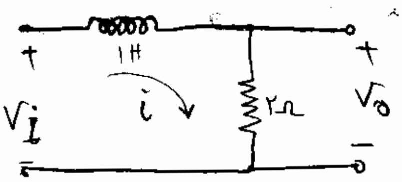
قانون اول :



$$\frac{Z}{X} = ?$$



$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$$



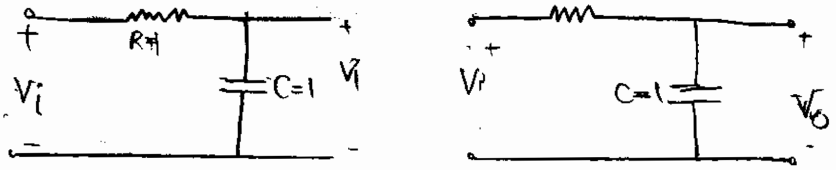
$$\frac{I}{V_I} = \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{V_o}{I} = 2$$

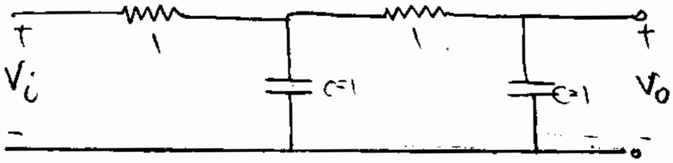
$$\longrightarrow \frac{V_o}{V_I} = \frac{2}{s+2}$$

نکته مهم : اگر توابع تبدیل‌ها را قبل از اتصال الکتریکی دو قسمت محاسبه کرده باشیم باید مواظب اثر بارگذاری باشیم .

مثال :

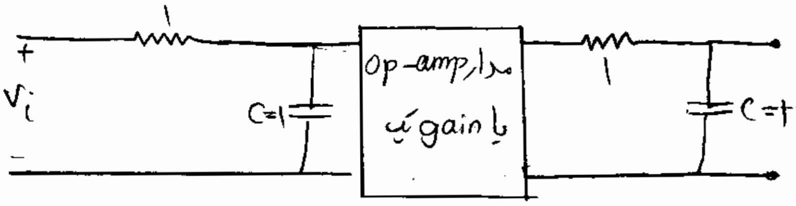


$$\frac{V}{V} = \frac{1}{1+s} \qquad \frac{V_o}{V_2} = \frac{1}{s+1}$$



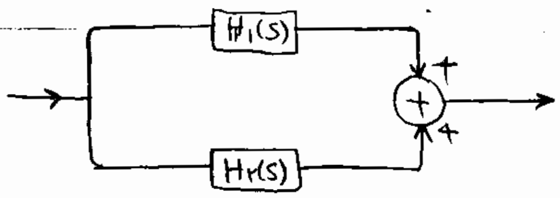
$$\frac{V_o}{V_I} = \frac{1}{s^2+3s+1}$$

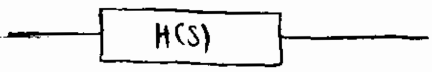
راه‌حل :



$$\frac{V_o}{V_I} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

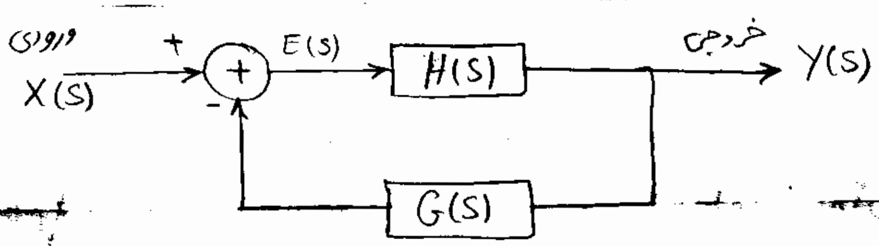
قانون دوم :

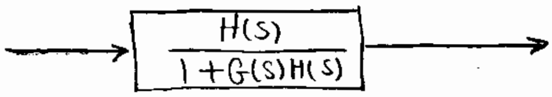




$$H(S) = H_1(S) + H_2(S)$$

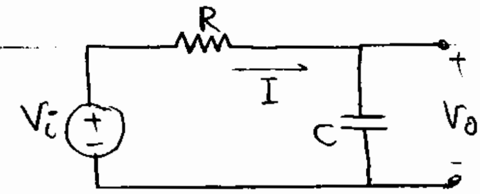
قانون سوم (قانون فیدبک):



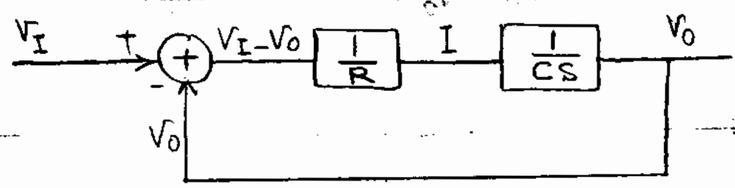


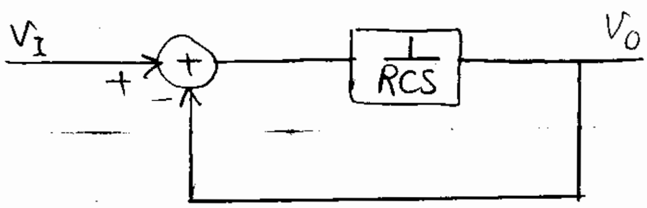
$$\begin{cases} Y(S) = H(S).\,E(S) \\ E(S) = X(S) - G(S)Y(S) \end{cases} \longrightarrow \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{H(S)}{1+G(S)H(S)}$$

مثال:



$$I = \frac{V_I - V_o}{R} \quad , \quad V_o = \frac{1}{CS} I$$



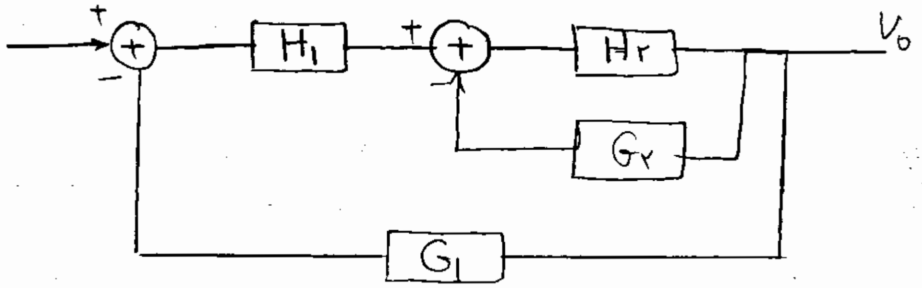


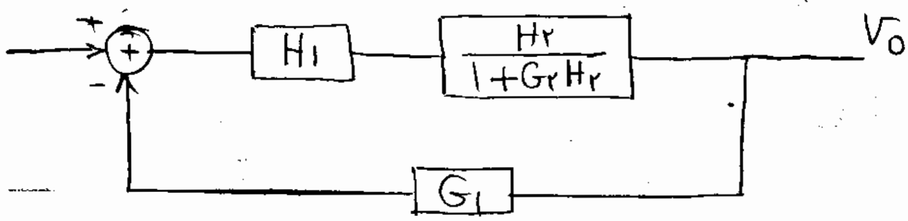
$$\frac{V_o}{V_I} = \frac{\frac{1}{RCS}}{1+\frac{1}{RCS}} = \frac{1}{1+RCS}$$

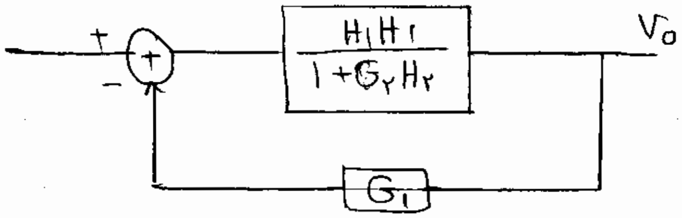
نکته: در درس کنترل خطی بحث ساده سازی بلوک دیاگرام به طور مفصل بحث می‌شود در این درس ما

با مسائلی سروکار داریم که با همین سه قانون ساده می‌شوند.

مثال:

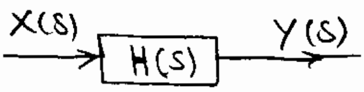






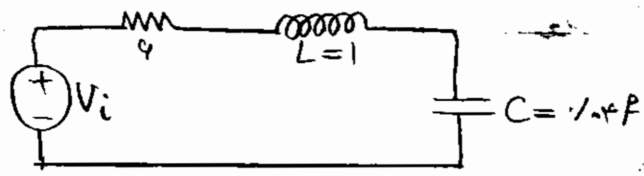
$$H(s)=\frac{\dfrac{H_1H_2}{1+G_2H_2}}{1+\dfrac{H_1H_2G_1}{1+G_2H_2}} \longrightarrow H(s)=\frac{H_1H_2}{1+G_2H_2+G_1H_1H_2}$$

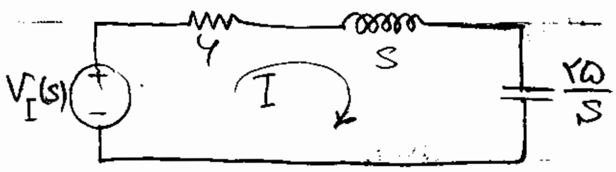
ارتباط بین قطبهای $H(s)$ ، $X(s)$ با پاسخ سیستم (مدار):



$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \quad , \quad Y(s)=H(s).X(s)$$

یادآوری یک مثال:





$$\frac{I}{V_I(s)}=\frac{1}{6+s+\frac{25}{s}}=\frac{s}{s^2+6s+25}=\frac{s}{(s+3)^2+4^2}$$

اگر $V_i(t)=12\sin 5t$ آنگاه: $i(t)=?$

$$V_I(s)=\frac{60}{s^2+25} \quad , \quad I(s)=\frac{s}{s^2+6s+25}\times\frac{60}{s^2+25}$$

$$\longrightarrow I(s)=\frac{-10}{(s+3)^2+4^2}+\frac{10}{s^2+25}$$

$$\longrightarrow i(t)=\underbrace{-2.5e^{-3t}\sin 4t}_{\text{گذرا}}+\underbrace{2\sin 5t}_{\text{دائم}}$$

اگر $V_i=e^{-3t}\cdot u(t)$ آنگاه: $I=\frac{s}{(s+3)^2+4^2}\times\frac{1}{s+3}$

اگر $V_i=t\cdot u(t)$ آنگاه: $I=\frac{s}{(s+3)^2+4^2}\times\frac{1}{s^2}$

نکته: در رابطه $Y(s)=H(s)\cdot X(s)$ قطبهای $H(s)$ پاسخ گذرا و قطبهای $X(s)$ پاسخ ماندگار سیستم را تعیین می‌کند.

پاسخ ضربه و کانولوشن:

$$X(s)\longrightarrow\boxed{H(s)}\longrightarrow Y(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \quad , \quad Y(s)=H(s)\cdot X(s)$$

پاسخ ضربه سیستم: خروجی سیستم وقتی ورودی تابع ضربه است.

$$x(t)=\delta(t)\longrightarrow X(s)=1$$

$$\longrightarrow Y(s)=H(s)$$

$$\longrightarrow \text{پاسخ ضربه سیستم}=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

عکس تبدیل لاپلاس تابع تبدیل = پاسخ ضربهٔ سیستم .

در بحث کانولوشن :

پاسخ ضربه سیستمی را داریم $[h(t)]$ و می‌خواهیم خروجی $y(t)$ را به ازاء یک ورودی خاص $x(t)$ محاسبه کنیم .

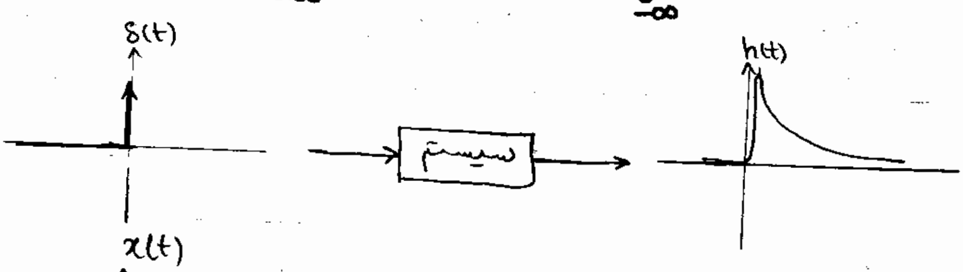
$$\delta(t) \qquad h(t)$$
$$x(t) \qquad y(t)=?$$

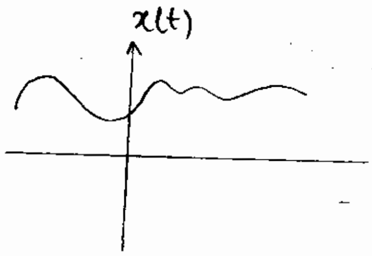
ثابت می‌شود :

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

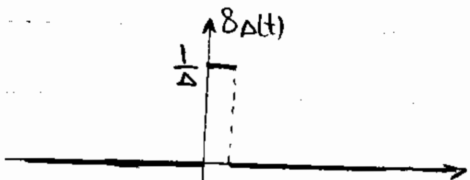
$$\longrightarrow \quad y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

مروری بر اثبات :

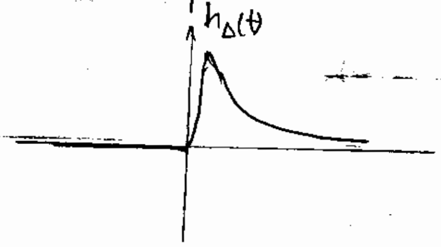


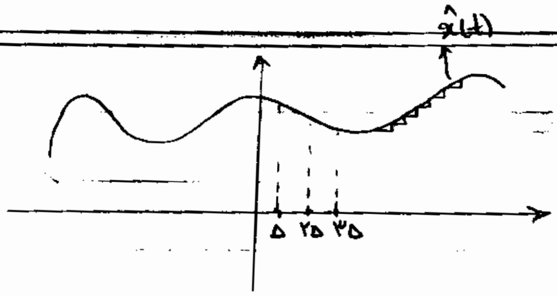


$y(t)=?$



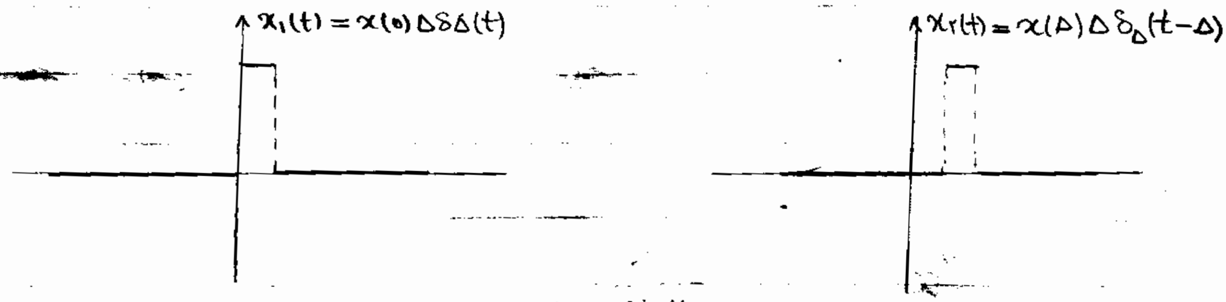
$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$$





$\hat{x}(t)$ را به صورت جمعی از توابع زیر

می توان نوشت:



$$x_3 = x(2\Delta)\cdot\Delta\cdot\delta_\Delta(t-2\Delta)$$

$$\hat{x}(t) = \cdots + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + \cdots$$

$$= \cdots + x(0)\Delta\delta_\Delta(t) + x(\Delta)\Delta\delta_\Delta(t-\Delta) + x(2\Delta)\cdot\Delta\cdot\delta_\Delta(t-2\Delta) + \cdots$$

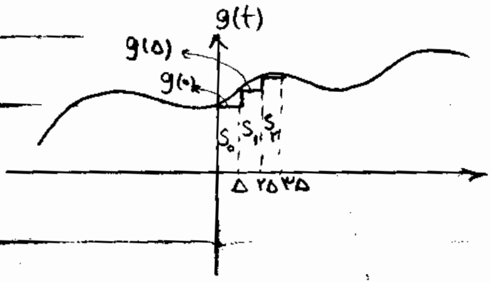
$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\cdot\Delta\cdot\delta_\Delta(t-k\Delta)$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\cdot\Delta\cdot h_\Delta(t-k\Delta)$$

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0}\hat{x}(t) \quad , \quad y(t) = \lim_{\Delta\to 0}\hat{y}(t)$$

$$\longrightarrow \hat{y}(t) = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\cdot h_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

یادآوری:



$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)d\tau$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k\Delta)\cdot\Delta$$

$$\longrightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

این رابطه از روشهای دیگری نیز قابل اثبات است (استفاده از تبدیل لاپلاس).

$$\mathcal{L}\left[h(t) * x(t)\right] = H(S) . X(S)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[H(S) . X(S)\right] = h(t) * x(t)$$

خواص کانولوشن :

۱- $h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$

۲- $x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * \left[h_1(t) + h_2(t)\right]$

۳- $x(t) * \left[h_1(t) * h_2(t)\right] = \left[x(t) * h_1(t)\right] * h_2(t)$

استفاده از کانولوشن در تحلیل مدارهای الکتریکی :

۱- تابع تبدیل سیستم را محاسبه می‌کنیم

۲- عکس تبدیل لاپلاس می‌گیریم تا پاسخ ضربه بدست آید.

۳- ورودی را با پاسخ ضربه کانولوشن می‌کنیم.

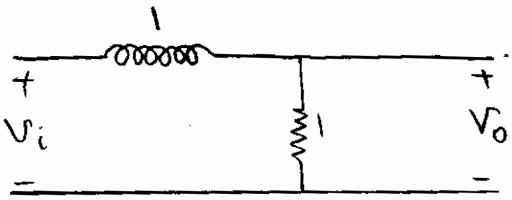
در استفاده از تبدیل لاپلاس در تحلیل مدارهای الکتریکی :

۱- تابع تبدیل سیستم را محاسبه می‌کنیم : $H(S)$

۲- تبدیل لاپلاس ورودی را محاسبه می‌کنیم : $X(S)$

۳- $Y(S) = H(S)\cdot X(S)$ → $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$

مثال ۱:



$V_i = u(t)$

$V_o = ?$

روش لاپلاس:

$$H(S)=\frac{1}{1+S}\quad,\quad X(S)=\frac{1}{S}$$

$$Y(S)=H(S)\cdot X(S)=\frac{1}{S(S+1)}=\frac{1}{S}-\frac{1}{S+1}\longrightarrow y(t)=\left[1-e^{-t}\right]u(t)$$

روش کانولوشن:

$$H(S)=\frac{1}{S+1}\longrightarrow h(t)=e^{-t}u(t)$$

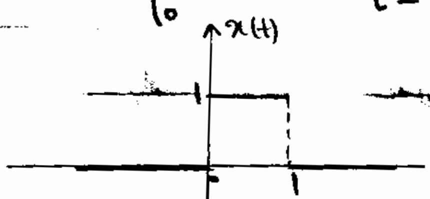
$$x(t)=u(t)$$

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau}\cdot u(\tau)\cdot u(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{+\infty}e^{-\tau}u(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t e^{-\tau}d\tau=\begin{cases}1-e^{-t} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$u(t)=\begin{cases}1 & t-\tau>0\\ 0 & t-\tau<0\end{cases}\quad,\quad u(t-\tau)=\begin{cases}1 & \tau<t\\ 0 & \tau>t\end{cases}$$

مثال ۲:



$h(t)=e^{-t}\cdot u(t)$

$y(t)=h(t)*x(t)$

حل از روش محاسباتی:

$h(t)=e^{-t}\cdot u(t)$

$x(\tau)=u(t)-u(t-1)$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau}u(\tau)\left[u(t-\tau)-u(t-\tau-1)\right]d\tau=$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) \cdot u(t-\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau)\, u(t-\tau-1)\,d\tau$$

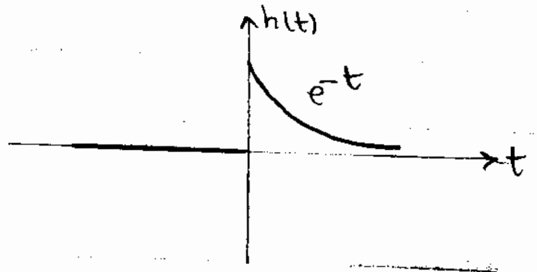
$$\longrightarrow y(t) = \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-\tau} u(t-\tau)\,d\tau}_{y_1(t)} - \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-\tau} u(t-\tau-1)\,d\tau}_{y_2(t)}$$

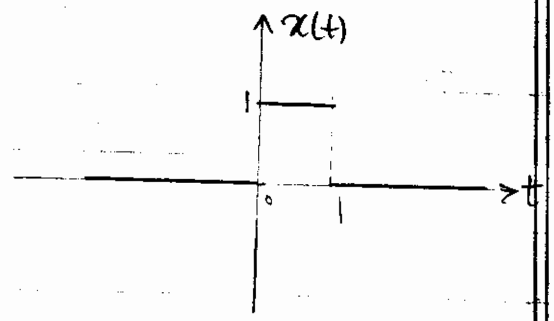
$y_1(t) =$

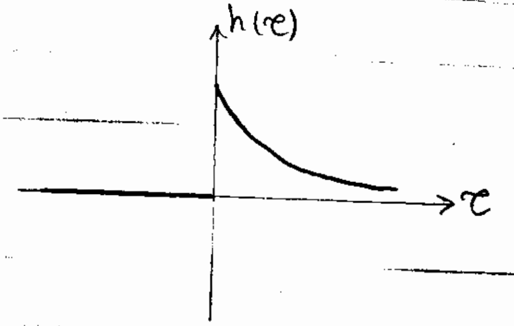
$$\longrightarrow y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-t} & 0<t<1 \\ e^{-(t-1)} - e^{-t} & 1<t \end{cases}$$

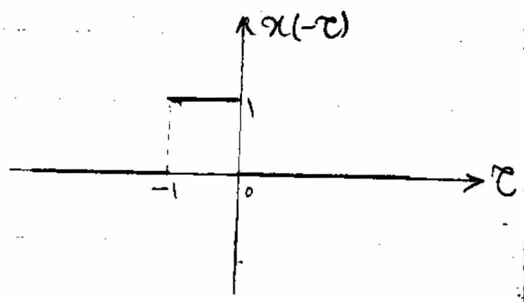
حل مثال از روش ترسیمی:

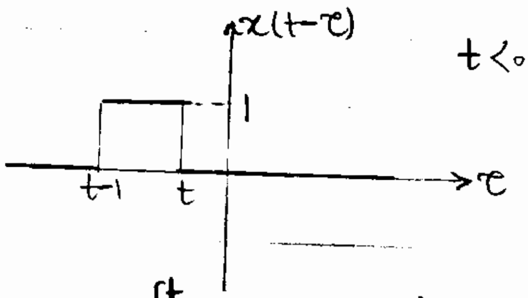
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\,d\tau$$



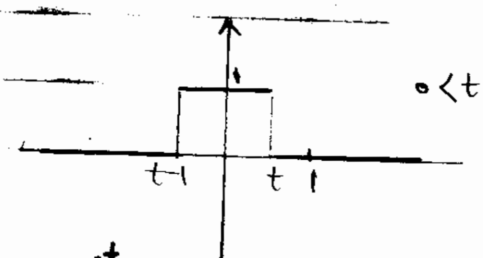








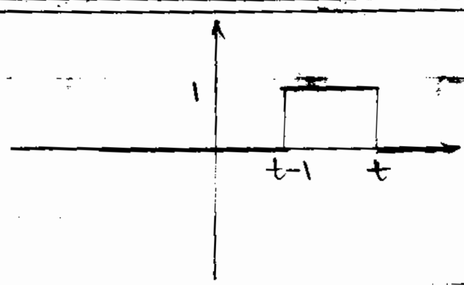
$t<0$



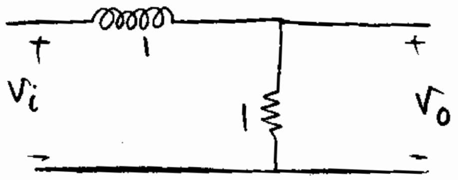
$0<t<1$

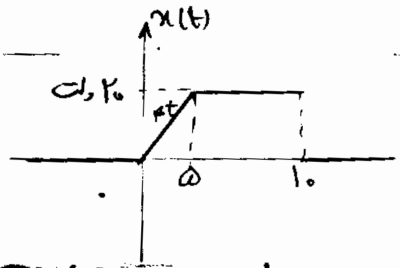
$$y(t) = \int_{0}^{t} e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-t}$$

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} e^{-\tau} d\tau = e^{-(t-1)} - e^{-t}$$



مثال:





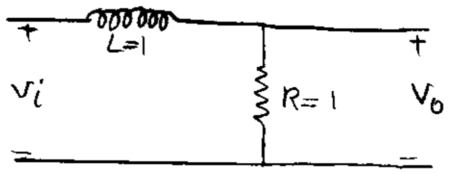
$$h(t) = e^{-t}.u(t)$$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 4t & 0<t<5 \\ 20 & 5<t<10 \\ 0 & 10<t \end{cases}$$

$$x(t) = 4t\,u(t) - 4(t-5)\,u(t-5) - 20\,u(t-10)$$

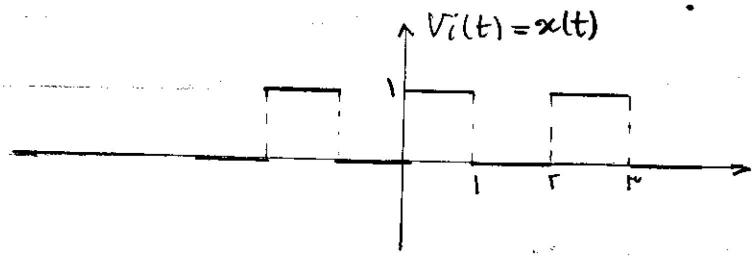
پاسخ مدارهای الکتریکی به سیگنال های متناوب :

مثال :



$$H(S) = \frac{1}{S+1} \quad , \quad h(t) = e^{-t}u(t)$$

فرض کنید که :



$$V_o(t) = y(t) = ?$$

روش اول : سری فوریه .

$$x(t) = V_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j\omega_0 n t}$$

$$y(t) = V_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C'_n e^{jn\omega_0 t}$$

قضیه : اگر تابع تبدیل سیستم $H(s)$ باشد (و ناحیهٔ همگرایی شامل محور $j\omega$ باشد)

$$C'_n = C_n \cdot H(jn\omega_0)$$

درمثال :

$$T = 2 \longrightarrow \omega_0 = \pi$$

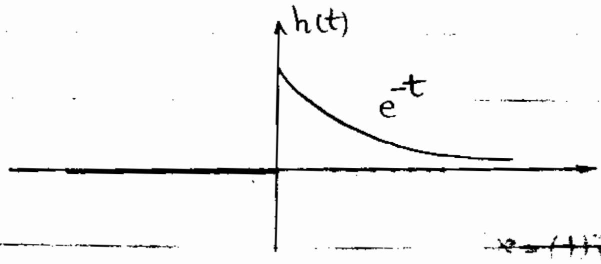
$$C_n = \frac{1}{2}\int_0^1 (1)\, e^{-jn\pi t}\, dt = \frac{1}{-j2n\pi} e^{-jn\pi t}\Big|_0^1 = \frac{j}{2n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

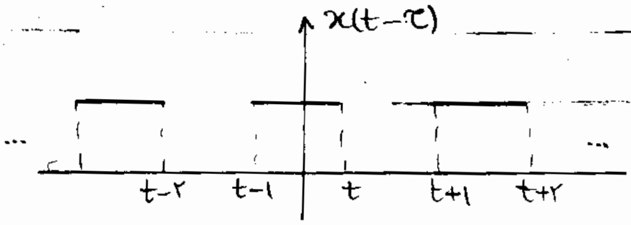
$$H(jn\omega_0) = \frac{1}{1+jn\pi}$$

$$\longrightarrow \quad y(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{j}{2n\pi}(\cos n\pi-1)\cdot\frac{1}{1+jn\pi}e^{jn\pi t}$$

اشکال این روش این است که پاسخ به صورت یک $\sum$ است.

روش دوم = استفاده از کانولوشن





نکته : اگر ورودی سیستم (LTI) متناوب باشد خروجی نیز متناوب است با همان دورهٔ تناوب.

$$x(t)=x(t+\tau) \longrightarrow y(t)=y(t+\tau)$$

اثبات:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$$

$$y(t+T)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,\underbrace{x(t+T-\tau)}_{x(t-\tau)}\,d\tau = y(t)$$

پس کافی است خروجی را در یک دورهٔ تناوب پیدا کنیم.

در مثال قبل: $0<t<2$

الف: $0<t<1 \longrightarrow y(t)=\int_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau+\int_{t+1}^{t+2} e^{-\tau}d\tau+\int_{t+3}^{t+4} e^{-\tau}d\tau+\cdots$

ب: $1<t<2 \longrightarrow y(t)=\int_{t-1}^{t} e^{-\tau}d\tau+\int_{t+1}^{t+2} e^{-\tau}d\tau+\int_{t+3}^{t+4} e^{-\tau}d\tau+\cdots$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{t-1+2k}^{t+2k} e^{-\tau}d\tau$$

$$\rightarrow y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}-e^{-\tau}\Big|_{t-1+2k}^{t+2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[e^{-(t-1+2k)}-e^{-(t+2k)}\right]$$

$$=e^{-t}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2k}(e-1)=(e-1)e^{-t}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2k}=(e-1)e^{-t}\cdot\frac{1}{1-e^{-2}}$$

$$=\frac{e-1}{1-e^{-2}}e^{-t}$$

در فاصله $0<t<1$:

$$y(t)=\int_0^t e^{-\tau}d\tau+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t-1+2k}^{t+2k}e^{-\tau}d\tau$$

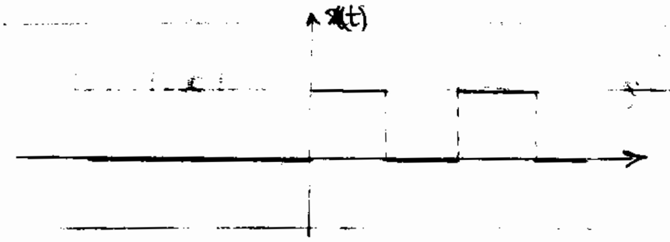
$$=\int_0^t e^{-\tau}d\tau+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{t-1+2k}^{t+2k}e^{-\tau}d\tau-\int_{t-1}^{t}e^{-\tau}d\tau=\int_0^{t-1}e^{-\tau}d\tau+\frac{e-1}{1-e^{-2}}e^{-t}$$

$$\rightarrow y(t)=1-e^{-(t-1)}+\frac{e-1}{1-e^{-2}}e^{-t}=1-e\cdot e^{-t}+\frac{e-1}{1-e^{-2}}e^{-t}$$

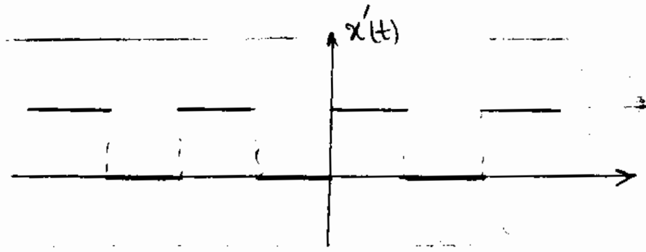
$$=1-\left[e-\frac{e-1}{1-e^{-2}}\right]e^{-t}$$

با توجه به اینکه پاسخهای ضربه عموماً به فرم زیر است : $h(t)=A_1e^{-\alpha_1 t}+A_2e^{-\alpha_2 t}+\dots$

روش سوم : روش لاپلاس



تبدیل لاپلاس دارد.

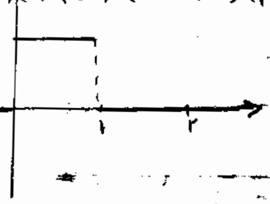


تبدیل لاپلاس ندارد

تبدیل لاپلاس $x(t)$:

ابتدا لاپلاس $x_1(t)$ را می‌گیریم. $x_1(t)$ با $x(t)$ در یک تناوب برابر است و در خارج از آن فاصله صفر است.

$x_1(t) \longleftrightarrow X_1(s)$



$$X_1(s)=\int_0^T x(t)\,e^{-st}\,dt =$$

$$X(s)=X_1(s)+e^{-Ts}X_1(s)+e^{-2Ts}X_1(s)+\cdots$$

$$=X_1(s)\left[1+e^{-Ts}+e^{-2Ts}+e^{-3Ts}+\cdots\right]=X_1(s)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-Ts}\right)^k$$

$$\longrightarrow\quad X(s)=\frac{X_1(s)}{1-e^{-Ts}}$$

اگر همین کار را روی $x'(t)$ پیاده کنیم:

$$X(s)=X_1(s)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-Ts}=X_1(s)\cdot\left[\sum_{k=-\infty}^{0}\left(e^{-Ts}\right)^k+\sum_{k=0}^{+\infty}\left(e^{-Ts}\right)^k-1\right]$$

$$=X_1(s)\cdot\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{Ts}\right)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-Ts}\right)^k-1\right]=\infty$$

راه حل: از $x(t)$ به جای $x'(t)$ استفاده کنیم و در نهایت از پاسخ گذرا صرف نظر کنیم.

در مثال قبل:

$$H(s)=\frac{1}{1+s}\ ,\qquad X(s)=\frac{X_1(s)}{1-e^{-2s}}$$

$$X_1(s)=\int_0^1 e^{-st}\,dt=\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^1=\frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$Y(s)=H(s)\cdot X(s)=\frac{(1-e^{-s})}{s(s+1)(1-e^{-2s})}=\frac{A}{s+1}+\frac{Y_1(s)}{1-e^{-2s}}$$

$$A=(s+1)Y(s)\Big|_{s=-1}=\frac{e-1}{1-e^{2}}$$

$$\longrightarrow \frac{(1-e^{-s})/s}{(s+1)(1-e^{-2s})} = \frac{A[1-e^{-2s}]+(s+1)Y_1(s)}{(s+1)(1-e^{-2s})}$$

$$\longrightarrow A(1-e^{-2s})+(s+1)Y_1(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$\longrightarrow Y_1(s) = \frac{\frac{1-e^{-s}}{s} - A[1-e^{-2s}]}{s+1} = \frac{1-e^{-s}-As+Ase^{-2s}}{s(s+1)}$$

$$= \frac{1-As}{s(s+1)} - e^{-s}\cdot\frac{1}{s(s+1)} + Ae^{-2s}\cdot\frac{s}{s(s+1)}$$

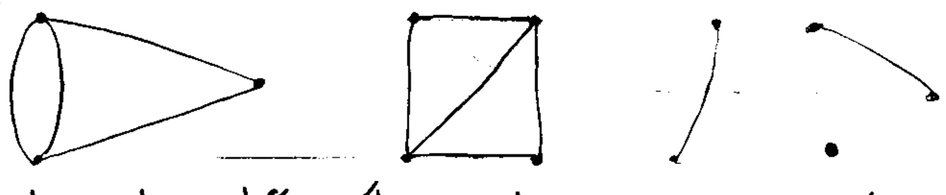
$$\frac{1}{s(s+1)} \longleftrightarrow (1-e^{-t})u(t)$$

$$e^{-s}\cdot\frac{1}{s(s+1)} \longleftrightarrow \left[1-e^{-(t-1)}\right]u(t-1)$$

تئوری گراف:

چند تعریف:

۱- گراف: مجموعه‌ای از شاخه‌ها و گره‌ها است به شرط اینکه هر شاخه در دو سر به گره ختم شود.



۲- زیرگراف: اگر گراف g تعریف شده باشد g_1 را یک زیرگراف g نامند چنانچه:

هر گره g_1 گره‌ای از g و هر شاخه g_1 شاخه‌ای از g باشد.