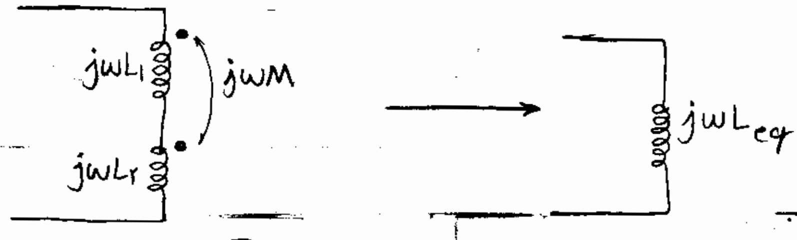
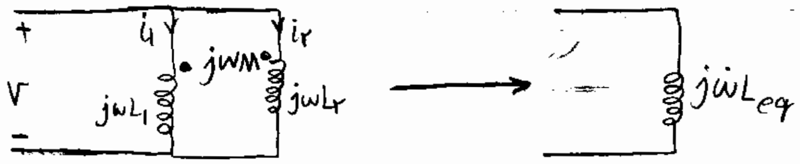
امپدانس معادل برای سلفهای سری و موازی تزویج شده :

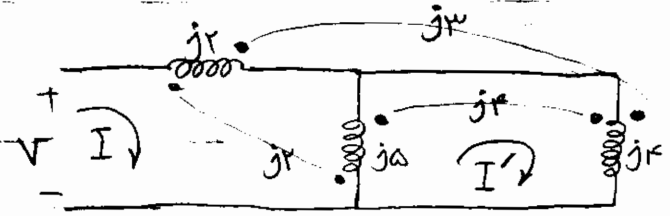


$L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$



$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \mp \frac{2}{M}$$

حالت سری - موازی :



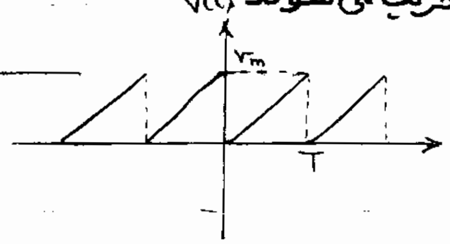
$$\begin{cases} V = j2 \times I + j5(I - I') \mp j3I' - j2(I - I') - j2I + j4I' \\ 0 = j5(I' - I) + j4I' + j2I - j4I' - j3I - j5(I' - I) \end{cases}$$

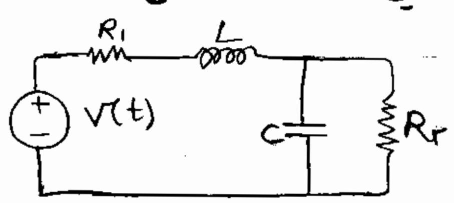
در دو معادله بالا I' را حذف کرده و Z_{eq} را از رابطه زیر بدست می آوریم :

$$Z_{eq} = \frac{V}{I}$$

سری فوریه و کاربرد آن در تحلیل مدارهای الکتریکی : I

مدارهایی هستند که با منابع متناوب غیرسینوسی تحریک می شوند





سری فوریه : اگر تابع $f(t)$ {در مدار منظور $V(t)$ یا $i(t)$} دارای شرایط زیر باشد

۱- متناوب باشد با دورهٔ تناوب T : $f(t)=f(t+T)$

۲- تک مقدار باشد

۳- دارای تعداد محدود حداکثر و حداقل در یک دورهٔ تناوب باشد.

۴- دارای تعداد محدود ناپیوستگی در یک دورهٔ تناوب باشد.

۵- $\int_T |f(t)|\,dt<\infty$

در آن صورت می‌توان آن را به صورت یک سری مثلثاتی (سری فوریه) نمایش داد.

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T} \quad , \quad f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt \quad , \quad a_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \quad , \quad b_n=\frac{2}{T}\int f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

حالت‌های خاص:

۱- اگر $f(t)$ زوج باشد :

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt \quad , \quad a_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \quad , \quad b_n=0$$

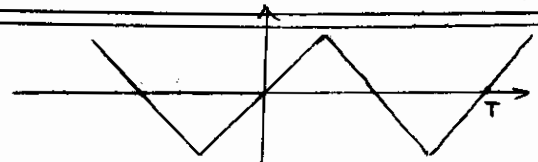
۲- اگر تابع فرد باشد :

$$a_0=a_n=0 \quad , \quad b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

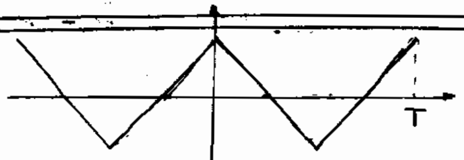
۳- اگر تابع دارای تقارن نیم موجی باشد یعنی : $f(t)=-f(t-\frac{T}{2})$

در آن صورت a_n و b_n به ازای n های زوج صفر هستند.

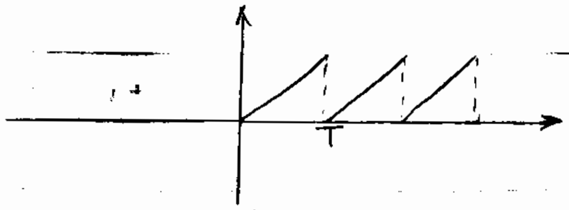
مثال:



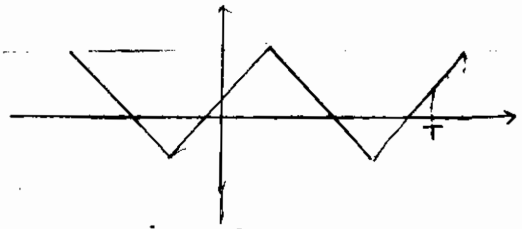
فرد و دارای تقارن نیم موجی



زوج و دارای تقارن نیم موجی

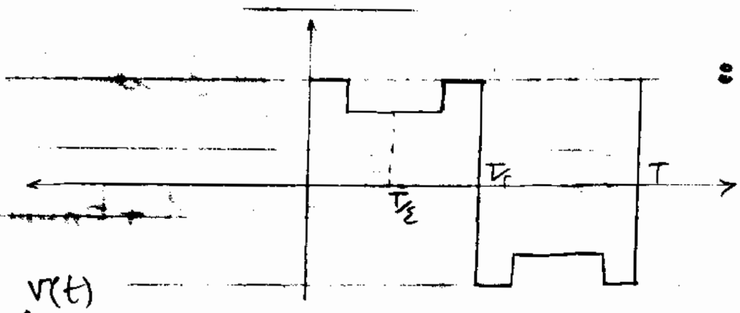


دارای تقارن نیم موجی نیست.

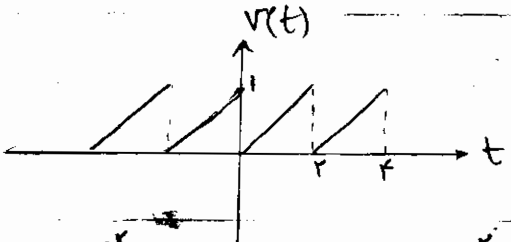


نه زوج و نه فرد و دارای تقارن نیم موجی

تقارن ربع موجی:



مثال: موج دندان اره‌ای



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

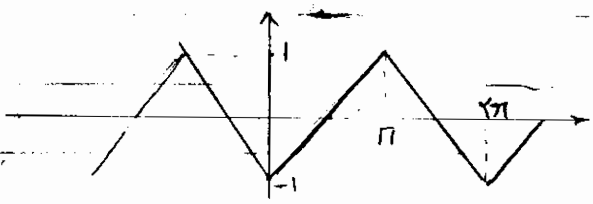
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^2 \frac{1}{2} t\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}t^2\Big|_0^2 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 \frac{1}{2} t\cos n\pi t\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{n\pi}\sin n\pi t + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi t\right]_0^2 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 \frac{1}{2} t\sin n\pi t\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{-t}{n\pi}\cos n\pi t + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi t\right]_0^2 = -\frac{1}{n\pi}$$

$$\longrightarrow \quad V(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi t$$

مثال:



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$a_0 = 0 \quad , \quad b_n = 0$$

$$a_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos nt\,dt = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[1+\cos n\pi\right]$$

$$\rightarrow\quad i(t)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)\cos nt}{n^2}=\frac{-8}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nt$$

فرم مختلط سری فوریه:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$C_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\quad,\quad\begin{cases}C_n=\frac{a_n}{2}+j\frac{-b_n}{2}=|C_n|e^{-j\theta_n}\\ |C_n|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\ ,\ \theta_n=\operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n}\end{cases}$$

فرم دیگر سری مختلط فوریه:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n|.e^{j(n\omega_0 t-\theta_n)}$$

می‌دانیم که

$$|C_1|e^{j(\omega_0 t-\theta_1)}+|C_1|e^{-j(\omega_0 t-\theta_1)}=2|C_1|\cos(\omega_0 t-\theta_1)$$

فرم کسینوسی

$$\rightarrow\quad f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)\quad,\quad\begin{cases}A_n=2|C_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\\ \theta_n=\operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n}\end{cases}$$

مثال موج دندان اره‌ای:

$$f(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi t$$

$$a_n=0\ ,\quad b_n=\frac{-1}{n\pi}\quad\longrightarrow\quad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\frac{1}{n\pi}\quad,\quad |C_n|=\frac{1}{2n\pi}$$

$$,\quad \theta_n=\operatorname{Arctg}\left(\frac{-1/n\pi}{0}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

$$f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi t+90^\circ)$$

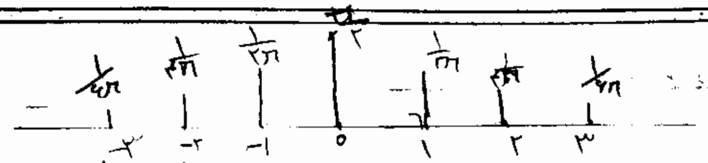
یا $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2n\pi}e^{j(n\pi t+90)}\quad,\ n\neq 0$

$=\quad f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{j}{2n\pi}e^{jn\pi}\quad,\ n\neq 0$

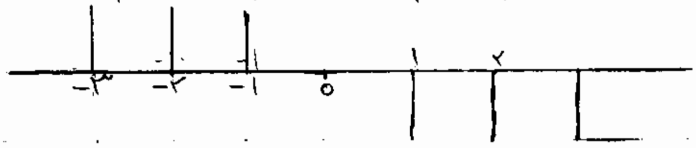
چند بحث جانبی درمورد سری فوریه:

۱- طیف دامنه و فاز ۲- قضیه سری محدود فوریه ۳- خواص سری فوریه.

طیف دامنه : $|C_n|$



طیف فاز : θ_n



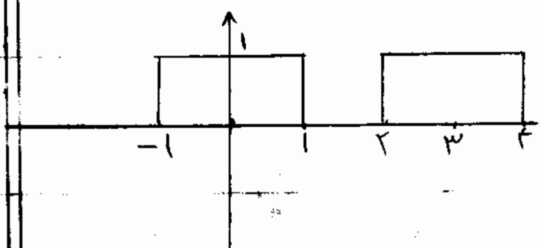
کاربردهای طیف دامنه :

۱- مقایسهٔ پاسخ فرکانسی مدار با طیف دامنهٔ ورودی ایدهٔ مناسبی از خروجی مدار می‌دهد.

۲- در استفاده از سری محدود فوریه کمک زیادی می‌کند.

سری محدود فوریه : $f_N(t)=a_0+\sum_{n=1}^{N}A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)$

مثال : فرم مختلط سری فوریهٔ تابع مقابل را محاسبه کنید.



و فرم‌های حقیقی و کسینوسی آن را بنویسید و طیف دامنه و فاز آن را رسم کنید.

$$C_n=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}e^{-jn\frac{2\pi}{3}t}dt=\begin{cases}\frac{2}{3} & n=0\\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-jn\frac{2\pi}{3}}e^{-jn\frac{2\pi}{3}t}\Big|_{-1}^{1} & n\neq 0\end{cases}$$

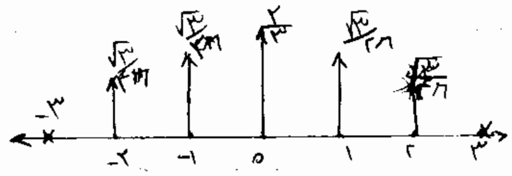
$$\longrightarrow C_n(n\neq 0)=\frac{1}{2jn\pi}\left[e^{-jn\frac{2\pi}{3}}-e^{+jn\frac{2\pi}{3}}\right]=\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{n\pi}$$

فرم حقیقی که همان فرم کسینوسی است

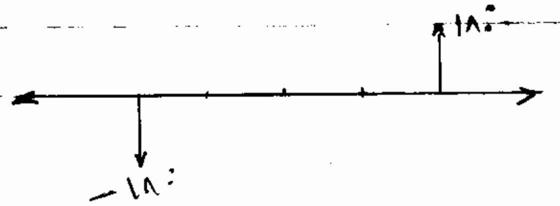
$$f(t)=\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}t$$

طیف دامنه و فاز:

$$|C_n|=\left|\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{n\pi}\right|$$



θ_n



سوال: آیا ضرایب سری فوریه برای سری محدود فوریه بهترین هستند یا خیر؟

$$f_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

تابع خطا:

$$e(t) = f(t) - f_N(t) \quad , \quad J = \int e^2(t)\,dt$$

ضرایبی بهترین هستند که به ازای آن ضرایب J حداقل شود.

$$J = \int_T \left[f(t) - \left[a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\right]\right]^2 dt =$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 0 \longrightarrow a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_n} = 0 \longrightarrow a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_n} = 0 \longrightarrow b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

خواص سری فوریه:

۱ـ خاصیت خطی بودن:

$$f_1(t) \longleftrightarrow C_n$$
$$f_2(t) \longleftrightarrow C'_n$$
$$\longrightarrow a f_1(t) + b f_2(t) \longleftrightarrow aC_n + bC'_n$$

۲ـ خاصیت تقارن:

$$C_n^* = C_{-n}$$

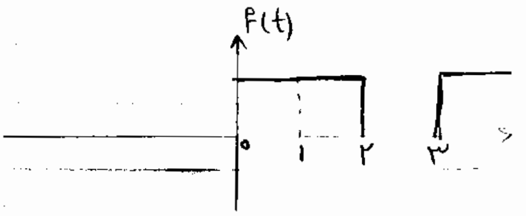
به عبارت دیگر اگر به جای n، n- بگذاریم و یا به جای j، j- بگذاریم جواب یکی است.

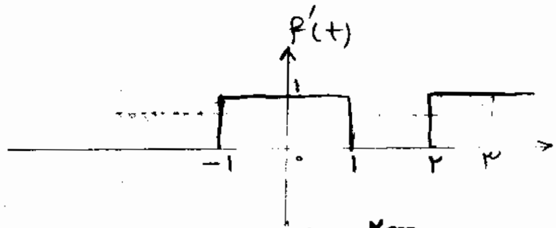
تمرین: ثابت کنید طیف دامنه همیشه زوج و طیف فاز همیشه فرد است.

۳ـ خاصیت انتقال:

ب) $f(t) \longleftrightarrow C_n \longrightarrow f(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-jn\omega_0 t_0} \cdot C_n$

مثال :





$$= \frac{\sin \frac{2n\pi}{3}}{n\pi}$$

$$f(t) = f'(t-1) \longrightarrow e^{-jn\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{n\pi}$$

۴- قضیهٔ پارسوال

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

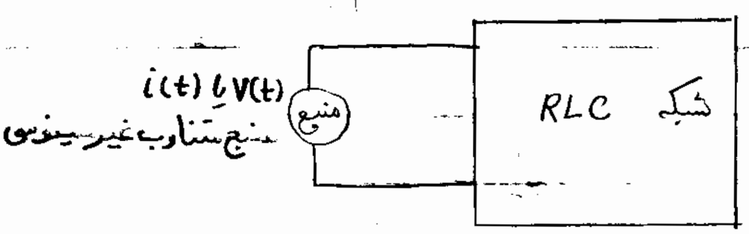
$$\frac{1}{T}\int_T f^2(t)\,dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

یادآوری :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n| e^{j(n\omega_0 t - \theta_n)}$$

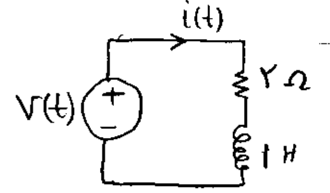
$$, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad , \quad \theta_n = \mathrm{Arctg}\frac{b_n}{a_n} \quad , \quad |C_n| = \frac{1}{2}A_n$$

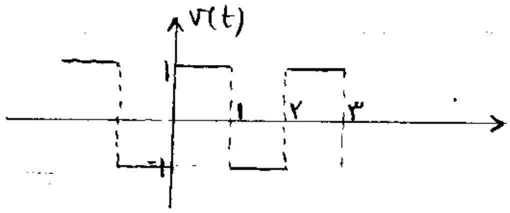


فعلاً فرض ما براین است که دنبال محاسبهٔ جواب خصوصی هستیم. به عبارت دیگر مدار از مد
ـر همین حالت بوده است.

نکته : اگر کلیدزنی در مدار داشته باشیم تفاوت در این است که یک جواب همگن نیز اضافه می‌شود که بحث مفصل این قسمت در بخش تبدیل لاپلاس خواهیم کرد.

مثال: $i(t)=?$





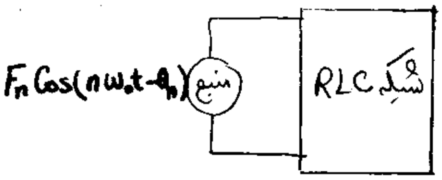
الگوریتم کار

۱- سری فوریهٔ منبع را حساب می‌کنیم: $f(t)=F_{dc}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$

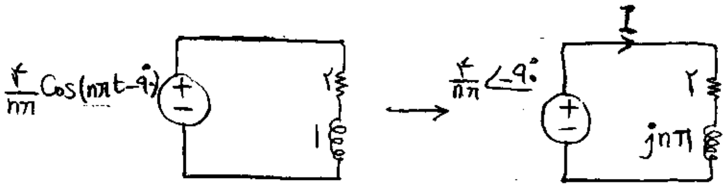
$$f(t)=F_{dc}+\sum_{n=1}^{\infty}F_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)$$

$$\longrightarrow\ V(t)=\frac{۴}{\pi}\sum_{n=1,۳,۵,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi t=\frac{۴}{\pi}\sum_{n=1,۳,۵,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(n\pi t-۹۰^\circ)$$

۲- منبع را با $V_n(t)$ به طرز زیر جایگزین می‌کنیم:



۳- مدار را به حوزهٔ فازوری ببریم:



۴- متغیر دلخواه را محاسبه می‌کنیم: $Y=B_n\angle-\theta_n'$

$$\longrightarrow I=\frac{\frac{۴}{n\pi}\angle-۹۰^\circ}{۲+jn\pi}=\frac{-j۴}{n\pi(۲+jn\pi)}=\frac{-j۴(۲-jn\pi)}{n\pi(۴+n^۲\pi^۲)}=\frac{-۴(n\pi+j۲)}{n\pi(۴+n^۲\pi^۲)}$$

$$=\frac{-۴\sqrt{n^۲\pi^۲+۴}}{n\pi(۴+n^۲\pi^۲)}\angle tg^{-1}\frac{۲}{n\pi}$$

$$\longrightarrow\ i(t)=\sum_{n=1,۳,۵,\dots}^{\infty}\frac{-۴\sqrt{n^۲\pi^۲+۴}}{n\pi(۴+n^۲\pi^۲)}\cos\left(n\pi t+tg^{-1}\frac{۲}{n\pi}\right)$$

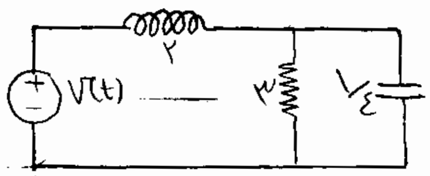
اشکال استفاده از سری فوریه در تحلیل مدارهای الکتریکی این است که پاسخ را به فرم بسته (در حالت کلی) نمی‌توان بدست آورد. به همین دلیل گاهی ترجیح می‌دهیم از سری محدود فوریه استفاده کنیم.

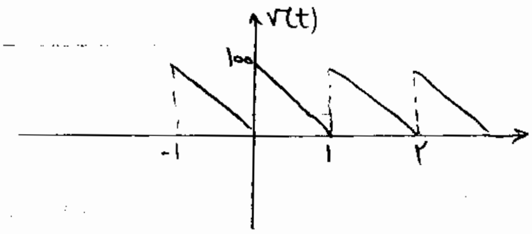
۵- جواب مدار به فرم زیر است:

$$y(t)=y_0+\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega_0 t-\theta'_n)$$

پاسخ مدار به ازای F_{dc} است.

مثال ۲:

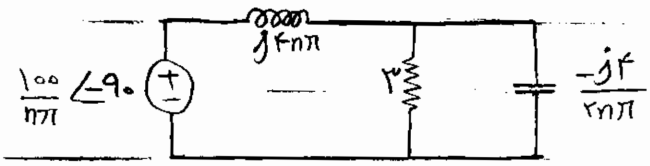




$$\rightarrow V(t)=50+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100}{n\pi}\sin 2n\pi t=50+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100}{n\pi}\cos(2n\pi t-90)$$

$$i(t)=I_{dc}+\sum_{n=1}^{\infty} I_n\cos(n\pi t-\theta_n)$$

$$I_{dc}=\frac{50}{3}$$

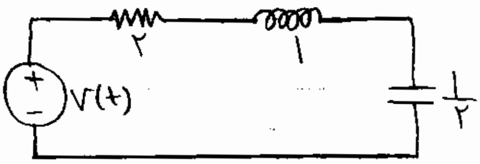


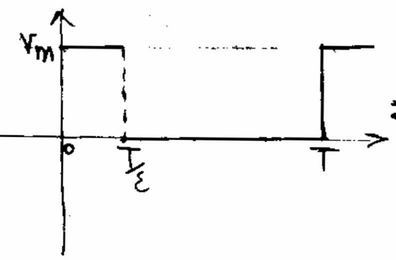
$$I=I_n\angle-\theta'_n=\frac{-j\frac{100}{n\pi}}{j4n\pi+\frac{3\times -j4/2n\pi}{3-\frac{j4}{2n\pi}}}=\frac{3n\pi-j2}{j12n^2\pi^2+8n\pi-j6}$$

$$=\frac{\sqrt{9n^2\pi^2+4}}{\sqrt{(12n^2\pi^2-6)^2+(8n\pi)^2}}\angle-\theta'_n$$

$$,\ \theta'_n=tg^{-1}\frac{12n^2\pi^2-6}{8n\pi}-tg^{-1}\frac{2}{3n\pi}$$

مثال ۳:





الف - ۴ جملهٔ اول سری فوریهٔ $v(t)$ را محاسبه کنید.

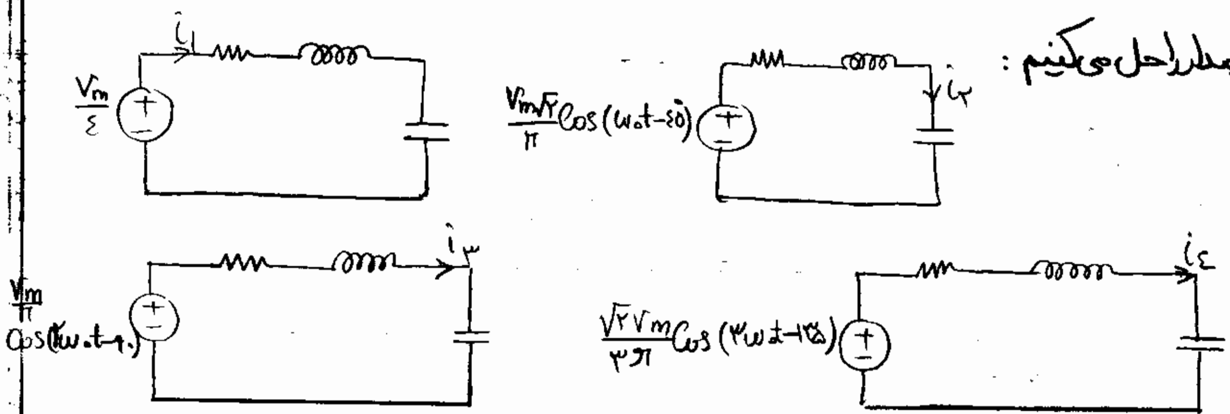
ب - جریان حلقه را به ازاء این ۴ جمله محاسبه کنید.

الف - $a_0 = \frac{V_m}{4}$, $a_n = \frac{V_m}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$, $b_n = \frac{V_m}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)$

, $A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $\theta_n = Arctg\,\frac{b_n}{a_n}$.

$$\longrightarrow\ v(t) = \frac{V_m}{4} + \frac{V_m\sqrt{2}}{\pi}\cos(\omega_0 - 45^\circ) + \frac{V_m}{\pi}\cos(2\omega_0 t - 90^\circ) + \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{V_m}{\pi}\cos(3\omega_0 t - 135^\circ)$$

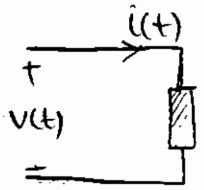
چهار مدار را حل می‌کنیم:



$$i(t) = i_1 + i_2 + i_3 + i_4$$

مقدار متوسط توان:

یادآوری:



$$v(t) = V_m\cos(\omega_0 t - \theta_v)$$
$$i(t) = I_m\cos(\omega_0 t - \theta_i)$$

$$P(t) = v(t)\,.\,i(t) = V_m I_m \cos(\omega_0 t - \theta_v)\cos(\omega_0 t - \theta_i)$$

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int P(t)\,dt = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i)$$

حال اگر $v(t)$ و $i(t)$ متناوب غیر سینوسی باشند:

$$v(t) = V_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{v_n})$$

$$,\quad i(t) = I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{i_n})$$

$$P(t) = v(t) \cdot i(t)$$

$$P_{av} = V_{dc} \cdot I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{2} \cos(\theta_{v_n} - \theta_{i_n})$$

یادآوری: مقدار موثر سیگنالها (جریانها و ولتاژها)

$$F_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T f^2(t)\,dt}$$

اگر $f(t)$ سینوسی باشد:

$$F_{rms} = \frac{F_m}{\sqrt{2}}$$

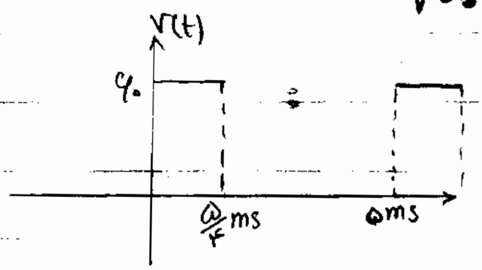
یادآوری پارسوال:

$$\frac{1}{T}\int_T f^2(t)\,dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$= a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2} = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\longrightarrow \quad F_{rms} = \sqrt{a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

مثال: ولتاژی به فرم زیر به مقاومتی $15\,\Omega$ متصل است.



الف- ۴ جمله اول سری فوریه $v(t)$ را محاسبه کنید.

ب- با استفاده از سری محدود فوریه (همان ۴ جمله اول) توان مصرف شده در مقاومت $15\,\Omega$ را محاسبه کنید.

ج- مقدار موثر سیگنال را از رابطه $V_{rms}^2 = \frac{1}{T}\int_T v^2(t)\,dt$ محاسبه کرده و توان کل را به طور دقیق محاسبه کنید.

$$P = \frac{V_{rms}^2}{R}$$

د- چند درصد توان در ۴ جمله اول است.

$\omega_0 = 400\pi \ rad/s \quad , \quad V_{dc} = 15$

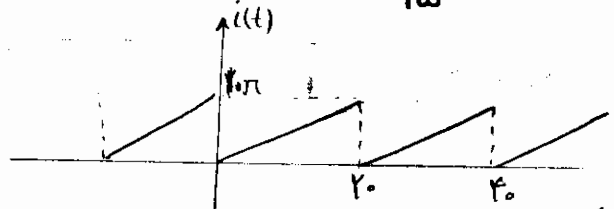
$A_1 = 27,\ \theta_1 = 45^\circ \quad , \quad A_2 = 19.1,\ \theta_2 = 90^\circ \quad , \quad A_3 = 9,\ \theta_3 = 135 \quad , \quad A_4 = 0 \quad , \quad A_5 = 5.4,\ \theta_5 = 45^\circ$

$$P_{\text{۴ جمله اول}} = \frac{(15)^2}{15} + \frac{\left(\frac{27}{\sqrt{2}}\right)^2}{15} + \frac{\left(\frac{19.1}{\sqrt{2}}\right)^2}{15} + \frac{\left(\frac{9}{\sqrt{2}}\right)^2}{15} + \frac{\left(\frac{5.4}{\sqrt{2}}\right)^2}{15} = 56 \ \text{وات}$$

$$V_{rms}^2 = \frac{1}{5\times10^{-3}} \int_0^{\frac{5}{4}\times10^{-3}} (60)^2 dt = 900 \ \text{وات}$$

$$\longrightarrow \quad P_{\text{کل دقیق}} = \frac{900}{15} = 60 \ \text{وات} \quad , \quad \frac{56}{60} = \frac{14}{15}\ \%$$

مثال: الف- سری فوریه $i(t)$ را محاسبه کنید.



ب- مقدار موثر را با استفاده از ۳ جمله اول محاسبه کنید. ج- مقدار موثر را با استفاده از ۵ و ۷ جمله اول محاسبه کنید. د- مقدار موثر واقعی را محاسبه کنید.

$$i(t) = 5\pi - 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 100 n\pi t$$

$$I_{dc} = 5 \ , \quad A_n = \frac{10}{n} \ , \quad I_{rms} = \sqrt{I_{dc}^2 + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{A_n}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$N = 3 \longrightarrow I_{rms} = 17.74$

$N = 5 \longrightarrow I_{rms} = 17.89$

$N = 7 \longrightarrow I_{rms} = 17.95$

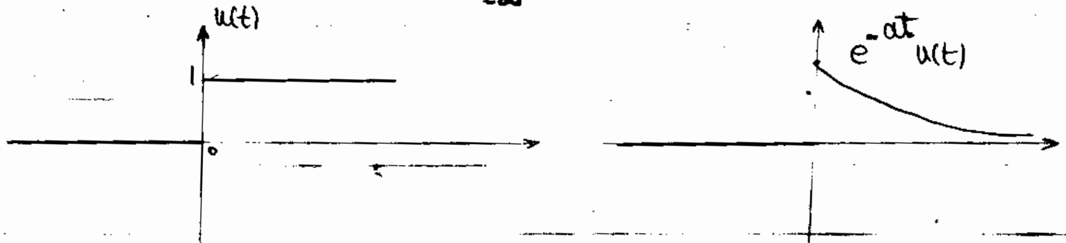
$$I_{rms} = \sqrt{\frac{10^3}{20} \int_0^{20\times10^{-3}} \left(\frac{10\pi}{20} t\right)^2 dt} = 18.14$$

تبدیل فوریه و کاربرد آن در مدارهای الکتریکی :

اگر تابع $f(t)$ دارای شرط دیریکله باشد $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<\infty$ آنگاه :

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

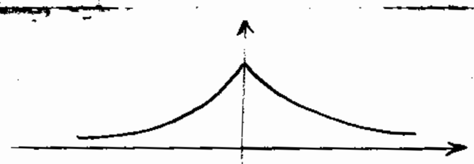
مثال :



$$F(\omega)=\int_0^{\infty} e^{-at}\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt=\frac{1}{-(a+j\omega)}e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{a+j\omega}$$

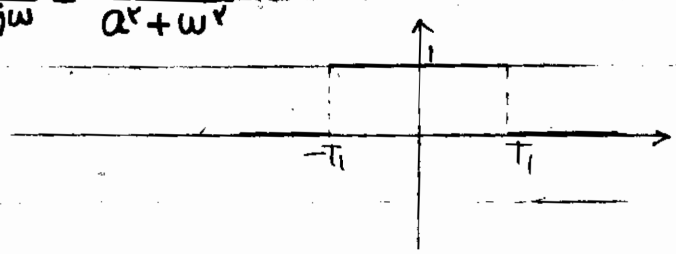
مثال : $f(t)=e^{-a|t|}\quad , \quad a>0$



$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0} e^{at}\cdot e^{-j\omega t}dt+\int_0^{\infty} e^{-at}\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

مثال :



$$F(\omega)=\int_{-T_1}^{T_1}(1)\,e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1}=\frac{1}{-j\omega}\left[e^{-j\omega T_1}-e^{+j\omega T_1}\right]$$

$$=\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$$

نکته: یک دسته توابع هستند که در مسائل مهندسی از جمله تحلیل مدارهای الکتریکی بکار می روند ولی

تبدیل فوریه ندارند مانند:

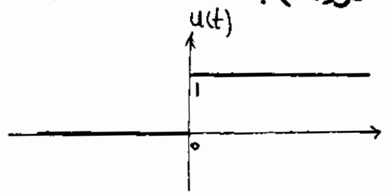
$$f(t) = u(t) \qquad , \qquad f(t) = \sin \omega_0 t$$
$$= 1 \qquad\qquad = e^{j\omega_0 t}$$
$$= \cos t \qquad\qquad = \mathrm{sgn}(t)$$

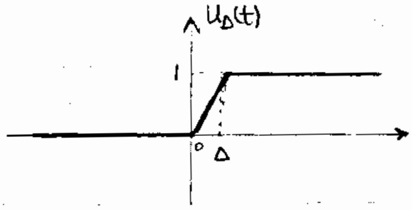
مثال:

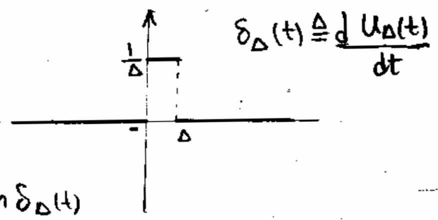
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega_0-\omega)t}\, dt = \frac{1}{j(\omega_0-\omega)} e^{j(\omega_0-\omega)t} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

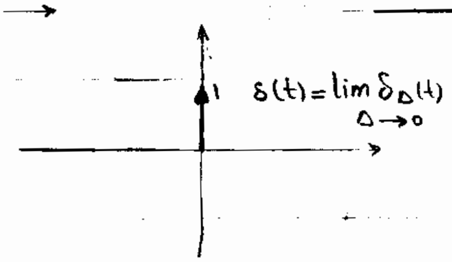
برای این دسته از توابع می توان تبدیل فوریه در حد تعریف کرد (نه لزوماً).

یادآوری تعریف تابع ضربه:









خواص تابع ضربه:

$1-\ \delta(t) = 0 \quad , \quad t \neq 0$ $\qquad$ $2-\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$

$3-\ x(t)\cdot\delta(t) = x(0)\cdot\delta(t)$

$\quad\ \ x(t)\cdot\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$

$4-\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\delta(t-t_0)\, dt = x(t_0)$

محاسبهٔ تبدیل فوریهٔ بعضی از توابع در حد:

$1-\ f(t) = e^{j\omega_0 t}$

ثابت می کنیم : $F(\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$$\underbrace{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega}_{\text{رابطه عکس تبدیل فوریه}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}\delta(\omega-\omega_0)d\omega=e^{j\omega_0 t}$$

۲- $\underbrace{\cos\omega_0 t}_{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}} \longleftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$

۳- $\underbrace{\sin\omega_0 t}_{\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t}-\frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}} \longrightarrow \pi j\delta(\omega-\omega_0)-\pi j\delta(\omega+\omega_0)$

۴- $\underbrace{1}_{e^{j\omega_0 t}|_{\omega_0=0}} \longrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

جدول تبدیل فوریه :

$f(t)$	$F(\omega)$
$e^{-at}u(t)\quad a>0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$e^{-a\|t\|}\quad a>0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\begin{cases}1 & \|t\|<T_1\\ 0 & \|t\|>T_1\end{cases}$	$2\frac{\sin\omega T_1}{\omega}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin\omega_0 t$	$\pi j[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$\delta(t)$	1
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

خواص تبدیل فوریه :

۱ـ خاصیت خطی بودن :

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)$$
$$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$$
$$af_1(t) + bf_2(t) \longleftrightarrow aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$$

۲ـ خاصیت تقارن :

$$F(-\omega) = F^*(\omega)$$

$$e^{-at}u(t) \qquad \frac{1}{a+j\omega} = F(\omega)$$
$$\frac{1}{a-j\omega} = F(-\omega)$$
$$\frac{1}{a+j\omega} = F^*(-\omega)$$

نتایج :

۱ـ $|F(\omega)|$, $Re\{F(\omega)\}$ توابعی زوج هستند :

۲ـ درمثال قبل : $|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$, $Re\{F(\omega)\} = \frac{a}{a^2+\omega^2}$

۳ـ $\angle F(\omega)$, $Im\{F(\omega)\}$ توابعی فرد هستند.

تبدیل فوریه یک تابع زوج وحقیقی یک تابع زوج وحقیقی است.

۳ـ خاصیت انتقال درحوزه زمان :

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$
$$f(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}F(\omega)$$

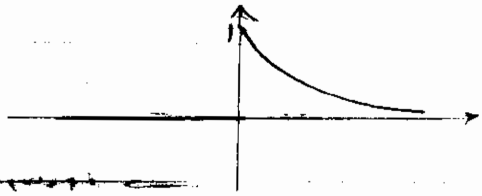
مثال :

$$\delta(t) \longrightarrow 1$$
$$\delta(t-3) \longrightarrow e^{-j3\omega}$$

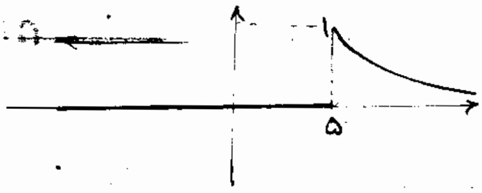
مثال

$$F^{-1}\left[\frac{e^{-j5\omega}}{1+j\omega}\right]=?$$

$$F^{-1}\left[\frac{1}{1+j\omega}\right]=e^{-t}u(t)$$



$$F^{-1}\left[\frac{e^{-j5\omega}}{1+j\omega}\right]=e^{-(t-5)}u(t-5)$$



۴- خاصیت ضریب زمانی:

$$f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$$

$$f(at)\longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

مثال:

$$e^{-|t|}\longleftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2}\quad,\quad e^{-|2t|}=?$$

$$e^{-2|t|}\longleftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+(\frac{\omega}{2})^2}=\frac{4}{4+\omega^2}$$

۵- مشتق در حوزهٔ زمان:

$$f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$$

$$\frac{df(t)}{dt}\longleftrightarrow j\omega F(\omega)$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

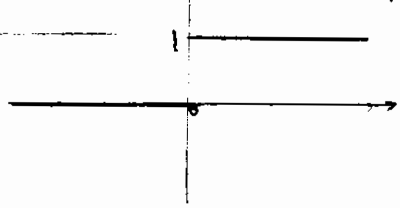
۶- انتگرال در حوزهٔ زمان:

$$f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$$

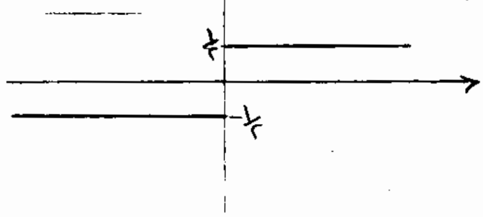
مشروط براینکه: $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=0$ (مقدار متوسط صفر)

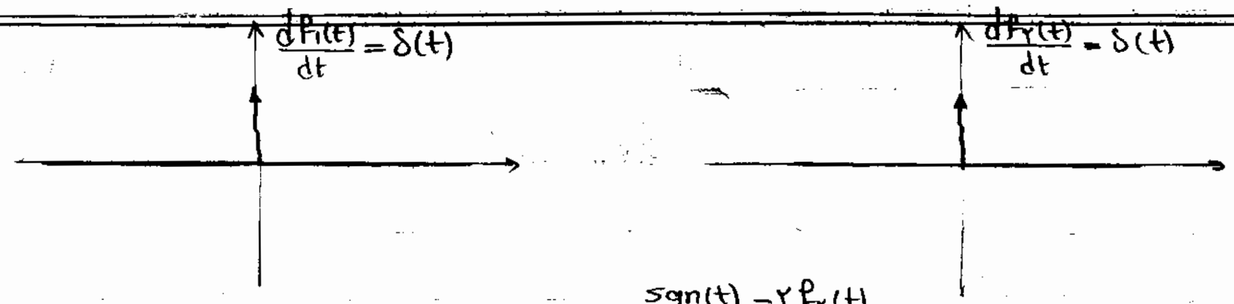
$$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\longleftrightarrow\frac{1}{j\omega}F(\omega)$$

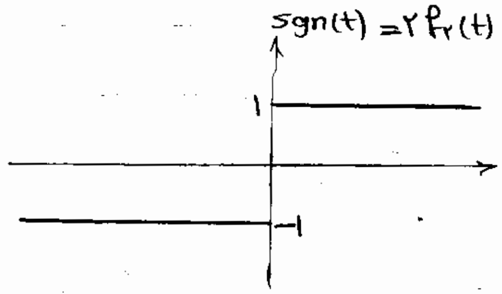
$$f_1(t)=f_2(t)+\frac{1}{2}\longleftrightarrow\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(t)$$



$$f_2(t)=f_1(t)-\frac{1}{2}\longleftrightarrow\frac{1}{j\omega}$$



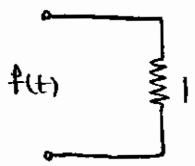




۷- خاصیت کانولوشن:

$$h(t) = g(t) * f(t)$$
$$\longrightarrow H(\omega) = G(\omega) \cdot F(\omega)$$

۸- قضیهٔ پارسوال:



$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega$$

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega$$

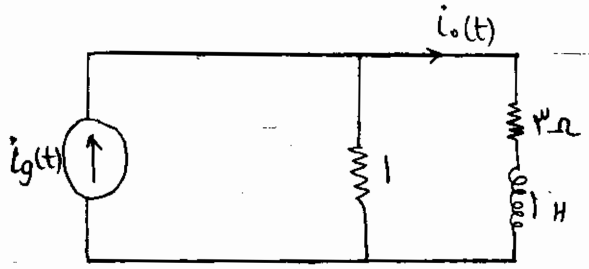
کاربرد تبدیل فوریه در تحلیل مدارهای الکتریکی و استفاده از قضیهٔ پارسوال:

مسائل مدار ⟵ منبع از $-\infty$ تعریف شده است.

⟵ منبع از صفر به بعد تعریف شده است و شرایط اولیه داده شده است.

با چند مثال با کاربرد تبدیل فوریه در تحلیل مدارها آشنا می‌شویم:

مثال ۱:

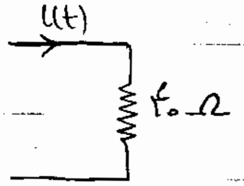


$$i_g(t) = 20\ \mathrm{sgn}(t)$$

$$I_o(\omega) = \frac{1}{4+j\omega} \cdot I_g(\omega) = \frac{1}{4+j\omega} \cdot \frac{40}{j\omega} = \frac{10}{j\omega} - \frac{10}{4+j\omega}$$

$$\longrightarrow I_o(t) = 5\,\mathrm{sgn}(t) - 10\, e^{-4t} u(t)$$

مثال ۲: انرژی تلف‌شدهٔ کل را در این مقاومت



$$i(t) = 20 e^{-2t} u(t)$$

الف ـ در حوزه زمان محاسبه کنید.

ب ـ با استفاده از قضیهٔ پارسوال محاسبه کنید. ج ـ چه مقدار از انرژی تلف‌شده مربوط به باند

فرکانسی $2\sqrt{3} \geq \omega$ که می‌باشد.

الف ـ $W_{40\Omega} = \int_0^{+\infty} [20 e^{-2t}]^2 dt = 4000$ ژول

ب ـ $20 e^{-2t} u(t) \longleftrightarrow \dfrac{20}{2+j\omega} = F(\omega)$

$$W_{40\Omega} = 40 \times \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{40}{\pi} \int_0 \frac{400}{4+\omega^2} d\omega = \frac{4000}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(\frac{\omega}{2})^2} d\omega$$

$$= 2 \times \frac{4000}{\pi} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)\Big|_0^{+\infty} = 4000 \text{ ژول}$$

ج ـ انرژی مربوط به باند $0 \leq \omega \leq 2\sqrt{3}$ $= 40 \int_0^{2\sqrt{3}} |F(\omega)|^2 d\omega = \dfrac{8000}{3}$ ژول