فصل سوم :

تالیف وتدوین :مهدی حاجی پور

مدارهای ساده و آشنایی با روش های تحلیلی

حال که با دو قانون اصلی تجزیه و تحلیل قوانین کیرشهف و هم چنین خواص اجزاءِ مدار آشنا شدیم ، در این فصل ابتدا به تجزیه و تحلیل مدارهای ساده می پردازیم :

- ☑ طبق تعریف، هر مدار ساده از تعدادی شاخه تشکیل می شود و هر شاخه در مدارهای ساده یک جزءِ دو سر مانند مقاومت ، منبع و ... است .
- ☑ تجزیه و تحلیل یک مدار ، تعیین جریان و ولتاژ تمام شاخه های مدار است و این ولتاژ و جریان ها ، متغیرهای مدار (شبکه) نامیده می شوند.
- ☑ ساده ترین مدار ها ، مدارهایی هستند که از ترکیب سری یا موازی یک جزءِ مدار تشکیل شده باشند که ابتدا ترکیب مقاومت ها و سپس منابع و بعد از آن ترکیب سلف ها و خازن ها را مورد بحث قرار می دهیم .

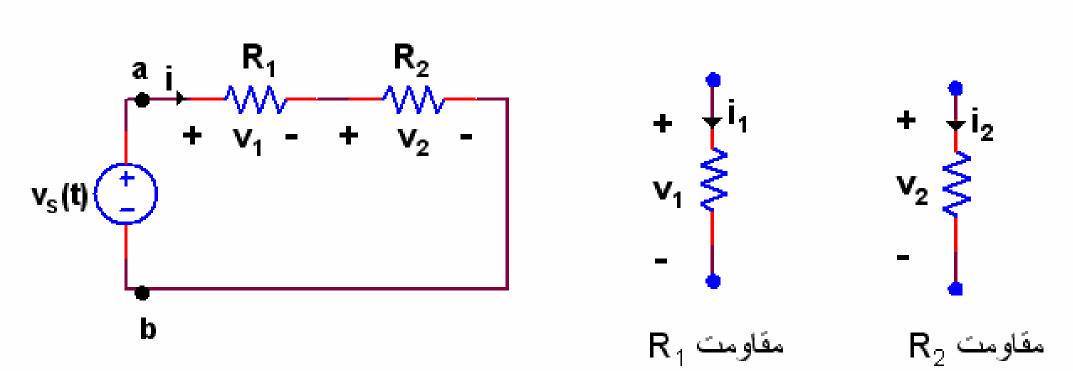
مبحث 1–ترکیب اجزاء مدار

3–1– ترکیب مقاومت ها

1. ترکیب سری   2. ترکیب موازی   3 .تبدیل ستاره – مثلث   در مقاومت ها

3–1–1– ترکیب سری مقاومت ها

مثال(3–1) : دو مقاومت غیر خطی R_1 و R_2 و منبع v_s که به طور سری به هم وصل شده اند ، مطابق شکل (3-1) مفروضند . مقاومت معادل دو مقاومت را از سر ab به دست آورید .



شکل (3–1)

الف : هر گاه دو مقاومت به صورت زیر تعریف شده باشند : ($\underline{\underline{\Delta}}$ **: تعریف می شود**)

مشخصه $R_1 \underline{\underline{\Delta}} v_1 = f_1(i_1)$ و مشخصه $R_2 \underline{\underline{\Delta}} v_2 = f_2(i_2)$

جوا ب : با توجه به قوانین کیرشهف داریم :

$$\text{KCL} \Rightarrow i_1 = i_2 = i$$
$$\text{KVL} \Rightarrow v_1 + v_2 - v_s = 0 \Rightarrow f_1(i_1) + f_2(i_2) = v_s$$
$$v_s = f_1(i) + f_2(i) = f(i)$$

مقاومت معادل دو مقاومت R_1 و R_2 مقاومتی است با مشخصه $v = f(i)$.

ساده ترین حالت : در صورتی که دو مقاومت خطی R_1 و R_2 را در نظر بگیریم :

مشخصه $R_1 \triangleq v_1 = R_1 i_1$ و مشخصه $R_2 \triangleq v_2 = R_2 i_2$

$$v_S = R_1 i_1 + R_2 i_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)i$$

در نتیجه : $v_S = R_{eq} i$ یعنی $R_{eq} = R_1 + R_2$ می شود .

ب:هر گاه دو مقاومت به صورت زیر تعریف شوند :

مشخصه $R_1 \triangleq i_1 = g_1(v_1)$ و مشخصه $R_2 \triangleq i_2 = g_2(v_2)$

جواب : در این حالت دو وضعیت برای مشخصه مقاومت ها مطرح است :

ب .1. مشخصه مقاومت ها معکوس پذیر است یعنی :

$$i_1 = g_1(v_1) \Rightarrow v_1 = g_1^{-1}(i_1)$$
$$i_2 = g_2(v_2) \Rightarrow v_2 = g_2^{-1}(i_2)$$

در نتیجه طبق قانون ولتاژ ها :

$$\text{KVL} \Rightarrow v_S = v_1 + v_2 = g_1^{-1}(i_1) + g_2^{-1}(i_2) = g_1^{-1}(i) + g_2^{-1}(i) = f(i)$$

یعنی معادل دو مقاومت ، یک مقاومت با مشخصه $v = f(i)$ می باشد .

ساده ترین حالت : دو مقاومت خطی G_1 و G_2 در نظر می گیریم .

$i_1 = G_1 V_1$ و $i_2 = G_2 V_2$ یا $V_1 = \frac{i_1}{G_1}$ و $V_2 = \frac{i_2}{G_2}$

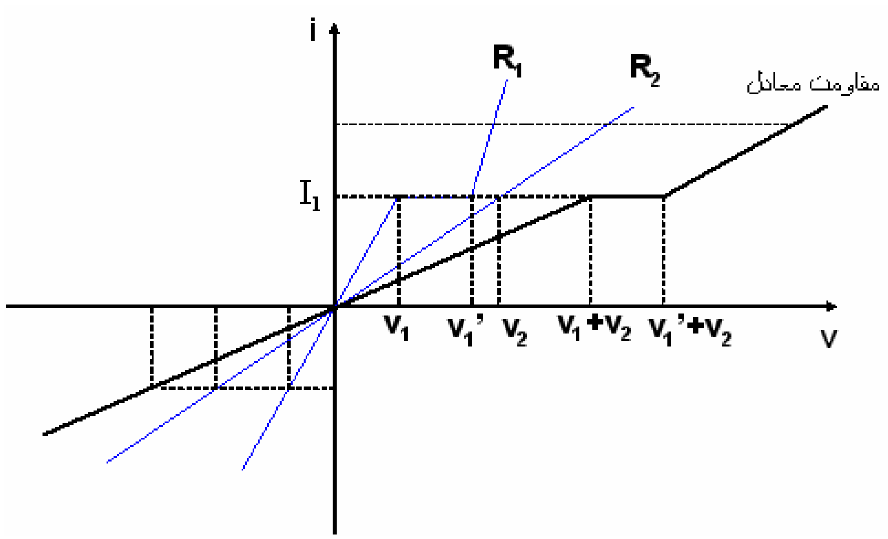
در نتیجه :

$$V_S = \frac{i_1}{G_1} + \frac{i_2}{G_2} = \frac{i}{G_1} + \frac{i}{G_2} = i\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\right)$$

$$V_S = \frac{i}{G_{eq}} \qquad \frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}$$

ب.2. در صورتیکه مشخصه مقاومت ها معکوس پذیر نباشند .در این صورت از روش تحلیل مقاومت معادل قابل محاسبه نیست و باید از روش ترسیمی مقاومت معادل را بدست آورد .

چون طبق KCL جریان مقاومت ها یکسان است و طبق KVL باید ولتاژ مقاومت ها جمع شود . بنابراین در روش ترسیمی بازاءِ جریان معین و مشخصی مانند شکل (3-2) ولتاژ ها را با هم جمع می کنیم و مشخصه حاصل مقاومت معادل دو مقاومت R_1 و R_2 است .



شکل(2-3)

فرض می کنیم مقاومت R_2 یک مقاومت خطی باشد .

$$i_1 = g_1(v_2)\,,\; i_2 = G_2 V_2$$

نتیجه :

- ☑ شرط تعیین ترکیب سری مقاومت ها از روش تحلیلی این است که مقاومت ها باید کنترل شده با جریان باشند .
- ☑ در مورد ترکیب سری مقاومت های خطی داریم :

$$R_{eq} = \sum_{K=1}^{N} R_K$$

$$\frac{1}{G_{eq}} = \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{G_K}$$

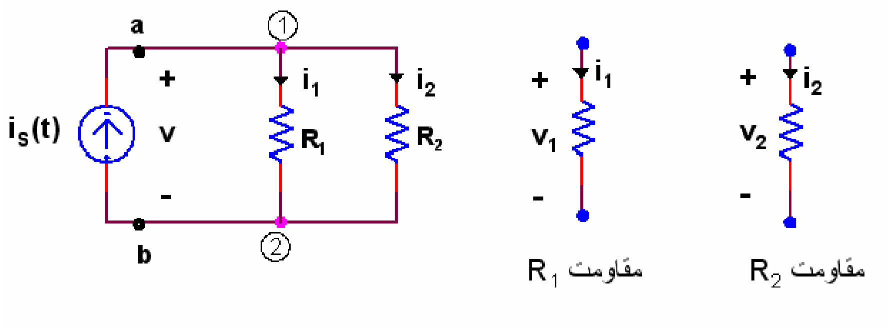
در مورد مقاومت های مساوی و یا دو مقاومت G_1 و G_2 داریم :

$$R_{eq} = NR \quad G_{eq} = \frac{G}{N} \text{ و } G_{eq} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$$

- ☑ شرط استفاده از مقاومت معادل مقاومت های سری در تجزیه و تحلیل این است که ولتاژ دو سر هرکدام از مقاومت ها مورد نظر نباشند .

◆ 3-1-2- ترکیب موازی مقاومت ها

مثال (3-2) : دو مقاومت غیر خطی R_1 و R_2 که بطور موازی به هم متصل شده اند مطابق شکل (3-3) مفروضند .



شکل (3-3)

مقا.مت معادل دو مقاومت را از دو سر ab بدست آورید .

الف : هرگاه دو مقاومت بصورت زیر تعریف شده باشند :

مشخصه $R_1 \underline{\underline{\Delta}}\ i_1 = g_1(v_1)$

مشخصه $R_2 \underline{\underline{\Delta}}\ i_2 = g_2(v_2)$

جواب : با توجه به قوانین کیرشهف در مدار شکل (3-3) داریم :

$$KVL \Rightarrow V_1 = V_2 = V$$

$$KCL(1) = i_S = i_1 + i_2$$

$$i_S = g_1(v_1) + g_2(v_2) = g_1(v) + g_2(v) = g(v)$$

مشخصه مقا.مت معادل دو مقاومت دارای مشخصه $i = g(v)$ است .

ساده ترین حالت ترکیب دو مقاومت خطی G_1 و G_2 است که :

$i_1 = G_1V_1$ و $i_2 = G_2V_2$

$$i_S = G_1V_1 + G_2V_2 = G_1V + G_2V = (G_1 + G_2)V$$

$$i_S = G_{eq}V$$

از مقایسه دو رابطه نتیجه می شود :

$$G_{eq} = G_1 + G_2$$

ب : هرگاه دو مقاومت بصورت زیر تعریف شده باشند .

مشخصه $R_1 \underline{\underline{\Delta}} v_1 = f_1(i_1)$

مشخصه $R_2 \underline{\underline{\Delta}} v_2 = f_2(i_2)$

جواب : در این حالت دو وضعیت برای مشخصه مقاومت ها مطرح است .

ب.1. مشخصه مقاومت ها معکوس پذیر است ، یعنی :

$$v_1 = f_1(i_1) \Rightarrow i_1 = f_1^{-1}(v_1)$$

$$v_2 = f_2(i_2) \Rightarrow i_2 = f_2^{-1}(v_2)$$

در نتیجه طبق KCL داریم :

$$i_S = f_1^{-1}(v_1) + f_2^{-1}(v_2) = f_1^{-1}(v) + f_2^{-1}(v) \Rightarrow i_S = f(v)$$

در نتیجه مقاومت معادل دو مقاومت از روش تحلیلی با مشخصه $i = g(v)$ بدست می آید .

ساده ترین حالت ترکیب دو مقاومت خطی R_1 و R_2 است ، در این صورت :

$$V_1 = R_1 i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{V_1}{R_1} \quad \text{و} \quad V_2 = R_2 i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{V_2}{R_2}$$

$$i_S = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})V$$

در مقایسه با رابطه خطی $i = \frac{V}{R_{eq}}$ نتیجه می شود که :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ب.2. مشخصه مقاومت های R_1 و R_2 معکوس پذیر نیستند .

در این حالت باید از روش ترسیمی مقاومت معادل را بدست آورد و با توجه به شرایط KVL و KCL که ولتاژ دو سر مقاومت ها مساوی است بازاءِ ولتاژهای معین جریان های مقاومت ها را از مشخصه ها بدست می آوریم و با هم جمع می کنیم .

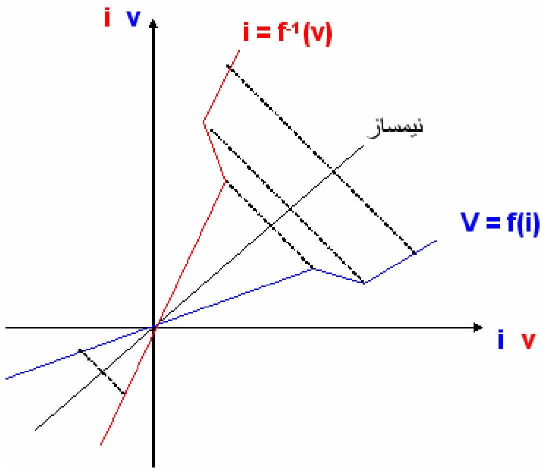
ضمناً برای تعیین معکوس یک مقاومت از روش ترسیمی بدین منوال می توان عمل کرد .

1- نیمساز ربع اول و سوم را رسم می کنیم .

2- قرینه مشخصه مقاومت را نسبت به نیمساز بدست آورده و رسم می کنیم .

3- جای محور ها ی ولتاژ و جریان را عوض می نماییم ، مشخصه حاصل معکوس مشخصه اول است .

مثال(3-3) : $V = f(i)$ شکل (4-3) را در نظر گرفته و معکوس آن را رسم نمایید .



شکل (4-3)

از تجزیه و تحلیل ترکیب موازی مقاومت ها نتایج زیر حاصل می شود .

- ☑ در صورتیکه مقاومت ها موازی کنترل شده با ولتاژ باشند ، از روش تحلیلی می توان مقاومت معادل را بدست آورد (شرط ترکیب موازی این است که مقاومت ها کنترل شده با ولتاژ باشند .)
- ☑ در مورد ترکیب موازی مقاومت های خطی داریم :

$$G_{eq} = \sum_{K=1}^{N} G_K \quad \text{یا} \quad \frac{1}{R_{eq}} = \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{R_K}$$

در مورد ترکیب مقاومت های مساوی و یا دو مقاومت R_1 و R_2 داریم :

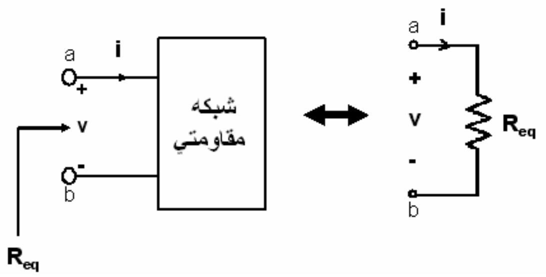
$$G_{eq} = NG_K \quad \text{یا} \quad R_{eq} = \frac{R}{N} \quad \text{و} \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- ☑ **شرط استفاده از مقاومت معادل مقاومت های موازی در تجزیه و تحلیل این است که جریان هرکدام از مقاومت ها مورد نظر یا پاسخی از مدار نباشد**

3-1-3- تعریف مقاومت معادل:

هر گاه یک شبکه مقاومتی مانند شکل (5-3)در نظر بگیریم **مقاومت معادل این شبکه ، مقاومتی است که اگر بجای شبکه مقاومتی قرار گیردولتاژ دو سر شبکه V_{ab} وجریانی که واردشبکه می شود با ولتاژ دو سر مقاومت معادل وجریان عبوری از آن برابر باشند** . به عبارت دیگر **شبکه و مقاومت معادل اثر یکسانی بر بقیه قسمت ها داشته باشند.**

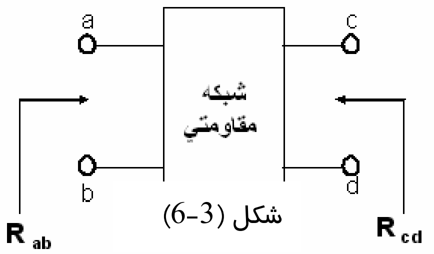
مقدار مقاومت معادل از رابطه $R_{eq} = \frac{V_{ab}}{i}$ **بدست می آید.**



شکل(3-5)

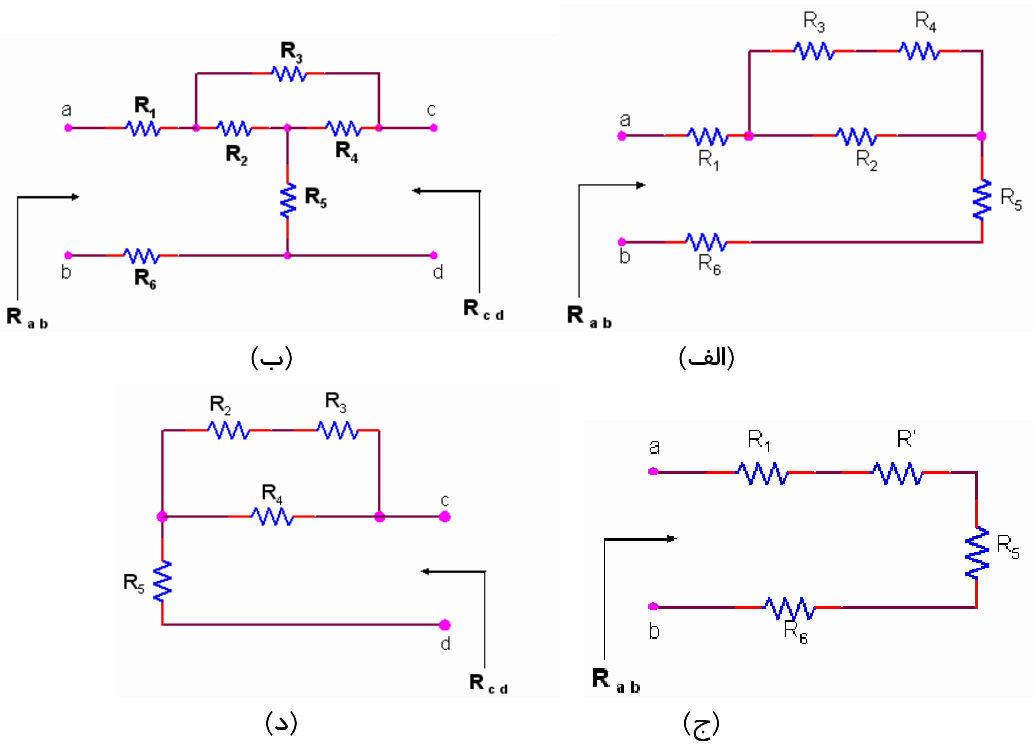
☑ یک شبکه که دارای سر های متفاوتی باشـد، **مقاومت معادل از سر های مختلف جداگانه محاسبه میگرد دو معمولاً از لحاظ مقدار متفاوتنـد،مگر در حالـت خاص.**

شکل (3-6) یک شبکه مقاومتی چهار سر را نشان مـی دهـد کـه مقاو.مت ها معادل با R_{ab} و R_{cd} تعریف شده اند.



شکل (3-6)

مثال(3-4): مقاومت معادل شبکه مقاومتی شکل(3-7 الف) را از دو نقطه $a,b-(R_{ab})$ و از دو نقطه $c,d-(R_{cd})$ محاسبه کنید.(مقاومت ها مساوی با مقدار R فرض شوند.)



شکل (3-7)

- **جواب: ابتدا محاسبه مقاومـت معـادل از طـرف سـر** ab :همـانطور کـه در شـکل (3-7 ب) مشاهده می شود و به علت مدار باز بودن سر cd مقاومت های R_3 و R_4 با هـم سـری و بـا مقاومـت R_2 موازی هستند بنابراین مقاومت معادل این قسمت R' برابراست با :

$$R' = \frac{(R_3+R_4)R_2}{R_3+R_4+R_2} = \frac{2R\times R}{3R} = \frac{2}{3}R$$

با جانشینی R' مدار معادل شکل (3-7 ج)نتیجه می شود ،دراین حالت مقاومت ها با هم سری هستند. بنابراین:

$$R_{ab} = R_1 + R' + R_5 + R_6 = 3R + \frac{2}{3}R$$

$$R_{ab} = \frac{11}{3}R$$

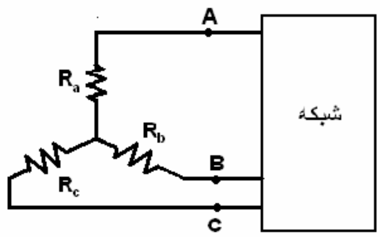
محاسبه مقاومت معادل از طرف cd : در این حالت بدلیل مدار باز بودن سر ab مقاومت های R_1 و R_6 در مقاومت معادل تا ثیر ندارد ودر این حالت مطابق شکل (3-7- د) مقاومت های R_2 و R_3 بـا هـم سـری و نتیجه آن ها با مقاومت R_4 موازی است : بنابراین مقاومت معادل از طرف cd برابراست با :

$$R_{cd} = \frac{(R_2+R_3)R_4}{R_2+R_3+R_4} + R_5 = \frac{2R\times R}{3R} + R = \frac{2}{3}R + R \Rightarrow R_{cd} = \frac{5}{3}R$$

3-1-4- تبدیل اتصال ستاره – مثلث:

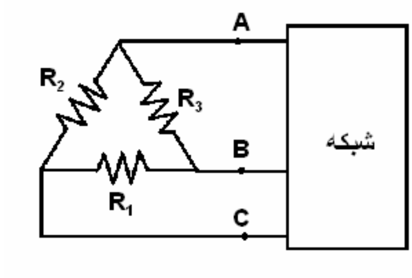
بعضی موارد مقاومت ها طوری بهم متصل شده اند که ابتدا از طریق ترکیب سـری یـا مـوازی نمـی توان مقاومت معادل را حساب کرد ا ما با یک تبد یل امکان ترکیب و تعیـین مقاومـت معـادل حاصـل مـی شود .از این لحاظ به بررسی تبد یل ستاره – مثلث می پر دازیم .

- **اتصال ستاره مقاومت ها (y- Conection) :** هرگا ه سه مقاومت مطـابق شـکل (3-8) یـک سر آن ها به یک گره متصل شده باشند و سر دیگر آن ها به بقیه شبکه اتصـال یافتـه باشـد اتصـال را ستاره یا (y) گویند.



شکل (3-8)

◆ **اتصال مثلث مقاو مت ها** (Δ- Conection) **:** هرگاه سه مقاومت مطـابق شـکل (3-9) بهـم متصل شده باشند این اتصال را مثلث یا (Δ) گویند.



شکل(3-9)

◆ همانگونه که درتعریف مقاومت معادل مطرح شد دو اتصال ستاره و مثلث زمانی معادل هـم هسـتند که از هر دو گره BC , AB و AC اثر یکسانی بربقیه شبکه داشته باشند بـه عبـارت دیگـر ***مقاومـت معادل از بین هر دو گر ه در دو اتصال مساوی باشند:***

$$R_{AB} \triangleq R_a + R_b = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad R_{BC} = \triangleq R_b + R_c = \frac{(R_2 + R_3)R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_{AC} \triangleq R_a + R_c = \frac{(R_1 + R_3)R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

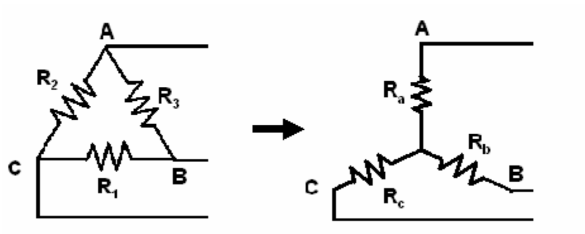
با توجه به روابط فوق دو حالت تبدیل امکان پذیر است .

I.) تبدیل مثلث به ستاره: اگر مقاومت های اتصال مثلث شـکل (3-10-الـف) R_3, R_2, R_1 معلوم باشند ، باحل دستگاه فوق می توان مقاومت های ستاره معادل مثلـث شـکل(3-10-ب) را تعیین کرد.

$$R_a = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

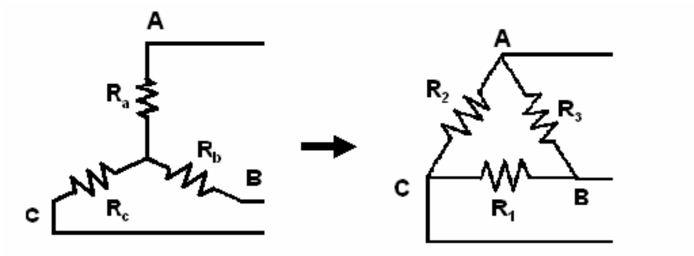


(الف) شکل(3-10) (ب)

اگر در شکل (3-10ب) و روابط مقاومت معادل ها توجه شود می توان نتیجه گرفت :

$$\text{مقاومت شاخه ستاره معادل} = \frac{\text{حاصل ضرب دو مقاومت مثلث متصل به گره متناظر شاخه ستاره}}{\text{مجموع مقاومت ها مثلث}}$$

II.) تبدیل ستاره به مثلث : در این حالت فرض بـر ایـن اسـت کـه R_a و R_b و R_c مقاومـت های ستاره معلوم هستندومقاومت های R_1 ، R_2 و R_3باید محاسبه شوند شکل (3-11).



شکل(3-11)

اگر روابط حاصل از تبدیل مثلث به ستاره را دو به دو در هم ضرب کنیم و با هم جمع کنـیم ، داریم :

$$R_aR_b + R_bR_c + R_aR_c = \frac{R_1R_2^2R_3 + R_1^2R_2R_3 + R_1R_2R_3^2}{(R_1+R_2+R_3)^2} = \frac{R_1R_2R_3(R_2+R_1+R_3)}{(R_1+R_2+R_3)^2}$$

$$R_aR_b + R_bR_c + R_aR_c = \frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

.

حال اگر این عبارت را به ترتیب بر R_a و R_b و R_c تقسیم کنیم :

$$R_1 = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_aR_c}{R_a}$$

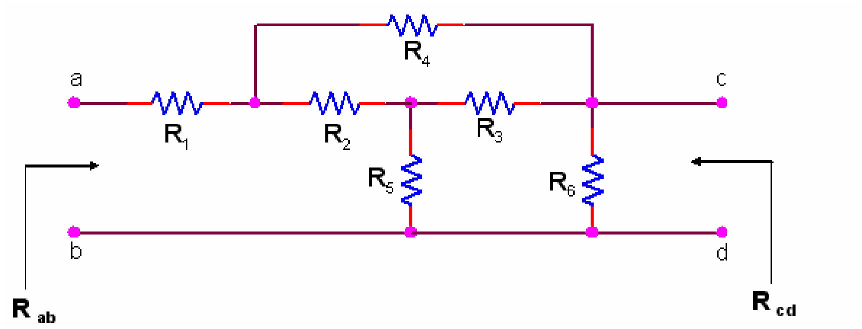
$$R_2 = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_aR_c}{R_b}$$

$$R_3 = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_aR_c}{R_c}$$

اگر به شکل (3-11)و روابط مقاومت معادل ها توجه شود ، می توان نتیجه گرفت :

مقاومت شاخه مثلث معادل = (حاصل جمع حاصل ضرب دو به دوی مقاومت های ستاره) / (مقاومتی از ستاره که متصل به گره روبه روی شاخه مثلث است)

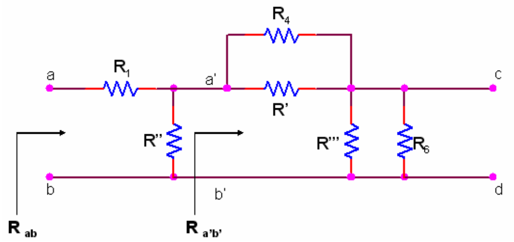
مثال(3-5) : مقاومـت معـادل شـبکه مقـاومتی را در شـکل (3-12)، از دو نقطـه a b بـه دسـت آوریـد . (مقاومت ها مساوی و برابر R فرض شوند .)

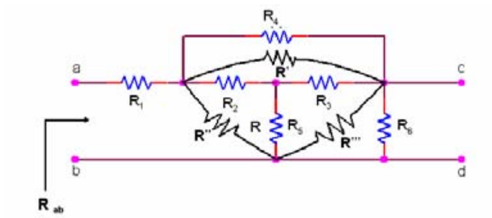


شکل(2-12)

جواب : در این مثال برای تعیین مقاومت معادل لازم است یک تبدیل ستاره به مثلث یا بعکس انجام گـردد تا بتوان مقاومت معادل را محاسبه نمود .

فرضاً اگر ستاره حاصل از مقاومت های R_2 و R_3 و R_5 را به مثلث تبدیل کنیم :





(ب) شکل(3-13) (الف)

با توجه به شکل (3-13 الف) و فرم کلی تبدیل ستاره به مثلث و مساوی بودن مقاومت ها داریم :

$$R' = \frac{R\times R + R\times 2R + R\times 2R}{R} = \frac{3R^2}{R} = 3R$$

$$R'' = \frac{3R^2}{R} = 3R$$

$$R''' = \frac{3R^2}{R} = 3R$$

در نتیجه در شکل (3-13ب) مقاومت های (R', R_4) و (R'', R_6)موازی و با هم سری هسـتند و سـپس نتیجه ترکیب آنها با R''' موازی است :

$$R_{a'b'} = \frac{R_4 R'}{R' + R_4} + \frac{R_6 R''}{R_6 + R''} = \frac{R\times 3R}{R+3R} + \frac{R\times 3R}{R+3R}$$

$$R_{a'b'} = \frac{3}{4}R + \frac{3}{4}R = \frac{6}{4}R = \frac{3}{2}R$$

$$R_{ab} = R_1 + \frac{R_{a'-b'}R'''}{R_{a'-b'}+R} = R + \frac{\frac{3}{2}R\times 3R}{\frac{3}{2}R+3R} = R + \frac{\frac{9}{2}R^2}{\frac{9}{2}R} = R+R$$

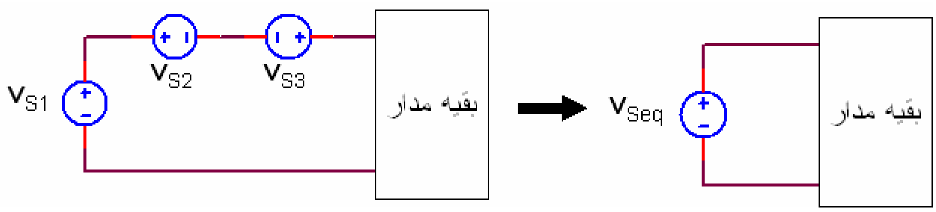
$$R_{ab} = 2R$$

- **تمرین:**مقاومت معادل شبکه شکل (12-3) را از دو سر cd وبا تبـدیل مثلـث R_2, R_3, R_4 بـه ستاره حساب کنید.

3-2- ترکیب منابع نابسته :

3-2-1- ترکیب منابع ولتاژ نابسته :

☑) **ترکیب سری منابع ولتاژ:** منابع ولتاژ می توانند بطور سری متصل شوند . **هرگاه چند منبـع ولتاژ مانند شکل (3-14) بطور متوالی بهم وصل شده باشند می توان بجای آن ها منبع ولتـاژ معادلی قرارداد که مقدار منبع معادل از جمع جبری ولتاژ منابع ولتاژ بدست می آید.به طـور مثال :** $v_{Seq} = v_{S1} - v_{S2} + v_{S3}$



شکل(3-14)

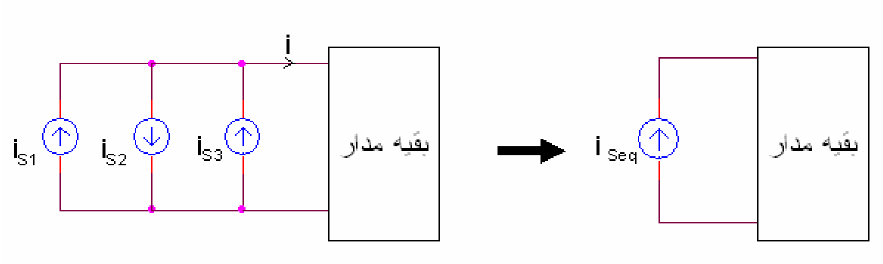
- **از لحاظ تحلیلی:** چون منابع ولتاژ مانند مقاومت های کنترل شد ه با جریان هسـتند ترکیـب سـری آن ها امکان دارد.
- **از لحاظ عملی** ترکیب منابع ولتاژ برای افزایش ولتاژ بکار می رود.

II. **تر کیب موازی منابع ولتاژ:**ترکیب موازی منابع ولتاژ در حالت عمومی امکان پذیر نیست، زیرا نقض کننده قانون ولتاژ ها است، مگردر حالت خاص که منابع مساوی می باشند.

☑ ترکیب موازی از لحاظ نظری (تئوری)به دلیل نا محدود بودن جریـان کـا ربـر د نـدارد **امااز‌لحـاظ عملی به دلیل محدودیت جریان منابع ولتاژ فیزیکی با مـوازی بسـتن منـابع مسـاوی ، جریـان را افزایش می دهند.**

3-2-2- ترکیب منابع جریان نابسته

I.)**ترکیب موازی منابع جریان:** ترکیب موازی منابع جریان مقدور است . هرگـاه تعـدادی منبـع جریـان مطابق شکل (3-15)بصورت موازی بهم بسته شده باشند،میتوان بجای آن ها منبع جریانی که مقـدار ش از جمع جبری مقدار منابع جریان حاصل می شود قرارداد . مانند : $i_{Seq} = i_{S1} - i_{S2} + i_{S3}$



شکل(3-15)

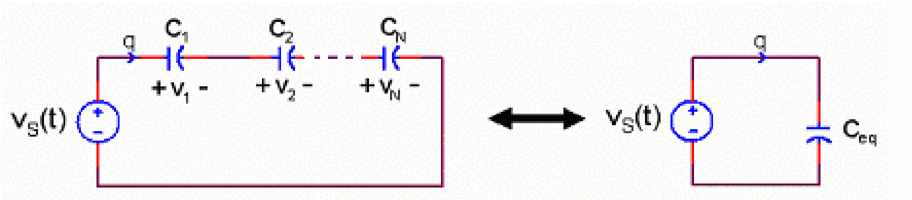
☑ **منابع جریان مانند مقاومت های کنترل شده با ولتاژ عمل می کنند بنـابراین امکـان ترکیـب موازی آن ها مقدور است.**

II.) ترکیب سری منابع جریان :ترکیب سری منابع جریان بدلیل نقض قانون جریان هـا در گـره اتصـال در حالت عمومی مقدور نیست مگر در حالت خاص که منابع جریان مساوی باشند.

3-3- تر کیب خازن ها :

با توجه به کاربرد بیشتر خازن های خطی تغییر ناپذیر با زمان در مدار هـا فقـط ترکیـب خـازن هـای خطی را مورد تحلیل قرار می دهیم .

I.) ترکیب سری خازن ها : هر گاه چند خازن مطابق شکل (3- 16) متوالی بسته شده باشند:



شکل(3-16)

از قوانین جریان ها و ولتاژها وهمچنین رابطه با رالکتریکی وجریان استفاده نموده نتیجه میگیریم :

$$KCL \Rightarrow q_1 = q_2 = \cdots = q_N = q \quad \text{و} \quad KVL \Rightarrow v_1 + v_2 + \cdots + v_N = v_S$$

درصورتیکه ولتاژ اولیه خازن ها برابر صفرفرض شودو با توجه به تعریـف خـاز ن هـا در معادلـه KVL برحسب q مقدار قرار دهیم چنین نتیجه می شود:

$$v_1(0) = v_2(0) = \cdots = v_N(0) = 0 \quad \text{و} \quad q = cv \to v = \frac{q}{c}$$

$$KVL \Rightarrow v_S = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \cdots + \frac{q_N}{C_N} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \cdots + \frac{q}{C_N} \quad \text{و} \; v_S = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}\right)q$$

$$\text{و} \quad v_S = \frac{q}{C_{eq}} \quad \Rightarrow$$

از مقا یسه دو رابطه نتیجه می شود که :

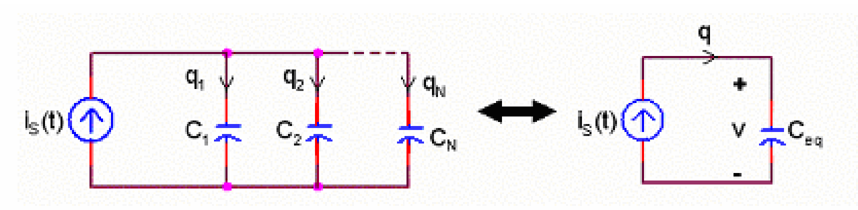
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N} \Leftrightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{C_K}$$

☑ عکس ظرفیت خازن را **الاستانس** گویند وبا $S=\dfrac{1}{C}$ نشان می دهند در نتیجه : $S_{eq}=\sum_{K=1}^{N}S_K$

☑ شرط ترکیب سری خازن ها این است که خازن ها کنترل شده با بارالکتریکی باشند $v=g(q)$

☑ اثبات رابطه $\dfrac{1}{C_{eq}}=\sum_{K=1}^{N}\dfrac{1}{C_K}$ با استفاده از رابطه $v_c(t)=\dfrac{1}{C}\int_0^t i_c dt+v_c(0)$ و قانون ولتاژ ها (KVL) نیز مقدور است. (اثبات به عهده دانشجویان)

II.) **ترکیب موازی خازن ها :** هرگاه چند خازن خطی با ظرفیت $(C_1,C_2\cdots C_N$ را مطابق شکل (3-17) بصورت موازی به هم متصل شوند می توان خازنی با ظرفیت C_{eq} جانشین آن ها کرد.



شکل (3-17)

برای تعیین ظرفیت معادل ابتدا قوانین جریان وولتاژ را در مدار می نویسیم :

$KCL\Rightarrow q=q_1+q_2+\cdots+q_N$ و $KVL\Rightarrow v_1=v_2=\cdots=v_N=v$ و $q=cv$

با قراردادن Cv بجای q درمعادله KCL ومقایسه با $q=C_{eq}v$ **چنین نتیجه می شود:**

$$q=C_1v_1+C_2v_2+\cdots+C_Nv_N=(C_1+C_2+\cdots+C_N)v\Rightarrow(C_1+C_2+\cdots+C_N)=C_{eq}$$

$$C_{eq}=\sum_{K=1}^{N}C_K$$

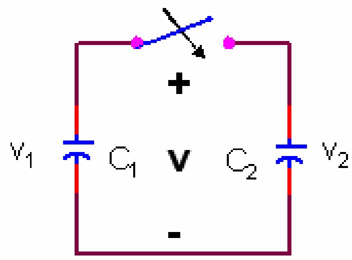
از رابطه فوق نتیجه می گیریم که ظرفیت خازن معادل , در حالت موازی برابر با مجموع ظرفیت خازن های موازی است.

☑ ***شرط ترکیب موازی خازن ها بطور کلی اینست که خازن ها کنترل شده با ولتاژ باشند.***

☑ **اثبات رابطه** $C_{eq}=\sum_{K=1}^{N}C_K$ **با استفاده از رابطه** $i_C=C\dfrac{dv_c}{dt}$ **و قانون جریان ها(KCL) در مورد خازن ها مقدور است.**(اثبات بعهده دانشجویان)

☑ ***در مورد خازن های موازی رابطه*** $q=q_1+q_2+\cdots+q_N$ ***همواره صادق است و به عنوان اصل بقاءبار الکتریکی در خازن ها نامیده می شود.***

- **مثال(3-6): هرگاه دو خازن** C_2,C_1 **با ولتاژ اولیه V_1 و V_2 توسط کلید S مطابق شکل (3-18) بهم متصل شده اند.**



شکل(18-3)

الف) : ولتاژ دو سر ترکیب خازن ها (V)را درست در لحظه بسته شدن کلید بدست آورید.

ب) : انرژی ذخیره شده در خارن ها را قبل وبعد از بسته شدن کلید محاسبه نموده و اصل بقاء انرژی را مورد بررسی قرار دهید.

- **جواب :**

الف: با توجه به **ا صل بقاء بار الکتریکی** خازن ها می توان نوشت: $q_1 + q_2 = q$ که دراین رابطه :

$q_1 = C_1V_1$ **بار ذخیره شده درخازن C1**

$q_2 = C_2V_2$ **بار ذخیره شده در خازن C2**

$q = C_{eq}V$ **بار ذخیره شده در خازن ها پس از بسته شدن کلید**

بعد از بسته شدن کلید خازن ها با هم موازی می شوند وظرفیت معادل برابراست

با: $C_{eq} = C_1 + C_2$ **بنابراین** $C_1V_1 + C_2V_2 = C_{eq}V = (C_1 + C_2)V$ **در نتیجه:**

$$V = \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}$$

ب:انرژی ذخیرهشده در خازن ها به ترتیب عبارتند از :

انرژی ذخیره شده در خازن C1 قبل از بسته شدن کلید : $W_1(0^-) = \frac{1}{2}C_1V_1^2$

انرژی ذخیره شده در خازن C2 قبل از بسته شدن کلید **:** $W_2(0^-) = \frac{1}{2}C_2V_2^2$

انرژی کلذخیره شده درخازن ها قبل از بسته شدن کلید :

$$W(0^-) = W_1(0^-) + W_2(0^-) = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2$$

انرژی ذخیره شده پس از بسته شدن کلید: $W(0^+) = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V^2$

باید توجه نمود که انرژی ذخیره شده در خازن ها قبل از بسته شدن کلید بیشتر از انرژی ذخیره شده درآن ها پس از بسته شدن کلید است.برای اینکه ساده تر به این مفهوم برسیم قسمت **(ب)را** با فرض $C_1=C_2=C$ وولتاژ اولیه خازن ها برابربا: $V_1=V0$ و $V_2=0$ حل می نماییم **محاسبه.انرژی ذخیره شده در خازن ها قبل از وصل کلید :**

$$W_1(0^-)=\frac{1}{2}CV_0^2 \quad و \quad W_2(0^-)=0 \Rightarrow W(0^-)=W_1(0^-)+W_2(0^-)=\frac{1}{2}CV_0^2$$

محاسبه انرژی خازن ها بعد از بسته شدن کلید:

$$V=\frac{CV_0+0}{2C}=\frac{V_0}{2} \Rightarrow W(0^+)=\frac{1}{2}(C_1+C_2)V^2=\frac{1}{2}(2C)\left[\frac{V_0}{2}\right]^2 \Rightarrow W(0^+)=\frac{1}{4}CV_0^2$$

همانگونه که مشاهده می شود در این حالت انرژی پس ار بسته شدن کلید نصف اثرژی ذخیره شده قبل از بسته شدن کلید است.

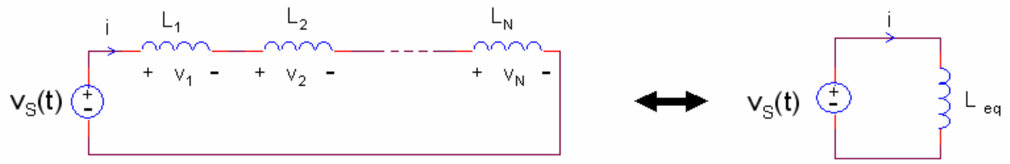
بر مبنای اصل بقاءِ انرژی دو نکته مطرح است اول اینکه چرا انرژی کاهش یافته و دوم اینکه مقدار تفاضل د.و انرژی صرف چه کاری در مدار شده است؟

اگر دقت نماییم متوجه می شویم هنگا می که کلید بسته می شود یک جریان ضربه در مدار ایجاد شده واین جریان با عث متعادل شدن ولتاژ خازن ها درست درلحظه بسته شدن کلید می گردد. و انرژی صرف کار وانتقال بار های الکتریکی در مدار می شود.

3-4- ترکیب سلف ها

دراین مبحث اولاً – بدلیل کاربرد بیشتر سلف های خطی تغییر ناپذیر با زمان در مدار ها ترکیب آن ها را مطرح می کنیم . ثانیاً – فرض می نماییم که سلف ها بر هم اثر القا یی ندارند.

I.)**ترکیب سری سلف ها:** مداری شامل چند سلف خطی با القاگری $L_1, L_2, \cdots, L_N$ که بطور متوالی به یک منبع ولتاژ مطابق شکل (3-19) در نظر می گیریم.



شکل (3-19)

در این مدار با توجه به رابطه ولتاژ و شار مغناطیسی وقوانین جریان ها و ولتاژها داریم:

$$KCL \Rightarrow i_1=i_2=\cdots=i_N=i \qquad و \qquad KVL \Rightarrow v_1+v_2+\cdots+v_N=v_S$$

یا $\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_N=\varphi$

جریان اولیه سلف ها را صفر فرض می کنیم ،با توجه به تعریف سلف بجای شار از رابطه $\varphi=Li$ درمعادله فوران ها مقدار قرار می دهیم :

و

$$i_1(0) = i_2(0) = \cdots = i_N(0) = 0$$

$$\varphi = L_1 i_1 + L_2 i_2 + \cdots + L_N i_N = (L_1 + L_2 + \cdots + L_N) i = L_{eq} i$$

از مقایسه بین معادلات فوق نتیجه می شود :

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_N \quad \text{یا} \quad L_{eq} = \sum_{K=1}^{N} L_K$$

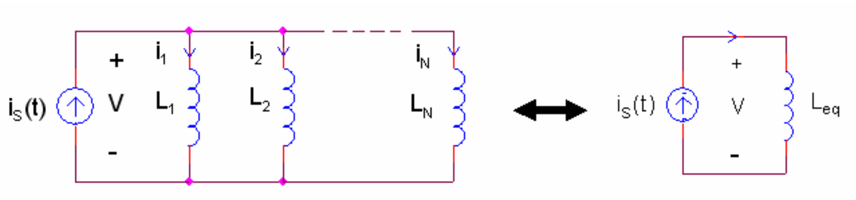
☑ ***ترکیب سری سلف ها در صورتی که کنترل شده با جریان باشند از لحاظ تحلیلی امکان پذیراست .***

☑ *رابطه* $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_N$ *در مورد سلف های متوالی صادق است* ***و اصل بقاء شار (فوران) مغناطیسی*** *نامیده می شود .*

☑ القاگری معادل L_{eq} رامی توان با استفاده از رابطه $v_L = L\frac{di}{dt}$ و KVLبه شرح زیر بر حسب القاگری سلف ها بدست آورد.

$$KVL \Rightarrow v_S = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + \cdots + L_N\frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 + \cdots + L_N)\frac{di}{dt} = L_{eq}\frac{di}{dt}$$

II. (**ترکیب موازی سلف ها :** یک مدار متشکل از چند سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان والقاگری $L_1, L_2 \cdots L_N$ و جریان اولیه صفر مطابق شکل(3-20) که بصورت موازی متصل شده ا ند درنظر می گیریم .



شکل(3-20)

طبق تعریف سلف $\varphi = Li \Leftrightarrow i = \frac{\varphi}{L}$ وبا بکار بردن قوانین جریان ها و ولتاژ ها در مدار نتیجه میگیریم :

$$KCL \Rightarrow i_S = i_1 + i_2 + \cdots + i_N \quad \text{و} \quad i_1(0) = i_2(0) = \cdots = i_N(0) = 0$$

$$KVL \Rightarrow v_1 = v_2 = \cdots = v_N = v \quad \text{یا} \Rightarrow \varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_N$$

$$i_S = \frac{\varphi_1}{L_1} + \frac{\varphi_2}{L_2} + \cdots + \frac{\varphi_N}{L_N} = \frac{\varphi}{L_1} + \frac{\varphi}{L_2} + \cdots + \frac{\varphi}{L_N} = (\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N})\varphi$$

طبق مدار معادل داریم: $i_S = \frac{\varphi}{L_{eq}}$ **از مقا یسه دو رابطه اخیر نتیجه می شود :**

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N} \Leftrightarrow \frac{1}{L_{eq}} = \sum_{K=1}^{N}\frac{1}{L_K}$$

☑ **عکس ضریب القاء را ضریب القاء معکوس گویند وآن را با** $\Gamma = \frac{1}{L}$ **(گاما) نشان می دهند و واحد آن** H^{-1} **(معکوس هانری) است بنابراین در مورد سلف های موازی داریم:** $\Gamma_{eq} = \sum_{K=1}^{N} \Gamma_K$

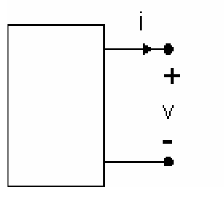
☑ **شرط تعیین سلف معادل در ترکیب موازی به روش تحلیلی اینست که سلف ها کنترل شده با شار(فوران) باشند:$i=g(v)$**

☑ **درصورتی که سلف ها دارای القاگری مساوی باشند می توان از روابط** $L_{eq} = \frac{L}{N}$ **یا** $\Gamma_{eq} = N\Gamma$ **استفاده نمود وبرای تعیین سلف معادل دو سلف موازی داریم :** $L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$

☑ **برای اثبات روابط فوق وتعیین ضریب القاء معادل می توان از رابطه جریان برحسب ولتاژ** $i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L\,dt + i_L(0)$ **وشرایط اولیه صفر استفاده نمود و در KCLجانشین کرد .**

◆ **در پایان این بخش با تعریف *یک قطبی* به تحلیل چند مثال می پردازیم:**

3–4– یک قطبی(*One Port*): شبکه ای است مطابق شکل (3–21) که دو سر خروجی دارد و آنچه در مورد شبکه به عنوان یک قطبی مورد نظر است رابطه بین ولتاژ دو سر (v)و جریان خروجی از شبکه (i) است وطریقه اتصال اجزاو جریان یا ولتاژ شاخه های درون آن مطرح نیست .

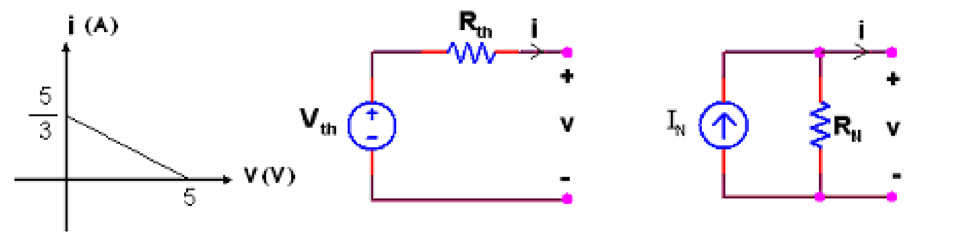


شکل (3-21)

3–5– مثال های تکمیلی

• **مثال(3–7):**یک شبکه یک قطبی شامل منابع نابسته ومنابع وابسته و مقاومت های خطی مفروض است , رابطه بین ولتاژ وجریان آن عبارت است از: $v = 5 - 3i$ **مدار معادل تونن ونورتن یک قطبی را بدست آورده ومشخصه آن را در صفحه (i-v) رسم کنید.**

• **جـــواب: ابتـــدا مـــدارمعادل تـــونن ونـــورتن را رســـم مـــی کنـــیم درمـــدارمعادل تـــونن شکل(3–22–ب) داریم** $v = V_{th} - R_{th} i$ **.حال بامقایسه دو رابطه مدار معادل ویک قطبی نتیجه می گیـریم:** $V_{th} = 5^{VOLTS}, R_{th} = 3^{\Omega}$ **وبـا توجـه بـه روابـط تبـدیل مـدار معـادل تـونن ونـورتن** $I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}} = \frac{5}{3}^{A}, R_N = R_{th} = 3^{\Omega}$ **می شود . مشخصه یک قطبی خط مستقیمی است که در شکل (3–22–ج) با نقاط** $[v=0, i=\frac{5}{3}]$ **و** $[v=5, i=0]$**رسم شده است.**



(ج) **(ب)** **(الف)**

شکل (3–22)

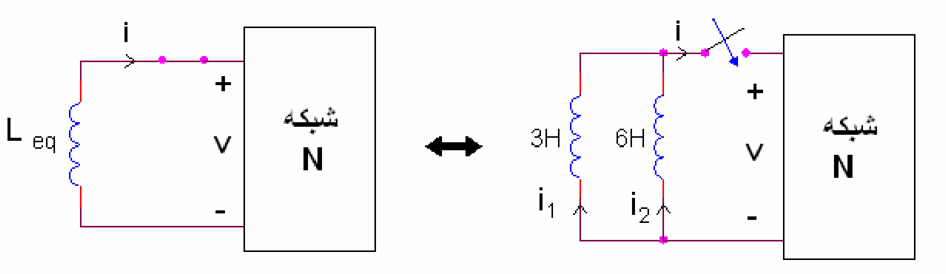
• **مثال(3–8) :** دو سلف موازی با جریان اولیه0 **(i₁(0)=2A)** و **(i₂(0)=4A)** به سر های شبکه یک قطبی (N) مطابق شکل **(3–23–الف)** متصل شده انـد . در صـورتی کـه ولتـاژ بـرای زمـان هـای $t \geq 0$ برابربا $v(t) = 12e^{-t}$ **ولت** باشد :

الف : بجای سلف ها سلف معادلی قرارداده و جریان سلف معادل (i) را برای $t \geq 0$ بدست آورید.

ب : $i_2(t), i_1(t)$ را برای $t \geq 0$ محاسبه کنید.

ج : مقدار انرژی ذخیره شده درهر سلف وانرژی کل را قبل از بسته شدن کلید حساب نمایید.

د: در فاصله زمانی $0 \leq t < \infty$ چقدر انرژی به یک قطبی داده می شود.



(ب) شکل(3-23) (الف)

• جواب:

الف:ضریب القاء معادل برابر است با: $L_{eq}=\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}=\frac{3\times 6}{3+6}=2\text{H}$ **با قرار دادن سلف معـادل مطابق شکل (3-23-ب) ومحاسبه جریان اولیه آن , جریان راحساب می کنیم .**

$$i(0)=i_1(0)+i_2(0)=2+4=6A.i(t)=\frac{1}{L_{eq}}\int_0^t vdt+i(0)\Rightarrow i(t)=\frac{1}{2}\int_0^t(-12e^{-t})dt+6\Rightarrow$$

$$i(t)=\left[\frac{(-12)}{2(-1)}e^{-t}\right]_0^t+6\Rightarrow i(t)=6e^{-t}A$$

:ب:با توجه به معادله جریان برحسب ولتاژ, جریان ها را به ترتیب حساب می نماییم

$$i_1(t)=\frac{1}{3}\int_0^t(-12e^{-t})dt+2=\left[\frac{(-12)}{3(-1)}e^{-t}\right]_0^t+2\Rightarrow i_1(t)=-2+4e^{-t}A$$

$$i_2(t)=\frac{1}{6}\int_0^t(-12e^{-t})dt+4=\left[\frac{(-12)}{6(-1)}e^{-t}\right]_0^t+4\Rightarrow i_2(t)=2+2e^{-t}A$$

ج:

$$W_1(0^-)=\frac{1}{2}L_1i_1^2(0)=\frac{1}{2}\times 3\times 2^2=6J,W_2(0^-)=\frac{1}{2}L_2i_2^2(0)=\frac{1}{2}\times 6\times 4^2=48J$$

$$W(0^-)=W_1(0^-)+W_2(0^-)=6+48=54J$$

د : توان شبکه یک قطبی را از حاصلضرب ولتاژ در جریان آن حسـاب نمـوده وسـپس انـرژی را محاسبه می نماییم . $p_N(t)=v(t)i(t)=(12e^{-t})(6e^{-t})=72e^{-2t}W$

$$W_N(t)=\int_0^t p_N(t)dt=\int_0^\infty 72e^{-2t}dt=\left[\frac{72}{(-2)}e^{-2t}\right]_0^\infty=36$$

مبحث 2–تجزیه وتحلیل مدارهای ساده مقاومتی جریان مستقیم

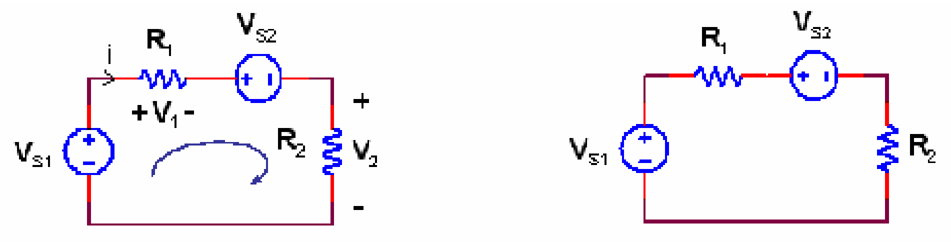
در مبحث دوم از تحلیل مدار ها در این فصل به تحلیل مـدارهای سـاده جریـان مسـتقیم یـک حلقـه ای و دوکره ای پرداخته و سپس روابط تقسیم ولتاژ و تقسیم جریان را به دست می آوریم

3–10–تجزیه وتحلیل مدارهای یک حلقه ای.

تجزیه و تحلیل مدار های یک حلقه ای را با مثال شروع می کنیم :

- **مثال (3–9)**

الف : یک مدار ساده مانند شکل (3–24–الف) در نظر گرفته ، ولتاژها و جریان مدار را به دسـت آورده و توان اجزاء مدار را محاسبه کرده و اصل بقاء انرژی را در مدار تحقیق کنید .



(ب) شکل(3–24) (الف)

تحلیل: در تحلیل مدارها همان طور که قبلاً ذکر گردید دو قانون کیزشهف همواره صادق اند ، بنابراین :

I.) از قانون جریان ها (KCL) به دلیل سری بودن اجزاءِ مدار نتیجه می گیریم ، جریان همه اجزاءِ یکسان و برابر i است .

II.) برای به کار بردن قانون ولتاژها پیرامون حلقه ولتاژهای V_1وV_2 را مطـابق شـکل (3–24–ب) دو سـر مقاومت های R_1 و R_2 فرض می نماییم و سپس با حرکت در جهت عقربه های سـاعت معادلـه KVL را می نویسیم :

$$\begin{cases} KVL \Rightarrow -V_{S1} + V_1 + V_{S2} + V_2 = 0 \\ V_1 = R_1 i \\ V_2 = R_2 i \end{cases}$$

III.) با توجه به قرارداد متناظر و قانون اهم ولتاژ مقاومت ها را بر حسب جریان i مشخص مـی کنـیم و بـا جای گذاری در معادله KVL ، یک معادله یک مجهولی حاصل می شـود و بـا حـل آن جریـان مـدار بـه دست می آید .

$$-V_{S1} + R_1 i + V_{S2} + R_2 i = 0 \Rightarrow (R_1 + R_2)i = V_{S1} - V_{S2}$$

$$i = \frac{V_{S1} - V_{S2}}{R_1 + R_2}$$

نتایج حاصل از تحلیل فوق تا این مرحله عبارتند از :

1) با استفاده از قانون جریان ها و انتخاب جریان فرضی i با جهت مشخص ، می توان قانون ولتاژها را در یک مرحله نوشت :

$$-V_{S1}+R_1 i+V_{S2}+R_2 i=0 \Rightarrow (R_1+R_2)i=V_{S1}-V_{S2}$$

$$i=\frac{V_{S1}-V_{S2}}{R_1+R_2}$$

2) جهت i یا پلاریته ولتاژها فرضی می باشند . در مورد جریان i حاصل از هر کدام از حالات فوق دو وضعیت امکان پذیر است :

a. اگر $V_{S2}>V_{S1}$ باشد ، $i>0$ می شود و جهت فرضی صحیح است.

b. اگر $V_{S2}<V_{S1}$ باشد ، $i<0$ می شود و جهت فرضی خلاف جهت اصلی است و در این حالت مقدار i تغییر نمی کند ، فقط علامت آن صحیح نیست .

3) ولتاژدو سر مقاومت ها از روابط $V_{R_1}=R_1 i$ و $V_{R_2}=R_2 i$ به دست می آیند و علامت ولتاژها بستگی به علامت جریان i دارد .

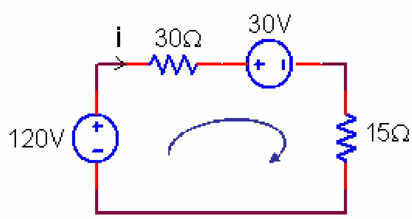
IV.) **محاسبه توان اجزاء مدار:** پس از تعیین جریان ها و ولتاژها با فرض $i>0$ یا $V_{S2}>V_{S1}$ توان اجزاء را حساب می کنیم :

توان مقاومت ها همواره مثبت است $P_{R_1}=R_1 i^2>0$ و $P_{R_2}=R_2 i^2>0$

منبع V_{S2} توان را جذب می نماید: $P_{V_{S2}}=V_{S2}i>0$

منبع V_{S1} انرژی دهنده است: $P_{V_{S1}}=-V_{S1}i<0$

ب: در صورتی که $V_{S1}=120v$ و $V_{S2}=30v$ **و مقاومت ها** $R_1=30\Omega$ و $R_2=15\Omega$ **باشند، مجدداً مدار را تحلیل کنید** . (شکل (3-25))



شکل(2-25)

تحلیل : ابتدا جریان i را در مدار فرض می کنیم و سپس قانون ولتاژها را (درجهت عقربه های ساعت) به کار می بریم :

$$30i+30+15i-120=0 \Rightarrow (30+15)i=120-30 \Rightarrow 45i=90$$

$$i = \frac{90}{45} = 2A$$
$$V_{30\Omega} = R_1 i = 30 \times 2 = 60v$$
$$V_{15\Omega} = R_2 i = 15 \times 2 = 30v$$

محاسبه توان :

$$P_{30\Omega} = R_1 i^2 = 30 \times 2^2 = 120w$$
$$P_{15\Omega} = R_2 i^2 = 15 \times 2^2 = 60w$$

با توجه به اینکه ولتاژ و جریان در منبع V_{S2} متناظرند :

$$P_{30v} = V_{S2} i = 30 \times 2 = 60w$$

با توجه به اینکه ولتاژ و جریان در منبع V_{S1} متناظر نیستند :

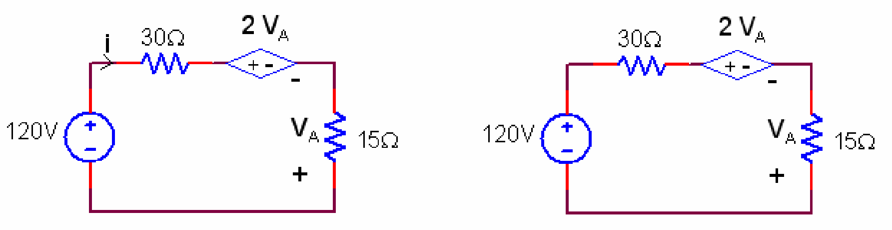
$$P_{120\,v} = -V_{S1} i = -120 \times 2 = -240\,w$$

و با کاربرد اصل بقاءِ انرژی داریم :

$$120 + 60 + 60 - 240 = 0$$

مثال(3–10)

در مدار یک حلقه ای شکل (3-26-الف) که شامل یک منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ (V_A) می باشد ، جریان و ولتاژها و توان اجزاءِ مدار را به دست آورید و اصل بقاءِ انرژی را تحقیق کنید .



(ب) شکل (2-26) (الف)

جواب :

I.) ابتدا برای مدار با توجه به KCL یک جریان فرضی در جهت خارج شدن از منبع 120v در نظر می گیریم (شکل (3-26-ب))

II.) قانون ولتاژها را به کار برده و یکی از معادلات (1) یا(2) را می نویسیم :

$$(1) \Rightarrow 30i + 2V_A - V_A - 120 = 0$$
$$(2) \Rightarrow 30i + 2V_A + 15i - 120 = 0$$

III.) از آنجا که با معادله KVL (1) یا (2) به تنهایی نمی توان مسئله را حل نمود و به دلیل منبع وابسته , متغیر V_A (عامل کنترل منبع وابسته) به متغیر مدار i اضافه شده است ، رابطه دیگری

مورد نیاز است . همان طور که مشاهده می شود رابطه ای که می توان نوشت ، عبارتست از رابطه عامل کنترل منبع وابسته (V_A) با متغیر مدار i یعنی $V_A = -15i$

IV.)حال دستگاه :

$$\begin{cases}30i + 2V_A - V_A - 120 = 0 \\ V_A = -15i\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}30i + 2V_A + 15i - 120 = 0 \\ V_A = -15i\end{cases}$$

را حل می نماییم . $i = 8A$ می شود (جهت فرضی جریان صحیح بوده است.)

V.) ولتاژ دو سر مقاومت ها به ترتیب برابر است با :

$$V_{30\Omega} = 30 \times 8 = 240v$$

$$V_{15\Omega} = 15 \times 8 = 120v$$

$$2V_A = 2(-15i) = 2(-15 \times 8) = -240v$$ ولتاژ منبع ولتاژ وابسته

توان اجزاءِ مدار :

$$P_{30\Omega} = 30i^2 = 30 \times 8^2 = 1920w$$

$$P_{15\Omega} = 15i^2 = 15 \times 8^2 = 960w$$

توان منبع $120v$ با توجه به قرارداد متناظر : $P_{120v} = -120 \times 8 = -960w$

توان منبع وابسته $2V_A$ با توجه به قرارداد متناظر : $P_{2V_A} = (2V_A)i = (-240) \times 8 = -1920w$

نتیجه:

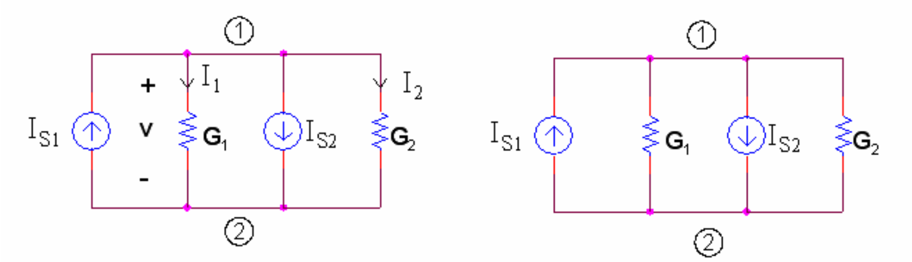
$$1920 - 1920 + 960 - 960 = 0$$

نتایج حاصل از تحلیل مدار یک حلقه ای مثال(3-9و10) :

1. در هر دو مدار مقاومت های 30Ω و 15Ω با هم سری هستند، اما در مثال(3-10)به دلیل اینکه ولتاژ دو سر مقاومت 15Ω عامل کنترل منبع وابسته (V_A) است ، ترکیب مقاومت ها ی فوق در تحلیل امکان ندارد ..
2. همان طور که از مثال (3-10) نتیجه می شود، منبع وابسته $2V_A$ انرژی دهنده است و مقدار منبع وابسته $2V_A$ بستگی به شرایط مدار دارد و در صورتی که مقدار منبع $120V$ یا مقاومت 30Ω تغییر نماید مقدار منبع وابسته تغییر می کند در صورتی که در مثال (3-9) هر گونه تغییر در مقادیر فوق الذکر درمقدار منبع نابسته $30V$ تاثیری ندارد.

3-11- تجزیه وتحلیل مدار های دو گره ای

- **مثال (3-11) : مداری مطابق شکل (3-27-الف)که شامل منابع جریان I_{S1} وI_{S2} ورسانایی های $G1$ و G_2 است درنظر بگیرید.**



(ب) شکل(3-27) (الف)

الف:ولتاژ وجریان شاخه های مدار را بدست آورید و سپس توان همه اجزاء را محاسبه نمـوده واصل بقاء انرژی را تحقیق کنید.

تحلیل: با استفاده از قوانین کیریشهف تحلیل را آغاز می کنیم:

I. **قانون ولتاژ ها (KVL)**:این قانون بیانگر این مطلب است که ولتاژ دو سر کلیه اجزاءِ مساوی و برابر (V) می باشد.

II. **قانون جریان ها (KCL)** :همانگونه که در مبحث تعریف و کاربرد قانون جریان ها گفته شد برای یکی از گره ها مثلاً گره (1) وبا انتخاب جریان های فرضی $I_2 . I_1$ برای شاخه های مقاومتی مطابق شکل (3-26-ب)وکاربرد قرار داده , KCL می نویسیم.

$$KCL(1) \Rightarrow -I_{S1} + I_1 + I_{S2} + I_2 = 0$$

III. با توجه به قرار داد متناظر وبا استفاده از قانون اهم جریان شاخه های مقاومتی را برحسب ولتاژ حساب می نماییم .نتیجتاً دستگاه معادلات زیر را حل نموده و ولتاژ V را محاسبه می کنیم.

$$\begin{cases} -I_{S1} + I_1 + I_{S2} + I_2 = 0 \\ I_1 = G_1 V \\ I_2 = G_2 V \end{cases} \Rightarrow -I_{S1} + G_1 V + I_{S2} + G_2 V = 0 \Rightarrow (G_1 + G_2)V = I_{S1} - I_{S2}$$

$$V = \frac{I_{S1} - I_{S2}}{G_1 + G_2}$$

IV. جریان مقاومت ها را بعـداز محاسـبه ولتـاژ V از روابـط $I_{G1} = G_1 V$ و $I_{G2} = G_2 V$ بدسـت مـی آوریم .

قبل از ادامه تحلیل به چند نکته اشاره می نما ییم .

☑ **با توجه به بند های I وIII تحلیل می توان نتیجه گرفت که در تحلیل مدار های دو گره ای ابتدا ولتاژ v را با قطبین مشخص فرضی به عنوان متغیر انتخاب و KCL را بطور مستقیم با استفاده از قانون اهم نوشت.**

$$KCL(1) = -I_{S1} + G_1 V + I_{S2} + G_2 V = 0 \Rightarrow (G_1 + G_2)V = I_{S1} - I_{S2} \Rightarrow V = \frac{I_{S1} - I_{S2}}{G_1 + G_2}$$

☑ **در هر صورت علامت مثبت یا منفی ولتاژ V بستگی به جریان های I_{S2}, I_{S1} دارد . درصورتیکه : $I_{S1} > I_{S2} \Leftarrow V > 0$ و $I_{S1} < I_{S2} \Leftarrow V < 0$ ودر هر حالت مقدار ولتاژ یکسان است و علامت جریان ها نیز مطابق علامت ولتاژ است.**

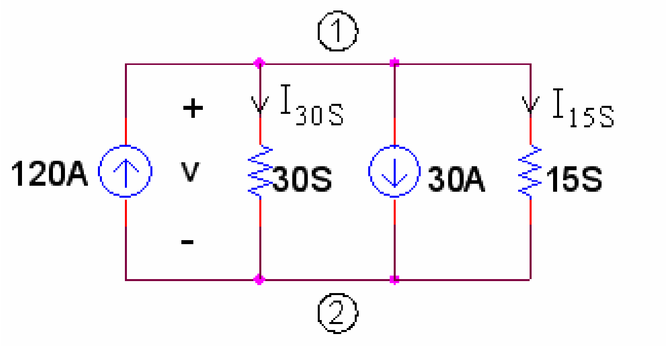
V.) پس از تعیین ولتاژ وبا فرض $V > 0$ توان اجزاء مدار را محاسبه می کنیم.

توان مقاومت ها همواره مثبت است . $P_{G2} = G_2V^2 > 0$ **و** $P_{G1} = G_1V^2 > 0$

باتوجه به قرار داد متناظر منبع I_{S2} توان جذب می کند $P_{IS2} = I_{S2}V > 0$

منبع I_{S1} توان به مدار تحویل می دهد $P_{IS1} = -I_{S1}V < 0$

ب: در صورتیکه $I_{S2} = 30A, I_{S1} = 120A$ و $G_2 = 15S, G_1 = 30S$ باشند، تحلیل را تکرار کنید .



شکل (3-28)

جواب :

I.) ابتدا ولتاژ v را با قطبین مشخص شده در شکل (3-28) فرض می نماییم و برای گره (1) ، KCL می نویسیم و ولتاژ را محاسبه می کنیم :

$$\mathrm{KCL(1)} \Rightarrow -120 + 30\mathrm{V} + 30 + 15\mathrm{V} = 0 \Rightarrow (30+15)\times \mathrm{V} = 120 - 30$$

$$\mathrm{V} = \frac{90}{45} = 2\mathrm{v}$$

II.) با توجه به قرارداد متناظر جریان شاخه های مقاومتی را حساب می کنیم :

$\mathrm{I}_{30S} = 30\mathrm{V} = 30\times 2 = 60\mathrm{A}$ و $\mathrm{I}_{15S} = 15\mathrm{V} = 15\times 2 = 30\mathrm{A}$

III.)توان اجزاء را حساب می کنیم :

$\mathrm{P}_{30S} = \mathrm{GV}^2 = 30\times 2^2 = 120\mathrm{W}$ و $\mathrm{P}_{15S} = \mathrm{GV}^2 = 15\times 2^2 = 60\mathrm{W}$

$\mathrm{P}_{30A} = \mathrm{VI}_S = 2\times 30 = 60\mathrm{W}$ **و** $\mathrm{P}_{120A} = -2\times 120 = -240\mathrm{W}$

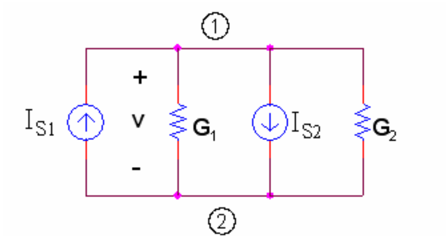
همان گونه که مشاهده می شود اصل بقاءِ انرژی صادق است :

$$120 + 60 + 60 - 240 = 0$$

3-12-آشنایی با دوگانی(Duality)

اگر تجزیه و تحلیل مثال (3-9) مدار یک حلقه ای و مثال (3-11)مدار دو گره ای را یک بار دیگر مرور و مقایسه کنیم :

با فرض ولتاژ v :



$$KCL(1) \Rightarrow -I_{S1} + G_1 v + I_{S2} + G_2 v = 0$$

$$v = \frac{I_{S1} - I_{S2}}{G_1 + G_2}$$

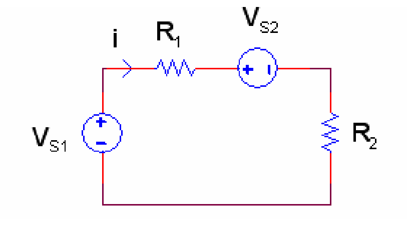
با فرض مقادیر داده شده :

$$v = \frac{120-30}{30+15} = 2v$$

$$I_1 = 30 \times 2 = 60A$$

$$I_2 = 15 \times 2 = 30A$$

با فرض جریان i :



$$KVL \Rightarrow -V_{S1} + R_1 i + V_{S2} + R_2 i = 0$$

$$i = \frac{V_{S1} - V_{S2}}{R_1 + R_2}$$

با فرض مقادیر داده شده :

$$i = \frac{120-30}{30+15} = 2A$$

$$V_1 = 30 \times 2 = 60v$$

$$V_2 = 15 \times 2 = 30v$$

مشاهده می شود که این دو مدار (یک حلقه ای و دو گره ای) دارای معادلات مشـابه (بـا متغیرهـای متقابل) هستند ، به طوری که ولتاژ جانشین جریان و رسانایی (G) جانشین مقاومت (R) شده است و در شرایطی که $(R_1$ و $G_1)$، $(R_2$ و $G_2)$، $(V_{S1}$ و $I_{S1})$، $(V_{S1}$ و $I_{S1})$ از لحاظ مقـدار برابـر هسـتند ، پاسخ های مدار از لحاظ مقدار یکسان ولی دارای دیمانسیون خلاف هم می باشند .

این دو مدار را دوگان (Duals) هم گویند .

در مورد مدارهای دوگان شرایط زیر برقرار است :

اجزاء و متغیرهای مدار دوگان	اجزاء و متغیرهای مدار
ولتاژ	جریان
جریان	ولتاژ
بارالکتریکی	شار (فوران) مغناطیسی
شار (فوران) مغناطیسی	بارالکتریکی
رسانایی	مقاومت
مقاومت	رسانایی
خازن	سلف
سلف	خازن
منبع ولتاژ	منبع جریان
منبع جریان	منبع ولتاژ
موازی	سری
سری	موازی
اتصال کوتاه	مدار باز
مدار باز	اتصال کوتاه
مش	گره
گره	مش

تعریف (مش) mesh : حلقه ای را که شاخه ای درون آن قرار نگرفته باشد ، مش گویند .

☑ هرگاه دو شبکه دوگان هم باشند، اگر یکی از شبکه ها تحلیل شود ، می توان پاسخ شبکه دوگان آن را نیز با توجه به شرایط دوگانی معلوم کرد .

به طور مثال ، برای ولتاژ **سلف** رابطه $v_L = L\dfrac{di_L}{dt}$ برقرار است ، با توجه به شرایط دوگانی در جدول مشخص می شود که برای **خازن** که عنصر دوگان سلف است ،

$i_C = C\dfrac{dv_C}{dt}$ زیرا :

$v_L \xrightarrow{\text{Ïæ Qä}} i_C$

$L \longrightarrow C$

$i_L \longrightarrow v_C$

مثال دیگر، رابطه **"خازن معادل در ترکیب خازن های سری"** و دوگان آن رابطه **"سلف معادل سلف های موازی"** است . با توجه به رابطه خازن معادل $\dfrac{1}{C_{eq}} = \sum_{K=1}^{N}\dfrac{1}{C_K}$

و با استفاده از شرایط و متغیرهای دوگان ، داریم :

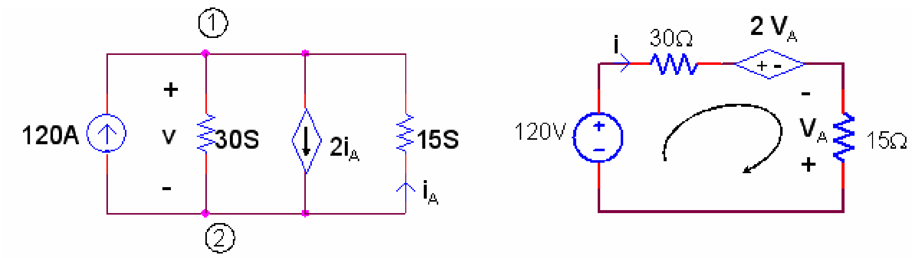
سري $\xrightarrow{\text{دوگان}}$ موازي

خازن $\xrightarrow{\text{دوگان}}$ سلف

$$\frac{1}{L_{eq}}=\sum_{K=1}^{N}\frac{1}{L_K}$$

مثال(3-12)

مدار یک حلقه ای شکل (3- 29-الف) را در نظر گرفته ، مدار دوگان آن را رسم نمـوده و آن را تجزیه و تحلیل نمایید .



(ب) شکل(3-29) (الف)

جواب :

I. رسم مدار دوگان :

در مدار یک حلقه ای کلیه اجزاءِ سری هستند ، پس در مدار دوگان آن همـه اجـزاءِ بایـد موازی باشند ، بنابراین مدار دوگان یک مدار دو گره ای مطابق شـکل (3- 29-ب) اسـت ، زیرا مطابق دوگانی داریم :

منبع جریان $120\text{A} \xrightarrow{\text{دوگان}}$ منبع ولتاژ 120v

متغیر $\text{v} \xrightarrow{\text{دوگان}}$ متغیر i

منبع جریان $2\text{i}_\text{A} \xrightarrow{\text{دوگان}}$ منبع ولتاژ 2v_A

عامل کنترل $\text{i}_\text{A} \xrightarrow{\text{دوگان}}$ عامل کنترل v_A

و دوگـان مقاومـت هـا نیـز رسـانایی هـا یـی اسـت بـا همـان مقـدار عـددی. ***و واحـد رسانایی (*** $S=\frac{1}{\Omega}=\text{mh}0$ ***)زیمنس است***

II. تجزیه و تحلیل مدار دوگان :

KCL را در مورد مدار دوگره ای به دو فـرم b و a مـی نویسـیم و سـپس رابطـه عامـل کنترل منبع وابسته i_A را با متغیر مدار v می نویسیم :

$$\begin{cases}\text{a})-120+30\text{V}+2\text{i}_\text{A}-\text{i}_\text{A}=0\\ \text{i}_\text{A}=-15\text{V}\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\text{b})-120+30\text{V}+2\text{V}_\text{A}+15\text{V}=0\\ \text{i}_\text{A}=-15\text{v}\end{cases}$$

حال هر کدام از دستگاه ها را که تحلیل کنیم به جواب زیر می رسیم :

$$120=30\text{V}+(-15\text{V})\Rightarrow \text{V}=\frac{120}{30-15}=8\text{v}$$

$I_{30S} = 30\times 8 = 240A$ $\qquad I_{15S} = 15\times 8 = 120A$

$i_A = -I_{15S} = -120A$ $\qquad$ منبع $2i_A = 2(-120) = -240A$

$P_{15S} = 15\times 8^2 = 960w$

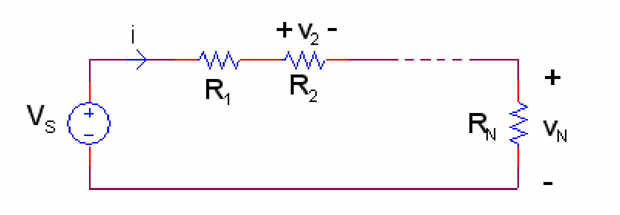
$P_{30S} = GV^2 = 30\times 8^2 = 1920w$

با توجه به قرارداد متناظر توان منبع $120A \Leftarrow$ $\qquad P_{120A} = -120\times 8 = -960w$

با توجه به قرارداد متناظر توان منبع $2i_A \Leftarrow$ $\qquad P_{2i_A} = 2i_A \times V = (-240)\times 8 = -1920w$

3-13- تقسیم ولتاژ Voltage Division

هر گاه در یک مدار مانند شکل (3-30) تعدادی مقاومت با هم سری شده باشند و بخواهیم ولتـاژ دو سـر مقاومت های R_2 و R_N را محاسبه کنیم ، مشاهده می شود که این مدار یک حلقـه ای اسـت و بـا انتخاب جریان i بدین طریق عمل می کنیم .



شکل(3-30)

I.)برای حلقه در جهت عقربه های ساعت KVL می نویسیم .

$$-V_S + R_1 i + R_2 i + \ldots + R_N i = 0$$

$$(R_1 + R_2 + \ldots + R_N)i = V_S \quad \Rightarrow i = \frac{V_S}{R_1 + R_2 + \ldots + R_N}$$

$$V_2 = R_2 i = \frac{R_2 V_S}{R_1 + R_2 + \ldots + R_N}$$

$$V_N = R_N i = \frac{R_N V_S}{R_1 + R_2 + \ldots + R_N}$$

از روابط حاصل از محاسبه V_2 و V_N نتایج زیر حاصل می شود .

1) ولتاژ کل (V_t) دو سر چند مقاومت سری بین مقاومت ها تقسیم می شود .

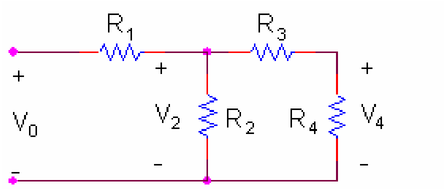
2) ولتاژ دو سر هر یک از مقاومت ها مانند مقاومت K ام برابر است با :

$$V_K = \frac{R_K V_t}{\sum_{K=1}^{N} R_K}$$

$$\text{ولتاژ شاخه } k\text{ام} = \frac{(\text{ولتاژ کل دو سر مقاومت ها})\,(\text{مقاومت شاخه } k\text{ام})}{\text{مجموع مقاومت های سری}}$$

مثال(3-13) : در مدار شکل (3-31) با استفاده از روش تقسیم ولتاژ ، ولتاژ دو سر مقاومت R_2 را بدست آورده و سپس ولتاژ دو سر مقاومت R_4 را حساب کنید .

کلیه مقاومت ها برابر 1Ω و $V_0=10V$ است .



شکل (3-31)

جواب : دو مقاومت R_3 و R_4 با هم سری و با مقاومت R_2 موازی هستند ، بنابراین :

$$R' = \frac{(R_3+R_4)R_2}{R_3+R_4+R_2} = \frac{(1+1)\times 1}{3\times 1} = \frac{2}{3}\Omega$$

با توجه به تقسیم پتانسیل (ولتاژ) :

$$V_2 = \frac{R'V_0}{R'+R_1} = \frac{\frac{2}{3}\times 10}{\frac{2}{3}+1} = 4V$$

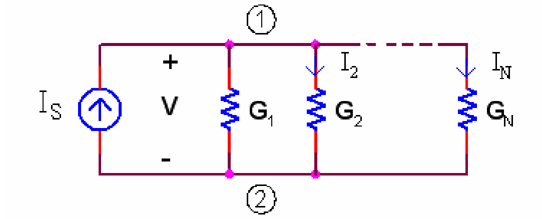
V_2 نیز ولتاژ دو سر ترکیب R_3 و R_4 است ، بنابراین:

$$V_4 = \frac{R_4V_2}{R_3+R_4} = \frac{1\times 4}{1+1} = 2V$$

3-14- تقسیم جریان (Current Division):

مدار شکل (3-32) که از اتصال موازی چند رسانایی تشکیل شده است .

جریان شاخه G_2 و G_N را بدست آورید .



شکل (3-32)

جواب :

الف : با استفاده ازنظریه دوگانی مشاهده می شود مدار شکل (3-32) دوگـان مـدار سـری شـکل (3-30) است . درنتیجه جریان شاخه های مقاومتی در مدار دوگان برابراند با :

$$I_2 = \frac{G_2 I_S}{G_1 + G_2 + \ldots + G_N} \qquad\qquad I_N = \frac{G_N I_S}{G_1 + G_2 + \ldots + G_N}$$

ب: با توجه به اینکه مدار دو گره ای است ولتاژ (V) را دو سر اجزاءِ فـرض مـی کنـیم و KCL گـره (1) را می نویسیم :

$$KCL(1) \Rightarrow G_1 v + G_2 v + \ldots + G_N v = I_S$$

$$v = \frac{I_S}{G_1 + G_2 + \ldots + G_N}$$

$$I_2 = G_2 v = \frac{G_2 I_S}{G_1 + G_2 + \ldots + G_N}$$

$$I_N = G_N v = \frac{G_N I_S}{G_1 + G_2 + \ldots + G_N}$$

از تحلیل مدار فوق نتیجه می شود .

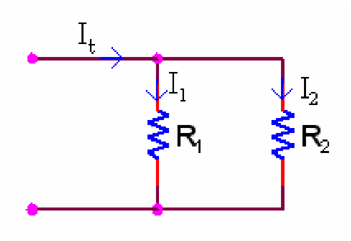
- ☑ جریان کل (I_t) بین مقاومت های موازی تقسیم می گردد .
- ☑ جریان هر شاخه مقاومتی (I_R) از رابطه زیر بدست می آید :

$$I_K = \frac{G_K I_t}{\sum_{K=1}^{N} G_K}$$

جریان شاخه Kام = (جریان کل) (رسانایی شاخهK ام) / مجموع رسانایی های موازی

- ☑ در صــورتیکه تعــداد شــاخه هــای مــوازی دو شــاخه باشــد مطــابق شــکل (3-33) و مقاومت ها بر حسب R (اهم) داده شده باشند

در این صورت روابط تقسیم جریان عبارتند از :



شکل(3-33)

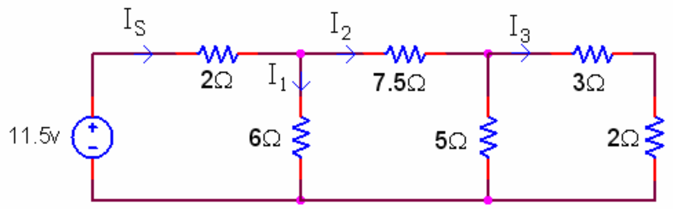
$$I_1 = \frac{R_2 I_t}{R_1 + R_2} \quad \text{و} \quad I_2 = \frac{R_1 I_t}{R_1 + R_2}$$

زیرا :

$$I_1 = \frac{G_1 I_t}{G_1 + G_2} = \frac{\frac{1}{R_1} I_t}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \Rightarrow \quad I_1 = \frac{R_2 I_t}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = \frac{G_2 I_t}{G_1 + G_2} = \frac{\frac{1}{R_2} I_t}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \Rightarrow \quad I_2 = \frac{R_1 I_t}{R_1 + R_2}$$

مثال(3–14) : با استفاده از روش تقسیم جریان در شکل (3-34) جریان های I_1 و I_2 و I_3 را به ترتیب بدست آورید .



شکل(3-34)

جواب : برای محاسبه I_1 مقاومت معادل را به شرح زیر حساب می کنیم .

$$R_1 = 2 + 3 = 5\Omega$$

$$R_2 = 5 \,||\, R_1 + 7.5 = \frac{5}{2} + 7.5 = 10\Omega$$

$$R_3 = 6 \,||\, R_2 = \frac{6 \times 10}{6 + 10} = \frac{60}{16} = \frac{15}{4} = 3.75$$

$$Is = \frac{11.5}{2 + 3.75} = \frac{11.5}{5.75} = 2A$$

حال با توجه به تقسیم جریان :

$$I_1 = \frac{R_2 \times I_S}{R_2 + 6} = \frac{10 \times 2}{10 + 6} = \frac{5}{4} A$$

$$I_2 = \frac{6 \times I_S}{R_2 + 6} = \frac{6 \times 2}{10 + 6} = \frac{12}{16} = 0.75A$$

با توجه به مساوی بودن مقاومت R_1 با 5 اهم :

$$I_3 = \frac{I_2}{2} = \frac{3/4}{2} = \frac{3}{8} = 0.375A$$

مبحث ۳- روش های تحلیل مدار

تالیف وتدوین : مهدی حاجی پور

همان طورکه در دومبحث گذشته در یافتیم مسئله اصلی تحلیل, قوانین جریان وولتاژ کیریشهف هستندکه با متغیر جریان یا ولتاژ شاخه مدار معادلات KCL یا KVL نوشته وحل می شدند اما به دلیل ساده بودن مدار ها تعداد گره ها و حلقه ها درنتیجه تعداد معادلات هم کم می باشند .در صورتی که برای مدارهای با تعدادگره وحلقه های زیاد فقط استفاده از KCL یا KVL راه مناسبی نیست در نتیجه روشهای تحلیلی مدار نیز بر اساس همان قوانین مطرح ودارای اهمیت هستند و با عث نظم وترتیب درتحلیل وکاهش معادلات میگردند. بنابراین در این مبحث روش های تحلیل گره ,تحلیل مش, قضیه جمع اثر(برهمنهی) وقضایای تونن ونورتن در مدارهای مقاومتی جریان مستقیم ارائه می شود.

۳-۲۰- روش تحلیل گره (Nodal Analysis)

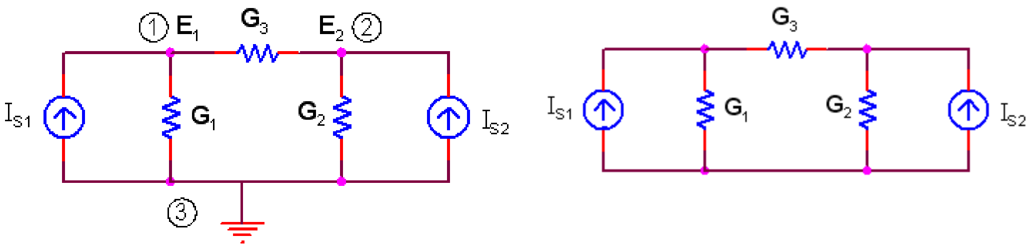
همان گونه که ازعنوان روش برمیآید در این روش تحلیلی گره های مدار مطرح ومورد توجه هستندواز طرف دیگر قانون جریان ها در گره ها ی مدار صادق است.بنابراین در این روش تحلیلی:

I.) **ابتدا گره های مدار را مشخص واز ۱تاn شماره گذاری می نماییم و برای (n-1) گره با استفاده از قانون جریان ها (KCL) ,معادله می نویسیم برای این که دستگاه معادلات حاصل نا بسته باشد.**

II.) **در روش تحلیل گره *پتانسیل گره (ولتاژگره)* به عنوان متغیر انتخاب می شود وولتاژگره عبارت است ازاختلاف پتانسیلی که یک گره نسبت به یک گره دیگر که به عنوان *گره مبنا*(مرجع) با پتانسیل صفر فرض شده را دارا است. بنابراین در یک مدار با n گره , (n-1) پتانسیل گره مانند $(E_n,\cdots E_2,E_1)$ فرض می شود به همین دلیل این روش را *روش پتانسیل گره* هم می گویند.**

III.) **برای آشنائی تحلیل مدار با روش گره چند مدار ساده را تجزیه وتحلیل می کنیم.**

الف) مداری با سه گره که شامل سه رسانایی ودو منبع نابسته جریان مانند شکل (۳-۳۵- الف) در نظر می گیریم ومطابق شکل (۳- ۳۵ - ب) گره ها را شماره گذاری نموده گره ۳ را به عنوان گره مبنا انتخاب وبرای گره های ۱و۲ پتانسیل (ولتاژ) E_1 وE_2 را نسبت به مبنا فرض می کنیم.



(ب) شکل(۳-۳۵) (الف)

- **برمبنای قرارداد متناظر وقانون اهم برای گره های ۱و۲ بامتغیر های** E_2,E_1 **معادلات KCL را می نویسیم**

$$\begin{cases} KCL(1) \Rightarrow -I_{S1} + G_1E_1 + G_3(E_1 - E_2) = 0 \\ KCL(2) \Rightarrow -I_{S2} + G_2E_2 + G_3(E_2 - E_1) = 0 \end{cases}$$

در این معادلات براساس قرار داد KCL:

مقدار جریان های خارج شده از گـره ۱ بـه ترتیـب در شـاخه هـای G_3,G_1 **برابراسـت بـا :** G_1E_1 و $G_3(E_1 - E_2)$

مقدار جریان های خارج شده از گره۲بـه ترتیـب در شـاخه هـای G_3,G_2 **برابراسـت بـا:** G_2E_2 و $G_3(E_2 - E_1)$

- **حال دستگاه معادلات را مرتب وحل می نماییم و پتانسیل گره ها را محاسبه می کنیم :**

$$\begin{cases} (G_1+G_3)E_1 - G_3E_2 = I_{S1} \\ -G_3E_1 + (G_2+G_3) = I_{S2} \end{cases} \Rightarrow E_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_{S1} & -G_3 \\ I_{S2} & (G_2+G_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (G_1+G_3) & -G_3 \\ -G_3 & (G_2+G_3) \end{vmatrix}}, E_2 = \frac{\begin{vmatrix} (G_1+G_3) & I_{S1} \\ -G_3 & I_{S2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (G_1+G_3) & -G_3 \\ -G_3 & (G_2+G_3) \end{vmatrix}}$$

$$E_2 = \frac{(G_1+G_3)I_{S2} + G_3I_{S1}}{(G_1+G_3)(G_2+G_3) - G_3^2} \quad \text{و} \quad E_1 = \frac{(G_2+G_3)I_{S1} + G_3I_{S2}}{(G_1+G_3)(G_2+G_3) - G_3^2}$$

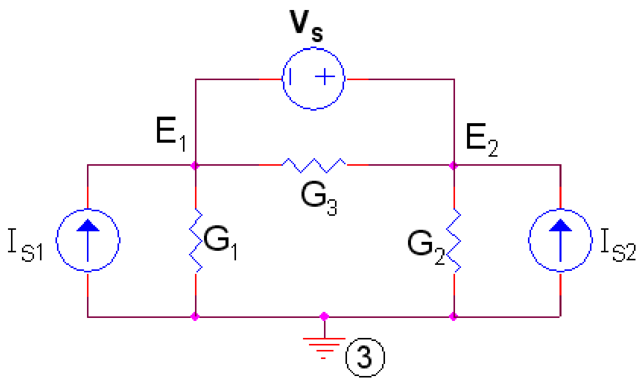
با مشخص شدن پتانسیل گره ها (E_2,E_1) می توان کلیه جریان و ولتاژ شاخه های مدار را تعیـین کـرد. به طوری که :

- **ولتاژ شاخه** G_1 **و منبع** I_{S1} **برابر** E_1 **است.**
- **ولتاژ شاخه** G_2 **و منبع** I_{S2} **برابر** E_2 **است.**
- **ولتاژ شاخه** G_3 **نیز با توجه به جهت شاخه برابراست با :** $(E_1 - E_2)$ **یا** $(E_2 - E_1)$
- **جریان شاخه** G_1 **برابر** G_1E_1 **وهم جهت با** E_1 **می باشد .**
- **جریان شاخه** G_2 **برابر** G_2E_2 **وهم جهت با** E_2 **می باشد .**

o **جریان شاخه G_3 نیز با توجه به جهت شاخه برابراست با:** $(E_1 - E_2)\ G_3$ **یا** $(E_2 - E_1)\ G_3$

اما مدار شکل (۳-۳۵)که تحلیل شد مداری با اجزا ء محدود مانند رسانایی ومنبع جریان است .در صورتی که اجزاءِ دیگری مانند منبع ولتاژ در مدار باشد باید چگونگی تحلیل را بررسی کرد.

ب: مدار شکل (۳-۳۶) را که علا وه بر اجزاءِ مدار قبل شا مل منبع ولتاژ V_Sاست به روش گره تحلیل می نماییم. این مدار نیز دارای سه گره است.



شکل (۳-۳۶)

- گره های مدار را مشخص وگره ۳ را به عنوان گره مبنا انتخاب نموده و برای گره های ۱و ۲ ولتاژ های E_2, E_1 را در نظر می گیریم .
- در این مدار برای نوشتن KCL هر یک از گره ها به مسئله نا معین بودن جریان شاخه منبع ولتاژ برخورد می کنیم .بنابراین جریان I_X را به عنوان جریان منبع ولتاژ فرض نموده ومعادلات KCLگره ها را می نویسیم .

$$\begin{cases} KCL(1) \Rightarrow -I_{S1} + G_1E_1 + G_3(E_1 - E_2) + I_X = 0 & \text{(I) معادله} \\ KCL(2) \Rightarrow -I_{S2} + G_2E_2 + G_3(E_2 - E_1) - I_X = 0 & \text{(II) معادله} \end{cases}$$

- به دلیل سه متغیر (I_X, E_2, E_1) دستگاه دو معادله وسه مجهول قابل حل و تعیین متغیرها نمی باشد و لازم است که معادله سومی به دستگاه اضافه شود .

معادله KCL دیگری نمی توان نوشت ، بنابراین رابطه پتانسیل گره ها (متغیرهای مدار) و ولتاژ منبع ولتاژ نیز به عنوان معادله سوم اضافه می گردد.

که با حل دستگاه مقابل E_1 و E_2 در صورت لزوم I_X به دست می آیند .

$$\begin{cases} -I_{S1} + G_1E_1 + G_3(E_1 - E_2) + I_X = 0 & (I)\ \text{معادله} \\ -I_{S2} + G_2E_2 + G_3(E_2 - E_1) - I_X = 0 & (II)\ \text{معادله} \\ E_2 - E_1 = V_S & (III)\ \text{معادله} \end{cases}$$

اگر دو معادله (I) و (II) را با هم جمع کنیم ، I_X حذف می شود ورابطه ای به صورت معادلـه (IV) نتیجـه می شود :

$$\begin{cases} -I_{S1}+G_1E_1+G_2E_2-I_{S2}=0 & (IV)\ \text{معادله} \\ E_2-E_1=V_S & (III)\ \text{معادله} \end{cases}$$

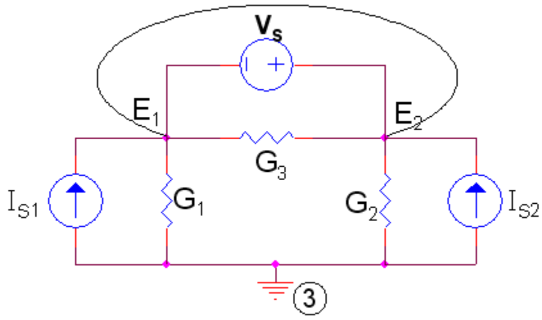
۳-۲۰-۱-ابر گره (فوق گره Super node)

با توجه به معادله (IV) مشاهده می شود که این معادله بیانگر موضوعی به شرح زیر است :

اگر دو سرمنبع ولتاژ V_S را اتصال کوتاه فرض نماییم (شکل (۳-۳۷)) ، دوگره با پتانسیل های E_1 و E_2 برهم منطبق می گردند و گره جدید (انطباق گره های ۱ و ۲) به دست می آید کـه معادلـه KCL این گره جدید عبارت است از :

$$-I_{S1}+G_1E_1+G_2E_2-I_{S2}=0$$

که همان معادله حاصل از جمع معادلات KCL دو گره (II , I) است .



شکل(۳-۳۷)

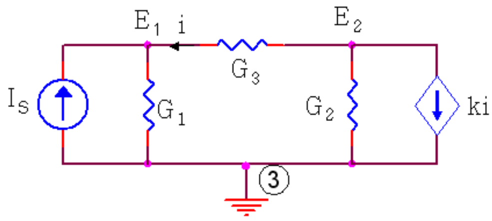
- بنا بر این در صورتی که منبع ولتاژی (وابسته یا نابسته) در مدار قرار گرفته باشد می تـوان دوسر منبع ولتاژ را اتصال کوتاه فرض نمـوده و بـرای گـره جدیـد KCL نوشـتن کـه ایـن موضوع به نام ***روش ابرگره*** در تحلیل نامیده می شود . نتایج این عمل عبارت اند از :

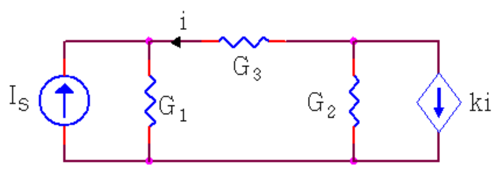
☑ حذف جریان های نامعین منابع ولتاژ از متغیر ها ونوشـتن مسـتقیم معادلـه بـرای گـره هـای جدید. در حالت خاص که منبع بین یک گره وگره مبنا قرار گرفته باشد ، معادله KCL حذف می گردد.

☑ کاهش تعداد معادلات به تعداد منابع ولتاژ در مدار.

☑ برای جبران معادلات KCL رابطه بین ولتاژ گره و ولتاژ منابع ولتـاژ نیـز نوشـته مـی شـود ، مانند E_2-E_1=V_S در این مثال .

ج : مدار دیگری مانند شکل (۳-۳۸-الف) را که شامل منبـع وابسـته نیـز مـی باشـد در نظـر مـی گیـریم وتحلیل گره را برای این حالت تکرار می کنیم .





(ب) شکل(۳-۳۸) (الف)

در این مدار مجدداً گره ها را مشخص و شماره گذاری نموده و گره مبنا را انتخـاب و مطـابق شـکل (۳-۳۸-ب) پتانسیل بقیه گره ها را فرض می کنیم و برای گره ها KCL می نویسیم :

$$\begin{cases} KCL(1) \Rightarrow -I_S + G_1E_1 + G_3(E_1 - E_2) = 0 \\ KCL(2) \Rightarrow ki + G_2E_2 + G_3(E_2 - E_1) = 0 \end{cases}$$

در این دستگاه نیز مشاهده می شود تعداد متغیرها بیش از تعداد معـادلات اسـت (E_1 و E_2 و I_0) بنـابراین همان گونه که در تحلیل مدارهای یک حلقه ای و دو گره ای مشاهده شـد وقتـی منبـع وابسـته در مـدار وجود دارد باید رابطه عامل کنترل منبع وابسته با متغیرهای مدار را نوشت در نتیجه:

☑ در تحلیل گره وقتی منبع وابسته در مدار وجود داشته باشد علاوه بر معادلات اصلی باید معادله ای که رابطه عامل کنترل منبع وابسته با پتانسیل گره ها را نشان می دهد نوشت : یعنی معادله $G_3(E_2 - E_1) = i$ به دستگاه اضافه می گردد .

بنابراین با حل دستگاه :

$$\begin{cases} -I_S + G_1E_1 + G_3(E_1 - E_2) = 0 \\ ki + G_2E_2 + G_3(E_2 - E_1) = 0 \\ G_3(E_2 - E_1) = i \end{cases}$$

$$\begin{cases} (G_1 + G_3)E_1 - G_3E_2 = I_S \\ kG_3(E_2 - E_1) + G_2E_2 + G_3(E_2 - E_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (G_1 + G_3)E_1 - G_3E_2 = I_S \\ -G_3(1+K)E_1 + [G_2 + G_3(1+K)E_2 = 0 \end{cases}$$

$$E_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_S & -G_3 \\ 0 & G_2 + G_3 + kG_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3(1+k) & G_2 + G_3(1+k) \end{vmatrix}} = \frac{[G_2 + G_3(1+k)]I_S}{(G_1 + G_3)[G_2 + G_3(1+k)] - G_3[G_3(1+k)]}$$

$$E_2 = \frac{\begin{vmatrix} G_1 + G_3 & I_S \\ -G_3(1+k) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3(1+k) & G_2 + G_3(1+k) \end{vmatrix}} = \frac{G_3(1+k)I_S}{(G_1 + G_3)[G_2 + G_3(1+k)] - G_3[G_3(1+k)]}$$

پس از محاسبه E_1 و E_2 کلیه جریان ها و ولتاژ های مدار از جمله ولتاژV و مقدار منبع جریان kV به دست می آیند.
با توجه به نتایج حاصل از مثال های ارائه شده در این قسمت به طور کلی روش گره را می توان به شرح زیر خلاصه کرد :

روش تحلیل گره :

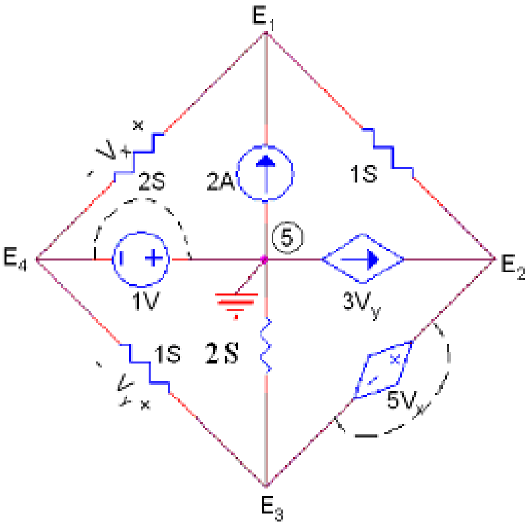
1) ***کلیه گره های مدار را مشخص نموده و یکی از گره ها را به عنوان گره مبنا انتخاب و برای بقیه گره ها نسبت به گره مبنا پتانسیل فرض می کنیم .***
2) ***منابع ولتاژ مدار را اتصال کوتاه فرض می کنیم . به تعداد منابع ولتاژ از تعداد KCL ها یی که می توان نوشت کاسته می شود. (ابر گره)***
3) ***برای گره های جدید و گره های باقی مانده KCL می نویسیم .***
4) ***رابطه بین ولتاژ گره ها و ولتاژ منابع ولتاژ را می نویسیم .***
5) ***رابطه عامل کنترل منابع وابسته با متغیرهای مدار(پتانسیل گره ها) را می نویسیم .***

ضمناً به نکات زیر باید توجه نمود :

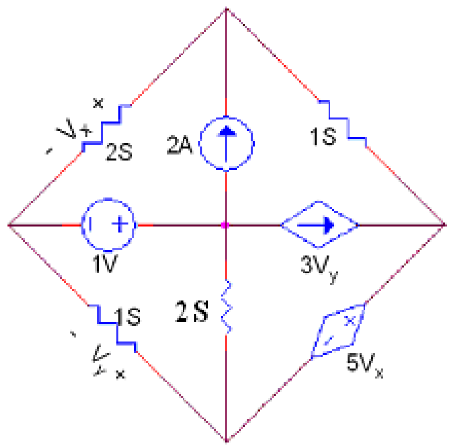
a) **در صورتی که در روش ابرگره, گره ای بر گره مبنا منطبق شود , برای آن KCL نوشته نمی شود زیرا برای گره مبنا با توجه به قانون جریان ها و عدم تشکیل دستگاه وابسته KCL نوشته نمی شود .**
b) **با متغیرهای ولتاژ گره (E_1 و E_2 و ... وE_N) برای حلقه های مدار KVLنمی توان نوشت**
c) **اگر مقاومت های مدار به صورت (R) با واحد Ω داده شده باشند در نوشتن KCL از قانون اهم استفاده نموده و رابطه به صورت $I=\dfrac{V}{R}$ استفاده می شود .**

حال به تحلیل چند مثال کلی می پردازیم :

مثال (۳- ۱۵) : در مدار شکل (۳-۳۹) V_x و V_y عامل کنترل منابع وابسته را به روش پتانسیل گره به دست آورید .



شکل(۳-٤٠)



شکل (۳-۳۹)

۱) گره ها را شماره گذاری کرده و گره مبنا را انتخاب می نماییم و برای بقیه گره ها مطابق شکل (۳-٤٠) ولتاژ فرض می کنیم .

۲) منابع ولتاژ 1V و $5V_x$ را اتصال کوتاه فرض می کنیم , دو KCL از تعداد KCL ها کاسته می شود .

۳) برای گره های (۱) و گره جدید (۲ و۳) KCL می نویسیم .گره (٤) به دلیل انطباق بر گره مبنا KCL ندارد.

$$KCL(1) \Rightarrow 2(E_1 - E_4) + 1(E_1 - E_2) - 2 = 0$$

$$KCL(2,3) \Rightarrow 1(E_2 - E_1) - 3V_y + 2\times E_3 + 1(E_3 - E_4) = 0$$

٤) رابطه ولتاژ گره (٤) با منبع 1V : $E_4 = -1^V$

رابطه ولتاژ گره های (۲)و(۳) با منبع ولتاژ$5V_x$: $E_2 - E_3 = 5V_X$

۵) رابطه عامل کنترل منبع ولتاژ وابسته $5V_x$: $E_1 - E_4 = V_X$

رابطه عامل کنترل منبع جریان وابسته $3V_y$: $E_3 - E_4 = V_y$

اگر دستگاه را ساده نماییم و حل کنیم , V_x و V_y نیز به دست می آیند .

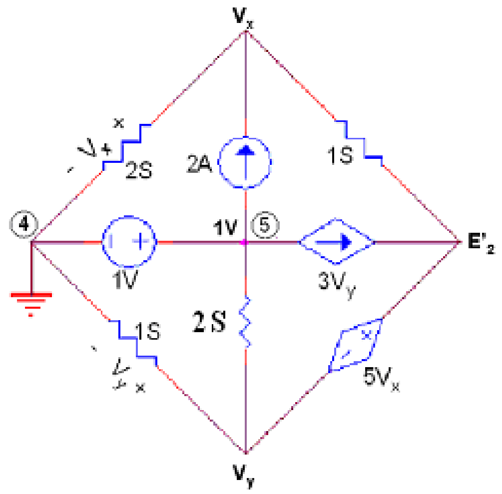
$$\begin{cases} 2V_x + V_y = -2 \\ 4V_x + V_y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = 2V \\ V_y = -6V \end{cases}$$

اما با تحلیل این مثال به چند نکته نیز در تحلیل گره برخورد می کنیم که می توان در صورت ا مکان از آنها استفاده نمود :

الف : اگر یک منبع ولتاژ بین یک گره و گره مبنا قرار گرفته باشد , می توان به جای ولتاژ فرضی برای گره مورد نظر ولتاژ اصلی آن را مشخص نمود , مانند گره (٤) که در شروع تحلیل به جای E_4 می توانستیم پتانسیل گره را ($-1V$) در نظر بگیریم .

ب : انتخاب گره مبنا در صورتی که در مدار مشخص نشده باشد از لحاظ تحلیل دارای ا همیت است و مناسب است گره ای را به عنوان گره مبنا انتخاب کنیم که عملیات ساده تر گردد .

برای استفاده از نکات فوق در تحلیل مدار به روش گره, مثال (۳-٤١) را مجدداً تحلیل می کنیم :



شکل (۳-٤١)

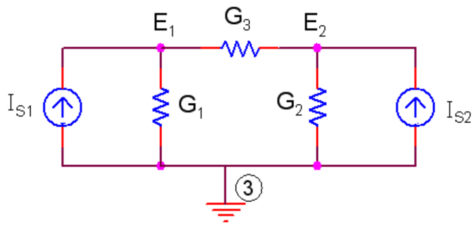
۱) گره مبنا را بین V_x و V_y (گره (٤)) انتخاب می کنیم و پتانسیل گره های (۱) و (۳) را برابر V_x و V_y و گره (۵) را برابر $1V$ در نظر می گیریم .

همان گونه که مشاهده می شود , مرحله ۵ تحلیل حذف می گردد و ۶ معادله به ۳ معادله کاهش می یابد و عملیات ساده تر می شود .

$$\begin{cases} KCL'(1) \Rightarrow 2V_x + 1(V_x - E_2') - 2 = 0 \\ KLCL(2,3) \Rightarrow 1(E_2' - V_x) - 3V_y + 2(V_y - 1) + V_y = 0 \\ E_2' - V_y = 5V_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3V_x - E_2' = 2 \\ -V_x + E_2' = 2 \\ 5V_x + V_y - E_2' = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} V_x = 2V \\ V_y = -6V \end{cases}$$

ج : در صورتی که اجزاءِ مدار منابع جریان (I_S) و رسانایی (G) باشند , می توان به روش نظری KCL ها را نوشت . اگر دستگاه معادلات مدار شکل (۳-۳۵-ب)را , پس از ساده شدن در نظر بگیریم داریم :



تکرار شکل (۳-۳۵-ب)

$$\begin{cases}(G_1+G_3)E_1-G_3E_2=I_{S1} & (I)\ \text{معادله} \\ -G_3E_1+(G_2+G_3)E_2=I_{S2} & (II)\ \text{معادله}\end{cases}$$

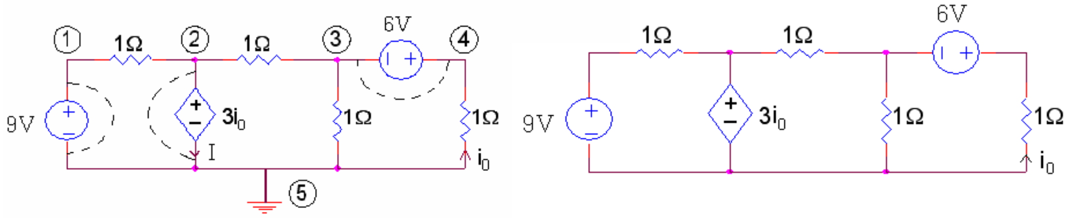
از رابطه (I) که معادله ساده شده KCL(1) را نشان می دهد می توان نتیجه گرفت :

۱. ضریب ولتاژ گره1 (E_1) برابر است با مجموع رسانایی های متصل به گره۱ : (G_1+G_2)
۲. ضریب ولتاژ گره ۲ (E_2) برابر است با رسانایی مشترک بین گره ۱و۲ با علامت منفی: $(-G_3)$
۳. طرف سمت راست معادله جریان I_{S1} است که وارد گره شده است و در مورد معادله (II) نیز این موارد تکرار شده است .

بنابراین معادله KCL ساده شده در روش گره برای گره iام عبارت است از :

(جمع جبری جریان های وارد شونده به گره iام) = (ولتاژ گره jام)(مجموع رسانایی های مشترک بین گره iام و jام) - (ولتاژ گره i ام)(مجموع رسانایی های متصل به گره i ام)

مثال (۳-۱۶) : در مدار شکل (۳-٤۲-الف) ولتاژ منبع وابسته و توان جذب شده آن را به روش پتانسیل گره به دست آورید .



(ب) شکل(۳-٤۲) (الف)

۱) گره ها را شماره گذاری نموده و گره مبنا را انتخاب می کنیم و برای بقیه گره ها پتانسیلی فرض می کنیم . پتانسیل گره های ۱ و ۲ را به ترتیب برابر 9V و $3i_0V$ در نظر می گیریم .
۲) منابع ولتاژ 9V و $3i_0$ و 6V را اتصال کوتاه فرض می کنیم . (شکل (۳-٤۲-ب))
۳) برای گره جدید (۳و٤) KCL می نویسیم :

$$KCL(3,4) \Rightarrow \frac{E_3 - 3i_0}{1} + \frac{E_3}{1} + \frac{E_4}{1} = 0 \Rightarrow 2E_3 + E_4 - 3i_0 = 0$$

٤) رابطه ولتاژ منبع 6V با ولتاژ گره ها : $E_3 - E_4 = 6V$

۵) رابطه عامل کنترل منبع وابسته i_0 با ولتاژ گره ها : $i_0 = \frac{-E_4}{1}$

که با حل دستگاه سه معادله ای حاصل i_0 و E_3 را حساب می کنیم .

$$\begin{cases} 2E_3 + E_4 - 3i_0 = 0 \\ E_3 - E_4 = 6 \\ E_4 + i_0 = 0 \end{cases}$$

$$i_0 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-6(1+3)}{2(-1)-1(1+3)} = \frac{-24}{-2-4} = 4A$$

$E_4 = -4V$ $\qquad$ $E_3 = 6 + E_4 = 6 - 4 = 2V$

ولتاژ منبع وابسته $= 3i_0 = 3 \times 4 = 12V$

برای تعیین جریان منبع وابسته (I) برای گره ۲ , KCL می نویسیم :

$$KCL(2) \Rightarrow I + \frac{3i_0 - 9}{1} + \frac{3i_0 - E_3}{1} = 0 \quad \Rightarrow I + \frac{12-9}{1} + \frac{12-2}{1} = 0 \quad \Rightarrow I = -13A$$

منبع $3i_0$ انرژی تحویل می دهد : $P_{3i_0} = 3i_0 \times I = 12(-13) = -256W$

۳-۲۱- روش تحلیل مش (Mesh Analysis)

قبل از اینکه تحلیل به روش مش را بیا ن کنیم به چند نکته اشاره می کنیم:

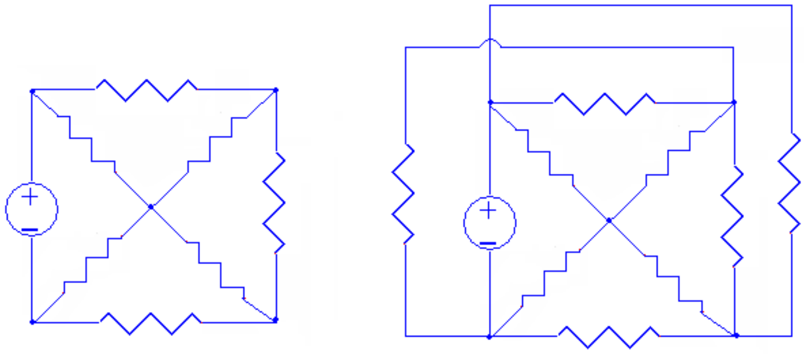
☑ فرهنگستان علوم لغت مترادف با روش مش را روش خانه ای ذکر کرده است و در بعضی از متون کلمه حلقه یا حلقه مجزا نیز بجای مش بکار رفته است .

☑ **تعریف مش** : همان گونه که قبلاً ذکر شد , مش حلقه ای است که درون آن شاخه ای قرار نگرفته است .

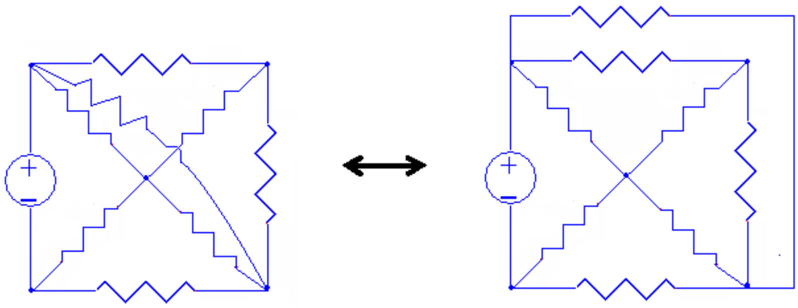
☑ **مدارها از لحاظ وضعیت (توپولوژی) به دو دسته تقسیم می شوند :**

(۱) مدارهای مسطح (۲) مدارهای غیرمسطح

مدار مسطح : مداری است که بتوان آن را در صفحه رسم کرد به طـوری کـه هرجـا اجـزاءِ مدار همدیگر را قطع کنند , آن نقطه گره باشد .
مدارهای شکل (۳-٤۳) نمونه ای از مدار مسطح و غیر مسـطح را نشـان مـی دهـد . همچنـین مدار شکل (۳-٤٤) مداری مسطح است که در ظاهر غیرمسطح نشان داده شده است .



مدار مسطح　　　شکل(۳-٤۳)　　　مدار غیر مسطح



شکل (۳-٤٤)

☑ روش مش را فقط در مدارهای مسطح می توان به کار برد.

☑ با توجه به تعریف مش مشاهده می شود که قانون ولتاژ ها KVL پیرامون مش صادق اسـت و همان گونه که در تحلیل مدار یک حلقه ای مشاهده شد متغیر جریان i بـود بنـابراین متغیـر در روش مش , جر یان مش می باشد .

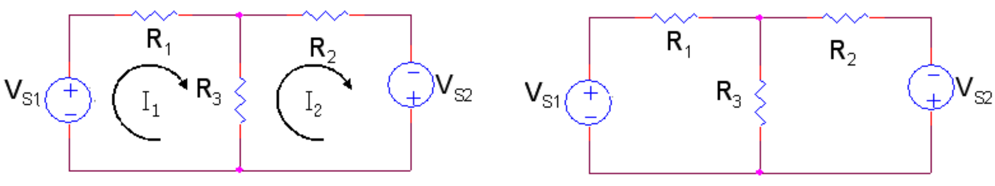
☑ ***جریان مش جریانی است فرضی که از همه اجزاء یک مش عبـور مـی کنـد و جهـت جریان مش جهت عقربه های ساعت است.***

☑ روش تحلیل مش دو گان روش تحلیل گره است.***بنابراین برای تحلیل یک مدار :***

I) مش های مدار را مشخص و از (1 تا L) شماره گذاری نموده وپیرامون هر یک در جهت عقربه های ساعت جریانی فرض می نماییم.و معادله KVL مش ها را می نویسیم.

II) برای آشنایی با روش تحلیلی مش چند مدار ساده را تجزیه وتحلیل می کنیم.

الف)مداری متشکل از منابع ولتاژ وسه مقاومت مطابق شکل (۳-45 -الف) مفروض است آن را با روش مش تجزیه وتحلیل نمایید و جریان و ولتاژ شاخه های مدار بدست آورید.



(ب) شکل(۳-٤٥) (ا لف)

۱-ابتدا مش ها را مشخص و مطابق شکل (۳-45 -ب) برای ۲مش مدار, جریان های I_2, I_1 را در جهت عقربه های ساعت در نظر می گیریم .

۲- باتوجه به قرار داد متناظر و قانون اهم وهمچنین قرار داد کاربرد قانون ولتاژها برای هرمش معادله KVL را درجهت حلقه می نویسیم

$$\begin{cases} KVL(1) \Rightarrow -V_{S1} + R_1 I_1 + R_3(I_1 - I_2) = 0 \\ KVL(2) \Rightarrow R_2 I_2 - V_{S2} + R_3(I_2 - I_1) = 0 \end{cases}$$

3-با ساده کردن معادلات فوق جریان های I_1 و I_2 را بدست می آوریم .

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)I_1 - R_3 I_2 = V_{S1} \\ -R_3 I_1 + (R_2 + R_3)I_2 = V_{S2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} V_{S1} & -R_3 \\ V_{S2} & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} = \dfrac{(R_2 + R_3)V_{S1} + R_3 V_{S2}}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) + R_3^2} \\ I_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & V_{S1} \\ -R_3 & V_{S2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} = \dfrac{(R_1 + R_3)V_{S2} + R_3 V_{S1}}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) + R_3^2} \end{cases}$$

۱- با مشخص شدن I_1 و I_2 جریان و ولتاژ کلیه شاخه ها را می توان بدست آورد

- **جریان شاخه مقاومت R_1 ومنبع V_{S1} برابر با I_1 است .**
- **جریان شاخه مقاومت R_2 ومنبع V_{S2} برابر با I_2 است .**

- **جریان شاخه مقاومت R3 با توجه به جهت جریان شاخه برابر است با:**

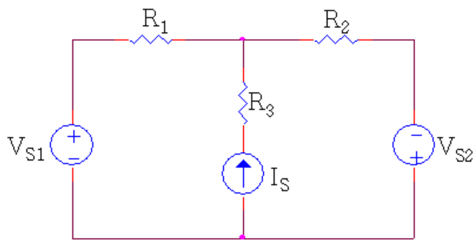
$(I_1 - I_2)$ **یا** $(I_2 - I_1)$

- **ولتاژ شاخه R_1 برابر است با R_1I_1 و هم جهت با I_1**
- **ولتاژ شاخه R_2 برابر است با R_2I_2 و هم جهت با I_2**
- **ولتاژ شاخه R_3 با توجه به جهت جریان شاخه برابراست با :**

$R_3(I_1 - I_2)$ **یا** $R_3(I_2 - I_1)$

مداری را که تجزیه وتحلیل نمودیم دارای اجزاء محدود مقاومت ومنبع ولتاژ نابسته بود برای تکمیل مراحل تحلیل, مدار دیگری را مورد بررسی قرار می دهیم.

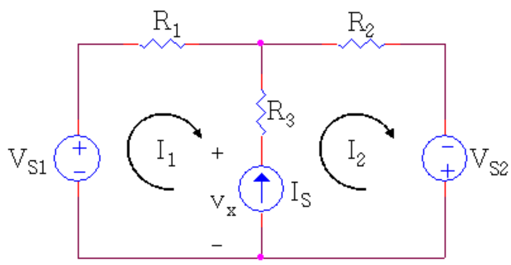
ب : مدار شکل (۳-٤۶) را که علاوه بر منبع ولتاژ دارای یک منبع جریان Is است تحلیل می نماییم.



شکل (۳-٤۶)

۱. **در این مدار هم۲ مش وجود دارد وبرای هریک جریانی درجهت عقربه های ساعت فرض می کنیم $(I_1$ و $I_2)$**

۲. درنوشتن معادله KVL هر مش , **بانامعین بودن ولتاژ دو سر منبع جریان Is روبرو می گردیم . در نتیجه ولتاژ V_X را با قطبین مشخص شده در شکل(۳-٤۷) را به عنوان لتاژ دو سر منبع جریان Is فرض می نماییم و سپس معادلات KVL را می نویسیم .**



شکل(۳-٤۷)

$$\begin{cases} KVL(1) \Rightarrow -V_{S1} + R_1 I_1 + R_3(I_1 - I_2) + V_X = 0 \\ KVL(2) \Rightarrow R_2 I_2 - V_{S2} - V_X + R_3(I_2 - I_1) = 0 \end{cases}$$

۳. به دلیل سه متغیر $(V_X \text{ و} I_2 , I_1)$ در معادلات KVL تحلیل با دو معادله امکان پذیر نیست واحتیاج به معادله دیگری است. همانطور که در مدار مشاهده می شود جریان شاخه منبع جریان برابر I_S است و این شاخه مشترک بین دو مش می باشد بنابراین رابطه ای که با توجه به جهت جریان منبع می توان نوشت $I_2 - I_1 = I_S$

٤. دستگاه معادلات را در صورتی که احتیاج به محاسبه V_X نباشد از طریق جمع کردن معادلات (I **و** II) وتشکیل معادله (IV) حل کرده و $(I_2 \text{ و} I_1)$ بدست می آوریم.

$$\begin{cases} -V_{S1} + R_1 I_1 + R_3(I_1 - I_2) + V_X = 0 & (I)\ \text{معادله} \\ R_2 I_2 - V_{S2} - V_X + R_3(I_2 - I_1) = 0 & (II)\ \text{معادله} \\ -I_1 + I_2 = I_S & (III)\ \text{معادله} \end{cases}$$

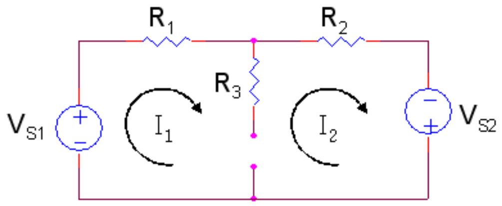
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -V_{S1} + R_1 I_1 + R_2 I_2 - V_{S2} = 0 \\ -I_1 + I_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_2 I_2 = V_{S1} + V_{S2} & (IV)\ \text{معادله} \\ -I_1 + I_2 = I_S & (III)\ \text{معادله} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \dfrac{V_{S1} + V_{S2} - R_2 I_S}{R_1 + R_2} \\ I_2 = \dfrac{R_1 I_S + V_{S1} + V_{S2}}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

۵. با بدست آمدن جریان های $(I_2 \text{ و} I_1)$ جریان و ولتاژ شاخه ها محاسبه می شود

۳-۲۱-۱- ابر مش (Super Mesh)

در تحلیل مدار اخیر مشاهده شد که به دلیل نا معین بودن ولتاژ دو سر منبع جریان متغیر V_X به متغیر های مدار اضافه گردید .اما با جمع کردن معادلات KVL مش ها به معادله (IV) رسیدیم که با دقت وتوجه به این معادله و مدار مشاهده می شود می توان این معادله را مستقیماً نوشت ,که طریقه عمل, ***باز فرض کردن منبع جریان*** است در نتیجه مدار بصورت شکل (۳- ٤٨) تبدیل می شود که نتیجتاً فقط یک مسیر بسته جدید (ترکیب مش ۱و۲) بدست می آید وKVL این مش جدید برابر است با : $-V_{S1} + R_1 I_1 + R_2 I_2 - V_{S2} = 0$ **به این روش تحلیلی که باعث حذف** V_X **می شود و معادله ای مستقیماً برحسب جریان مش ها بدست می آید** ***روش ابر مش (ابر خانه ای)*** گویند.



شکل (۳-٤٨)

ج :مدار های شامل منابع وابسته

در مدارهایی که منبع وابسته وجود داشته باشد عامل کنترل منبع وابسته به عنوان یک متغیر به متغیرها اضافه می گردد که در این حالت باید رابطه عامل کنترل منبع وابسته را برحسب متغرهای مدار نوشت .

حال با توجه به مثال ها یی که تحلیل شدند , **تحلیل روش مش** به شرح زیر خلاصه می گردد :

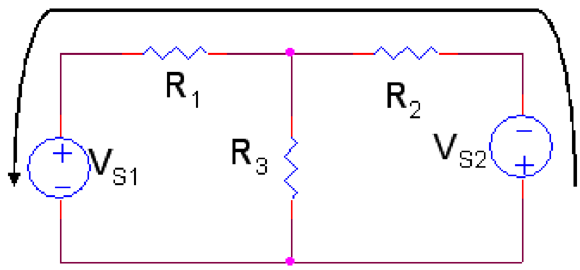
روش تحلیل مش :

1) **مش های مدار را مشخص کرده و برای هریک جریانی پیرامون آن در جهت عقربه های ساعت فرض می کنیم .**
2) **منابع جریان مدار را مدار باز فرض نموده , به تعداد منابع جریان از تعداد KVL ها کاسته می شود (ابر مش)**
3) **برای مش های جدید و مش های باقیمانده KVL می نویسیم .**
4) **رابطه جریان منابع جریان و جریان مش ها را می نویسیم .**
5) **رابطه عامل کنترل منابع وابسته را با جریان مش ها می نویسیم .**

نکاتی که در مورد روش مش باید توجه نمود :

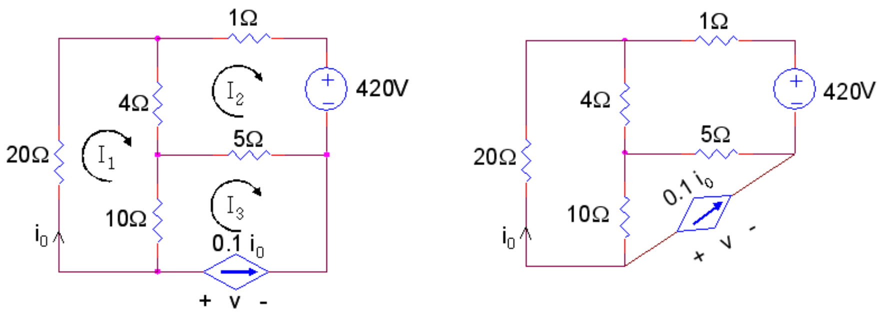
- **روش مش فقط در مدار های مسطح کاربرد دارد.**
- **با جریان مش ها نمی توان KCL نوشت.**
- **مش بیرونی: مشی است که تمام مدار را در بر می گیرد, مانند شکل (۳-٤۹)**

و از لحاظ دوگانی مش بیرونی دوگان گره مبنا است و برای مش بیرونی KVL نوشته نمی شود.



شکل(۳-٤۹)

مثال (۳-۱۷) : به روش مش ولتاژ دو سر منبع وابسته را در مدار شکل (۳-۵۰-الف) به دست آورده و توان جذب شده توسط منبع جریان را حساب کنید .



(ب)　　　شکل(۳-۵۰)　　　(الف)

پاسخ :

۱) در این مدار سه مش داریم که جریان های I_1 و I_2 و I_3 را مطابق شکل (۳-۵۰-ب) برای مش ها در نظر می گیریم .

۲) منبع جریان وابسته $0.1i_0$ را مدار باز فرض می کنیم , در نتیجه ترکیب مش ۳ با مش بیرونی در روش ابرمش برای آن KVL نوشته نمی شود ولی به دلیل اینکه ولتاژ v دو سر منبع جزء خواسته های مثال است KVL آن را می نویسیم .

۳) برای مش ها KVL می نویسیم :

$$\begin{cases} KVL(1) \Rightarrow 20I_1 + 4(I_1 - I_2) + 10(I_1 - I_3) = 0 & (I) \text{ معادله} \\ KVL(2) \Rightarrow 1 \times I_1 + 420 + 5(I_2 - I_3) + 4(I_2 - I_1) = 0 & (II) \text{ معادله} \\ KVL(2) \Rightarrow 5(I_3 - I_2) - v + 10(I_3 - I_1) = 0 & (III) \text{ معادله} \end{cases}$$

٤) رابطه جریان منبع جریان با جریان مش ها : $I_3 = -0.1i \quad (IV)$ معادله

۵) رابطه عامل کنترل منبع وابسته با جریان مش : $I_1 = i_0 \quad (V)$ معادله

- برای تعیین پاسخ ها , معادلات I و II و IV و V را در نظر می گیریم و جریان های I_1 و I_2 و I_3 را حساب می کنیم و با قرار دادن I_1 و I_2 و I_3 در معادله III ولتاژ v را به دست می آوریم :

$$\begin{cases} 34I_1 - 4I_2 - 10I_3 = 0 \\ -4I_1 + 10I_2 - 5I_3 = -420 \\ I_3 = -0.1i_0 \\ I_1 = i_0 \end{cases} \Rightarrow I_3 = -0.1I_1 \qquad \Rightarrow \begin{cases} 35I_1 - 4I_2 = 0 \\ -3.5I_1 + 10I_2 = -420 \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -420 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 35 & -4 \\ -3.5 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{-4 \times 420}{35 \times 10 - 4 \times 3.5} = -5A$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 35 & 0 \\ -3.5 & -420 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 35 & -4 \\ -3.5 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{-35 \times 420}{35 \times 10 - 4 \times 3.5} = -43.75A$$

$I_3 = -0.1I_1 = -0.1 \times -5 = 0.5A$

$5 \times [0.5 - (-43.75)] - v + 10[0.5 - (-5)] = 0 \Rightarrow v = 221.25 + 55 \quad \Rightarrow v = 276.25$

$0.1i_0 = 0.1I_1 = 0.1(-5) = -0.5A$ جریان منبع وابسته

- توان جذب شده توسط منبع وابسته برابر است با :

$P_S = v \times (0.1i_0) = (276.5)(-0.5) \Rightarrow P_S = -138.25W$

بنابراین منبع وابسته انرژی دهنده است .

☑ با تحلیل این مثال می توان به چند نکته در روش تحلیل مش توجه نمود :

a) جریان مش ۱ را می توان برابر جریان i_0 عامل کنترل منبع وابسته در نظر گرفت.

b) جریان مش ۳ را می توان بر حسب جریان منبع جریان برابر ($-0.1i_0$) در نظر گرفت .

در نتیجه معادلات به سه معادله زیر تقلیل می یابد :

$$\begin{cases} 20i_0 + 4(i_0 - I_2) + 10[i_0 - (-0.1i_0)] = 0 & (I) \text{ معادله} \\ 1 \times I_2 + 420 + 5[I_2 - (-0.1i_0)] + 4(I_2 - i_0) = 0 & (II) \text{ معادله} \\ (-0.1i_0 - I_2) \times 5 - v + 10(-0.1i_0 - i_0) = 0 & (III) \text{ معادله} \end{cases}$$

اگر معادلات فوق را ساده نموده وعامل کنترل منبع وابسته و ولتاژ منبع را بدست آوریم به همان نتایج حاصل از تحلیل اولیه می رسیم.

☑ اگر به معادلات ساده شده مدار شکل (۳-۴۵) توجه شود , مشاهده می شود که می توان معادله KVL را به طور مستقیم در مدارهای مقاومتی با منبع ولتاژ نوشت:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)I_1 - R_3 I_2 = V_{S1} \\ -R_3 I_1 + (R_2 + R_3)I_2 = V_{S2} \end{cases}$$

زیرا در معادله KVL(1) داریم:

ضریب جریان مش ۱ (I_1) : برابربا مجموع مقاومت های پیرامون مش

ضریب جریان مش ۲ (I_2) :برابر با مقاومت مشترک بین دو مش با علامت منفی

ولتاژ سمت راست معادله : برابر با ولتاژ منبع ولتاژ قرار گرفته در مش با علامت مثبت (+)در جهت خلاف مش ($+V_{S1}$)

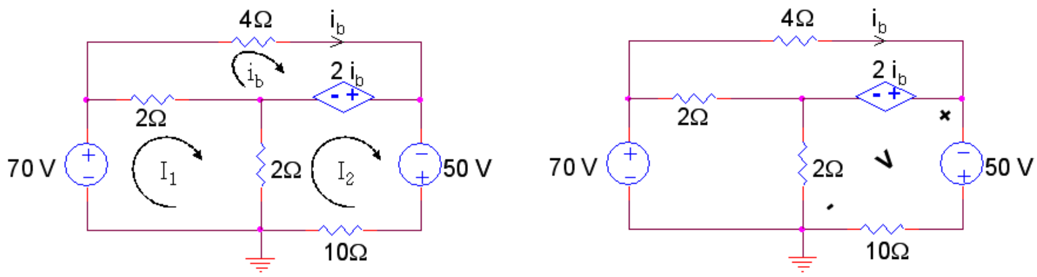
برای نوشتن معادله KVL برای مش i ام به طور نظری داریم :

(جمع جبری ولتاژ ها ی منابع ولتاژ پیرامون مش i ام در جهت خلاف عقربه های ساعت) = (جریان مش j ام)(مقاومت مشترک بین دو مش i ام و j ام) - (جریان مش i ام)(مجموع مقاومت های پیرامون مش i ام)

مثال (۳-۱۸) :

الف) در مدار شکل (۳ -۵۱-الف) ولتاژ V را به روش مش تعیین کنید.

ب) ولتاژ v را با روش ولتاژ گره تعیین کنید .



(ب) شکل (۳-۵۱) (الف)

پاسخ :

الف) ۱ – برای مش های مدار شکل (۳-۵۱-ب) جریان های I_1 و I_2 و i_b را در نظر می گیریم .

۲ – KVL مش ها را به صورت نظری می نویسیم و از دستگاه I_2 را محاسبه می کنیم .

$$\begin{cases} KVL(1) \Rightarrow (2+2)I_1 - 2i_b - 2I_2 = 70 \\ KVL(b) \Rightarrow -2I_1 + (2+4)i_b = -2i_b \\ KVL(2) \Rightarrow -2I_1 + (2+10)I_2 = 50 + 2i_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4I_1 - 2i_b - 2I_2 = 70 \\ -2I_1 + 8i_b = 0 \\ -2I_1 - 2i_b + 12I_2 = 50 \end{cases}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 70 \\ -2 & 8 & 0 \\ -2 & -2 & 50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & 0 \\ -2 & -2 & 12 \end{vmatrix}} = \frac{70(4+16)+50(32-4)}{-2(4+16)+12(32-4)} = \frac{2800}{296} = \frac{350}{37} \approx 9.46A$$

حال با توجه به جریان I_2 ولتاژ V را محاسبه می کنیم :

$$V = -50 + 10I_2 = -50 + 10 \times 9.46 \Rightarrow V = 44.6v$$

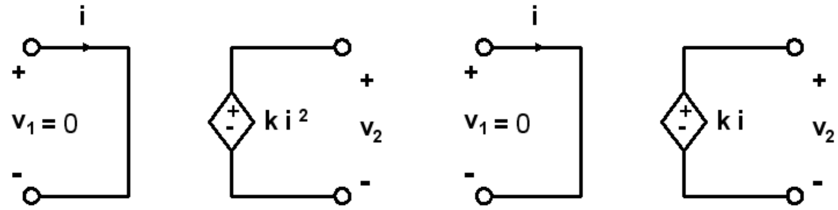
ب) حل به روش پتانسیل گره بر عهده دانشجویان است .

۳-۲۲- قضیه جمع ا ثر(برهمنهی) Superposition

چون قضیه جمع ا ثر فقط در شبکه های خطی صدق می کند لازم است اول مدار خطی را تعریف نماییم.

• **مدار خطی : مدا ری است که ا ز اجزاء خطی مانند مقا ومت سلف خازن ومنابع وابسته خطي تشکیل شده باشد .**

o منابع وابسته بدلیل ا ینکه مدل ریاضی هستندو جا نشین خواص فیزیکی می گرد ند , می توا نندبه صورت **منابع خطی مانند منبع ولتاژ(ki) شکل (۳-52 - ا لف) یا منابع غیر خطی مانند منبع ولتا ژ (ki^2) مطابق شکل (۳-52 - ب) باشند.**



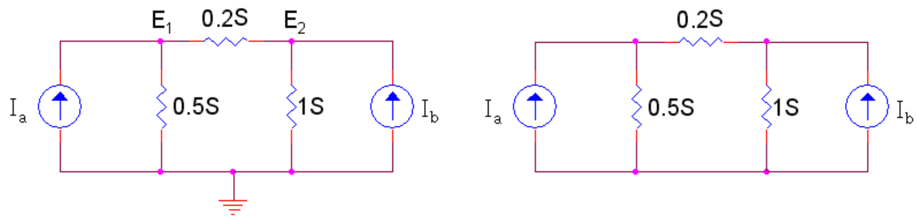
(ب) شکل(۳-۵۲) (الف)

o **شرایط خطی وتجزیه وتحلیل مدار های خطی:** همان گونه که در فصل اول بیان شد شرایط خطی عبارتند از

۱-شرط جمع پذیری $f(X_1+X_2)=f(X_1)+f(X_2)$

۲-شرط همگنی $f(aX)=af(X)$

از طرف دیگر اگر یک مدار خطی مانند شکل (۳- ۵۳) راکه از مقاومت های خطی ومنابع نابسته I_a وI_b تشکیل یافته , از روش فرضاً ولتاژ گره تحلیل نماییم و ولتاژ گره ها E_1, E_2 درنظر گرفته شوند وبه صورت نظری معادلات گر ه ها نوشته شوندنتیجه می گیریم:



(ب) شکل(۳-۵۳) (ا لف)

دستگاه معادلات (۱)

$$\begin{cases}(0.5+0.2)E_1-0.2E_2=I_a\\-0.2E_1+(0.2+1)E_2=I_b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0.7E_1-0.2E_2=I_a\\-0.2E_1+1.2E_2=I_b\end{cases}$$

از این دستگاه E_1, E_2 برحسب I_a وI_b بدست می آیند و دارای جواب یکتا هستند ورابطه خطی با جریان ها دارند.حال اگر مقادیر منابع را تغییر دهیم بطوریکه :

الف:اگر مقدار منابع را به I'_a و I'_b تغییر دهیم مقدار ولتاژ گره ها به E'_1, E'_2 تغییر می یابند ولی معادلات خطی به همان صورت با متغیر های جدید برقرار است :

$$\begin{cases} 0.7E_1' - 0.2E_2' = I_a' \\ -0.2E_1' + 1.2E_2' = I_b' \end{cases}.$$ **دستگاه معادلات (۲)**

ب: مجدداً اگر مقدار منابع تغییر نماید و جریان ها یی برابر با I_a'' و I_b'' به مدار ا عمال شودچون تغییری در مدا ر ا یجاد نشده است رابطه بین ولتاژ گر ه ها و منابع تغییر نمی کند اما مقدار ولتاژ ها به E_1'', E_2'' تغییر می کند. **دستگاه معادلات (۳)**

$$\begin{cases} 0.7E_1'' - 0.2E_2'' = I_a'' \\ -0.2E_1'' + 1.2E_2'' = I_b'' \end{cases}$$

ج : بدلیل خطی بودن روابط بین ولتاژ گره ها و جر یان ها می توا ن دستگاه معادلات (۲ و۳) را با هم جمع کرد که دستگاه معادلات (٤) بدست می آید:

$$\begin{cases} 0.7(E_1' + E_1'') - 0.2(E_2' + E_2'') = I_a' + I_a'' \\ -0.2(E_1' + E_1'') + 1.2(E_2' + E_2'') = I_b' + I_b'' \end{cases}$$ **دستگاه معادلات (٤)**

از مقایسه دستگاه معادلات (۲و۳) با دستگاه معادلات (٤) چنین نتیجه می توان گرفت که پاسخ معادلات (٤) برابر است با جمع پاسخ معادلات (۲) وپاسخ معادلات (۳) یا به عبارت دیگر ولتاژ گر ه ها به ازاء $I_a' + I_a''$ و $I_b' + I_b''$ برابر با جمع ولتاژ گره ها به ازاء مرحله(الف) و مرحله (ب) است.

د : اگر منابع در مراحل (الف وب) طوری انتخاب گردند که در رابطه $\begin{cases} I_a' + I_a'' = I_a \\ I_b' + I_b'' = I_b \end{cases}$ صدق نمایند **از مقایسه دستگاه معادلات (۱و ٤) که دارای جواب یکتا می باشند میتوان نتیجه گرفت**

که: $\begin{cases} E_1' + E_1'' = E_1 \\ E_2' + E_2'' = E_2 \end{cases}$

ه : باتوجه به این موضوع که برای منابع جریان در مراحل (الف و ب) هرمقدار می توان انتخاب نمودبه شرطی که مجموع مقادیر دو مرحله برابر مقادیر I_a و I_b باشند. اگر دو حالت $(1) \Leftarrow \begin{cases} I_a' = I_a \\ I_b' = 0 \end{cases}$ و

$(2) \Leftarrow \begin{cases} I_a'' = 0 \\ I_b'' = I_b \end{cases}$ را انتخا ب نماییم می توان نتیجه گرفت : **که در این مدار خطی پاسخ مدار(ولتاژ گره ها) به ازاء منابع مدار برابر اند بامجموع پاسخ مدار به ازاء هر یک از منابع به تنهایی. این مسئله را اصل *جمع اثر یابر همنهی* گویند.** که به شرح زیر بیان می شود:

- **اصل جمع اثر (بر همنهی):**

در هر مدار خطی که د ا را ی جند منبع نابسته می باشد هر پا سخ خطی(ولتاژ یا جریان یک شاخه) به ازاء کلیه منابع مدار برابر است با جمع جبری پاسخ هایی که به ازاء هر یک از منابع

ولتاژیا جریان نابسته مدار بدست می آید . برای بی اثر کردن دیگر منابع ولتاژنا بسته آن ها را از مدار خارج نموده واتصال کوتاه را جانشین می کنیم و برای بی اثر کردن دیگر منابع نابسته جریان بجای آن ها مدار باز قرار می دهیم .

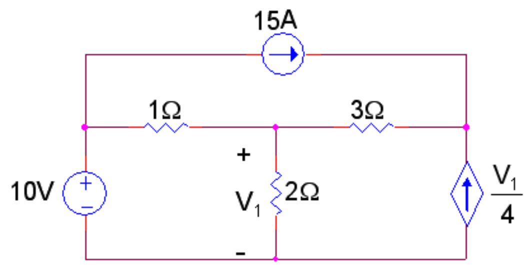
به چند نکته در مورد جمع اثر اشاره می کنیم.

a) در مدار های جریان مستقیم (dc) فقط متغیر های خطی را می توان از طریق جمع اثر حساب کرد, متغیری مانند **توان** را به دلیل اینکه متغیر درجه دو می باشد از این طریق قابل محاسبه نیست

b) **منابع وابسته را در روش محاسبه بطریق جمع اثر نمی توان بی اثر کرد.زیرا اثر آن ها درمدار وابسته به عامل کنترل اشان در شرایط تحلیل دارد.**

c) **کاربرد مهم جمع اثر در تحلیل مدارهای خطی شامل منابع با فر کانس های متفاوت است.**

- **مثال (۳-۱۹)** به روش جمع اثر ولتاژ V_1 عامل کنترل منبع وابسته مدار شکل (۳-۵٤) را بدست آورید.



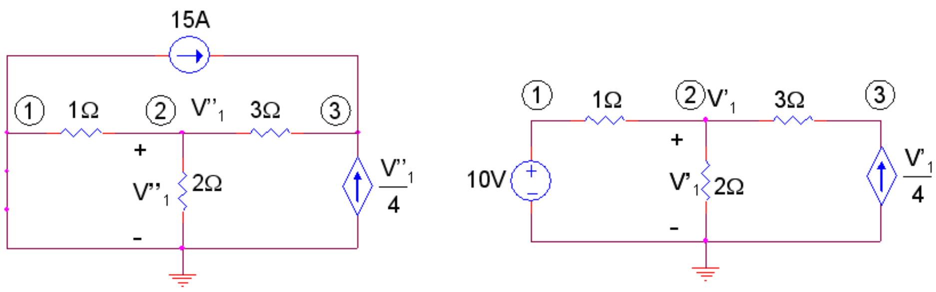
شکل(۳-۵٤)

- **پاسخ:**همان گونه که مشاهده میکردد مدار شامل یک منبع نابسته ولتاژ و یک منبع نابسته جریان است برای تحلیل اینگونه عمل می نماییم:

I.) **اثر منبع ولتاژ ۱۰ ولت:** منبع جریان ۱۵ آمپر را مدار باز می کنیم ودر مدار شکل (۳-۵۵- الف) V_1' را **که عامل کنترل منبع وابسته در این شرایط است** فرضاً با روش گره محاسبه می نماییم :

ولتاژ گر ه های ۱و۲بترتیب از سمت چپ (۱۰ ولت) , V_1' انتخاب نموده و برای گره۲ با ولتاژاخیر KCL می نویسیم .(گره ۳به دلیل اینکه مقاومت با منبع جریان سری قرار گرفته در تحلیل تاثیرندارد)

$$KCL(2) \Rightarrow \frac{V_1'-10}{1}+\frac{V_1'}{2}-\frac{V_1'}{4}=\frac{4V_1'-40+2V_1'-V_1'}{4} \Rightarrow V_1'=8v$$



(ب)　　　　شکل(۳-۵۵)　　　　(ا لف)

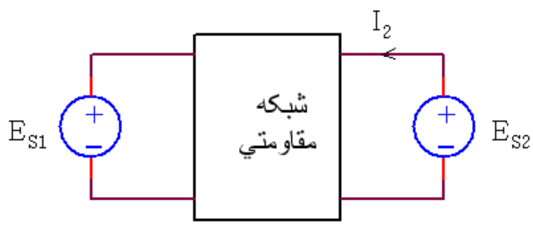
II.) **اثر منبع ۱۵ آمپر** : منبع ۱۰ ولت را اتصال کوتاه می کنیم (شکل(۳-۵۵-ب))و برای گره های (۲و۳) مدار به ترتیب ولتاژ V_1'' و E فرض می نماییم (**ولتاژ** V_1'' **عامل کنترل منبع وابسته در تحت این شرایط است)** حال برای گره های (۲و۳) KCL می نویسیم :

$$\begin{cases} KCL(2) \Rightarrow \dfrac{V_1''}{1}+\dfrac{V_1''}{2}+\dfrac{V_1''-E}{3}=0 \\ KCL(3) \Rightarrow -15-\dfrac{V_1''}{4}+\dfrac{E-V_1''}{3}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6V_1''+3V_1''+2V_1''-2E}{6}=0 \\ \dfrac{-180-3V_1''+4E-4V_1''}{12}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 11V_1''-2E=0 \\ -7V_1''+4E=180 \end{cases} \Rightarrow V_1''=\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 180 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}}=\dfrac{2\times 180}{11\times 4-2\times 7} \Rightarrow V_1''=12v$$

III.) **بنابراین پاسخ مدار ولتاژ** V_1 **برابر است با:** $V_1=V_1'+V_1''=8+12 \Rightarrow V_1=20v$

● **مثال(۳-۲۰)** شبکه مقاومتی شکل (۳-۵۶)مفروض است .این شبکه توسط دو منبع ولتاژ نابسته E_{S1} وE_{S2} تغذیه می شود. در صورتی که $E_{S1}=E_{S2}=12v$ باشند جریان $I_2=3A$ اندازه گیری می شود, اگر $E_{S1}=12v$ و $E_{S2}=6v$ شود و جریان I_2 اندازه گیری شود برابر با $1A$میگردد بنابراین به ازاء چه مقدار E_{S1} ومقدار معین $E_{S2}=3v$ جریان برابربا $I_2=2A$ می شود.



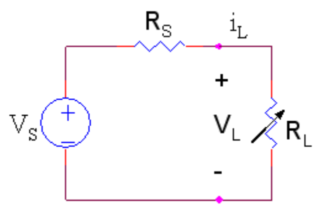
شکل (۳-۵۶)

• **جواب:** چون شبکه مقاومتی یک شبکه خطی است براین اساس می توان نتیجه گرفت که جریان در آن تابع خطی از ا ثر منابع ولتاژ است یعنی: $I_2 = K_1V_{S1} + K_2V_{S2}$ واز طرف دیگر مقدار جریان به ازاءمقدار منابع ولتاژ در دو آزمایش معلوم است . باقرار دادن مقادیر در رابطه ضرایب K_1 وK_2 مشخص شده پس, ا زقراردادن مقادیر معلوم آزمایش سوم مقدار E_{S1} بدست می آید

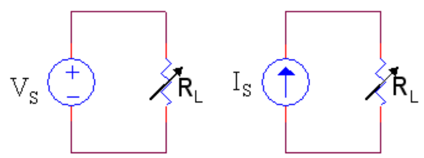
$$\begin{cases} 3 = K_1 \times 12 + K_2 \times 12 \\ 1 = K_1 \times 12 + K_2 \times 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = -\dfrac{1}{12} \\ K_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 2 = -\frac{1}{12}E_{S1} + \frac{1}{3} \times 3 \Rightarrow E_{S1} = -12v$$

۳-۲۳- قضیه انتقال حداکثر توان در مدار های جریان مستقیم

این قضیه بیانگر این مطلب است که به ازاءِ چه مقدار مقاومت بار (مصرف کننده) R_L می توان حد اکثر توان را از یک منبع در یافت کرد یا تحت چه شرایطی مقاومت بار از یک منبع حد اکثر توان را اخذ می کند. اولین موضوع این است که منابع فیزیکی هستند که می توانند حداکثر توان را ا رائه دهند زیرا منابع ایده آل شکل (۳- ۵۷) توانی را که به یک مقاومت بار منتقل می کنند از رابطه(I) $P = R_L I_S{}^2$ یا از رابطه(II) $P = \dfrac{V_S{}^2}{R_L}$ بدست می آید وبا افزایش مقاومت یا کاهش آن در رابطه (I) توان ا تنقالی افرایش یا کاهش و در رابطه(II) برعکس تغییر می کند و توان تابع افزاینده یا کاهنده است. اما اگر یک منبع ولتا ژ یا جریان فیزیکی مقاومت متغیر R_L را تغذیه کند تغییرات توان بر حسب مقاومت بار را به شرح زیر تعیین می کنیم:



شکل(۳-۵۸)



شکل(۳-۵۷)

• ابتدا ولتاژ دوسر بار v_L را در شکل (۳-۵۸) از روش تقسیم ولتاژ حساب می نماییم :

$$v_L = \frac{R_L V_S}{R_L + R_S}$$

• توان مقاومت بار را به ازاءِ ولتاژ بار محا سبه می کنیم :

$$p_L=\frac{v_L^2}{R_L}=\frac{(R_LV_S)^2\Big/(R_L+R_S)^2}{R_L}\Rightarrow p_L=\frac{R_LV_S^2}{(R_L+R_S)^2}$$

- توان بار تابعی از مقاومت بار است برای تعیین ماکزیمم یا مینیمم آن از تابع نسبت به متغیر R_L مشتق گرفته ومساوی صفر قرار می دهیم

$$\frac{dp_L}{dR_L}=\frac{V_S^2[(R_L+R_S)^2-2(R_L+R_S)R_L]}{(R_L+R_S)^4}=\frac{V_S^2[(R_L+R_S)-2R_L]}{(R_L+R_S)^3}=0\Rightarrow$$

$$(R_L+R_S-2R_L)=0\Rightarrow R_L=R_S$$

- ازآنجا که توان به ازاءِ $R_L=0$ و همچنین $R_L=\infty$ برابربا صفر می شود وتوان در مقاومت جذب می شود بنابراین تابع توان p_L فقط دارای ماکزیمم می باشد.
- در صورتی که منبع جریان باشد نیز همین شرایط برقرار است.

با توجه به موارد فوق قضیه حد اکثر توان به شرح زیر است:

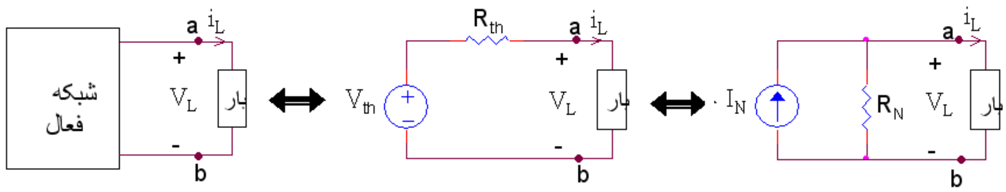
هرگاه مقاومت بار R_L با مقاومت منبع مساوی باشد, مقاومت بار حد اکثر توان را از منبع جذب می نماید. بنابراین شرط حداکثر توان ومقدار حداکثر توان عبارتند از:

$$\begin{cases}R_L=R_S\\ P_{L\max}=R_L\dfrac{I_S^2}{4}=\dfrac{V_S^2}{4R_L}\end{cases}$$

● ۳-۲٤- قضایای تونن و نورتن

در فصل دوم مدار معادل تونن ونورتن ورابطه بین آن ها بیان شد.و در قسمت قبل قضیه انتقال حداکثر توان مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده شد اگر مقاومت بار با مقاومت تونن برابر باشد $R_{th}=R_L$ حداکثر توان به بار می رسد.بر این اساس یکی از کاربرد های قضایای تونن ونورتن در مسئله اخیر است. **این قضایا فقط در شبکه های خطی صدق میکنند**.حال به معرفی مدار معادل تونن وهمچنین مدار معادل نورتن می پردازیم

- **۳-۲٤-۱- مدارمعادل تونن**: **یک شبکه خطی یک قطبی شامل مقاومت ها ومنابع (وابسته و نا بسته) مانند شکل(۳-۵۹- الف) مفروض است . می توان بجای شبکه یک قطبی یک مدار معادل شامل ترکیب یک منبع نابسته ولتاژ سری با یک مقاومت قرار دادمطابق شکل(۳-۵۹- ب) که در این مدار معادل, منبع ولتاژ را منبع ولتاژ تونن ومقاومت را مقاومت تونن ومدار را *مدار معادل تونن* گویند.**



(الف) (ب) (ج)

شکل(۳-۵۹)

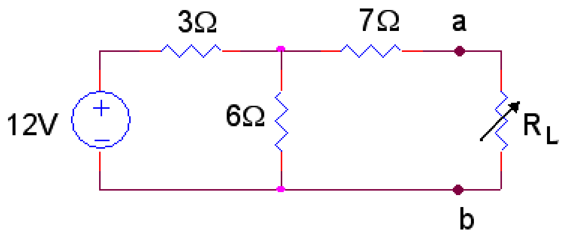
- **۳-۲٤-۲- مدار معادل نورتن: می توان به جای شبکه یک قطبی شکل (۳-۵۹- الف) یک منبع جریان موازی با یک مقاومت قرار داد مطابق شکل (۳-۵۹- ج) که منبع جریان را منبع جریان نورتن ومقاومت را مقاومت نورتن ومدار را *مدار معادل نورتن* گویند**

- **۳-۲٤-۳- روش تعیین مدار معادل تونن ونورتن**

برای تعیین مدار معادل تونن یا نورتن با توجه به مطالبی که در فصل دوم بیان شده است وعبارتند از : ۱- استفاده از تبدیل منابع ۲-مقایسه بین مدار معادل ورابطه بین ولتاژ وجریان یک قطبی می توان تحلیل را انجام داد. ولی باید توجه نمود که در تمام مدار ها نمی توان از روش (۱) استفاده کرد.

در هر صورت مداری را با این دو روش تحلیل می نماییم .

- **مثال(۳-۲۱):** در مدار شکل(۳-۶۰) مقاومت R_L را چنان تعیین کنید که حداکثر توان را از شبکه جذب نماید. و توان ماکزیمم را بدست آورید.



شکل(۳-۶۰)

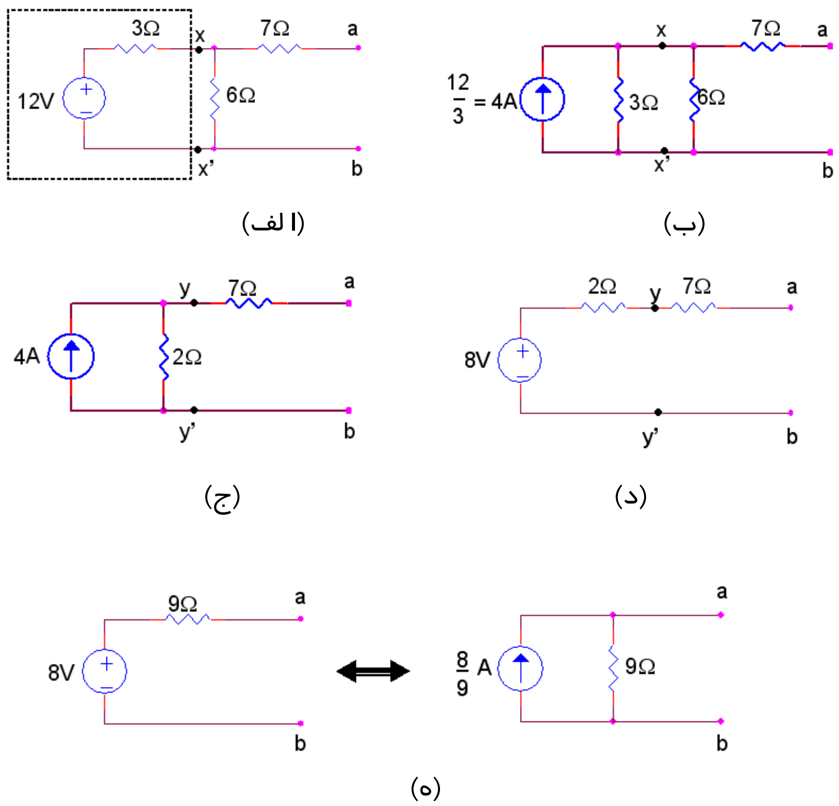
- **پاسخ:**برای تعیین مقاومت بار اگر بجای شبکه مدار معادل تونن یا نورتن آن را قرار دهیم شرایط حداکثر توان مقدار R_L را مشخص می کند.

روش۱)مقاومت R_L را از مدار جدا نموده ومطابق شکل (۳-۶۱- الف) مقاومت 3Ω ومنبع ۱۲ولت را منبع ولتاژ فیزیکی (مدار معادل تونن) فرض واز دو نقطه xx' مدار معادل نورتن (منبع جریان فیزیکی)جانشین آن می نماییم . در شکل(۳-۶۱-ب) داریم: $R_N = 3\Omega$ و $I_N = \frac{12}{3} = 4A$ در این

حالت نیز مقاومت های 6Ωو3Ω با هم موازی می گردند مقاومت معادل این دو مقاومت $R_{eq}=\frac{3\times 6}{3+6}=2\Omega$ می شودکه جانشین آنها می گرددشکل (۳-۶۱-ج) .

اگر منبع ٤ آمپر ومقاومت ۲ اهم را مدار معادل نورتن از دو نقطه yy' در نظر گرفته شود می توان مدار معادل تونن $V_{th}=2\times 4=8v$ و $R_{th}=2\Omega$ راجانشین معادل مدار نورتن نمود.

همانطور که درشکل (۳-۶۱- د) مشاهده می شود مقاومت های ۲و ۷اهم سری هستند ومنتجه آن ها برابر ۹ اهم می شود بنابراین مدار معادل تونن شبکه همانطور که درشکل (۳-۶۱- ه) نشان داده شده است عبارت از یک منبع ۸ ولت سری با مقاومت ۹ اهم است و مقاومت بار برابراست با $R_L=R_{th}=9\Omega$ و توا ن جذب شده توسط مقاومت بار: $P_{L\max}=\frac{(8)^2}{9}=\frac{64}{9}\approx 7.1W$ می شود.

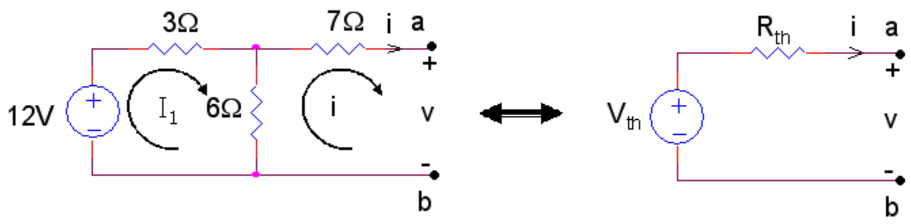


شکل(۳-۶۱)

روش(۲): ابتدا مقاومت بار را از شبکه یک قطبی جدا می سازیم و با استفاده از روش مش معادلات KVL مش های ۱و۲ را در شکل (۳-۶۲- ا لف) نوشته واز دستگاه معادلات رابطه ولتاژ وجریان دو سر یک قطبی را بدست می آوریم : جریان مش۱ را (I_1) وجریان مش ۲ را (i) در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} 9I_1 - 6i = 12 \\ -6I_1 + 13i + v = 0 \end{cases} \Rightarrow i = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 12 \\ -6 & -v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{-9v+72}{117-36} \Rightarrow v = 8-9i$$

در مقابل درشکل (۳- ۶۲- ب) در مورد مدار معادل تونن داریم : $v = V_{th} - R_{th} i$ که از مقایسه روابط ولتاژ تونن ومقاومت تونن بدست می آیند.



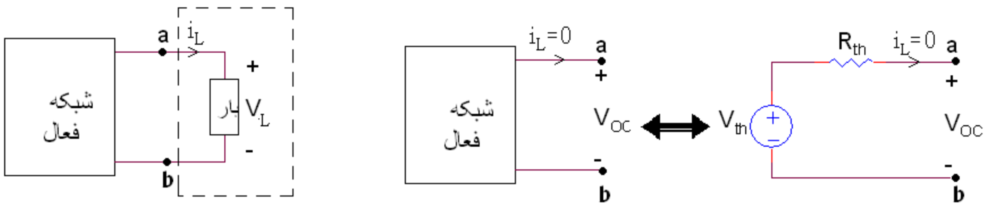
(ا لف)　　　　شکل(۳-۶۲)　　　　(ب)

• ۳-۲٤-٤- قضیه تونن (روش تعیین مدار معادل تونن):

در تعیین مدار معادل یک شبکه یک قطبی چون بار یا مصرف کننده اهمیت ندارد واز طرف دیگر با جدا شدن بار حالت مدار باز در مدار بوجود می آید ولتاژ این سر مدار باز را **ولتاژ مدار باز** V_{OC} گویند و ولتاژ دو سر مدار معادل تونن در حالت مدار باز برابر **ولتاژ تونن** V_{th} است درنتیجه یکی از شرایط معادل بودن دو مدار مساوی بودن $V_{th} = V_{OC}$ است. و مقاومت معادل شبکه یک قطبی باید با مقاومت تونن مساوی باشد **بنا براین روش تعیین مدار معادل تونن طبق قضیه تونن بدین شرح است:**

I. ***) ابتدا شبکه را به دو جزء بار یک قطبی تقسیم نموده وجزء بار را از شبکه جدا می کنیم.(شکل (۳-۶۳-الف))***

II. ***)ولتاژ دو سر یک قطبی را از محل باز شدن بار به روش مناسب محاسبه نموده این ولتاژ مساوی ولتاژ تونن است.*** $V_{th} = V_{OC}$ **(شکل (۳-۶۳-ب و ج))**



(الف)　　　　(ب)　　　　(ج)

شکل (۳-۶۳)

III.) ***مقاومت معادل شبکه را با استفاده از روش مناسب حساب کرده این مقاومت معادل همان مقاومت تونن است.*** $R_{eq} = R_{th}$

• ۳-۲٤-۵- قضیه نورتن(روش تعیین مدار معادل نورتن):

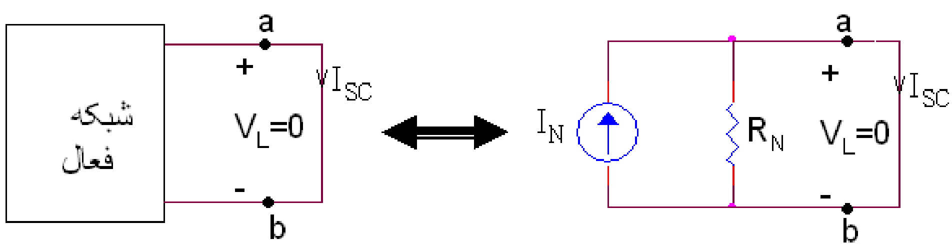
اگر پس از باز نمودن مقاومت بار از شبکه شکل(۳-۶۳- ا لف) آن محل را اتصال کوتاه کنیم جریانی که از اتصال کوتاه می گذرد I_{SC} برابر با جریان نورتن است زیرا در مدار معادل نورتن با اتصال کوتاه نمودن خروجی آن جریان منبع I_N کلاً از اتصال کوتاه عبور می کند **(چرا؟)** و برای این که دو مدار معادل باشند باید $I_{SC} = I_N$ باشد.ضمناً می دانیم مقاومت تونن مساوی مقاومت نورتن است. $R_N = R_{th}$

براین اساس روش تعیین مدار معادل نورتن طبق قضیه نورتن عبا رت است از:

I.) ***ابتدا بار یا مصرف کننده را از شبکه یک قطبی جدا می سازیم.***

II.) ***محل باز شدن بار را اتصال کوتاه نموده و جر یان اتصال کوتاه رابه روش مناسب حساب می نماییم این جریان مساوی جریان منبع جریان نورتن است*** $I_{SC} = I_N$

(شکل (۳-۶٤-الف و ب))



(الف) **شکل(۳-۶٤)** **(ب)**

III.) ***مقاومت یک قطبی را از محل باز شدن بار به روش مناسب محاسبه نموده این مقاومت برابرمقاومت نورتن است.*** $R_{eq} = R_N$

☑ از روش تعیین مدار معادل تونن وهمچنین مدار نورتن در مورد یک شبکه یک قطبی نتیجه می شود: $V_{OC} = R_{eq} I_{SC}$

• ۳-۲٤-۶- روش تعیین مقاومت معادل یک شبکه:

برای تعیین مقاومت معادل یک شبکه روش های متفاوتی وجود دارد که با توجه به وضعیت اتصال ا جزاءِ می توان مقاومت معادل را حساب کرد. در این بحث به سه روش اشاره می کنیم.

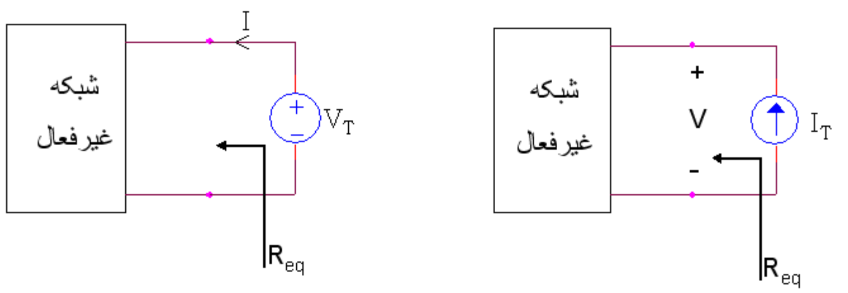
روش ۱- ر وش ترکیب مقاومت ها : در صورتی که شبکه فاقد منابع وابسته باشد می توان از این روش استفاده کرد. طریقه تعیین عبارت است:

برا ی محاسبه مقاومت معادل منابع نابسته مدار را بی ا ثر نموده وبا ترکیب مقاومت ها مقاومت معادل را بدست می آ ید.

روش۲- استفاده از قضایای تونن و نورتن: در این روش برای تعیین مقاومت معادل مدار باید دارای منبع نابسته با شد. و بدین طریق عمل می شود:

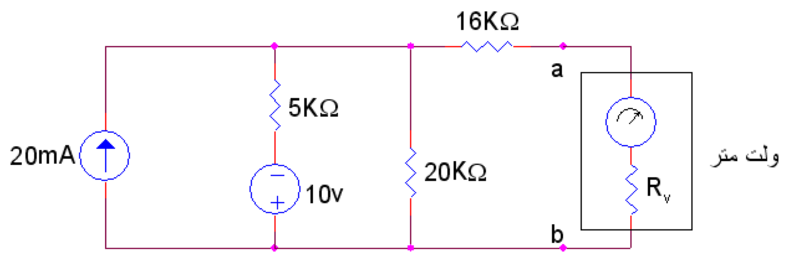
ولتاژ مدا رباز(V_{oc}) را ا ز محل (سرهای مورد نظر) تعیین مقاومت معادل به روش مناسب محاسبه نموده وبا اتصال کوتاه کردن سر ها وتعیین جریان اتصال کوتاه(I_{sc}) ا ز رابطه: $R_{eq}=\frac{V_{OC}}{I_{SC}}$ **مقاومت معادل را بدست می آوریم .**

روش۳ - استفاده از منبع تغذیه خارجی : در این روش منابع داخلی شبکه را بی اثر نموده و مطابق شکل (۳-۶۵) به محل تعیین مقاومت معادل مدار یکمنبع جریان معین I_T (یا منبع ولتاژ معین (V_T) را اعمال نموده و سپس ولتاژ دو سر منبع جریان(V) را برحسب I_T (جریان منبع ولتاژ (I) را برحسب V_T) معین نموده و از رابطه $R_{eq}=\frac{V}{I_T}=\frac{V_T}{I}$ **مقاومت معادل را حساب می کنیم .**



شکل (۳-۶۵)

مثال (۳-۲۲) : با استفاده از قضایای تونن و نورتن مقاومت داخلی ولت متری که برای اندازه گیری ولتاژ V_0 بین a و b در شکل (۳-۶۶) بسته شده و ۶۰ ولت را نشان می دهد به دست آورید .



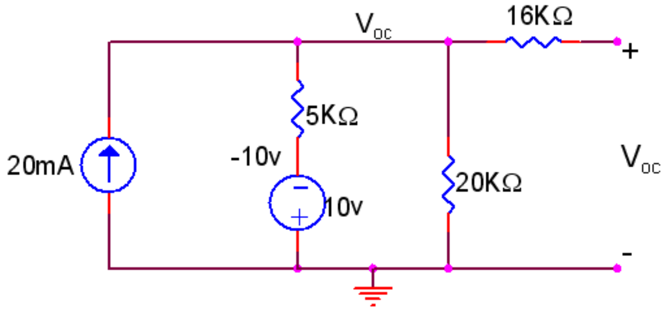
شکل(۳-۶۶)

پاسخ : ابتدا ولت متر را از نقاط a و b, از مدار جدا می کنیم و مدار معادل تونن یا نورتن را از دو نقطه a و b به دست می آوریم :

۱. محاسبه V_{oc} : فرضاً از روش پتانسیل گره استفاده می کنیم (مطابق شکل (۳-۶۷)) :

$$\frac{V_{OC}}{20}+\frac{V_{OC}-(-10)}{5}-20=0 \qquad \Rightarrow \frac{V_{OC}+4V_{OC}+40-400}{20}=0$$

$$5V_{OC}=360 \qquad \Rightarrow V_{OC}=72\text{v}$$

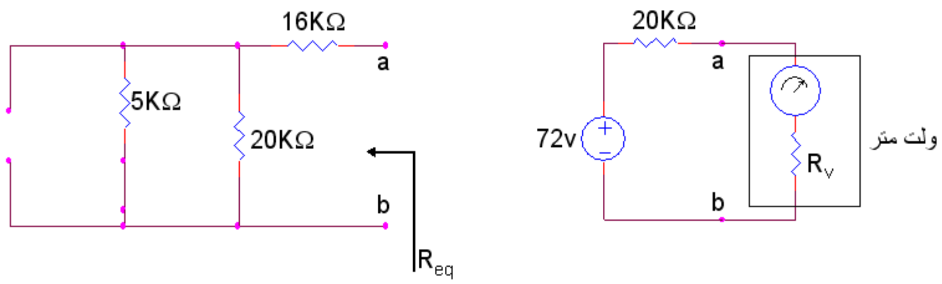


شکل(۳-۶۷)

۲. محاسبه R_{eq} : منابع 10v و 20mA را بی اثر می کنیم (مطابق شکل (۳-۶۸-الف)) :

$$R_{eq}=\frac{5\times 20}{5+20}+16=4+16=20K\Omega$$

در نتیجه مدار معادل تونن برابر است با : $V_{th}=72\text{v}$ و $R_{th}=20K\Omega$ (مطابق شکل (۳-۶۸-ب))



(الف) شکل(۳-۶۸) (ب)

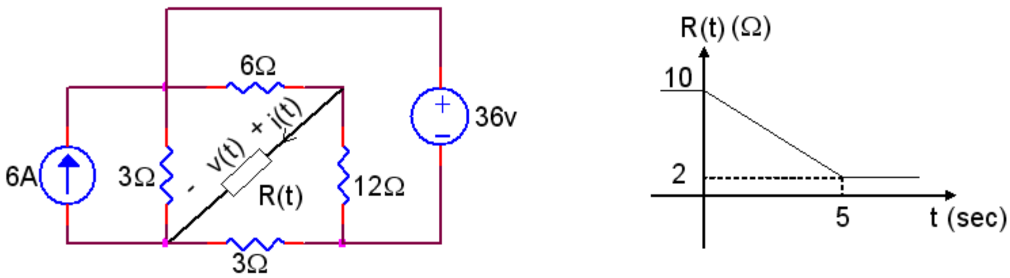
حال از تقسیم ولتاژ می توان استفاده کرد و ولتاژ 72v را در دو سر ولت متر و مقاومت Req تقسیم نمود :

$$\text{ولت متر } V=\frac{R_V\times 72}{20+R_V}\Rightarrow \quad 60=\frac{R_V\times 72}{20+R_V}\Rightarrow \quad 20\times 60+60R_V=72R_V$$

$$\Rightarrow 20\times 60=12R_V \quad \Rightarrow R_V=\frac{20\times 60}{12} \qquad \Rightarrow R_V=100K\Omega$$

مثال (۳-۲۳) : با استفاده از قضیه تونن و نورتن , ولتاژ و جریان بار $R_L(t)$ را که مشخصه آن در شکل (۳-۶۹) نشان داده شده است , تعیین کنید و مقدار توان جذب شده متوسط مقاومت را در t

$= 5\ sec$ تعیین کنید .

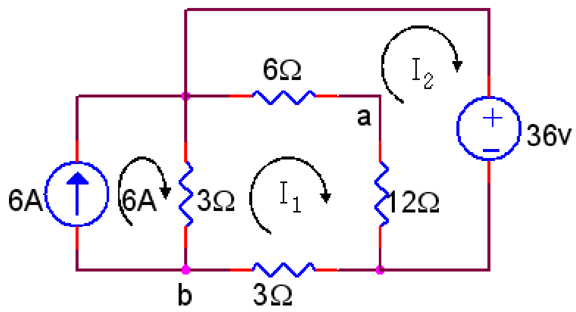


(الف) شکل (۳-۶۹) (ب)

پاسخ : برای اینکه تحلیل به راحتی انجام شود , مقاومت $R(t)$ را به عنوان بار حساب کرده و آن را از شبکه جدا می کنیم و مدار معادل تونن یا نورتن را به دست می آوریم :

۱. محاسبه V_{oc} : فرضاً از روش تحلیل مش استفاده نموده (مطابق شکل (۳-۷۰)) و با محاسبه جریان های I_1 و I_2 , ولتاژ مدار باز را حساب می کنیم :

$$\begin{cases} 3(I_1-6)+(6+12)(I_1-I_2)+3I_1=0 \\ (6+12)(I_2-I_1)+36=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24I_1-18I_2=18 \\ -18I_1+18I_2=-36 \end{cases}$$



شکل (۳-۷۰)

$$\Rightarrow \begin{cases} 4I_1-3I_2=3 \\ -3I_1+3I_2=-6 \end{cases} \qquad \Rightarrow I_1=-3A$$

$$\Rightarrow 3I_2=-6+3(-3)=-15 \qquad \Rightarrow I_2=-5A$$

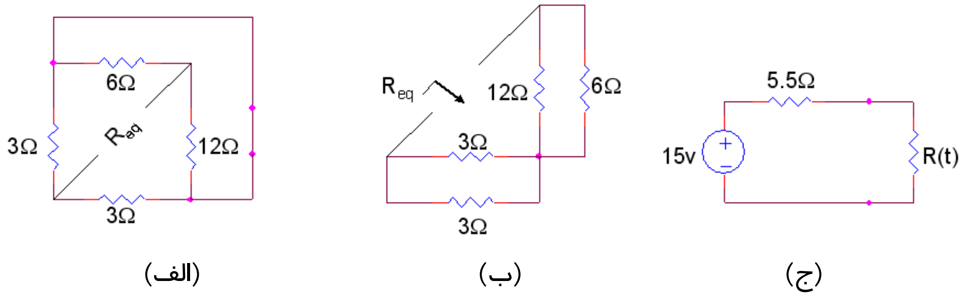
$$V_{OC}=V_{ab}=12(I_1-I_2)+3I_1 \qquad \Rightarrow V_{OC}=12(-3+5)+3(-3)=24-9=15v$$

۲. محاسبه R_{eq} : با اتصال کوتاه کردن منبع ولتاژ 36v و مدار باز کردن منبع جریان 6A مدار به شکل (۳-۷۱-الف و ب) در می آید و

$$R_{eq}=\frac{6\times12}{6+12}+\frac{3}{2}=5.5\Omega$$

حال معادله $R(t)$ را از روی مشخصه می نویسیم :

$$R(t)=\begin{cases}10 & t\le 0\\ -\frac{8}{5}t+10 & 0\le t\le 5\\ 2 & t\ge 5\end{cases}$$



شکل(۳-۷۱)

و R(t) را به مدار معادل تونن می بندیم (مطابق شکل(۳-۷۱-ج)) و i(t) و v(t) را برای زمان های مختلف محاسبه می کنیم :

$$i(t)=\frac{15}{5.5+R(t)}$$

$$i(t)=\begin{cases}\dfrac{15}{5.5+10} & t\le 0\\[2mm] \dfrac{15}{5.5-\frac{8}{5}t+10} & 0\le t\le 5\\[2mm] \dfrac{15}{5.5+2} & t\ge 5\end{cases}\qquad \Rightarrow i(t)=\begin{cases}0.97 & t\le 0\\ \dfrac{15}{15.5-1.6t} & 0\le t\le 5\\ 2 & t\ge 5\end{cases}$$

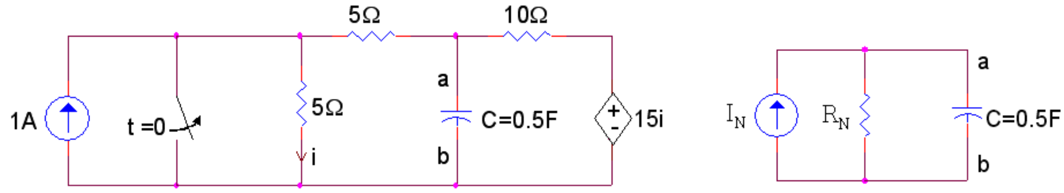
$$v(t)=\frac{R(t)\times 15}{5.5+R(t)}=R(t)i(t)\quad \Rightarrow v(t)=\begin{cases}0.97\times 10 & t\le 0\\ (-1.6t+10)(\dfrac{15}{15.5-1.6t}) & 0\le t\le 5\\ 2\times 2 & t\ge 5\end{cases}$$

$$\Rightarrow v(t)=\begin{cases}9.7 & t\le 0\\ \dfrac{-24t+150}{-1.6t+15.5} & 0\le t\le 5\\ 4 & t\ge 5\end{cases}$$

توان در t = 5 sec : برای محاسبه توان از رابطه $P=R(r)i^2(t)=v(t)i(t)$ استفاده می کنیم :

$P = 4 \times 2 = 8W$

مثال (۳-۲٤) : مدار شکل (۳-۷۲-الف) را با استفاده از قضایای تونن و نورتن به یک مدار ساده RC موازی با تحریک منبع جریان تبدیل نمایید .



(الف) شکل(۳-۷۲) (ب)

پاسخ : پاسخ مدار , مداری است مطابق شکل (۳-۷۲-ب) برای زمان های t >0 :

برای رسیدن به این مدار , ابتدا خازن را به عنوان بار (مصرف کننده) در نظر می گیریم و آن را از شبکه جدا می کنیم و با استفاده از قضایای تونن و نورتن مدار معادل نورتن را به دست می آوریم .

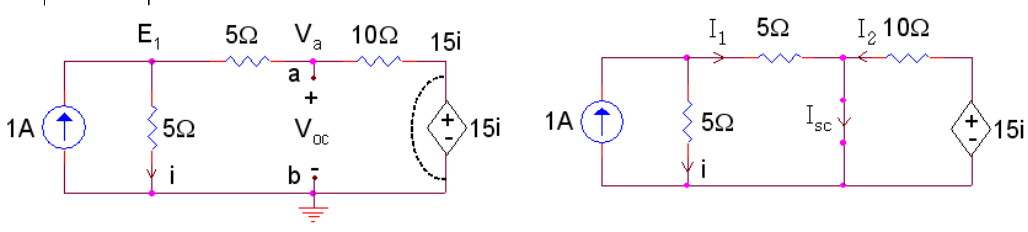
۱. محاسبه ولتاژ مدار باز $V_{ab} = V_{OC}$ بعد از باز شدن کلید :

فرضاً از روش گره استفاده می کنیم و با توجه به شکل (۳ -۷۳-الف) برای گره ها KCL می نویسیم:

$$\begin{cases} KCL(1) \Rightarrow \dfrac{E_1}{5} + \dfrac{E_1 - V_a}{5} - 1 = 0 \\ KCL(a) \Rightarrow \dfrac{V_a - E_1}{5} + \dfrac{V_a - 15i}{10} = 0 \\ i = \dfrac{E_1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2E_1 - V_a = 5 \\ -2E_1 + 3V_a - 15i = 0 \\ i = \dfrac{E_1}{5} \Rightarrow 15i = 15 \times \dfrac{E_1}{5} = 3E_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2E_1 - V_a = 5 \\ -2E_1 + 3V_a - 3E_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2E_1 - V_a = 5 \\ -5E_1 + 3V_a = 0 \end{cases}$$

$$V_a = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{+5 \times 5}{6-5} \Rightarrow \quad V_{oc} = V_a = 25\text{v}$$



(ا لف) شکل(۳-۷۳) (ب)

۲.محاسبه جریان اتصال کوتاه(I_{SC}) :

محل باز شدن خازن یعنی نقاط a و b را اتصال کوتاه می نماییم و با توجه به رعایت قرارداد متناظر بین ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه , مطابق شکل (۳-۷۳-ب) جریان اتصال کوتاه I_{SC} را محاسبه می نماییم :

با توجه به مساوی بودن مقاومت ها : $I_1 = i = \frac{1}{2}A$

و جریان شاخه 10Ω : $I_2 = \frac{15i}{10} = \frac{15\times\frac{1}{2}}{10} = \frac{3}{4}A$

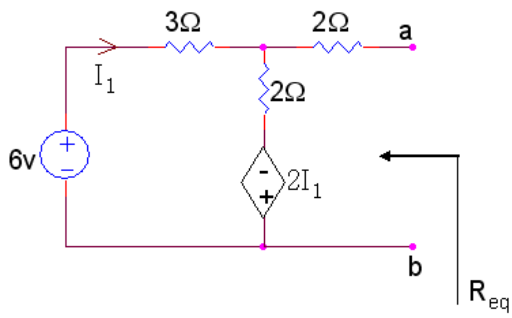
در نتیجه : $I_{SC} = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}A$

۳.با توجه به رابطه $R_{eq} = \frac{V_{OC}}{I_{SC}}$ داریم : $R_{eq} = \frac{25}{5/4} = 20\Omega$

٤. بنابراین در مدار معادل شکل (۳-) جریان نورتن $I_N = \frac{5}{4}A$ و مقاومت نورتن $R_N = 20\Omega$ نتیجه می شود .

- **مثال (۳-۲۵):** مقاومت معادل از بین دو نقطه a و b در مدار شکل (۳- ۷٤) برابر است **با :**

الف :صفر ب: $۳/۲\ \Omega$ ج: ٤Ω د: $۳\ \Omega$ ه: هیچکدام

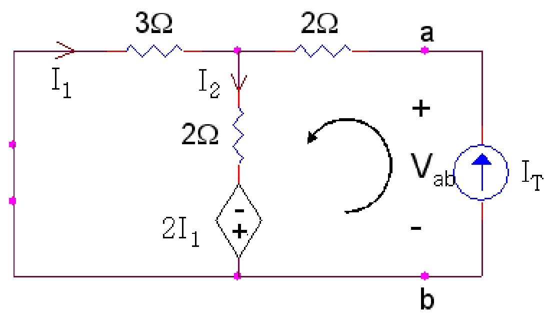


شکل(۳-۷٤)

- **پاسخ:** در این مثال برای محاسبه مقاومت معادل از روش (۳) استفاده می نماییم:

۱ – منبع $۶\ V$ را اتصال کوتاه می کنیم ویک منبع جریان I_T مطابق شکل (۳- ۷۵)بین دو نقطه a و b متصل می نماییم

۲–ولتاژ دو سر منبع جریان V_{ab} را بدست آورده وسپس مقاومت معادل را محاسبه می نماییم.



شکل (۳-۷۵)

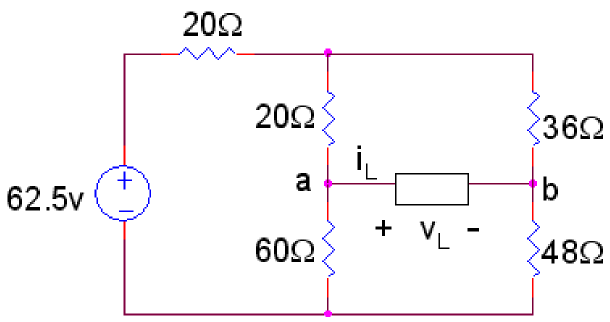
اگر دقت شود ,کافی است که یک معادله KVL در حلقه سمت راست شکل (۳- ۷۵) باجهت خلا ف عقربه های سا عت و جریان شاخه ها نوشته شود :

$$KCL(1) \Rightarrow I_2 = I_1 + I_T$$
$$KVL \Rightarrow 2I_T + 2(I_1 + I_T) - 2I_1 - V_{ab} = 0 \Rightarrow 2I_T + 2I_1 + 2I_T - 2I_1 = V_{ab}$$
$$4I_T = V_{ab} \text{ و } R_{eq} = \frac{V_{ab}}{I_T} = \frac{4I_T}{I_T} \Rightarrow R_{eq} = 4\Omega$$

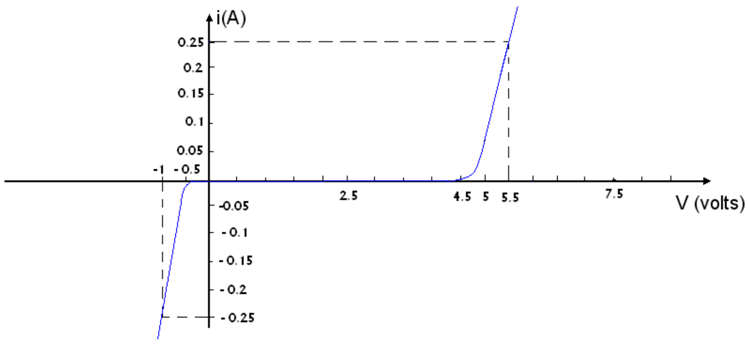
نتیجه می شود که پاسخ (ج) پاسخ صحیح مسئله است.

نکته: این مثال با روش های ۱و۲ قابل تحلیل نیست . (چرا ؟) روش دوم را بکار برده ونشان دهید که $R_{eq} = \frac{0}{0}$ و مبهم است .

- **مثال (۳-۲۶) :** در مدار شکل (۳-۷۶- ا لف) با استفاده قضیه تونن ,ولتاژ V_Lو جریان (i_L) مقاومت غیر خطی را که مشخصه آن در شکل (۳- ۷۶- ب) نشان داده شده است حساب کنید.



(الف)



(ب)

شکل(۳-۷۶)

- **پاسخ:۱-** ابتدا ء مقاومت غیر خطی را به عنوان بار (مصرف کننده) در نظر گرفته از بقیه مدار جدا می نماییم وبا روش مش و انتخاب جریان های I_1 وI_2 در شکل (۳-۷۷-۱ لف) برای آن ها KVL می نویسیم:

$$\begin{cases} KVL(1) \Rightarrow 100I_1 - 80I_2 = 62.5 \\ KVL(2) \Rightarrow -80I_1 + 164I_2 = 0 \end{cases}$$

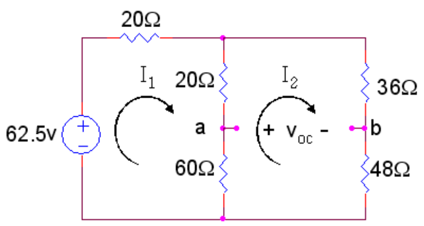
$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 62.5 & -80 \\ 0 & 164 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 100 & -80 \\ -80 & 164 \end{vmatrix}} = \frac{164 \times 62.5}{100 \times 164 - (-80)(-80)} = 1.025A$$

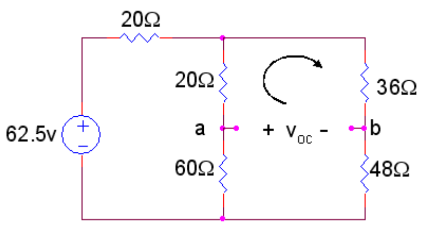
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 62.5 \\ -80 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 100 & -80 \\ -80 & 164 \end{vmatrix}} = \frac{-(-80 \times 62.5)}{10000} = 0.5A$$

۲-باتوجه به جریان های I_1 و I_2 وحلقه مشخص شده در شکل (۳-۷۷- ب) ولتاژ مدار باز $V_{OC} = V_{ab}$ را بدست می آوریم .

$$36I_2 - V_{OC} + 20(I_2 - I_1) = 0 \Rightarrow V_{OC} = 56I_2 - 20I_1 = 56 \times .05 - 20 \times 1.025$$

$$V_{OC} = 7.5volts$$





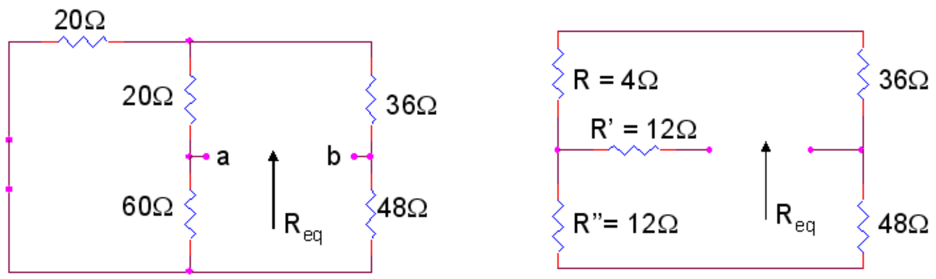
(ب)　　　　　　شکل(۳-۷۷)　　　　　　(ا لف)

۳-محاسبه مقاومت معادل R_{eq}

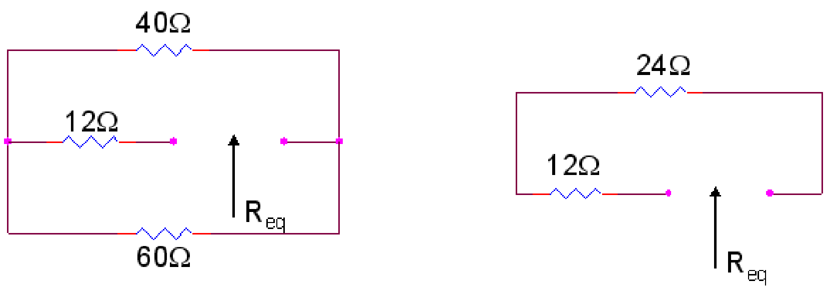
برای محاسبه مقاومت معادل از دو نقطه a و b می توان از سه روش ذکر شده استفاده نمود که در این جا از روش (۱) مقاومت معادل را حساب می کنیم . اول منبع ۶۲/۵ ولت را اتصال کوتاه نموده و مثلث شامل شاخه های Ω ۲۰و۲۰ Ω و ۶۰ Ω شکل(۳-۷۸- ا لف) را به ستاره با شاخه های RوR'و R'' نشان داده شده در شکل (۳-۷۸-ب) تبدیل می کنیم و سپس با ترکیب سری وموازی مقاومت ها مانند شکل های (۳-۷۸ -ج ود) مقاومت معادل را بدست می آوریم.

$$R=\frac{20\times 20}{20+20+60}=\frac{400}{100}=4\Omega \text{ و } R'=\frac{20\times 60}{100}=12\Omega \text{ و } R''=\frac{60\times 20}{100}=12\Omega$$

$$R+36=4+36=40\Omega \text{ و } R''+48=60\Omega \Rightarrow R_{eq}=\frac{40\times 60}{40+60}+12=24+12 \Rightarrow R_{eq}=36\Omega$$

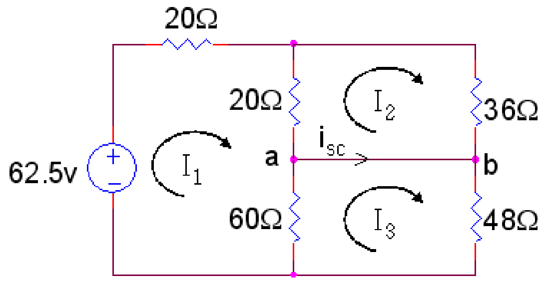


(ب)　　　　　　**(الف)**



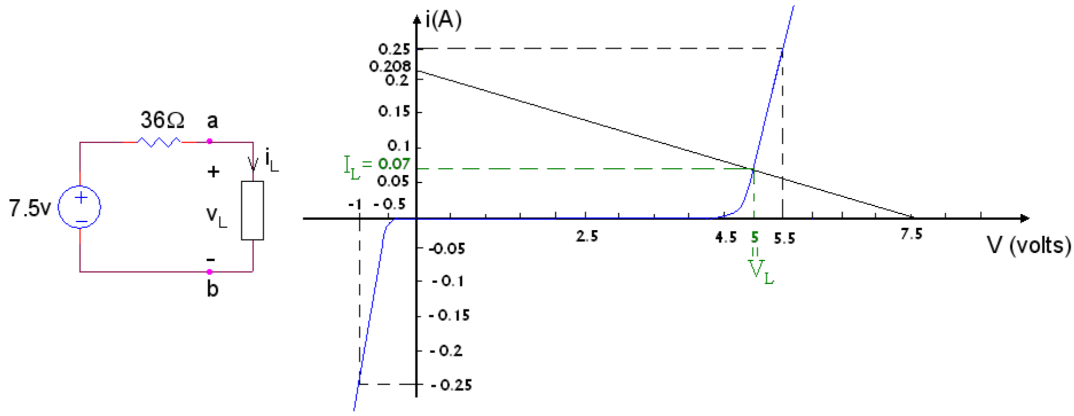
(د)　　　　　　**شکل(۳-۷۸)**　　　　　　**(ج)**

نکته: در صورتیکه روش تبدیل ستاره مثلث را بکار نبریم می توان از روش (۲) و با تعیین جریان اتصال کو تاه $I_{SC}=I_3-I_2$ از مدار شکل (۳- ۷۹) مقاومت معادل را محاسبه کرد.



شکل (۳-۷۹)

٤– حال که مدار معادل تونن با $V_{th} = 7.5volts$ و $R_{th} = 36\Omega$ مشخص شد مقاومت غیر خطی را مطابق شکل(۳- ۸۰ -الف)به مدار معادل متصل می نماییم وبا متغیر های v_L, i_L معادله KVL حلقه را می نویسیم . این معادله مشخصه یک خط مستقیم است ومکان هندسی جریان ها ولتاژ های v_L, i_L است که در معادله KVL صدق می کنند واز طرف دیگر مکان هندسی این نقاط v_L, i_L مشخصه مقاومت غیر خطی $i_L = g(v_L)$ است بنا براین محل تلا قی دو مکان هندسی از روش ترسیمی جواب مسئله را معین می نماید .



(الف) شکل(۳-۸۰) (ب)

$$\begin{cases} i_L = g(v_L) \\ 7.5 = 36 i_L + v_L \end{cases}$$

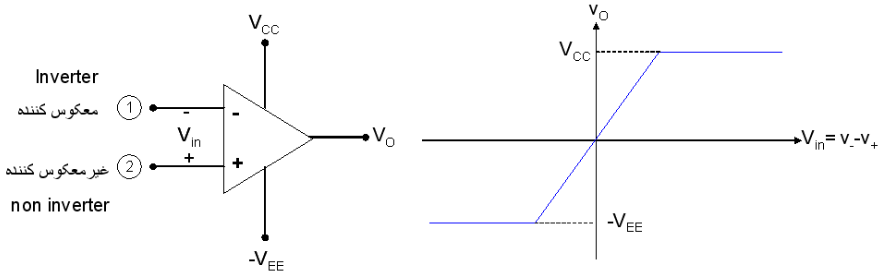
با رسم خط مستقیم در صفحه مشخصه مقاومت غیر خطی , مطابق شکل (۳-۸۰-ب) ازتلا قی آن ها جواب به شرح زیر بدست می آید. $V_L = 5volts$ و $I_L = \dfrac{2.5}{36} \approx 0.07A$

تذکر:برای رسم معادله $7.5 = 36 i_L + v_L$ دونقطه $(i_L = 0, v_L = 7{,}5)$ و $(i_L = \dfrac{7{,}5}{36} \approx 0.208, v_L = 0)$ روی مشخصه بار غیر خطی مشخص می نماییم وخط مستقیم را رسم می کنیم .

• ۳-۲۵ تقویت کننده های عملیاتی (Operational Amplifier)

یکی از مدار ها یی که به صورت مدار مجتمع (IC) در تحلیل مدارها مطرح است و مدار مرکبی است که با اجزاءِ ساده مداری مدل سازی می شود ***تقویت کننده عملیاتی (Op amp)*** نامیده می شود و با نماد شکل (۳-۸۱ -ا لف) نشان داده می شود .

تقویت کننده های عملیاتی عموماً دارای دوسر ورودی ویک سر خروجی هستند که بین دوسر ورودی یک تقویت کننده تفاضلی قرار گرفته وتوسط دو منبع ولتاژ جریان مستقیم (dc) تغذیه می شوند مشخصه خروجی برحسب اختلاف پتانسیل بین دو ورودی تقویت کننده عملیاتی وباتوجه به منا بع تغذیه مطابق شکل (۳-۸۱-ب) می باشد.



(ا لف) شکل (۳-۸۱) (ب)

- **کاربرد های تقویت کننده های عملیاتی عبارتند از :** تقویت کننده,جمع کننده ,مقایسه کننده,انتگرالگیر و مشتق گیر موج های ورودی.

• ۳-۲۵-۱ – مدار معادل تقویت کننده عملیاتی :

یک تقویت کننده عملیاتی را در فرکانس های کم می توان با اجزاءِ ساده خطی, مدل سازی نمود . مدل مداری تقویت کننده عملیاتی در شکل (۳- ۸۲-ا لف) نشان داده شده است . در این مدار :

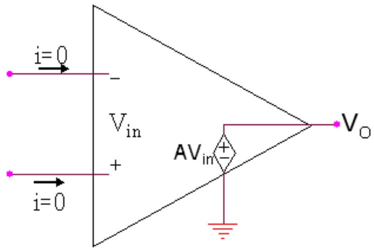
R_{in} = مقاومت ورودی : مقاومت خیلی بزرگی است که بین دو ورودی قرار گرفته است .

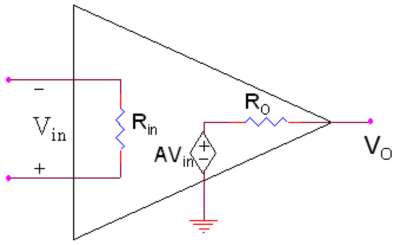
V_{in} = ولتاژ بین دو ورودی : که ورودی منفی را ورودی معکوس کننده و ورودی مثبت را غیر معکوس کننده گویند .

R_O = مقاومت خروجی : مقاومت کوچکی است که در خروجی قرار گرفته است .

A = بهره ولتاژ مدار باز تقویت کننده : که عدد بسیار بزرگی است و بهره ولتاژ با یک منبع وابسته مدل سازی شده است و برابر AV_{in} می باشد.

V_O = ولتاژ خروجی نسبت به سر اتصال زمین است .





(ب) مدارمعادل ایده آل   شکل(۳-۸۲)   (ا لف) مدار معادل OpAmp

ضمناً از محدودیت هایی که منابع تغذیه V_{CC} و $-V_{EE}$ ایجاد می نمایند , صرف نظر شده است .

با توجه به مقادیر Rin و Ro و A , یک تقویت کننده عملیاتی مانند (OpAmp 741) که از لحاظ نوعی $R_{in} \geq 2M\Omega$, $R_O < 80\Omega$ و $A \geq 10^5$ می باشد , در تحلیل مدار , مدل مداری ایده آل تقویت کننده عملیاتی را مطابق شکل (۳-۸۲-ب) جانشین مدل مداری می نمایند و همان طور که مشاهده می شود در مدل ایده آل به دلیل خیلی بزرگ بودن R_{in} , مدار باز جانشین آن شده است و هم چنین به جای R_O به دلیل کوچکی ,اتصال کوتاه جای آن قرار گرفته است و تحلیل بر اساس A انجام می شود و پس از تعیین پاسخ بر حسب A , A را به سمت بی نهایت $(A \to \infty)$ میل داده و حد عبارت را حساب می کنند .

• ۳- ۲۵-۲- تحلیل مدارهای شامل تقویت کننده عملیاتی :

همان طور که در بحث مدل سازی مطرح شد , با صرف نظر از محدودیت منابع تغذیه dc :

۱. به جای تقویت کننده عملیاتی , مدار معادل ایده آل آن را قرار می دهیم .

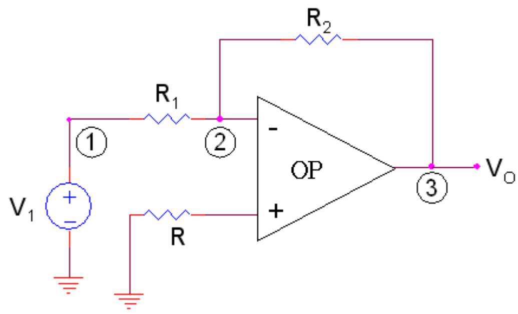
۲. معمولاً به روش پتانسیل گره معادلات KCL را برای گره ها می نویسیم و پاسخ را حساب می کنیم .

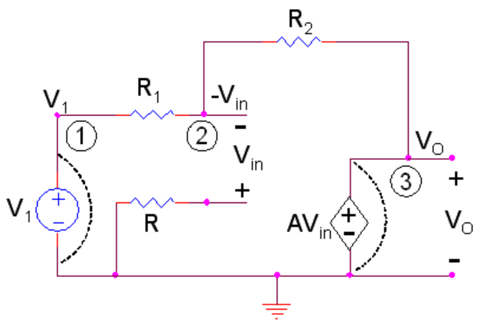
۳. A بهره ولتاژ مدار باز را به سمت بینهایت میل می دهیم و پاسخ را به دست می آوریم .

نکته : روش دیگری نیز در کتب برای تحلیل مطرح شده است که بدان اشاره می نماییم . همان گونه که در مدار معادل ایده آل مشاهده می شود , جریان ها ی ورودی تقویت کننده عملیاتی صفر است و با توجه به بزرگ بودن A و محدودیت منابع تغذیه V_{CC} و V_{EE} , معمولاً $(V_{in} \approx 0)$ در نظر گرفته و یک صفر مصنوعی در سرهای معکوس کننده و غیر معکوس کننده در نظر می گیرند و تحلیل را با روش گره انجام می دهند.

حال به تحلیل چند مثال می پردازیم :

- **مثال (۳-۲۷) :** در مدار تقویت کننده معکوس کننده شکل (۳-۸۳-ا لف) ولتاژ خروجی V_O را بر حسب ولتاژ ورودی V_1 به دست آورید .





(ا لف) شکل(۳-۸۳) (ب)

- **پاسخ :**

۱. به جای تقویت کننده عملیاتی مدار معادل ایده آل آن را قرار می دهیم . (شکل (۳-۸۳-ب))

۲. برای گره ها پتانسیل فرض نموده و منابع ولتاژ را اتصال کوتاه فرض نموده و KCL های ممکن را می نویسیم و تحلیل را انجام می دهیم .

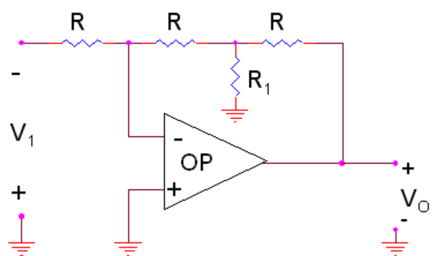
تذکر : چون از مقاومت R جریان عبور نمی کند , بر این اساس ولتاژ گره (2) را برابر $-V_{in}$ انتخاب نموده ایم .

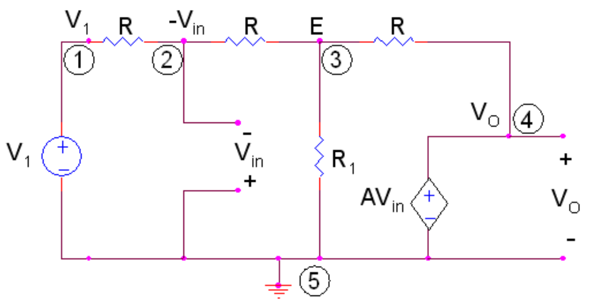
$$\begin{cases} \dfrac{-V_{in}-V_1}{R_1}+\dfrac{-V_{in}-V_O}{R_2}=0 \\ V_O=AV_{in} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(R_1+R_2)V_{in}-R_1V_O=R_2V_1 \\ V_{in}=\dfrac{V_O}{A} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -(R_1+R_2)\frac{V_O}{A}-R_1V_O=R_2V_1 \quad \Rightarrow -\left(\frac{R_1+R_2}{A}+R_1\right)V_O=R_2V_1$$

$$\Rightarrow V_O=-\frac{R_2V_1}{\dfrac{R_1+R_2}{A}+R_1} \quad \Rightarrow \quad \underset{A\to\infty}{V_0=-\frac{R_2V_1}{\dfrac{R_1+R_2}{A}+R_1}} \qquad \Rightarrow V_O=-\frac{R_2}{R_1}V_1$$

- **مثال (۳-۲۸) :** در مدار شکل (۳- ۸٤-ا لف) R_1 را چنان تعیین کنید که به ازاء R=10KΩ , ولتاژ خروجی $V_O=-100V_1$ گردد.





(الف) شکل(۳-۸٤) (ب)

- **پاسخ :**

۱. به جای تقویت کننده عملیاتی مدار معادل ایده آل آن را قرار می دهیم . (شکل (۳-۸٤-ب))

۲. پتانسیل گره ها را مشخص و منابع ولتاژ را اتصال کوتاه فرض نموده و KCL برای گره های ممکن می نویسیم .

$$\begin{cases} \dfrac{-V_{in}-V_1}{R}+\dfrac{-V_{in}-E}{R}=-0 \\ \dfrac{E-(-V_{in})}{R}+\dfrac{E}{R_1}+\dfrac{E-V_O}{R}=0 \\ V_O=AV_{in} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(2R)V_{in}-RE=RV_1 \\ R_1V_{in}+(2R_1+R)E-R_1V_O=0 \\ V_{in}=\dfrac{V_O}{A} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2R\dfrac{V_O}{A}-RE=RV_1 \\ \left(\dfrac{R_1}{A}-R_1\right)V_O+(2R_1+R)E=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_O=\frac{\begin{vmatrix} RV_1 & -R \\ 0 & (2R_1+R) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{2R}{A} & -R \\ \dfrac{R_1}{A}-R_1 & (2R_1+R) \end{vmatrix}}=\frac{(2R_1+R)RV_1}{\dfrac{-2R}{A}(2R_1+R)+R(\dfrac{R_1}{A}-R_1)}$$

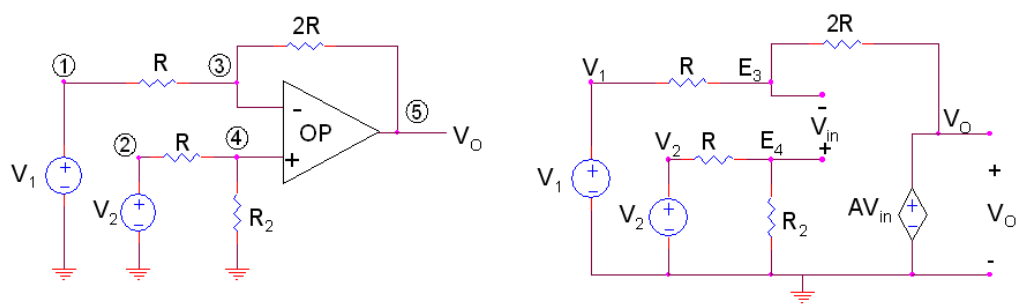
۳. با میل دادن $A\to\infty$, نتیجه می شود :

$$V_O=-\frac{(2R_1+R)RV_1}{RR_1}=-\frac{(2R_1+R)V_1}{R_1}$$

٤. از مقایسه پاسخ به دست آمده با رابطه $V_0=-100V_1$ و هم چنین قراردادن $R=10K\Omega$, R_1 به دست می آید :

$$\frac{2R_1+R}{R_1}=100\Rightarrow \quad R_1=\frac{10}{98}K\Omega\ 98R_1=10\Rightarrow\ 98R_1=R\Rightarrow\ \ 2R_1+R=100R_1\Rightarrow$$

- **مثال (۳-۲۹) :** در مدار شکل (۳-۸۵-الف) , R_2 را بر حسب R چنان تعیین کنید که $V_O=+\frac{2}{3}V_2-2V_1$ گردد .



(ا لف) شکل(۳-۸۵) (ب)

- **پاسخ:**

۱. مدار معادل ایده آل تقویت کننده عملیاتی (OpAmp) را در مدار قرار می دهیم.

۲. در مدار شکل (۳-۸۵-ب) برای گره ها نسبت به مبنا پتانسیل فرض نموده و منابع ولتاژ را اتصال کوتاه فرض می کنیم و برای گره های ممکن KCL می نویسیم :

$$\begin{cases} \dfrac{E_3-V_1}{R}+\dfrac{E_3-V_O}{2R}=0 \\ \dfrac{E_4-V_2}{R}+\dfrac{E_4}{R_2}=0 \\ V_{in}=E_4-E_3 \\ V_O=AV_{in}\Rightarrow V_{in}=\dfrac{V_O}{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3E_3-V_O=2V_1 \\ (R_2+R)E_4=R_2V_2 \\ \dfrac{V_O}{A}=E_4-E_3\Rightarrow E_4=\dfrac{V_O}{A}+E_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3E_3-V_O=2V_1 \\ (R_2+R)(\dfrac{V_O}{A}+E_3)=R_2V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3E_3-V_O=2V_1 \\ (R_2+R)E_3+(R_2+R)\dfrac{V_O}{A}=R_2V_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_O=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2V_1 \\ R_2+R & R_2V_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ R_2+R & \dfrac{R_2+R}{A} \end{vmatrix}}=\frac{3R_2V_2-2(R_2+R)V_1}{3\left(\dfrac{R_2+R}{A}\right)+R_2+R}$$

۳. با میل دادن $A\to\infty$:

$$\underset{A\to\infty}{V_O}=\frac{3R_2V_2}{R_2+R}-2V_1$$

٤. با مقایسه $V_O=\dfrac{3R_2}{R_2+R}V_2-2V_1$ با $V_O=\dfrac{2}{3}V_2-2V_1$ داریم :

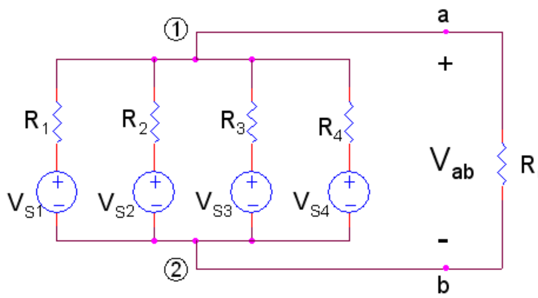
$$\frac{2}{3}=\frac{3R_2}{R_2+R} \quad \Rightarrow 9R_2=2R_2+2R \quad \Rightarrow 7R_2=2R \quad \Rightarrow R_2=\frac{2R}{7}$$

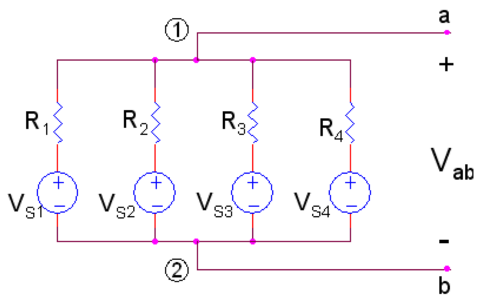
نظریه میلمن :

این نظریه در مورد تعیین ولتاژ دو سر منابع ولتاژ سری با مقاومت (مدار معادل تونن) هایی که به طور موازی اتصال یافته اند (مطابق شکل (۳-۸۶-الف)) به کار می رود و به شرح زیر بیان می شود :

$$V_{ab}=\frac{G_1V_{S1}+G_2V_{S2}+G_3V_{S3}+G_4V_{S4}}{G_1+G_2+G_3+G_4+G_O}$$

که در این عبارت $G_i = \frac{1}{R_i}$ و $G_O = \frac{1}{R_O}$ می باشد و در صورتی که بین a و b مدار باز باشد , $G_O = 0$ می شود . (شکل(۳-۸۶-ب))





(ا لف) شکل(۳-۸۶) (ب)

برای اثبات رابطه نظریه میلمن از روش پتانسیل گره استفاده می کنیم و پتانسیل گره (۱) را برابر V_{ab} نسبت به گره (۲) فرض می کنیم ودر شکل (۳-۸۶-الف) برای گره (۱) , KCL می نویسیم :

$$KCL(1) \Rightarrow \frac{V_{ab} - V_{S1}}{R_1} + \frac{V_{ab} - V_{S2}}{R_2} + \frac{V_{ab} - V_{S3}}{R_3} + \frac{V_{ab} - V_{S4}}{R_4} + \frac{V_{ab}}{R_O} = 0$$

و به جای مقاومت های R_i رسانایی G_i را قرار می دهیم و معادله را ساده کرده و V_{ab} را حساب میکنیم

$$KCL(1) \Rightarrow G_1V_{ab} - G_1V_{S1} + G_2V_{ab} - G_2V_{S2} + G_3V_{ab} - G_3V_{S3} + G_4V_{ab} - G_4V_{S4} + G_OV_{ab} = 0$$

$$(G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_O)V_{ab} = G_1V_{S1} + G_2V_{S2} + G_3V_{S3} + G_4V_{S4}$$

$$V_{ab} = \frac{G_1V_{S1} + G_2V_{S2} + G_3V_{S3} + G_4V_{S4}}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_O}$$

بنابراین نظریه به شرح زیر تعریف می گردد :

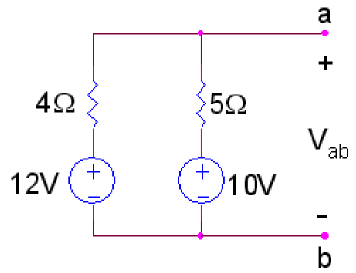
ولتاژ دو سر اتصال موازی منابع ولتاژ فیزیکی (مدارهای معادل تونن) برابر است با :

ولتاژ دو سر اتصال موازی منابع = حاصلجمع حاصل ضرب رسانایی هر منبع در ولتاژ منبع / مجموع رسانایی های منابع + رسانایی متصل بین دو گره

• مثال (۳-۳۰) : در مدار شکل (۳-۸۷) :

ا لف : V_{ab} را حساب کنید .

ب: در صورتی که مقاومت 5Ω بین ab اتصال یابد , Vab را حساب کنید .



شکل(۳-۸۷)

• پاسخ:

الف : مطابق نظریه میلمن داریم :

$$V_{ab}=\frac{\frac{1}{4}\times 12+\frac{1}{5}\times 10}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}=\frac{3+2}{\frac{5+4}{20}}=\frac{100}{9}V$$

ب : مطابق نظریه میلمن داریم :

$$V_{ab}=\frac{\frac{1}{4}\times 12+\frac{1}{5}\times 10}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}=\frac{3+2}{\frac{5+4+4}{20}}\Rightarrow V_{ab}=\frac{5}{13/20}=\frac{100}{13}V$$

اثر سیگنال های کوچک بر مقاومت های غیر خطی :

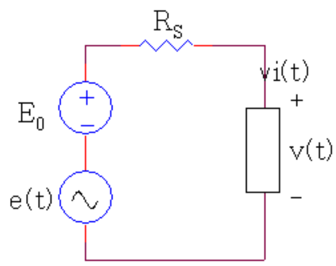
تعریف سیگنال کوچک : موج یا سیگنالی را کوچک گویند که در مقابل یک مقدار ثابت dc قدر مطلق آن خیلی کوچک باشد .

به طور مثال اگر یک موج $e(t)=E_m Cos\omega t$ را با یک ولتاژ E_0 مقایسه نماییم :

$|e| << E_0$ یا $E_m << E_0$

این سیگنال را سیگنال کوچک گویند .

جهت تحلیل ا ثر سیگنال کوچک , یک مقاومت غیر خطی با مشخصه مثال (۳-۲۶) به مدار شکل (۳- ۸۸) که شامل منبع ثابت(dc) E_0 و منبع سیگنال کوچک $e(t)$ است , متصل می نماییم



شکل (۳-۸۸)

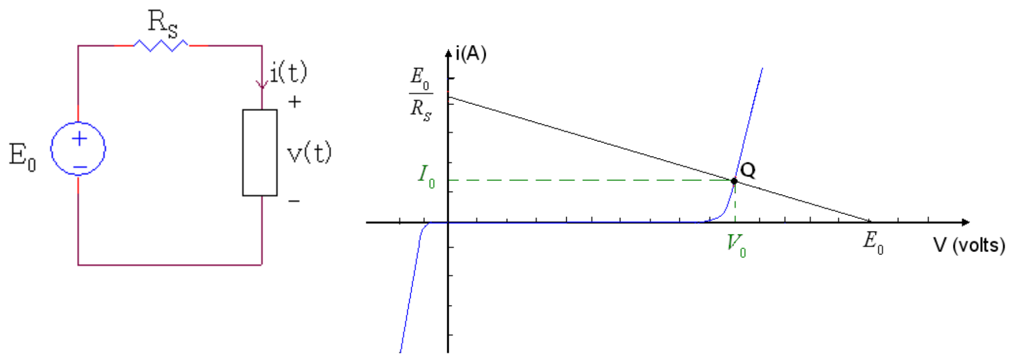
هدف از تحلیل , محاسبه جریان و ولتاژ مقاومت غیر خطی است .

همان طور که ملاحظه می شود مدار دارای منبع متغیر با زمان می باشد , بنابراین i(t) و v(t) در این مدار تابع زمان می باشند و باید در KVL مدار صدق نمایند :

$$KVL \Rightarrow E_0 + e(t) = R_S i(t) + v(t)$$

ضمناً به دلیل غیر خطی بودن مدار محاسبه جریان و ولتاژ از طریق جمع اثر امکان پذیر نیست , بنابراین برای تحلیل :

۱. ابتدا منبع سیگنال را بی اثر می کنیم و مطابق شکل (۳-۸۹) اثر منبع E_0 را از روش ترسیمی به دست می آوریم :

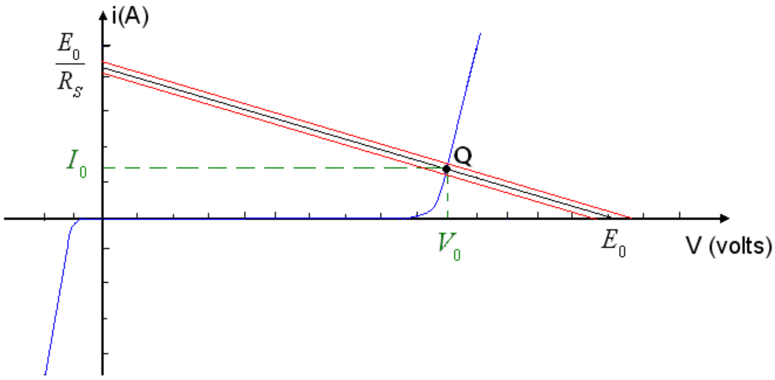


(ا لف) شکل(۳-۸۹) (ب)

$$\begin{cases} E_0 = R_S i(t) + v(t) \\ i(t) = g(v(t)) \end{cases}$$

از معادلات فوق $i(t) = I_0$ و $v(t) = V_0$ به دست می آیند که (V_0, I_0) یک نقطه را در صفحه نشان می دهدکه معمولاً با Q مشخص شده و نقطه کار نامیده می شودومعادله $E_0 = R_S i(t) + v(t)$ را که در صفحه به صورت یک خط مستقیم رسم می شودخط بار dc نامند و I_0 و V_0 در معادله $I_0 = g(V_0)$ صدق می کنند . این عملیات را تحلیل dc گویند .

۲. حال اگر هر دو منبع در مدار قرار گیرند , نتیجتاً به دلیل متغیر بودن منبع دوم خط بار به موازات خود تغییرات کمی را دارد و در نتیجه نقطه کار در اطراف Q مقدار کمی تغییر می کند و باعث جریان و ولتاژ به مقدار کوچکی در اطراف نقطه کار می شود(شکل(۳-۹۰)) و می توان نتیجه گرفت که :



شکل(۳-۹۰)

$$\begin{cases} i(t) \approx I_0 + i_1(t) \\ v(t) \approx V_0 + v_1(t) \end{cases}$$

که در این عبارت $i_1(t)$ مقدار تغییرات جریان $i(t)$ در اطراف I_0 و $v_1(t)$ مقدار تغییرات ولتاژ $v(t)$ در اطراف V_0 می باشد .

ضمناً این مقادیر جریان و ولتاژ باید در معادلات صدق نمایند یعنی :

$$\begin{cases} E_0 + e(t) = R_S(I_0 + i_1(t)) + (V_0 + v_1(t)) \\ I_0 + i_1(t) = g(V_0 + v_1(t)) \end{cases}$$

اگر بسط تیلور معادله $I_0 + i_1(t) = g(V_0 + v_1(t))$ را بنویسیم و با توجه به کوچک بودن $i_1(t)$ و $v_1(t)$ از مشتق های مرتبه دوم به بالا در بسط صرف نظر کنیم , نتیجه می شود :

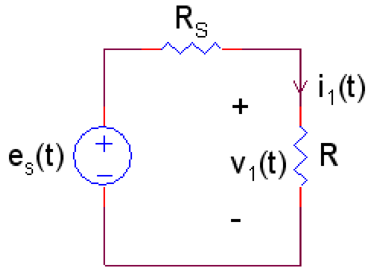
$$I_0 + i_1(t) = g(V_0) + \left.\frac{dg}{dv}\right|_{v=V_0} v_1(t)$$

و با توجه به رابطه $I_0 = g(V_0)$, رابطه $i_1(t) = \left.\frac{dg}{dv}\right|_{v=V_0} v_1(t)$ به دست می آید که در رابطه اخیر $\left.\frac{dg}{dv}\right|_{v=V_0}$ دیمانسیون S (زیمنس) یا mho دارد . چون مقدار $\left.\frac{dg}{dv}\right|_{v=V_0}$ مقدار ثابتی است که آن را با G نشان می دهیم در نتیجه :

$$i_1(t) = Gv_1(t) \quad \text{یا} \quad v_1(t) = \frac{1}{G} i_1(t) \Rightarrow v_1(t) = Ri(t)$$

$R = \frac{1}{G}$ نیز مقاومت دینامیکی مقاومت غیر خطی در نقطه کار می باشد و از لحاظ تحلیلی G برابر شیب مماس بر منحنی در نقطه کار می باشد .

۳. بنابراین در صورتی که منبع $e_s(t)$ به تنهایی در مدار قرار گیرد مطابق شکل (۳-۹۱) به جای مقاومت غیرخطی , مقاومت دینامیکی را قرار می دهیم . مقادیر $i_1(t)$ و $v_1(t)$ به ازاءِ منبع $e_s(t)$ محاسبه می گردند:



شکل(۳-۹۱)

$$\begin{cases} i_1(t) = \dfrac{e_S(t)}{R_S + R} \\ v_1(t) = \dfrac{Re_S(t)}{R_S + R} \end{cases}$$

٤. پس از محاسبه $i_1(t)$ و $v_1(t)$ جریان $i(t)$ و ولتاژ $v(t)$ برابر می شوند با :

$$\begin{cases} i(t) = I_0 + i_1(t) = I_0 + \dfrac{e_S(t)}{R_S + R} \\ v(t) = V_0 + v_1(t) = V_0 + \dfrac{Re_S(t)}{R_S + R} \end{cases}$$

بنابراین به طور کلی روش تحلیلی اثر سیگنال های کوچک بر مقاومت های غیرخطی را می توان به شرح زیر خلاصه نمود :

۱) تحلیل dc : منبع سیگنال کوچک را برابر صفر قرار داده و مدار را با منبع dc که منبع گرایش دهنده (بایاس کننده) نامیده می شود , تحلیل نموده , نقطه کار (نقطه آرامش) (V_0, I_0) را از طریق تحلیلی یا ترسیمی به دست می آوریم .

۲) شیب مماس بر منحنی از طریق ترسیمی یا تحلیلی در نقطه کار محاسبه می شود . این شیب بسته به نوع مشخصه مقاومت غیرخطی ($i = g(v)$ یا $v = f(i)$) , برابر رسانایی G یا مقاومت دینامیکی R می گردد.

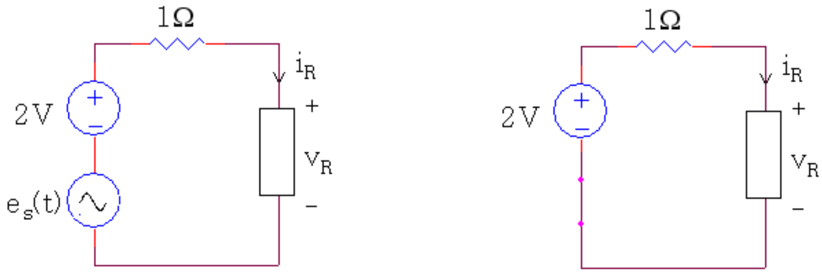
۳) منبع سیگنال کوچک $e_s(t)$ را به تنهایی در مداری که شامل R (مقاومت دینامیکی) مقاومت غیرخطی است قرار داده و آن را تحلیل می نماییم . در نتیجه مقدار تغییرات جریان $i_1(t)$ و مقدار تغییرت ولتاژ $v_1(t)$ را به دست می آوریم.

٤) مقادیر جریان $i(t)$ و ولتاژ $v(t)$ را از روابط زیر محاسبه می کنیم :

$$\begin{cases} v(t) = V_0 + v_1(t) \\ i(t) = I_0 + i_1(t) \end{cases}$$

• **مثال (۳-۳۱)** : در مدار شکل (۳-۹۲-الف) اثر سیگنال $e_S(t) = 0.1Cos(t)$ را بر مقاومت غیرخطی $i_R = v_R^2$ به ازاءِ $v_R \geq 0$ به دست آورید .

• **پاسخ** :



(الف) شکل(۳-۹۲) (ب)

۱. تحلیل dc و تغییر نقطه کار : مدار شکل (۳- ۹۲-ب) را در نظر می گیریم و از دستگاه معادلات

$$\begin{cases} i_R = v_R^{\ 2} \\ 2 = 1\times i_R + v_R \end{cases} \Rightarrow 2 = v_R^{\ 2} + v_R \quad \Rightarrow v_R^{\ 2} + v_R - 2 = 0$$

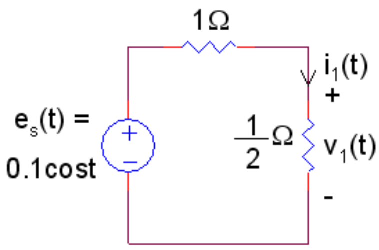
$$\Rightarrow v_R = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right.$$

همان گونه که بیان شده است فقط $v_R=1^V$ جواب مسئله است , در نتیجه $i_R=1^2=1^A$ می شود و نقطه کار برابر $Q=(1^V\ ,\ 1^A)$ مشخص می شود .

۲. مقاومت دینامیکی مقاومت غیر خطی را در نقطه کار Q محاسبه می کنیم:

$$G = \left.\frac{di_R}{dv_R}\right|_{v_R=1V} = 2v_R = 2\times 1 = 2(S) \qquad R = \frac{1}{G} = \frac{1}{2}\Omega$$

۳. اثر سیگنال کوچک را به تنهایی در مدار شکل (۳-۹۳) به دست می آوریم :



شکل(۳-۹۳)

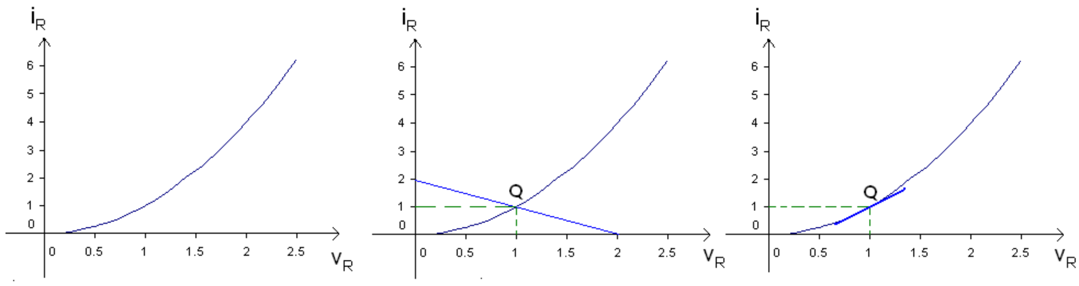
$$i_1(t) = \frac{e_S(t)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{0.1\cos t^V}{\frac{3}{2}} = \frac{0.2}{3}\cos t^A \approx 0.066\cos t^A$$

$$v_1(t) = \frac{\frac{1}{2}\times 0.1\cos t}{1+\frac{1}{2}} = \frac{0.1}{3}\cos t^V = 0.033\cos t$$

در نتیجه :

$$i(t) = I_0 + i_1(t) \approx 1 + 0.066 \cos t^{A}$$
$$v(t) = V_0 + v_1(t) \approx 1 + 0.033 \cos t^{V}$$

روش ترسیمی حل مسئله مطابق شکل (۳-۹٤) می باشد .



(ا لف) (ب) (ج)

شکل(۳-۹٤)

در این روش با توجه به مشخصه مقاومت غیر خطی $i_R = v_R^2$ که در شکل (۳-۹٤-الف) رسم شده خط بار $2 = 1 \times i_R + v_R$ را نیز رسم کرده ,از محل تلاقی دومشخصه, نقطه کار راکه در شکل (۳-۹٤-ب) نشان داده شده .بدست می آوریم ودر محل نقطه کار مماس بر منحنی را رسم وشیب آن را بدست آورده وبعداز تعیین شیب ومشخص شدن مقاومت دینامیکی بقیه تحلیل مانند قسمت های قبل است .

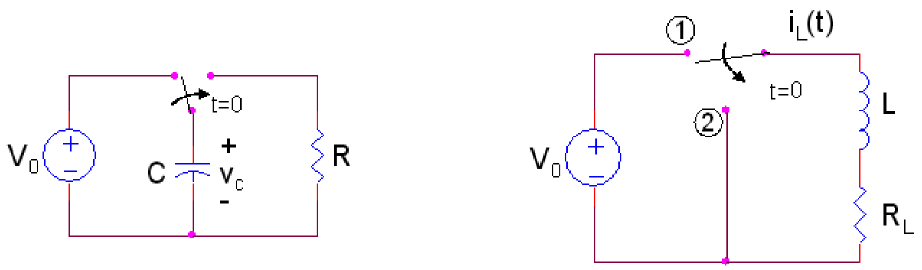
تجزیه و تحلیل مدار های مرتبه اول:

٤-١-تجزیه وتحلیل مدار های خطی تغییر ناپذیر با زمان مرتبه اول

در فصل سوم مدار های مقاومتی با منابع جریان مستقیم مورد تجزیه وتحلیل قرار گرفتند در این فصل به تجزیه وتحلیل مدار هایی می پردازیم که علاوه بر مقاومت شامل یک جزءِ ذخیره کننده انرژی مانند سلف یا خازن می باشند وهمچنین مدار ها مدت طولا نی د ر یک حا لت دائم قرار داشته و در زمان مشخصی مانند $t=0$ (مبداءِ زمان) یک تغییر وضعیت توسط یک کلید در آن ها بوجود می آید .این تغییر وضعیت باعث ایجاد جریان یا ولتاژ ی متغییر در مدار شده و تغییر انرژی در مدارباعث یک حالت گذرایی میگردد تا اینکه مجدداً مدار به حالت پا یدار جدیدی می رسد, مدت زمان بین دو حالت پایدار را ***زمان گذرایی (ترانزینت)*** گویند. از آنجا که رابطه بین ولتاژ وجریان سلف وخازن خطی تغییر ناپذیر بازمان بصورت مشتق مرتبه اول است در نتیجه معادله تحلیل اینگونه مدار ها معادلهبصورت معادله دیفرانسیل مرتبه اول است و براین مبنا "***مدار های مرتبه اول***" نامیده می شوند. در این مبحث به تعیین پاسخ مدار های مرتبه اول RL و RC می پردازیم.

٤-٢- پاسخ ورودی صفر مدار های مرتبه اول RL وRC ساده

مدار های شکل (٤-١-ا لف وب) را در نظر گرفته و ابتداءِ از لحاظ فیزیکی آن ها را بترتیب مورد بررسی قرار می دهیم .

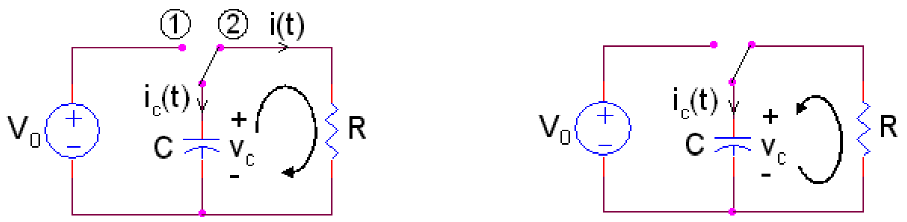


(ا لف)   شکل(٤-١)   (ب)

- **ا لف- بررسی فیزیکی مدارRC :** خازن C مدت طولا نی به منبع ولتاژ dc با ولتاژ V_0 متصل بوده بنابراین انرژی بصورت ولتاژ در آن ذخیره شده است و وقتی که کلید مدار از وضعیت (١) به وضعیت (٢) در می آید انرژی ذخیره شده در خازن باعث ایجاد جریانی متغییر با زمان در مقاومت شده وانرژی در مقاومت به صورت حرارت تلف می گردد واین عمل آنقدر ادامه می یابد تا انرژی ذخیره شده در خازن به صفر برسد وجریان صفر گردد واختلاف پتانسیل دو سر خازن صفر شده وحالت جدید پایداری فرا رسد .
- **ب- بررسی فیزیکی مدار RL:** سلف L مدت طولا نی از طریق کلید به منبع ولتاژ V_0 متصل بوده وانرژی مغناطیسی به صورت جریان در آن ذخیره شده است و در زمان(t=0) کلید تغییر وضعیت می دهد وبه وضعیت (٢) بر می گردد وانرژی ذخیره شده در مدار ایجاد جر یان متغییر بازمان نموده وباعث تلف شدن آن بشکل انرژی حرارتی در مقاومت

می شودوآنقدر عمل ادامه می یابد تا انرژی ذخیره شده مغناطیسی به انرژی حرارتی تبدیل شود ومدار به حالت پایدار برسد.در هر صورت زمان بین دو حالت پایدار زمان گذرا یی است وپاسخ در این مدت را ***پاسخ گذرایی*** گویند .

- **تجزیه وتحلیل مدار RC** در این مدار اگر جریان مقاومت i(t) را به عنوان پاسخ انتخاب نماییم وبرای مدار شکل (۴-۲-الف) معادله حلقه را در جهت جریان بنویسیم نتیجه می شود:



(الف)   شکل(۴-۲)   (ب)

$$\begin{cases} v_C(t) = -\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(t)dt + v_C(0) \\ Ri(t) - v_C(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt - v_C(0) = 0$$

اولاً با توجه به خاصیت پیوستگی ولتاژخازن که در فصل (۲) این چنین بیان شد" در صورتی که جریان محدود وکرانه دار باشد ولتاژ آن تغییر ناگهانی را نمی پذیرد" نتیجتاً ولتاژ خازن قبل و بعد از تغییر وضعیت مساوی است و از طرفی خازن به اندازه ولتاژ منبع V_0 قبل از تغییر وضعیت کلید شارژ شده است درنتیجه می توان گفت : $v_C(0^-) = v_C(0^+) = v_C(0) = V_0$

ثانیاً: در صورتی که از معادله حلقه نسبت به زمان مشتق بگیریم معادله دیفرانسیل مرتبه اول همگن برحسب i(t) بدست می آید.

$$R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0$$

اگر $v_c(t)$ را پاسخ مدار شکل(۴-۲-ب) در نظر گیریم در این صورت جریان مدار برابراست با $C\dfrac{dv_C}{dt}$ ومعادله حلقه عبارت است از :

$$v_C(t) + RC\frac{dv_C}{dt} = 0$$

برای حل معادلات دیفرانسیل فوق که معادلات دیفرانسیل مرتبه اول همگن می باشند روش های مختاف در ریاضی مطرح است ما در این قسمت معادلات را با روش جای گذاری فرم پاسخ در معادله حل می کنیم.

۱- تابع ریاضی که می تواند در معادلات دیفرانسیل وانتگرا ل صدق نماید تابع نمایی بفرم Ae^{St} است زیرا تابع ومشتق تابع و انتگرال آن فرم مشابهی دارند. در این تابع A= دا منه تابع وS = فرکانس طبیعی تابع نمایی گفته می شوند

۲- ابتداءِ برای حل معادله $R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}i(t) = 0$ پاسخی برابربا: $i(t) = Ae^{St}$ درنظر گرفته و آن را در معادله قرار می دهیم نتیجه می شود :

$$R\frac{d(Ae^{St})}{dt} + \frac{1}{C}(Ae^{St}) = 0 \Rightarrow RASe^{St} + \frac{A}{C}e^{St} = 0 \Rightarrow Ae^{St}(RS + \frac{1}{C}) = 0$$

همان گونه که در بحث فیزیکی مسئله مطرح شد جریان در این مدار وجود دارد بنابراین $A \neq 0$ است در نتیجه عبارت $(RS + \frac{1}{C}) = 0$ ونتیجتاً فرکانس طبیعی برا بر است با: $S = -\frac{1}{RC}$ که از لحاظ دیمانسیون برابر با $[S] = \frac{1}{\Omega \times F} = \frac{1}{\Omega \times S \times Sec} = \frac{1}{Sec}$ =(فرکانس طبیعی) است (در این را بطه دیمانسیون ظرفیت خازن $F = \Omega \times S$ و $S = mho = \frac{1}{\Omega}$ =(زیمنس) می باشد).برای تعیین A باید مقدار جریان را در زمان مشخصی داشته باشیم اگر به مدار توجه شود مقدار جریان درلحظه تغییر وضعیت کلید $t = (0^+)$ از معادله حلقه بدست می آید. :

$$Ri(0^+) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i(t)dt - V_0 = 0 \Rightarrow i(0^+) = \frac{V_0}{R}$$

حال با معین شدن مقدار جریان در لحظه $t = 0^+$ مقدار دامنه A را حساب می کنیم :

$$i(0^+) = \frac{V_0}{R} = Ae^{S \times 0} \Rightarrow A = \frac{V_0}{R}$$

بنابراین با معین شدن دامنه وفرکانس طبیعی ***پاسخ جریان برابر است با:***

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t > 0$$

۳- پاسخ معادله $v_C(t) + RC\frac{dv_C}{dt} = 0$ ولتاژ خازن نیز است که این پاسخ هم به فرم یک تابع نمایی است در نتیجه $v_C(t) = Ae^{St}$ فرض نموده ودر معادله دیفرانسیل قرار می دهیم :

$$Ae^{St} + RC\frac{d(Ae^{St})}{dt} = 0 \Rightarrow Ae^{St} + RCASe^{St} = 0 \Rightarrow Ae^{St}(1 + RCS) = 0 \Rightarrow A \neq 0$$

$$و (1 + RCS) = 0 \Rightarrow S = -\frac{1}{RC}$$

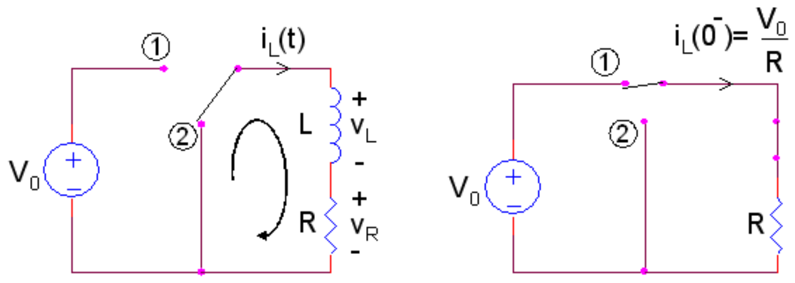
وهمانطور که بیان شد ولتاژ خازن در $t = 0^+$ مشخص است ودامنه ولتاژ ازقراردادن مقدار $t = 0^+$ در پاسخ بدست می آ
ید.

$$v_C(0^+) = V_0 = Ae^{S \times 0} \Rightarrow A = V_0$$

با دامنه وفرکانس طبیعی معلوم ***ولتاژ خاز ن برای زمان های :***

$$v_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t > 0$$

- **تجزیه وتحلیل مدار RL** : در مدار شکل (٤-٣-الف) جریان سلف به عنوان پاسخ مدار بعد از تغییر وضعیت کلید انتخاب نموده و معادله KVL حلقه را می نویسیم.: $L\frac{di_L}{dt} + Ri_L(t) = 0$ این معادله نیز معادله دیفرانسیل مرتبه اول است .



(ا لف)　　　　شکل(٤-٣)　　　　(ب)

۱- پاسخ معادله فوق نیز یک تابع نمایی است مانند $i_L(t) = Ae^{St}$ که باقرار دادن آن در معادله فرکانس طبیعی را بدست می آوریم

$$L\frac{d(Ae^{St})}{dt} + RAe^{St} = 0 \Rightarrow LASe^{St} + RAe^{St} = 0 \Rightarrow Ae^{St}(LS+R) = 0$$

از آنجا که در مدار RL قبل از تغییر وضعیت کلید و به دلیل اتصال کوتاه بودن سلف در مقابل جریان مستقیم مطابق شکل (٤-٣-ب) جریانی برابربا $i_L(0^-) = \frac{V_0}{R}$ در سلف جاری است و با توجه به خاصیت سلف که جریان آن پیوسته است و تغییر ناگهانی را در صورتی که ولتاژ دو سر آن محدود و کرانه دار باشد نمی پذیرد , جریان سلف پس از تغییر وضعیت کلید برابراست با $i_L(0^+) = i_L(0^-) = i_L(0) = \frac{V_0}{R}$ است . بنابراین $A \neq 0$ است و $LS + R = 0$ می شود, در نتیجه فرکانس طبیعی $S = -\frac{R}{L}$ می گردد که با توجه به دیمانسیون L و R , دیمانسیون S برابر است با :

$$[S] = \frac{\Omega}{\mathrm{H}} = \frac{\Omega}{\Omega\sec} = \frac{1}{\sec}$$

۲. با توجه به معین بودن جریان سلف در $t = 0^+$ مقدار دامنه A را حساب می کنیم :

$$i_L(0^+) = \frac{V_0}{R} = Ae^{S\times 0} \quad \Rightarrow A = \frac{V_0}{R}$$

و در نتیجه پاسخ مدار جریان $i_L(t)$ مشخص می شود :

$$i_L(t) = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \qquad t \geq 0$$

ضمناً ولتاژ دو سر سلف نیز از روابط $v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = -Ri_L(t)$ در مدار شکل (٤-٣-الف) به دست می آید و برابر است با :

$$v_L(t) = -R\frac{V_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = -V_0 e^{-\frac{R}{L}t} \qquad t > 0 \text{ برای زمان های}$$

حال به بررسی نتایج تحلیل مدارهای مرتبه اول RL و RC می پردازیم :

- با توجه به اینکه پاسخ ها ورودی صفر جریان و ولتاژ در مدارهای RC و RL به فرم روابط نشان داده شده زیر می باشند : $i_C(t) = -i(t)$ بدست آمد ه از تحلیل مدار RC است.

$$\begin{cases} i_C(t) = -\dfrac{V_0}{R} e^{-t/RC} & t > 0 \\ v_C(t) = V_0 e^{-t/RC} & t \geq 0 \\ i_L(t) = \dfrac{V_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t} & t \geq 0 \\ v_L(t) = -V_0 e^{-\frac{R}{L}t} & t > 0 \end{cases}$$

۱. فرکانس طبیعی در مدار RC بستگی به متغیر ندارد و فقط به اجزاء مدار بستگی دارد و برابر با $S = -\dfrac{1}{RC}$ است.

۲. فرکانس طبیعی در مدار RL بستگی به متغیر ندارد و فقط به اجزاء بستگی دارد و برابر با $S = -\dfrac{R}{L}$ می باشد .

۳. به دلیل اینکه مدارهای RC و RL برای زمان های $t > 0$ تحلیل شده اند و در زمان $t > 0$ منبع و نیروی محرکه ای در مدار وجود ندارد این پاسخ ها را , پاسخ های ورودی صفر گویند و پاسخ ورودی صفر به شرایط اولیه جریان سلف ها و ولتاژ خازن ها بستگی دارد.

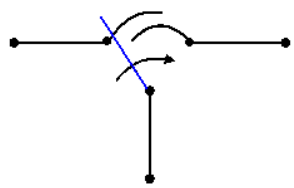
٤. اگر تابع نمایی را به صورت $e^{-\frac{t}{\tau}}$ تعریف نماییم , τ را ثابت زمانی (time constant) گویند و ثابت زمانی در مدار RC برابر است با $\tau = R \times C$ و در مدار RL برابر است با $\tau = \dfrac{L}{R}$.

ثابت زمانی : مدت زمانی که لازم است تا ولتاژ خازن یا جریان سلف به ۰/۳۶۸یا تقریباً ۰/۳۷ مقدار اولیه ولتاژ یاجریان اولیه ذخیره شده برسد را ثابت زمانی گویند.

برای اثبات وبیان این موضوع فرض می نماییم که یک خازن با ظرفیت C و ولتا ژ اولیه V_0 به یک مقاومت R در مدت زمان $t = \tau = RC$ اتصال یابد . ولتاژ خازن را در زمان t محاسبه می کنیم . همان گونه که در این بحث در یافتیم ولتاژ خازن از رابطه: $v_C(\tau) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = V_0 e^{-\frac{\tau}{\tau}} = V_0 e^{-1} = 0.368V_0 \approx 0.37V_0$ بدست می آید

ثابت زمانی دارای دیمانسیون ثا نیه (Sec) است

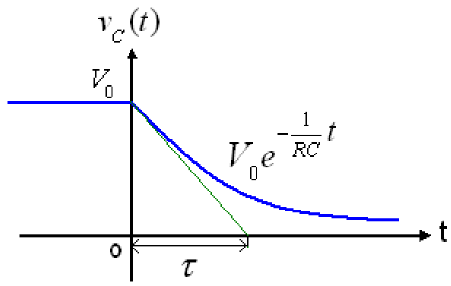
چند نکته در مورد ثابت زمانی مدار های RC و RL : a- همانطور که مشاهده می شود ثابت زمانی مدار RC بامقاومت رابطه مستقیم دارد $(\tau = RC)$ وثابت زمانی مدار RL با مقاومت رابطه معکوس دارد $(\tau = \dfrac{L}{R})$ بنابراین با افزایش مقاومت ثابت زمانی مدارRC افزایش وثابت زمانی مدار RL کاهش می یابد . بر این اساس اگر یک سر مدار سلفی مدار باز شود به دلیل میل ثابت زمانی به سمت صفر انرژی ذخیره شده در سلف فوراً بسمت صفر میل می نماید . بنابراین در تحلیل مدار های RL فرض بر این است که در تغییر وضعیت کلید سر سلف حالت مدار باز ندارد یا این که از کلیدهایی مانند کلید نشان داده شده در
شکل (٤-٤) استفاده می شود.



شکل(٤-٤)

b– از لحاظ تحلیلی, مدت زمان گذرایی یا مدت زمان لازم برای به صفر رسیدن ولتاژ خازن یا جریان سلف برابر با بی نهایت $t \to \infty$ است. در صورتیکه در آزمایشگاه عملاً زمان بی نهایت بی مفهوم است . در نتیجه زمانی برابر با 5τ برای تخلیه یک خازن یاانرژی یک سلف با ثابت زمانی τ در نظر گرفته می شود. زیرا مقدار ولتاژ یاجریان به ۰/۰۰۶۷٤ مقدار اولیه می رسد .

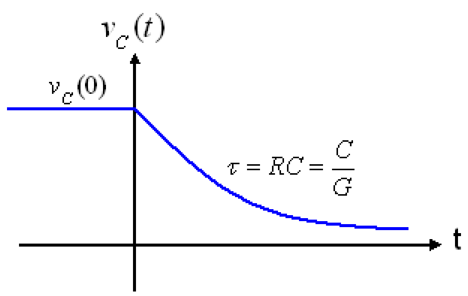
c– ثابت زمانی یک مدار RC یا RL را از روش ترسیمی می توان بدست آورد همان گونه که در شکل (٤- ۵) منحنی $v_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ مشاهده می شود از نقطه $t = 0$ مماس بر منحنی را رسم کرده هر جا که محور t را قطع کرد فاصله مبداءِ تا آن نقطه برابربا ثابت زمانی τ است .



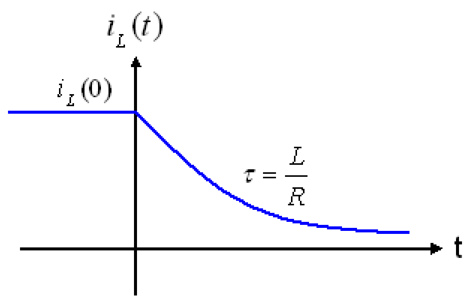
شکل (٤-۵)

۵-پاسخ ورودی صفر مدار ساده RC. به شرایط اولیه ولتاژ خازن بستگی دارد وتغییرات ولتاژ خازن بر حسب زمان و برای کلیه زمان ها پیوسته می باشد شکل (٤- ۶) $v_C(t)$ را نشان می دهد.

$$v_C(t) = \begin{cases} v_C(0) & t \le 0 \\ v_C(0)e^{-\frac{t}{RC}} & t \ge 0 \end{cases}$$



شکل(٤-۶)

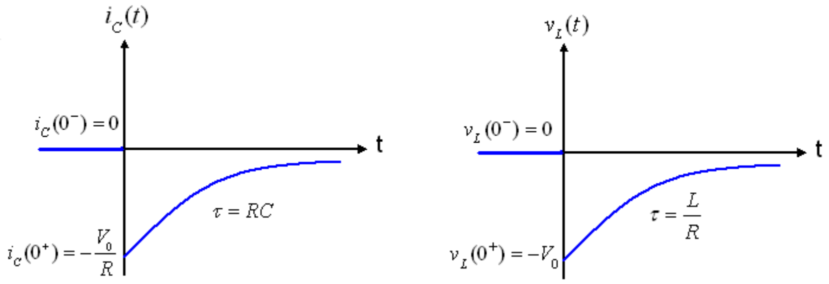


شکل(٤-۷)

پاسخ ورودی صفر مدار RL ساده به شرایط اولیه جریان سلف وابسته است وتغییرات جریان سلف برحسب زمان و برای کلیه زمان ها پیوسته می باشد . منحنی $i_L(t)$ در شکل (٤- ٧) رسم شده است .

$$i_L(t)=\begin{cases} i_L(0) & t\le 0 \\ i_L(0)e^{-\frac{R}{L}t} & t\ge 0\end{cases}$$

اما منحنی جریان خازن ومنحنی ولتاژ سلف در حالت ورودی صفر همان گونه که در شکل (٤- ٨-الف و ب) مشاهده می گردند پیوسطه نمی باشند.



(ا لف)　　　　شکل(٤-٨)　　　　(ب)

زیرا $i_C(0^-)\ne i_C(0^+)$ و $v_L(0^-)\ne v_L(0^+)$ می باشند.وهمانطور که در مدار شکل(٤- ١-الف) مشاهده می گردد خازن حالت مدار باز رادارااست بنابراین $i_C(0^-)=0$ است درصورتی که $i_C(0^+)=-\dfrac{V_0}{R}$ در مدار شکل (٤- ٢-ب) و سلف درمدار شکل (٤-١-ب) حالت اتصال کوتاه را دارد در نتیجه $v_L(0^-)=0$ هست.

ا ما در مدار شکل(٤-٣) همان گونه که محاسبه شده است $v_L(0^+)=-V_0$ می باشد.

$$i_C(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ i_C(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}} & t>0\end{cases} \quad \text{و} \quad v_L(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ v_L(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}} & t>0\end{cases}$$

- ***بنابراین پاسخ ورودی صفر یک متغیر جریان یا ولتاژ مانند x(t) با ثابت زمانی τ از رابطه :***

$$x(t)=x(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\tau=RC$　　　در مدارهایRC

$\tau=\dfrac{L}{R}$　　　در مدارهای RL

بدست می آید.

۶.پاسخ ورودی صفر مدارهای ساده RL و RC تابع خطی از شرایط اولیه می باشد . بدین مفهوم که اگر فرضاً در یک مدار RC شرایط اولیه $v_C(0)$ در حالت اول برابر V_{01} و در حالت دوم برابر V_{02} باشد, اگر $v_{C1}(t)$ پاسخ مدار به ازاء شرایط اولیه V_{01} و $v_{C2}(t)$ به ازاء شرایط اولیه V_{02} باشد , در این صورت داریم :

$$\begin{cases} RC\dfrac{dv_{C1}(t)}{dt}+v_{C1}(t)=0 \\ v_{C1}(0)=V_{01}\end{cases} \quad \text{معادله (١) و} \quad \begin{cases} RC\dfrac{dv_{C2}(t)}{dt}+v_{C2}(t)=0 \\ v_{C2}(0)=V_{02}\end{cases} \quad \text{معادله (٢)}$$

با توجه به خطی بودن مدار , معادله (۱) دارای جواب یکتا و معادله (۲) نیز دارای جواب یکتا می باشد و شرط جمع پذیری در مورد آن صادق است , یعنی :

$$\begin{cases} RC\dfrac{d(v_{C1}+v_{c2})}{dt}+v_{C1}(t)+v_{C2}(t)=0 \\ v_{C1}(0)+v_{C2}(0)=V_{01}+V_{02} \end{cases} \qquad \text{معادله (۳)}$$

بنابراین معادله (۳) دارای جواب یکتا به ازاءِ مجموع شرایط اولیه می باشد و جواب آن برابر با $v_{C1}(t)+v_{C2}(t)$ می باشد .

به همین منوال اگر شرایط اولیه V_0 را در ضریب a ضرب کنیم , پاسخ مدار نیز a برابر می گردد , زیرا :

$$\begin{cases} RC\dfrac{dv'_C(t)}{dt}+v'_C(t)=0 \\ v'_C(0)=aV_0 \end{cases}$$

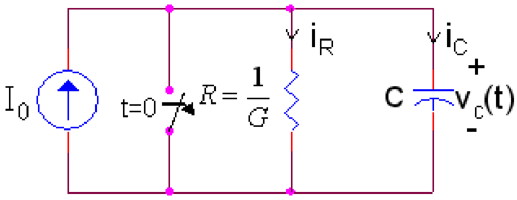
در نتیجه $v'_C(t)=av_C(t)$ می گردد و شرط همگنی صادق می باشد . بنابراین پاسخ ورودی صفر تابع خطی از شرایط اولیه است .

٤-٣- پاسخ حا لت صفر مدا ر های RC وRLساده:

هرگاه در یک مدار RC یاRL ولتاژ اولیه خازن یا جریان اولیه سلف در زمان t=0 برابر با صفر باشند وبه مدار در مبداءِ زمان یک منبع اعمال گردد پاسخ ولتاژخازن یا جریان سلف در این شرایط را ***"پاسخ حالت صفر "*** گویند.

- **٤-٣-١-پاسخ حا لت صفر مدار های RC وRLساده با ورودی DC:**

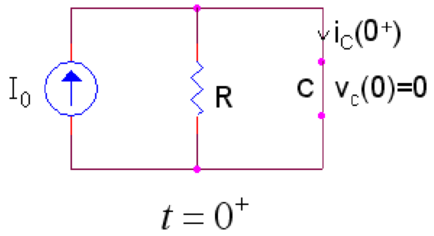
- الف : **تعیین *پاسخ* حالت صفر یک مدار RC ساده**:ولتاژ خازن($v_C(t)$) مدار RC موازی را که توسط یک کلید به منبع جریان I_0 مطابق شکل(٤-٩) اتصال یافته وولتاژ اولیه خازن برا بر صفر است [$v_C(0)=0$]بدست می آوریم .

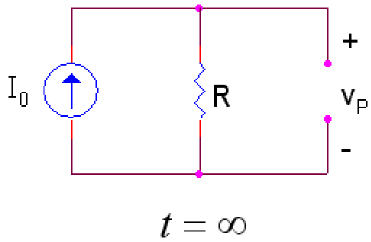


شکل(٤-٩)

۱- **بررسی پاسخ از لحاظ فیزیکی** : در لحظه t=0 چون ولتاژ خازن برابر با صفر است خازن حالت اتصال کوتاه را دارد وبا باز شدن کلید کلیه جریان منبع I_0 ا ز خازن عبور نموده وباعث می گردد که بار الکتریکی q در جوشن های خازن ذخیره گردد, بار الکتریکی ذخیره شده در بین جوشن ها اختلاف پتانسیل ایجاد نموده وافزایش آن باعث ایجاد وافزایش جریان در مقاومت و با توجه به قانون جریان های کیرشهف KCL کاهش جریان در مسیر خازن راسبب می گردد واین عمل آنقدر ادامه می یابد تا $i_C(t)=\dfrac{dq}{dt}=0$ شده وکلیه جریان منبع از مقاومت عبور می کند وولتاژ دوسرمقاومت وخازن باهم برابر ومساوی مقدار ثابت $V_R=V_C=RI_0$ می شود و مدار مجدداً به

حالت پایدار می رسد.شکل(۴-۱۰) مدار های معادل مدار RC شکل(۴-۹) را با توجه به نتایج مطرح شده در بررسی فیزیکی در زمان های $t=0^+$ و $t=\infty$ نشان می دهد.





(الف)　　　　شکل(۴-۱۰)　　　　(ب)

۲- تجزیه وتحلیل مدار RC : در این مدار که یک مدار دو گر ه ای است KCL را برای گره فوقانی می نویسیم واز متغیر v_C ولتاژ خازن نیز استفاده می کنیم.

$$i_R+i_C=I_0 \Rightarrow \frac{v_C(t)}{R}+C\frac{dv_C}{dt}=I_0$$

در نتیجه معادله دیفرانسیل مرتبه اولی برحسب v_C بدست می آید که آن را به روش زیر حل نموده و ولتاژ خازن را برای زمان های t>0 معین می کنیم.

این معادلات دارای دو نوع پاسخ گذرا (پاسخ همگن) v_h و پاسخ دائم v_P می باشند

$$v_C(t)=v_h+v_P$$

a- پاسخ دائم , این پاسخ همواره مشابه ورودی است. بنابراین با توجه به ورودی dc مدار پاسخ دائم را برابربا: $v_P=K$ فرض نموده وبرای تعیین مقدار K آن را در معادله قرار میدهیم .چون مشتق مقدار ثابت برابربا صفر است چنین نتیجه می گردد: $\frac{K}{R}+C\times 0=I_0 \Rightarrow K=RI_0$

b– پاسخ همگن , برای تعیین این پاسخ ابتداءِ طرف دوم معادله دیفرانسیل را مساوی صفر قرار داده معادله مشخصه آن را تشکیل می دهیم وفرکانس طبیعی پاسخ همگن را بدست می آوریم .

$$\frac{v_C(t)}{R}+C\frac{dv_C}{dt}=0 \Rightarrow \frac{1}{R}+CS=0 \Rightarrow S=-\frac{1}{RC} \Rightarrow v_h=Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

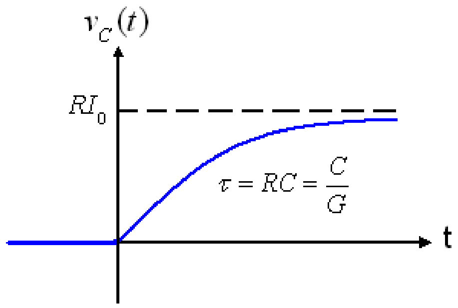
c– دو پاسخ همگن و دائم را با هم جمع می کنیم وبه ازاءِ ولتاژ مشخص خازن در زمان معلوم وجای گذاری در رابطه پاسخ حالت صفر(A) دامنه پاسخ همگن را محاسبه می نماییم . در این مدار با توجه به شرا یط حالت صفر یا بدلیل بسته بودن کلید برای مدت طولا نی $v_C(0)=0$ است .

$$v_C(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}+RI_0 \Rightarrow v_C(0)=0=Ae^{-\frac{0}{RC}}+RI_0 \Rightarrow A=-RI_0$$

d - پاسخ حالت صفر مدار RC برای زمان های $t\ge 0$ عبارت است:

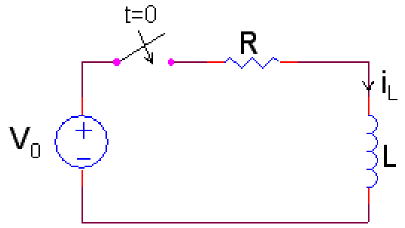
$$v_C(t)=-RI_0e^{-\frac{t}{RC}}+RI_0 \Rightarrow v_C(t)=RI_0(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

منحنی پاسخ برای کلیه زمان ها در شکل (۴-۱۱) رسم شده است .



شکل(٤-١١)

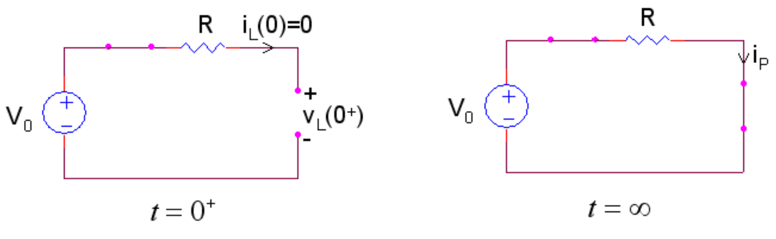
◆ **ب: تعیین پاسخ حالت صفر مدار RL ساده:**یک مدار RL سری با یک کلید ویک منبع ولتاژ V_0 نشان داده شده در شکل (٤-١٢)که دوگان مدار RC است در نظر گرفته و جریان سلف را به عنوان . پاسخ مدار فرض می نماییم وبا جریان اولیه صفر برای سلف $(i_L(0)=0)$ پاسخ را بدست می آوریم.



شکل(٤-١٢)

١–**بررسی پاسخ از لحاظ فیزیکی:**با بسته شدن کلید به علت مدار باز بودن سلف و عدم تغییر ناگهانی جریان سلف در هنگام تغییر وضعیت کلید , ولتاژ منبع دو سر سلف قرار گرفته و فورانی در دو سر سلف ایجاد می شود وتغییر فوران باعث تغییر تدریجی جریان در سلف ومقاومت گشته نتیجتاً جریان افزایش و ولتاژ دو سر مقاومت افزایش وولتاژ دو سر سلف کاهش می یابد تا زمانیکه تغییرات فوران برابرصفر می شود $v=(\dfrac{d\varphi}{dt}=0)$ وسلف به صورت اتصال کوتاه در می آید)

ومدار به حالت دائم می رسد. از شکل (٤-١٣- ب) جریان سلف در حالت دائم بدست می آید.و برابر است با : $i_P = \dfrac{V_0}{R}$ و مدارهای معادل مدار شکل (٤-١٢) را در زمان های $t=0^+$ و $t=\infty$ در شکل (٤-١٣)مشاهده می کنید.



(الف) شکل(٤-١٣) (ب)

۲- **تجزیه وتحلیل مدار RL** : پا سخ حالت صفر را دراین مدار به دو روش بدست می آوریم. **روش (۱) با استفاده از دوگانی:** مدار RL دوگان مدار RC است و پاسخ حالت صفر مدار RC

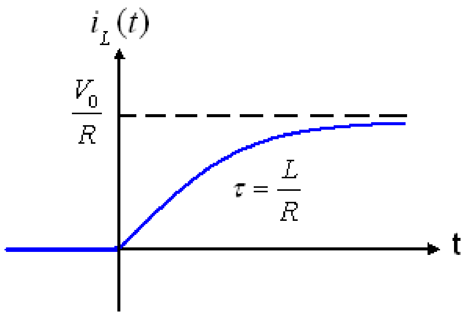
عبارت است $v_C(t)=RI_0(1-e^{-\frac{t}{RC}})=\frac{I_0}{G}(1-e^{-\frac{t}{RC}})=V_P(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$ اگر از طریق دوگانی بخواهیم پاسخ مدار RL

را بنویسیم $i_L(t)=I_P(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$ می گردد وپاسخ دائم I_P دوگان $V_P=\frac{I_0}{G}$ وبرابربا $I_P=\frac{V_0}{R}$ و همچنین ثابت

زمانی مدار RL دوگان ثابت زمانی مدار RC $\tau=RC=\frac{C}{G}$ است درنتیجه $\tau=\frac{L}{R}$ می شود وپاسخ حالت صفر مدار برابر است با :

$$i_L(t)=\frac{V_0}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$$

این پاسخ در شکل (٤- ١٤) برحسب زمان رسم شده است.



شکل(٤-١٤)

روش(۲) معادله دیفرانسیل مدار را نوشته وبا حل آن پاسخ های دائم و همگن را تعیین میکنیم وباتوجه به شرایط اولیه معلوم $i_L(0)=0$ باجمع دو پاسخ وقرار دادن مقدار جریان در لحظه صفر دامنه جریان گذرا را تعیین نموده درنتیجه پاسخ حالت صفر جریان سلف بدست می آید.

$$Ri_L(t)+L\frac{di_L}{dt}=V_0 \Rightarrow i_L(t)=i_h+i_P \Rightarrow i_P=K \Rightarrow R\times K+L\times 0=V_0 \Rightarrow K=\frac{V_0}{R} \Rightarrow i_P=\frac{V_0}{R}$$

$$Ri_L(t)+L\frac{di_L}{dt}=0 \Rightarrow R+LS=0 \Rightarrow S=-\frac{R}{L} \Rightarrow i_h=Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L(t)=Ae^{-\frac{R}{L}t}+\frac{V_0}{R} \Rightarrow i_L(0)=0=Ae^{-\frac{R}{L}\times 0}+\frac{V_0}{R} \Rightarrow A=-\frac{V_0}{R} \Rightarrow i_L(t)=-\frac{V_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{V_0}{R}$$

$$i_L(t)=\frac{V_0}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$$

- بنابراین از تحلیل مدارهای RC و RL با تحریک منابع جریان مستقیم (DC) نتایج زیر حاصل می شود :

۱- متغیر پاسخ حالت صفر مدار RC فقط ولتاژ خازن است و در مورد مدار RL متغیر جریان سلف است

۲- پاسخ حالت صفر مدارهایRC و RL را به صورت کلی از رابطه زیر می توان بدست آورد.

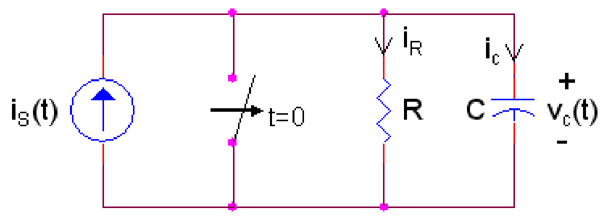
$$x(t) = X_P(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

که در این رابطه X_P پاسخ دائم می باشد واز مدار های شکل (٤-١٠)وشکل (٤-١٣) که برای $t = \infty$ رسم شده اند محاسبه می شود زیرا خازن در $t = \infty$ حالت مدار باز را دارد و سلف حالت اتصال کوتاه را پیدا می کند .و ثابت زمانی τمدار RC برابربا $\tau = RC$ ومدار RL مساوی با $\tau = \frac{L}{R}$ است. در نتیجه احتیاج به نوشتن معادله دیفرانسیل وحل آن نیست.

● ٤-٣-۲- پاسخ حالت صفر مدار های RC وRLبا ورودی جریان متناوب :

ذر این قسمت با دو روش پاسخ حالت صفر یک مدار با ورودی متغیر با زمان را تحلیل می کنیم:

روش(۱) یک مدار RC باورودی $i_S(t)$ که توسط باز شدن کلید در t=0 به مدار اتصال می یابد را مطابق شکل (٤-١٥) در نظر گرفته وتجزیه وتحلیل می نماییم :



شکل (٤-١٥)

معادله دیفرانسیل مدار را بر حسب vc(t) می نویسیم :

$$\frac{v_C(t)}{R} + C\frac{dv_C}{dt} = i_S(t)$$

a. تعیین پاسخ دائم : همان گونه که در قسمت قبل بیان شد , پاسخ دائم مشابه ورودی است . در صورتی که ورودی هر یک از شکل موج های زیر باشد :

{موج خطی , موج نمایی, موج سینوسی}

$$i_S(t) = \begin{cases} a_1 t + a_2 \\ I_0 e^{\beta t} \\ I_m \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

پاسخ دائم نیز مشابه ورودی و به صورت شکل موج های زیر می تواند باشد :

$$v_P(t) = \begin{cases} b_1 t + b_2 \\ V_0 e^{\beta t} \\ V_m \cos(\omega t + \theta) \end{cases} \qquad \text{بافرض } \beta \neq S$$

اگر فرض کنیم $i_S(t) = I_0 e^{\beta t}$ است , پاسخ حالت دائم فرضی $V_0 e^{\beta t}$ را در معادله دیفرانسیل قرار داده و V_0 را به دست می آوریم :

$$\frac{V_0 e^{\beta t}}{R} + C\frac{d}{dt}(V_0 e^{\beta t}) = I_0 e^{\beta t}$$

$$\frac{V_0}{R} e^{\beta t} + CV_0(\beta) e^{\beta t} = I_0 e^{\beta t} \Rightarrow V_0\left(\frac{1}{R} + C\beta\right) e^{\beta t} = I_0 e^{\beta t} \Rightarrow V_0 = \frac{I_0}{\frac{1}{R} + C\beta}$$

در نتیجه : $v_P = \dfrac{I_0}{\frac{1}{R} + C\beta} e^{\beta t}$ است..

b. تعیین پاسخ همگن : پاسخ همگن مشابه حالت ورودی dc محاسبه می گردد :

$$\frac{v_C(t)}{R} + C\frac{dv_C}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{1}{R} + CS = 0 \qquad \Rightarrow S = -\frac{1}{RC}$$

$$v_h = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

c. پاسخ حالت صفر $v_C(t)$**:** این پاسخ برابر است با : $v_C(t) = v_h + v_P$

و با قرار دادن دو پاسخ در رابطه و با توجه به شرایط اولیه معلوم $v_C(0) = 0$, دامنه پاسخ همگن A را محاسبه می کنیم :

$$v_C(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + \frac{I_0}{\frac{L}{R} + C\beta} e^{\beta t}$$

$$v_C(0) = 0 = Ae^{-\frac{0}{RC}} + \frac{I_0}{\frac{L}{R} + C\beta} e^{(0)t} \quad \Rightarrow A + \frac{I_0}{\frac{1}{R} + C\beta} = 0 \quad \Rightarrow A = -\frac{I_0}{\frac{1}{R} + C\beta}$$

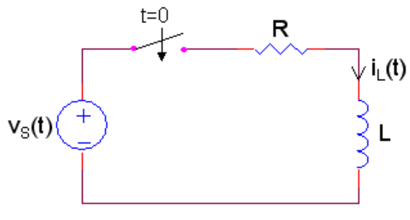
در نتیجه $v_C(t)$ برابر است با :

$$v_C(t) = -\frac{I_0}{\frac{1}{R} + C\beta} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{I_0}{\frac{1}{R} + C\beta} e^{\beta t}$$

همان گونه که مشاهده می شود وقتی ورودی متغیر با زمان باشد از مدار معادل در $t \to \infty$ نمی توان استفاده نمود , زیرا خازن مدار باز نمی گردد و سلف اتصال کوتاه نمی شود . بنابراین برای تعیین پاسخ دائم حتماً به معادله دیفرانسیل احتیاج است زیرا از طریق قرار دادن فرم پاسخ دائم در معادله دیفرانسیل ضرایب آن را به دست می آورند .

روش (۲) اگر یک مدار RL با ورودی $v_S(t)$ مطابق شکل (٤-۱۶) در نظر بگیریم و معادله دیفرانسیل را بر حسب $i_L(t)$ بنویسیم , نتیجه می شود :

$$Ri_L(t) + L\frac{di_L}{dt} = v_S(t)$$



شکل (٤-۱۶)

حال با تقسیم طرفین معادله بر L و انتخاب $P=\dfrac{R}{L}$ و $Q(t)=\dfrac{v_S(t)}{L}$ معادله به صورت :

$$\frac{di_L}{dt}+Pi_L(t)=Q(t)$$

به دست می آید که طرفین معادله حاصل را در e^{pt} ضرب می کنیم . جملات سمت چپ معادله بیانگر مشتق جمله $e^{pt}i_L(t)$ هستند .

$$e^{Pt}\frac{di_L}{dt}+Pe^{Pt}i_L(t)=e^{Pt}Q(t)\Rightarrow\frac{d}{dt}(e^{Pt}i_L(t))=e^{Pt}Q(t)$$

حال از طرفین معادله حاصل انتگرال می گیریم (فرضاً انتگرال نامعین)

$$\int\frac{d}{dt}(e^{Pt}i_L(t))dt=\int e^{Pt}Q(t)dt+K\qquad\Rightarrow e^{Pt}i_L(t)=\int e^{Pt}Q(t)dt+K$$

طرفین معادله جدید را در e^{-pt} ضرب می کنیم :

$$i_L(t)=e^{-Pt}\int e^{Pt}Q(t)dt+Ke^{-Pt}$$

که در این پاسخ $i_L(t)$, جمله Ke^{-Pt} بیانگر پاسخ همگن و جمله $e^{-Pt}\int e^{Pt}Q(t)dt$ بیانگر پاسخ دائم می باشد.

ضمناً برای تعیین دامنه K باید از شرایط اولیه استفاده نمود و $i_L(0)=0$ را در معادله قرار داد.

مثال : فرضاً اگر $v_S(t)=V_0e^{\beta t}$ باشد , پاسخ حالت صفر مدار RL را تعیین کنید :

در پاسخ $i_L(t)$ به جای Q(t) و P مقدار قرار می دهیم : $P=\dfrac{R}{L}$ و $Q(t)=\dfrac{V_0e^{\beta t}}{L}$

$$i_L(t)=e^{-Pt}\int e^{Pt}\times\frac{V_0}{L}e^{\beta t}dt+Ke^{-Pt}\Rightarrow i_L(t)=e^{-Pt}\times\frac{V_0}{L}\int e^{(\beta+P)t}dt+Ke^{-Pt}$$

$$\Rightarrow i_L(t)=\frac{V_0}{L}e^{-Pt}\times\frac{1}{P+\beta}e^{(P+\beta)t}+Ke^{-Pt}\Rightarrow i_L(t)=\frac{V_0}{L}e^{-Pt}\times\frac{1}{\frac{R}{L}+\beta}e^{Pt}e^{\beta t}+Ke^{-Pt}$$

$$\Rightarrow i_L(t)=\frac{V_0}{L}\times\frac{1}{\frac{R+\beta L}{L}}e^{\beta t}+Ke^{-Pt}\qquad\Rightarrow i_L(t)=\frac{V_0}{R+\beta L}e^{\beta t}+Ke^{-Pt}$$

$$i_L(0)=0=\frac{V_0}{R+\beta L}e^{\beta(0)}+Ke^{-P\times 0}\Rightarrow\frac{V_0}{R+\beta L}+K=0\Rightarrow K=-\frac{V_0}{R+\beta L}$$

$$i_L(t)=\frac{V_0}{R+\beta L}e^{\beta t}-\frac{V_0}{R+\beta L}e^{-\frac{R}{L}t}$$

• ٤-٣-٣ : پا سخ حالت صفر تابع خطی از ورودی است :

هر گاه یک مدار RC با شرایط اولیه صفر در نظر بگیریم و یک مرتبه ورودی I_{S1} و مرتبه دیگر ورودی I_{S2} را به مدار اعمال نماییم ,

به ازاء I_{S1} داریم :

$$\begin{cases} \dfrac{v'_C(t)}{R} + C\dfrac{dv'_C(t)}{dt} = I_{S1} \\ v'_C(0) = 0 \end{cases}$$ دستگاه معادله (۱)

این معادله دارای جواب یکتا $v'_C(t)$ است .

به ازاء I_{S2} داریم :

$$\begin{cases} \dfrac{v''_C(t)}{R} + C\dfrac{dv''_C(t)}{dt} = I_{S2} \\ v''_C(0) = 0 \end{cases}$$ دستگاه معادله (۲۱)

این معادله دارای جواب یکتا $v''_C(t)$ است .

اگر دو دستگاه معادلات (۱) و (۲) را جمع کنیم , نتیجه می شود :

$$\begin{cases} \dfrac{v'_C(t) + v''_C(t)}{R} + C\dfrac{d(v'_C(t) + v''_C(t))}{dt} = I_{S1} + I_{S2} \\ v'_C(0) + v''_C(0) = 0 \end{cases}$$ دستگاه معادله (۳)

که دستگاه (۳) نیز به ازاء $I_{S1} + I_{S2}$ نیز دارای جواب یکتا $v_C(t)$ است , بنابراین :

$$v_C(t) = v'_C(t) + v''_C(t)$$

یعنی شرط جمع پذیری نیز در مورد پاسخ حالت صفر صادق است .

اگر به ازاء ورودی I_S پاسخ حالت صفر مدار $v_C(t)$ باشد , به ازاء aI_S نیز پاسخ حالت صفر مدار نیز $v'_C(t)$ باشد , هر دو در معادله دیفرانسیل صدق می کنند:

$$\frac{v_C(t)}{R} + C\frac{dv_C}{dt} = I_S \Rightarrow a\frac{v_C(t)}{R} + ac\frac{dv_C}{dt} = aI_S \Rightarrow \frac{av_C}{R} + C\frac{d(av_C)}{dt} = aI_S$$

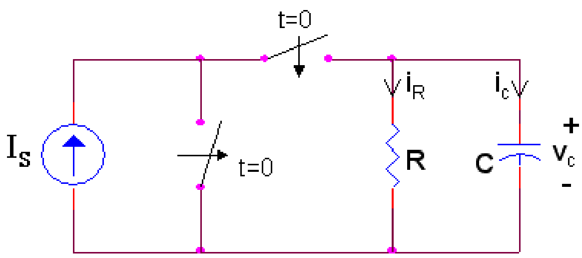
$$\frac{v'_C(t)}{R} + C\frac{dv'_C}{dt} = aI_S$$

از مقایسه جواب دو دستگاه $v'_C(t) = av_C(t)$ می شود , یعنی شرط همگنی در مورد پاسخ حالت صفر صادق است.

<u>نتیجه می گیریم که پاسخ حالت صفر مدارهای RC و RL تابع خطی از ورودی هستند .</u>

• ٤-٤ : پاسخ کامل مدارهای RL و RC :

اگر علاوه بر داشتن شرایط اولیه مثلاً ولتاژ ذخیره شده در خازن $v_C(0) = V_0$, در مبداءِ زمان $t = 0$ منبع جریان (dc) I_S به مدار RC اعمال گردد , پاسخ ولتاژ خازن در این حالت را پاسخ کامل گویند . (شکل(٤-١٧))



شکل (٤-١٧)

برای تعیین پاسخ کامل به دو روش می توان عمل کرد .

روش (۱) معادله دیفرانسیل مدار را برای $t \geq 0$ می نویسیم , نتیجه می شود :

$$\begin{cases} \frac{v_C(t)}{R} + C\frac{dv_C}{dt} = I_S \\ v_C(0) = V_0 \end{cases}$$

و این معادله یک پاسخ یکتا دارد.

با توجه به شرایط خطی مدار می توان معادله را به صورت جمع دو معادله دیفرانسیل نوشت که در حالت اول ورودی را صفر در نظر می گیریم و پاسخ را با v_i نشان می دهیم و در معادله دوم شرایط اولیه صفر و به ازاءِ ورودی , پاسخ حالت صفر v_O را به دست می آوریم. در نتیجه :

$$\begin{cases} \frac{v_C(t)}{R} + C\frac{dv_C}{dt} = I_S \\ v_C(0) = V_0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{v_i(t)}{R} + C\frac{dv_i}{dt} = 0 \\ v_i(0) = V_0 \end{cases} + \begin{cases} \frac{v_0(t)}{R} + C\frac{dv_0}{dt} = I_S \\ v_0(0) = 0 \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل مدار   معادله (۱)   معادله (۲)

این دو معادله دیفرانسیل دارای جواب یکتا می باشند و پاسخ معادله دیفرانسیل اول v_i پاسخ ورودی صفر مدار است و پاسخ معادله دیفرانسیل دوم , پاسخ حالت صفر است.

بنابراین پاسخ کامل برابر است با جمع پاسخ ورودی صفر v_i و پاسخ حالت صفر v_O.

نتیجتاً با توجه به مطالب قبل : $v_i = v_C(0)e^{-\frac{t}{RC}}$ و $v_0(t) = V_P(1-e^{-\frac{t}{RL}})$ و $V_P = RI_S$

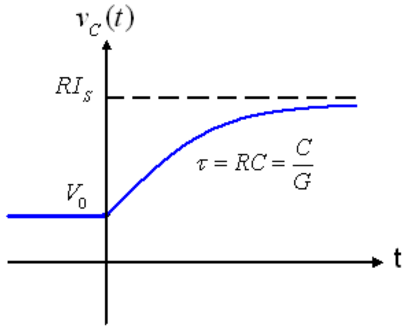
$$v_C(t) = v_i + v_0 = v_C(0)e^{-\frac{1}{RC}t} + V_P(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$v_C(t) = V_0e^{-\frac{t}{RC}} + RI_S(1-e^{-\frac{t}{RC}}) = V_0e^{-\frac{t}{RC}} + RI_S - RI_Se^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_C(t) = RI_S + (V_0 - RI_S)e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0$$

که از این جمله نتیجه می شود **پاسخ کامل برابر است با جمع پاسخ دائم و پاسخ همگن** .

منحنی پاسخ کامل را در شکل (٤-١٨) مشاهده می کنید.



شکل (٤-١٨)

روش (۲) معادله دیفرانسیل $\begin{cases} \frac{v_C(t)}{R} + C\frac{dv_C}{dt} = I_S \\ v_C(0) = V_0 \end{cases}$ را حل می کنیم .جواب این معادله مجموع پاسخ همگن و پاسخ دائم است : $v_C(t) = v_h + v_P$

ابتدا پاسخ دائم را با توجه به ورودی dc حساب می کنیم

$$v_P = K \Rightarrow \frac{K}{R} + C \times 0 = I_S \Rightarrow K = RI_S$$

سپس پاسخ همگن را با توجه به معادله مشخصه معادله دیفرانسیل به دست می آوریم :

$$\frac{v_C}{R} + C\frac{dv_C}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} + CS = 0 \Rightarrow S = -\frac{1}{RC}$$

$$v_h = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

پاسخ کامل برابر است با : $v_C(t) = v_h + v_P = Ae^{-\frac{t}{RC}} + RI_S$

با توجه به شرط اولیه $v_C(0) = V_0$ و قرار دادن در معادله , دامنه پاسخ همگن را به دست می آوریم .

$$v_C(0) = V_0 Ae^{-\frac{0}{RC}} + RI_S \Rightarrow A = V_0 - RI_S$$

$$v_C(t) = RI_S + (V_0 - RI_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

بنابراین پاسخ کامل مدارهای RL و RC را اگر با x(t) نشان دهیم , می توان پاسخ کامل را بدین صورت بیان نمود :

$$x(t) = x_i(t) + x_O(t) = x(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + x_P(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

یا $x(t) = x_h + x_P = x_P + (x(0) - x_P)e^{-\frac{t}{\tau}}$

نکته : بر خلاف اینکه پاسخ ورودی صفر تابع خطی از شرایط اولیه و پاسخ حالت صفر تابع خطی از ورودی می باشند , پاسخ کامل تابع خطی از ورودی نمی باشد , مگر اینکه شرایط اولیه برابر صفر باشد .

• ٤-٥- پاسخ مدار های عمومی RC و RL :

در این بحث دو نمونه ازمدار های عمومی را تجزیه وتحلیل می نماییم .

ا لف – مدارهای عمومی متشکل از یک جزءِ ذخیره کننده انرژی مانند سلف یا خازن وتعدادی از اجزاءِ دیگر مانند مقاومت ها ,منابع وابسته و منابع نابسته. که در این حالت پاسخ ورودی صفر ,پاسخ حالت صفرو پاسخ کامل نیز مطرح می شود.

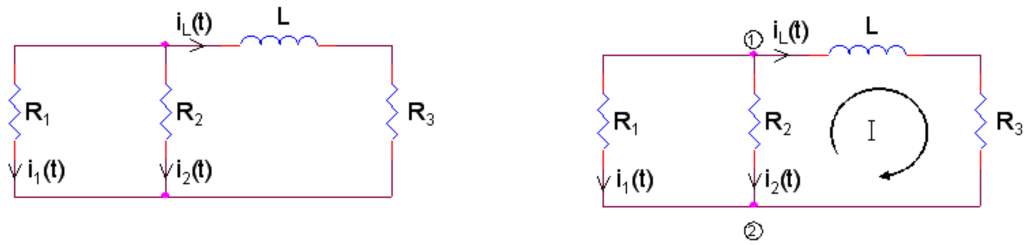
ب- مدار های عمومی شامل دو یا چند سلف یا خازن قابل ترکیب را که معادله دیفرانسیل آن ها مرتبه اول است نیز مورد تجزیه وتحلیل قرار می دهیم ودر این حالت بحث اصلی تجزیه و تحلیل پاسخ ورودی صفر مدار ها می باشد.

• ٤-٥-١- پاسخ ورودی صفر مدارهای عمومی مرتبه اول نمونه ا لف:

برای آشنایی با رو ش های تحلیل , یک مدار RL مطابق شکل (٤-١٩-الف) را درنظر گرفته و اولاً جریان سلف $i_L(t)$ را برای زمان های $t \geq o$ بدست می آوریم . ثانیاً جریان $i_1(t)$ را نیز محاسبه می نماییم. بااین فرض که جریان ذخیره شده قبلی در سلف برابربا : $i_L(0) = I_0$ است..

١- تحلیل مدار با استفاده از معادله دیفرانسیل مدار بر حسب متغیر پاسخ:

بااستفاده از قوانین کیریشهف دو معادله KVL برای دو حلقه ویک معادله KCL برای یکی ازگر ه ها با استفاده از جریان شاخه ها می نویسیم .ومعادله دیفرانسیل را برحسب $i_L(t)$ بدست می آوریم. شکل(٤-١٩-ب)

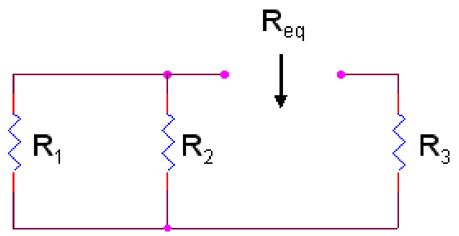


(ا لف) شکل(٤-١٩) (ب)

$$\begin{cases} KVL(1) \Rightarrow L\dfrac{di_L(t)}{dt} + R_3 i_L(t) - R_2 i_2(t) = 0 \\ KVL \Rightarrow R_1 i_1(t) = R_2 i_2(t) \\ KCL(1) = i_1(t) + i_2(t) + i_L(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L\dfrac{di_L(t)}{dt} + R_3 i_L(t) - R_2 i_2(t) = 0 \\ i_1(t) = \dfrac{R_2}{R_1} i_2(t) \\ \dfrac{R_2}{R_1} i_2(t) + i_2(t) = -i_L(t) \Rightarrow i_2(t) = \dfrac{-i_L(t)}{1 + R_2/R_1} \end{cases}$$

$$L\frac{di_L}{dt} + R_3 i_L(t) - R_2\left[-\frac{R_1}{R_1+R_2} i_L(t)\right] = 0 \Rightarrow L\frac{di_L}{dt} + \left[R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\right] i_L(t) = 0$$

همانطور که از رابطه اخیر نتیجه می شود ,آن یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول همگن است که پاسخ آن به صورت $i_L(t) = Ae^{St} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ می باشد و در آن رابطه $\tau = \dfrac{L}{R_3 + \left[R_1R_2 \big/ (R_1+R_2) \right]}$ است ونتیجتاً مخرج کسر یک مقاومت معادل $R_{eq} = R_3 + \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ است.و اگر به این مقاومت معادل توجه شود مشاهده میگردد که R_{eq} مطابق شکل (٤-٢٠) از ترکیب مقاومت های R_3, R_2, R_1 بدست آمده. و $\tau = \dfrac{L}{R_{eq}}$ است از طرف دیگر دامنه جریان $i_L(t)$ برابربا جریان اولیه سلف است ونتیجتاً : $i_L(t) = i_L(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$ می شود.



شکل(٤-٢٠)

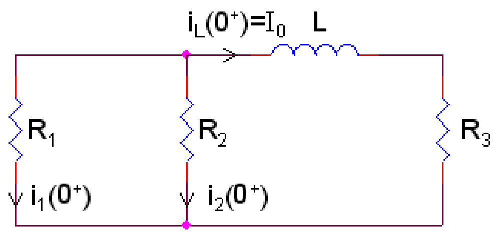
ثانیاً برای محاسبه $i_1(t)$ از دستگاه معادلات نوشته شده برحسب جریان شاخه ها استفاده نموده وا ین دفعه معادله را برحسب متغیر $i_1(t)$ مرتب مینماییم.

$$\begin{aligned} &KVL(1) \Rightarrow L\frac{di_L(t)}{dt} + R_3i_L(t) - R_2i_2(t) = 0 \\ &KVL \Rightarrow R_1i_1(t) = R_2i_2(t) \\ &KCL(1) = i_1(t) + i_2(t) + i_L(t) = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} L\dfrac{di_L(t)}{dt} + R_3i_L(t) - R_2i_2(t) = 0 \\ i_2(t) = \dfrac{R_1}{R_2}i_1(t) \\ i_L(t) = -[i_1(t) + i_2(t)] = -\left[1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right]i_1(t) \end{cases}$$

$$L\frac{d}{dt}\left\{-\left[1+\frac{R_1}{R_2}\right]i_1(t)\right\} + R_3 \times \left\{-\left[1+\frac{R_1}{R_2}\right]i_1(t)\right\} - R_1i_1(t) = 0 \Rightarrow$$

که با ضرب جملات این معادله در منفی (-) وتقسیم جملات بر $(1+\dfrac{R_1}{R_2})$ معادله دیفرانسیل زیر حاصل می گردد:

$L\dfrac{di_1}{dt} + \left[R_3 + \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right]i_1(t) = 0$ که باید آن را حل کرد . همان گونه که مشاهده می شود پاسخ ورودی صفر این معادله به صورت $i_1(t) = Ae^{St} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ است وثابت زمانی همان ثابت زمانی پاسخ جریان سلف است زیرا قبلاً بیان شد که ثابت زمانی به متغیر های مدار بستگی ندارد. اما برای تعیین دامنهA لا زم است مقدار جریان را در زمان مشخص داشته باشیم. اگر به مدار شکل (٤-٢١)در لحظه $t = 0^+$ توجه شود, جریان اولیه سلف بین مقاومت ها تقسیم می شود وجریان $i_1(0^+)$ بدست می آید.نتیجتاً رابطه $i_1(t)$ برحسب زمان برای زمان های $t > 0$ مشخص می گردد.



$t=0^+$

شکل(۴-۲۱)

$$i_1(0^+) = -\frac{R_2}{R_1+R_2} i_L(t) \Rightarrow i_1(0^+) = -\frac{R_2 I_0}{R_1+R_2}$$

$$i_1(t) = -\frac{R_2 I_0}{R_1+R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} = i_1(0^+) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{با} \quad \tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

۲- **روش استفاده از مدار معادل** : همان گونه که از تحلیل مرحله اول نتیجه شد ثابت زمانی را می توان از یک مدار RL ساده با اجزاءِ سلف ومقاومت معا دل مدار از بین دو سر سلف بدست آورد. بطوریکه در شکل (۴-۲۰) مشاهده می شود مقاومت های R_2, R_1 موازی هستند وبا مقاومت R_3 سری می باشند. و شرایط اولیه برای هر دو متغیر بستگی به جریان سلف در $t=0^+$ دارد .

- از تحلیل این مدار وتعیین پاسخ ورودی صفر چنین نتیجه می شودکه فرم پاسخ ورودی صفر با متغیر $x(t)$ مشابه فرم رابطه مدارهای ساده است وثابت زمانی در این رابطه بستگی به مقاومت معادل مدار از دوسر جزءِ ذخیره کننده مدار دارد وروش های تعیین مقاومت معادل نیز در بحث قضایای تونن ونورتن در فصل سوم بیان شد.
- شرایط اولیه $x(0^+)$ بستگی به جریان اولیه سلف یا ولتاژ اولیه خازن دارد وباید د ر زمان $t=0^+$ در مدار محاسبه شود.بنابراین می توان نتیجه گرفت :

$x(t) = x(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t>0$ برای زمان های

$\tau = R_{eq}C$ ثابت زمانی مدار RC

$\tau = \frac{L}{R_{eq}}$ ثابت زمانی مدار RL

- **۴-۵-۲ – پاسخ حالت صفر مدارهای عمومی RC و RL :**

برای تعیین پاسخ حالت صفر مدارهای عمومی RC و RL نیز می توان مانند پاسخ ورودی صفر مدارهای عمومی RC و RL از دو روش استفاده نمود :

۱- روش استفاده از معادله دیفرانسیل مدار بر حسب متغیر جریان سلف یا ولتاژ خازن .

۲- روش استفاده ا ز تعیین مدار معادل تونن یا نورتن مدار و حل مدار ساده RL یا RC

در هر صورت پس ا ز به کاربردن هر یک از روش های فوق در مدارهای با ورودی dc , پاسخ حالت صفر برای متغیر $x(t)$ از رابطه :

$$x(t) = x_p(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad t \geq 0$$

$\tau = R_{eq}C$ برای مدارهای RC

$\tau = \dfrac{L}{R_{eq}}$ برای مدارهای RL

به دست می آید , پاسخ دائم x_p نیز از معادله دیفرانسیل یا مدار معادل مدار در $t = \infty$ نیز قابل محاسبه است.

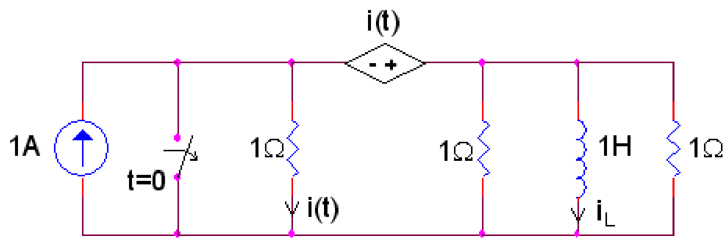
در مورد مدارهای عمومی با ورودی جریان متناوب از هرکدام از روش های ذکر شده که استفاده شود , در نهایت باید با استفاده از معادله دیفرانسیل مانند مدارهای ساده مسئله را تحلیل کرد.

• مثال (٤-١) :

ا لف : در مدار شکل (٤-۲۲) به روش پتانسیل گره معادلات دیفرانسیل و انتگرال گره را بنویسید.

ب : معادله دیفرانسیل مدار را بر حسب $i_L(t)$ به دست آورید.

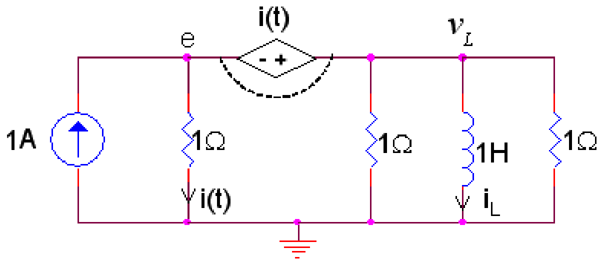
ج : $i_L(t)$ را برای کلیه زمان های $t \geq 0$ به دست آورید.



شکل(٤-۲۲)

• پاسخ :

الف : گره ها را مشخص و پتانسیل گره ها را مطابق شکل (٤-۲۳) تعیین می کنیم و برای آن ها KCL می نویسیم :



شکل(٤-۲۳)

$$\begin{cases} -1+\dfrac{e}{1}+\dfrac{v_L}{1}+\dfrac{1}{1}\int_0^t v_L dt + i_L(0)+\dfrac{v_L}{1}=0 \\ v_L - e = i(t) \\ \dfrac{e}{1}=i(t) \end{cases}$$

ب : اگر به جای v_L , $L\dfrac{di_L}{dt}$ را قرار دهیم و معادلات گره را ساده کنیم نتیجه می شود:

$$\begin{cases} e+2v_L+i_L=1 \\ 2e=v_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{v_L}{2}+2v_L+i_L=1 \\ v_L=\dfrac{di_L}{dt} \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2}\frac{di_L}{dt}+i_L=1$$

ج : برای حل معادله دیفرانسیل $\frac{5}{2}\frac{di_L}{dt}+i_L=1$, چون منبع $1A$ در لحظه $t=0$ به مدار اضافه می شود , $i_L(0)=0$ است و پاسخ حالت صفر است .

۱. معادله مشخصه را تشکیل می دهیم و فرکانس طبیعی را به دست می آوریم :

$$\frac{5}{2}S+1=0 \Rightarrow S=-\frac{1}{5/2}=-\frac{2}{5}\sec^{-1}$$

۲. پاسخ دائم را حساب می کنیم $(i_P=K)$:

$$\frac{5}{2}\times 0+K=1 \Rightarrow i_P=1A$$

۳. پاسخ حالت صفر $i_L(t)$ برابر است با :

$$i_L(t)=1(1-e^{-\frac{2}{5}t}) \Rightarrow i_L(t)=1-e^{-\frac{2}{5}t} \quad t\ge 0$$

• ٤-٥-٣-پاسخ کامل مدارهای عمومی RC و RL با ورودی dc :

برای تعیین پاسخ کامل مدارهای مرتبه اول RC و RL به طور کلی نیز می توان از دو روش زیر استفاده کرد.

۱- پاسخ کامل برابر است با :

$$x(t)=x_i(t)+x_0(t)=x(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}+x_P(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad \text{پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر}$$

۲- پاسخ کامل برابر است با :

$$x(t)=x_h+x_P=Ae^{-\frac{t}{\tau}}+x_P=x_P+\left[x(0^+)-x_P\right]e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{پاسخ همگن + پاسخ دائم}$$

که در این دو روش :

$\tau=R_{eq}e$ مدار RC

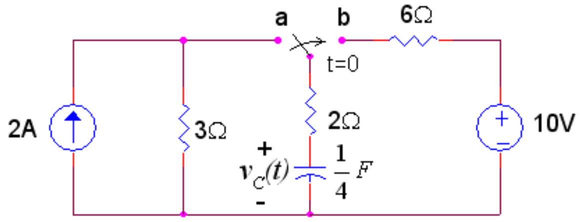
$\tau=\dfrac{L}{R_{eq}}$ مدار RL

پاسخ دائم x_P از مدار معادل در $t=\infty$ و $x(0^+)$ از مدار معادل در $t=0^+$ حساب می شوند.

• **مثال (٤-٢) :** در مدار شکل (٤-٢٤)کلید مدت ها در وضعیت a بوده و در لحظه $t=0$ از a به b تغییر وضعیت می دهد , پاسخ کامل $v_C(t)$ را برای کلیه زمان ها :

الف : به روش $x(t)=x_h+x_P$ **ب :** به روش $x(t)=x_i(t)+x_0(t)$

به دست آورید و منحنی آن را رسم کنید.

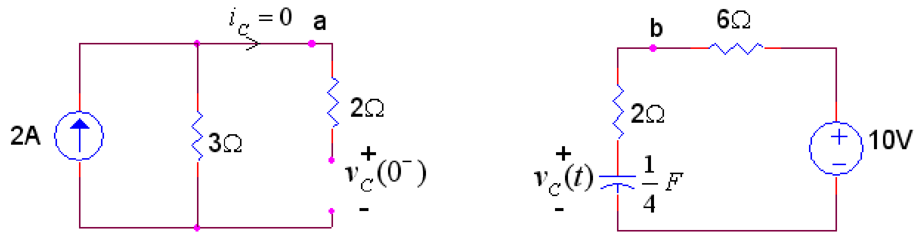


شکل(٤-٢٤)

• **پاسخ :**

الف: چون کلید مدت ها در وضعیت a بوده , بنابراین خازن کاملاً شارژ شده و حالت مدار باز دارد , بنابراین از مدار معادل شکل (٤-٢٥-الف) در $t=0^-$ ولتاژ خازن را حساب می کنیم.

$$v_C(0^-)=2\times 3=6^V$$



(الف) شکل(٤-٢٥) (ب)

ولتاژ خازن تغییر ناگهانی را نمی پذیرد بنابراین بعد از تغییر وضعیت کلید $v_C(0^-)=v_C(0^+)=6^V$ می شود و حال مدار شکل (٤-٢٥-ب) را تحلیل می نماییم.

با استفاده از روش (١) داریم :

$$v_C(t)=v_h+v_P=v_P+(v_C(0^+)-v_P)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

v_P در این حالت با توجه به شارژ مجدد خازن در شکل (٤-٢٥-ب) برابر منبع و برابر 10^V می شود .

از آنجا که مقاومت معادل $R_{eq}=2+6=8\Omega$ است در نتیجه :

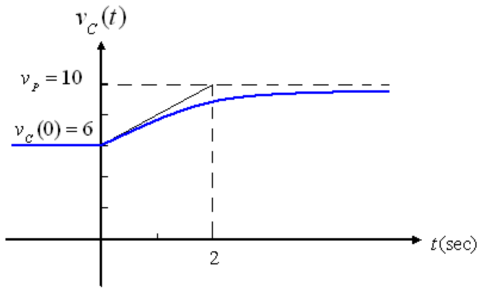
$$\tau=R_{eq}\times C=8\times\frac{1}{4}=2\sec$$

بنابراین:

$$v_C(t) = 10 + (6-10)e^{-\frac{t}{2}} \qquad t \ge 0$$

$$v_C(t) = 10 - 4e^{-\frac{t}{2}} \qquad t \ge 0$$

منحنی پاسخ برای کلیه زمان ها در شکل (٤-٢۶) نشان داده شده است .



شکل(٤-٢۶)

ب: با توجه به $v_C(0^+) = 6$ و $\tau = 2\sec$:

$$v_i(t) = v_i(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \ge 0$$

$$v_i(t) = 6e^{-\frac{t}{2}} \qquad t \ge 0$$

با توجه به اینکه $v_P = 10^V$ و $\tau = 2\sec$:

$$v_0(t) = v_P(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad t \ge 0$$

$$v_0(t) = 10(1 - e^{-\frac{t}{2}}) \qquad t \ge 0$$

بنابراین :

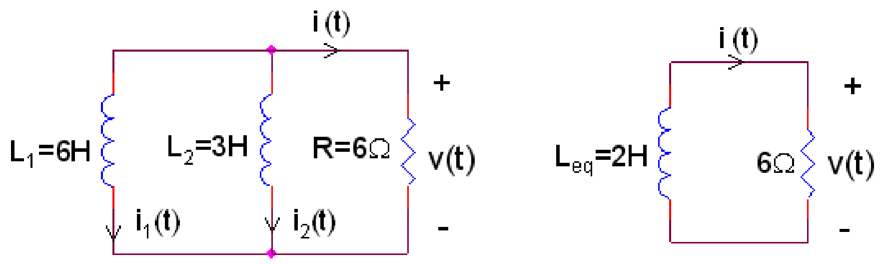
$$v_C(t) = v_i(t) + v_0(t) = 6e^{-\frac{t}{2}} + 10(1 - e^{-\frac{t}{2}}) \qquad t \ge 0$$

$$v_C(t) = 10 - 4e^{-\frac{t}{2}} \qquad t \ge 0$$

• ٤-٥-٤- پاسخ مدارهای مرتبه اول RL و RC شامل چند سلف یا چند خازن :

برای اینکه نکات تحلیل را به طور کامل بیان نماییم به تحلیل یک مثال می پردازیم .

• مثال (٤-٣) : در مدار شکل (٤-٢٧-الف) جریان های $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را برای زمان های $t \ge 0$ به ازاءِ $i_1(0) = 2A$ و $i_2(0) = 1A$ محاسبه نمایید و اصل بقاءِ انرژی را مورد بررسی قرار دهید.



(ا لف) شکل(٤-٢٧) (ب)

• **پاسخ :** برای تحلیل , ابتدا مدار معادل شکل (٤-٢٧-ب) را به دست آورده و ولتاژ دو سر اجزاء $v(t)$ را حساب می کنیم :

طبق KCL داریم :

$$i(t)+i_1(t)+i_2(t)=0 \Rightarrow i(t)=-i_1(t)-i_2(t)$$

$$v(t)=6i(t)$$

$$L_{eq}=\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}=\frac{6\times 3}{6+3}=2H \quad , \quad \tau=\frac{L_{eq}}{R}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\sec$$

$$i(0^+)=-i_1(0)-i_2(0)=-2-1=-3A$$

با استفاده از روش تعیین پاسخ ورودی صفر , $i(t)$ و $v(t)$ را به دست می آوریم :

$$i(t)=i(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(t)=(-3)e^{-\frac{t}{1/3}} \Rightarrow i(t)=-3e^{-3t} \qquad t>0$$

$$v(t)=6i(t)=6(-3)e^{-3t} \qquad t>0$$

$$v(t)=-18e^{-3t} \qquad t>0$$

سپس با استفاده از رابطه $i_L(t)=\frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)dt+i_L(0)$ جریان های $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را به دست می آوریم :

$$i_1(t)=\frac{1}{6}\int_0^t(-18)e^{-3t}dt+2 \Rightarrow i_1(t)=\frac{1}{6}(\frac{-18}{-3})\times e^{-3t}\Big|_0^t+2 \Rightarrow i_1(t)=1+e^{-3t} \qquad t\geq 0$$

$$i_2(t)=\frac{1}{3}\int_0^t(-18)e^{-3t}dt+1 \Rightarrow i_2(t)=\frac{1}{3}(\frac{-18}{-3})\times e^{-3t}\Big|_0^t+1 \Rightarrow i_2(t)=-1+2e^{-3t} \qquad t\geq 0$$

و همان طور که مشاهده می شود جریان ها دررابطه جریانی صدق می کنند.

$$i(t)=-i_1(t)-i_2(t)=-(1+e^{-3t})-(-1+2e^{-3t})=-3e^{-3t}$$

برای بررسی اصل بقاء انرژی :

الف : انرژی ذخیره شده در لحظه $t=0^-$ در سلف ها عبارت است از :

$$E_L(0^-)=\frac{1}{2}\times L_1\times i_1{}^2(0)+\frac{1}{2}\times L_2\times i_2{}^2(0)=\frac{1}{2}\times 6\times 2^2+\frac{1}{2}\times 3\times 1^2=12+1.5$$

$$E_L(0^-)=13.5J$$

در بررسی وتحلیل مدار مشاهده می شود که این انرژی باعث ایجاد جریان در مقاومت مدار شده وبه صورت انرژی حرارتی در فاصله زمانی صفر تا بینهایت درمقاومت تلف می کردد.

ب : انرژی تلف شده در مقاومت در فاصله زمانی 0 تا ∞ برابر است با :

$$E_R(t)=\int_0^t v(t)i(t)dt=\int_0^\infty(-18e^{-3t})(-3e^{-3t})dt$$

$$E_R(t)=\int_0^\infty 54e^{-6t}dt=\frac{54}{-6}e^{-6t}\Big|_0^\infty=9J$$

ج : اگر به پاسخ های $i_1(t)$ و $i_2(t)$ توجه شود برای زمان های $t\geq 0$ یک جریان ثابت در حلقه سلفی در جهت $i_1(t)$ ایجاد شده که برابر یک آمپر است . بنابراین مقداری انرژی در اثر جریان یک آمپر در حلقه سلفی محبوس است که مقدار آن برابر است با :

$$E_L(0^+)=\frac{1}{2}(6+3)\times 1^2=4.5J$$

بنابراین اصل بقاءِ انرژی صادق است و انرژی اولیه سلف ها برابر است با :

(انرژی تلف شده در مقاومت) + (انرژی محبوس شده در سلف ها) $\quad 13.5J=9J+4.5J$

نتایجی که از این مسئله می توان گرفت :

۱- اگر سلف ها تشکیل حلقه بدهند انرژی می تواند در آن ها محبوس گردد.

۲- انرژی محبوس شده به اصل بقاءِ فوران (شار) در سلف های تشکیل دهنده حلقه بستگی دارد .

به طوری که :

$$\varphi_1(0)=L_1 i_1(0^-)=6\times 2=12wb$$

$$\varphi_2(0)=L_2 i_2(0^-)=3\times 1=3wb$$

و φ در $t=0^+$ برابر است با :

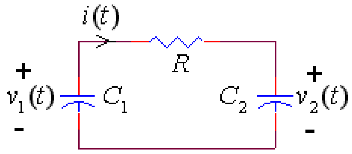
$$\varphi(0)=L_{eq}i(0^+)=(L_1+L_2)i(0^+)\Rightarrow\varphi(0)=\varphi_1(0)-\varphi_2(0)$$

$$12-3=(6+3)i\Rightarrow i=1A$$

۳- جریان ثابت تا زمانی وجود دارد و انرژی محبوس است که حلقه سلفی برقرار باشد.

٤- در روابط جریان $i_1(t)=1+e^{-3t}$ و $i_2(t)=-1+2e^{-3t}$ مقدار ثابت جریان, پاسخ دائم نمی باشد بلکه جریان با فرکانس طبیعی صفرهست $i_1(t)=1e^{(0)t}+e^{-3t}$ و $i_2(t)=-1^{(0)t}+2e^{-3t}$

۵- برای تحلیل مدارخازنی شکل (٤-٢٨) که دوگان مدار سلفی شکل(٤-٢٧) می باشد از دوگانی استفاده می شود بدین شرح که :



شکل(٤-٢٨)

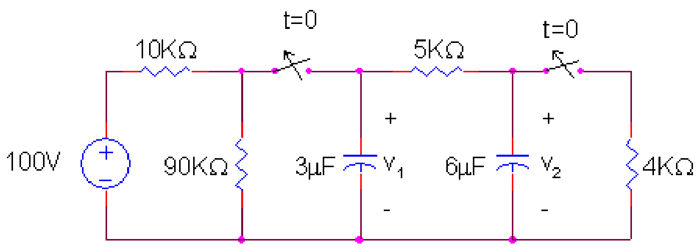
الف:جریان مقاومت (جریان حلقه) را برای زمان های $t > 0$ براساس ولتاژ اولیه خازن ها وثابت زمانی $\tau = C_{eq}R$ بدست می آوریم.

ب :با توجه به جریان مقاومت ورابطه $v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt + v_C(0)$ وتوجه به قرارداد متناظر بین جریان و ولتاژ خازن و همچنین ولتاژ اولیه خازن ها, رابطه ولتاژخازن ها را برحسب زمان بدست می آوریم .

ج :انرژی محبوس شده در خازن ها بستگی به اصل بقاءِ بار الکتریکی در خازن ها دارد .

ه :ولتاژ ثابت در رابطه ولتاژ خازن ها بلکه ولتاژ با فرکانس طبیعی صفر است.

• **مثال(٤-٤) :** در مدار شکل (٤-٢٩) دو کلید در لحظه $t = 0$ بطور همزمان باز می شوند .

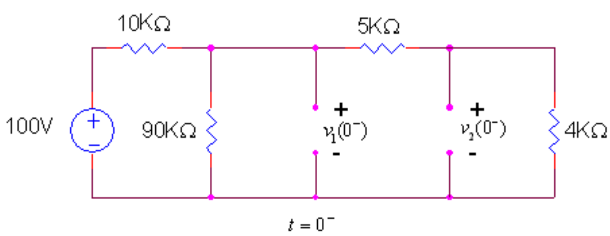


شکل(٤-٢٩)

الف – $v_1(0)$ و $v_2(0)$ راحساب کنید . **ب :–** روابط $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را برای زمان های $t \geq 0$ بدست آورید.

ج –انرژی تلف شده در مقاومت ۵ KΩ را برای مدت زمان $(0 \leq t \leq \infty)$ حساب کنید. آیا این انرژی با انرژی اولیه خازن ها برابر است یاخیر؟ **د–** انرژ ی محبوس شده در خازن ها را محاسبه نمایید .

• **پاسخ : الف–**با فرض اینکه مدت طولا نی کلید ها بسته بوده, خازن ها شارژ شده اند ودر لحظه $t = 0$ مطابق شکل (٤-٣٠) حالت مدار باز را دارند.



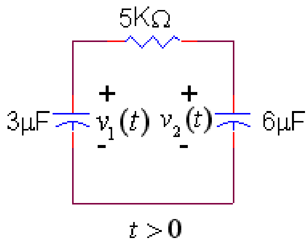
شکل(٤-٣٠)

در نتیجه مقدار ولتاژ ها با استفاده از روش های تحلیلی مختلف قابل محاسبه می باشند از جمله روش گره :

$$\begin{cases}\dfrac{v_1(0)-100}{10}+\dfrac{v_1(0)}{90}+\dfrac{v_1(0)-v_2(0)}{5}=0\\ \dfrac{v_2(0)-v_1(0)}{5}+\dfrac{v_2(0)}{4}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{9v_1-900+v_1(0)+18v_1(0)-18v_2(0)}{90}=0\\ \dfrac{4v_2(0)-4v_1(0)+5v_2(0)}{20}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}28v_1(0)-18v_2(0)=900\\ -4v_1(0)+9v_2(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_1(0)=45Volts\\ v_2(0)=20Volts\end{cases}$$

ب- در مدار شکل (٤-٣١) ابتداءِ رابطه i(t) را با استفاده از شرایط اولیه ولتاژ خازن ها وثابت زمانی از فرم پاسخ ورودی صفر محاسبه می نماییم .



شکل(٤-٣١)

$$i(t)=5e^{-100t}mA\ i(0^+)=\frac{45-20}{5}=5mA\text{ و }\tau=C_{eq}R\text{ وو }_{eq}=\frac{3\times6}{3+6}=2\mu F\text{ و }\tau=2\times10^{-6}\times5\times10^{3}=10^{-2}Sec$$

حال با استفاده از رابطه محاسبه ولتاژ برحسب جریان وشرایط اولیه خازن ها ولتاژ آن ها را برحسب زمان بدست می آوریم :

$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt+v_C(t)$$

$$v_1(t)=\frac{1}{3\times10^{-6}}\int_0^t(-5\times10^{-3})e^{-100t}dt+45\Rightarrow v_1(t)=\frac{-5\times10^{-3}}{3\times10^{-6}(-100)}e^{-100t}\Big|_0^t+45$$

$v_1(t)=\dfrac{85}{3}+\dfrac{50}{3}e^{-100t}Volts$ برای زمان های $t\ge0$

$$v_2(t)=\frac{1}{6\times10^{-6}}\int_0^t5\times10^{-3}e^{-100t}dt+20\Rightarrow v_2(t)=\frac{5\times10^{-3}}{6\times10^{-6}(-100)}e^{-100t}\Big]_0^t+20$$

$v_2(t)=\dfrac{85}{3}-\dfrac{25}{3}e^{-100t}Volts$ برای زمان های $t\ge0$

ج : با توجه به جریان مقاومت $i(t)$, انرژی تلف شده در مقاومت را حساب می کنیم وسپس برای مقایسه انرژی ها , انرژی ذخیره شده در خازن ها را قبل از باز شدن کلید ها محاسبه می نماییم.

$$E_R(t)=\int_0^\infty Ri^2(t)dt=\int_0^\infty5\times10^3[5\times10^{-3}e^{-100t}]^2dt\Rightarrow w_R(t)=[125\times10^{-3}\times\frac{1}{(-200)}e^{-200t}]_0^\infty$$

$$E_R(t)=62.5\times10^{-5}J=625\mu J$$

$$E_1(0^-)=\frac{1}{2}C_1v_1^2(0)=\frac{1}{2}\times 3\times 10^{-6}(45)^2=3037.5\times 10^{-6}\ j$$

$$E_2(0^-)=\frac{1}{2}C_2v_2^2(0)=\frac{1}{2}\times 6\times 10^{-6}(20)^2=1200\times 10^{-6}\ j$$

$$E(0^-)=E_1(0^-)+E_2(0^-)=(3037.5+1200)\times 10^{-6}=4237{,}5\times 10^{-6}\ j=4237{,}5\mu j$$

بنابراین انرژی تلف شده در مقاومت کمتر از انرژی ذخیره شده در خازن ها است وتفاوت این انرژی ها بعد از بازشدن کلیدها در خازن ها برمبنای اصل بقاء بار الکتریکی محبوس شده است.

د : همانطور که در بند ج بیان شد انرژی محبوس شد ه در خازن ها بربابر است با :

(انرژی تلف شده در مقاومت)–(کل انرژی ذخیره شده درخازن هادر $t=0^-$)=انرژی محبوس شده

$$E_C=4237.5-625=3612.5\mu J$$

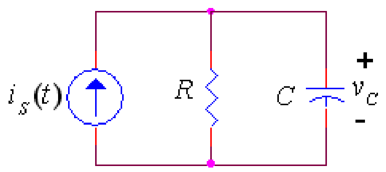
روش دیگر از طریق ولتاژ باقیمانده در خازن ها وظرفیت معادل $C_{eq}=C_1+C_2$ وبا توجه به اصل بقاء بار الکتریکی است .

$E_C=\frac{1}{2}C_{eq}\times(\frac{85}{3})^2=\frac{1}{2}(3+6)10^{-6}(\frac{85}{3})^2=3612.5$ = انرژی محبوس شدهس

٤-۶- انتقال زمانی وتاثیر آن بر مدار های خطی

در این بحث ابتداء به اثر انتقال زمانی بر مدار های خطی تغییر ناپذیر با زمان می پردازیم وبرای بررسی اثر تغییر زمان, تحلیل یک مدار RC ساده با جریان ورودی $i_S(t)$ را انجام داده و در مرحله بعدبا همان جریان انتقال یافته به اندازه زمانی t_0 مانند $[i_S(t-t_0)]$ مجدداً مدار را تحلیل می نماییم وبا مقایسه پاسخ ها در دو مرحله اثر تغییر زمانی را فرموله می کنیم .

- الف : فرض می کنیم منبع جریان $i_S(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ I_0 & t>0\end{cases}$ به مدارRC شکل (٤-٣٢) اعمال گردد.



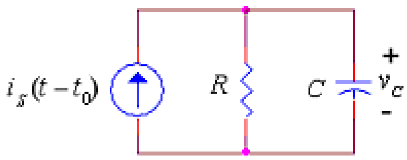
شکل(٤-٣٢)

در صورتی که ولتاژ خازن به عنوان خازن انتخاب شود وشرایط اولیه ولتاژ خازن برابر با صفر باشد پاسخ مدار از معادله دیفرانسیل $C\frac{dv_C}{dt}+Gv_C(t)=i_S(t)$ محاسبه می شود وعبارت است از:

$$v_C(t)=\begin{cases}0 & t\le o\\ RI_O(1-e^{-\frac{t}{RC}}) & t\ge 0\end{cases}$$

این پاسخ و ورودی در شکل (٤-٣٤-ا لف وب)مشاهده می شوند.

• ب: اما اگرمنبع جریان $i_S(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ I_0 & t>t_0\end{cases}$ را به همان مدار RC مطابق شکل (٤-٣٣) اعمال کنیم وولتاژ خازن تا زمان $t \le t_0$ برابر با صفر باشد در این صورت پاسخ $v_C(t)$ از روابط زیر بدست می آید.



شکل(٤-٣٣)

$$C\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C(t)}{R}=i_S(t-t_0)$$

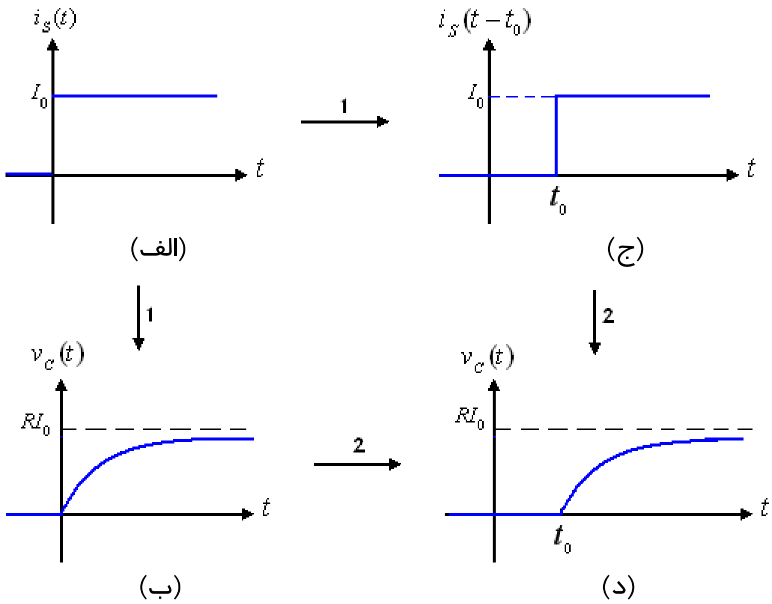
$$v_C(t)=v_h+v_P \text{ و } v_P=K=RI_0 \text{ و } CS+\frac{1}{R}=0 \Rightarrow S=-\frac{1}{RC} \text{ و } v_C(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}+RI_0$$

برای تعیین دامنه پاسخ همگن A با استفاده از شرایط اولیه $v_C(t_0)=0$ مقدار قرار می دهیم .

$$v_C(t_0)=0=Ae^{-\frac{t_0}{RC}}+RI_0 \Rightarrow A=-RI_0e^{\frac{t_0}{RC}}$$

$$v_C(t)=\begin{cases}0 & t\le t_0\\ RI_0(1-e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}}) & t\ge t_0\end{cases}$$

ورودی وپاسخ در حالت (ب) نیز در شکل (٤-٣٤-ج و د) رسم شده اند در نتیجه از مقایسه ورودی ها وپاسخ ها دربررسی دو حالت(ا لف وب) مدار خطی تغییر ناپذیر بازما ن RC چنین حا صل می شود.



شکل(٤-٣٤)

۱-در یک مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان اگر ورودی انتقال زمانی داشته باشد پاسخ مدار فقط به اندازه انتقال زمانی ورودی منتقل می گردد وتغییر دیگری در پاسخ بوجود نمی آید.

۲-برای تعیین پاسخ یک مدار که ورودی آن باید انتقال یابد به دو روش می توان پاسخ را بدست آورد . یا ورودی را انتقال داده وبر اساس ورودی انتقال یافته پاسخ را محاسبه می نمایند. ویا پاسخ را بر اساس ورودی محاسبه نموده وسپس انتقال می دهند.

۳- برای بررسی اثر انتقال زمانی, اپراتوری به عنوان *اپراتور انتقال* $(T_{t'})$ تعریف می شود . اولاً: *اپراتور انتقال* با هر تابع زمانی همراه شودبیانگر انتقال زمانی آن تابع به اندازه t' است

$$T_{t'} f(t) = f(t - t')$$

ثانیاً : *اپراتور انتقال* شرایط خطی بودن را داراست.

$$\begin{cases} T_{t'}(f(t) + g(t)) = T_{t'}(f(t)) + T_{t'}(g(t)) \\ T_{t'}(af(t)) = aT_{t'} f(t) \end{cases}$$

بنابراین اگر پاسخ حالت صفر یک مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان $y_0(t)$ بازاءِ ورودی $x(t)$ با استفاده از اپراتور $y_0(t) = Z_0(x(t))$ نشان داده شود ,با توجه به پذیرش انتقال در مورد پاسخ حالت صفر وانتقال اینچنین می توان بیان کردکه:

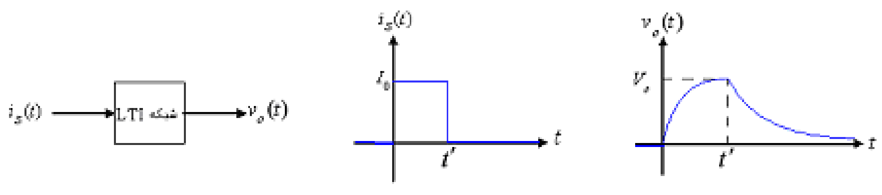
انتقال زمانی به اندازه t' پاسخ حالت صفر یک مدار خطی تغییر ناپذیر بازمان به ورود ی $x(t)$ مساوی است با پاسخ حالت صفر یک مدار به ورودی x(t)که به اندازه t' انتقال یافته است.

$$T_{t'}(Z_0(x(t))) = Z_0(T_{t'}(x(t)))$$

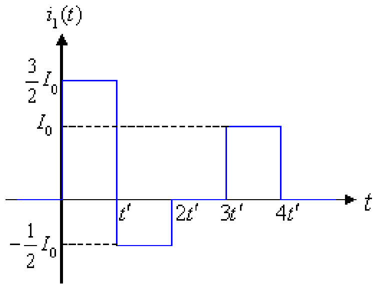
- **مثال(٤-۵):** پاسخ حالت صفر $v_0(t)$ یک شبکه خطی تغییر ناپذیر با زمان و ورودی پالس مربعی

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ I_0 & 0 < t < t' \\ 0 & t > t' \end{cases}$$

در شکل های (٤- ۳۵-الف وب) نشان داده شده اند پاسخ شبکه را بازاءِ ورودی $i_1(t)$ شکل (٤-۳۵- ج) بدست آورید.



(الف) (ب)



شکل(٤-٣٥)

(ج)

- **پاسخ : ۱**– ورودی $i_1(t)$ را به صور ت ترکیب خطی ا ز $i(t)$ و با استفاده از **اپراتور انتقال** می نویسیم:

$$i_1(t)=\frac{3}{2}i(t)-\frac{1}{2}i(t-t')+i(t-3t')\Rightarrow i_1(t)=\frac{3}{2}i(t)-T_{t'}(\frac{1}{2}i(t))+T_{3t'}(i(t))$$

۲–با توجه به این که پاسخ حالت صفر تابع خطی از ورودی است می توان نوشت :

$$Z_0(i_1(t))=Z_0[\frac{3}{2}i(t)-T_{t'}(\frac{1}{2}i(t))+T_{3t'}(i(t))]=Z_0(\frac{3}{2}i(t))-Z_0(T_{t'}(\frac{1}{2}i(t))+Z_0(T_{3t'}(i(t))$$

۳–حال با توجه به رابطه $T_{t'}(Z_0(x(t)))=Z_0(T_{t'}(x(t)))$ و $v_0(t)=Z_0(i(t))$ پاسخ $v_{01}(t)$ برابر است با:

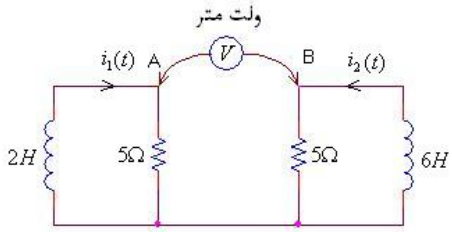
$$v_{01}(t)=Z_0(i_1(t))=\frac{3}{2}Z_0(i(t))-\frac{1}{2}T_{t'}(Z_0(i(t)))+T_{3t'}(Z_0(i(t)))\;v_{01}(t)=\frac{3}{2}v_0(t)-\frac{1}{2}T_{t'}(v_0(t))+T_{3t'}(v_0(t))$$

$$v_{01}(t)=\frac{3}{2}v_0(t)-\frac{1}{2}v_0(t-t')+v_0(t-3t')$$

- **انتقال زمانی در مورد مدار های خطی تغییر پذیر با زمان صادق نیست زیرا پاسخ یک مدار خطی تغییر پذیر در زمان های مختلف با زمان تغییر می نماید.**

مسائل نمونه حل شده

مسئله ۱–٤ : در مدار شکل زیرجریان اولیه سلف ها در زمان $t=0$ برابربا $i_1(0)=5A,$ و $i_2(0)=2A$ می باشد در صورتیکه ولتمتر متصل شده بین دو نقطه ABایده آل فرض شود (مقاومت ولتمتر بی نهایت) در چه زمانی ولتمتر عدد صفر را نشان می دهد.



✓ **حل مسئله ۱-٤**– با توجه به مدار های RL متصل به گره هـای A و B و جریـان هـای اولیـه داده شـده پاسـخ ورودی صـفر ولتـاژ مقاومـت هـای ۵ اهـم را محاسـبه مـی کنـیم ثابـت زمـانی مـدار سـمت چـپ عبـارت اسـت $(\tau_1 = \frac{L}{R} = \frac{2}{5})$ وبنابراین

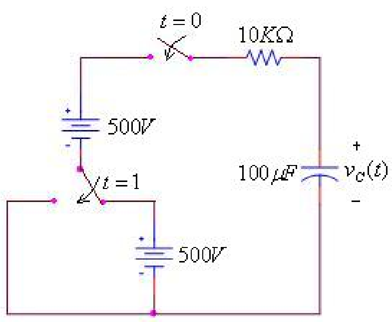
$\{\ i_1(t) = i_1(0)e^{-t/\tau} = 5e^{-(2.5t)}$ و $v_A(t) = 5i_1(t) \Rightarrow \quad v_A(t) = 5\times 5e^{-2.5t} = 25e^{-2.5t}, V\ \}$ ودر مورد مدار RL سمت راست داریم :

$\{\tau_2 = \frac{6}{5}Sec \Rightarrow i_2(t) = 2e^{-5t/6}, A$ و $v_B(t) = 5i_2(t) = 5\times 2e^{-5t/6} = 10e^{-5t/6}.V\}$ باتوجه به ولتـاژی کـه ولتمتـر نشان می دهد.می توان نوشت:

$$v(t) = v_A(t) - v_B(t) = 25e^{-2.5t} - 10e^{-5t/6} = 0 \Rightarrow 25e^{-2.5t} = 10e^{-5t/6} \Rightarrow \ln(25e^{-2.5t}) = \ln(10e^{-5t/6}) \Rightarrow$$

$$\ln(25) - 2.5t = \ln(10) - \frac{5t}{6} \Rightarrow \ln(25) - \ln(10) = 2.5t - \frac{5t}{6} \Rightarrow \frac{5}{3}t = \ln(2.5) \Rightarrow t = 0.6\times 0.916 \Rightarrow t \approx 0.55Sec$$

مسئله –۲-٤ : در مدار شکل زیر ولتاژخازن $v_C(0) = 0$ است و دوکلید بترتیب در زمان هـای $t = 0$ و $t = 1, Sec$ بسـته وتغییر وضعیت می دهند رابطه ولتاژخازن $v_C(t)$ را برای فواصل زمانی $0 \le t \le 1$ و $t \ge 1$ ثانیه بدست آورید



✓ **حل مسئله ۲-٤** – چون مدار شامل دو کلید است ابتداءِ پاسخ مدار را با بسته شدن کلید در زمان $t = 0$ که از نوع پاسخ حالت صفر است بدست می آوریم :

و $v_0(t) = V_P(1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow V_P = 500 + 500 = 1000, V$

$v_0(1) = 1000(1 - e^{-1}) = 630, V = V_C(1)$ و $\tau = RC = (10 \times 10^3)(100 \times 10^{-6}) = 1, Sec \Rightarrow v_0(t) = 10^3(1 - e^{-t})u(t)$

با توجه به اینکه کلید دوم در زمان $t = 1Sec$ تغییر وضعیت می دهد وولتاژ خازن در این زمان ۶۳۰ ولت است از زمان $t = 1Sec$ پاسخ از نوع پاسخ کامل می شود در نتیجه داریم :

$v_C(t) = [500 + (630 - 500)e^{-(t-1)}]u(t-1)$ بنابراین $v_C(t) = V_P + (V_C(1) - V_P)e^{-(t-1)/\tau} \Rightarrow V_P = 500.V \Rightarrow \tau = 1Sec$

نتیجتاً $v_C(t) = \begin{cases} 10^3(1 - e^{-t}) & 0 \le t \le 1Sec \\ 500 + 130e^{-(t-1)} & t \ge 1Sec \end{cases}$

تجزیه و تحلیل مدار های مرتبه اول:

۴-۷- تحلیل مدار های با چند کلید یا چند ثابت زمانی:

برای تحلیل مدار هایی که شامل چند کلید هستند و این کلید ها به طور هم زمان عمل نمی کنند و تغییر وضعیت نمی دهند و از طرفی باعث تغییر ثابت زمانی مدار می گردند , به تحلیل یک مدار RL شامل دو کلید مطابق شکل (۴-۳۶) می پردازیم .

شکل(۴-۳۶)

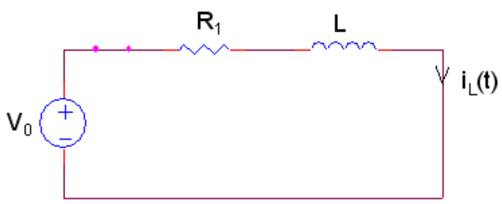
در این مدار کلید های S_1, S_2 به ترتیب در لحظه $t=0$ و $t'>0$ تغییر وضعیت می دهند. اگر جریان $i_L(t)$ پاسخ مدار در نظر گرفته شود و بخواهیم پاسخ را برای کلیه زمان ها تعیین کنیم , ابتدا از لحاظ فیزیکی پاسخ را مورد بررسی قرار داده و سپس روابط تحلیل را می نویسیم .

تحلیل فیزیکی :

همان گونه که مشاهده می شود به دلیل باز بودن کلید S_1 جریان اولیه سلف $i_L(0)=0$ است و با بسته شدن کلید S_1 و بسته بودن کلید S_2 جریان $i_L(t)$ بر اساس پاسخ حالت صفر با ثابت زمانی مشخص شروع به افزایش می نماید و تا لحظه t' جریان سلف به مقدار $i_L(t')=I'$ می رسد . با باز شدن کلید S_2 مقاومت مدار افزایش می یابد و باعث تغییر ثابت زمانی مدار می گردد و از طرفی زمان های $t \geq t'$ به دلیل جریان سلف در لحظه t' به عنوان شرایط اولیه و هم چنین منبع مدار , نوع پاسخ کامل است و عمل ادامه می یابد تا به حالت پایدار برسد .

تحلیل ریاضی پاسخ :

۱. با بسته شدن کلید S_1 , اگر فرض کنیم S_2 هیچ زمانی باز نشود مطابق شکل (۴-۳۷) در این صورت با دو روش , پاسخ قابل محاسبه است .

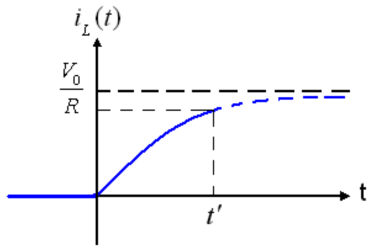


شکل(۴-۳۷)

روش(۱) : پاسخ حالت صفر مدار از رابطه $x(t)=x_P(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$ قابل محاسبه است که در این مدار با توجه به اتصال کوتاه شدن سلف در بینهایت , پاسخ کامل مدار $i_{P1}=\dfrac{V_0}{R_1}$ و ثابت زمانی مدار $\tau_1=\dfrac{L}{R_1}$ می باشد و در نتیجه :

$$i_L(t) = \frac{V_0}{R_1}(1 - e^{-\frac{R_1 t}{L}})$$

روش (۲) : از حل معادله دیفرانسیل $\begin{cases} R_1 i_L + L\dfrac{di_L}{dt} = V_0 \\ i_L(0) = 0 \end{cases}$ پاسخ $i_L(t)$ مطابق شکل (۴-۳۸) به دست می آید .



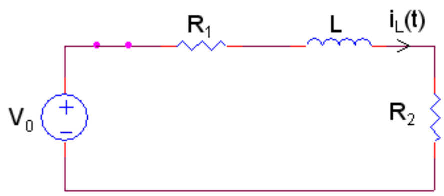
شکل(۴-۳۸)

و همان گونه که بیان شد جریان سلف در لحظه $t = t'$ به مقدار I' می رسد که $I' = i_L(t') = \dfrac{V_0}{R_1}(1 - e^{-\frac{R_1 t'}{L}})$ است .

۲. چون کلید S_2 در لحظه t' باز می شود در نتیجه پاسخ تحت شرایط اولیه جریان $i_L(t') = I'$ و منبع V_0 , دارای پاسخ کامل برای زمان های $t > t'$ است و ثابت زمانی برابر $\tau_2 = \dfrac{L}{R_1 + R_2}$ می باشد و پاسخ کامل مدار مطابق شکل (۴-۳۹) برابر است با $i_{P2} = \dfrac{V_0}{R_1 + R_2}$ که از معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} R_1 i_L(t) + L\dfrac{di_L}{dt} + R_2 i_L(t) = V_0 & \quad t \geq t' \\ i_L(t') = I' \end{cases}$$

به دست می آید .



شکل(۴-۳۹)

پاسخ مدار را می توان به دو صورت :

$$(1) \Rightarrow i_L(t) = i_h + i_P = i_{P2} + (i_L(t'^{+}) - i_{P2})e^{-(\frac{t-t'}{\tau_2})}$$

یا

$$(2) \Rightarrow i_L(t) = i_{Li}(t) + i_{L0}(t) = i_L(t')e^{-(\frac{t-t'}{\tau_2})} + i_{P2}(1-e^{-(\frac{t-t'}{\tau_2})})$$

مشخص نمود . بنابراین جریان مدار به دو بخش تقسیم می شود : (۱) جریان برای زمان های $0 \le t < t'$ و (۲) جریان برای زمان های $t \ge t'$.

$$i_L(t) = \begin{cases} \dfrac{V_0}{R_1}(1-e^{-\frac{t}{\tau_2}}) & 0 \le t \le t' \qquad \tau_1 = \dfrac{L}{R_1} \\ I'e^{-\left(\frac{t-t'}{\tau_2}\right)} + \dfrac{V_0}{R_1+R_2}(1-e^{-\left(\frac{t-t'}{\tau_2}\right)} & t \ge t' \qquad \tau_2 = \dfrac{L}{R_1+R_2} \end{cases}$$

$$I' = \frac{V_0}{R_1}(1-e^{-\frac{t'}{\tau_1}})$$

یا

$$i_L(t) = \begin{cases} \dfrac{V_0}{R_1}(1-e^{-\frac{t}{\tau_1}}) & 0 \le t \le t' \\ \dfrac{V_0}{R_1+R_2} + (I' - \dfrac{V_0}{R_1+R_2})e^{-\frac{t-t'}{\tau_2}} & t \ge t' \end{cases}$$

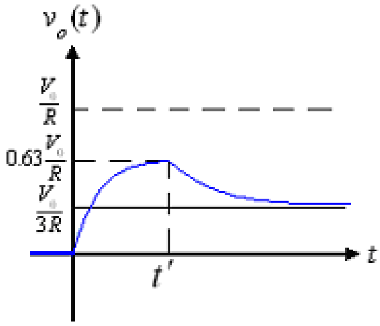
برای ترسیم پاسخ به طور کامل فرض می کنیم $2R_1 = R_2 = 2R$ و $t' = \tau_1$, در این صورت پاسخ به صورت زیر ساده می شود :

$$i_L(t) = \begin{cases} \dfrac{V_0}{R}(1-e^{-\frac{Rt}{L}}) & 0 \le t \le t' \\ \dfrac{V_0}{3R} + (0.63\dfrac{V_0}{R} - \dfrac{V_0}{3R})e^{-\frac{3R(t-t')}{L}} & t \ge t' \end{cases}$$

یا

$$i_L(t) = \begin{cases} \dfrac{V_0}{R}(1-e^{-\frac{Rt}{L}}) & 0 \le t \le t' \\ \dfrac{V_0}{3R} + \dfrac{0.89V_0}{3R}e^{-\frac{3R(t-t')}{L}} & t \ge t' \end{cases}$$

زیرا $I' = \frac{V_0}{R_1}(1-e^{-\frac{\tau_1}{\tau_1}}) = 0.63\frac{V_0}{R}$ و $\tau_2 = \frac{L}{3R}$ و $i_{P2} = \frac{V_0}{3R}$ می شوند و پاسخ در کلیه زمان ها به صورت شکل(۴-۴۰)در می آید :



شکل(۴-۴۰)

از تحلیل این مدار برای تحلیل مدار هایی با چند کلید یا چند ثابت زمانی , می توان این چنین نتیجه گرفت :

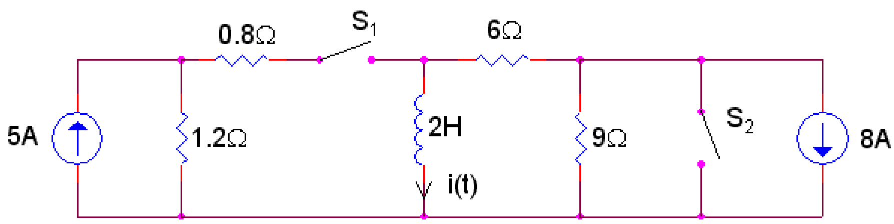
I. ابتدا تحلیل را با تغییر وضعیت اولین کلید و با توجه به شرایط اولیه و فرض اینکه کلیدها تغییر وضعیت نمی دهند , در مدار های RL یا RC آغاز می کنیم و رابطه پاسخ (جریان سلف یا ولتاژ خازن) را به دست می آوریم .

II. در زمانی که کلید دوم تغییر وضعیت داده مقدار پاسخ را (جریان سلف یا ولتاژ خازن) به ازاء زمان تغییر وضعیت محاسبه نموده و مقدار پاسخ را , شرایط اولیه برای مرحله دوم در نظر می گیریم و بعد از آن پاسخ را به ازاء این شرایط اولیه و تغییر شرایط مدار , برای زمان های بعد از تغییر وضعیت کلید دوم محاسبه می کنیم. در صورتی که کلید دیگری در مدار نباشد تحلیل تکمیل شده است .

III. اما اگر کلید دیگری در مدار تغییر وضعیت ایجاد کند , مرحله بعد را مطابق مرحله دوم و با شرایط اولیه جدید ادامه می دهیم تا عملیات پایان یابد .

● **مثال(۴-۶)**: در مدار شکل (۴-۴۱) مدت طولا نی کلید S_1 باز وکلید S_2 بسته بوده ودر لحظه $t=0$ کلید بسته می شود وپس از مدت یک ثانیه (t=1Sec) هر دو کلید S_1 وS_2 باز می شوند $i(t)$ را برای زمان های $0 \le t \le 1Sec$ و $t \ge 1Sec$ محاسبه کنید.

ضمناً تعیین کنید در چه زمانی بعد از $t=0$, مجدداً جریان سلف برابر صفر می شود .



شکل(۴-۴۱)

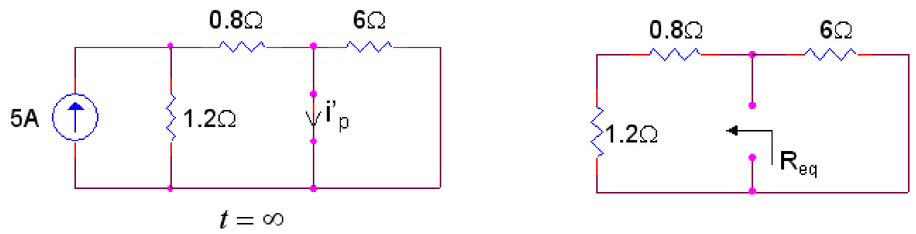
● **پاسخ:**

I.با توجه به باز بودن کلید ها جریان سلف در $t=0$ برابر با صفر است $i(0)=0$

II. با بسته شدن کلید S_1 نوع پاسخ جریان سلف پاسخ حالت صفر است واز رابطه $x_0(t)=x_P(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$ پاسخ را برای زمان های $0 \le t \le 1\sec$ محاسبه می کنیم :

_ چون سلف مطابق شکل (۴-۴۲-الف) در بی نهایت اتصال کوتاه است , داریم :

$$i'_P = \frac{1.2\times 5}{1.2+0.8} = 3A$$



(الف) شکل(۴-۴۲) (ب)

_ مقاومت معادل از دو سر سلف مطابق شکل (۴-۴۲-ب) برابر است با :

$$R_{eq} = \frac{(1.2+0.8)\times 6}{1.2+0.8+6} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}\Omega$$

_ ثابت زمانی در مرحله اول برابر است با :

$$\tau' = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}Sec$$

_ در نتیجه جریان برای فاصله زمانی $0\le t\le 1Sec$ $\quad i_L(t) = 3(1-e^{-\frac{3}{4}t})$

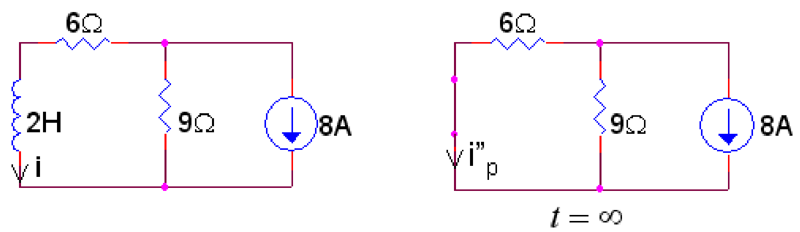
_ مقدار جریان در لحظه $t=1Sec$ از رابطه فوق محاسبه شده و برابر است با :

$$i(1) = 3(1-e^{-\frac{3}{4}}) \Rightarrow i(1) = 3(1-0.472) \approx 1.58A$$

III. بعد از باز شدن هر دو کلید در مدار معادل شکل (۴-۴۳-ا لف) نوع پاسخ $i(t)$ با توجه به شرایط اولیه $t=1Sec$, پاسخ کامل است و مطابق رابطه عمومی در زمان های $t>t'$ $x(t) = x_P + [x(t') - x_P]e^{-(\frac{t-t'}{\tau})}$ به شرح زیر قابل تحلیل می باشد .

_ با توجه به شکل (۴-۴۳- ب), پاسخ دائم جریان $i(t)$ برابر است با :

$$i''_P = -\frac{8\times 9}{6+9} = -\frac{72}{15} = -4.8A$$



(ا لف) شکل(۴-۴۳) (ب)

_ ثابت زمانی در این مرحله با توجه به مقاومت معادل از دو سر سلف :

$$\tau'' = \frac{2}{6+9} = \frac{2}{15}Sec$$

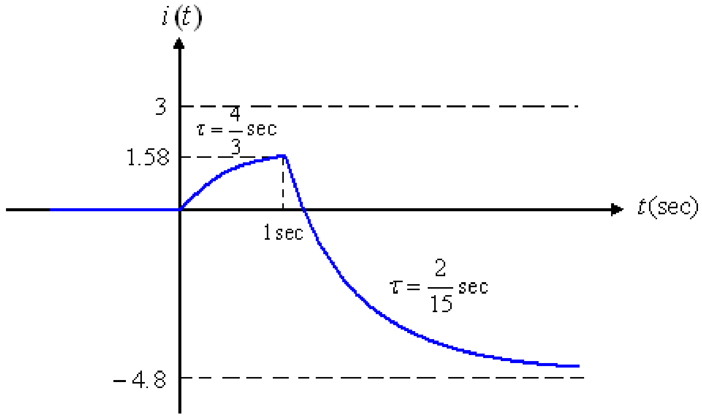
_ پاسخ کامل برای زمان های $t\ge 1Sec$ با توجه به انتقال زمان عبارت است از :

$$i(t) = -4.8 + [1.58 - (-4.8)]e^{-(\frac{t-1}{2/15})}$$
$$i(t) = -4.8 + 6.3e^{-7.5(t-1)} \quad t \geq 1Sec$$

بنابراین $i(t)$ برای کلیه زمان ها برابر است با :

$$i(t) = \begin{cases} 3(1-e^{-\frac{3}{4}t}) & 0 \leq t \leq 1Sec \\ -4.8 + 6.38e^{-7.5(t-1)} & t \geq 1Sec \end{cases}$$

اگر پاسخ را برای کلیه زمان ها رسم کنیم , تغییرات $i(t)$ مطابق شکل (۴-۴۴) می باشد .



شکل(۴-۴۴)

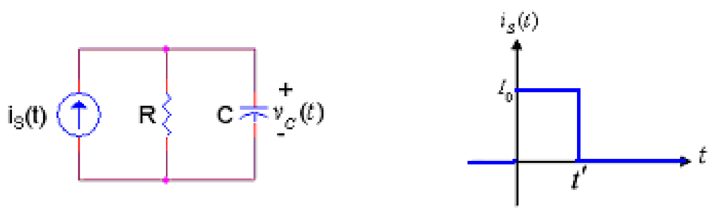
IV. برای تعیین زمانی که جریان سلف به صفر می رسد رابطه $-4.8 + 6.38e^{-7.5(t-1)}$ را مساوی صفر قرار می دهیم .در نتیجه :

$$6.38e^{-7.5(t-1)} = 4.8 \Rightarrow e^{-7.5(t-1)} = \frac{4.8}{6.38} \approx 0.752$$

از طرفین معادله لگاریتم می گیریم :

$$Ln[e^{-7.5(t-1)}] = Ln(0.752) \Rightarrow -7.5(t-1) = -0.285 \Rightarrow 7.5t = 7.5 + 0.285$$
$$\Rightarrow t = \frac{7.785}{7.5} \Rightarrow t = 1.038Sec$$

• **مثال (۴-۷)** : مدار شکل (۴-۴۵-الف) مفروض است . پاسخ مدار $v_C(t)$ را به ازاء ورودی $i_S(t)$ شکل (۴ -۴۵-ب) به دست آورید .



(الف) (ب)

شکل(۴-۴۵)

● پاسخ :
تحلیل فیزیکی :
در این مدار $v_C(0)=0$ و در لحظه $t=0$ جریان I_0 به مدار اعمال شده و باعث شارژ شدن خازم می گردد و همان گونه که از شرایط مدار بر می آید نوع پاسخ , پاسخ حالت صفر است و در لحظه t' ورودی مدار قطع و برابر صفر می شود . در نتیجه خازن شارژ شده در مقاومت تخلیه می شود تا انرژی ذخیره شده به صفر برسد و هر پاسخ در این زمان ها پاسخ ورودی صفر است و در کل تحلیل این پاسخ , مشابه مدارRC با دو کلید می باشد .
تحلیل ریاضی:

۱) با توجه به پاسخ حالت صفر $x(t)=x_P(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$ پاسخ برای زمان های $0\le t\le t'$ یا از معادله دیفرانسیلی $C\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C}{R}=i_S(t)$ یا با توجه به $\tau=RC$ و $v_P=RI_0$ برابر است با :
$v_C(t)=RI_0(1-e^{-\frac{t}{RC}})$.

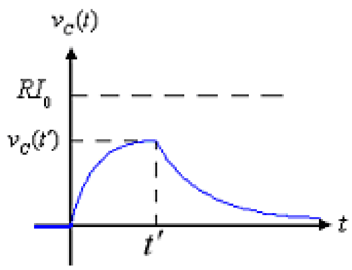
۲)در لحظه $t=t'$, $v_C(t')=RI_0(1-e^{-\frac{t'}{RC}})$ و ثابت مانی تغییر نکرده و در نتیجه برای $t\ge t'$:
$v_C(t)=v_C(t')e^{-\frac{t-t'}{RC}}$
می شود , در نتیجه :

$$v_C(t)=\begin{cases} RI_0(1-e^{-\frac{t}{RC}}) & 0\le t\le t' \\ v_C(t')e^{-\frac{t-t'}{RC}} & t\ge t' \end{cases}$$

و با جای گذاری $v_C(t')$ داریم :

$$v_C(t)=\begin{cases} RI_0(1-e^{-\frac{t}{RC}}) & 0\le t\le t' \\ RI_0(1-e^{-(\frac{t'}{RC})})e^{-(\frac{t-t'}{RC})} & t\ge t' \end{cases}$$

که پاسخ در شکل (۴-۴۶) برای کلیه زمان ها ترسیم شده است .



شکل(۴-۴۶)

● ۴-۸-پاسخ پله واحد **Step Response :**
همان گونه که در فصل دوم بیان شد تابع پله واحد تابعی است گسسته که در آرگومان صفر آن تغییر وضعیت ایجاد می گردد و تابع پله واحد را با u(t) نشان می دهند :

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

پاسخ پله واحد را با $s(t)$ نشان می دهند و از طرفی نوع پاسخ , پاسخ حالت صفر است زیرا وقتی ورودی تابع پله واحد u(t) باشد , شرایط اولیه $v_C(0)$ یا $i_L(0)$ برابر صفر هستند . پاسخ حالت صفر به طور عموم از رابطه $x(t)=x_P(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$ به دست می آید , بنابراین پاسخ پله واحد یک مدار RC به ورودی تابع پله واحد u(t) , ولتاژ خازن است (شکل(۴-۴۷-الف)) و برابر است با :

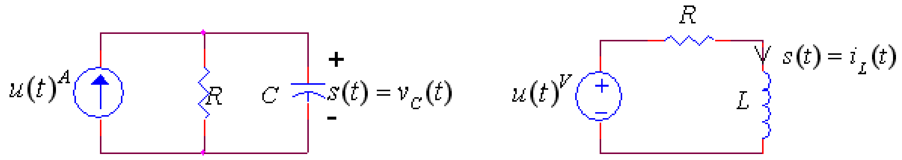
$$s(t)=v_C(t)=R(1-e^{-\frac{t}{RC}})u(t)$$

زیرا پاسخ دائم به ازاء منبع جریان $1A$ برابر $R\times I_0=R$ می شود.

و پاسخ پله واحد مدار RL به ورودی تابع پله واحدu(t) جریان سلف است (شکل(۴-۴۷-ب)) و برابر است با :

$$i_L(t)=\frac{1}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$$

زیرا پاسخ دائم به ازاء منبع ولتاژ $1V$ برابر $\frac{V_0}{R}=\frac{1}{R}$ است .



(الف) شکل(۴-۴۷) (ب)

- ضمناً با توجه به تعریف تابع پله واحد از این پس پاسخ هایی را که برای زمان های $t>0$ مشخص می شوند , به صورت حاصل ضرب پاسخ در تابع پله واحد می نویسیم .

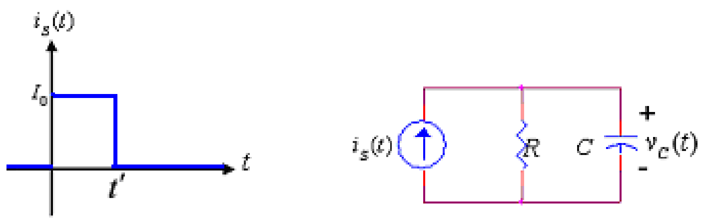
- **۴-۸-۱-تعیین پاسخ مدارهای RL یا RC به ورودی پالس مربعی با استفاده از $s(t)$:**

یکی از روش های تعیین پاسخ یک مدار RC یا RL به ورودی یک پالس مانند شکل (۴-۴۸) , استفاده از پاسخ پله واحد مدار RCاست . زیرا اگر پالس را به صورت ترکیبی از توابع پله واحد بنویسیم , نتیجه می شود :

$$i_S(t)=I_0u(t)-I_0u(t-t')=I_0[u(t)-u(t-t')]$$

پاسخ پله واحد مدار RC برابر است با :

$$s(t)=R(1-e^{-\frac{t}{RC}})u(t)$$



(ا لف) شکل(۴-۴۸) (ب)

پاسخ به تابع $u(t-t')$ با توجه به شرایط انتقال برابر است با :

$$s(t-t') = R(1-e^{-(\frac{t-t'}{RC})})u(t-t')$$

بنابراین با توجه به شرایط خطی و پذیرفتن انتقال زمانی , پاسخ به پالس $i_S(t)$ برابر است با :

$$v_C(t) = I_0[s(t) - s(t-t')] = I_0 s(t) - I_0 s(t-t')$$

$$v_C(t) = I_0 R(1-e^{-\frac{t}{RC}})u(t) - I_0 R(1-e^{-(\frac{t-t'}{RC})})u(t-t')$$

حال اگر پاسخ را بر حسب فاصله زمانی مرتب کنیم روابط زیر حاصل می گردد :

$$v_C(t) = \begin{cases} RI_0(1-e^{-\frac{t}{RC}}) & 0 \le t \le t' \\ RI_0(1-e^{-\frac{t'}{RC}})e^{-(\frac{t-t'}{RC})} & t \ge t' \end{cases}$$

● **نتیجه :**همان گونه که از روابط این پاسخ در مقایسه با پاسخ مدار RC مثال (۴-۷) بر می آید , مشاهده می شود که پاسخ ها یکسان است . بنابراین برای تحلیل یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان با ورودی پالس می توان از دو روش استفاده کرد :

(۱) روش تحلیل مدار های با چند کلید یا چند ثابت زمانی

(۲) روش استفاده از پاسخ پله واحد مدار و انتقال زمانی

● **۴-۹-پاسخ ضربه در مدارهای RL و RC :**

تابع ضربه همان طور که در فصل دوم تعریف شد عبارت است از $\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{ویژه} & t = 0 \end{cases}$ که

ویژگی آن عبارت است از اینکه سطح زیر منحنی تابع ضربه برابر واحد است : $\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$

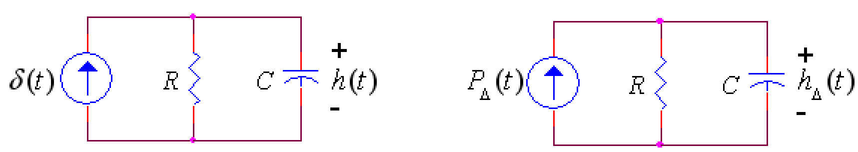
پاسخ به تابع ضربه $\delta(t)$ را با تابع $h(t)$ نشان می دهند.

برای تعیین پاسخ ضربه یک مدار RC یا RL در زیر چهار روش را مطرح می کنیم :

● **۴-۹-۱-روش(۱) :** اگر یک مدار RC مطابق شکل (۴ -۴۹- الف) با ورودی $\delta(t)$ در نظر بگیریم و بخواهیم پاسخ $v_C(t) = h(t)$ را به دست آوریم , می توانیم معادله دیفرانسیل مدار را بر حسب $h(t)$ بنویسیم , نتیجه می شود :

$$\frac{h(t)}{R} + C\frac{dh}{dt} = \delta(t)$$

از آنجا که به طور مستقیم نمی توانیم این معادله را حل کنیم , یک راه حل این است که با استفاده از تعریف $\lim_{\Delta \to 0} P_\Delta(t) = \delta(t)$ به ورودی پالس مربعی $P_\Delta(t)$ را مطابق شکل (۴-۴۹-ب) اعمال نموده و پاسخ را با $h_\Delta(t)$ تعریف کنیم و با توجه به یکی از روش های بیان شده در قسمت (۴-۸-۱) یا مثال (۴-۷) پاسخ $h_\Delta(t)$ به پالس مربعی $P_\Delta(t)$ را محاسبه کنیم .



(الف) شکل(۴-۴۹) (ب)

اگر $P_\Delta(t)$ به صورت ترکیب خطی مقابل باشد :

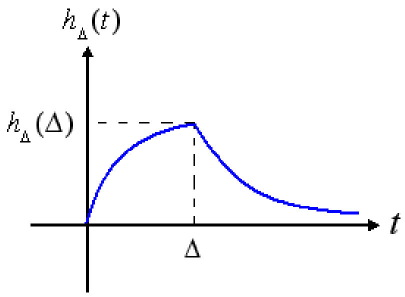
$$P_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}u(t) - \frac{1}{\Delta}u(t-\Delta)$$

پاسخ برابر است با : $h_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}s(t) - \frac{1}{\Delta}s(t-\Delta) = \frac{R}{\Delta}(1-e^{-\frac{t}{RC}}) - \frac{R}{\Delta}(1-e^{-\frac{t-\Delta}{RC}})u(t-\Delta)$

در نتیجه :

$$h_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{R}{\Delta}(1-e^{-\frac{t}{RC}}) & 0 \le t \le \Delta \\ \frac{R}{\Delta}(1-e^{-\frac{\Delta}{RC}})e^{-\frac{(t-\Delta)}{RC}} & t \ge \Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{R}{\Delta}(1-e^{-\frac{t}{RC}}) & 0 \le t \le \Delta \\ h_\Delta(\Delta)e^{-\frac{(t-\Delta)}{RC}} & t \ge \Delta \end{cases}$$

که این پاسخ در شکل (۴-۵۰) رسم شده است .



شکل(۴-۵۰)

از آنجا که پاسخ ضربه $h(t)$ بر اساس تعریف تابع ضربه $\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} P_\Delta(t)$ حد تابع $h_\Delta(t)$ می باشد بدین مفهوم که : $h(t) = \lim_{\Delta\to 0} h_\Delta(t)$

بنابراین برای تعیین حد پاسخ $h_\Delta(t)$ به نکات زیر توجه نموده و چنین عمل می نماییم :

۱- بسط بینوم - نیوتن یک تابع نمایی e^{-x} به صورت زیر است :

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

و در صورتی که $x << 1$ باشد می توان از جملات با توان ۲ و بیشتر صرف نظر کرد و آن را به صورت $e^{-x} \approx 1-x$ تقریب کرد.

۲- در پاسخ $h_\Delta(t)$ حاصل از اعمال پالس مربعی $P_\Delta(t)$ محاسبه شده , ابتدا در مورد مقدار ولتاژ خازن در $t=\Delta$ ($h_\Delta(t)$) بحث می نماییم و با توجه به $x = \frac{\Delta}{RC} << 1$ از بسط $e^{-\frac{\Delta}{RC}} \approx 1 - \frac{\Delta}{RC}$ استفاده نموده و در معادله $h_\Delta(t)$ جانشین می کنیم :

$$h_\Delta(\Delta) = \frac{R}{\Delta}(1-e^{-\frac{\Delta}{RC}}) \approx \frac{R}{\Delta}(1-1+\frac{\Delta}{RC}) = \frac{1}{C} \Rightarrow h_\Delta(\Delta) = \frac{1}{C}$$

که نتیجه حاصل بیانگر این مفهوم است که برای زمان های کوچک Δ خازن حداکثر به اندازه عکس ظرفیت خازن $(\frac{1}{C})$ شارژ می گردد و هرچه ظرفیت خازن کوچکتر باشد , خازن بیشتر شارژ می شود.

۳- در فاصله زمانی $0 \le t \le \Delta$ پاسخ $h_\Delta(t) = \frac{R}{\Delta}(1-e^{-\frac{t}{RC}})$ را به ازای $x = \frac{t}{RC} \le \Delta << 1$ تقریب می زنیم :

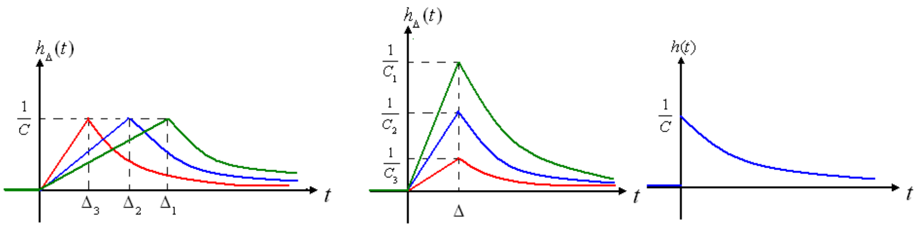
$$h_\Delta(t) = \frac{R}{\Delta}(1-e^{-\frac{t}{RC}}) = \frac{R}{\Delta}[1-(1-\frac{t}{RC})] \Rightarrow$$

$$h_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta C}t \quad 0 \le t \le \Delta$$

و از این معادله نتیجه می شود که منحنی شارژ خازن در فاصله زمان $0 \le t \le \Delta$ خطی است و شیب آن برابر $\frac{1}{\Delta C}$ می باشد , نتیجتاً $h_\Delta(t)$ برای کلیه زمان ها عبارت است از :

$$h_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta C}t & 0 \le t \le \Delta \\ \frac{1}{C}e^{-\frac{(t-\Delta)}{RC}} & t \ge \Delta \end{cases}$$

که منحنی برای زمان های کوچک مختلف Δ_i و خازن با ظرفیت ثابت C در شکل (۴-۵۱-الف) رسم شده است . در صورتی که ظرفیت C تغییر کند ولی Δ ثابت باشد , پاسخ مشابه شکل (۴- ۵۱-ب) تغییر می نماید:



(الف) (ب) (ج)

شکل (۴-۵۱)

حال حد تابع $h_\Delta(t)$ را به دست می آوریم که چنین نتیجه می شود :

$$h(t) = \lim_{\Delta \to 0} h_\Delta(t) = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

ضمناً پاسخ $h(t)$ در شکل (۴-۵۱-ج) رسم شده است .

هنگامی که $(\Delta \to 0)$ شیب $\frac{1}{\Delta C}$ به سمت بی نهایت میل می کند و از آنجا که خازن به اندازه $\frac{1}{C}$ شارژ می شود می توان نتیجه گرفت که :

الف – اگر ورودی یک مدار RC تابع ضربه باشد و $h(0^-)=0$ باشد , $h(0^+)=\frac{1}{C}$ می گردد بدین مفهوم که ولتاژ خازن پیوسته نمی باشد و شرایط اولیه $h(0^-)\neq h(0^+)$ است و خازن به طور ناگهانی شارژ می گردد.
ب- ولتاژ خازن به دلیل صفر بودن اثر منبع جریان ضربه در زمان های $t\neq 0$ از زمان $t=0^+$ با ثابت زمانی $\tau=RC$ شروع به کاهش می یا بد تا در بی نهایت به صفر برسد.
ج- همان طور که مشاهده می شود پاسخ $h(t)$ مشابه پاسخ ورودی صفر است.

• **۴-۹-۲- روش(۲) :** در مدار های خطی تغییر نا پذیر با زمان باتوجه به رابطه تابع پله واحد وتابع ضربه و همچنین صادق بودن شرایط خطی در مورد پاسخ حالت صفر وپذیرش انتقال زمانی , اثبات می شود که ***پاسخ ضربه ,مشتق پاسخ پله واحد*** است.
بنابراین اگر ورودی مدار تابع ضربه باشد می توان نوشت:

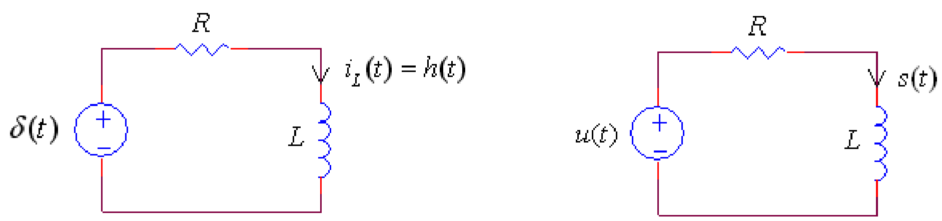
$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}P_\Delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}[\frac{u(t)-u(t-\Delta)}{\Delta}]=\frac{du(t)}{dt}$$

پاسخ حالت صفر مدار به پالس مربعی ترکیب خطی از پاسخ پله واحد است و حد آن پاسخ ضربه می باشد .در نتیجه :

$$Z_O(p_\Delta(t))=Z_O[\frac{1}{\Delta}u(t)-\frac{1}{\Delta}u(t-\Delta)]=\frac{1}{\Delta}s(t)-\frac{1}{\Delta}s(t-\Delta)$$

$$h(t)=\lim_{\Delta\to 0}Z_O(P_\Delta(t))=\lim_{\Delta\to 0}[\frac{s(t)-s(t-\Delta)}{\Delta}]\Rightarrow h(t)=\frac{ds(t)}{dt} \quad \text{یا} \quad s(t)=\int_{0^-}^{t}h(t)dt$$

بر این اساس, روش دوم تعیین پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان بدین شرح است.
الف : بجای منبع ضربه مدار یک منبع پله واحد قرار داده و پاسخ پله واحد را محاسبه نموده وآن را که یک پاسخ حالت صفر است بدست می آوریم
ب: از پاسخ پله واحد نسبت به زمان مشتق می گیریم این مشتق برابر با پاسخ ضربه مدار است.
• **مثال (۴-۸) :** پاسخ ضربه h(t) مدار RL شکل (۴-۵۲-ا لف) را بدست آورید.



(ا لف) شکل(۴-۵۲) (ب)

• **پاسخ :** با توجه به اینکه مدار RL دوگان مدار RC شکل (۴-۴۹-ا لف) است براساس دوگا نی پاسخ ضربه مدار RL عبارت است از: $i_L(t)=h(t)=\frac{1}{L}e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}u(t)$ که برای اثبات رابطه پاسخ از روش دوم استفاده می نماییم :

ابتداء منبع ولتاژ ضربه $\delta(t)$ را از مدار جدا نموده و بجای آن یک منبع ولتاژ پله واحد u(t) مطابق شکل (۴-۵۲ـب) قرار می دهیم وپاسخ s(t) را بدست می آوریم :

$$i_L(0) = s(0) = 0 \text{ و } s(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t})u(t)$$

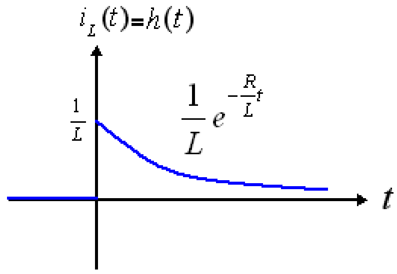
حال از پاسخ پله واحد بدست آمده نسبت به زمان مشتق می گیریم .ضمناً باید توجه شود که s(t) شامل دوجمله زمانی است .در نتیجه :

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{R}[-(-\frac{R}{L})e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}]u(t) + \frac{1}{R}(1 - e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t})\delta(t)$$

از آنجا که $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ است با ساده کردن وصفر قرار دادن زمان($t = 0$)در رابطه ضریب تابع ضربه , پاسخ ضربه h(t) را بدست می آوریم :

$$h(t) = \frac{1}{L}e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}u(t) + \frac{1}{R}(1 - e^{0})\delta(t) \Rightarrow h(t) = \frac{1}{L}e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}u(t)$$

این پاسخ در شکل (۴-۵۳) رسم شده است .



شکل (۴-۵۳)

از پاسخ ضربه مدار RC و RL چنین نتیجه می گیریم:

I. بنابراین اگر به شکل های (۴-۵۱-ج) و(۴-۵۳) که پاسخ ضربه مدار های RC و RL را نشان می دهند توجه شود مشاهده می شود که پاسخ ضربه مشابه پاسخ ورودی صفر مدار های RC و RL است با ا ین تفاوت که $h(0^-) = 0$ و $h(0^+) \neq 0$ است .

II. پاسخ ضربه مدار با توجه به منبع ضربه و شرایط اولیه $h(0^-) = 0$ پاسخ حالت صفر است و همچنین از نگاه شکل پاسخ و شرایط اولیه $h(0^+) \neq 0$ پاسخ ورودی صفر است .بنابراین پاسخ ضربه را پاسخ حالت صفر و ورودی صفر نیز گویند.

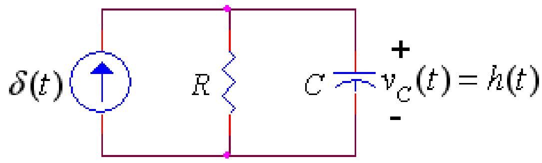
- **۴-۹-۳- روش(۳) :** در این روش با استفاده از معادله دیفرانسیل مدار پاسخ ضربه را به دست می آوریم:

۱) معادله دیفرانسیل مدار را بر حسب h(t) نوشته و سپس معادله همگن آن را تشکیل می دهیم و فرکانس طبیعی پاسخ را محاسبه می نماییم

۲) با توجه به شکل پاسخ ضربه , فرم پاسخ ورودی صفر را مشخص نموده و با بدست آوردن مشتق آن و به دلیل اینکه پاسخ مدار باید در معادله صدق نماید , پاسخ ومشتق آن را در معادله دیفرانسیل مدار قرار داده دامنه پاسخ را بدست می آوریم .

برای روشن شدن موضوع , مدار RC شکل (۴-۴۹-ا لف)را مجدداً با روش (۳) تجزیه وتحلیل می نماییم :

تحلیل مدار RC : معادله دیفرانسیل مدار شکل (۴-۵۴) را برحسب $v_C(t) = h(t)$ می نویسیم :



شکل(۴-۵۴)

$$C\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C(t)}{R}=\delta(t)\Rightarrow C\frac{dh}{dt}+\frac{h(t)}{R}=\delta(t)$$

معادله مشخصه ی معادله همگن را تشکیل داده و فرکانس طبیعی را بدست می آوریم:

$$C\frac{dh}{dt}+\frac{h(t)}{R}=0\Rightarrow CS+\frac{1}{R}=0\Rightarrow S=-\frac{1}{RC}$$

بنا براین $h(t)=Ke^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}u(t)$ می شود. حال مشتق h(t) بدست آورده و در معادله دیفرانسیل قرار می دهیم :

$$\frac{dh}{dt}=\frac{d}{dt}(Ke^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}u(t))=-\frac{K}{RC}e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}u(t)+Ke^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}\delta(t)$$

با توجه به اثر تابع ضربه $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ چنین نتیجه می گیریم که:

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{K}{RC}e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}u(t)+K\delta(t)$$

$$C[-\frac{K}{RC}e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}u(t)+K\delta(t)]+\frac{Ke^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}}{R}u(t)=\delta(t)\Rightarrow$$

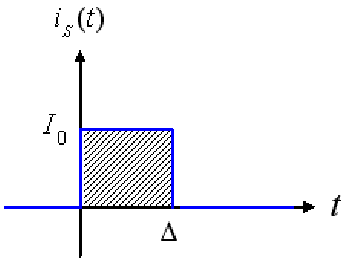
$$-\frac{K}{R}e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}u(t)+KC\delta(t)+\frac{K}{R}e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}u(t)=\delta(t)\Rightarrow KC\delta(t)=\delta(t)$$

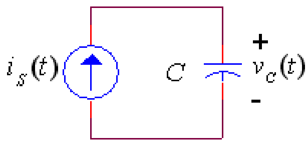
با مسا وی قرار دادن ضریب تابع ضربه از طرفین معادله دامنه پاسخ به دست می آید. $[KC=1\Rightarrow K=\frac{1}{C}]$ ونتیجتاً پاسخ ضربه مدار مشخص می گردد :

$$h(t)=\frac{1}{C}e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}u(t)$$

- **۴-۹-۴- روش (۴) :** در این روش ابتدا اثر منبع ضربه را بر روی خازن و یا سلف به دست می آوریم وسپس با توجه به بی اثر شدن منبع ضربه در $(t=0^+)$ مدار را برای زمان های $t>0$ تحلیل می نماییم .
- **اثرمنبع جریان ضربه بر خازن:**

هرگاه منبع جریان با تابع پالس $i_S(t)$ نشان داده شده در شکل (۴- ۵۵-الف) به خازن C مطابق شکل (۴- ۵۵-ب) اعمال گردد , ولتاژ دو سر خازن را با توجه به اینکه $v_C(0^-)=0$ است حساب می کنیم .





(ا لف)　　　　شکل(۴-۵۵)　　　　(ب)

اگر دقت کنیم از لحاظ فیزیکی جریان I_0 در لحظه $t=0$ از خازن عبور نموده و باعث افزایش بار الگتریکی در جوشن های خازن می گردد و در مدت زمان Δ مقدار بار الکتریکی ذخیره شده به $Q_0 = I_0\Delta$ می رسد (سطح زیر منحنی جریان) و چگالی بار الکتریکی روی جوشن ها در صورتی که Δ زمان خیلی کوچکی باشد , به صورت خطی تغییر نموده و مقدار آن $\frac{Q_0}{\Delta}$ است.

ولتاژ دو سر خازن از رابطه $v_C(\Delta) = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{\Delta}\frac{Q_0}{\Delta}dt$ محاسبه شود . حال اگر زمان Δ به سمت صفر میل کند , با توجه به تعریف تابع ضربه می توان نوشت :

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{Q_0}{\Delta} = Q_0\delta(t)$$

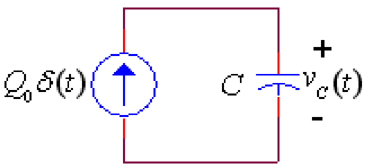
که Q_0 شدت ضربه است . با حدگیری از رابطه ولتاژ نتیجه می شود :

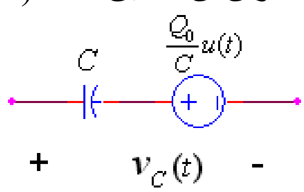
$$v_C(0^+) = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{\Delta}\frac{Q_0}{\Delta}dt\Big|_{\Delta\to 0} = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+}Q_0\delta(t)dt = \frac{Q_0}{C}$$

بنابراین با اعمال یک منبع جریان ضربه $Q_0\delta(t)$ مطابق شکل (۴-۵۶-ا لف) به خازن , ولتاژ آن در زمان $t=0^+$ به $v_C(0^+) = \frac{Q_0}{C}$ می رسد یا اینکه ولتاژ خازن در هر زمان $t>0$ برابر می شود با :

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t}Q_0\delta(t)dt = \frac{Q_0}{C}u(t)$$

که مدار معادل تونن آن مطابق شکل (۴-۵۶-ب) می باشد .





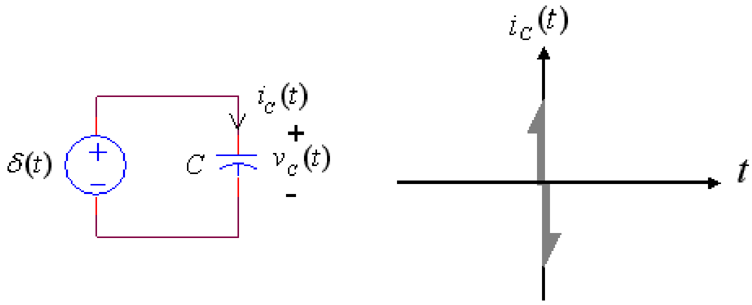
(ا لف)　　　　شکل(۴-۵۶)　　　　(ب)

- **اثر منبع ولتاژ ضربه بر خازن :**

منبع ولتاژ ضربه بر خازن تاثیر خاصی ندارد بلکه $v_C(t)=\delta(t)$ می شود و جریان خازن در این حالت برابر است با :

$$i_C(t)=C\frac{dv_C}{dt}=C\frac{d}{dt}(\delta(t))=C\delta^{(1)}(t)$$

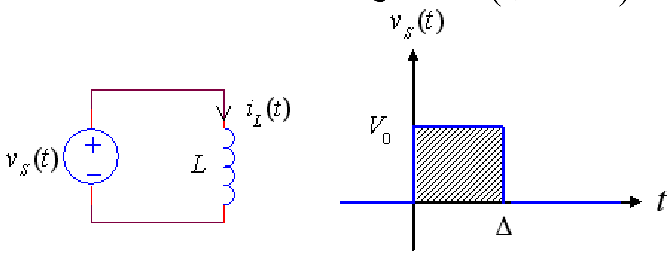
در نتیجه جریان دوبلت $\delta'(t)=\delta^{(1)}(t)$ از خازن عبور می کند . (شکل(۴-۵۷))



شکل(۴-۵۷)

● **اثر منبع ولتاژ ضربه بر سلف :**

هر گاه به دو سر یک سلف با جریان اولیه $i_L(0^-)=0$ مطابق شکل (۴-۵۸-الف) ولتاژ $v_S(t)$ نشان داده شده در شکل (۴- ۵۸-ب) اعمال گردد:



(ا لف) شکل(۴-۵۸) (ب)

بر اساس دوگانی و همچنین از لحاظ فیزیکی چون سلف در $t=0$ حالت مدار باز را دارد , ولتاژ V_0 باعث ایجاد یک شار (فوران) برابر $\varphi_0=V_0\Delta$ (سطح زیر منحنی) در دو سر سلف شده و اگر زمان Δ خیلی کوچک باشد , چگالی شار $\frac{\varphi_0}{\Delta}$ به صورت خطی تغییر نموده و باعث افزایش جریان در سلف می گردد . جریان سلف در زمان $t=\Delta$ برابر است با :

$$i_L(\Delta)=\frac{1}{L}\int_{0^-}^{\Delta}\frac{\varphi_0}{\Delta}dt$$

با توجه به تعریف تابع ضربه می توان نوشت :

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\varphi_0}{\Delta}=\varphi_0\delta(t)$$

که φ_0 شدت ضربه است . با حدگیری از رابطه جریان نتیجه می شود :

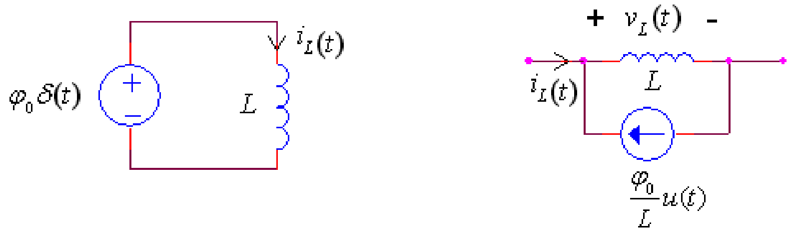
$$i_L(0^+)=\frac{1}{L}\int_{0^-}^{\Delta}\frac{\varphi_0}{\Delta}dt\bigg|_{\Delta\to 0}=\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}\varphi_0\delta(t)=\frac{\varphi_0}{L}$$

بنابراین با اعمال یک منبع ولتاژ ضربه $\varphi_0\delta(t)$ مطابق شکل (۴-۵۹-ا لف) با شدت ضربه φ_0 به سلف , جریان آن در زمان $t=0^+$ به $i_L(0^+)=\frac{\varphi_0}{L}$ می رسد.

اگر جریان سلف را برای زمان های $t>0$ محاسبه نماییم , نتیجه می شود :

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{0^-}^{t}\varphi_0\delta(t)dt=\frac{\varphi_0}{L}u(t)$$

و مدار معادل نورتن سلف مطابق شکل (۴-۵۹-ب) است .

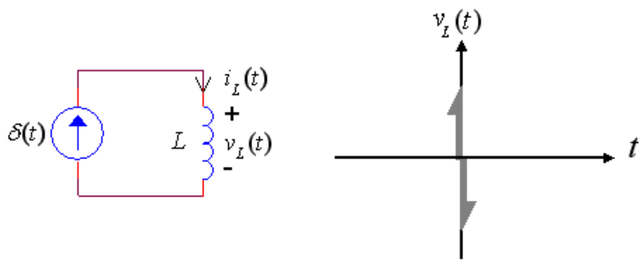


(ا لف) شکل(۴-۵۹) (ب)

● **اثر منبع جریان ضربه بر سلف :**

با اعمال منبع جریان $\delta(t)$ به سلف مطابق شکل (۴- ۶۰-الف) جریان آن برابر با $i_L(t)=\delta(t)$ و ولتاژ دو سر آن یک تابع دوبلت مطابق شکل (۴-۶۰-ب) است .

$$v_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=L\frac{d\delta(t)}{dt}=L\delta^{(1)}(t)$$



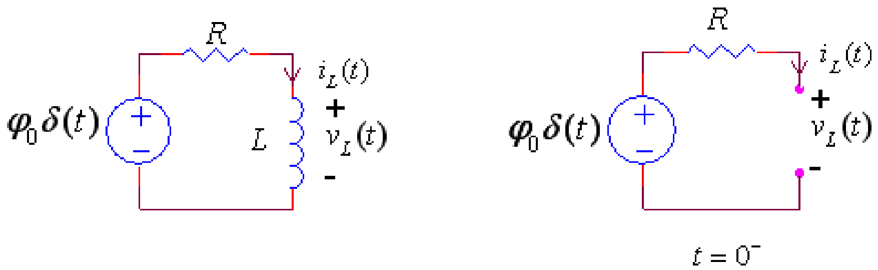
(الف) شکل(۴-۶۰) (ب)

بنابراین از مطالب ارائه شده در فوق نتیجه می گیریم :

۱- در مدار های RC شامل منبع جریان ضربه , در لحظه $t=0$ ولتاژ خازن تغییر ناگهانی می کند و در زمان های $t\geq 0^+$ منبع جریان ضربه بی اثر شده و مدار RC با شرایط اولیه $v_C(0^+)$ دارای پاسخ ورودی صفر است.

۲- در مدارهای RL شامل منابع ولتاژ ضربه , در لحظه $t=0$ جریان سلف تغییر ناگهانی می کند و در زمان های $t\geq 0^+$ منبع ولتاژ بی اثر شده و مدار RL با شرایط اولیه $i_L(0^+)$ دارای پاسخ ورودی صفر است .

● **مثال (۴-۹) :** به مدار RL داده شده در شکل (۴- ۶۱-ا لف) منبع ولتاژ $\varphi_0\delta(t)$ ولت اعمال شده است . جریان سلف $h(t)=i_L(t)$ را به دست آورید . (سلف در $t=0^-$ فاقد انرژی اولیه است)



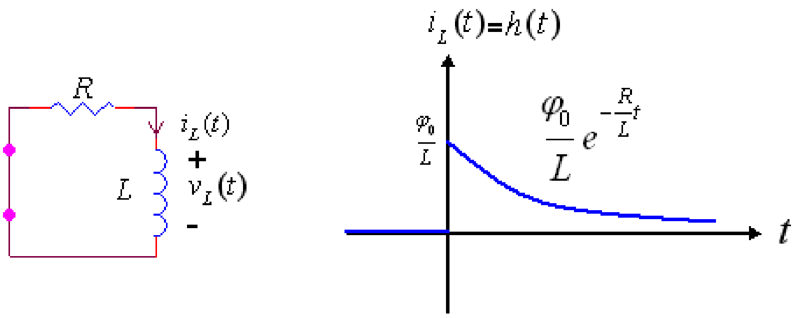
(ا لف) شکل(۴-۶۱) (ب)

● **پاسخ :** اگر به مدار معادل در $t=0^-$ نشان داده شده در شکل (۴- ۶۱-ب) توجه شود , (به دلیل مدار باز بودن سلف) ولتاژ $\varphi_0\delta(t)$ به دو سر آن اعمال می شود و باعث ایجاد جریان در سلف در زمان $t=0^+$ می شود که برابر است با :

$$i_L(0^+)=\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}\varphi_0\delta(t)dt=\frac{\varphi_0}{L}$$

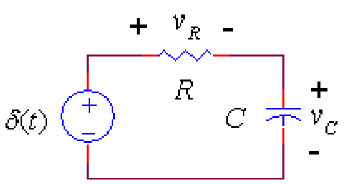
و در زمان های $t\geq 0^+$ منبع ضربه بی اثر شده و مدار مطابق شکل (۴-۶۲) با شرایط اولیه $i_L(0^+)=\frac{\varphi_0}{L}$ حاصل می شود و چون این مدار یک مدار ورودی صفر است , پاسخ آن برابر است با :

$$i_L(t)=i_L(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)\quad\Rightarrow i_L(t)=\frac{\varphi_0}{L}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)$$



(الف) شکل(۴-۶۲) (ب)

● **مثال (۴- ۱۰)** : در مدار شکل (۴-۶۳) $v_C(t)$ و $v_R(t)$ را با استفاده از دو روش (۳) و (۴) به دست آورید .



شکل(۴-۶۳)

● **پاسخ** :

۱- با روش (۳) مسئله را حل می نماییم . برای به دست آوردن پاسخ معادله دیفرانسیل را بر حسب $v_C(t)=h(t)$ می نویسیم :

$$v_R+v_C=\delta(t) \quad و \quad i(t)=C\frac{dv_C}{dt}=C\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow RC\frac{dh}{dt}+h(t)=\delta(t)$$

از آنجا که پاسخ ضربه مشابه پاسخ ورودی صفر است , فرم کلی پاسخ ضربه را با حل معادله دیفرانسیل مشخص نموده و سپس با توجه به اینکه پاسخ ضربه باید در معادله دیفرانسیل صدق نماید , مشتق مرتبه اول پاسخ را حساب می کنیم و در معادله دیفرانسیل قرار می دهیم :

$$RC\frac{dh}{dt}+h(t)=0 \Rightarrow RCS+1=0 \Rightarrow S=-\frac{1}{RC}$$

بنابراین :

$$h(t)=Ke^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{K}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)+Ke^{-\frac{t}{RC}}\delta(t)=-\frac{K}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)+K\delta(t)$$

$$RC\left[-\frac{K}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)+K\delta(t)\right]+Ke^{-\frac{t}{RC}}u(t)=\delta(t)$$

$$-Ke^{-\frac{t}{RC}}u(t)+RCK\delta(t)+Ke^{-\frac{t}{RC}}u(t)=\delta(t)$$

با توجه به اینکه ضریب $u(t)$ برابر صفر می شود , نتیجه می شود :

$$RCK\delta(t)=\delta(t)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $\delta(t)$ در طرفین , K به دست می آید:

$$KRC=1 \Rightarrow K=\frac{1}{RC}$$

بنابراین پاسخ $v_C(t)=h(t)$ برابر است با :

$$v_C(t)=h(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

برای محاسبه $v_R(t)$ جریان را از رابطه $i(t)=C\frac{dv_C}{dt}$ به دست می آوریم :

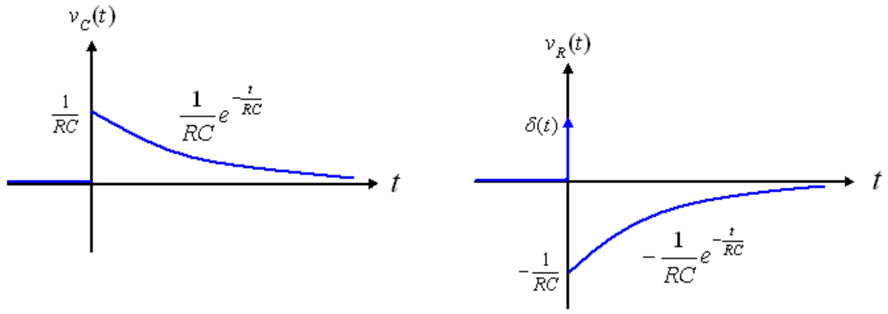
$$i(t)=C\left[\frac{1}{RC}(-\frac{1}{RC})e^{-\frac{t}{RC}}u(t)+\frac{1}{RC}\delta(t)\right]$$

$$i(t)=-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)+\frac{1}{R}\delta(t)$$

$$v_R(t)=Ri(t)=R\left[-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)+\frac{1}{R}\delta(t)\right]$$

$$v_R(t)=-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)+\delta(t)$$

شکل های (۴ -۶۴- ا لف وب) به ترتیب پاسخ $v_C(t)$ و $v_R(t)$ را برای کلیه زمان ها نشان می دهند .



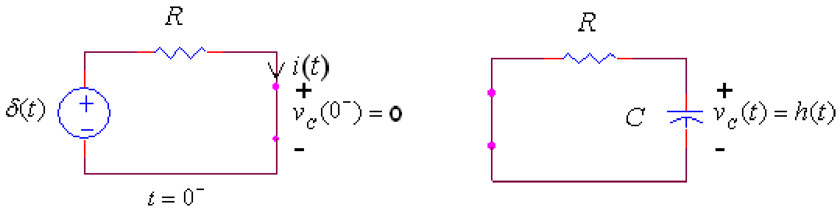
(ا لف) شکل(۴-۶۴) (ب)

۲- با استفاده از روش (۴) مجدداً مسئله را حل می کنیم .

در این روش با توجه به اینکه $v_C(0^-)=0$ است , در لحظه صفر مطابق شکل (۴-۶۵-ا لف) خازن اتصال کوتاه می باشد و جریان $i(t)=\dfrac{\delta(t)}{R}$ از خازن عبور می نماید . در نتیجه ولتاژ خازن در لحظه $t=0^+$ برابر است با :

$$v_C(0^+)=\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+}\frac{\delta(t)}{R}dt \Rightarrow v_C(0^+)=\frac{1}{C}\times\frac{1}{R}=\frac{1}{RC}$$

از آنجا که در لحظه $t=0^+$ و بعد از آن منبع ضربه بی اثر است , پاسخ $v_C(t)=h(t)$ را در مدار شکل (۴-۶۵-ب) محاسبه می کنیم .



(ا لف) شکل(۴-۶۵) (ب)

در این مدار RC پاسخ ورودی صفر است بنابراین مطابق فرم ورودی صفر داریم :

$$h(t)=h(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}u(t) \qquad h(0^+)=\frac{1}{RC} \qquad \tau=RC$$

در نتیجه:

$$v_C(t)=h(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

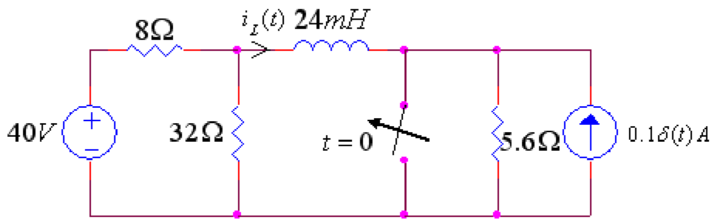
و $v_R(t)$ را در این روش با استفاده از KVL مدار محاسبه می کنیم :

$$v_R(t)+v_C(t)=\delta(t) \qquad \Rightarrow v_R(t)=\delta(t)-v_C(t)$$

$$v_R(t)=\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

همان گونه که از نتیج تحلیل این مدار بر می آید , ولتاژ دو سر مقاومت در لحظه $t=0$ شامل ولتاژ ضربه $\delta(t)$ می باشد که در اثر عبور جریان $\frac{1}{R}\delta(t)$ از مقاومت R حاصل می شود .

● **مثال (۴- ۱۱) :** در مدار شکل (۴- ۶۶) $i_L(t)$ را برای زمان های $t \geq 0$ به دست آورید.



شکل(۴-۶۶)

● **پاسخ :** این مدار چون دارای دو منبع متفاوت است , مناسب است که از روش جمع اثر پاسخ را به دست آوریم .

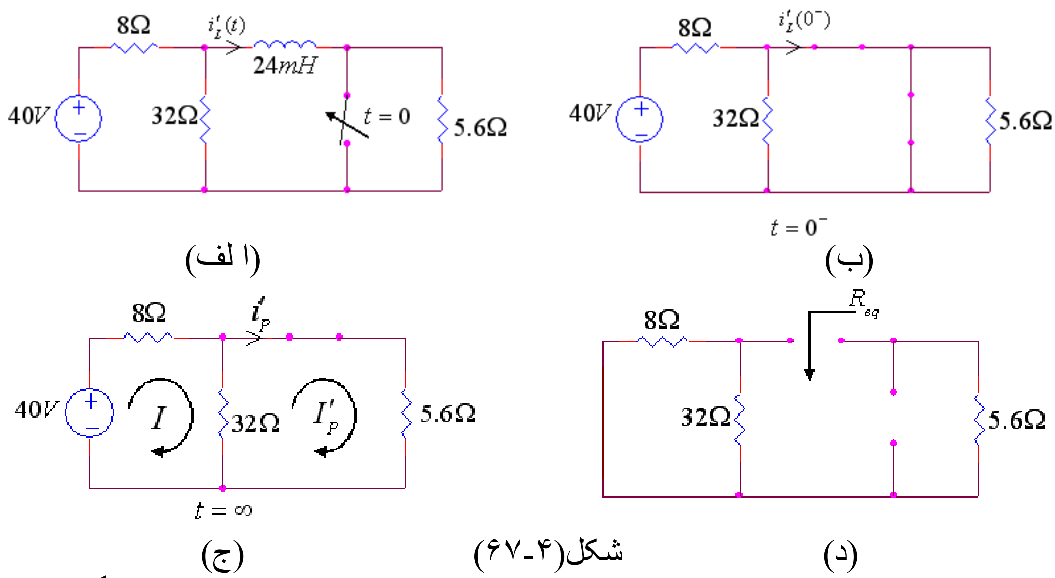
۱. اثر منبع $40V$:

برای تعیین اثر منبع $40V$ منبع جریان ضربه را مدار باز نموده و پاسخ مدار $i'_L(t)$ شکل (۴-۶۷-الف) را به دست می آوریم .

همان گونه که از وضعیت مدار بر می آید در این حالت $i'_L(t)$ از نوع پاسخ کامل است که از روش های اشاره شده در قسمت های گذشته قابل محاسبه است . فرضاً اگر از فرم $x(t)=(x_P+[x(0)-x_P]e^{-\frac{t}{\tau}})u(t)$ استفاده کنیم با توجه به مدار معادل های شکل (۴- ۶۷-ب) در $t=0^-$ و شکل (۴- ۶۷-ج) در $t=\infty$ و شکل (۴- ۶۷-د) مقاومت معادل R_{eq} و ثابت زمانی قابل محاسبه می باشند.

در زمان $t=0^-$ سلف حالت اتصال کوتاه را دارد و کلید بسته است , در نتیجه :

$i'_L(0^-)=\frac{40}{8}=5A$ و $i'_L(0^-)=i'_L(0^+)=5A$



شکل(۴-۶۷)

در زمان $t=\infty$ سلف مجدداً حالت اتصال کوتاه را دارد و کلید باز می باشد و فرضاً اگر از روش مش استفاده کنیم , داریم :

$$\begin{cases}(8+32)I-32I'_P=40\\-32I+(37+5.6)I'_P=0\end{cases}$$

$$I'_P=\frac{\begin{vmatrix}40&40\\-32&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}40&-32\\-32&37.6\end{vmatrix}}=\frac{40\times32}{40\times37.6-32\times32}=\frac{8}{3}A$$

با استفاده از مدار معادل شکل (۴- ۶۷-د) مقاومت معادل R_{eq} برابر است با :

$$R_{eq}=\frac{8\times32}{8+32}+5.6=12\Omega$$

در نتیجه ثابت زمانی برابر است با :

$$\tau=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{24\times10^{-3}}{12}=2\times10^{-3}\,Sec$$

با جایگذاری مقادیر در فرم پاسخ $i'_L(t)$ پاسخ اثر منبع $40V$ مشخص می شود :

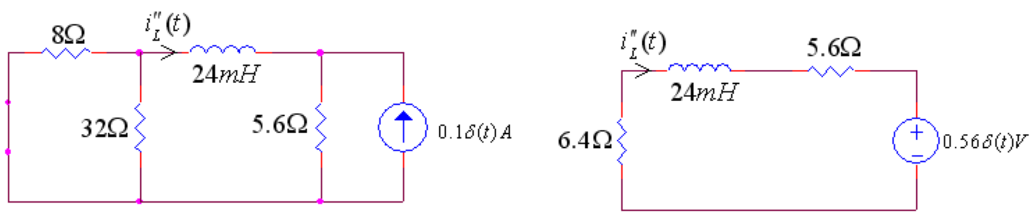
$$i'_P(t)=I'_P+\left[i'_L(0)-I'_P\right]e^{-\frac{t}{\tau}}\qquad t\ge0$$

$$i'_L(t)=\frac{8}{3}+[5-\frac{8}{3}]e^{-\frac{t}{2\times10^{-3}}}\qquad t\ge0$$

$$i'_L(t)=(\frac{8}{3}+\frac{7}{3}e^{-500t})u(t)$$

۲. اثر منبع $0.1\delta(t)$:

برای تعیین پاسخ منبع ضربه $i''_L(t)$, منبع ولتاژ $40V$ را بی اثر می نماییم و برای این کار باید منبع ولتاژ را از مدار خارج نموده و به جای آن اتصال کوتاه قرار دهیم . مدار معادل شکل (۴-۶۸-الف) حاصل می شود . با تبدیل منبع و ترکیب مقاومت های موازی مدار شکل (۴- ۶۸-ب) به دست می آید .



(ا لف) شکل(۴-۶۸) (ب)

$$R'=\frac{8\times32}{8+32}=6.4\Omega$$

در مدار شکل (۴- ۶۸-ب) اگر معادله دیفرانسیل را بر حسب $i''_L(t)$ بنویسیم , داریم :

$$(6.4+5.6)i''_L(t)+24\times10^{-3}\frac{di''_L(t)}{dt}=-0.56\delta(t)\qquad\Rightarrow12h(t)+24\times10^{-3}\frac{dh}{dt}=-0.56\delta(t)$$

که حال معادله دیفرانسیل را با توجه به روش (۳) تعیین پاسخ ضربه , حل می کنیم :

$12 + 24\times10^{-3}S = 0 \qquad\qquad S = -\dfrac{12}{24\times10^{-3}} = -500(\sec)^{-1}$

بنابراین $h(t) = i''_L(t) = Ke^{-500t}u(t)$ است که با تعیین مشتق آن و قرار دادن در معادله دیفرانسیل مقدار دامنه K را به دست می آوریم :

$$\frac{dh}{dt} = -500Ke^{-500t}u(t) + K\delta(t)$$

$$12Ke^{-500t}u(t) + 24\times10^{-3}\left[-500Ke^{-500t}u(t) + K\delta(t)\right] = -0.56\delta(t)$$

$$\Rightarrow 12Ke^{-500t}u(t) - 12Ke^{-500t}u(t) + 24\times10^{-3}K\delta(t) = -0.56\delta(t)$$

$$\Rightarrow 24\times10^{-3}K\delta(t) = -0.56\delta(t)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $\delta(t)$ در معادله مقدار K به دست می آید :

$$24\times10^{-3}K = -.56 \qquad \Rightarrow K = -\frac{0.56}{24\times10^{-3}} \qquad \Rightarrow K = -\frac{70}{3}$$

بنابراین $i''_L(t) = h(t) = -\dfrac{70}{3}e^{-500t}u(t)$ می شود .

در نتیجه جریان $i_L(t)$ برابر است با :

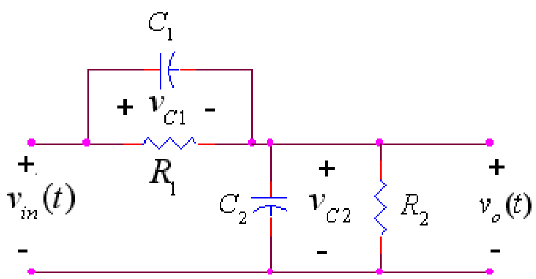
$$i_L(t) = i'_L(t) + i''_L(t) = \left(\frac{8}{3} + \frac{7}{3}e^{-500t}\right)u(t) - \frac{70}{3}e^{-500t}u(t)$$

$$i_L(t) = \left(\frac{8}{3} - 21e^{-500t}\right)u(t)$$

یکی از مدار های RC که در پروب اسیلوسکوپ ها به کار می رود مدار شکل (۴-۶۹) می باشد . حال پاسخ این مدار را در مثال (۴-۱۲) مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهیم .

● **مثال (۴-۱۲) :** اولاً پاسخ مدار $v_o(t)$ را در صورتی که خازن ها فاقد انرژی ذخیره شده باشند به ازاء ورودی $v_{in}(t) = V_1u(t)$ به دست آورید.

ثانیاً در صورتی که مدار دارای شرایط $R_1C_1 = R_2C_2$ باشد نشان دهید که $v_o(t)$ یک مقدار ثابت برابر KV_1 می باشد . مقدار K را محاسبه کنید .



شکل(۴-۶۹)

● **پاسخ :**

اولاً – برای تعیین پاسخ مدار $v_o(t)$ باید توجه نمود که در لحظه $t=0^-$ ولتاژ خازن ها صفر است و اتصال کوتاه می باشند و با اعمال ورودی , خازن ها با جریان ضربه شارژ می گردند و پس از شارژ شدن خازن ها , پاسخ مدار به صورت پاسخ کامل تغییر می نماید.

برای تحلیل , معادله دیفرانسیل مدار را می نویسیم :

$$\frac{v_o(t)}{R_2}+C_2\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_o(t)-v_{in}(t)}{R_1}+C_1\frac{d}{dt}[v_o(t)-v_{in}(t)]=0$$

$$(C_1+C_2)\frac{dv_o}{dt}+(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1})v_o(t)=\frac{v_{in}(t)}{R_1}+C_1\frac{dv_{in}}{dt}$$

اگر به جای v_{in} مقدار قرار دهیم نتیجه می شود :

$$(C_1+C_2)\frac{dv_o}{dt}+(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})v_o(t)=\frac{v_{in}(t)}{R_1}+C_1V_1\delta(t)$$

برای حل معادله از جمع اثر استفاده می کنیم.

الف) اثر منبع $\frac{V_1}{R_1}u(t)$ **:**

اگر پاسخ را $v_o'(t)$ فرض نماییم نوع پاسخ , پاسخ حالت صفر است. داریم :

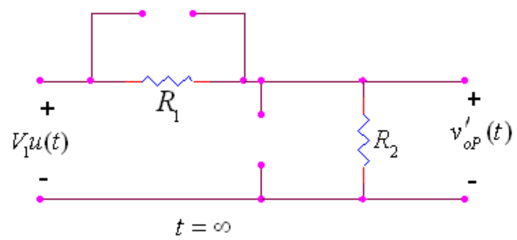
$$(C_1+C_2)\frac{dv_o'(t)}{dt}+(\frac{R_1+R_2}{R_1+R_2})v_o'(t)=\frac{V_1}{R_1}u(t)$$

$$(C_1+C_2)S+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}=0\Rightarrow S=-\frac{(R_1+R_2)}{(R_1+R_2)(C_1+C_2)}$$

و پاسخ دائم در این حالت $v_{oP}'=K$ و برابر است با :

$$(C_1+C_2)\times 0+(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2})K=\frac{V_1}{R_1}\Rightarrow K=\frac{\frac{V_1}{R_1}}{\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}}=\frac{R_2V_1}{R_1+R_2}$$

ضمناً این پاسخ از مدار معادل در $t=\infty$ شکل (۴-۷۰) قابل محاسبه است.



شکل(۴-۷۰)

در نتیجه :

$$v_o'(t)=\frac{R_2V_1}{R_1+R_2}(1-e^{-st})u(t)$$

ب) اثر منبع ضربه $C_1V_1\delta(t)$ **:**

با قرار دادن فرم پاسخ ورودی صفر در معادله دیفرانسیل پاسخ $v_o''(t)$ را به دست می آوریم :

$$(C_1+C_2)\frac{dv_o''}{dt}+(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2})v_o''(t)=C_1V_1\delta(t)$$

$$v_o''(t)=Ke^{-st}u(t)$$

$$(C_1+C_2)\frac{d}{dt}(Ke^{-st}u(t))+(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2})Ke^{-st}u(t)=C_1V_1\delta(t)$$

$$(C_1+C_2)[-SKe^{-st}u(t)+K\delta(t)]+(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2})Ke^{-st}u(t)=C_1V_1\delta(t)$$

$$[(C_1+C_2)\times(\frac{-R_1R_2}{(R_1+R_2)(C_1+C_2)})K+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}K]e^{-st}u(t)+(C_1+C_2)K\delta(t)=C_1V_1\delta(t)$$

$$(C_1+C_2)K\delta(t)=C_1V_1\delta(t)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $\delta(t)$ از طرفین نتیجه می شود :

$$(C_1+C_2)K=C_1V_1\Rightarrow K=\frac{C_1}{C_1+C_2}V_1$$

و پاسخ $v_o''(t)$ برابر است با :

$$v_o''(t)=\frac{C_1}{C_1+C_2}V_1e^{-st}u(t)$$

و پاسخ $v_o(t)$ برابر است با :

$$v_o(t)=v_o'(t)+v_o''(t)=\frac{R_2V_1}{R_1+R_2}(1-e^{-st})u(t)+\frac{C_1}{C_1+C_2}V_1e^{-st}u(t)$$

$$v_o(t)=(\frac{R_2V_1}{R_1+R_2}+[\frac{C_1}{C_1+C_2}-\frac{R_2}{R_1+R_2}]V_1e^{-st})u(t)$$

ثانیاً – در صورتی که $R_1C_1=R_2C_2$ باشد , ضریب تابع e^{-st} در پاسخ کامل را حساب می کنیم :

$$[\frac{C_1}{C_1+C_2}-\frac{R_2}{R_1+R_2}]V_1=[\frac{C_1R_1+C_1R_2-R_2C_1}{(R_1+R_2)(C_1+C_2)}]V_1=[\frac{0}{(R_1+R_2)(C_1+C_2)}]V_1=0$$

در نتیجه $v_o(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}V_1=KV_1$ می گردد که مقدار ثابتی است و $K=\frac{R_2}{R_1+R_2}$ می باشد.

روش دیگری که نیز می توان مدار را تحلیل نمود عبارت است از محاسبه ولتاژ خروجی $v_o(0^+)$ و سپس حل مدار با توجه به شرایط اولیه :

در این روش برای محاسبه $v_o(0^+)$ از اصل بقاء بار الکتریکی و تعریف خازن $q=CV$ استفاده نموده و آن را محاسبه می کنیم .

در لحظه $t=0^+$ داریم : $V_1=v_{C1}(0^+)+v_{C2}(0^+)$

چون خازن ها در لحظه $t=0^-$ اتصال کوتاه می باشند , بار الکتریکی q باعث شارژ شدن آن ها می گردد و در نتیجه :

$$V_1 = \frac{q(0^+)}{C_1} + \frac{q(0^+)}{C_2}$$

$$q(0^+) = \frac{V_1}{(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})} = \frac{C_1 C_2 V_1}{C_1 + C_2}$$

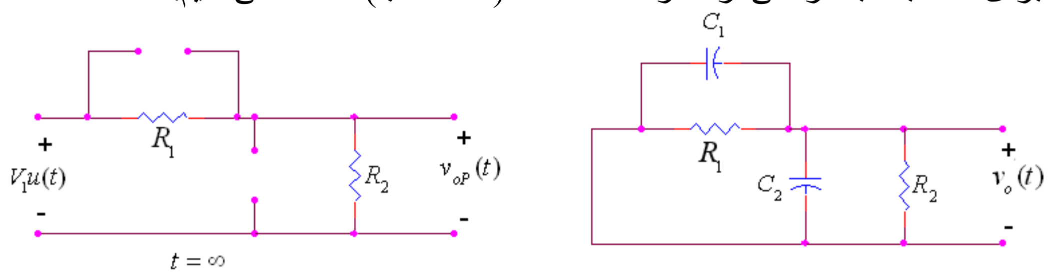
$$v(0^+) = v_{C2}(0^+) = \frac{q(0^+)}{C_2} = \frac{\frac{C_1 C_2 V_1}{C_1 + C_2}}{C_2} \qquad \Rightarrow v_o(0^+) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V_1$$

$$v_o(t) = v_{oP} + (v_o(0^+) - v_{oP}) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

که در این روش با استفاده از مدار معادل شکل (۴- ۷۱-الف) در لحظه $t = \infty$ مقدار v_{oP} را از طریق تقسیم پتانسیل محاسبه می کنیم :

$$v_{oP} = \frac{R_2 V_1}{R_1 + R_2}$$

و برای محاسبه ثابت زمانی از مدار معادل شکل (۴- ۷۱-ب) استفاده می کنیم.



(ا لف)   شکل(۴-۷۱)   (ب)

به دلیل موازی بودن خازن ها : $C_{eq} = C_1 + C_2$

به دلیل موازی بودن مقاومت ها : $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

نتیجتاً :

$$\tau = R_{eq} C_{eq} = (C_1 + C_2) \times (\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}) \qquad \text{یا} \qquad S = -\frac{(R_1 + R_2)}{(C_1 + C_2)(R_1 R}$$

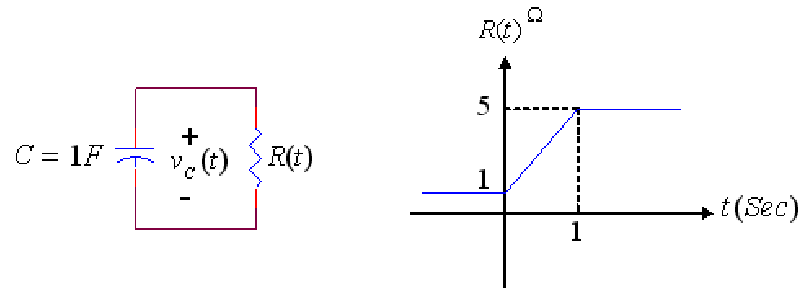
$$v_0(t) = [\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 + (\frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}) V_1 e^{-st}] u(t)$$

• ۴-۱۰-تحلیل مدارهای RC یا RL خطی تغییرپذیر با زمان:

معمولاً در مدار های خطی تغییرپذیر با زمان , مقاومت تغییرپذیر با زمان می باشد و برای تحلیل این گونه مدارها معادله دیفرانسیل مدار را برحسب متغیر مدار می نویسیم , در نتیجه یک معادله

دیفرانسیل مرتبه اول با ضرایب تغییر پذیز با زمان مانند $\frac{dx}{dt}+p(t)x=q(t)$ به دست می آید که برای حل آن از روش های حل معادلات دیفرانسیل استفاده می شود .. یکی از روش ها جدا کردن متغیرهای x و زمان t از هم می باشد و سپس با انتگرال گیری از طرفین معادله $x(t)$ به دست می آید .

● **مثال (۴-۱۳):** در یک مدار RC خازن $1F$ با ولتاژ اولیه $v_C(0)=2V$ در لحظه $t=0$ به مقاومت $R(t)$ که مشخصه آن در شکل (۴-۷۲) آمده است , متصل می شود . ولتاژ خازن را برای زمان های $t>0$ به دست آورید .



شکل(۴-۷۲)

● **پاسخ :** ابتدا معادله دیفرانسیل مدار را می نویسیم :

$$C\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C(t)}{R(t)}=0$$

و با توجه به معادله $R(t)$ پاسخ را در فواصل زمانی $0\le t\le 1$ و $t\ge 1$ به دست می آوریم :

$$R(t)=\begin{cases}1\Omega & t\le 0\\ 4t+1 & 0\le t\le 1\\ 5\Omega & t\ge 1\end{cases}$$

در فاصله زمانی $0\le t\le 1$, با قرار دادن رابطه $R(t)$ در معادله دیفرانسیل و جدا کردن متغیرها نتیجه می شود :

$$\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C(t)}{4t+1}=0\Rightarrow\frac{dv_C}{v_C(t)}=-\frac{dt}{4t+1}$$

از طرفین معادله از زمان صفر تا t انتگرال می گیریم :

$$\int_{v_C(0)}^{v_C(t)}\frac{dv_C}{v_C}=\int_0^t\frac{dt}{4t+1}\Rightarrow\qquad Ln|v_C(t)|\Big|_{v_C(0)=2}^{v_C(t)}=Ln|4t+1|\Big|_0^t$$

$$\Rightarrow Ln\frac{v_C(t)}{v_C(0)}=Ln\frac{1}{4t+1}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{v_C(t)}{v_C(0)}=\frac{1}{4t+1}$$

در نتیجه :

$$v_C(t)=\left(\frac{1}{4t+1}\right)v_C(0)\qquad\Rightarrow\qquad v_C(t)=\frac{2}{4t+1}$$

و برای زمان های $t \geq 1$ معادله به صورت $\frac{dv_C}{dt} + v_C(t) = 0$ می باشد که معادله خطی تغییرناپذیر است . $v_C(1) = \frac{2}{5} = 0.4V$ می شود , در نتیجه پاسخ مدار برابر است با :

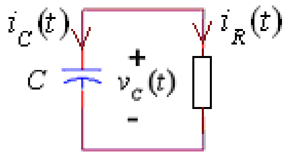
$$v_C(t) = v_C(1)e^{-\frac{(t-1)}{RC}}u(t-1)$$
$$v_C(t) = 0.4e^{-(t-1)}u(t-1)$$

بنابراین ولتاژ خازن در کلیه زمان ها برابر است با :

$$v_C(t) = \begin{cases} \frac{2}{4t+1} & 0 \leq t \leq 1 \\ 0.4e^{-(t-1)} & t \geq 1 \end{cases}$$

- **۴-۱۱- تحلیل مدارهای RC و RL غیرخطی :**

در مدارهای غیرخطی نیز معمولاً مقاومت غیرخطی است و سلف یا خازن خطی هستند. فرضاً در یک مدار RC مطابق شکل (۴-۷۳) که یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با شرایط اولیه $v_C(0)$ و یک مقاومت غیر خطی را در نظر می گیریم .



شکل (۴-۷۳)

می خواهیم $v_C(t)$ را برای زمان های $t \geq 0$ به دست آوریم . می توان نوشت :

$$i_C + i_R = 0 \Rightarrow C\frac{dv_C(t)}{dt} + i_R(t) = 0$$

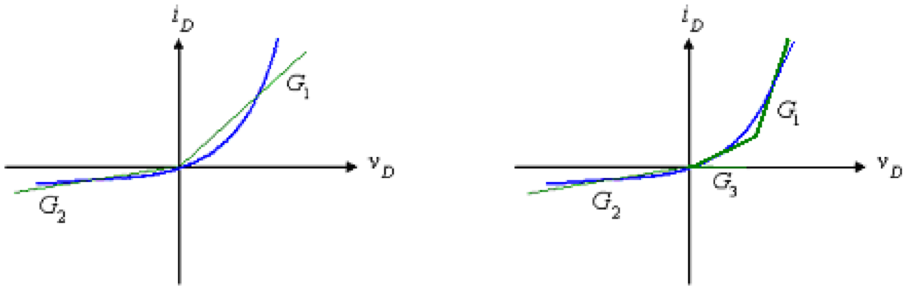
که برای حل این معادله دیفرانسیل از لحاظ مقاومت غیر خطی دو حالت مطرح است :

۱- مقاومت غیر خطی مقاومتی است کنترل شده با ولتاژ $i_R = g(v_R)$ و با توجه به $v_C(t) = v_R(t)$ می توان به جای $i_R(t)$ برحسب $v_C(t)$ مقدار قرار داده و با جدا کردن متغیرها و از روش انتگرال گیری , معادله دیفرانسیل($C\frac{dv_C}{dt} + g(v_C) = 0$) را حل کرده و $v_C(t)$ را به دست آورد .

۲- مقاومت غیرخطی مقاومتی است کنترل شده با جریان یعنی $v_R = f(i_R)$. در این صورت معادله دیفرانسیل شامل سه متغیر $(t, v_C(t), i_R(t))$ است بنابراین یکی از روش های تحلیل این گونه مدارها تحلیل به کمک روش ترسیمی می باشد.

به طوریکه در بسیاری از موارد می توان مقاومت غیر خطی را با تعدادی پاره خط تقریب نمود . مسلماً هرچه تعداد پاره خط ها بیشتر باشد تحلیل مدار دقیق تر بوده و خطا کمتر است .

در شکل(۴- ۷۴) یک مقاومت غیر خطی مانند دیود اتصالی یک مرتبه با دو پاره خط و درمرتبه دوم با سه پاره خط تقریب شده است .در تحلیل مدار ها با این روش هر پاره خط معادل یک مقاومت خطی است و تحلیل به راحتی امکان پذیر است.



(ا لف) شکل(۴-۷۴) (ب)

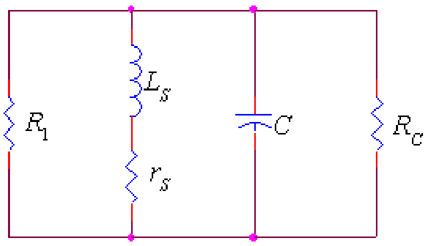
مدارهای مرتبه دوم

در این فصل به تجزیه و تحلیل مدارهایی می پردازیم که شامل دو عنصر ذخیره کننده انرژی می باشند و معادله دیفرانسیل هر متغیر ولتاژ یا جریان در این مدارها معادله درجه دوم می باشد.

ابتدا به تجزیه و تحلیل و تعیین پاسخ ورودی صفر ، پاسخ حالت صفر و پاسخ کامل مدارهای RLC موازی پرداخته و سپس با یادآوری دوگانی ، پاسخ های مدار RLC سری را تعیین می نماییم . سپس پاسخ تابع پله واحد $u(t)$ و تابع ضربه $\delta(t)$ مدارهای RLC موازی و سری را مورد بررسی قرار داده و در پایان این فصل اشاره ای به فضای حالت داریم .

• ۵-۱- پاسخ ورودی صفر مدارهای RLC موازی

قبل از اینکه تجزیه و تحلیل مدارهای RLC موازی را شروع نماییم به یک نکته عملی اشاره می کنیم بدین شرح که مدار RLC موازی فیزیکی با توجه به مقاومت سیم پیچ (بوبین) r_S مقاومت عایقی خازن R_C مطابق شکل (۵-۱) می باشد .

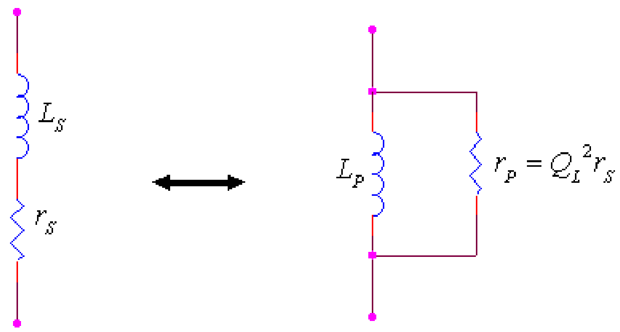


شکل(۵-۱)

ودر مورد سیم پیچ ها مسئله فیزیکی که باید توجه شود ضریب کیفیت سیم پیچ Q_L می باشد که با عبور یک جریان متناوب سینوسی با دوره تناوب T از یک سیم پیچ چنین تعریف می گردد :

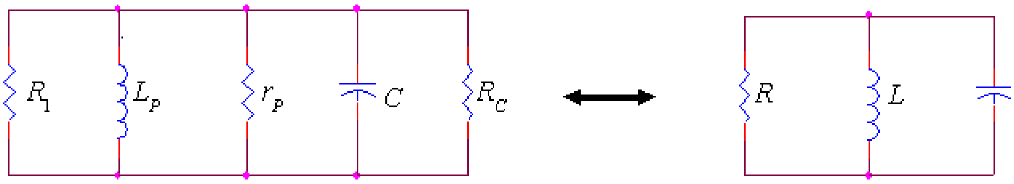
$$Q_L = \frac{\text{مقدار ماکزیمم انرژی ذخیره شده در سلف در } \frac{1}{4} \text{ پریود}}{\text{مقدار انرژی تلف شده در مقاومت در یک پریود}}$$

و در صورتی که $Q_L >> 1$ باشد می توان ثابت کرد که مدارهای شکل (۵-۲-الف وب) با توجه به روابط ($r_P = Q_L{}^2 r_S$ و $L_S = L_P$) معادل هم هستند.



(الف) شکل(۵-۲) (ب)

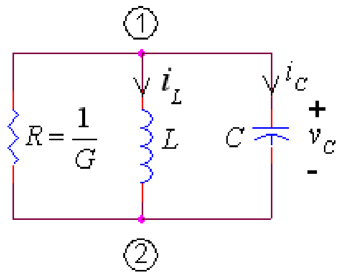
در این صورت با جایگذاری مدار معادل شکل (۲-۵-ب) در مدار شکل (۵-۱) ، از ترکیب مقاومت ها مدار شکل (۵-۳) که یک مدار RLC موازی است حاصل می گردد.



(الف) شکل(۵-۳) (ب)

- **تجزیه و تحلیل مدارهای RLC موازی با ورودی صفر :**

اگر در مدار شکل (۵-٤) شرایط اولیه خازن وسلف را به ترتیب $v_C(0)$ و $i_L(0)$ در نظر بگیریم :



شکل(۵-٤)

با استفاده از قوانین کیرشهف در مدار می توان نوشت :

$$KCL(1) \Rightarrow i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=0$$

$$KVL \Rightarrow v_R(t)=v_L(t)=v_C(t)$$

اگر پاسخ مدار را ولتاژ خازن $v_C(t)$ در نظر گیریم ، با توجه به روابط بین ولتاژ و جریان سلف و خازن یعنی :

$$\begin{cases} i_C(t)=C\dfrac{dv_C}{dt} \\ v_C(t)=L\dfrac{di_L}{dt} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned} v_C(t)&=\frac{1}{C}\int_0^t i_C\,dt+v_C(0) \\ i_L(t)&=\frac{1}{L}\int_0^t v_L\,dt+i_L(0) \end{aligned}$$

در معادله KCL بر حسب $v_C(t)$ مقدار قرار می دهیم :

$$i_R(t)=\frac{v_R(t)}{R}=Gv_R(t)$$

$$KCL(1) \Rightarrow \frac{v_R(t)}{R}+\frac{1}{L}\int_0^t v_L\,dt+i_L(0)+C\frac{dv_C}{dt}=0$$

و طبق KVL می توان نوشت :

$$\frac{v_C(t)}{R}+\frac{1}{L}\int_0^t v_C\,dt+i_L(0)+C\frac{dv_C}{dt}=0$$

حال اگر از معادله دیفرانسیل انتگرال حاصل یک بار مشتق بگیریم ، نتیجه می شود :

$$\frac{1}{R}\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{L}v_C+C\frac{d^2v_C}{dt^2}=0$$

و با مرتب کردن معادله دیفرانسیل نتیجه می شود :

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C = 0$$

که باید این معادله دیفرانسیل را حل کرد تا $v_C(t)$ به دست آید . قبل از حل ، از آنجا که در این مدار شش متغیر ولتاژ و جریان وجود دارد و هر کدام می توانند پاسخ باشند ، مجدداً معادله دیفرانسیل مدار را با فرض اینکه $i_L(t)$ پاسخ باشد ، به دست می آوریم :

با استفاده از روابط ولتاژ و جریان سلف و خازن و هم چنین قانون اهم در KCL بر حسب $i_L(t)$ مقدار قرار می دهیم :

$$KCL(1) \Rightarrow \frac{v_R(t)}{R} + i_L(t) + C\frac{dv_C}{dt} = 0$$

و بر اساس KVL : $v_R(t) = v_L(t) = v_C(t)$ خواهیم داشت :

$$\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L(t) + C\frac{d}{dt}(L\frac{di_L}{dt}) = 0$$

$$\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L(t) + LC\frac{d^2 i_L}{dt} = 0$$

در نتیجه با مرتب کردن معادله دیفرانسیل داریم :

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = 0$$

اگر به معادلات حاصل بر حسب متغیرهای $v_C(t)$ و $i_l(t)$ توجه کنیم مشاهده می شود که معادله دیفرانسیل بستگی به متغیر ندارد و برای هر یک از شش متغیر مدار RLC موازی یکسان است :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC} x = 0$$

و برای تعیین پاسخ باید معادله دیفرانسیل مدار بر حسب متغیر مورد نظر حل کرد .

بنابر این معادله دیفرانسیل را بر حسب متغیر $v_C(t)$ حل می کنیم .

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C(t) = 0$$

معادله مشخصه معادله دیفرانسیل را تشکیل داده و آن را حل می کنیم .

$$S^2 + \frac{1}{RC}S + \frac{1}{LC} = 0$$

$$S = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}$$

همانگونه که مشاهده می شود معادله مشخصه معادله ای درجه ۲ می باشد و دارای دو فرکانس طبیعی است .

قبل از بررسی فرکانس های طبیعی معادله دو پارامتر فرکانسی را تعریف می کنیم .

$\alpha \overset{\Delta}{=} \frac{1}{2RC}$ فرکانس میرائی (فرکانس نپری)

$\omega_0 \overset{\Delta}{=} \frac{1}{\sqrt{LC}}$ فرکانس زاویه ای همنوایی (تشدید)

و معادله دیفرانسیل بصورت

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_C}{dt} + \omega_0^2 v_C = 0$$

در نتیجه معادله مشخصه و فرکانس های طبیعی با توجه به دو فرکانس تعریف شده عبارتند از :

$$\begin{cases} S^2 + 2\alpha S + \omega_0^2 = 0 \\ S = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

فرکانس های طبیعی (یعنی ریشه های معادله درجه دوم)بستگی به مقادیر فرکانس های α و ω_0

مدار دارد و دارای سه وضعیت میرائی شدید , میرائی بحرانی و میرائی ضعیف می باشد .

۱- $\alpha > \omega_0$ **میرائی شدید (فوق میرا)** , در این حالت معادله دیفرانسیل دارای دو ریشه حقیقی می باشد .

فرکانس های طبیعی عبارتند از :

$$S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$
$$S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

و پاسخ میرائی شدید عبارت است از :

$$v_C(t) = K_1 e^{S_1 t} + K_2 e^{S_2 t} \Rightarrow v_C(t) = K_1 \exp(S_1 t) + K_2 \exp(S_2 t)$$

۲- $\alpha = \omega_0$ **میرائی بحرانی** , در این حالت معادله دیفرانسیل دارای ریشه مضاعف است وفرکانس های طبیعی عبارتنداز :

$$S_1 = S_2 = -\alpha$$

و پاسخ میرائی بحرانی عبارت است از :

$$v_C(t) = (K_1 t + K_2)e^{-\alpha t} \Rightarrow v_C(t) = (K_1 t + K_2)\exp(-\alpha t)$$

۳- $\alpha < \omega_0$ **میرائی ضعیف (زیر میرا)** , در این حالت معادله دیفرانسیل دارای دو ریشه مختلط می باشد . با تعریف فرکانس طبیعی (زاویه ای)

$\omega_d \overset{\Delta}{=} \sqrt{\omega_0 - \alpha^2}$

در نتیجه فرکانس های طبیعی عبارتند از :

$S_1 = -\alpha + j\omega_d$ و $S_2 = -\alpha - j\omega_d$

و پاسخ میرائی ضعیف عبارت است از :

$v_C(t) = Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \phi) \Rightarrow v_C(t) = K\exp(-\alpha t)Cos(\omega_d t + \phi)$

حال بر اساس سه حالت فوق پاسخ مدار را بدست می آوریم .

• ۵-۱-۱- تعیین پاسخ میرائی شدید :

همانطور که بیان شد در یک RLC موازی با شرایط اولیه $v_C(0) = V_0$ و $i_L(0) = I_0$ در صورتیکه $\frac{1}{2RC} = \alpha > \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ باشد مدار دارای دو فرکانس طبیعی حقیقی S_1 و S_2 می باشد و پاسخ آن بصورت $v_C(t) = K_1 e^{S_1 t} + K_2 e^{S_2 t}$ است که در این معادله K_1 و K_2 ضرائب ثابتند که باید با توجه به شرائط اولیه مشخص شوند .

برای تعیین ضرایب ثابت K_1 و K_2 با توجه به مقدار متغیر $v_C(t)$ و مشتق مرتبه اول آن $\frac{dv_C}{dt}$ در $t = 0^+$ دستگاه معادله زیر را ترتیب داده و حل می کنیم .

$$\begin{cases} v_C(0^+) = K_1 + K_2 \\ \frac{dv_C}{dt}(0^+) = K_1 S_1 + K_2 S_2 \end{cases}$$

در این دستگاه معادلات $v_C(0^+) = V_0$ مشخص است ولی باید $\frac{dv_C}{dt}(0^+)$ را محاسبه کرد .

بر اساس رابطه جریان و ولتاژ خازن $i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt}$ می توان نوشت :

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C}$$

و از KCL مدار در زمان $t = 0^+$ و شرایط اولیه نتیجه می شود :

$$i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+)$$

و با استفاده از KVL مدار در زمان $t = 0^+$ و قانون اهم نتیجه می شود :

$$v_R(0^+) = v_L(0^+) = v_C(0^+)$$
$$i_R(0^+) = \frac{v_R(0^+)}{R} = \frac{v_C(0^+)}{R}$$

بنابر این :

$$i_C(0^+) = -\frac{v_C(0^+)}{R} - i_L(0^+) = -\frac{V_0}{R} - I_0$$

با قرار دادن مقدار $i_C(0^+)$ در رابطه $\frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C}$ چنین حاصل می شود :

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+) = -\frac{v_C(0)}{RC} - \frac{i_L(0)}{C} = -\frac{V_0}{RC} - \frac{I_0}{C}$$

بنابر این :

$$\begin{cases} v_C(0) = K_1 + K_2 = V_0 \\ \frac{dv_C}{dt}(0^+) = K_1 S_1 + K_2 S_2 = -\frac{V_0}{RC} - \frac{I_0}{C} \end{cases}$$

که با حل دستگاه K_1 و K_2 بدست می آیند .

$$\begin{cases} K_1 = -\frac{1}{S_1 - S_2}(\frac{V_0}{RC} + \frac{I_0}{C} + S_2 V_0) \\ K_2 = -\frac{1}{S_2 - S_1}(\frac{V_0}{RC} + \frac{I_0}{C} + S_1 V_0) \end{cases}$$

• ۵-۱-۲- تعیین پاسخ میرائی بحرانی :

در یک مدار RLC موازی با شرایط اولیه $v_C(0) = V_0$ و $i_L(0) = I_0$ در صورتیکه $\alpha = \omega_0$ باشد مدار دارای فرکانس طبیعی مضاعف $S_1 = S_2 = -\alpha$ می توان معادله دیفرانسیل را حل نمود :

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_C}{dt} + \omega_0^2 v_C(t) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \alpha \frac{dv_C}{dt} + \alpha \frac{dv_C}{dt} + \alpha^2 v_C(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{dv_C}{dt} + \alpha v_C(t)) + \alpha(\frac{dv_C}{dt} + \alpha v_C(t)) = 0$$

در صورتیکه $y(t) = \frac{dv_C}{dt} + \alpha v_C(t)$ فرض شود و در معادله فوق جای گذاری نماییم , یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول بر حسب $y(t)$ بدست می آید که آن را حل می کنیم :

$$\frac{dy}{dt} + \alpha y(t) = 0 \qquad S + \alpha = 0 \Rightarrow S = -\alpha$$

$$y(t) = K_1 e^{-\alpha t} \Rightarrow y(t) = K_1 \exp(-\alpha t)$$

بنابراین پاسخ $y(t)$ را در رابطه $y(t) = \frac{dv_C}{dt} + \alpha v_C(t)$ قرار می دهیم :

$$\frac{dv_C}{dt} + \alpha v_C(t) = K_1 e^{-\alpha t}$$

و معادله دیفرانسیل مرتبه اول جدید را بر حسب $v_C(t)$ حل می کنیم . برای حل طرفین معادله را در $e^{\alpha t}$ ضرب می کنیم .

$$e^{\alpha t}\frac{dv_C}{dt}+\alpha e^{\alpha t}v_C(t)=K_1$$

دو جمله سمت چپ معادله بیانگر مشتق حاصلضرب $e^{\alpha t}v_C(t)$ می باشد , بنابر این :

$$\frac{d}{dt}(e^{\alpha t}v_C(t))=K_1 \Rightarrow \int\left[\frac{d}{dt}(e^{\alpha t}v_C(t))\right]dt=\int K_1 dt$$

$$e^{\alpha t}v_C(t)=K_1t+K_2t$$
$$v_C(t)=K_1te^{-\alpha t}+K_2e^{-\alpha t} \Rightarrow v_C(t)=(K_1t+K_2)e^{-\alpha t}$$

در پاسخ میرائی بحرانی حاصل K_1 و K_2 ضرائب ثابت هستند که باید بر مبنای شرایط اولیه مطابق حالت پاسخ میرائی شدید آن ها را از دستگاه مقابل که در $t=0^+$ تشکیل شده است محاسبه نمود .

$$\begin{cases} v_C(0)=K_2 \\ \dfrac{dv_C}{dt}(0^+)=K_1-\alpha K_2 \end{cases}$$

و مقدار $v_C(0)=V_0$ است و $\frac{dv_C}{dt}(0^+)$ از معادلات KCL و KVL مدار و شرائط اولیه مطابق حالت میرائی شدید بدست می آید .

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+)=\frac{i_C(0^+)}{C}=-\frac{v_C(0)}{RC}-\frac{i_L(0)}{C}=-\frac{V_0}{RC}-\frac{I_0}{C}$$

در نتیجه :

$$\begin{cases} V_0=K_2 \\ -\dfrac{V_0}{RC}-\dfrac{I_0}{C}=K_1-\alpha K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2=V_0 \\ K_1=\alpha V_0-\dfrac{V_0}{RC}-\dfrac{I_0}{C} \end{cases}$$

با قرار دادن مقادیر بدست آمده برای ضرایب K_1 و K_2 پاسخ $v_C(t)$ برای زمانهای $t>0$ بدست می آید .

● ۵-۱-۳- تعیین پاسخ میرائی ضعیف :

در یک مدار RLC موازی با شرایط $v_C(0)=V_0$ و $i_L(0)=I_0$ و $\alpha<\omega_0$ با توجه به فرکانس طبیعی زاویه ای $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$ دو فرکانس طبیعی $S_1=-\alpha+j\omega_d$ و $S_2=-\alpha-j\omega_d$ پاسخ میرائی ضعیف به فرم

$$v_C(t) = K_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + K_2 e^{(-\alpha - j\omega_d)t}$$

بدست می آید که در این معادله دو ضریب K_1 و K_2 دو عدد مختلط مزدوج می باشند و قابل محاسبه بر حسب شرائط اولیه مدار می باشند ولی معمولاً پاسخ میرائی ضعیف را با توجه به بسط اولر تابع نمایی به یکی از دو فرم زیر بیان می کنند .

الف :

$$v_C(t) = K_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + K_2 e^{(-\alpha - j\omega_d)t}$$
$$\Rightarrow v_C(t) = K_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} + K_2 e^{-\alpha t} e^{d\omega_d t} = e^{-\alpha t}(K_1 e^{j\omega_d t} + K_2 e^{-d\omega_d t})$$
$$\Rightarrow v_C(t) = e^{-\alpha t}(K_1 \cos\omega_d t + jK_1 \sin\omega_d t + K_2 \cos\omega_d t - jK_2 \sin\omega_d t)$$
$$v_C(t) = e^{-\alpha t}[(K_1 + K_2)\cos\omega_d t + j(K_1 - K_2)\sin\omega_d t]$$

همانطور که بیان شد K_1 و K_2 دو عدد مختلط مزدوج می باشند , بنابر این ضرایب $A = (K_1 + K_2)$ و $B = j(K_1 - K_2)$ ضرایب حقیقی هستند و پاسخ بصورت :

$$v_C(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\ [\mathrm{A Cos}\omega_{\mathrm{d}} t + B Sin\omega_d t]$$

بکار می رود.

ب :

با استفاده از رابطه پاسخ میرائی ضعیف بدست آمده از قسمت (الف) می توان به فرم پاسخ میرائی ضعیف $v_C(t) = Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \phi)$ رسید .

بدین شرح که از A به شرط مخالف صفر بودن فاکتور می گیریم .

$$v_C(t) = e^{-\alpha t}[A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t] = Ae^{-\alpha t}[\cos\omega_d t + \frac{B}{A}\sin\omega_d t]$$

مقدار ثابت $\frac{B}{A}$ برابر تانژانت یک زاویه فرض می نماییم .

$$tg\phi = \frac{B}{A} = \frac{\sin\phi}{\cos\phi}$$

نتیجه را در رابطه فوق قرار می دهیم .

$$v_C(t) = Ae^{-\alpha t}[\cos\omega_d t + \frac{\sin\phi}{\cos\phi}\sin\omega_d t] = \frac{Ae^{-\alpha t}}{\cos\phi}[\cos\omega_d t\cos\phi + \sin\phi\sin\omega_d t]$$

حال با توجه به بسط توابع مثلثاتی و همچنین مقدار ثابت $K = \frac{A}{\cos\phi}$ به فرم پاسخ میرائی ضعیف $v_C(t) = Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d + \phi)$ می رسیم .

بنابر این در تعیین پاسخ ورودی صفر مدار های RLC موازی در حالت میرائی ضعیف معمولاً یکی از فرم های :

(الف $v_C(t) = e^{-\alpha t}[K_1\cos\omega_d t + K_2\sin\omega_d t]$

یا

(ب $v_C(t) = Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \phi)$

استفاده می شود . در هر صورت با توجه به شرایط اولیه باید در هر فرم دو ضریب ثابت را (K_1 و K_2) یا (K و زاویه ϕ) را بدست آورد .

I. ضرایب ثابت K_1 و K_2 فرم (الف) را با توجه به مقدار تابع $v_C(t)$ و مشتق آن در لحظه $t=0^+$ محاسبه می کنیم .

$$\begin{cases} v_C(0)=V_0=K_1 \\ \dfrac{dv_C}{dt}(0^+)=-\dfrac{V_0}{RC}-\dfrac{I_0}{C}=-\alpha K_1-\omega_d K_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1=V_0 \\ K_2=\dfrac{(\dfrac{V_0}{RC}+\dfrac{I_0}{C}-\alpha V_0)}{\omega_d} \end{cases}$$

II. ضریب ثابت K و زاویه ϕ از فرم (ب) با توجه به مقدار $v_C(t)$ و مشتق آن در لحظه $t=0^+$ محاسبه می شوند .

$$\begin{cases} v_C(0)=V_0=K\cos\phi \\ \dfrac{dv_C}{dt}(0^+)=-\dfrac{V_0}{RC}-\dfrac{I_0}{C}=-\alpha K\cos\phi-\omega_d K\sin\phi \end{cases}$$

همانطور که مشاهده می شود از این دستگاه معادلات $K\cos\phi$ و $K\sin\phi$ بدست می آید و از نسبت $\dfrac{K\sin\phi}{K\cos\phi}=tg\phi$ بدست آمده و ϕ مشخص می گردد .

$$K\cos\phi=V_0 \text{ و } K\sin\phi=\left(\frac{V_0}{RC}+\frac{I_0}{C}-V_0\right)\Big/\omega_d$$

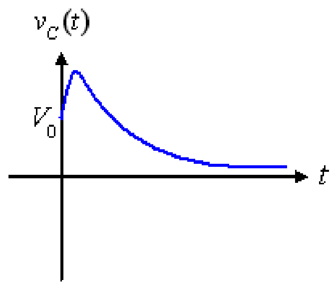
$$tg\phi=\frac{(\dfrac{V_0}{RC}+\dfrac{I_0}{C}-V_0)}{\omega_d V_0}\Rightarrow \phi=tg^{-1}\left(\frac{\dfrac{V_0}{RC}+\dfrac{I_0}{C}-V_0}{\omega_d V_0}\right)$$

پس از تعیین ϕ با استفاده از رابطه $K\cos\phi=V_0$ مقدار K را محاسبه می کنیم .

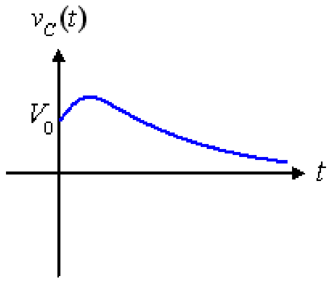
حال با توجه به تحلیل پاسخ ورودی صفر مدارهای RCL موازی به چند نکته مهم در تحلیل مدار های RLC می پردازیم .

الف : یکی از خاص پاسخ ورودی صفر مدارهای RLC موازی پاسخ بی اتلاف نامیده می شود و آن زمانی است که فرکانس میرائی α مساوی صفر باشد , یا مقاومت به سمت بی نهایت میل نماید . در این حالت پاسخ بی اتلاف به فرم $v_C(t)=K\cos(\omega_0 t+\phi)$ است . زیرا در پاسخ میرائی ضعیف اگر α مساوی صفر باشد $\omega_d=\omega_0$ می گردد .

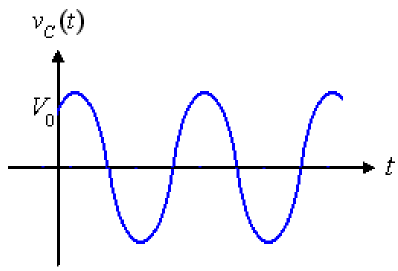
ب: شکل (۵-۵) منحنی تغییرات نوعی حالت های مختلف پاسخ ورودی صفر مدار RLC موازی را نشان می دهد .



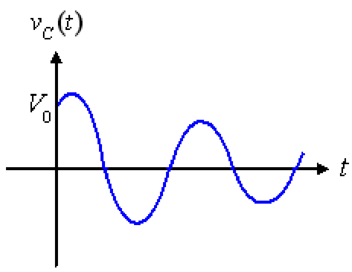
ب: پاسخ میرایی بحرانی



الف:پاسخ میرایی شدید



د: پاسخ بی ا تلاف



ج: پاسخ میرایی ضعیف

شکل(۵-۵)

ج : پاسخ میرائی ضعیف را با توجه فرم آن پاسخ میرائی نوسانی (نوسانی میرا) نیز نامیده می شود و پاسخ بی اتلاف نیز حد پاسخ میرائی نوسانی است .

د: ضریب کیفیت , همانگونه که در ابتدای بحث تحلیل مدارهای مرتبه دوم بیان شد مجموع انرژی اولیه ذخیره شده در سلف و خازن باعث ایجاد جریان و ولتاژ متغیر با زمان در سلف و خازن شده و قسمتی از انرژی در مقاومت تلف می گردد تا اینکه انرژی به صفر برسد و از طرف دیگر ضریب کیفیت یک مدار هم بستگی به انرژی تلفاتی و ماکزیمم انرژی ذخیره شده در یک دوره تناوب دارد و چنین تعریف می گردد .

$$Q \stackrel{\Delta}{=} \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

با توجه بهی اینکه α فرکانس میرائی و ω_0 فرکانس زاویه ای تشدید , چهار حالت پاسخ مدار های RLC را مشخص می کنند , می توان با توجه با به مقدار ضریب کیفیت مدار چهار حالت پاسخ را معین نمود , بطوریکه :

I. در حالت میرائی بحرانی چون $\alpha = \omega_0$ است , نتیجه می شود $Q = \frac{1}{2}$

II. در حالت میرائی شدید بدلیل $\alpha > \omega_0$, در نتیجه $Q < \frac{1}{2}$ است .

III. در حالت میرائی ضعیف بدلیل $\alpha < \omega_0$ در نتیجه $Q > \frac{1}{2}$ است .

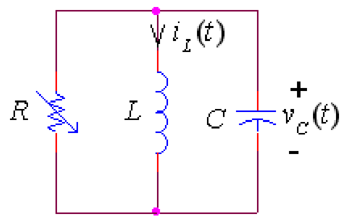
IV. در حالت بی اتلاف چون $\alpha = 0$ است , $Q = \infty$ است .

باید توجه نمود که در مدارهای فیزیکی بدلیل مقاومت سیم پیچ هیچگاه Q بی نهایت نمی گردد . برای ساخت نوسان سازها علاوه بر سلف و خازن دارای اتلاف از اجزاءِ فعال (دارای مقاومت دینامیکی منفی) استفاده می نمایند .

ه) پاسخ ورودی صفر مدارهای RLC موازی نیز بدون نوشتن معادله دیفرانسیل مقدور است . زیرا فرکانس های میرائی $\alpha = \frac{1}{2RC}$ و فرکانس تشدید زاویه ای $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ با توجه به مقدار اجزاءِ محاسبه نمود و با مقایسه آن نوع پاسخ و همچنین فرکانس های طبیعی را محاسبه می کنیم و با توجه به شرایط اولیه پاسخ را حساب می کنیم .

• مثال (۵-۱) :

سلف (القاگری) $(1H)$ و خازن $(0.01F)$ و مقاومت متغیری مطابق شکل (۵-۶) بصورت موازی به یکدیگر متصل شده اند . مقاومت به گونه ای تنظیم شده که ریشه های معادله مشخصه برابر $-8 \pm j6(rad/\sec)$ است و ولتاژ اولیه خازن 2 ولت و جریان اولیه سلف $80mA$است . مطلوب است تعیین , (الف) ω_0 , (ب) R , (ج) $\frac{di_L}{dt}(0^+)$, (د) $i_L(t)$, (ه) Q ضریب کیفیت , (و) R چقدر باشد تا پاسخ میرائی بحرانی گردد .



شکل(۵-۶)

پاسخ :

الف) همانگونه که از فرکانس های طبیعی داده شده بر می آید نوع پاسخ میرائی ضعیف است و برابر است با : $S = -\alpha \pm j\omega_d$

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 \Rightarrow 6^2 = \omega_0^2 - 8^2 \Rightarrow \omega_0^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{100} \Rightarrow \omega_0 = 10\, rad/\sec$$

فرکانس تشدید زاویه ای

ب) فرکانس میرائی $\alpha = \frac{1}{2RC} = 8\, Ne/\sec$ است . و با معین بودن آن و ظرفیت مقاومت R بدست می آید .

$$8 = \frac{1}{2 \times 0.01 \times R} \Rightarrow R = \frac{1}{0.02 \times 8} = \frac{1}{0.16} \Rightarrow R = \frac{100}{16} = 6.25\Omega$$

ج) با توجه به KCL و KVL در مدار RLC موازی داریم :

$$\begin{cases} KCL \Rightarrow i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = 0 \\ KVL \Rightarrow v_R(t) = v_L(t) = v_C(t) \end{cases}$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} \Rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{v_L(t)}{L}$$

و با توجه به KVL که در همه زمان های $t \geq 0$ در مدار صادق است .

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{v_C(t)}{L}$$
$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{v_C(0)}{L} \Rightarrow \frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{di_L}{dt}(0^+) = 2\,{}^{A}\!/_{\sec}$$

د) پاسخ $i_L(t)$ به همان گونه که در بند (الف) بیان شد , پاسخ میرائی ضعیف است . بنابر این :

$$i_L(t) = Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \phi) = Ke^{-8t}\cos(6t + \phi)$$

حال با توجه به شرایط اولیه K و ϕ را بدست می آوریم .

$$\begin{cases} i_L(0) = 80 \times 10^{-3} = K\cos\phi \\ \dfrac{di_L}{dt}(0^+) = 2 = -8K\cos\phi - 6K\sin\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K\cos\phi = 0.08 \\ 2 + 8 \times 0.08 = -6K\sin\phi \end{cases}$$
$$K\sin\phi = -\frac{2.64}{6} = 0.44$$
$$tg\phi = \frac{K\sin\phi}{K\cos\phi} = \frac{0.44}{0.08} \Rightarrow tg\phi = 5.5$$
$$\phi = tg^{-1}5.5 \Rightarrow \phi \approx 79.69^o$$
$$K\cos\phi = 0.08 \Rightarrow K = \frac{0.08}{\cos(79.69)} \Rightarrow k = 0.447A$$
$$i_L(t) = 0.447e^{-8t}\cos(6t + 79.69^o)A = 447e^{-8t}\cos(6t + 79.69^o)mA$$

ه) طبق تعریف Q مقدار آن را حساب می کنیم :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{10}{2 \times 8} = \frac{5}{6}$$

و) برای اینکه پاسخ میرائی بحرانی گردد باید $Q = \frac{1}{2}$ یا $\alpha = \omega_0$ باشد . در نتیجه R را از روی رابطه $\alpha = \frac{1}{2RC}$ حساب می کنیم .

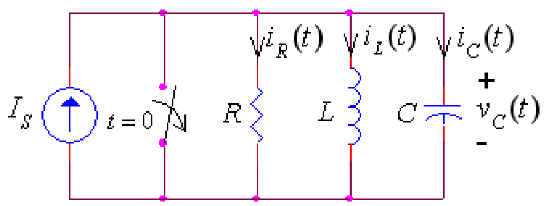
$$\frac{1}{2RC} = \alpha = \omega_0 \Rightarrow \frac{1}{2R \times 0.01} = 10 \Rightarrow R = \frac{1}{0.02 \times 10} \Rightarrow R = 5\Omega$$

• ۵-۲- پاسخ حالت صفر مدارهای RLC موازی

همانطور که در مبحث پاسخ حالت صفر مدارهای مرتبه اول بیان شد پاسخی است که شرایط اولیه مدار صفر است و با اعمال ورودی تغییرات جریان ها و ولتاژهای مدار از صفر شروع می گردد . در این قسمت نیز ابتدا در مورد پاسخ حالت صفر مدار های RLC موازی با ورودی جریان مستقیم (DC) می پردازیم , و سپس پاسخ حالت صفر مدار های RLC با ورودی متغیر با زمان را مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهیم .

۵-۲-۱- پاسخ حالت صفر مدار های RLC موازی با منبع جریان مستقیم

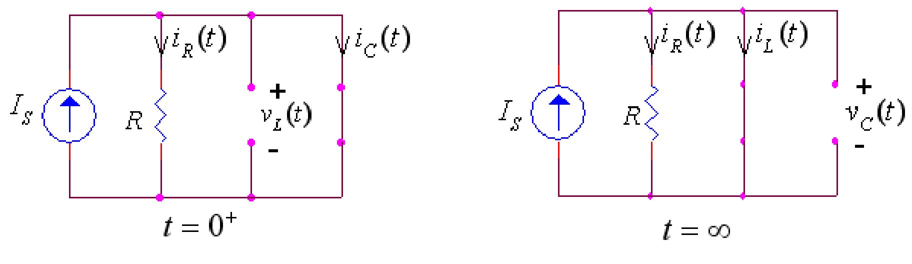
مدار شکل (۵-۷) را در نظر گرفته فرض می نماییم که در زمان $t=0$ کلید باز شده و منبع جریان I_S به مدار اعمال گردد .



شکل(۵-۷)

• **تحلیل فیزیکی :**

مدار در $t=0^-$ در حالت آرامش بسر می برد , زیرا $i_L(0)=0$ و $v_C(0)=0$ است . بنابر این در لحظه $t=0^+$ بدلیل اینکه ولتاژ خازن و جریان سلف تغییر ناگهانی را نمی پذیرند مطابق شکل (۵-۸-الف) خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز می باشد .



شکل(۵-۸)

با اعمال جریان به مدار جریان I_S از خازن عبور نموده و باعث ذخیره شدن بار در جوشن های خازن شده و ایجاد اختلاف پتانسیل در دو سر خازن می گردد .

با توجه به موازی بودن سلف و خازن ولتاژ دو سر سلف نیز افزایش یافته و عامل ایجاد شار در دو سر سلف و همچنین جریان در آن می گردد و این عمل آنقدر ادامه می یابد تا اینکه تغییرات بار در خازن و تغییرات شار در سلف برابر صفر می شوند . نتیجتاً مطابق شکل (۵-۸- ب) خازن در حالت مدار باز و سلف در حالت اتصال کوتاه قرار می گیرند .

• **تحلیل ریاضی :**

در مدار شکل (۵-۸- ب) قوانین جریان و ولتاژ را می نویسیم :

$$\begin{cases} KCL \Rightarrow i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = I_S \\ KVL \Rightarrow v_R(t) = v_L(t) = v_C(t) \end{cases}$$

با توجه به اینکه متغیر های $i_L(t)$ یا $v_C(t)$ پاسخ حالت صفر مدارها می باشند لذا $i_L(t)$ را به عنوان پاسخ مدار فرض مدار فرض می کنیم و در رابطه KCL با توجه به روابط

$$\begin{cases} i_C(t) = C\dfrac{dv_C}{dt} \\ v_L(t) = L\dfrac{di_L}{dt} \\ v_R(t) = Ri_R(t) \end{cases}$$

و KVL مدار بر حسب $i_L(t)$ مقدار قرار می دهیم نتیجه می شود :

$$i_R = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}$$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = C\frac{d}{dt}(L\frac{di_L}{dt}) = LC\frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

$$\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L(t) + LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} = I_S$$

معادله دیفرانسیل را مرتب می نماییم :

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L(t) = \frac{1}{LC}I_S$$

معادله دیفرانسیل حاصل دارای دو پاسخ همگن و دائم می باشد .

$$i_L(t) = i_h + i_P$$

- **پاسخ همگن :**

طرف دوم معادله دیفرانسیل را مساوی صفر قرار داده و معادله مشخصه آن را تشکیل می دهیم , مشاهده می شود که معادله مشخصه درجه دوم حاصل مانند معادله مشخصه مدارهای RLC موازی ورودی صفر است بنابر این پاسخ همگن یکی از ۳ حالت پاسخ میرائی شدید , میرائی بحرانی , میرائی ضعیف می باشد .

معادله دیفرانسیل همگن $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L(t) = 0$ معادله مشخصه

$$S^2 + \frac{1}{RC}S + \frac{1}{LC} = 0$$

بنابر این برای تعیین پاسخ همگن کافی است پارامتر های α و ω_0 را مشخص و فرکانس های طبیعی و نوع پاسخ را معین کرد .

- **پاسخ دائم :**

همانطور که در تحلیل مدارهای مرتبه اول بیان شد پاسخ دائم مشسابه ورودی صفر است بنابر این در تحلیل مدارهای RLC موازی با ورودی (dc) , $i_P = K$ می باشد که با قرار دادن K در معادله دیفرانسیل مقدار پاسخ دائم بدست می آید .

$$\frac{1}{LC}K = \frac{1}{LC}I_S \Rightarrow K = I_S$$

اگر به مقدار پاسخ دائم توجه شود و همچنین تحلیل فیزیکی مدار را مورد نظر قرار دهیم , مشاهده می شود که از روی مدار معادل شکل (۵-۸- ب) مدار در $t=\infty$ که سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است می توان پاسخ دائم را بدست آورد .

بنابر این پاسخ حالت صفر مدار RLC موازی با توجه به α و ω_0 عبارت است از :

$$i_L(t) = K_1 e^{S_1 t} + K_2 e^{S_2 t} + I_S \qquad a > \omega_0$$

$$i_L(t) = (K_1 t + K_2)e^{-\alpha t} + I_S \qquad a = \omega_0$$

$$i_L(t) = Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \phi) + I_S \qquad a < \omega_0$$

که برای تعیین ضرایب (K_1 و K_2) یا (K و ϕ) از شرایط اولیه استفاده می کنیم و با تعیین : $\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L}$ مقادیر ضرایب را مشخص می کنیم .

$$v_L(t) = v_C(t) \Rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{v_C(0)}{L} = 0$$

ضمناً $\frac{di_L}{dt}(0^+)$ را نیز می توان از مدار معادل شکل (۵ -۸-الف) که در $t=0^+$ رسم شده است بدست آورد .

همانگونه که مشاهده می شود علت صفر شدن $\frac{di_L}{dt}(0^+)$ این است که $v_L(t) = v_C(t)$ و اتصال کوتاه بودن خازن در $t=0^+$ است .

فرضاً اگر $a > \omega_0$ باشد K_1 و K_2 از دستگاه زیر بدست می آید .

$$\begin{cases} i_L(0) = 0 = K_1 + K_2 + I_S \\ \frac{di_L}{dt}(0^+) = 0 = K_1 S_1 + K_2 S_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{S_2 I_S}{S_1 - S_2} \\ K_2 = \frac{S_1 I_S}{S_2 - S_1} \end{cases}$$

یکی از نکات مهم در تحلیل پاسخ حالت صفر مدارهای RLC موازی با ورودی dc این است که اگر ولتاژ خازن $v_C(t)$ به عنوان پاسخ مدار انتخاب شود .

اولاً معادله دیفرانسیل مدار بصورت : $\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC}v_C(t) = 0$ است .

ثانیاً پاسخ دائم در این حالت برابر صفر است , که از طریق معادله دیفرانسیل $v_P = 0$ حاصل می شود و همچنین از روی مدار معادل در $t=\infty$ شکل (۵-۸- ب) مدار $v_P = 0$ بدست می آید .

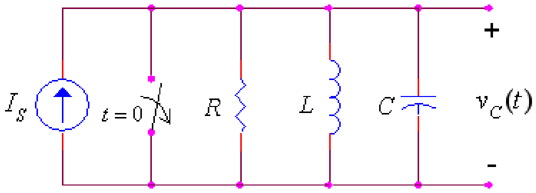
علت صفر بودن آن نیز این است که $v_L(t) = v_C(t)$ و سلف در بی نهایت اتصال کوتاه می باشد .

ثالثاً $\frac{dv_C}{dt}(0^+)$ نیز با توجه به مدار شکل (۵-۸-الف) برابر است با :

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+)=\frac{i_C(0^+)}{C}=\frac{I_S}{C}$$

۵-۲-۲- پاسخ حالت صفر مدار های RLC موازی با ورودی متغیر با زمان $i_S(t)$:

مدار شکل (۵-۹) را در نظر گرفته و فرض می کنیم ورودی $i_S(t)=I_m\cos(\omega t+\phi)$ در $t=0$ به آن اعمال شده است و شرایط اولیه $v_C(0)=0$ و $i_L(0)=0$ می باشد . می خواهیم $v_C(t)$ را برای کلیه زمان ها تعیین نماییم .



شکل(۵-۹)

KCL و KVL مدار را می نویسیم .

$$\begin{cases} KCL \Rightarrow i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=I_S(t) \\ KVL \Rightarrow v_R(t)=v_L(t)=v_C(t) \end{cases}$$

با توجه به روابط

$$\begin{cases} i_L(t)=\frac{1}{L}\int_0^t v_L dt + i_L(0) \\ i_C(t)=C\frac{dv_C}{dt} \\ v_C(t)=Ri_R(t) \end{cases}$$

و KVL مدار در معادله KCL مقدار قرار می دهیم .

$$i_R(t)=\frac{v_R(t)}{R}=\frac{v_C(t)}{R} \qquad \text{و} \qquad i_L(t)=\frac{1}{L}\int_0^t v_C(t)dt + i_L(0)$$

$$\frac{v_C(t)}{R}+\frac{1}{L}\int_0^t v_C(t)dt+i_L(0)+C\frac{dv_C}{dt}=i_S(t)$$

اگر از طرفین معادله مشتق بگیریم و معادله حاصل را مرتب کنیم نتیجه می شود :

$$\frac{1}{R}\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{L}v_C(t)+C\frac{d^2v_C}{dt}=\frac{di_S}{dt}$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{LC}v_C(t)=\frac{1}{C}\frac{di_S}{dt}$$

معادله دیفرانسیل حاصل دارای دو پاسخ همگن و دائم می باشد .

$$v_L(t)=v_h+v_P$$

❖ **پاسخ همگن :**

بدلیل عدم وابستگی پاسخ همگن به ورودی , این پاسخ می تواند یکی از سه حالت میرائی شدید , میرائی بحرانی و میرائی ضعیف باشد .

❖ **پاسخ دائم :**

از آنجا که پاسخ دائم مشابه ورودی است باید فرم پاسخ دائم را تعیین و همچنین بدلیل اینکه باید در معادله دیفرانسیل صدق نماید , آن را در معادله دیفرانسیل مدار قرار می دهیم .

$$v_P=v_m\cos(\omega t+\theta)$$

$$\frac{dv_P}{dt}=-v_m\omega\sin(\omega t+\theta)$$

$$\frac{d^2v_P}{dt^2}=-v_m\omega^2\cos(\omega t+\theta)$$

$$\frac{di_S}{dt}=-I_m\omega\sin(\omega t+\phi)$$

$$-V_m\omega^2\cos(\omega t+\theta)-\frac{1}{RC}V_m\omega\sin(\omega t+\theta)+\frac{1}{LC}V_m\cos(\omega t+\theta)=-\frac{1}{C}I_m\omega\sin(\omega t+\phi)$$

با بسط توابع مثلثاتی $\cos(\omega t+\theta)$ و $\sin(\omega t+\theta)$ و همچنین $\sin(\omega t+\phi)$ و ضرایب $\sin\omega t$ و $\cos\omega t$ را از طرفین معادله با هم مساوی قرار داده و با حل دستگاه V_m و θ را بر حسب اجزاءِ مدار R و L و C و همچنین I_m و ϕ بدست می آوریم .

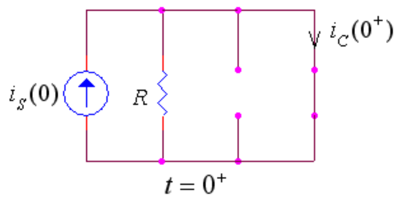
$$\begin{cases}V_m=\dfrac{I_m}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2}+(C\omega-\dfrac{1}{L\omega})^2}}\\ \theta=\phi-tg^{-1}R(C\omega-\dfrac{1}{L\omega})\end{cases}$$

پس از تعیین V_m و θ پاسخ دائم مشخص می گردد و پاسخ مدار با فرض $a=\omega_0$ بصورت :

$v_C(t)=v_h+v_P=(K_1t+K_2)e^{-\alpha t}+V_m\cos(\omega t+\theta)$ می شود .

با توجه به شرایط اولیه $v_C(0)=0$ و $i_L(0)=0$ و تعیین $\frac{dv_C}{dt}(0^+)$ مقادیر K_1 و K_2 را بدست می آوریم .

برای تعیین $\frac{dv_C}{dt}(0^+)$ نیز می توان از معادلات مدار بدست آورد . همچنین می توان از مدار معادل شکل (۵-۱۰) در $t=0^+$ استفاده نموده و آن را حساب کرد .



شکل(۵-۱۰)

I. با استفاده از معادلات مدار :

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+)=\frac{i_C(0^+)}{C}\Rightarrow\begin{cases}i_R(0^+)+i_L(0^+)+i_C(0^+)=i_S(0^+)\\ v_R(0^+)=v_L(0^+)=v_C(0^+)\end{cases}$$

$$i_C(0^+)=-i_R(0^+)-i_L(0^+)+i_S(0^+)=-\frac{v_C(0^+)}{R}-i_L(0^+)+I_m\cos\phi$$

$$i_C(0^+)=I_m \qquad \text{و} \qquad \frac{dv_C}{dt}(0^+)=\frac{I_m\cos\phi}{C}$$

II. در مدار معادل چون خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز است نتیجه می شود :

$$i_C(0^+)=i_S(0)=I_m\cos\phi$$

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+)=\frac{I_m\cos\phi}{C}$$

و نتیجتاً ضرایب K_1 و K_2 از دستگاه زیر به دست می آیند :

$$\begin{cases}v_C(0^+)=0=K_2+V_m\cos\theta\\ \frac{dv_C}{dt}(0^+)=\left[K_1e^{-\alpha t}-\alpha K_2e^{-\alpha t}\right]_{t=0^+}+\left[-V_m\omega\sin(\omega t+\theta)\right]_{t=0}\end{cases}$$

$$\begin{cases}0=K_2+V_m\cos\theta\\ \frac{I_mCos\phi}{C}=K_1-\alpha K_2-V_m\omega Sin\theta\end{cases}$$

پس از تعیین K_1 و K_2 و جایگذاری در معادله پاسخ حالت صفر به دست می آید.

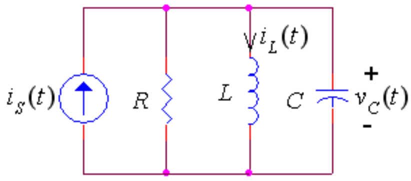
- **یکی از خواص مهم پاسخ حا لت صفر یک مدار خطی تغییرپذیر با زمان این است که این پاسخ ، نیز مشابه پاسخ مدارهای مرتبه اول تابع خطی از ورودی است.**

● **مثال (۵-۲) :** مدار RLC موازی شکل (۵-۱۱) مفروض است و شرایط اولیه مدار صفر می باشد و کلید در لحظه $t=0$ باز می شود . تابع $v_C(t)$ را برای زمان های $t\geq 0$ به دست آورید . در صورتی که :

الف : منبع جریان $i_S(t)=I_S=1A$ (dc) .

ب : منبع جریان $i_S(t)=2\cos(2t+30^o)$ باشد

و $R=1\Omega$ ، $C=\frac{1}{4}F$ و $L=4H$ باشد.



شکل(۵-۱۱)

• **پاسخ:**

الف : اولاً: به دلیل اینکه شرایط اولیه $v_C(0)=0$ و $i_L(0)=0$ هستند پاسخ مدار ، پاسخ حالت صفر است .

ثانیاً با توجه به اینکه ورودی dc می باشد برای تعیین نوع پاسخ همگن α و ω_0 را محاسبه می کنیم :

$$\alpha=\frac{1}{2RC}=\frac{1}{2\times1\times\frac{1}{4}}=2\frac{1}{Sec} \qquad \text{و} \quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{4\times\frac{1}{4}}}=1\frac{rad}{Sec}$$

چون $\alpha>\omega_0$ است ، پس پاسخ همگن ، پاسخ میرایی شدید می باشد.

$$S_0=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^{\ 2}}=-2\pm\sqrt{4-1}=-2\pm\sqrt{3}$$

$$S_1=-2+\sqrt{3}\approx-0.3(Sec)^{-1} \qquad \text{و} \qquad S_2=-2-\sqrt{3}\approx-3.73(Sec)^{-1}$$

و در نتیجه :

$$v_h=K_1e^{-0.3t}+K_2e^{-3.73t}$$

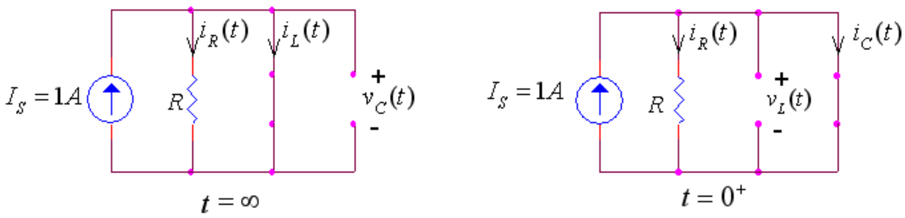
ثالثاً پاسخ دائم را محاسبه می کنیم. برای محاسبه پاسخ دائم از مدار معادل در $t=\infty$ شکل (۵-۱۲-الف) استفاده می کنیم که در این زمان خازن حالت مدار باز و سلف حالت اتصال کوتاه را داراست . در نتیجه :

$$v_C(0)=v_L(0^+)$$

بنابراین : $v_P=v_C(\infty)$

نتیجتاً پاسخ $v_C(t)$ عبارت است از :

$$v_C(t)=v_h+v_P\Rightarrow v_C(t)=K_1e^{-0.3t}+K_2e^{-3.73t}+0$$



(الف) شکل(۵-۱۲) (ب)

با استفاده از شرایط اولیه مدار معادل را در $t=0^+$ مطابق شکل (۵-۱۲-ب) در نظر می گیریم و $\frac{dv_C}{dt}(0^+)$ را محاسبه می کنیم:

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+)=\frac{i_C(0^+)}{C}$$

و جریان خازن در $t=0^+$ از شکل (۵- ۱۲-ب) به دست می آید :

$$i_C(0^+)=1A \quad \text{و} \quad \frac{dv_C}{dt}(0^+)=\frac{1}{1/4}=4\frac{V}{Sec}$$

حال ضرایب K_1 و K_2 را از دستگاه مقابل محاسبه می کنیم :

$$\begin{cases} v_C(0^+)=0=K_1+K_2 \\ \dfrac{dv_C}{dt}(0^+)=4=-0.3K_1-3.73K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1=\dfrac{4}{3.43}=1.17 \\ K_2=-K_1=-1.17 \end{cases}$$

$$v_C(t)=1.17e^{-0.3t}-1.17e^{-3.73t}$$

ب : اولاً برای حل مسئله با ورودی $i_S(t)$ باید معادله دیفرانسیل را بنویسیم . برای نوشتن معادله دیفرانسیل KCL و KVL مدار را می نویسیم :

$$\begin{cases} i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=i_S(t) \\ v_R(t)=v_L(t)=v_C(t) \end{cases}$$

و با استفاده از روابط $i_C(t)=C\dfrac{dv_C}{dt}$ ، $i_L(t)=\dfrac{1}{L}\int_0^t v_L(t)dt+i_L(0)$ و $i_R(t)=\dfrac{v_R(t)}{R}$ و معادلهKVL مدار ، در معادله KCL بر حسب $v_C(t)$ مقدار قرار می دهیم :

$$\frac{v_C(t)}{R}+\frac{1}{L}\int_0^t v_C(t)dt+i_L(0)+C\frac{dv_C}{dt}=i_S(t)$$

از طرفین معادله بر حسب زمان مشتق می گیریم . معادله دیفرانسیل به دست می آید :

$$\frac{1}{R}\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{L}v_C(t)+C\frac{d^2v_C}{dt^2}=\frac{di_S}{dt}$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{LC}v_C=\frac{1}{C}\frac{di_S}{dt}$$

با قرار دادن مقدار در معادله دیفرانسیل :

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+4\frac{dv_C}{dt}+v_C(t)=4\times\frac{d}{dt}(2\cos(2t+30^o))$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+4\frac{dv_C}{dt}+v_C(t)=-4\times 4\sin(2t+30^o)$$

ثانیاً نوع پاسخ همگن را نیز می توان از معادله مشخصه معادله دیفرانسیل همگن به دست آورد که جواب مسلماً مشابه نوع پاسخ همگن با ورودی dc می باشد.

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+4\frac{dv_C}{dt}+v_C(t)=0 \qquad S^2+4S+1=0$$

$$S=-2\pm\sqrt{4-1}=\begin{cases}-0.3\\-3.73\end{cases}$$

بنابراین پاسخ همگن از نوع پاسخ میرایی شدید می باشد . با فرکانس های فوق :

$$v_h=K_1e^{-0.3t}+K_2e^{-3.73t}$$

ثالثاً پاسخ دائم را با استفاده از معادله دیفرانسیل به دست می آوریم.

$$v_P(t) = V_m \cos(2t+\theta)$$
$$\frac{dv_P}{dt} = -2V_m \sin(2t+\theta)$$
$$\frac{d^2v_P}{dt^2} = -4V_m \sin(2t+\theta)$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل نتیجه می شود :

$$-4V_m \cos(2t+\theta) + 4\times(-2)V_m \sin(2t+\theta) + V_m \cos(2t+\theta) = -16\sin(2t+30^o)$$
$$-3V_m \cos(2t+\theta) - 8V_m \sin(2t+\theta) = -16\sin(2t+30^o)$$

با بسط توابع مثلثاتی $\cos(2t+\theta)$ و $\sin(2t+\theta)$ و $\sin(2t+30^o)$ و مساوی قرار دادن ضرایب $\sin 2t$ و $\cos 2t$ از طرفین معادله دستگاه زیر به دست می آید :

$$3V_m\left[\cos(2t)\cos\theta - \sin(2t)\sin\theta\right] + 8V_m\left[\sin(2t)\cos\theta + \cos(2t)\sin\theta\right]$$
$$= 16\left[\sin(2t)\cos 30^o + \sin 30^o \cos(2t)\right]$$

$$(3V_m\cos\theta + 8V_m\sin\theta)\cos(2t) + (-3V_m\sin\theta + 8V_m\cos\theta)\sin(2t) = \frac{16\sqrt{3}}{2}\sin(2t) + 16\times\frac{1}{2}\cos(2t)$$

$$\begin{cases} 3V_m\cos\theta + 8V_m\sin\theta = 8 \\ 8V_m\cos\theta - 3V_m\sin\theta = 8\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_m \approx 1.873 \\ \theta \approx 9.45^o \end{cases}$$

بنابراین :

$$v_P(t) = 1.873\cos(t+9.45^o)$$

در نتیجه :

$$v_C(t) = v_h + v_P$$
$$v_C(t) = K_1 e^{-0.3t} + K_2 e^{-3.73t} + 1.873\cos(t+9.45^o)$$

حال با توجه به شرایط اولیه $v_C(0)=0$ و $i_L(0)=0$ مقدار $\frac{dv_C}{dt}(0^+)$ محاسبه می کنیم :

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C}$$
$$i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+) + i_S(0)$$
$$i_R(0^+) = \frac{v_R(0^+)}{R} = \frac{v_C(0)}{R} = 0$$
$$i_S(0) = 2\cos(30^o) = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

در نتیجه :

$$i_C(0^+)=\sqrt{3} \qquad و \qquad \frac{dv_C}{dt}(0^+)=\frac{i_C(0^+)}{C}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{4}}=4\sqrt{3}\,\frac{V}{Sec}$$

$$\begin{cases} v_C(0)=0=K_1+K_2+1.873\cos(9.45^o) \\ \dfrac{dv_C}{dt}(0^+)=4\sqrt{3}=-0.3K_1-3.73K_2-1.873\sin(9.45^o) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1+K_2=-1.847 \\ -0.3K_1-3.73K_2=4\sqrt{3}-0.307=6.613 \end{cases}$$

$$K_1=\frac{-0.276}{3.43}\approx -0.08 \qquad و \qquad K_2=1.76$$

بنابراین :

$$v_C(t)=-0.08e^{-0.3t}+1.76e^{-3.73t}+1.873\cos(2t+9.45^o)$$

• ۵-۳- پاسخ کامل مدارهای RLC موازی

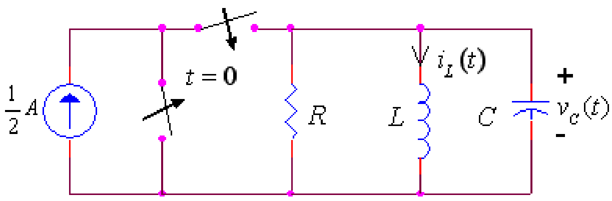
همانطور که در تحلیل مدارهای مرتبه اول بیان شد , پاسخ کامل را به دو روش می توان بدست آورد .

روش ۱- پاسخ کامل = پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر $\qquad x(t)=x_i(t)+x_0(t)$

روش ۲- پاسخ کامل = پاسخ همگن + پاسخ دائم $\qquad x(t)=x_h+x_0$

بنابراین برای بررسی پاسخ کامل مدارهای RLC موازی به حل مثال زیر می پردازیم .

• **مثال (۵-۳) :** در صورتیکه در مدار RLC موازی شکل (۵-۱۳) $v_C(0)=1V$ و $i_L(0)=1A$ و $R=1\Omega$ و $L=1H$ و $C=1F$ باشد و منبع جریان $I_S=\frac{1}{2}A$ جریان $i_L(t)$ را برای زمان های $t\geq 0$ بدست آورید .



شکل(۵-۱۳)

• **پاسخ :** پاسخ $i_L(t)$ این مدار پاسخ کامل است و برای تعیین پاسخ کامل همانگونه که بیان شد از دو روش می توان استفاده کرد که برای آشنایی بیشتر با روش ها و همچنین نتایج آن این مثال را با هر دو روش تحلیل می کنیم .

روش (۱) – جمع پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر $\quad i_L(t)=i_i(t)+i_0(t)$

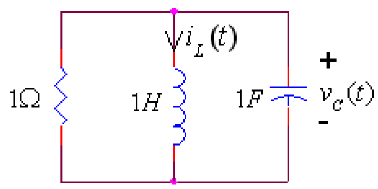
الف : پاسخ ورودی صفر $i_L(t)$ را بدست می آوریم . برای تعیین پاسخ α و ω_0 را محاسبه می نماییم .

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2\times1\times1} = \frac{1}{2}\,{Ne}/{\sec}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1\times1}} = 1\,{rad}/{\sec}$$

در نتیجه $\omega_0 > \alpha$ و نوع پاسخ میرائی ضعیف (میرائی نوسانی) است . بنابر این اگر آن را به فرم $i_i(t) = K_1 e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \phi_1)$ تعریف کنیم , می توان چنین نوشت :

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{(1)^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,{rad}/{\sec}$$

برای تعیین K_1 و ϕ_1 و با توجه به شرایط اولیه ابتدا از مدار شکل (۵-۱٤) $\frac{di_L}{dt}(0^+)$ را محاسبه می کنیم .



شکل(۵-۱٤)

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{v_L(t)}{L}$$

و طبق KVL داریم $v_L(t) = v_C(t)$ بنابر این

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{v_C(0)}{L}$$

در نتیجه :

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{1}{1} = 1\,{A}/{\sec}$$

حال K_1 و ϕ_1 را از دستگاه زیر محاسبه می کنیم .

$$\begin{cases} i_L(0) = K_1\cos\phi_1 = 1A \\ \frac{di_L}{dt}(0^+) = -\frac{1}{2}K_1\cos\phi_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}K_1\sin\phi_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1\cos\phi_1 = 1 \\ K_1\sin\phi_1 = -(\dfrac{1+\frac{1}{2}K_1\cos\phi_1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1\cos\phi_1 = 1 \\ K_1\sin\phi_1 = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow tg\phi_1 = \frac{K_1\sin\phi_1}{K_1\cos\phi_1} = \frac{-\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \phi_1 = (-\frac{\pi}{3})rad$$

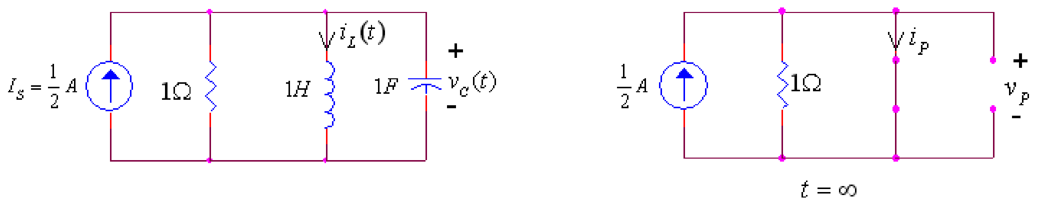
$$K_1\cos\phi_1 = 1 \Rightarrow K_1\cos(-\frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow K_1 = 2$$

برای زمان های $t \ge 0$

$$i_i(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3})$$

ب: حال پاسخ حالت صفر را از شکل (۵- ۱۵-الف) با استفاده از $i_0(t) = i_h + i_P$ حساب می کنیم .
مسلماً نوع پاسخ همگن در این قسمت مشابه پاسخ ورودی صفر است . زیرا مقادیر فرکانس های α و ω_0 همان مقادیر مرحله الف می باشد . بنابراین نوع پاسخ همگن نیز میرائی ضعیف است $\alpha = \frac{1}{2}Ne/_{\sec}$ و $\omega_d = \frac{\sqrt{3}}{2} rad/_{\sec}$, و پاسخ دائم در پاسخ حالت صفر را می توان از مدار معادل با سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز شکل (۵-۱۵-ب) بدست آورد , که برابر است با :

$$i_P = \frac{1}{2}A$$



(الف) شکل(۵-۱۵) (ب)

در نتیجه :

$$i_0(t) = K_2 e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \phi_2) + \frac{1}{2}$$

و با توجه به شرایط اولیه $v_C(0) = 0$ و $i_L(0) = 0$ مقادیر K_2 و ϕ_2 را محاسبه می کنیم .

برای محاسبه ابتدا

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L}$$

را تعیین می نماییم .

با توجه به KVL داریم $v_L(t) = v_C(t)$ بنابر این :

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{v_C(0)}{L} = 0$$

در نتیجه از دستگاه معادلات زیر K_2 و ϕ_2 را محاسبه می کنیم .

$$\begin{cases} i_L(0) = 0 = K_2\cos\phi_2 + \frac{1}{2} \\ \frac{di_L}{dt}(0^+) = 0 = -\frac{1}{2}K_2\cos\phi_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}K_2\sin\phi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2\cos\phi_2 = -\frac{1}{2} \\ K_2\sin\phi_2 = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$tg\phi_2 = \frac{K_2\sin\phi_2}{K_2\cos\phi_2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\phi_2 = (-\frac{\pi}{6}) = -30^\circ \quad \text{و} \quad K_2 = \frac{-\frac{1}{2}}{\cos(-\frac{\pi}{6})} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

با جایگذاری K_2 و ϕ_2 پاسخ حالت صفر نیز بدست می آید .

$$i_0(t) = -\frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6})$$

و با جمع $i_i(t)$ و $i_0(t)$ پاسخ کامل را بدست می آوریم .

$$i_L(t) = i_i(t) + i_0(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} \qquad t \ge 0$$

$$i_L(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$$

$$i_L(t) = e^{-\frac{1}{2}t} [2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6})] + \frac{1}{2}$$

$$i_L(t) = e^{-\frac{1}{2}t} [2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \cos\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \sin\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \cos\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \sin\frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$$

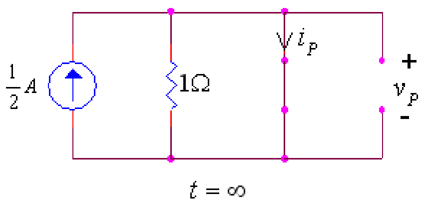
$$i_L(t) = e^{-\frac{1}{2}t} [\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t] + \frac{1}{2}$$

$$i_L(t) = e^{-\frac{1}{2}t} [\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{5\sqrt{3}}{6}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t] + \frac{1}{2}$$

$$i_L(t) = 1.53 e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t - 71^\circ) + \frac{1}{2}$$

روش (۲) – جمع پاسخ همگن و پاسخ دائم $i_L(t) = i_i(t) + i_0(t)$

ابتدا با توجه به مدار معادل شکل (۵-۱۶) پاسخ دائم مدار را که مشابه ورودی است تعیین می کنیم .



شکل(۵-۱۶)

$$i_P = \frac{1}{2}A$$

و نوع پاسخ همگن را با توجه به مقادیر فرکانس های α و ω_0 مشخص می کنیم .

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2\times1\times1} = \frac{1}{2} Ne/\sec \quad \text{و} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1\, rad/\sec$$

$$\text{و} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{(1)^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} rad/\sec$$

بنابر این پاسخ همگن عبارت است از :

$$i_h = Ke^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\phi)$$

و پاسخ کامل برابر می شود با :

$$i_L(t) = Ke^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\phi)+\frac{1}{2}$$

و با توجه به شرایط اولیه مدار و محاسبه $\frac{di_L}{dt}(0^+)=\frac{v_C(0)}{L}=1$ و با استفاده از دستگاه زیر مقادیر ثابت K و ϕ را حساب می کنیم .

$$\begin{cases} i_L(0)=K\cos\phi+\frac{1}{2}=1 \\ \frac{di_L}{dt}(0^+)=-\frac{1}{2}K\cos\phi-\frac{\sqrt{3}}{2}K\sin\phi=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K\cos\phi=\frac{1}{2} \\ K\sin\phi=-(\frac{1+\frac{1}{2}+K\cos\phi}{\frac{\sqrt{3}}{2}})=\frac{5\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

$$tg\phi_1=\frac{K\sin\phi}{K\cos\phi}=\frac{-\frac{5\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{-5\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\phi=-71^\circ$$

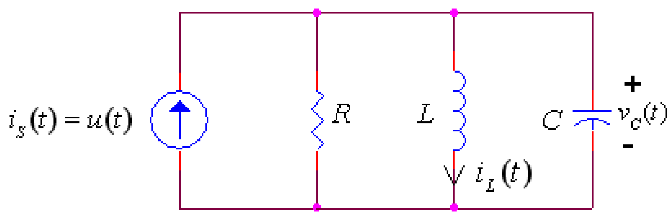
و برای محاسبه K از رابطه $K\cos\phi=\frac{1}{2}$ استفاده نموده و به جای ϕ مقدار قرار می دهیم .

$$K\cos(-71^\circ)=\frac{1}{2}\Rightarrow K=1.53$$

$$i_L(t)=1.53e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t-71^\circ)+\frac{1}{2}$$

• ٥-٤- پاسخ مدارهای RLC موازی به ورودی u(t)

اگر منبع جریان $i_S(t)=u(t)$ به یک مدار RLC موازی مطابق شکل (٥-١٧) اعمال گردد , از آنجا که پاسخ مدار به ازاءِ ورودی $u(t)$ پاسخ حالت صفر می باشد .



شکل(٥-١٧)

مانند روش تعیین پاسخ حالت صفر مدارهای RLC موازی باید عمل نمود , بدین مفهوم که پاسخ حالت صفر مجموع پاسخ ممکن و پاسخ دائم است .

پاسخ همگن بستگی به فرکانس های α و ω_0 دارد , در نتیجه یکی از حالت میرائی شدید , میرائی بحرانی و میرائی ضعیف می باشد .

پاسخ دائم به ازاء ورودی $u(t)$ در صورتیکه ولتاژ خازن به عنوان پاسخ در نظر گرفته شود برابر صفر است و هر گاه جریان سلف به عنوان پاسخ انتخاب شود پاسخ دائم برابر واحد می باشد .

نتیجتاً پاسخ مدار های RLC موازی به ورودی $u(t)$ را می توان به صورت زیر بیان نمود .

$$x(t) = [x_h + (0 or 1)]u(t) = s(t)$$

و برای تعیین ضرایب پاسخ همگن از شرایط اولیه $v_C(0) = 0$ و $i_L(0) = 0$ استفاده می شود .

• ۵-۵- پاسخ ضربه مدارهای RLC موازی

برای تعیین پاسخ ضربه مدارهای RLC موازی در این قسمت دو روش را مطرح می نماییم .

روش (۱) - برای تعیین پاسخ ضربه $h(t)$ یک مدار RLC موازی به جای منبع $\delta(t)$ منبع $u(t)$ را قرار داده و پاسخ به پله واحد $s(t)$ را بدست می آوریم .

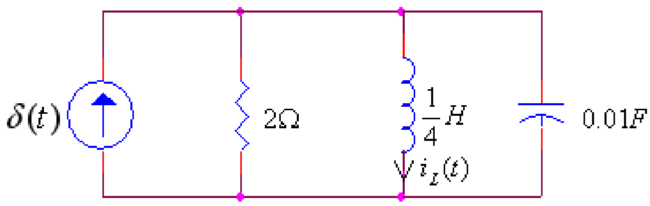
و سپس با استفاده از رابطه بین $h(t) = \dfrac{ds(t)}{dt}$, $h(t)$ را بدست می آوریم .

روش (۲) – در این روش برای تعیین پاسخ $h(t)$ یک مدار RLC موازی ابتدا اثر منبع ضربه را بر روی سلف و خازن بدست آورده , ولتاژ خازن و جریان سلف را در زمان $t = 0^+$ محاسبه می کنیم و سپس با توجه به تعریف تابع ضربه

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{ویژه} & t = 0 \end{cases}$$

چون بر زمان های $t \geq 0^+$ منبع ضربه بی اثر می گردد . با توجه به شرایط اولیه $v_C(0^+)$ و $i_L(0^+)$ مدار ورودی صفر را تحلیل نموده و پاسخ را بدست می آوریم . این پاسخ نیز پاسخ ضربه مدار می باشد .

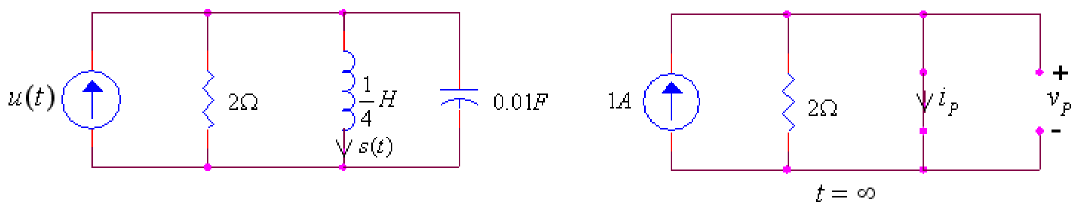
• **مثال(۵-٤):** در مدار RLC موازی شکل (۵-۱۸) در صورتیکه $R = 2\Omega$, $C = 0.01F$, $L = \dfrac{1}{4}H$ ورودی مدار تابع ضربه $\delta(t)$ باشد $h(t) = i_L(t)$ را بدست آورید .



شکل (۵-۱۸)

• **پاسخ :**

روش (۱)- الف : منبع جریان $\delta(t)$ را برداشته و به جای آن منبع جریان $u(t)$ را مطابق شکل (۵-۱۹-الف) به مدار اعمال نموده و پاسخ پله واحد $s(t) = i_L(t)$ را محاسبه می کنیم .
این پاسخ برابر است با : $s(t) = i_L(t) = i_h + i_P$



(الف) شکل(۵-۱۹) (ب)

محاسبه پاسخ دائم :
پاسخ دائم این مدار را می توان از مدار معادل شکل (۵-۱۹-ب) در زمان $t=\infty$ محاسبه کرد , زیرا سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز می باشد .

$$i_P = 1A$$

تعیین پاسخ همگن :
برای تعیین پاسخ همگن فرکانس های α و ω_0 را محاسبه می کنیم .

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2\times 2\times 0.01} = 25\,{}^{Ne}\!/\!_{\sec} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\times 0.01}} = 20\,{}^{rad}\!/\!_{\sec}$$

با توجه به اینکه $\alpha > \omega_0$ است , فرکانس های طبیعی پاسخ برابرند با :

$$S = -25 \pm \sqrt{625-400} \Rightarrow S = -25 \pm 15 \Rightarrow \begin{cases} S_1 = -10 \\ S_2 = -40 \end{cases}$$

بنابراین نوع پاسخ همگن میرائی شدید می باشد و برابر است با : $i_h(t) = K_1 e^{-10t} + K_2 e^{-40t}$

در نتیجه پاسخ پله واحد برابر است با :

$$s(t) = i_L(t) = (K_1 e^{-10t} + K_2 e^{-40t} + 1)u(t)$$

حال برای تعیین ضرایب K_1 و K_2 با توجه به شرایط اولیه $v_C(0)=0$ و $i_L(0)=0$ مقدار $\frac{di_L}{dt}(0^+)$ را محاسبه می کنیم .

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{v_C(0)}{L} = 0$$

زیرا $v_C(0) = v_L(0^+)$ می باشد .

با استفاده از $i_L(0)=0$ و $\frac{di_L}{dt}(0^+)=0$ حاصل از قسمت قبل دستگاه زیر را تشکیل داده و K_1 و K_2 محاسبه می شوند .

$$\begin{cases} i_L(0) = 0 = K_1 + K_2 + 1 \\ \dfrac{di_L}{dt}(0^+) = 0 = -10K_1 - 40K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = -\dfrac{4}{3} \\ K_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

بنابر این :

$$s(t) = (-\frac{4}{3}e^{-10t} + \frac{1}{3}e^{-40t} + 1)u(t)$$

ب : برای تعیین $h(t)$ از رابطه $s(t)$ مشتق می گیریم .

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = [-\frac{4}{3}(-10)e^{-10t} + \frac{1}{3}(-40)e^{-40t})u(t) + (-\frac{4}{3}e^{-10t} + \frac{1}{3}e^{-40t} + 1)\delta(t)$$

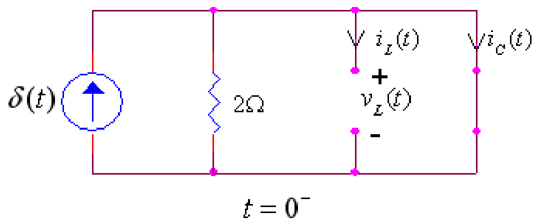
و با استفاده از رابطه $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ نتیجه می شود .

$$h(t) = (\frac{40}{3}e^{-10t} - \frac{40}{3}e^{-40t})u(t) + (-\frac{4}{3} + \frac{1}{3} + 1)\delta(t)$$

$$h(t) = \frac{40}{3}(e^{-10t} - e^{-40t})u(t)$$

روش(۲) – ا لف :با توجه به شرایط اولیه $v_C(0^-) = 0$ و $i_L(0^-) = 0$ اثر منبع جریان ضربه بر روی خازن و سلف مدار را بدست آورده و $v_C(0^+)$ و $i_L(0^+)$ را محاسبه می کنیم .

مدار معادل شکل (۵-۲۰) وضعیت مدار را در لحظه $t = 0^-$ نشان می دهد .



شکل(۵-۲۰)

$i_C(t) = \delta(t)$ و $v_L(t) = 0$ می باشد .

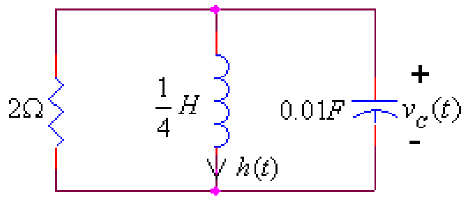
بنابر این :

$$v_C(0^+) = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i_C(t)dt = \frac{1}{0.01}\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt$$

$$v_C(0^+) = 100V$$

$$i_L(0^+) = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} v_L(t)dt = \frac{1}{\frac{1}{4}}\int_{0^-}^{0^+} (0)dt = 0 \Rightarrow i_L(0^+) = 0$$

ب: از آنجا که شرایط اولیه در $t = 0^+$ در قسمت (الف) مشخص شده اند و منبع ضربه در $t = 0^+$ بی اثر می گردد . حال در مدار شکل (۵-۲۱) شرایط اولیه $v_C(0^+) = 100V$ و $i_L(0^+) = 0$ برای زمان های $t > 0$ پاسخ را که پاسخ ورودی صفر می باشد محاسبه می کنیم .



شکل(۵-۲۱)

برای تعیین نوع پاسخ فرکانس های α و ω_0 را محاسبه می کنیم .

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2\times 2\times 0.01} = 25\,{}^{Ne}\!/_{\sec} \text{ و } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\times 0.01}} = 20\,{}^{rad}\!/_{\sec}$$

$$S = -25 \pm \sqrt{(25)^2 - (20)^2} \Rightarrow S = -25 \pm 15 \Rightarrow \begin{cases} S_1 = -10 \\ S_2 = -40 \end{cases}$$

بنابر این پاسخ عبارت است از :

$$i_L(t) = h(t) = (K_1 e^{-10t} + K_2 e^{-40t})u(t)$$

برای تعیین K_1 و K_2 با استفاده از شرایط اولیه مقدار $\frac{di_L}{dt}(0^+)$ را حساب می کنیم .

$$\begin{cases} v_C(0^+) = v_L(0^+) \\ \frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{v_C(0^+)}{L} \end{cases}$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{100}{\frac{1}{4}} = 400\,{}^{A}\!/_{\sec}$$

و با استفاده از دستگاه زیر K_1 و K_2 را حساب می کنیم .

$$\begin{cases} i_L(0^+) = 0 = K_1 + K_2 \\ \frac{di_L}{dt}(0^+) = 400 = -10K_1 - 40K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2 = -K_1 \\ 40 = -K_1 - 4K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{40}{3} \\ K_2 = -\frac{40}{3} \end{cases}$$

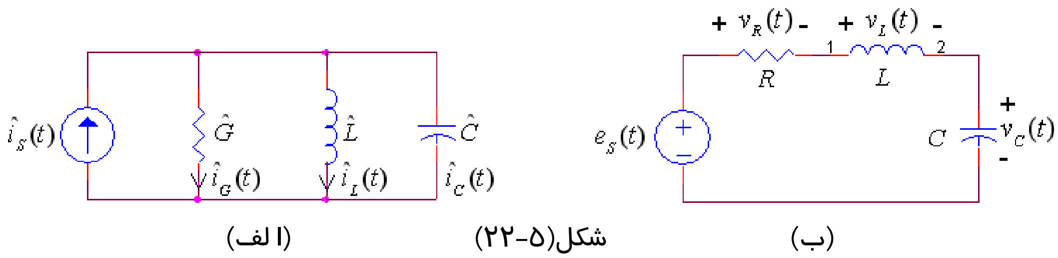
نتیجتاً پاسخ ضربه برابر است با :

$$h(t) = (\frac{40}{3}e^{-10t} - \frac{40}{3}e^{-40t})u(t)$$

$$h(t) = \frac{40}{3}(e^{-10t} - e^{-40t})u(t)$$

• ۵-۶- دوگانی و پاسخ مدارهای RLC سری

ابتدا برای بررسی دوگانی دو مدار RLC موازی شکل (۵ -۲۲-الف) و مدار RLC سری شکل (۵-۲۲- ب) را مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهیم .



شکل(۵-۲۲)

در مدار سری طبق قوانین جریان و ولتاژ می توان نوشت :

$$KVL \Rightarrow v_R(t)+v_L(t)+v_C(t)=e_S(t)$$
$$KCL \Rightarrow i_R(t)=i_L(t)=i_C(t)$$

در صورتیکه ولتاژ خازن $v_C(t)$ پاسخ مدار فرض شود , با توجه به روابط ولتاژ و جریان سلف و خازن و قانون اهم در معادله KVL بر حسب $v_C(t)$ مقدار قرار می دهیم .

$$\begin{cases} i_C(t)=C\dfrac{dv_C}{dt}, v_C(t)=\dfrac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt+v_C(0) \\ v_L(t)=L\dfrac{di_L}{dt}, i_L(t)=\dfrac{1}{L}\int_0^t v_L(t)dt+i_L(0) \\ v_R(t)=Ri_R(t) \end{cases}$$

$$KVL \Rightarrow Ri_R(t)+L\frac{di_L}{dt}+v_C(t)=e_S(t)$$
$$=i_R(t)=i_C(t)=C\frac{dv_C}{dt}, i_L(t)=i_C(t)$$

نتیجه می شود :

$$KVL \Rightarrow RC\frac{dv_C}{dt}+L\frac{d}{dt}(C\frac{dv_C}{dt})+v_C(t)=e_S(t)$$
$$\Rightarrow RC\frac{dv_C}{dt}+LC\frac{d^2v_C}{dt^2}+v_C(t)=e_S(t)$$

که با مرتب کردن معادله دیفرانسیل فوق چنین معادله ای بدست می آوریم .

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{LC}v_C(t)=\frac{1}{LC}e_S(t)$$

بنابر این اگر معادله دیفرانسیل حاصل را با توجه به شرایط اولیه تحلیل نماییم پاسخ $v_C(t)$ بدست می آید .

از طرف دیگر در مدار شکل (۵-۲۲- الف) اگر جریان سلف $i_L(t)$ به عنوان پاسخ در نظر گرفته شود معادله دیفرانسیل حاصل عبارت است از :

$$\frac{d^2\hat{i}_L}{dt^2}+\frac{\hat{G}}{\hat{C}}\frac{d\hat{i}_L}{dt}+\frac{1}{\hat{L}\hat{C}}\hat{i}_L=\frac{1}{\hat{L}\hat{C}}\hat{i}_S$$

که با توجه به شرایط اولیه $\hat{i}_L(0)$ و $\hat{v}_C(0)$ همچنین تعیین $\alpha = \frac{G}{2C}$ و $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ پاسخ مدار RLC موازی بدست می آید که در مجموع شامل دو قسمت می باشد .

$\hat{i}_L(t) = i_h + i_P$

همانطور که قبلاً بیان شد نوع پاسخ همگن (i_h) بستگی به فرکانس های α و ω_0 دارد .

حال اگر معادله دیفرانسیل مدار سری : $\frac{d^2 v_C}{dt} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC}v_C(t) = \frac{1}{LC}e_S(t)$

را با معادله دیفرانسیل مدار موازی مقایسه نماییم این دو معادله با شرایط

$$\begin{cases} R = \hat{G} \\ L = \hat{C} \\ C = \hat{L} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_C(0) = \hat{i}_L(0) \\ i_L(0) = \hat{v}_C(0) \end{cases}$$

و شکل موج های یکسان $i_S(t)$ و $e_S(t)$, دارای جواب یکسان می باشند . یعنی $v_C(t) = \hat{i}_L(t)$ و همانطور که در مبحث دوم فصل سوم بیان شد دو مدار را دوگان هم گویند .

بنابر این بر اساس دوگانی کلیه مواردی را که در تحلیل مدار های RLC موازی بیان شد در مورد مدارهای RLC سری صادق می باشد . بطوریکه :

الف : $\alpha = \frac{G}{2C}$ در مدار موازی و دوگان آن $\alpha = \frac{R}{2L}$ در مدار سری است .

ب: در مدارهای سری و موازی دوگان $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ می باشد .

در نتیجه پاسخ همگن با ورودی صفر مدارهای RLC سری نیز مانند پاسخ همگن با ورودی صفر مدارهای RLC موازی مطابق چهار حالت زیر است .

۱- پاسخ میرائی شدید $x_h = K_1 e^{S_1 t} + K_2 e^{S_2 t}$

۲- پاسخ میرائی بحرانی $x_h = (K_1 t + K_2)e^{-\alpha t}$

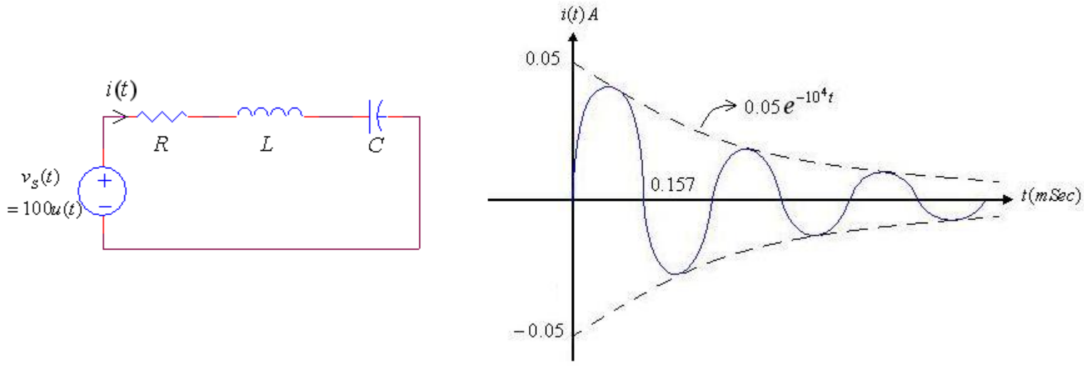
۳- پاسخ میرائی ضعیف $x_h = Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \phi)$

٤- پاسخ بی اتلاف $x(t) = K\cos(\omega_0 t + \phi)$

و پاسخ دائم مدار مشابه ورودی مدار می باشد .

بنابر این در مجموع پاسخ مدارهای RLC سری نیز یا پاسخ ورودی صفر , یا پاسخ حالت صفر و یا پاسخ کامل می باشد .

- **مثال(۵-۵):** در مدار RLC سری شکل (۵-۲۳-الف) به ازاءِ $v_S(t) = 100u(t)$ منحنی جریان $i(t)$ مطابق شکل (۵-۲۳- ب) است . مقادیر اجزاءِ R و L و C مدار را معین نمایید .



(الف)　　　شکل(٥-٢٣)　　　(ب)

• **پاسخ :**

$$i(t)=i_h+i_P$$

با توجه به منحنی پاسخ $i(t)$ مشاهده می شود که نوع پاسخ همگن مدار RLC سری پاسخ میرائی ضعیف است و پاسخ دائم آن صفر است . نتیجتاً $\alpha<\omega_0$ است و فرم معادله عبارت است از :

$$i(t)=Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t+\phi)$$

حال با توجه به منحنی پاسخ (ϕ,ω_d,α,K) را معین می کنیم :

١- از مقایسه فرمول پوش منحنی نتیجه می شود که $K=0.05A$ و $\alpha=10^4(\sec)^{-1}$

٢- اگر دوره تناوب موج پاسخ را در نظر بگیریم , می توانیم ω_0,ω_d را نیز بدست آوریم .

$$T=0.157\times2\times10^{-3}\Rightarrow T=0.314\times10^{-3}\sec$$

$$\omega_d=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\times3.14}{0.314\times10^{-3}}=2\times10^4\,\frac{rad}{Sec}$$

$$\omega_0^2=\omega_d^2+\alpha^2\Rightarrow\omega_0^2=(2\times10^4)^2+(10^4)^2=5\times10^8\Rightarrow\omega_0=\sqrt{5}\times10^4\,rad/\sec$$

٣- برای تعیین ϕ مقدار جریان را که در زمان $t=0$ مشخص و برابر صفر است در معادله پاسخ قرار داده و آن را محاسبه می کنیم .

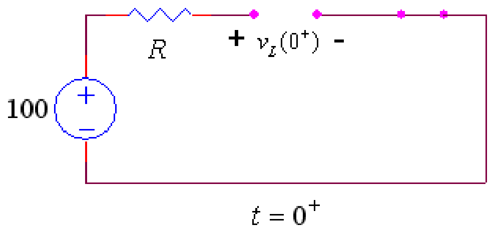
$$i(t)=0.05e^{-10^4 t}\cos(2\times10^4 t+\phi)\Rightarrow i(0)=0=0.05e^{-10^{4}*0}\cos(\phi)\Rightarrow\cos\phi=0\Rightarrow\phi=\pm90^\circ$$

که با توجه به شکل پاسخ $\phi=-90^\circ$ است و نتیجتاً

$$i(t)=0.05e^{-10^4 t}\cos(2\times10^4 t-90^\circ)\Rightarrow i(t)=0.05e^{-10^4 t}\sin(2\times10^4 t)$$

٤- همانگونه که در تحلیل مدارهای RLC مشاهده شد برای تعیین ضریب K و زاویه ϕ از مقدار پاسخ و مشتق مرتبه اول آن در $t=0^+$ استفاده می گردد .

در این مرحله $\frac{di_L}{dt}(0^+)$ را با توجه به شرایط اولیه و مدار معادل شکل (٥-٢٤) بدست می آوریم ,



شکل(۵-۲٤)

بنابر این با شرایط اولیه صفر , سلف مدار باز است و می توان نوشت :

$$\begin{cases} i_L(0)=0 \\ v_C(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{di_L}{dt}(0^+)=\frac{v_L(0^+)}{L}=\frac{100}{L}$$

یا با توجه به KVL و KCL در لحظه $t=0^+$:

$$v_R(0^+)+v_L(0^+)+v_C(0)=e_S(0)$$
$$i_R(0^+)=i_L(0^+)=i_C(0^+)=0$$
$$\Rightarrow \frac{di_L}{dt}(0^+)=\frac{v_L(0^+)}{L}$$
$$v_L(0^+)=-v_R(0^+)-v_C(0)+e_S(0)=-Ri_R(0^+)-v_C(0)+e_S(0)$$

در نتیجه :

$$v_L(0^+)=e_S(0)=100V$$
$$\frac{di_L}{dt}(0^+)=\frac{100}{L}\,{}^{A}\!/_{\sec}$$
$$\frac{di_L}{dt}(0^+)=\frac{100}{L}=\frac{d}{dt}(0.05e^{-10^4 t}\sin 2\times 10^4 tu(t))$$
$$\frac{100}{L}=0.05\times(-10^4)\sin(0)+0.05\times 2\times 10^4\cos(0)$$
$$\frac{100}{L}=1000\Rightarrow L=0.1H$$

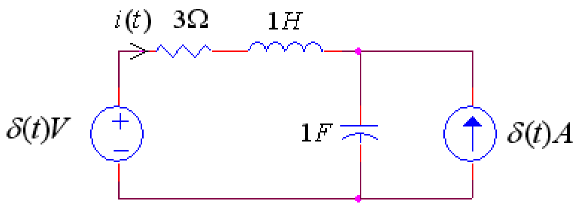
۵- حال با توجه به $\alpha=\frac{R}{2L}$ مقدار R را بدست می آوریم .

$$10^4=\frac{R}{2\times 0.1}\Rightarrow R=2\times 0.1\times 10^4\Rightarrow R=2000\Omega$$

و با استفاده از رابطه $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ مقدار ظرفیت خازن را حساب می کنیم .

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC}\Rightarrow C=\frac{1}{L\omega_0^2}=\frac{1}{0.1\times 5\times 10^8}\Rightarrow C=20\times 10^{-9}F, C=20nF$$

• **مثال (۵-۶):** در مدار شکل (۵-۲۵) $h(t)=i(t)$ را برای $t>0$ بدست آورید .

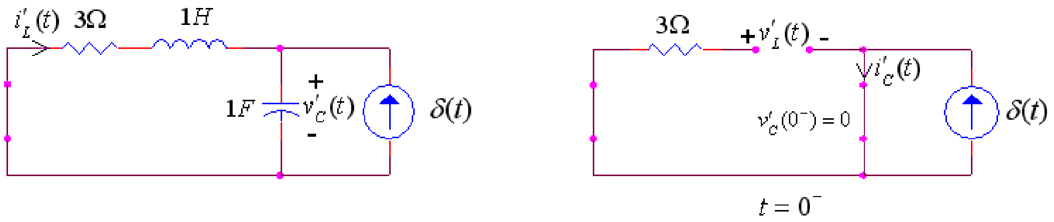


شکل(۵-۲۵)

• **پاسخ :** برای تحلیل این مدار ابتدا اثر منابع ضربه را بر روی سلف و خازن بدست می آوریم و شرایط اولیه را برای $t = 0^+$ معین نموده و سپس برای زمان های $t \geq 0^+$ با توجه به بی اثر شدن منابع ضربه پاسخ ورودی صفر مدارRLC سری را تعیین می نماییم .

برای تعیین شرایط اولیه مناسب است که از جمع اثر استفاده نموده و $i_L(0^+)$ و $v_C(0^+)$ را محاسبه کرد :

الف : اثر منبع جریان ضربه $\delta(t)$ مطابق شکل های (۵-۲۶- الف و ب) و با توجه به شرایط اولیه $v'_C(0^-) = 0$ و $i'_L(0^-) = 0$ مدار معادل ولتاژ خازن $v'_C(0^+)$ و $i'_L(0^+)$ را محاسبه می کنیم .



(الف) شکل(۵-۲۶) (ب)

اگر به مدار شکل (۵-۲۵-ب) توجه شود جریان ضربه از خازن عبور نموده $i_C(t) = \delta(t)$ و در نتیجه با توجه به رابطه $v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i_C(t)dt + v_C(0)$ ولتاژ خازن را در $t = 0^+$ حساب می کنیم .

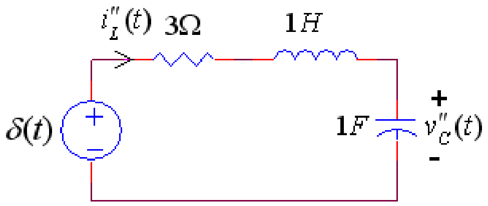
$$v'_C(0^+) = \frac{1}{1}\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt \Rightarrow v'_C(0^+) = 1V$$

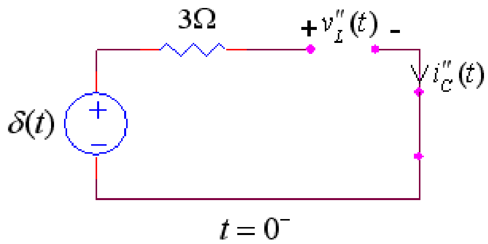
از طرف دیگر $v'_L(t) = 0$ و با استفاده از رابطه $i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{0^+}^{t} v_L(t)dt + i_L(0)$ جریان $i_L(0^+)$ را حساب می کنیم .

$$i'_L(0^+) = \frac{1}{1}\int_{0^-}^{0^+} (0)dt \Rightarrow i'_L(0^+) = i'_L(0^-) = 0$$

ب: اثر منبع ولتاژ ضربه $\delta(t)$

منبع جریان ضربه را بی اثر نموده و مدار شکل (۵-۲۷-ا لف) بدست می آید و مدار معادل در $t = 0^+$ مطابق شکل (۵-۲۷-ب) می باشد .





(الف)　　　　　　شکل(۵-۲۷)　　　　　　(ب)

از آنجاکه $i''_L(0^-)=0$ و $v''_C(0^-)=0$ مقادیر $i''_L(0^+)$ و $v''_C(0^+)$ را با استفاده از روابط ولتاژ جریان سلف و خازن محاسبه می نماییم .

از مدار شکل (۵-۲۷-ب) نتیجه می شود که ولتاژ دو سر سلف برابر تابع ضربه است $v''_L(t)=\delta(t)$ و جریان خازن $i''_C(t)=0$ می باشد .

$$i''_L(0^+)=\frac{1}{1}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt \Rightarrow i''_L(0^+)=1A$$

$$v''_C(0^+)=\frac{1}{1}\int_{0^-}^{0^+}(0)dt \Rightarrow v''_C(0^-)=v''_C(0^+)=0$$

ج: با توجه به شرایط اولیه مدار در دو حالت (الف و ب) به دو روش مسئله قابل حل می باشد .

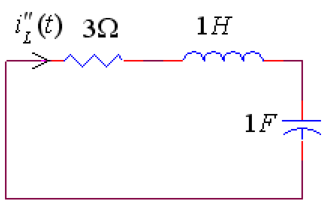
روش ۱- پاسخ های $i'_L(t)$ و $i''_L(t)$ را به ازاءِ شرایط اولیه مرحله (الف) و مرحله (ب) محاسبه و پاسخ ها را با هم جمع کنیم .

روش ۲ – شرایط اولیه $i_L(0^+)$ و $v_C(0^+)$ را با توجه به شرایط اولیه مرحله (الف) محاسبه و سپس مدار ورودی صفر با شرایط اولیه را تحلیل نماییم و پاسخ را محاسبه کنیم , که در این مثال مطابق روش اخیر (روش ۲) عمل می نماییم .

$$i_L(0^+)=i'_L(0^+)+i''_L(0^+)=0+1 \Rightarrow i_L(0^+)=1A$$

$$v_C(0^+)=v'_C(0^+)+v''_C(0^+)=1+0 \Rightarrow v_C(0^+)=1V$$

د: پاسخ ورودی صفر مدار RLC سری شکل (۵-۲۸) را با توجه به شرایط اولیه $v_C(0^+)=1V$ و $i_L(0^+)=1A$ بدست می آوریم . (منابع ضربه بی اثر شده اند)



شکل (۵-۲۸)

برای تعیین نوع پاسخ و تعیین فرکانس های طبیعی α و ω_0 را محاسبه می کنیم .

$$\alpha=\frac{R}{2L}=\frac{3}{2\times1}=\frac{3}{2}\,{}^{Ne}\!/_{\sec}$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{1\times1}}=1\,{}^{rad}\!/_{\sec}$$

نتیجتاً پاسخ میرائی شدید می باشد و فرکانس های طبیعی عبارتند از :

$$\begin{cases} S_1 = -\frac{3}{2} + \sqrt{(\frac{3}{2})^2 - 1} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -2.6 \\ S_2 = -\frac{3}{2} - \sqrt{(\frac{3}{2})^2 - 1} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -0.4 \end{cases}$$

و پاسخ ضربه مدار برابر است با :

$$i_L(t) = h(t) = [K_1 e^{-2.6t} + K_2 e^{-0.4t}]u(t)$$

برای تعیین K_1 و K_2 با توجه به شرایط اولیه $\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L}$ را محاسبه می کنیم .

در مدار RLC سری شکل (۵-۲۸)

طبق KVL داریم : $v_R(0^+) + v_L(0^+) + v_C(0^+) = 0$

و طبق KCL داریم : $i_R(0^+) = i_L(0^+) = i_C(0^+)$

و بر اساس قانون اهم : $i_R(0^+) \times R = v_R(0^+)$

است . بنابر این :

$$Ri_R(0^+) + v_L(0^+) + v_C(0^+) = 0$$

یا

$$Ri_L(0^+) + v_L(0^+) + v_C(0^+) = 0 \Rightarrow v_L(0^+) = -v_C(0^+) - Ri_L(0^+)$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L} \Rightarrow \frac{di_L}{dt}(0^+) = -\frac{v_C(0^+)}{L} - \frac{R}{L} i_L(0^+)$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = -\frac{1}{1} - \frac{3}{1} \times 1 = -4 \, {}^{A}\!/_{\sec}$$

حال از دستگاه معادلات زیر K_1 و K_2 را بدست می آوریم .

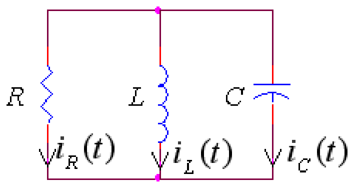
$$\begin{cases} i_L(0^+) = 1 = K_1 + K_2 \\ \frac{di_L}{dt}(0^+) = -4 = -2.6K_1 - 0.4K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{18}{11} \approx 1.63 \\ K_2 = -\frac{7}{11} \approx -0.63 \end{cases}$$

بنابر این $h(t)$ عبارت است از :

$$i(t) = h(t) = (1.63e^{-2.6t} - 0.63e^{-0.4t})u(t)$$

• ۵-۷-فضای حالت :

اگر یک مدار شامل اجزاءِ ذخیره کننده انرژی مانند سلف و خازن را در نظر بگیریم , با توجه به مکانیزم و روش هایی که در مورد تحلیل مدر ها بیان نمودیم می توان نتیجه گرفت که اگر ولتاژ خازن ها و جریان سلف ها در هر زمان مشخص t معلوم باشند حالت مدار (وضعیت مدار) مشخص است , زیرا با توجه به معلوم بودن این ولتاژها و جریان ها بقیه متغیر های مدار در زمان t قابل محاسبه اند . برای بررسی و چگونگی حالت مدار ها در این مبحث ابتدا یک مدار RLC موازی بدون ورودی مطابق شکل (۵-۲۹) را مجدداً مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهیم .



شکل(۵-۲۹)

در این مدار طبق قوانین ولتاژ و جریان می توان نوشت :

$$KCL \Rightarrow i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=0$$
$$KVL \Rightarrow v_R(t)=v_L(t)=v_C(t)$$

و همانطور که در مبحث (۵-۱) مشاهده شد اگر پاسخ مدار $v_C(t)$ یا $i_L(t)$ باشند می توان با استفاده از روابط ولتاژ جریان سلف و خازن معادله دیفرانسیل مرتبه دومی بر حسب متغیر پاسخ بدست آورد .

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{LC}v_C=0 \quad \text{و} \quad \frac{d^2i_L}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{LC}i_L=0$$

که با حل هر یک از معادلات دیفرانسیل و با توجه به شرایط اولیه $v_C(0)$ و $i_L(0)$ پاسخ $v_C(t)$ و یا $i_L(t)$ بدست می آیند .

اگر فرض نماییم فرکانس $\alpha=\frac{1}{2RC}$ بزرگتر از فرکانس $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ باشد , در این صورت می توان نتیجه گرفت فرکانس های طبیعی عبارتند از :

$$S_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \quad \text{و} \quad S_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

و

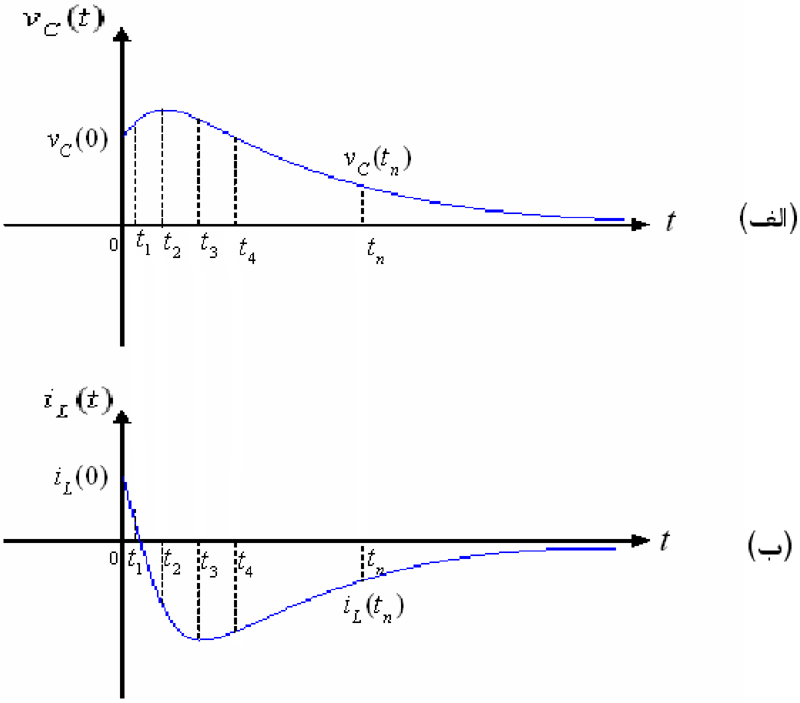
$$v_C(t)=(K_1e^{S_1t}+K_2e^{S_2t})u(t)$$
$$i_L(t)=(A_1e^{S_1t}+A_2e^{S_2t})u(t)$$

که ضرایب K_1,K_2 و A_1,A_2 نیز با توجه به شرایط اولیه $v_C(0)$ و $i_L(0)$ بدست می آیند و در نتیجه به ازاءِ هر زمان $t\geq 0$ مقدار $v_C(t)$ و $i_L(t)$ مشخص می شوند .

با مشخص شدن زوج $v_C(t)$ و $i_L(t)$ بقیه متغیر های مدار را می توان با توجه به این زوج و روابط KCL و KVL مدار تعیین نمود .

بنابر این زوج ($i_L(t)$ و $v_C(t)$) حالت مدار را در هر زمان t مشخص می نمایند .

اگر روابط $v_C(t)$ و $i_L(t)$ و را بر حسب زمان رسم نماییم , فرضاً منحنی های شکل (۵-۳۰-الف و ب) حاصل می شود .



شکل(۵-۳۰)

و به ازاءِ زمان های $0, t_1, t_2 ... t_n$ مقادیر زوج ($i_L(t)$ و $v_C(t)$) را از روی منحنی ها بدست می آوریم و در فضای دو بعدی دستگاه مختصات $(i_L - v_C)$ شکل (۵-۳۱-الف) آنها را مشخص می نماییم , نتایج زیر حاصل می شود :

الف : هر نقطه در این صفحه بیانگر یک بردار است که از مبداءِ مختصات شروع و به نقطه مورد نظر ختم می گردد . این بردار را **بردار حالت** گویند , مانند : $X(t_1) = \begin{bmatrix} v_C(t_1) \\ i_L(t_1) \end{bmatrix}$, $X(t_2) = \begin{bmatrix} v_C(t_2) \\ i_L(t_2) \end{bmatrix}$

و ...

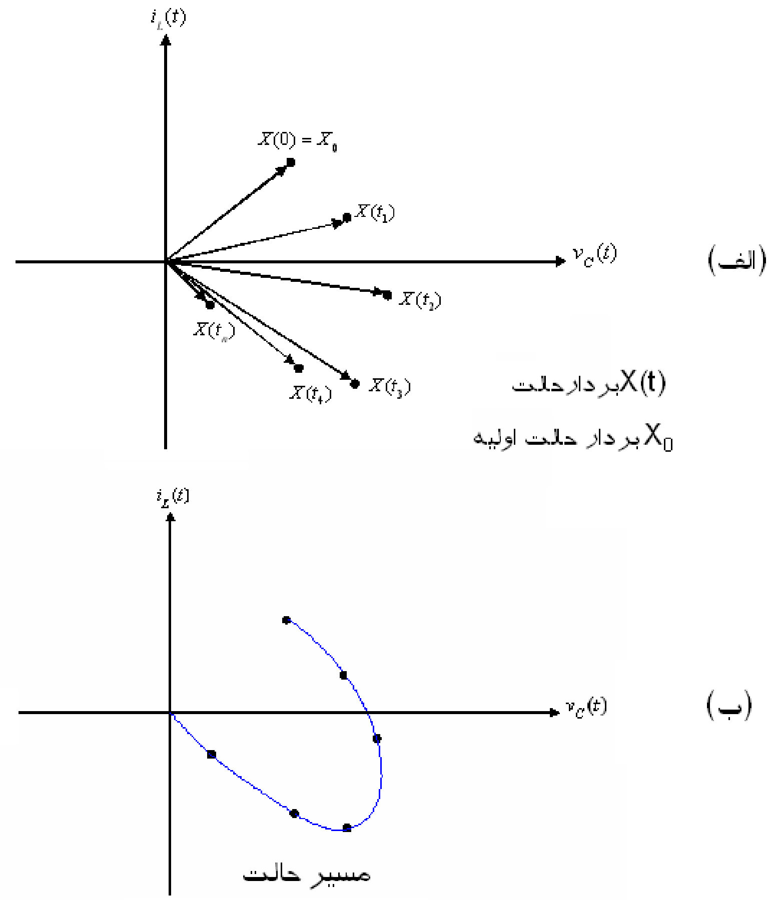
ب : در بردار حالت $X(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$, $v_C(t)$ و $i_L(t)$ که عامل ذخیره انرژی در خازن و سلف می باشد را **متغیرهای حالت** گویند .

ج : **فضای حالت** عبارت است از فضائی هندسی که ابعاد آن به تعداد متغیرهای حالت بستگی دارد , در این مثال فضای حالت فضائی دو بعدی است .

د : بردار $X(0) = \begin{bmatrix} v_C(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix}$ را **بردار حالت اولیه** یا **حالت اولیه** گویند و با X_0 نمایش داده می شود .

ه : بردار $\dfrac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{dv_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix}$ را بردارسرعت تغییر حالت گویند .

و : اگر انتهای بردارهای حالت را در صفحه مختصات به هم متصل نماییم , مطابق شکل (۵-۳۱-ب) , منحنی حاصل را **مسیر حالت** گویند . که هر نقطه از این مسیر بیان گر حالت مدار در یک زمان معین می باشد .



شکل (۵-۳۱)

• ۵-۷-۱- معادلات حالت :

حال با توجه به مفاهیم و تعاریف حاصل از تحلیل مدار RLC موازی و بردار حالت $X(t)=\begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$ مشاهده می شود که برای تحلیل مدار به جای تشکیل معادله درجه دوم می توان یک دستگاه معادله درجه اول بر حسب دو متغیر حالت تشکیل داد و با حل دستگاه , متغیر های حالت را بدست آورد .

از آنجا که در مورد سلف داریم $v_L(t)=L\dfrac{di_L}{dt}$ و در مورد خازن می توان نوشت $i_C(t)=C\dfrac{dv_C}{dt}$

یا به عبارت دیگر : $\dfrac{dv_C}{dt}=\dfrac{i_C(t)}{C},\dfrac{di_L}{dt}=\dfrac{v_L(t)}{L}$

با استفاده از KCL و KVL مدار می توان بجای $i_C(t)$ بر حسب متغیرهای حالت مقدار قرار داد .

$$\begin{cases} i_C(t) = -i_R(t) - i_L(t) \\ v_R(t) = v_L(t) = v_C(t) \Rightarrow i_C(t) = -\dfrac{v_C(t)}{R} - i_L(t) \\ i_R(t) = \dfrac{v_R(t)}{R} = \dfrac{v_C(t)}{R} \end{cases}$$

و با استفاده از KVL مدار می توان بجای $v_L(t)$ بر حسب متغیر های حالت مقدار قرار داد .

$$v_L(t) = v_C(t)$$

بنابر این نتیجه می شود :

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{i_C(t)}{C} = -\dfrac{v_C(t)}{RC} - \dfrac{i_L(t)}{C} \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{v_L(t)}{L} = \dfrac{v_C(t)}{L} \end{cases}$$

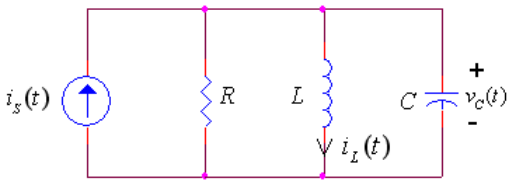
یا به عبارتی :

دستگاه معادلات (۱) $\dfrac{dX}{dt} = \overset{\circ}{X} = AX$

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = -\dfrac{v_C(t)}{RC} - \dfrac{i_L(t)}{C} \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{v_C(t)}{L} \end{cases}$$

که این دستگاه معادلات درجه اول را دستگاه معادلات حالت گویند و این دستگاه مربوط به مدار RLC موازی بدون تحریک می باشد .

اگر مدار RLC موازی مطابق شکل (۵-۳۲) توسط منبع جریان $i_S(t)$ تحریک شود را مورد بررسی قرار دهیم



شکل(۵-۳۲)

مشاهده می شود که در این مدار نیز ولتاژ خازن $v_C(t)$ و جریان سلف $i_L(t)$ نیز که عامل ذخیره کننده انرژی در مدار می باشند متغیر های حالت هستند و بردار حالت $X(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$ نیز است و

بر اساس KCL و KVL مدار می توان سرعت تغییر حالت $\dfrac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{dv_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix}$ را بدست آورد .

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{i_C(t)}{C} \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{v_L(t)}{L} \end{cases}$$

$$KCL \Rightarrow i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = i_S(t)$$

$$KVL \Rightarrow v_R(t) = v_L(t) = v_C(t)$$

در نتیجه :

$$\begin{cases} i_C(t) = -i_R(t) - i_L(t) + i_S(t) \\ v_R(t) = v_L(t) = v_C(t) \\ i_R(t) = \dfrac{v_R(t)}{R} = \dfrac{v_C(t)}{R} \end{cases} \Rightarrow i_C(t) = -\frac{v_C(t)}{R} - i_L(t) + i_S(t)$$

با قرار دادن مقدار بجای $i_C(t)$ و $v_C(t)$ چنین نتیجه می شود :

دستگاه معادلات (۲)

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = -\dfrac{v_C(t)}{RC} - \dfrac{i_L(t)}{C} + \dfrac{i_S(t)}{C} \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{v_L(t)}{L} \end{cases}$$

که دستگاه معادله درجه اول (۲) بر حسب متغیرهای حالت را دستگاه معادلات حالت گویند و تفاوت آن با دستگاه معادلات (۱) این است که بدلیل وجود ورودی علاوه بر متغیر های حالت تأثیر ورودی نیز در معادلات اضافه شده است .

معادلات حالت ماتریسی :

اگر بردار حالت و بردار سرعت متغیر حالت را در نظر بگیریم دستگاه معادلات ۱ و ۲ را می توان بصورت ماتریسی نوشت .

الف : دستگاه معادلات حالت (۱) به فرم مقابل نوشته می شود .

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$$

در معادله ماتریس حاصل ماتریس مربع ضریب بردار X را ماتریس A گویند . که اجزاءِ آن بستگی به اجزاءِ مدار دارد و با توجه به تعداد متغیرهای حالت $n \times n$ می باشد .

که از لحاظ برداری می توان آن را به فرم زیر خلاصه نمود .

$$\frac{dX}{dt} = \overset{\circ}{X} = AX$$

ب : دستگاه معادلات حالت (۲) را نیز می توان بدین صورت نوشت .

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} i_S(t)$$

در این معادله ماتریسی علاوه بر ماتریس A نیز بردار b برداری n بعدی بر حسب اجزاءِ مدار است که رابطه ورودی $w(t)$ را با سرعت تغییر حالت معین می نماید .

و معادله ماتریس در حالت عمومی عبارت است از : $\overset{\circ}{X} = AX + bw(t)$

• **نتایج حاصل از بحث تحلیل مدار های RLC فوق عبارتند از :**

۱- متغیر های حالت مدارها چون بستگی به تعداد اجزاءِ ذخیره کننده انرژی دارد و از آنجائیکه تحلیل یک دستگاه معادله درجه اول با n معادله خصوصاً در مورد مدارهای غیر خطی یا خطی تغییر پذیر ساده تر از تحلیل یک معادله درجه nام با ضرایب متغیر می باشد .

فضای حالت و دستگاه معادلات برای تحلیل مدارها کاربرد فراوانی دارد .

۲- از معادله $\overset{\circ}{X} = AX + bw$ در مورد مدارهای خطی تغییر ناپذیر با زمان بکار می رود و معادلات حالت بطور عموم برای کلیه مدارها خطی و غیر خطی می تواند بصورت

$$\overset{\circ}{X} = \frac{dX}{dt} = f(X, w, t)$$

بیان می شود که مفهوم آن عبارت است از :

سرعت تغییر حالت مدار (مشتق مرتبه اول بردار حالت) تابعی از بردار حالت و ورودی مدار و زمان می باشد .

• **مثال (۵-۷):** در یک مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان بدون تحریک $X = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$ به عنوان بردار حالت به کار رفته است در صورتیکه بازاءِ

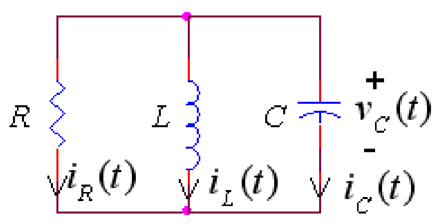
$$۱)\ X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{dX}{dt} = \overset{\circ}{X} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$۲)\ X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{dX}{dt} = \overset{\circ}{X} = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \end{bmatrix}$$

حاصل شود . مقادیر اجزاءِ مدار R و L و C را بدست آورید .

• **پاسخ :**

در مدار RLC موازی شکل (۵-۳۳) با توجه به KCL و KVL مدار و بردار سرعت تغییر حالت $\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_C}{dt} \end{bmatrix}$ و متغیرهای حالت رابطه $\overset{\circ}{X} = AX$ را بدست می آوریم .



شکل(۵-۳۳)

$$\begin{cases} i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=0 \\ v_R(t)=v_L(t)=v_C(t) \end{cases}$$

با توجه به رابطه $v_L(t)=L\dfrac{di_L}{dt}$ و KVL مدار چنین نتیجه می شود .

$$\frac{di_L}{dt}=\frac{v_L(t)}{L}\Rightarrow\frac{di_L}{dt}=\frac{v_C(t)}{L}$$

با توجه به رابطه $i_C(t)=C\dfrac{dv_C}{dt}$ و KCL چنین نتیجه می شود .

$$\frac{di_C}{dt}=\frac{i_C(t)}{C} \text{ و } i_C(t)=-i_R(t)-i_L(t)$$

بجای $i_R(t)$ بر حسب متغیر $v_C(t)$ مقدار قرار می دهیم .

$$v_R(t)=Ri_R(t)=v_C(t)\Rightarrow i_R(t)=\frac{v_C(t)}{R}$$

در نتیجه :

$$i_C(t)=-\frac{v_C(t)}{R}-i_L(t)$$
$$\frac{di_C}{dt}=-\frac{v_C(t)}{RC}-\frac{i_L(t)}{C}$$

بنابر این دستگاه معادلات حالت عبارت است از :

$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt}=\dfrac{v_C(t)}{L} \\ \dfrac{dv_C}{dt}=-\dfrac{v_C(t)}{RC}-\dfrac{i_L(t)}{C} \end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}\dfrac{di_L}{dt}\\ \dfrac{dv_C}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{L}\\ -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L(t)\\ v_C(t)\end{bmatrix}$$

اگر بجای X و $\overset{\circ}{X}$ در دو حالت مقدار قرار دهیم مقادیر R و L و C بدست می آیند .

$$۱)\Rightarrow\begin{bmatrix}-5\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{L}\\ -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-5=-\dfrac{1}{L}\\ 3=-\dfrac{1}{C}+\dfrac{1}{RC}\end{cases}$$

$$۲)\Rightarrow\begin{bmatrix}10\\ -15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{L}\\ -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}10=\dfrac{2}{L}\\ -15=-\dfrac{1}{C}-\dfrac{2}{RC}\end{cases}$$

از دستگاه ۱ و ۲ ابتدا مقدار L را حساب می کنیم .

$$-5=-\frac{1}{L}\Rightarrow L=\frac{1}{5}=0.2H \text{ یا } \frac{L}{2}=\frac{1}{10}\Rightarrow L=\frac{1}{5}=0.2H$$

حال با استفاده از دستگاه حاصل از رابطه $\dfrac{dv_C}{dt}$ در دوحالت مقدار R و C را حساب می کنیم .

$$\begin{cases}3=-\dfrac{1}{C}+\dfrac{1}{RC}\\ -15=-\dfrac{1}{C}-\dfrac{2}{RC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3+\dfrac{1}{C}=\dfrac{1}{RC}\\ 15-\dfrac{1}{C}=\dfrac{2}{RC}\end{cases}$$

از تعمیم دو رابطه دستگاه جدید بر هم چنین نتیجه می شود :

$$\frac{3+\frac{1}{C}}{15-\frac{1}{C}}=\frac{\frac{1}{RC}}{\frac{2}{Rc}}\Rightarrow(3+\frac{1}{C})\times2=15-\frac{1}{C}\Rightarrow6+\frac{2}{C}=15-\frac{1}{C}\Rightarrow\frac{3}{C}=15-6=9\Rightarrow C=\frac{3}{9}\Rightarrow C=\frac{1}{3}F$$

با توجه به رابطه $3=-\frac{1}{C}+\frac{1}{RC}$ مقدار R را بدست می آوریم .

$$3+\frac{1}{C}=\frac{1}{RC}\Rightarrow3+\frac{1}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{R\times\frac{1}{3}}\Rightarrow6=\frac{3}{R}\Rightarrow R=\frac{1}{2}\Omega$$

• ۵-۷-۲- حل دستگاه معادلات حالت در حوزه زمان :

در این قسمت دو روش تحلیل در حوزه زمان را برای معادلات حالت مدارهای خطی تغییر ناپذیر با زمان مطرح می کنیم .

روش۱: الف: پاسخ ورودی صفر مدارهای RLC و معادلات حالت $\frac{dX}{dt}=\mathring{X}=AX$

اگر معادله عددی $\frac{dx}{dt}=ax$ را در نظر بگیریم , مشاهده می شود که پاسخ این چنین مداری $x(t)=x(0)e^{at}$ می باشد که شرایط اولیه $x(t)$ است و با توجه به بسط تیلور

$$e^{at}=1+\frac{at}{1!}+\frac{a^2t^2}{2!}+\ldots+\frac{a^nt^n}{n!}$$

و با جایگذازی رابطه در پاسخ چنین نتیجه می شود :

$$x(t)=(1+\frac{at}{1!}+\frac{a^2t^2}{2!}+\ldots+\frac{a^nt^n}{n!})x(0)$$

حال معادله برداری $\frac{dX}{dt}=AX$ را نیز می توان بر اساس معادله عددی فوق حل کرد و چنین نتیجه می شود :

$$X=X_0e^{At}$$

که در این معادله X_0 حالت اولیه می باشد .

و اگر بسط تیلور را بکار ببریم , با توجه به ماتریس مربع A چنین نتیجه می شود .

$$e^{At}=[I+\frac{At}{1!}+\frac{A^2t^2}{2!}+\ldots+\frac{A^nt^n}{n!}]X_0$$

در این رابطه I ماتریس واحد $n\times n$ است .

و با جایگذاری در رابطه پاسخ $X(t)$

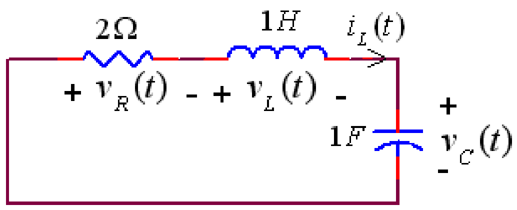
$$X(t)=[I+\frac{At}{1!}+\frac{A^2t^2}{2!}+\ldots+\frac{A^nt^n}{n!}]X_0$$

باید توجه نمود که در این روش تحلیلی با انتخاب بزرگ پاسخ به مقدار واقعی نزدیک می گردد .

• مثال (۵-۸):

الف : در مدار RLC سری شکل (۵-۳٤) معادلات حالت را با توجه به بردار حالت $X=\begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$ و حالت اولیه $X_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ نوشته و آن را حل می کنیم .

ب : ولتاژ خازن را در $t = 1\sec$ محاسبه کنید .



شکل(۵-۳٤)

• پاسخ :

الف : ابتدا با توجه به KCL و KVL مدار رابطه بردار سرعت تغییر حالت را بر حسب متغیر های حالت بدست می آوریم .

$$\begin{cases} i_R(t)=i_L(t)=i_C(t) \\ v_R(t)+v_L(t)+v_C(t)=0 \end{cases}$$

$$\frac{dv_C}{dt}=\frac{i_C(t)}{C}\Rightarrow\frac{dv_C}{dt}=\frac{i_L(t)}{L}$$

$$\frac{di_L}{dt}=\frac{v_L(t)}{L} \text{ و } v_L(t)=-v_R(t)-v_C(t)$$

$$v_R(t)=Ri_R(t)=Ri_L(t)$$

در نتیجه :

$$v_L(t)=-Ri_L(t)-v_C(t) \text{ و } \frac{di_L}{dt}=-\frac{R}{L}i_L(t)-\frac{v_C(t)}{L}$$

بنا بر این معادلات حالت مدار عبارتند از :

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt}=\dfrac{i_L(t)}{C} \\ \dfrac{di_L}{dt}=-\dfrac{R}{L}i_L(t)-\dfrac{v_C(t)}{L} \end{cases} \text{ یا } \begin{bmatrix} \dfrac{dv_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$$

با جایگذاری مقادیر اجزاءِ چنین نتیجه می شود :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$$

حال با روش بسط تیلور e^{At} پاسخ را بدست می آوریم .

ابتدا با استفاده از ماتریس A ماتریس های A^2 و A^3 و A^4 را محاسبه می کنیم .

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$
$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$
$$A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -3 & -4\end{bmatrix}$$
$$A^4=A\times A^3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ -3 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -4\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

با جایگذاری در معادله

$$X=[I+\frac{At}{1!}+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\frac{A^4t^4}{4!}+\ldots]X_0$$

چنین نتیجه می شود .

$$X=\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{1}{1!}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}t+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}t^2+\frac{1}{3!}\begin{bmatrix}2 & 3\\ -3 & -4\end{bmatrix}t^3+\frac{1}{4!}\begin{bmatrix}-3 & -4\\ 4 & 5\end{bmatrix}t^4+\ldots\right]\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}\times 2t^3+\frac{1}{24}\times(-3t^4)+\ldots & t-\frac{1}{2}\times 2t^2+\frac{1}{6}\times 3t^3+\frac{1}{24}\times(-4t^4)+\ldots\\ -t+\frac{1}{2}\times 2t^2+\frac{1}{6}\times(-3t^3)+\frac{1}{24}\times 4t^4+\ldots & 1-2t+\frac{1}{2}\times 3t^2+\frac{1}{6}\times(-4t^3)+\frac{1}{24}\times 5t^4+\ldots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}v_C(t)\\ i_L(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2t-\frac{5}{2}t^2+\frac{4}{3}t^3-\frac{11}{24}t^4+\ldots\\ 2-5t+4t^2-\frac{11}{6}t^3+\frac{7}{12}t^4+\ldots\end{bmatrix}$$

برای اینکه با دقت زیاد بتوان پاسخ را حساب کرد تحلیل بوسیله نوشتن برنامه رایانه ای امکان پذیر است .

$$v_C(t)=1+2t-\frac{5}{2}t^2+\frac{4}{3}t^3-\frac{11}{24}t^4$$
$$v_C(1)=1+2-\frac{5}{2}+\frac{4}{3}-\frac{11}{24}\Rightarrow v_C(1)=\frac{33}{24}V$$

ب : **حل معادلات حالت مدار های RLC با پاسخ کامل**

$$\frac{dX}{dt}=AX+bw$$

همانگونه که در مبحث معادلات دیفرانسیل مطالعه نموده اید , پاسخ معادله دیفرانسیل عددی (اسکالر) $\frac{dx}{dt} = ax + bw$ با توجه به شرایط اولیه $x(0) = x_0$ از رابطه مقابل محاسبه می گردد .

بنابر این :

$$x = x_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-t')} bw(t')dt'$$

که در این رابطه جمله $x_0 e^{at}$ پاسخ ورودی صفر و جمله انتگرالی بیانگر پاسخ حالت صفر می باشد .

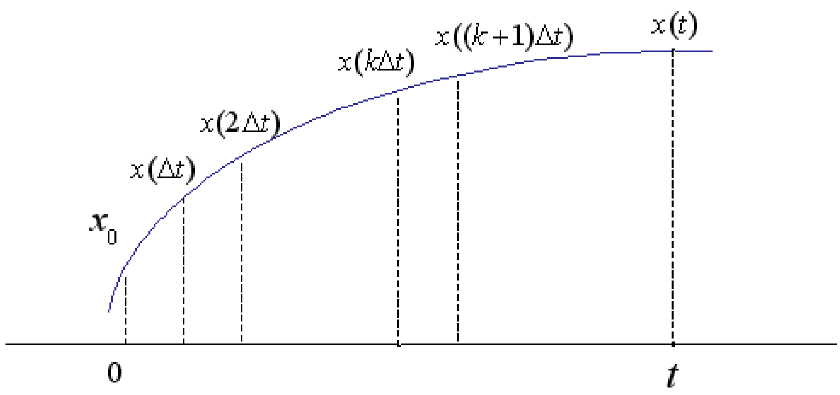
بنابر این پاسخ معادلات حالت مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان به صورت $\overset{\circ}{X} = AX + bw$ و حالت اولیه X_0 برابر است با :

$$X = e^{At} X_0 + \int_0^t e^{A(t-t')} bw(t')dt'$$

که در این عبارت نیز جمله اول $e^{At} X_0$ پاسخ ورودی صفر است و جمله انتگرال بیانگر پاسخ حالت صفر است و مقدار X بستگی به محاسبه e^{At} دارد و مقدار تقریبی X را می توان با استفاده از بسط تابع نمائی e^{At} بدست آورد .

روش ۲ : روش نموی :

برای اینکه این روش را بیان نماییم به یک مثال فیزیکی می پردازیم . فرض می کنیم مسیر حرکت یک محرک مانند شکل (۵-۳۵) دارای معادله $\frac{dx}{dt} = ax$ باشد , با فرض اینکه در مبدأ زمان محرک مسافت x_0 را پیموده باشد و بخواهیم مسافت طی شده $x(t)$ را در مدت زمان t بدست آوریم ,



شکل(۵-۳۵)

چون مسیر منحنی الخط می باشد فاصله بین صفر تا t را به n قسمت مساوی زمانی برابر Δt تقسیم می کنیم . $\frac{t}{n} = \Delta t$

با توجه به اینکه $\frac{dx}{dt}(t)$ بیانگر سرعت محرک می باشد , در شروع حرکت در هر فاصله زمانی Δt سرعت را تا پایان زمان Δt ثابت فرض می کنیم و بر اساس معادله سرعت $\frac{dx}{dt} = ax$, x را در زمان Δt محاسبه می کنیم .

$$x(\Delta t) = x_0 + \frac{dx(0)}{dt}\Delta t \quad و \quad \frac{dx}{dt}(0) = ax_0$$

$$x(\Delta t) = x_0 + ax_0\Delta t = [1 + a\Delta t]x_0$$

حال با توجه به معین شدن $x(\Delta t)$ مسافت طی شده در زمان $x(2\Delta t)$ محاسبه می نماییم .

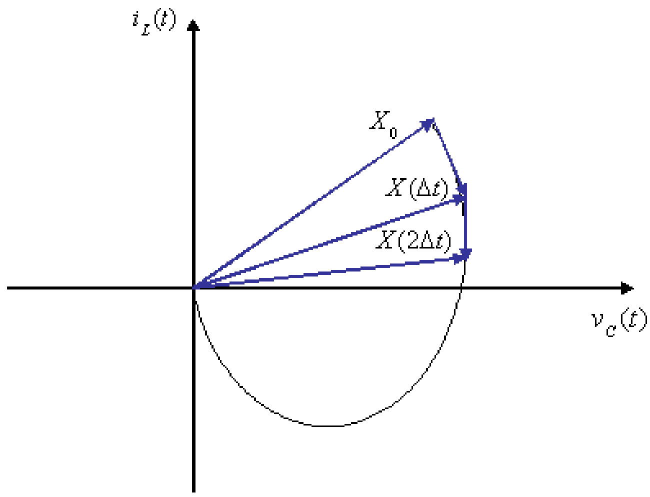
$$x(2\Delta t) = x(\Delta t) + \frac{dx}{dt}(\Delta t) \quad و \quad \frac{dx}{dt}(\Delta t) = ax(\Delta t)$$

$$x(2\Delta t) = x(\Delta t) + ax(\Delta t)\Delta t = [1 + a\Delta t]x(\Delta t)$$

همانطور که از روابط فوق مشاهده می شود مسافت طی شده در زمان $(K+1)\Delta t$ به مسافت طی شده در $K\Delta t$ بستگی دارد و رابطه بصورت کلی :

$$x[(K+1)\Delta t] = [1 + a\Delta t]x(K\Delta t)$$

حال اگر به مسیر حالت فضای دو بعدی شکل (۵-۳۶) توجه شود می توان بر اساس تعیین پاسخ تقریبی مثال اسکالر فوق معادلات حالت مدار را به روش نموی تحلیل کرد .



شکل(۵-۳۶)

اگر معادله مسیر حالت $\frac{dX}{dt} = AX$ با حالت اولیه X_0 را در نظر بگیریم , بردار حالت در لحظه $(K+1)\Delta t, ..., 2\Delta t, \Delta t$ را می توان با ثابت فرض کردن سرعت تغییر حالت $\frac{dX}{dt}(t)$ در شروع هر فاصله زمانی Δt محاسبه نمود .

$$X(\Delta t) = X_0 + \frac{dX}{dt}(\Delta t)\Delta t$$

در این عبارت X_0 بردار حالت اولیه $\frac{dX}{dt}(\Delta t)\Delta t$ نیز برداری است که با بردار X_0 جمع می گردد و با توجه به معادله $\frac{dX}{dt}(t) = AX(t)$ نتیجه می شود .

$$X(\Delta t) = X_0 + AX(0)\Delta t = [I + A\Delta t]X_0$$

و بر همین منوال داریم :

$$X(2\Delta t) = X(\Delta t) + \frac{dX}{dt}(\Delta t)\Delta t = X(\Delta t) + AX(\Delta t)\Delta t = [I + A\Delta t]X(\Delta t)$$

در نتیجه :
$$X((k+1)\Delta t) = [I + A\Delta t]X(K\Delta t)$$

در این روش تقریبی برای نزدیک شدن به پاسخ واقعی باید Δt را خیلی کوچک انتخاب نمود . مسلماً با استفاده از محاسبات دستی و Δt خیلی کوچک بدست آوردن مسیر ممکن نیست و مناسب است با نوشتن برنامه رایانه ای و انتخاب Δt مسیر را محاسبه و مقدار X را در زمان های مورد نظر محاسبه کرد .

• **مثال (۵-۹):** مسیر حالت مدار RLC سری شکل (۵-۳٤) مربوط به مثال (۵-۸) از روش (۲) به ازاءِ $\Delta t = 0.2\sec$ رسم نمایید .

• **پاسخ :** معادلات حالت مدار RLC سری شکل (۵-۳٤) عبارتند از :

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$$

بنابر این :

$$\begin{bmatrix} v_C(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X(\Delta t) = [I + A\Delta t]X_0$$

$$\begin{bmatrix} v_C(\Delta t) \\ i_L(\Delta t) \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\Delta t\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_C(\Delta t) \\ i_L(\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\Delta t & 1-2\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بنابر این به ازاءِ $\Delta t = 0.2$ داریم :

$$\begin{bmatrix} v_C(0.2) \\ i_L(0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ -0.2 & 1-2\times 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0.4 \\ -0.2+2\times 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_C(0.2) \\ i_L(0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_C(0.4) \\ i_L(0.4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4+0.2 \\ -0.28+0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 0.32 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_C(0.6) \\ i_L(0.6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6 \\ 0.32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6+0.064 \\ -0.32+0.6\times 0.32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.664 \\ -0.128 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_C(0.8) \\ i_L(0.8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.664 \\ -0.128 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.644-0.0256 \\ -0.3328-0.0768 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6384 \\ -0.4088 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_C(1) \\ i_L(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6384 \\ -0.4088 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6384-0.08176 \\ -0.32768-0.24528 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_C(1) \\ i_L(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.55664 \\ -0.57296 \end{bmatrix}$$

- **معادلات حالت و پاسخ کامل**

معادلات حالت مدار را اگر بصورت $\frac{dX}{dt} = AX + bw(t)$ و حالت اولیه X_0 در نظر گیریم در این صورت با استفاده از روش نموی پاسخ $X(t)$ و به ازاءِ نمو زمانی Δt به شرح ذیل قابل محاسبه است .

$$X(\Delta t) = X_0 + \frac{dX}{dt}(0)\Delta t$$

$$\frac{dX}{dt}(0) = AX_0 + bw(0)$$

$$X(\Delta t) = X_0 + AX_0\Delta t + bw(0)\Delta t = [I + A\Delta t]X_0 + bw(0)\Delta t$$

$$X(2\Delta t) = X(\Delta t) + \frac{dX}{dt}(\Delta t)\Delta t = X(\Delta t) + AX(\Delta t)\Delta t + bw(\Delta t)\Delta t$$

$$X(2\Delta t) = [I + A\Delta t]X(\Delta t) + bw(\Delta t)\Delta t$$

و بطور کلی در زمان $(K+1)\Delta t$ پاسخ عبارت است از :

$$X[(K+1)\Delta t] = [I + A\Delta t]X(K\Delta t) + bw(K\Delta t)\Delta t$$

همانگونه که از این رابطه مشاهده می شود بردار حالت در هر مرحله علاوه بر مرتبط بودن به مقدار بردار در حالت قبل به مقدار ورودی در حالت قبل نیز بستگی دارد .

تجزیه وتحلیل وتعیین پاسخ مدار های RLC عمومی

در فصل قبل با تجزیه وتحلیل مدار های مرتبه دوم RLC موازی وسری آشنا گشته ودرمورد نوع پاسخ آن ها بحث گردید در این فصل ابتدا با فرض مشخص بودن معادله دیفرانسیل مدار برحسب متغیر پاسخ و ورودی در مورد پاسخ های دایم وهمگن بحث نموده و سپس درمورد چگونگی تعیین ضرایب پاسخ همگن با استفاده از شرایط اولیه مدار بحث را ادامه می دهیم در ادامه به روش تعیین پاسخ پله واحد و پاسخ ضربه مدارهای کلی می پردازیم .از مطالب دیگری که در این فصل بدان اشاره می شود نوشتن معادله دیفرانسیل مدار برحسب متغیر پاسخ است که باچند مثال آن را مورد بررسی قرار می دهیم و در نهایت به مسئله انتگرال کانولوشن و روش تعیین پاسخ حالت صفر به هر ورودی با استفاده از آن پرداخته می شود

• ۶-۱- بررسی وتعیین پاسخ مدار های .RLC عمومی مرتبه n ام

اگر یک مدار RLC با ورودی x(t) وپاسخ y(t) مطابق شکل (۶-۱) در نظر بگیریم که معادله دیفرانسیل آن عبارت باشد از :

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=b_m\frac{d^mx}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{dx}{dt}+b_0x$$

شکل(۶-۱)

برای تعیین پاسخ این معادله که شامل دو پاسخ همگن ودائم می باشد به شرح زیر عمل می نماییم

۱- تعیین پاسخ همگن y_h **:** برای تعیین پاسخ همگن , معادله مشخصه ی معادله دیفرانسیل همگن را تشکیل داده و آن را حل نمود ه ریشه های معادله مشخصه فرکانس های طبیعی پاسخ همگن هستند. بنابراین:

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=0$$

$$a_nS^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1S+a_0=0$$

معادله مشخصه حاصل اولاً دارای n ریشه است , ثانیاً امکان دارد کلیه ریشه های آن ساده حقیقی یا مختلط باشند وممکن است بعضی از ریشه ها مکرر باشند . در صور تیکه ریشه ها ساده باشند فرم پاسخ همگن عبارت است از:

$$y_h(t)=K_1e^{S_1t}+K_2e^{S2t}+\cdots+K_ne^{Snt}=\sum_{i=1}^{n}K_ie^{Sti}=\sum_{i=1}^{n}K_i\exp(S_it)$$

که S_i ها فرکانس های طبیعی می باشند. اما اگر تعدادی از ریشه های معادله مشخصه ریشه مکرر باشند و فرضاً سه ریشه مکرر ($S_K = S_{K+1} = S_{K+2}$)در نظر گرفته شود پاسخ همگن به صورت چند جمله ای مقابل می تواند باشد:

$$y_h(t) = A_1 \exp(S_1 t) + A_2 \exp(S_2 t) + \cdots + A_K \exp(S_K t) + A_{K+1} \exp(S_K t) + A_{K+2} \exp(S_K t) + \cdots +$$

در هردو صورت پاسخ همگن ذکر شده در فوق ضرایب K_i و A_i نیز مجهول می باشند که در قسمت های بعد در مورد روش تعیین آن ها بحث می کنیم .

۲-تعیین پاسخ دائم y_p **:** همان گونه که در مباحث قبلی تحلیل مدار ها بیان شد پاسخ دائم مشابه ورودی مدار می باشد و بستگی به ورودی مدار دارد.

الف : اگر ورودی مدار مقدار ثابت (dc) باشد پاسخ دائم را $y_p = K$ فرض نموده از طریق معادله دیفرانسیل مدار آن را بدست می آوریم . معادله دیفرانسیل به ازاءِ ورودی ثابتX عبارت است از:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 X$$

در نتیجه پاسخ دائم برابر است با:

$$a_0 K = b_0 X \Rightarrow y_p = K = \frac{b_0}{a_0} X$$

یا این که با استفاده از مدار معادل مدار در $t = \infty$ آن را حساب می نماییم .

تذکر : مدار معادل مدار از اتصال کوتاه قرار دادن سلف ها و مدار باز قرار دادن خازن ها بدست می آید.

ب : پاسخ دائم به ازاء ورودی متغیر با زمان $x(t)$:

در این حالت همانگونه که قبلاً بیان شد تنها با استفاده از معادله دیفرانسیل مدار می توان پاسخ دائم را تعیین کرد . در این حالت اگر $x(t) = Xe^{\beta t}$ فرض شود , فرم پاسخ دائم بستگی به فرکانس های طبیعی پاسخ همگن مدار S_iها و β فرکانس ورودی دارد .

در صورتیکه $\beta \neq S_i$ باشد در اینصورت پاسخ دائم عبارت است از $y_P = Ye^{\beta t}$ و با قرار دادن و جایگذاری این پاسخ و ورودی $x(t)$ در معادله دیفرانسیل , Y را بدست می آوریم .

$$a_n Y\beta^n e^{\beta t} + a_{n-1} Y\beta^{n-1} e^{\beta t} + \ldots + a_1 Y\beta e^{\beta t} + a_0 Ye^{\beta t} = b_m X\beta^m e^{\beta t} + b_{m-1} X\beta^{m-1} e^{\beta t} + \ldots + b_1 X\beta e^{\beta t} + b_0 Xe^{\beta t}$$

در نتیجه :

$$Y = \left[\frac{b_m \beta^m + b_{m-1}\beta^{m-1} + \ldots + b_1 \beta + b_0}{a_n \beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \ldots + a_1 \beta + a_0} \right] X$$

در صورتیکه β فرضاً با یکی از فرکانس های طبیعی پاسخ همگن مثلاً S_K برابر باشد پاسخ دائم در این صورت عبارت است از :

$$y_P(t) = (Y_1 t + Y_2) e^{\beta t}$$

که باید با استفاده از معادله دیفرانسیل Y_1 و Y_2 را بدست آورد .

ج : پاسخ $y(t)$ و تعیین ضرائب پاسخ همگن :

بنابر این پاسخ مدار برابر است با : $y(t) = y_h + y_P$ و در صورتیکه فرکانس های طبیعی پاسخ همگن را ساده در نظر بگیریم و فرکانس ورودی مخالف فرکانس های طبیعی فرض شود می توان پاسخ $y(t)$ را بصورت زیر نوشت :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i e^{S_i t} + Ye^{\beta t}$$

و باید با توجه به شرایط اولیه مدار K_iها را محاسبه نمود .

یکی از روشهای تعیین K_iها استفاده از مقدار $y(t)$ و مشتق های آن در $t = 0^+$ می باشد .

بدین مفهوم که دستگاهی مطابق زیر تشکیل داده و ضرایب معادله پاسخ

$$y(t) = K_1 e^{S_1 t} + K_2 e^{S_2 t} + ... + K_n e^{S_n t} + Ye^{\beta t}$$

را محاسبه می کنیم .

$$\begin{cases} y(0^+) = K_1 + K_2 + ... + K_n + Y \\ \dfrac{dy}{dt}(0^+) = K_1 S_1 + K_2 S_2 + ... + K_n S_n + Y\beta \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2}(0^+) = K_1 S_1^2 + K_2 S_2^2 + ... + K_n S_n^2 + Y\beta^2 \\ \\ \dfrac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0^+) = K_1 S_1^{n-1} + K_2 S_2^{n-1} + ... + K_n S_n^{n-1} + Y\beta^{n-1} \end{cases}$$

در این دستگاه K_1 و K_2 تا K_n مجهول می باشند مشروط بر اینکه $y(0^+)$ و مشتق های آن در $t = 0^+$ معلوم باشند .

د : تعیین شرایط اولیه $y(0^+)$ و مشتق های آن در $t = 0^+$

برای اینکه به راحتی بتوانیم چگونگی تعیین شرایط اولیه را مورد بحث قرار دهیم با توجه به نکات ذیل به تحلیل یک مدار ساده می پردازیم .

۱- ابتدا مدار را در زمان $t = 0^-$ مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و ولتاژها و جریان سلف ها را در $t = 0^-$ محاسبه می نماییم .

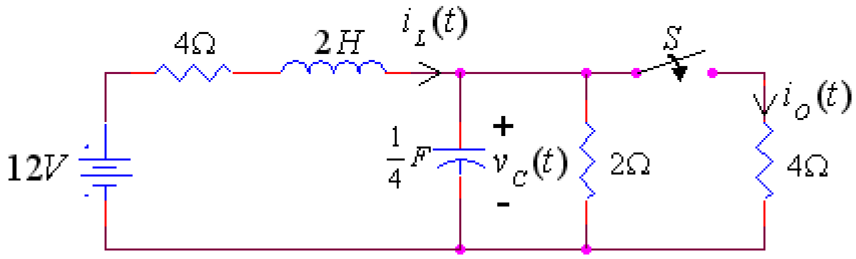
در صورتیکه ورودی های مدار محدود و کرانه دار باشد (غیر ضربه) ولتاژ ها و جریان سلف ها تغییر ناگهانی را نمی پذیرد , در نتیجه ($v_C(0^-) = v_C(0^+)$ و $i_L(0^-) = i_L(0^+)$) مقدار آنها در $t = 0^+$ بدست می آید .

۲- با استفاده از روابط KCL و KVL مدار و در صورت لزوم با استفاده از روابط $i_C(t) = C\dfrac{dv_C}{dt}$ و $v_L(t) = L\dfrac{di_L}{dt}$ در $t = 0^+$ مقدار $y(0^+)$ را محاسبه می کنیم .

۳- با استفاده از مشتق مرتبه اول معادلات KCL و KVL مدار و $\dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{i_C(t)}{C}$ و $\dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{i_L(t)}{L}$ و همچنین در صورت لزوم $\dfrac{d^2 v_C}{dt^2} = \dfrac{1}{C}\dfrac{di_C}{dt}$ و $\dfrac{d^2 i_L}{dt^2} = \dfrac{1}{L}\dfrac{di_L}{dt}$ در $t = 0^+$ مقدار $\dfrac{dy}{dt}(0^+)$ را محاسبه نموده و برای تعیین مرتبه های بالاتر مشتق پاسخ این عمل را با استفاده از مشتق های بالاتر KCL و KVL و مشتق های بالاتر رابطه بین ولتاژ و جریان خازن و ولتاژ و جریان سلف ادامه می دهیم .

• **مثال(۶-۱) :** الف : در مدار شکل (۶-۲) کلید S مدت ها باز بوده و در لحظه $t=0$ بسته می شود , مقدار $i_0(t)$ و $\frac{di_0}{dt}$ را در $t=0^+$ محاسبه نمایید .

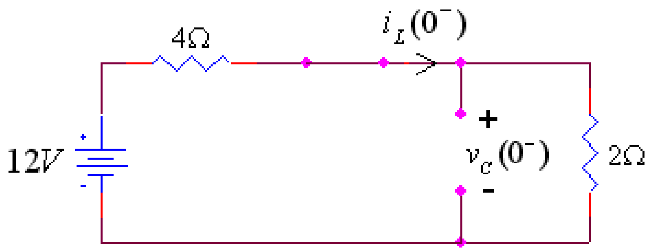
ب : $\frac{d^2 i_0}{dt^2}$ را در $t=0^+$ بدست آورید .



شکل(۶-۲)

• **پاسخ:**

الف : مدار در زمان $t=0^-$ در حالت پایدار است و با توجه به اینکه ورودی dc می باشد سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز می باشد و مدار در شکل (۶-۳) نشان داده شده است .



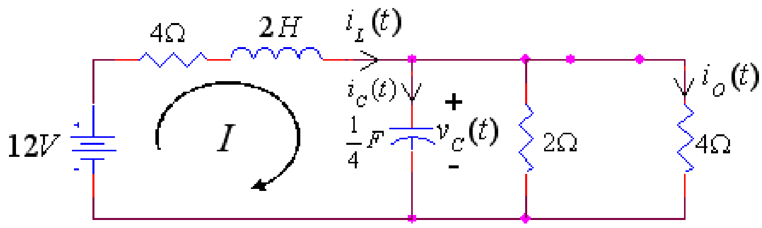
شکل(۶-۳)

ابتدا از این مدار $i_L(0^-)$ و $v_C(0^-)$ را حساب می کنیم .

$$i_L(0^-)=\frac{12}{4+2}=2A$$

$$v_C(0^-)=2i_L(0^-)=2\times 2=4V$$

بعد از بسته شدن کلید در زمان $t=0^+$ ولتاژ خازن و جریان سلف مدار شکل (۶-٤) تغییر ناگهانی ندارند .



شکل(۶-٤)

بنابر این :

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 4V$$
$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2A$$

و چون مقاومت $4\,\Omega$ با خازن C موازی است , بنا بر این :

$$v_C(t) = 4i_0(t) \Rightarrow i_0(t) = \frac{v_C(t)}{4}$$

حال با توجه به $v_C(0^+)$ مقدار $i_0(0^+)$ از رابطه $i_0(0^+) = \frac{v_C(0^+)}{4}$ بدست می آید :

$$i_0(0^+) = \frac{4}{4} \Rightarrow i_0(0^+) = 1A$$

برای تعیین $\frac{di_0}{dt}(0^+)$ ابتدا از رابطه $v_C(t) = 4i_0(t)$ مشتق می گیریم , نتیجه می شود :

$$\frac{dv_C}{dt} = 4\frac{di_0}{dt}$$

سپس با توجه به رابطه $\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_C(t)}{C}$ و KCL گره (۱) در مدار شکل (۶-٤) مقدار $\frac{dv_C}{dt}(0^+)$ و سپس $\frac{di_0}{dt}(0^+)$ را حساب می کنیم .

$$KCL(1) \Rightarrow i_L(t) = i_C(t) + \frac{v_C(t)}{2} + i_0(t)$$

از آنجاکه KCL در همه زمان ها باید صادق باشد آنرا در لحظه $t = 0^+$ مورد بررسی قرار می دهیم و با جایگذاری مقدار در آن $i_C(0^+)$ را حساب می کنیم .

$$i_L(0^+) = i_C(0^+) + \frac{v_C(0^+)}{2} + i_0(0^+)$$
$$2 = i_C(0^+) = \frac{4}{2} + 1 \Rightarrow i_C(0^+) = -1A$$

نتیجتاً :

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -4\,V/\sec$$

با استفاده از رابطه $\frac{dv_C}{dt}(0^+) = 4\frac{di_0}{dt}(0^+)$ مقدار $\frac{di_0}{dt}(0^+)$ بدست می آید .

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+) = -4 = 4\frac{di_0}{dt}(0^+) \Rightarrow \frac{di_0}{dt}(0^+) = -1\,A/\sec$$

ب : باید توجه نمود که برای تحلیل مدار فوق و تعیین $i_0(t)$ محاسبات بند (الف) کافی است , اما برای اینکه با محاسبات مشتق های بالاتر آشنا شویم مقدار $\frac{d^2i_0}{dt^2}(0^+)$ را نیز محاسبه می کنیم .

در این قسمت اگر از رابطه $v_C(t) = 4i_0(t)$ مشتق مرتبه دوم آن را حساب کنیم , چنین نتیجه می شود :

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} = 4\frac{d^2i_0}{dt^2}$$

حال با استفاده از مشتق مرتبه دوم رابطه ولتاژ و جریان خازن ($\frac{d^2v_C}{dt^2} = \frac{1}{C}\frac{di_C}{dt}$) و مشتق مرتبه اول KCL گره (۱) و همچنین KVL حلقه (I) مدار شکل (۶-٤) ابتدا $\frac{d^2v_C}{dt^2}(0^+)$ را به ترتیب زیر محاسبه می کنیم .

۱- از معادله KCL مشتق می گیریم .

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{di_C}{dt} + \frac{1}{2}.\frac{dv_C}{dt} + \frac{di_0}{dt}$$

۲- معادله حلقه (I) را می نویسیم و مقدار $\frac{di_L}{dt}(0^+)$ را در $t = 0^+$ حساب می کنیم .

$$12 = 2i_L + 2\frac{di_L}{dt} + v_C(t)$$

$$12 = 4i_L(0^+) + 2\frac{di_L}{dt}(0^+) + v_C(0^+) \text{ یا } 12 = 4\times 2 + 2\frac{di_L}{dt}(0^+) + 4$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = 0$$

۳- در معادله $\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{di_C}{dt}(0^+) + \frac{1}{2}.\frac{dv_C}{dt}(0^+) + \frac{di_0}{dt}(0^+)$ مقدار قرار می دهیم .

$$0 = \frac{di_C}{dt}(0^+) + \frac{1}{2}\times(-1) + 1 \Rightarrow \frac{di_C}{dt}(0^+) = -\frac{1}{2}A/\sec$$

بنابر این :

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}(0^+) = \frac{1}{C}\frac{di_C}{dt}(0^+) \Rightarrow \frac{d^2v_C}{dt^2}(0^+) = \frac{1}{\frac{1}{4}}\times(-\frac{1}{2})$$

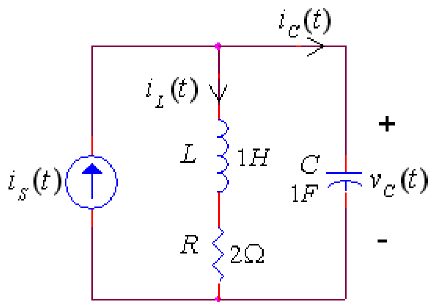
$$\frac{d^2v_C}{dt^2}(0^+) = -2V/\sec^2$$

حال با استفاده از رابطه $\frac{d^2i_0}{dt^2}(0^+) = \frac{1}{4}\frac{d^2v_C}{dt^2}(0^+)$ مقدار $\frac{d^2i_0}{dt^2}(0^+)$ را بدست می آوریم .

$$\frac{d^2i_0}{dt^2}(0^+) = \frac{1}{4}\times(-2) \Rightarrow \frac{d^2i_0}{dt^2}(0^+) = -\frac{1}{2}A/\sec^2$$

- **مثال(۶-۲) :** در مدار شکل (۶-۵) مقادیر $\frac{di_L}{dt}$ و $\frac{dv_C}{dt}$ را در $t = 0^+$ بدست آورید .

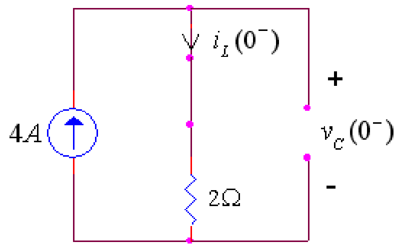
$$i_S(t) = 4 + 6u(t)A$$



شکل(۶-۵)

• پاسخ:

۱- با استفاده از مدار معادل شکل (۶-۶) $v_C(0^-)$ و $i_L(0^-)$ را حساب می نماییم . باید توجه نمود که در زمان های $t \le 0^-$, $i_S(t) = 4A$ می باشد .



شکل(۶-۶)

در نتیجه :

$$i_L(0^-) = i_S(t) = 4A$$
$$v_C(0^-) = 2i_L(0^-) = 2 \times 4 = 8V$$

۲- در زمان $t = 0^+$ چون ولتاژ خازن و جریان سلف تغییر ناگهانی ندارند بنابر این :

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 8V$$
$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 4A$$

۳- در مدار شکل (۶-۶) می توان رابطه زیر را نوشت :

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L(t) = v_C(t)$$

با جایگذاری مقدار در رابطه فوق در زمان $t = 0^+$, $\frac{di_L}{dt}(0^+)$ را حساب می کنیم .

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) + 2i_L(0^+) = v_C(0^+) \text{ یا } \frac{di_L}{dt}(0^+) + 2 \times 4 = 8 \Rightarrow \frac{di_L}{dt}(0^+) = 0$$

و با استفاده از معادله KCL مدار $i_S(t) = i_L(t) + i_C(t)$ مقدار $i_C(0^+)$ را حساب می نماییم . در زمان $t \ge 0^+$ مقدار $i_S(t)$ برابر است با :

$$i_S(t) = 4 + 6 = 10A, i_S(0^+) = i_L(0^+) + i_C(0^+)$$

$$10 = 4 + i_C(0^+) \Rightarrow i_C(0^+) = 6A$$

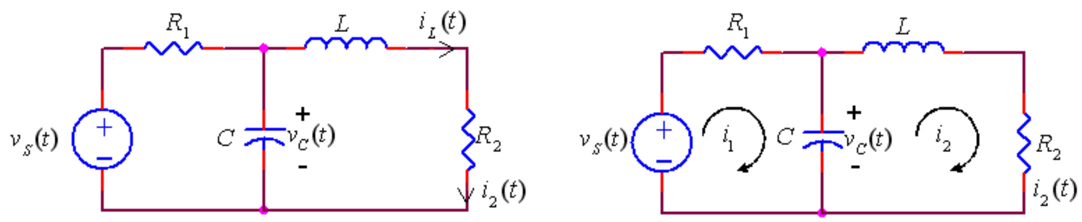
در نتیجه :

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C} \Rightarrow \frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{6}{1} \Rightarrow \frac{dv_C}{dt}(0^+) = 6 V/_{\sec}$$

• ۶-۲- نوشتن معادله دیفرانسیل مدار بر حسب متغیر پاسخ $y(t)$

برای نوشتن معادله دیفرانسیل مدار بر حسب متغیر پاسخ به تحلیل چند مثال با استفاده از روش های تحلیلی گره و مش پرداخته و نکاتی را که برای بدست آمدن معادله دیفرانسیل بهینه مدار لازم است بیان می نماییم .

• مثال(۶-۳) : در مدار شکل (۶-۷-الف) اولاً معادله دیفرانسیل مدار را بر حسب متغیر i_2 بنویسید . ثانیاً به ازاء $u_S(t) = V_0 u(t)$ اجزاء مدار $\frac{di_L}{dt}(0^+)$ را بدست آورید .



(الف) شکل(۶-۷) (ب)

• پاسخ:

اولاً : اگر از روش مش استفاده نماییم و شرایط اولیه مدار را $v_C(0)$ و $i_2(0) = i_L(0)$ در نظر گیریم برای مش ها جریان های $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را مطابق شکل (۶- ۷-ب) انتخاب و KVL می نویسیم :

$$KVL(1) \Rightarrow R_1 i_1(t) + \frac{1}{C}\int_0^t (i_1 - i_2)dt + v_C(0) - v_S(t) = 0$$

$$KVL(2) \Rightarrow L\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2(t) + \frac{1}{C}\int_0^t (i_2 - i_1)dt - v_C(0) = 0$$

برای بدست آوردن یک معادله دیفرانسیل بر حسب $i_2(t)$ ابتداءِ دو معادله دیفرانسیل انتگرال مش ها را با هم جمع می کنیم و $i_1(t)$ را بر حسب $i_2(t)$ بدست می آوریم .

جمع دو معادله ۱ و ۲

$$R_1 i_1(t) + L\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2(t) - v_S(t) = 0$$

$$R_1 i_1(t) = -R_2 i_2(t) - L\frac{di_2}{dt} + v_S(t)$$

معادله (۳)

$$i_1(t) = -\frac{R_2}{R_1} i_2(t) - \frac{L}{R_1}\frac{di_2}{dt} + \frac{v_S(t)}{R_1}$$

پس از تعیین $i_1(t)$ بر حسب $i_2(t)$, از یکی از دو معادله KVL(۱) یا KVL(۲) اولاً مشتق گرفته و سپس بجای $i_1(t)$ مقدار قرار می دهیم . همانگونه که مشاهده می شود مشتق گرفتن از KVL(۲) مناسبتر است . بنابر این داریم :

معادله (٤)
$$L\frac{d^2i_2}{dt^2}+R_2\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{C}i_2(t)-\frac{1}{C}i_1(t)=0$$

اگر بجای $i_1(t)$ در معادله (٤) از معادله (۳) مقدار قرار دهیم و معادله را مرتب نماییم .

$$L\frac{d^2i_2}{dt^2}+R_2\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{C}i_2(t)-\frac{1}{C}\left[-\frac{R_2}{R_1}i_2(t)-\frac{L}{R_1}\frac{di_2}{dt}+\frac{v_S(t)}{R_1}\right]=0$$

$$L\frac{d^2i_2}{dt^2}+R_2\frac{di_2}{dt}+\frac{L}{R_1C}\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{C}i_2(t)+\frac{R_2}{R_1C}i_2(t)=\frac{v_S(t)}{R_1C}$$

$$L\frac{d^2i_2}{dt^2}+(R_2+\frac{L}{R_1C})\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{C}(1+\frac{R_2}{R_1})i_2(t)=\frac{v_S(t)}{R_1C}$$

$$\frac{d^2i_2}{dt^2}+(\frac{R_2}{L}+\frac{1}{R_1C})\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{LC}(1+\frac{R_2}{R_1})i_2(t)=\frac{1}{LC}\frac{v_S(t)}{R_1}$$

اگر به معادله دیفرانسیل بدست آمده توجه شود مشاهده می شود که یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است که اگر آن را با معادله دیفرانسیل عمومی مرتبه دوم با فرکانس های α و ω_0 مقایسه نماییم نتیجه می شود :

$$\frac{d^2i_2}{dt^2}+2\alpha\frac{di_2}{dt}+\omega_0^2i_2(t)=f(v_S(t))$$

در این مدار که یک مدار عمومی RLC است :

فرکانس میرائی $\alpha=\frac{1}{2}(\frac{R_2}{L}+\frac{1}{R_1C})$

فرکانس همنوائی $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC(1+\frac{R_2}{R_1})}}$

می باشد .

ثانیاً : در حلقه (۲) داریم :

$$v_C(t)=L\frac{di_L}{dt}+R_2i_2(t) \text{ و } i_2(t)=i_L(t)$$

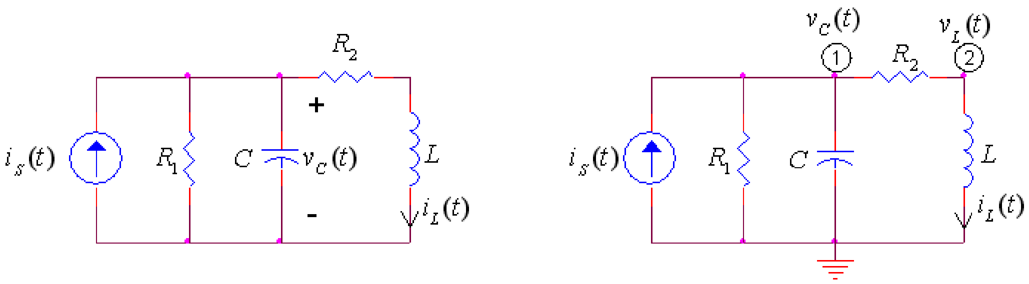
بنابر این :
$$v_C(t)-R_2i_L(t)=L\frac{di_L}{dt}$$

$$\frac{di_L}{dt}=\frac{v_C(t)}{L}-\frac{R_2}{L}i_L(t)$$

در نتیجه با توجه به شرایط اولیه $i_L(0)$ و $v_C(0)$ می توان چنین نوشت :

$$\frac{di_L}{dt}(0^+)=\frac{v_C(0)}{L}-\frac{R_2}{L}i_L(0)$$

• **مثال(۶-٤) :** معادله دیفرانسیل مدار شکل (۶-۸-الف) را بر حسب $v_C(t)$ بنویسید .



(الف) شکل(۶-۸) (ب)

• پاسخ:

این مدار را به روش گره تحلیل می نماییم . پتانسیل گره ها را مطابق شکل (۶-۸-ب) مشخص می نماییم و شرایط اولیه مدار را $v_C(0)$ و $i_L(0)$ در نظر می گیریم و برای گره ها (۱) و (۲) KCL می نویسیم .

$$KVL(1) \Rightarrow \frac{v_C(t)}{R_1} + C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C(t) - v_L(t)}{R_2} - i_S(t) = 0$$

$$KVL(2) \Rightarrow \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)dt + i_L(0) + \frac{v_L(t) - v_C(t)}{R_2} = 0$$

برای تعیین معادله دیفرانسیل بر حسب $v_C(t)$ از معادله (۱) ، $v_L(t)$ را محاسبه می نماییم :

$$\frac{v_L(t)}{R_2} = \frac{v_C(t)}{R_1} + \frac{v_C(t)}{R_2} + C\frac{dv_C}{dt} - i_S(t)$$

$$v_L(t) = R_2\left[(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})v_C(t) + C\frac{dv_C}{dt} - i_S(t)\right] \qquad \text{معادله (۳)}$$

اگر از معادله (۲) مشتق بگیریم معادله (٤) حاصل می گردد .

$$\frac{1}{L}v_L(t) + \frac{1}{R_2}\frac{dv_L}{dt} - \frac{1}{RC}\frac{dv_C}{dt} = 0 \qquad \text{معادله (٤)}$$

و با مشتق گرفتن از معادله (۳) و قرار دادن مقدار بجای $v_L(t)$ و $\frac{dv_L}{dt}$ در معادله (٤) معادله دیفرانسیل بر حسب $v_C(t)$ بدست می آید .

$$\frac{dv_L}{dt} = R_2\left[(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})\frac{dv_C}{dt} + C\frac{d^2v_C}{dt^2} - \frac{di_S}{dt}\right]$$

$$\frac{1}{L}R_2\left[(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})v_C(t) + C\frac{dv_C}{dt} - i_S(t)\right] + \frac{1}{R_2} \times R_2\left[(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})\frac{dv_C}{dt} + C\frac{d^2v_C}{dt^2} - \frac{di_S}{dt}\right] - \frac{1}{R_2}\frac{dv_C}{dt} = 0$$

حال با مرتب کردن معادله دیفرانسیل حاصل می توان چنین نوشت :

$$C\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R_2}{L} \times C\frac{dv_C}{dt} - \frac{1}{R_2}\frac{dv_C}{dt} + (\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2})\frac{dv_C}{dt} + \frac{R_2}{L}(\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2})v_C = \frac{R_2}{L}i_S(t) + \frac{di_S}{dt}$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + (\frac{R_2}{L} - \frac{1}{R_2C} + \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2})\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC}(1 + \frac{R_2}{R_1})v_C = \frac{R_2}{LC}i_S(t) + \frac{1}{C}\frac{di_S}{dt}$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+(\frac{R_2}{L}-\frac{1}{R_1C})\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{LC}(1+\frac{R_2}{R_1})v_C=\frac{R_2}{LC}i_S(t)+\frac{1}{C}\frac{di_S}{dt}$$

یا اینکه بجای $v_L(t)$ از معادله (۳) در معادله (۲) مقدار قرار داده و سپس مشتق می گیریم .

معادله (۵)

$$\frac{1}{L}\int_0^t R_2\left[\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}v_C(t)+C\frac{dv_C}{dt}-i_S(t)\right]dt+i_L(0)+\frac{R_2}{R_1}\left[(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2})v_C(t)+C\frac{dv_C}{dt}-i_S(t)\right]-\frac{v_C(t)}{R_2}=0$$

از معادله (۵) مشتق می گیریم .

$$\frac{R_2}{L}(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2})v_C(t)+\frac{R_2}{L}C\frac{dv_C}{dt}-\frac{R_2}{L}i_S(t)+(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2})\frac{dv_C}{dt}+C\frac{d^2v_C}{dt^2}-\frac{di_S}{dt}-\frac{1}{R_2}\frac{dv_C}{dt}=0$$

اگر معادله دیفرانسیل را مرتب نماییم چنین حاصل می گردد .

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+\left[\frac{R_2}{L}-\frac{1}{R_2C}+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}\times\frac{1}{C}\right]\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{LC}(1+\frac{R_2}{R_1})v_C(t)=\frac{R_2}{LC}i_S(t)+\frac{1}{C}\frac{di_S}{dt}$$

حال اگر معادلات دیفرانسیل حاصل از مثال های (۶-۳ و۶-٤) را مورد بررسی قرار دهیم نتایج زیر حاصل می گردد .

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+\left[(\frac{R_2}{L}+\frac{1}{R_1C}\right]\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{LC}(1+\frac{R_2}{R_1})v_C(t)=\frac{R_2}{LC}i_S(t)+\frac{1}{C}\frac{di_S}{dt}$$

۱- در مدار شکل (۶-۸) منبع ولتاژ فیزیکی (R_1 و $v_S(t)$) به منبع جریان فیزیکی ($i_S(t)$ و R_1) تبدیل شده است . بنابر این معادله دیفرانسیل در دو مدار یکی است و همانگونه که قبلاً بحث گردید معادله دیفرانسیل همگن و فرم پاسخ همگن بستگی به متغیر مدار ندارد .

۲- در نوشتن معادله دیفرانسیل یا از طریق جمع کردن معادلات یا از یکی از معادلات یک متغیر را بر حسب متغیر دیگر بدست آورده و در معادله دیگر قرار دادیم و معادلات چون معادلات دیفرانسیل انتگرال می باشند مجموعاً یک مرتبه مشتق گرفته می شود . زیرا اگر مشتق نابجا گرفته شود معادله دیفرانسیل بدست نمی آید .

زیرا در مدار های فوق الذکر معادله دیفرانسیل درجه دوم باید حاصل گردد و با مشتق گیری نا بجا معادله درجه سوم حاصل می شود که معادله بهینه مدار نمی باشد .

۳- در نوشتن معادلات دیفرانسیل انتگرال مدارهای فوق الذکر مشاهده شد که در مورد معادلات KVL ولتاژ اولیه خازن ظاهر گردید و در معادلات KCL جریان اولیه سلف ظاهر گردید . اما برای حل معادلات باید هر دو شرط اولیه معلوم باشند در غیر اینصورت تحلیل امکان پذیر نمی باشد .

بطور مثال اگر در مثال (۶-٤) بخواهیم $\frac{dv_C}{dt}(0^+)$ را حساب کنیم مشاهده می شود با نوشتن KCL در گره (۱) داریم :

$$i_S(t)=\frac{v_C(t)}{R_1}+C\frac{dv_C}{dt}+i_L(t)$$

در نتیجه :

$$C\frac{dv_C}{dt}=-\frac{v_C(t)}{R_1}-i_L(t)+i_S(t)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C(t)}{R_1 C} - \frac{i_L(t)}{C} + \frac{i_S(t)}{C}$$

بنابر این $\frac{dv_C}{dt}(0^+)$ برابر است با :

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+) = -\frac{v_C(0)}{R_1 C} - \frac{i_L(0)}{C} + \frac{i_S(0)}{C}$$

• ۶-3- پاسخ مدار های .RLC عمومی به ورودی u(t)

هر گاه یک مدار RLC عمومی با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ دارای معادله دیفرانسیل عمومی زیر باشد :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + ... + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + ... + b_1\frac{dx}{dt} + b_0 x(t)$$

در صورتیکه ورودی مدار $x(t) = u(t)$ باشد , در این صورت معادله دیفرانسیل مدار به صورت زیر در می آید :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + ... + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

برای تعیین پاسخ این معادله $y(t)$ باید به نکات ذیل توجه نمود .

۱- شرایط اولیه این مدار یعنی ولتاژ اولیه خازن ها و جریان اولیه سلف ها برابر صفر است در نتیجه پاسخ مدار پاسخ حالت صفر می باشد و $s(t)$ است و شامل دو قسمت $y(t) = y_h + y_P$

۲- پاسخ دائم مدار نیز با توجه به متغیر پاسخ (ولتاژ خازن یا جریان سلف) یا برابر صفر یا مقدار ثابت می باشد .

۳- برای تعیین پاسخ همگن ریشه های معادله مشخصه

$$a_n S^n + a_{n-1}S^{n-1} + ... + a_1 S + a_0 = 0$$

را بدست آورده و با توجه به فرکانس های طبیعی حاصل از معادله مشخصه می توان پاسخ $s(t)$ را مانند مدار های RLC عمومی تحلیل نمود .

فرضاً اگر ریشه های معادله مشخصه متمایز باشند در این صورت پاسخ $s(t)$ برابر است با :

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{S_i t} + (0or1)$$

و برای تعیین ها A_iها در پاسخ به $u(t)$ ابتدا مقادیر $\frac{dS}{dt}, \frac{d^2S}{dt^2}, ..., \frac{d^{n-1}S}{dt^{n-1}}$ در $t = 0^+$ محاسبه نموده و سپس با تشکیل دستگاه n معادله ای A_i ها را محاسبه می نماییم .

• ۶-٤- پاسخ مدار های .RLC عمومی به ورودی $\delta(t)$

برای تعیین پاسخ ضربه مدارهای RLC عمومی , روش کلی ذیل را علاوه بر روش های بیان شده در مورد مدار های RLC سری و موازی بیان می نماییم .

الف : معادله دیفرانسیل مدار را بر حسب متغیر پاسخ و ورودی می نویسیم .

فرضاً معادله دیفرانسیل مرتبه nام زیر حاصل می شود .

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + ... + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

ب : درجه مشتق پاسخ (n) را با درجه مشتق ورودی (m) مقایسه نموده سه حالت $n > m$ و $n = m$ و $n < m$ ممکن است در مورد معادله دیفرانسیل وجود داشته باشد .

در این صورت باید توجه نمود که پاسخ ضربه $h(t)$ با فرض فرکانس های طبیعی S_1 تا S_n حاصل از معادله مشخصه به صورت یکی از حالات زیر می باشد .

۱) $n > m$ حالت مناسب $\Rightarrow h(t) =$ (مشابه پاسخ ورودی صفر) $u(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{S_i t} u(t)$

۲) $n = m$ حالت نا مناسب $\Rightarrow h(t) =$ (مشابه پاسخ ورودی صفر) $u(t) + K\delta(t)$

در حالت دوم :

$$K = \frac{b_m}{a_n} = \frac{\text{ضریب بالاترین درجه مشتق ورودی}}{\text{ضریب بالاترین درجه مشتق پاسخ}}$$

۳) $n < m$ حالت نا مناسب

در این حالت در پاسخ ضربه علاوه بر تابع ضربه مشتق های آن در پاسخ می توانند وجود داشته باشند که بستگی به تفاضل n و m دارد .

$h(t) =$ (مشابه پاسخ ورودی صفر) $u(t) + K_1\delta(t) + K_2^{(1)}\delta(t) + K_3^{(2)}\delta(t) + ...$

ج : پس از تعیین فرم پاسخ ضربه $h(t)$ مشتق های $h(t)$ را تا مرتبه nام بدست آورده و در معادله دیفرانسیل مدار قرار داده و بجای ورودی $\delta(t)$ را قرار می دهیم سپس با مرتب کردن معادله اولاً ضریب $u(t)$ برابر صفر می گردد و ثانیاً با مساوی قرار دادن ضرایب $\delta(t)$ و مشتق های آن $\delta^{(1)}(t)$ و $\delta^{(2)}(t)$ و ... از طرفین معادله دیفرانسیل ضرایب پاسخ $h(t)$ را بدست می آوریم . نتیجتاً پاسخ ضربه مدار بدست می آید .

- **مثال(۶-۵) :** معادله دیفرانسیل یک مدار RLC عمومی عبارت است از :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y(t) = 2\frac{dx}{dt} + x(t)$$

در صورتیکه $x(t) = \delta(t)$ باشد پاسخ ضربه $h(t)$ را بدست آورید .

- **پاسخ:**

الف : معادله مشخصه معادله دیفرانسیل همگن را تشکیل داده و نوع پاسخ ورودی صفر را معین می نماییم .

$$S^2 + 5S + 6 = 0 \Rightarrow S = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \Rightarrow S_1 = -2, S_2 = -3$$

ب : با توجه به $n = 2$ (بالاترین درجه مشتق پاسخ) و $m = 1$ (بالاترین درجه مشتق ورودی) در معادله دیفرانسیل چون $n > m$ است بنابر این پاسخ ضربه حالت مناسب را دارد و عبارت است از :

$h(t) = (K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-3t})u(t)$

ج : از پاسخ $h(t)$ مشتق های اول و دوم را بدست می آوریم .

$$\frac{dh}{dt}=(-2K_1e^{-2t}-3K_2e^{-3t})u(t)+(K_1e^{-2t}+K_2e^{-3t})\delta(t)$$

با توجه به رابطه $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ نتیجه می شود :

$$\frac{dh}{dt}=(-2K_1e^{-2t}-3K_2e^{-3t})u(t)+(K_1+K_2)\delta(t)$$

و مشتق دوم $h(t)$ عبارت می شود از :

$$\frac{d^2h}{dt^2}=(4K_1e^{-2t}+9K_2e^{-3t})u(t)+(-2K_1-3K_2)\delta(t)+(K_1+K_2)\delta^{(1)}(t)$$

حال روابط حاصل از مشتق های $h(t)$ و پاسخ $h(t)$ را در معادله دیفرانسیل زیر قرار می دهیم و آن را مرتب می کنیم .

$$\frac{d^2h}{dt^2}+5\frac{dh}{dt}+6h(t)=2\delta^{(1)}(t)+\delta(t)$$

$$\left[(4K_1e^{-2t}+9K_2e^{-3t})u(t)+(-2K_1-3K_2)\delta(t)+(K_1+K_2)\delta^{(1)}(t)\right]+$$
$$5\left[(-2K_1e^{-2t}-3K_2e^{-3t})u(t)+(K_1+K_2)\delta(t)\right]+6(K_1e^{-2t}+K_2e^{-3t})u(t)=2\delta^{(1)}(t)+\delta(t)$$

$$\Rightarrow(4K_1e^{-2t}+9K_2e^{-3t}-10K_1e^{-2t}-15K_2e^{-3t}+6K_1e^{-2t}+6K_2e^{-3t})u(t)+$$
$$(-2K_1-3K_2+5K_1+5K_2)\delta(t)+(K_1+K_2)\delta^{(1)}(t)=2\delta^{(1)}(t)+\delta(t)$$

همانگونه که مشاهده می شود ضریب $u(t)$ برابر صفر می گردد و با مساوی قرار دادن ضرایب $\delta(t)$ و $\delta^{(1)}(t)$ از طرفین معادله ساده شده K_1 و K_2 یک دستگاه بر حسب K_1 و K_2 بدست می آید .

$$(3K_1+2K_2)\delta(t)+(K_1+K_2)\delta^{(1)}(t)=2\delta^{(1)}(t)+\delta(t)$$

$$\begin{cases}3K_1+2K_2=1\\K_1+K_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}K_1=-3\\K_2=5\end{cases}$$

بنابر این پاسخ ضربه $h(t)$ برابر است با :

$$h(t)=(-3e^{-2t}+5e^{-3t})u(t)$$

حال به تحلیل مثالی کلی در مورد تجزیه و تحلیل مدار های RLC عمومی می پردازیم .

- **مثال(۶-۶) :** در مدار شکل (۶-۹- الف) الف : معادله دیفرانسیل مدار را بر حسب $i_L(t)$ و ورودی $v_S(t)$ بنویسید .

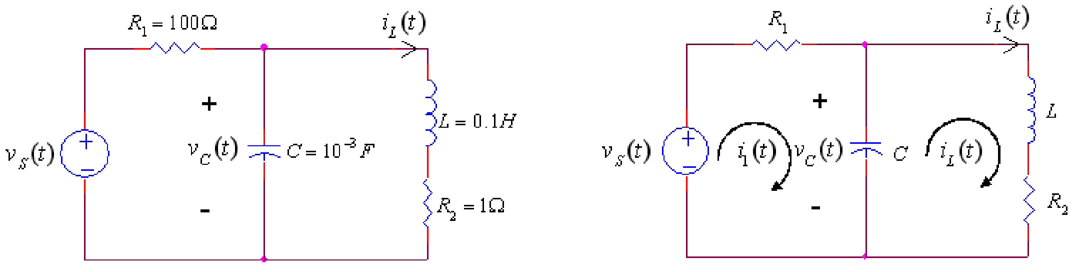
ب : $i_L(t)$ را به ازاء $v_S(t)=4+6u(t)$ به دست آورید .

ج : معادلات حالت مدار رات به صورت ماتریس برای بردار حالت $X=\begin{bmatrix}v_C(t)\\i_L(t)\end{bmatrix}$ بنویسید .

د : Q ضریب کیفیت مدار را حساب کنید .

ه : مقاومت منبع R_1 چقدر باشد تا نوع پاسخ میرائی بحرانی گردد .

و : پاسخ ضربه $i_L(t)=h(t)$ را به ازای $v_S(t)=\delta(t)$ بدست آورید .



(الف) شکل(۶-۹) (ب)

• پاسخ:

الف : معادله دیفرانسیل مدار را با استفاده از روش مش از مدار شکل (۶-۹-ب) بدست می آوریم .

معادله (۱)

$$\begin{cases} R_1 i_1(t) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t (i_1(t) - i_L(t))dt + v_C(0) = v_S(t) \\ L\dfrac{di_L}{dt} + R_2 i_L(t) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t (i_L(t) - i_1(t))dt - v_C(0) = 0 \end{cases}$$

معادله (۲)

با جمع کردن دو معادله (۱) و (۲) ، $i_1(t)$ را بر حسب $i_L(t)$ بدست می آوریم و با قرار دادن در مشتق معادله (۲) معادله دیفرانسیل بدست می آید .

بنابر این جمع دو معادله برابر است با :

$$R_1 i_1(t) + L\frac{di_L}{dt} + R_2 i_L(t) = v_S(t) \qquad \text{(۳) معادله}$$

$$i_1(t) = \frac{1}{R_1}\left[v_S(t) - L\frac{di_L}{dt} - R_2 i_L(t)\right] \qquad \text{(٤) معادله}$$

مشتق معادله (۲) عبارت است از :

$$L\frac{d^2 i_L}{dt^2} + R_2\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C}i_L(t) - \frac{1}{C}i_1(t) = 0 \qquad \text{(۵) معادله}$$

در معادله (۵) بجای $i_1(t)$ از معادله (٤) استفاده نموده و مقدار قرار می دهیم .

$$L\frac{d^2 i_L}{dt^2} + R_2\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C}i_L(t) - \frac{1}{R_1 C}\left[v_S(t) - L\frac{di_L}{dt} - R_2 i_L(t)\right] = 0$$

$$L\frac{d^2 i_L}{dt^2} + R_2\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C}i_L(t) + \frac{L}{R_1 C}\frac{di_L}{dt} + \frac{R_2}{R_1 C}i_L(t) = \frac{1}{R_1 C}v_S(t)$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C}\right)\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)i_L(t) = \frac{1}{LR_1 C}v_S(t) \qquad \text{(۶) معادله}$$

معادله (۶) معادله دیفرانسیل مدار است که با جایگزین مقدار اجزاء مدار معادله بصورت زیر در می آید .

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2}+20\frac{di_L}{dt}+10100 i_L=100 v_S(t)$$

ب : پاسخ $i_L(t)$ با توجه به ورودی $v_S(t)=4+6u(t)$ پاسخ کامل می باشد و مناسب است که پاسخ همگن و پاسخ دائم را مشخص و از رابطه $i_L(t)=i_h+i_P$ ، $i_L(t)$ را بدست آورد .

۱- تعیین پاسخ دائم : اگر پاسخ دائم $i_P=K$ فرض نماییم باید پاسخ در معادله دیفرانسیل صدق نماید , بنابر این نتیجه می شود :

$$10100K=100\times(4+6)\Rightarrow K=\frac{100\times 10}{10100}\Rightarrow K=\frac{10}{101}A$$

۲- تعیین پاسخ همگن : معادله مشخصه معادله دیفرانسیل را تشکیل و فرکانس های طبیعی را بدست می آوریم .

$$S^2+20S+10100=0\Rightarrow S=-10\pm\sqrt{100-10100}\Rightarrow S=-10\pm j100$$

بنابر این پاسخ همگن از نوع میرائی ضعیف است .

$$i_P=Ke^{-10t}\cos(100t+\phi)$$

و در نتیجه :

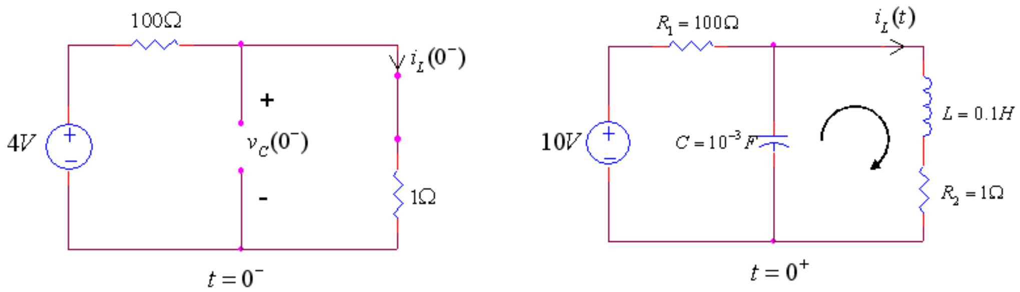
$$i_L(t)=i_h+i_P=Ke^{-10t}\cos(100t+\phi)+\frac{10}{101}A$$

۳- برای تعیین K و ϕ باید از شرایط اولیه استفاده کرد و $i_L(t)$ و $\frac{di_L}{dt}$ را در $t=0^+$ محاسبه نمود .

از مدار معادل شکل (۶-۱۰-الف) در زمان $t=0^-$ ، $i_L(0^-)$ و $v_C(0^-)$ را بدست می آوریم .

$$i_L(0^-)=\frac{4}{100+1}=\frac{4}{101}A$$

$$v_C(0^-)=\frac{4}{101}\times 1=\frac{4}{101}V$$



(الف) شکل(۶-۱۰) (ب)

حال از مدار شکل (۶-۱۰-ب) در زمان $t=0^+$ و با توجه به مقادیر $i_L(0^+)=i_L(0^-)=\frac{4}{101}$ و $v_C(0^+)=v_C(0^-)=\frac{4}{101}$ مقدار $\frac{di_L}{dt}(0^+)$ را محاسبه می کنیم .

معادله حلقه نشان داده شده در شکل (۶-۱۰-ب) را می نویسیم :

$$L\frac{di_L}{dt}(0^+)+R_2 i_L(0^+)-v_C(0^+)=0$$

$$0.1\frac{di_L}{dt}(0^+)+1\times\frac{4}{101}-\frac{4}{101}=0$$

در نتیجه :

$$\frac{di_L}{dt}(0^+)=0$$

با توجه به شرایط اولیه $i_L(0^+)=\frac{4}{101}$ و $\frac{di_L}{dt}(0^+)=0$ دستگاه زیر را تشکیل و K و ϕ را محاسبه می کنیم .

$$\begin{cases} i_L(0^+)=\frac{4}{101}=K\cos\phi+\frac{10}{101} \\ \frac{di_L}{dt}(0^+)=0=-10K\cos\phi-100K\sin\phi \end{cases}$$

$K\cos\phi=-\frac{6}{101}$ و $10K\sin\phi=-K\cos\phi=\frac{6}{101}$

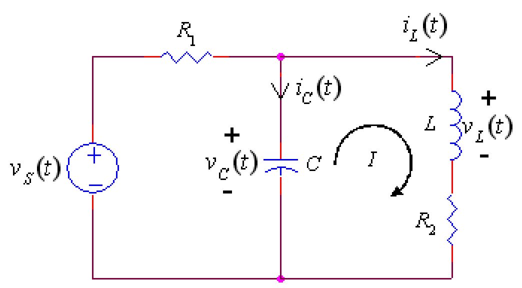
$$K\sin\phi=\frac{6}{1010}\Rightarrow tg\phi=\frac{K\sin\phi}{K\cos\phi}=-\frac{\frac{6}{1010}}{\frac{6}{101}}\Rightarrow tg\phi=-0.1\Rightarrow \phi=tg^{-1}(-0.1)\Rightarrow \phi=-5.7^\circ$$

$$K\cos\phi=\frac{-6}{101}\Rightarrow K\cos(-5.7^0)=\frac{-6}{101}\Rightarrow K=-\frac{6}{101\times 0.995}=-6.059\approx -0.06$$

بنابر این $i_L(t)$ برابر است با :

$$i_L(t)=-0.06e^{-10t}\cos(100t-5.7^\circ)+\frac{10}{101}$$

ج : برای بدست آوردن معادلات حالت مدار همانطور که می دانیم $\frac{dv_C}{dt}=\frac{i_C}{C}$ و $\frac{di_L}{dt}=\frac{v_L}{L}$ است . بنابر این برای محاسبه i_C یک KCL در گره (۱) و برای محاسبه v_L یک KVL در حلقه (I) مدار شکل (۶-۱۱) می نویسیم .



شکل(۶-۱۱)

$$\text{KCL}(1)\Rightarrow C\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C(t)-v_S(t)}{R_1}+i_L(t)=0$$

$$\text{KVL}(\text{I})\Rightarrow L\frac{di_L}{dt}+R_2 i_L(t)-v_C(t)=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{dv_C}{dt}=-\dfrac{v_C(t)}{R_1C}-\dfrac{i_L(t)}{C}+\dfrac{v_S}{C}\\ \dfrac{di_L}{dt}=\dfrac{v_C(t)}{L}-\dfrac{R_2}{L}i_L(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dv_C}{dt}=-\dfrac{v_C(t)}{100\times10^{-3}}-\dfrac{i_L(t)}{10^{-3}}+\dfrac{v_S(t)}{10^{-3}}\\ \dfrac{di_L}{dt}=\dfrac{v_C(t)}{0.1}-\dfrac{1}{0.1}i_L(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dv_C}{dt}=-10v_C(t)-10^3i_L(t)+10^3v_S(t)\\ \dfrac{di_L}{dt}=10v_C(t)-10i_L(t)\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{dv_C}{dt}\\ \dfrac{di_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & -10^3\\ 10 & -10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_C(t)\\ i_L(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10^3\\ 0\end{bmatrix}v_S(t)$$

د : ضریب کیفیت $Q=\dfrac{\omega_0}{2\alpha}$ است . بنابر این اگر معادله دیفرانسیل مدار را در نظر بگیریم .

$$\frac{d^2i_L}{dt^2}+20\frac{di_L}{dt}+10100i_L(t)=100v_S(t)$$

و با معادله درجه دوم :

$$\frac{d^2i_L}{dt^2}+2\alpha\frac{di_L}{dt}+\omega_0^2i_L(t)=100v_S(t)$$

مقایسه کنیم چنین نتیجه می شود :

$$2\alpha=20,\omega_0^2=10100$$

در نتیجه :

$$Q=\frac{\sqrt{10100}}{20}=\frac{10\sqrt{101}}{20}\approx5$$

ه : برای اینکه پاسخ همگن مدار میرائی بحرانی گردد لازم است ضریب کیفیت مدار ($Q=\dfrac{1}{2}$) گردد .

حال اگر به معادله دیفرانسیل مدار (معادله (۶)) دقت شود مشاهده می شود که :

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC}(1+\frac{R_2}{R_1}),2\alpha=(\frac{1}{R_1C}+\frac{R_2}{L})$$

می باشد . اگر بجای اجزاءِ مدار به غیر از R_1 مقدار قرار دهیم نتیجه می شود :

$$\omega_0^2=\frac{1}{10^{-4}}(1+\frac{1}{R_1})=10^4(1+\frac{1}{R_1})$$

$$2\alpha=(\frac{1}{R_1\times10^{-3}}+\frac{1}{0.1})=(\frac{10^3}{R_1}+10)$$

$$\frac{1}{2}=\frac{\omega_0}{2\alpha}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{10^4(1+\frac{1}{R_1})}}{10(1+\frac{100}{R_1})}\Rightarrow20\sqrt{1+\frac{1}{R_1}}=1+\frac{100}{R_1}$$

$$400(1+\frac{1}{R_1})=(1+\frac{100}{R_1})^2\Rightarrow400+\frac{400}{R_1}=1+\frac{10^4}{R_1^2}+\frac{200}{R_1}$$

$$400=1+\frac{10^4}{R_1^2}-\frac{200}{R_1}\Rightarrow400=(1-\frac{100}{R_1})^2$$

$\Rightarrow 20=(1-\frac{100}{R_1}) \Rightarrow 19=-\frac{100}{R_1}$ غیر قابل قبول

$\Rightarrow 20=-(1-\frac{100}{R_1}) \Rightarrow 21=\frac{100}{R_1} \Rightarrow R_1=\frac{100}{21} \Rightarrow R_1=4.76\Omega$

و : برای تعیین پاسخ ضربه $h(t)$

اگر در معادله دیفرانسیل مدار (معادله (۶)) را بر حسب پاسخ ضربه تنظیم کنیم مشاهده می شود $n=2$ و $m=0$ است . بنابر این پاسخ ضربه دارای حالت مناسب است و بدین صورت پاسخ $h(t)$ را حساب می کنیم .

معادله دیفرانسیل مدار $\frac{d^2h}{dt^2}+20\frac{dh}{dt}+10100h(t)=100\delta(t)$

معادله پاسخ ضربه $h(t)=Ke^{-10t}\cos(100t+\phi)u(t)$

۱- مشتق های مرتبه اول و دوم $h(t)$ را با توجه به رابطه $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ حساب می کنیم .

$$\frac{dh}{dt}=\left[-10Ke^{-10t}\cos(100t+\phi)-100Ke^{-10t}\sin(100t+\phi)\right]u(t)+(K\cos\phi)\delta(t)$$

$$\frac{d^2h}{dt^2}=[100Ke^{-10t}\cos(100t+\phi)+1000Ke^{-10t}\sin(100t+\phi)+1000Ke^{-10t}\sin(100t+\phi)$$
$$-10000Ke^{-10t}\cos(100t+\phi)]u(t)+[-10K\cos\phi-100K\sin\phi]\delta(t)+(K\cos\phi)\delta^{(1)}(t)$$

۲- با جایگذاری $\frac{dh}{dt}$ و $\frac{d^2h}{dt^2}$ و مرتب کردن معادله و را محاسبه می کنیم .

$$[-9900Ke^{-10t}\cos(100t+\phi)+2000Ke^{-10t}\sin(100t+\phi)]u(t)+[-10K\cos\phi$$
$$-100K\sin\phi]\delta(t)+(K\cos\phi)\delta^{(1)}(t)+20[-10Ke^{-10t}\cos(100t+\phi)$$
$$-100Ke^{-10t}\sin(100t+\phi)]u(t)+20(K\cos\phi)\delta(t)+10100Ke^{-10t}\cos(100t+\phi)u(t)=100\delta(t)$$

$$[-9900Ke^{-10t}\cos(100t+\phi)+2000Ke^{-10t}\sin(100t+\phi)-200Ke^{-10t}\cos(100t+\phi)$$
$$-2000Ke^{-10t}\sin(100t+\phi)+10100Ke^{-10t}\cos(100t+\phi)]u(t)+[-10K\cos\phi$$
$$-100K\sin\phi+20K\cos\phi]\delta(t)+(K\cos\phi)\delta^{(1)}(t)=100\delta(t)$$

پس از ساده کردن داریم :

$$(10K\cos\phi-100K\sin\phi)\delta(t)+(K\cos\phi)\delta^{(1)}(t)=100\delta(t)$$

حال از دستگاه معادله زیر K و ϕ را محاسبه می کنیم .

$$\begin{cases}10K\cos\phi-100K\sin\phi=100\\K\cos\phi=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}K\sin\phi=-1\\K\cos\phi=0\end{cases}$$

$$tg\phi=\frac{K\sin\phi}{K\cos\phi}=-\infty \Rightarrow \phi=-\frac{\pi}{2}$$

و در نتیجه $K\sin(-\frac{\pi}{2})=-1$ و یا $K=1$

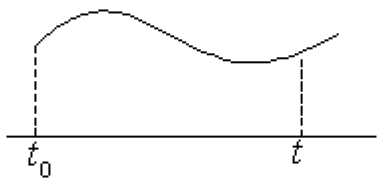
بنابر این پاسخ ضربه مدار برابر است با :

$$h(t)=e^{-10t}\cos(100t-\frac{\pi}{2})u(t)$$

یا $h(t) = e^{-10t}\sin(100t)u(t)$

• ۶-۵- انتگرال کانولوشن و تعیین پاسخ حالت صفر مدارهای خطی به ورودی دلخواه

هرگاه یک مدار RLC خطی تغییر ناپذیر با زمان با ورودی $x(t)$ که یک موج مانند شکل (۶-۱۲) باشد و بخواهیم پاسخ حالت صفر مدار $y_0(t)$ را به ازاء $x(t)$ بدست آوریم بدلیل شرایط خطی (جمع پذیری و همگن بودن) در صورتیکه پاسخ ضربه مدار $h(t)$ مشخص باشد می توان ثابت کرد که پاسخ حالت صفر مدار به ازاء $x(t)$ از انتگرال $y_0(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$ که انتگرال کانولوشن نامیده می شود قابل محاسبه است .



شکل(۶-۱۲)

- ❖ در صورتیکه مدار خطی و تغییر پذیر با زمان باشد بدلیل اینکه پاسخ ضربه انتقال زمانی را نمی پذیرد در این صورت از انتگرال زیر پاسخ حالت صفر قابل محاسبه می باشد .

$$y_0(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

- ❖ در مورد استفاده از انتگرال کانولوشن باید توجه نمود , پاسخ تا زمان حد بالای انتگرال قابل محاسبه است , اما زمان حد پایین بدلیل اینکه مدار در آن زمان در حالت آرامش است (شرایط اولیه صفر است) تأثیری در انتگرال ندارد .
- ❖ انتگرال کانولوشن برای تعیین پاسخ مدار های گسترده نیز قابل کاربرد است .
- ❖ انتگرال کانولوشن را با فرض $t_0 = 0$ (حد پایین) به دو صورت می توان نوشت و به کار برد که در واقع قرینه هم می باشند .

$$y_0(t) = \int_{0^-}^{t} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{0^-}^{t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

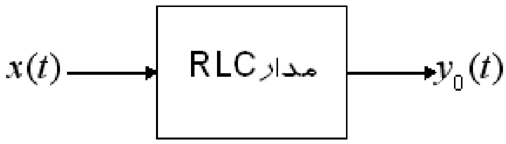
همان گونه که مشاهده می شود برای استفاده از انتگرال اول کانولوشن $y_0(t) = \int_{0}^{t} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$

بدین صورت عمل می گردد که ابتدا متغیر زمان ورودی و پاسخ ضربه را تغییر داده و از t به τ تبدیل می کنیم . سپس قرینه پاسخ ضربه $h(\tau)$ یعنی $h(-\tau)$ را مشخص می کنیم و سپس این تابع را به اندازه t انتقال زمانی داده و در $x(\tau)$ ضرب نموده و سپس انتگرال گیری انجام می شود و برای معین کردن حدود انتگرال از روش ترسیمی کمک می گیریم .

و در مورد استفاده از انتگرال دوم کانولوشن همانطور که مشاهده می شود :

$y_0(t)=\int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau$ نیز بصورت قرینه عمل می کنیم .بدین مفهوم که اول متغیر زمانی t را به τ تبدیل نموده و سپس قرینه $x(\tau)$ یعنی $x(-\tau)$ را مشخص و سپس این تابع را به اندازه t انتقال زمانی داده و در پاسخ ضربه $h(\tau)$ ضرب و سپس انتگرالی انجام می شود .

• **مثال(۶-۷) :** در مدار RLC خطی تغییر ناپذیر با زمان شکل (۶-۱۳) اگر $x(t)=\delta(t-t_1)$ باشد پاسخ مدار $y_0(t)$ را با استفاده از انتگرال کانولوشن بدست آورید .



شکل(۶-۱۳)

• پاسخ:

ابتدا با توجه به مطالب ارائه شده در قسمت های قبل بدون استفاده از انتگرال کانولوشن پاسخ را بدست می آوریم . بدین صورت که اگر پاسخ ضربه مدار $h(t)$ باشد یعنی به ازاء $y(t)=h(t), x(t)=\delta(t)$ می شود . چون مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان است . بنابر این انتقال را می پذیرد و وقتی ورودی به اندازه t_0 انتقال یابد $x(t-t_0)=\delta(t-t_1)$ پاسخ حالت صفر به اندازه t_1 انتقال می یابد یعنی برابر $y(t-t_1)$ می گردد .

در نتیجه $y(t-t_0)=h(t-t_1)$ می شود .

حال این پاسخ را با استفاده از انتگرال کانولوشن بدست می آوریم .

$$y_0(t)=\int_{0^-}^{t} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

در $x(t)=\delta(t-t_1)$ متغیر t را به τ تبدیل می کنیم . بنابر این $x(\tau)=\delta(\tau-t_1)$ می شود وقتی در انتگرال قرار دهیم نتیجه می شود .

$$y_0(t)=\int_{0^-}^{t} h(t-\tau)\delta(\tau-\tau_1)d\tau$$

از طرف دیگر در مورد تابع ضربه داشتیم $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ بنابر این تابع ضربه $\delta(\tau-t_1)$ در آرگومان صفر خود عمل نموده و بجای τ متغیر t_1 قرار می گیرد زیرا : $(\tau-t_1)=0 \Rightarrow \tau=t_1$

بنابر این :

$$y_0(t)=\int_{0^-}^{t} h(t-\tau)\delta(\tau-\tau_1)d\tau=\int_0^t h(t-t_1)\delta(\tau-t_1)d\tau$$

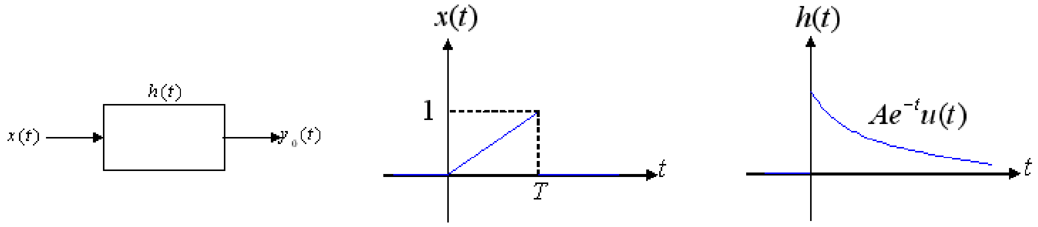
چون $h(t-t_1)$ به متغیر انتگرال بستگی ندارد می توان چنین نوشت :

$$y_0(t)=h(t-t_1)\int_{t_1^-}^{t_1^+}\delta(\tau-t_1)d\tau$$

و انتگرال برابر $\int_{t_1^-}^{t_1^+} \delta(\tau - t_1)d\tau = 1$ است .

در نتیجه : $y_0(t) = h(t - t_1)$

• **مثال(۶-۸) :** اگر ورودی مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان مطابق شکل (۶-۱٤-الف) و پاسخ ضربه آن $h(t)$ مطابق شکل (۶-۱٤-ب) باشد , پاسخ حالت صفر مدار را بدست آورید .



(الف) شکل(۶-۱٤) (ب)

• **پاسخ:**

اول اگر معادله $x(t)$ را در نظر بگیریم داریم :

$$x(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ \frac{1}{T}t, 0 < t < T \\ 0, t > T \end{cases}$$

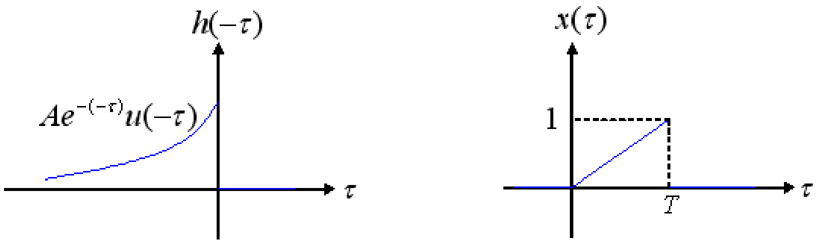
در نتیجه متغیر های زمان t را در $x(t)$ و $h(t)$ به τ تغییر می دهیم , نتیجه می شود :

$$x(\tau) = \begin{cases} 0, \tau < 0 \\ \frac{1}{T}\tau, 0 < \tau < T \\ 0, \tau > T \end{cases} \qquad h(\tau) = Ae^{-\tau}u(\tau)$$

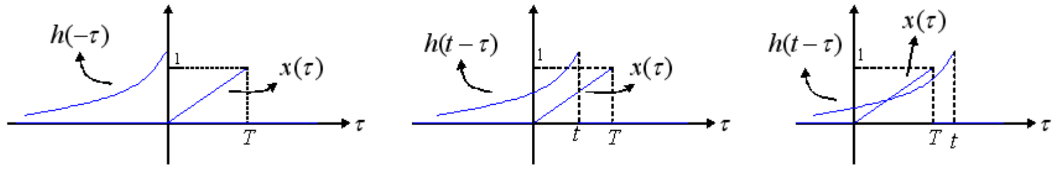
دوم اگر بخواهیم از انتگرال اول استفاده کنیم یعنی :

$$y_0(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

مطابق شکل (۶-۱۵-ا لف وب) $h(-\tau)$ و $x(\tau)$ را رسم می کنیم .



(ا لف) (ب)



(ج) (د) (ه)

شکل(۶-۱۵)

و اگر $h(-\tau)$ و $x(\tau)$ را در یک دستگاه مطابق شکل (۶-۱۵-ج) رسم کنیم در این حالت چون $t=0$ یعنی انتقال داده نشده , انتگرال برابر صفر است یعنی : $t<0, y_0(t)=0$

و اگر $h(-\tau)$ را به اندازه $0<t<T$ انتقال دهیم مطابق شکل (۶-۱۵-د) انتگرال در فاصله بین 0 تا t باید محاسبه گردد .

زیرا داریم :

$$h(t-\tau)=Ae^{-(t-\tau)}u(t-\tau)$$

$$y_0(t)=\int_0^t Ae^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\times\frac{\tau}{T}d\tau$$

$$y_0(t)=\frac{A}{T}\int_0^t \tau e^{-(t-\tau)}d\tau=\frac{A}{T}e^{-t}\int_0^t \tau e^{\tau}d\tau$$

که با استفاده از انتگرال $\int xe^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$ یا از روش جزءِ به جزءِ انتگرال را حساب می کنیم , نتیجه می شود :

$$y_0(t)=\frac{A}{T}e^{-t}\times\frac{e^{\tau}}{(+1)^2}(\tau-1)=\frac{A}{T}e^{-(t-\tau)}(\tau-1)\mid_0^t,0<t<T$$

$$y_0(t)=\frac{A}{T}(t-1)+\frac{A}{T}e^{-t}=\frac{A}{T}(e^{-t}+t-1),0\le t\le T$$

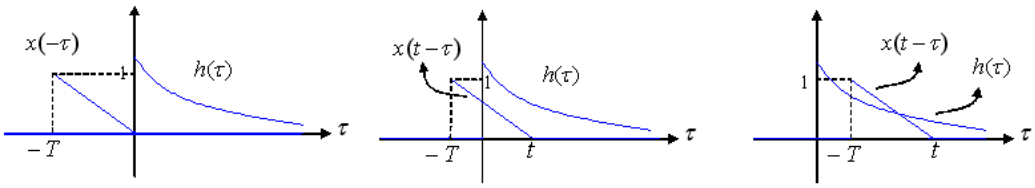
و پاسخ برای زمان های $t>T$ مطابق شکل (۶-۱۵- ه) می شود . در نتیجه حد بالای انتگرال T می باشد زیرا بعد از آن $x(\tau)$ صفر است .

$$y_0(t)=\int_0^t Ae^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\times\frac{\tau}{T}d\tau$$

$$y_0(t)=\frac{A}{T}e^{-t}\int_0^T \tau e^{\tau}d\tau=\frac{A}{T}e^{-t}\times\frac{e^{\tau}}{1}(\tau-1)\mid_0^T$$

$$y_0(t)=\frac{A}{T}e^{-t+T}(T-1)+\frac{A}{T}e^{-t}=\frac{A}{T}e^{-t}\left[Te^{T}-e^{T}+1\right],t\ge T$$

اگر از انتگرال دوم استفاده شود مطابق شکل (۶-۱۶-الف) داریم : $t\le 0, y_0(t)=0$



(الف) (ب) (ج)

شکل(۶-۱۶)

اگر $0 < t < T$ تغییر کند مطابق شکل (۶-۱۶-ب) :

$$y_0(t) = \int_0^t Ae^{\tau} u(\tau)\left(\frac{t-\tau}{T}\right) d\tau$$

$$y_0(t) = \frac{A}{T}\left[\int_0^t (te^{\tau} - \tau e^{\tau}) d\tau\right]$$

$$y_0(t) = \frac{A}{T}\left[te^{\tau} \Big|_0^t - \frac{e^{\tau}}{1}(\tau - 1)\Big|_0^t\right] = \frac{A}{T}\left[t(e^t - 1) - e^t(t-1) + 1\right]$$

$$y_0(t) = \frac{A}{T}(e^t + t - 1)$$

اگر $t > T$ گردد مطابق شکل (۶-۱۶-ج) داریم :

$$y_0(t) = \int_{t-T}^{t} Ae^{\tau}\left(\frac{t-\tau}{T}\right) d\tau$$

$$y_0(t) = \frac{A}{T}\int_{t-T}^{t} (te^{\tau} - \tau e^{\tau}) d\tau = \frac{A}{T}\left[te^{\upsilon} \Big|_0^t - e^{\tau}[\tau - 1]\Big|_0^t\right]$$

$$y_0(t) = \frac{A}{T}(te^t - t) - \frac{A}{T}\left[e^t(t-1) + \frac{A}{T}\right], t > T$$

جریان متناوب سینوسی در حالت دائم

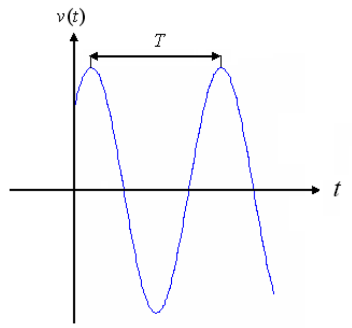
در این فصل به تجزیه و تحلیل مدار های RLC با ورودی سینوسی می پردازیم و پاسخ دائم را مورد بحث و بررسی قرار می دهیم . مطالبی که در این فصل ارائه می شوند عبارتند از : تعریف جریان متناوب سینوسی ، مقدار متوسط ، مقدار مؤثر موج های سینوسی و همچنین ضریب دامنه و ضریب شکل ، یادآوری اعداد مختلط و کاربرد آن ها در تحلیل مدارهای با جریان متناوب سینوسی ، اثر جریان متناوب سینوسی بر مقاومت ، سلف و خازن و مدار های RLC ، قوانین جریان و ولتاژ کیریشهف در جریان متناوب سینوسی یادآوری روش های تحلیلی با استفاده از مثال است و در ادامه به موضوع توان در جریان متناوب سینوسی و همچنین مسئله قضیه انتقال حداکثر توان و جمع پذیری توان ها و تصحیح ضریب توان می پردازیم .

• ۷-۱- تعریف جریان متناوب سینوسی

یک نیروی محرکه (ولتاژ) سینوسی از نگاه تحلیلی عبارت است از $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$ که با فرکانس زاویه ای $\omega = 2\pi f$ ایجاد می شود .

$f = \frac{1}{T}$ فرکانس موج بستگی به مولد و کاربرد آن دارد . بطوریکه در سیستم های قدرت این موج توسط ژنراتورهای آسکرون با فرکانس های تقریباً ثابت ۵۰ یا ۶۰ و یا ٤٠٠ هرتز ایجاد می شود . در صورتیکه در سیستم های مختلف الکترونیکی و مخابراتی توسط سیگنال ژنراتورها تا فرکانس های حتی چند گیگا هرتز تولید (GHZ) می گردد .

همانطور که در شکل (۷-۱) مشاهده می شود این موج یک موج پریود یک (تناوبی) است . زیرا $f(t) = f(t+T)$ می باشد .

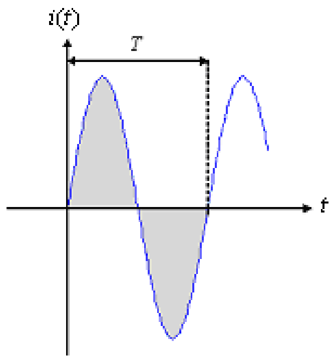


شکل (۷-۱)

❖ ۷-۱-۱- مقدار متوسط و مقدار مؤثر

مقدار متوسط یک موج متناوب مانند $f(t)$ که دارای دوره تناوب T باشد از رابطه $F_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ بدست می آید .

در مورد یک جریان متناوب سینوسی مانند $i(t) = I_m \sin \omega t$ همان گونه که در شکل (۷-۲) مشاهده می شود مقدار متوسط یک پریود برابر صفر است :



شکل(۷-۲)

اما در عمل در مورد جریان یا ولتاژ متناوب سینوسی مقدار متوسط را برای نیم پریود محاسبه می نمایند ، در نتیجه :

$$I_{av} = \frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin\omega t dt = \frac{2I_m}{\pi}$$

و یکی از کاربرد های مقدار متوسط جریان های متناوب سینوسی در تحلیل دستگاههای اندازه گیری الکتریکی می باشد .

اما آنچه در تحلیل مدارهای جریان متناوب سینوسی بیشتر مورد نظر می باشد مقدار مؤثر موج متناوب سینوسی است و مقدار مؤثر به شرح زیر تعریف می گردد .

اولاً مقدار مؤثر نیز خود به نوعی مقدار متوسط است و در مورد یک موج پریودیک (تناوبی) $f(t)$ از رابطه $F_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}$ بدست می آید . و مقدار $(R.M.S.)$ موج نامیده می شود زیرا مقدار مؤثر برابر جذر (ریشه دوم) مقدار متوسط مربع تابع است .

ثانیاً مقدار مؤثر موج متناوب سینوسی $i(t) = I_m \sin\omega t$ برابر است با :

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

❖ ۷-۱-۲- ضریب دامنه و ضریب شکل

در مورد موج های تناوبی (پریودیک) دو ضریب در اندازه گیری ها دارای اهمیت می باشد که در این قسمت به تعریف آنها پرداخته و مقدار آنها را برای جریان متناوب سینوسی محاسبه می کنیم .

الف – ضریب دامنه : اگر این ضریب را با K_a نمایش دهیم برابر است با :

$$\text{ضریب دامنه } K_a = \frac{\text{مقدار ماکزیمم دامنه موج متناوب}}{\text{مقدار مؤثر موج متناوب}}$$

که در مورد جریان متناوب سینوسی $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ ضریب دامنه برابر است با :

$$K_a = \frac{I_m}{\frac{I_m}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

و بطور مثال اگر ولتاژ متناوب سینوسی را با ولتمتر اندازه گیری نماییم و ولتمتر ۳۰ ولت را نشان دهد و اگر موج را روی اسیلوسکوپ مشاهده نماییم و دامنه آن را اندازه بگیریم ، دامنه موج برابر است با :

$V_m = 30\sqrt{2} = 42.3$ ولت

ب – ضریب شکل : اگر این ضریب را با K_f نشان دهیم برابر است با :

$$\text{ضریب دامنه } K_f = \frac{\text{مقدار مؤثر موج متناوب}}{\text{مقدار متوسط موج متناوب}}$$

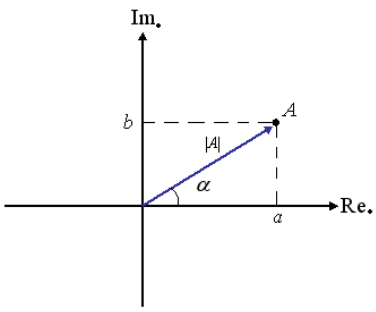
که در مورد جریان متناوب سینوسی $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ مقدار ضریب شکل برابر است با :

$$K_f = \frac{\frac{I_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2I_m}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.11$$

این ضریب K_f در طراحی و ساخت دستگاههای اندازه گیری جریان متناوب سینوسی کاربرد دارد .

• ۷-۲- یادآوری اعداد مختلط

یک عدد مختلط را معمولاً به دو فرم در صفحه مختلط نمایش می دهند .



شکل(۷-۳)

صفحه مختلط همانگونه که در شکل (۷-۳) نشان داده شده است دارای دو محور حقیقی (Real) و انگاری یا موهومی (Image) می باشد که بردار واحد محور حقیقی ۱+ و بردار واحد محور انگاری $+j$ می باشد و ($+j = \sqrt{-1}$) است . بنابر این نقطه A(بردار A) در صفحه مختلط را می توان چنین نشان داد .

۱- فرم دکارتی $A = a + jb$

که در این فرم تصویر نقطه یا بردار A بر روی محور حقیقی برابر a است و تصویر نقطه یا بردار A بر روی محور انگاری برابر b است که در بردار واحد محور انگاری j ضرب شده است .

۲- فرم قطبی یا فازوری $A = |A| \angle\alpha = |A| e^{j\alpha}$

که در این فرم نمایش $|A|$ طول فاصله بین مبدأ مختصات و نقطه A (طول بردار A) می باشد و زاویه α زاویه بردار A نسبت به جهت مثبت محور حقیقی است .

حال به ارائه چند نکته در مورد اعداد مختلط می پردازیم :

الف : تبدیل فرم های نمایش اعداد مختلط به یکدیگر

این دو فرم نمایش اعداد مختلط به هم قابل تبدیل می باشند بطوریکه برای تبدیل فرم دکارتی به فرم فازروی چنین عمل می شود .

با توجه به شکل (۷-۳) داریم :

$$A = a + jb$$
$$A = |A| e^{j\alpha}$$
$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{و} \quad tg\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{یا} \quad \alpha = tg^{-1}\frac{b}{a}$$

و بر عکس در صورتیکه بردار به فرم فازوری باشد برای تبدیل به فرم دکارتی می توان نوشت :

$$A = |A| e^{j\alpha}$$
$$A = a + jb \Rightarrow a = |A|\cos\alpha, b = |A|\sin\alpha$$

در این تبدیل همان گونه که مشاهده می شود می توان نتیجه گرفت که :

$$a = \mathrm{Re}\left[|A| e^{j\alpha} \right] \quad \text{و} \quad b = \mathrm{Im.}\left[|A| e^{j\alpha} \right]$$

ب : ضرب و تقسیم اعداد مختلط

برای ضرب و تقسیم اعداد مختلط از هر دو فرم دکارتی و فازوری می توان استفاده کرد . بطور مثال :

$$A_1 = a_1 + jb_1 = |A_1| e^{j\alpha_1}$$
$$A_2 = a_2 + jb_2 = |A_2| e^{j\alpha_2}$$
$$A_1 A_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$
$$A_1 A_2 = |A_1| e^{j\alpha_1} |A_2| e^{j\alpha_2} = |A_1||A_2| e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)}$$
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{|A_1| e^{j\alpha_1}}{|A_2| e^{j\alpha_2}} = \left|\frac{A_1}{A_2}\right| e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

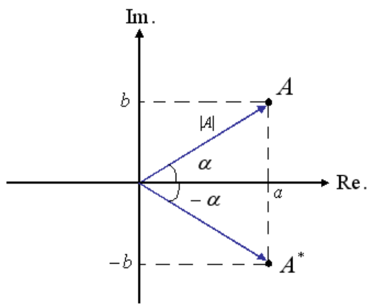
ج : جمع و تفریق اعداد مختلط

برای جمع و تفریق اعداد مختلط فقط از فرم دکارتی می توان استفاده نمود و بنابر این اگر اعداد مختلط به صورت فازوری (قطبی) داده شده باشند باید آن ها را مطابق بند الف به فرم دکارتی تبدیل نمود و سپس جمع یا تفریق را انجام داد ، و جمع و تفریق دو بردار A_1 و A_2 برابر است با :

$$A_1 \pm A_2 = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) \pm j(b_1 + b_2)$$

د : بردار مزدوج

بردار مختلط A دارای یک بردار مزدوج مختلط A^* است که بردار A و بردار مزدوج آن A^* در شکل (۷-٤) نشان داده شده اند .



شکل(۷-٤)

و از لحاظ تحلیلی عبارتست :

بردار A : $A = a + jb = |A|\,e^{j\alpha}$

بردار مزدوج A^* : $A^* = a - jb = |A|\,e^{-j\alpha}$

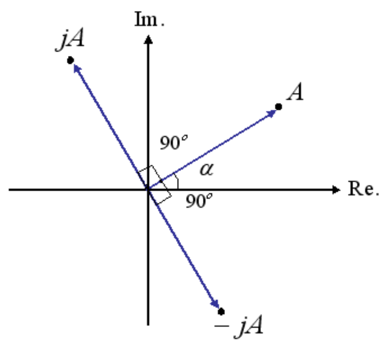
ه ۱:- ضرب بردار A در بردار واحد محور انگاری $(+j)$

بردار $(+j)$ را نیز به فرم فازوری می توان بصورت $j = e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{j90^\circ}$ نوشت .

در نتیجه اگر بردار $A = |A|\,e^{j\alpha}$ را در بردار $+j$ ضرب کنیم حاصل ضرب عبارت است از :

$$jA = e^{j90^\circ}\,|A|\,e^{j\alpha} = |A|\,e^{j(\alpha+90^\circ)}$$

با توجه به نتیجه تحلیل و شکل (۷-۵) می توان چنین بیان کرد که اگر بردار A را در بردار j ضرب کنیم بردار A برابر ۹۰ درجه در جهت مثلثاتی (خلاف جهت عقربه های ساعت) می چرخد .



شکل(۷-۵)

ه ۲: - ضرب بردار A در بردار $(-j)$

بردار $(-j)$ به فرم فازوری عبارت است از : $-j = e^{-j90^\circ}$

در نتیجه اگر بردار $A = |A|\,e^{j\alpha}$ را در $(-j)$ ضرب کنیم حاصلضرب برابر است با :

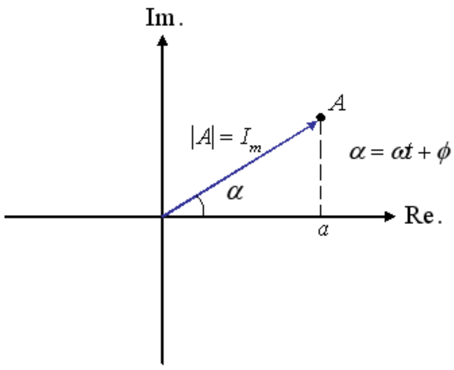
$$-jA = e^{-j90^\circ}\,|A|\,e^{j\alpha} = |A|\,e^{j(\alpha-90^\circ)}$$

با توجه به تحلیل و شکل (۷-۵) چنین می توان نتیجه گرفت که بردار A به اندازه 90° در جهت عقربه های ساعت می چرخد .

و : نمایش جریان متناوب سینوسی به فرم فازوری

اگر یک بردار مختلط A مطابق شکل (۷-۶) در نظر بگیریم تصویر بردار بر محور حقیقی برابر است با :

$$a = |A| \cos\alpha = \text{Re}.\left[|A| e^{j\alpha}\right]$$

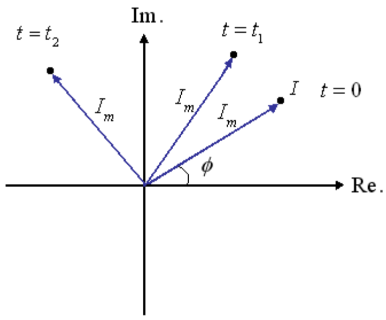


شکل(۷-۶)

مشاهده می شود که یک موج سینوسی جریان مانند $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ را می توان تصویر یک بردار مختلط با قدر مطلق $|A| = I_m$ و زاویه $\alpha = (\omega t + \phi)$ بر محور حقیقی در نظر گرفت .

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}\left[I_m e^{j(\omega t + \phi)}\right] = \text{Re}\left[I_m e^{j\phi} . e^{j\omega t}\right]$$

از طرف دیگر جمله $e^{j\omega t}$ بردار ثابت $I = I_m e^{j\phi}$ را در صفحه مختلط می چرخاند ، مانند شکل (۷-۷) که بردار زمان های $t = 0$ و $t = t_1$ و $t = t_2$ نشان داده شده است .



شکل(۷-۷)

$$I = I_m e^{j\phi} \quad t = 0$$

$$I e^{j\omega t_1} = I_m e^{j\phi} e^{j\omega t_1} \quad t = t_1$$

$$I e^{j\omega t_2} = I_m e^{j\phi} e^{j\omega t_2} \quad t = t_2$$

بنابر این اگر $t = 0$ فرض شود بردار $I = I_m e^{j\phi}$ را دامنه فازوری جریان (دامنه مختلط) جریان گویند که شامل دامنه موج جریان و زاویه فاز جریان می باشد . برای آشنایی بیشتر با تبدیل جریان متناوب سینوسی به فرم فازوری (فاز برداری) و بر عکس به مثال های زیر می پردازیم .

- **مثال(۷-۱) :** جریان و ولتاژ های سینوسی داده شده را به فرم فازوری تبدیل کنید .

۱) $i(t) = 2\cos(100t + 30^\circ)$

۲) $v(t) = 30\cos(100\pi t - 45^\circ)$

۳) $v(t) = 100\sin(10t + 60^\circ)$

• **پاسخ :**

۱) $i(t) = 2\cos(100t + 30^\circ) = \mathrm{Re}\left[2e^{j(100t+30^\circ)}\right] = \mathrm{Re}\left[2e^{j30^\circ}e^{j100t}\right] = \mathrm{Re}\left[Ie^{j\omega t}\right]$

در نتیجه فازور جریان I برابر است با :

$I = 2e^{j30^\circ}\ \mathrm{A} = 2\angle 30^\circ\ \mathrm{A}$

۲) $v(t) = 30\cos(100\pi t - 45^\circ) = \mathrm{Re}\left[30e^{j(100\pi t - 45^\circ)}\right] = \mathrm{Re}\left[30e^{-j45^\circ}e^{j100\pi t}\right] = \mathrm{Re}\left[Ve^{j\omega t}\right]$

در نتیجه فازور ولتاژ V برابر است با :

$V = 30e^{-j45^\circ}\ \mathrm{V} = 30\angle -45^\circ\ \mathrm{V}$

۳) $v(t) = 100\sin(10t + 60^\circ)$

چون تابع بصورت سینوسی داده شده است مناسب است که ابتدا آن را به صورت تابع کسینوسی در آوریم و سپس عملیات را در مورد تبدیل فازوری آن انجام دهیم .

$v(t) = 100\sin(10t + 60^\circ) = 100\cos(10t + 60^\circ - 90^\circ) = 100\cos(10t - 30^\circ)$

$v(t) = 100\cos(10t - 30^\circ) = \mathrm{Re}\left[100e^{j(10t-30^\circ)}\right] = \mathrm{Re}\left[100e^{-j30}e^{j10t}\right] = \mathrm{Re}\left[Ve^{j\omega t}\right]$

در نتیجه فازور ولتاژ برابر است با :

$V = 100e^{-j30^\circ} = 100\angle -30^\circ\ \mathrm{V}$

• **مثال(۷-۲) :** جریان و ولتاژ های فازوری داده شده را در حوزه زمان بنویسید .

۱) $5\angle -30^\circ\quad \mathrm{A}, \omega = 2\, rad/\sec$

۲) $60\angle 60^\circ\quad \mathrm{V}, f = 50HZ$

• **پاسخ :**

۱) $i(t) = \mathrm{Re}\left[5e^{-j30^\circ}e^{j2t}\right] = \mathrm{Re}\left[5e^{-j(2t-30^\circ)}\right]$

$i(t) = 5\cos(2t - 30^\circ)\ \mathrm{A}$

۲) $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 100\pi$ و $v(t) = \mathrm{Re}\left[60e^{j60}e^{j100\pi}\right] = \mathrm{Re}\left[60e^{j(100\pi + 60^\circ)}\right]$

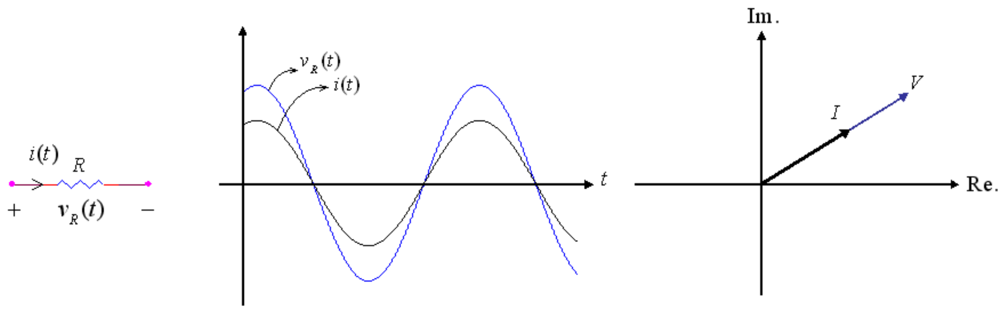
$v(t) = 60\cos(100\pi t + 60^\circ)\ \mathrm{V}$

• ۷-۳- اثر جریان متناوب سینوسی بر مقاومت و سلف و خازن ومدا ر RLC

در این قسمت ابتدا به بررسی اثر جریان متناوب سینوسی بر اجزاءِ مدار R و L و C پرداخته و سپس به تجزیه و تحلیل مدار RLC سری با ورودی سینوسی می پردازیم .

❖ ۷-۳-۱- اثر جریان متناوب سینوسی بر مقاومت

اگر جریان $i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi)$ از مقاومت R عبور نماید مطابق شکل (۷-۸-الف)



(الف) (ب) (ج)

شکل(۷-۸)

$$v_R(t) = Ri(t) = RI_m\cos(\omega t+\phi) = V_m\cos(\omega t+\phi)$$

همان گونه که از معادله $v_R(t)$ و شکل (۷-۸-ب) مشخص می شود اولاً $V_m = RI_m$ واحتلاف فاز بین ولتاژ و جریان صفر است و ثانیاً اگر رابطه فازوری بین ولتاژ و جریان مقاومت را بخواهیم مورد بررسی قرار دهیم مشاهده می شود .

$$i(t) = I_m\cos(\omega t+\phi) = \mathrm{Re}\left[I_m e^{j(\omega t+\phi)}\right] = \mathrm{Re}\left[I_m e^{j\phi}e^{j\omega t}\right]$$
$$i(t) = \mathrm{Re}\left[Ie^{j\omega t}\right] \Rightarrow I = I_m e^{j\phi}$$
$$v_R(t) = V_m\cos(\omega t+\phi) = \mathrm{Re}\left[V_m e^{j(\omega t+\phi)}\right] = \mathrm{Re}\left[V_m e^{j\phi}e^{j\omega t}\right]$$
$$v_R(t) = \mathrm{Re}\left[Ve^{j\omega t}\right] \Rightarrow V = V_m e^{j\phi}$$
$$V = V_m e^{j\phi} = RI_m e^{j\phi} \Rightarrow V = RI$$

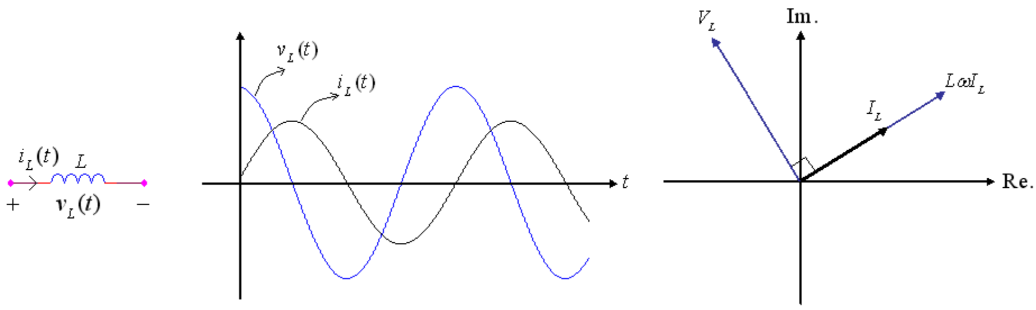
بنابر این نتیجه می شود :

$$\begin{cases} V_R = RI_R \\ I_R = GV_R \end{cases}$$

و شکل (۷-۸-ج) نشان می دهد که ولتاژ و جریان مقاومت بصورت برداری دو بردار هم فاز می باشند .

❖ ۷-۳-۲- اثر جریان متناوب سینوسی بر سلف

اگر سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان با القاگری L مطابق شکل (۷-۹-الف) در نظر بگیریم که جریان متناوب $i(t) = I_m\cos(\omega t+\phi)$ از آن عبور نماید:



(الف) (ب) (ج)

شکل(۷-۹)

ولتاژ دو سر سلف برابر است با :

$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt}$$
$$v_L(t) = L\frac{d}{dt}\left[I_m \cos(\omega t+\phi)\right] = -L\omega I_m \sin(\omega t+\phi)$$
$$v_L(t) = L\omega I_m \cos(\omega t+\phi+90^\circ)$$
$$v_L(t) = V_m \cos(\omega t+\phi+90^\circ)$$

از رابطه $v_L(t)$ نتایج زیر حاصل می شود :

الف – بین ولتاژ و جریان سلف اختلاف فاز ۹۰ درجه وجود دارد که بدین طریق قابل بیان است و در این حالت اختلاف فاز در شکل (۷-۹-ب) نمایش داده شده است .

- ولتاژ دو سر سلف نسبت به جریانش ۹۰ درجه تقدم فاز دارد . (جلوتر است)
- جریان سلف نسبت به ولتاژ دو سرش ۹۰ درجه تأخیر فاز دارد (عقب تر است)

ب – با توجه به رابطه $i(t)$ و $v_L(t)$ می توان نوشت : $V_m = L\omega I_m$

که با توجه به دیمانسیون جریان و ولتاژ $L\omega$ دارای دیمانسیون $\frac{V}{A} = \Omega$ است یا از طرف دیگر دیمانسیون عبارت است از :

$$[L\omega] = \Omega \sec \times \frac{1}{\sec} = \Omega$$

بنابر این عکس العمل سلف در مقابل جریان متناوب سینوسی $L\omega$ را راکتانس سلفی (واکنائی سلفی) گویند که وابسته به فرکانس است . معمولاً راکتانس سلفی را با $X_L(\omega)$ نمایش می دهند .

$$X_L(\omega) = L\omega$$

و همانطور که عکس مقاومت رسانایی الکتریکی است و با G نشان داده می شود . معکوس راکتانس سلفی را با $B_L(\omega)$ نمایش می دهند و سوسپتانس (رسانایی واکنشی) گویند ، و واحد آن *mho* یا زیمنس (S) است .

$$B_L(\omega) = \frac{1}{L\omega} = \frac{1}{X_L(\omega)}$$

ج – رابطه فازوری ولتاژ و جریان سلف :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t+\phi) = \mathrm{Re}\left[I_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[I e^{j\omega t}\right]$$
$$v_L(t) = V_m \cos(\omega t+\phi+90^\circ) = \mathrm{Re}\left[V_m e^{j(\phi+90^\circ)} e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[V_L e^{j\omega t}\right]$$
$$I = I_m e^{j\phi}, V_L = V_m e^{j(\phi+90^\circ)} = L\omega I_m e^{j\phi}.e^{j90^\circ}$$
$$V_L = jL\omega I_m e^{j\phi} \Rightarrow V_L = jL\omega I$$

بنابر این می توان نتیجه گرفت :

$$V_L = jL\omega I_L = jX_L(\omega) I_L$$
$$I_L = \frac{1}{j\omega L} V_L = -jB_L(\omega) V_L$$

روابط فازوری (فاز برداری) ولتاژ و جریان سلف در صفحه مختلط مطابق شکل (۷-۹-ج) است .

تذکر : همانطور که در شکل (۷-۹-ج) مشاهده می شود اگر بردار جریان I_L را در مقدار $L\omega$ ضرب کنیم برداری هم فاز جریان ایجاد می شود که ولتاژ سلف نیست واین بردار باید در بردار واحد محور انگاری ضرب شود تا بردار ولتاژ سلف بدست آید.

❖ ۷-۳-۳- اثر جریان متناوب سینوسی بر خازن

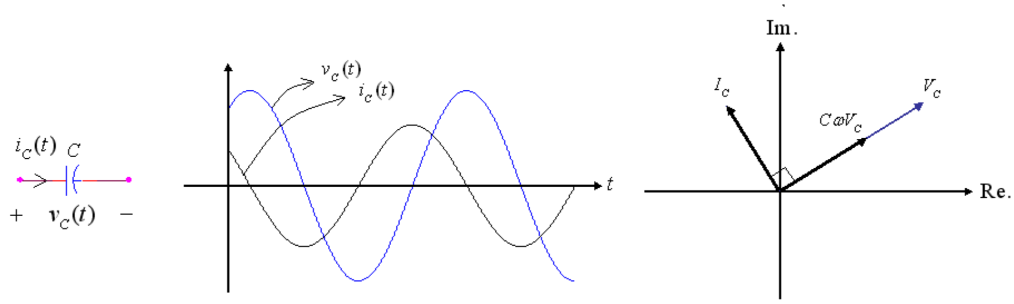
اگر یک خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان با ظرفیت C مطابق شکل (۷-۱۰-الف) در نظر بگیریم ، طبق تعریف $q = CV$ اگر ولتاژ $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$ به دوسر خازن اعمال گردد باعث ایجاد بار متغیر در جوشن های خازن می گردد .

$$q(t) = CV_m \cos(\omega t + \phi)$$

و بار متغیر باعث ایجاد جریان در مدار خازنی می شود .

$$i_C(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left[CV_m \cos(\omega t + \phi)\right] = -C\omega V_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$i_C(t) = C\omega V_m \cos(\omega t + \phi + 90^\circ) \Rightarrow i_C(t) = I_m \cos(\omega t + \phi + 90^\circ)$$



(الف) (ب) (ج)

شکل(۷-۱۰)

نتایج حاصل از رابطه جریان مدار خازنی $i_C(t)$ عبارتند از :

الف – همانند سلف بین ولتاژ و جریان در خازن اختلاف فاز ۹۰ درجه وجود دارد ، که در شکل (۷-۱۰-ب) نمایش داده شده است .

- جریان در مدار خازنی نسبت به ولتاژ دو سر خازن ۹۰ درجه تقدم فاز دارد .
- ولتاژ دو سر خازن نسبت به جریان مدار خازنی ۹۰ درجه تأخیر فاز دارد .

ب – از رابطه ولتاژ $v(t)$ و جریان $i_C(t)$ نتیجه می شود که $I_m = C\omega V_m$ که $C\omega$ دارای دیمانسیون زیمنس $S = \frac{A}{V}$ می باشد یا با توجه به دیمانسیون ظرفیت و فرکانس داریم :

$$[C\omega] = S \times \sec \times \frac{1}{\sec} = S = mho$$

مقدار $C\omega$ را سوسپتانس خازنی گویند و با $B_C(\omega)$ نمایش داده می شود و همان گونه که مشاهده می گردد $B_C(\omega) = C\omega$ تابع فرکانس است و معکوس آن $X_C(\omega) = \frac{1}{C\omega}$ راکتانس خازنی (واکنائی خازنی) گفته می شود . که دارای دیمانسیون اهم(Ω)می باشد .

ج – روابط فازوری (فاز برداری) ولتاژ و جریان خازن

$$v_C(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}\left[V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[V e^{j\omega t}\right] \Rightarrow V = V_m e^{j\phi}$$

$$i_C(t) = I_m \cos(\omega t + \phi + 90^\circ) = \mathrm{Re}\left[I_m e^{j(\phi+90^\circ)} e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[I_C e^{j\omega t}\right]$$
$$\Rightarrow I_C = I_m e^{j(\phi+90^\circ)} = I_m e^{j\phi} . e^{j90^\circ}$$

و با توجه به رابطه $I_m = C\omega V_m$ می توان نوشت :

$$I_C = C\omega V_m e^{j\phi} . e^{j90^\circ} \Rightarrow I_C = jC\omega V_m e^{j\phi} = jC\omega V_C$$

این رابطه بصورت برداری در شکل (۷-۱۰-ج) نمایش داده شده است .

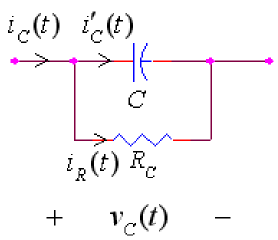
بنابر این روابط فازوری بین ولتاژ و جریان عبارتند از :

$$\begin{cases} I_C = jC\omega V_C = jB_C(\omega) V_C \\ V_C = \dfrac{1}{jC\omega} I_C = -jX_C(\omega) I_C \end{cases}$$

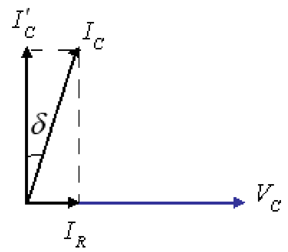
ضریب تلفات دی الکتریک خازن ($tg\delta$)

در مورد سیم پیچ ها در فصل پنجم ضریب کیفیت Q_L را بیان کردیم و دیدیم که مقدار ضریب کیفیت بستگی به مقاومت سیم پیچ دارد .

در مورد خازن های فیزیکی ضریب تلفات دی الکتریک خازن $tg\delta = D$ را چنین می توان بیان کرد که دی الکتریک (عایق) خازن دارای مقاومت خیلی بزرگی است موازی با خازن مطابق شکل (۷-۱۱-الف) و بر اساس قانون جریان ها $i_C(t) = i'_C(t) + i_R(t)$ و با توجه به روابط فازوری جریان و ولتاژ مقاومت و خازن در شکل (۷-۱۱-ب) مشاهده می شود که بین جریان در خازن ایده آل I'_C و جریان خازن فیزیکی I_C یک اختلاف فاز کوچک δ وجود دارد که $tg\delta$ را ضریب تلفات دی الکتریک خازن گویند .



(الف)

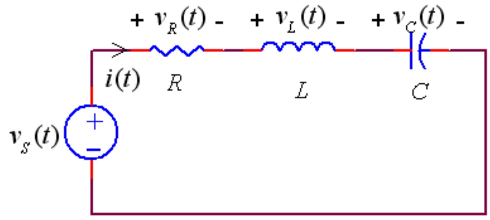


(ب)

شکل(۷-۱۱)

۷-۳-٤- تحلیل مدار RLC سری با منبع متناوب سینوسی

در این قسمت مداری مطابق شکل (۷-۱۲) را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و جریان $i(t)$ را در حالت دائم محاسبه می کنیم .



شکل(۷-۱۲)

در صورتیکه $v_S(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$ باشد می دانیم که $i(t)$ پاسخ دائم مشابه ورودی است بنابر این آن را بصورت $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta)$ فرض می کنیم و با توجه به KVL مدار می توان چنین نوشت :

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v_S(t)$$
$$Ri(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = v_S(t)$$
$$v_S(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}\left[V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[V_S e^{j\omega t}\right]$$
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta) = \mathrm{Re}\left[I_m e^{j\theta} e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[I e^{j\omega t}\right]$$

با قرار دادن ولتاژ و جریان در معادله KVL

$$R \times \mathrm{Re}\left[I e^{j\omega t}\right] + L\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Re}(I e^{j\omega t})\right] + \frac{1}{C}\int \mathrm{Re}(I e^{j\omega t})dt = \mathrm{Re}\left[V_S e^{j\omega t}\right]$$

یا

$$\mathrm{Re}\left[RI e^{j\omega t}\right] + \left[\mathrm{Re}(j\omega L I e^{j\omega t})\right] + \mathrm{Re}\left[\frac{1}{jC\omega} I e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[V_S e^{j\omega t}\right]$$

با توجه به خاصیت اعداد مختلط رابطه را می توان چنین نوشت :

$$RIe^{j\omega t} + j\omega LIe^{j\omega t} + \frac{1}{jC\omega} Ie^{j\omega t} = V_S e^{j\omega t}$$
$$RI + j\omega LI + \frac{1}{jC\omega} I = V_S$$

و با توجه به روابط فازوری ولتاژ و جریان R و L و C داریم :

$$V_R + V_L + V_C = V_S$$

و اگر جریان I را محاسبه کنیم چنین حاصل می شود که :

$$I(R + j\omega L + \frac{1}{jC\omega}) = V_S$$
$$I = \frac{V_S}{(R + j\omega L + \frac{1}{jC\omega})} \Rightarrow I = \frac{V_S}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

همان گونه که از مخرج کسر بر می آید $R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ یک تابع مختلط است که شامل قدر مطلق $\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$ و زاویه $tg^{-1}\left[\frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R}\right]$ و از طرفی از لحاظ دیمانسیون دارای واحد Ω است که عکس العمل کلی مدار در مقابل جریان می باشد و امپدانس (پاگیرائی) نامیده می شود و با $Z(j\omega)$ نشان داده می شود .

$$Z(j\omega) = R + j(L\omega - \frac{1}{\omega C}) = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \angle tg^{-1} \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R}$$

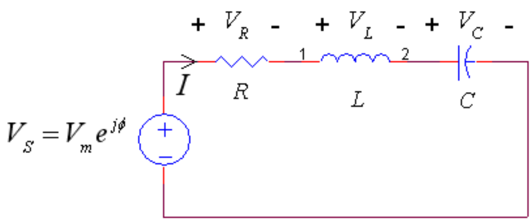
بنابر این با جایگذاری $I = I_m e^{j\theta}$ و $V_S = V_m e^{j\phi}$ و $Z(j\omega)$ دامنه جریان و زاویه آن بدست می آیند .

$$I_m e^{j\theta} = \frac{V_m e^{j\phi}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \angle tg^{-1} \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R}}$$

$$\begin{cases} I_m = \dfrac{V_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \\ \theta = \phi - tg^{-1}\left(\dfrac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right) \end{cases}$$

بنابر این اگر ورودی مدار منبع سینوسی باشد برای تعیین پاسخ دائم مدار می توان از روابط فازوری بجای روابط در حوزه زمان استفاده نمود و سپس پاسخ فازوری را به حوزه زمان انتقال داد و همچنین برای تحلیل به فرم فازوری می توان به شرح زیر عمل نمود .

۱- منبع سینوسی ورودی را بصورت فازوری می نویسیم و پاسخ مدار را نیز فازوری فرض می کنیم ، مطابق شکل (۷-۱۳)



شکل(۷-۱۳)

۲- با توجه به روابط فازوری بین ولتاژ و جریان اجزاءِ مدار و پاسخ فازوری مدار KVL یا KCL نوشته و پاسخ فازوری را محاسبه می کنیم .

$$V_R + V_L + V_C = V_S$$

$$V_R = RI \qquad V_L = jL\omega I \qquad V_C = \frac{1}{jC\omega} I$$

$$RI + jL\omega I + \frac{1}{jC\omega} I = V_S$$

$$(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}) I = V_S \qquad I = \frac{V_S}{R + j(L\omega + \frac{1}{C\omega})}$$

امپدانس نقطه تحریک

حال اگر در یک مدار RLC سری رابطه $V_S = Z(j\omega) I$ را در نظر گیریم $Z(j\omega)$ را امپدانس نقطه تحریک گویند و برابر است با :

$$Z(j\omega)=\frac{V_S}{I}=R+j(L\omega-\frac{1}{C\omega})$$

با توجه به $X_L(\omega)=L\omega$ و $X_C(\omega)=\frac{1}{C\omega}$ امپدانس برابر است .

$$Z(j\omega)=R+j[X_L(\omega)-X_C(\omega)]=R+jX(\omega)$$

همان گونه که مشاهده می شود امپدانس شامل دو جزءِ حقیقی R و جز انگاری $X(\omega)$ (واکنائی) می باشد .

از طرف دیگر شامل قدر مطلق و زاویه فاز ϕ_Z می باشد .

$$|Z(j\omega)|=\sqrt{R^2+X^2(\omega)},\angle\phi_Z=tg^{-1}\frac{X(\omega)}{R}$$

در این قسمت به چند نکته در مورد امپدانس مدار های RLC می پردازیم .

الف :

- اگر $X_L(\omega)>X_C(\omega)$ باشد $X(\omega)>0$ و $\phi_Z>0$ است و اثر را سلفی گویند .
- اگر $X(\omega)=0$ در این صورت $\phi_Z=0$ است و اثر را اهمی خالص گویند .
- اگر $X_L(\omega)<X_C(\omega)$ باشد $X(\omega)<0$ و $\phi_Z<0$ است و اثر را خازنی گویند .

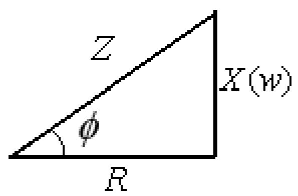
ب : زاویه ϕ_Z همان زاویه اختلاف فاز بین ولتاژ و جریان مدار است زیرا :

$$Z(j\omega)=\frac{V}{I}=\frac{V_m e^{j\phi_v}}{I_m e^{j\phi_i}}=|Z(j\omega)|\angle\phi_Z$$

$$\phi_Z=\phi=\phi_v-\phi_i$$

و در مورد تحلیل مدار های جریان متناوب سینوسی زاویه فاز ولتاژ ϕ_v به عنوان مبنا انتخاب می شود و زاویه فاز ϕ_i از آن کسر می گردد .

ج : از رابطه قدر مطلق امپدانس $Z=\sqrt{R^2+X^2(\omega)}$ چنین می توان نتیجه گرفت که این رابطه بیان گر یک مثلث قائم الزاویه به نام مثلث امپدانس است ، مطابق شکل (۷-۱٤)



شکل(۷-۱٤)

در این مثلث $\cos\phi=\frac{R}{Z}$ به نام ضریب توان (Power Factor) $P.F.$ تعریف می گردد .

و از آنجا که $\cos\phi=\cos(-\phi)$ است مثبت یا منفی بودن زاویه فاز مشخص نمی باشد در عمل و تحلیل به شرح زیر اقدام می شود

۱- در صورتیکه $\phi>0$ باشد همراه ضریب توان کلمه (***پس فاز***)Lagging بکار می رود وبیانگر این است که مدار دارای اثر سلفی است

۲- در صورتیکه $\phi < 0$ باشد همراه ضریب توان کلمه ***(پیش فاز)*** Leading بکار می رود وبیانگر این است که مدار دارای اثر خازنی می باشد بطور مثا ل : $Cos\phi = 0.8$ پس فاز یا $Cos\phi = 0.7$ پیش فاز

تعریف ادمیتانس (گذارائی)

نسبت جریان مدار به ولتاژش را ادمیتانس (گذارائی) گویند که با $Y(j\omega)$ نمایش داده می شود و واحد آن (mho یا S) می باشد .

$$Y(j\omega) = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z(j\omega)}$$

و در مورد یک مدار RLC سری همانطور که مشاهده شد :

$$Z(j\omega) = R + jX(\omega)$$

بنابر این ادمیتانس آن برابر است با :

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{1}{R + jX(\omega)} = \frac{R - jX(\omega)}{R^2 + X^2(\omega)} = \frac{R}{R^2 + X^2(\omega)} - \frac{jX(\omega)}{R^2 + X^2(\omega)}$$

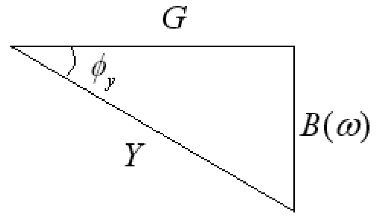
این رابطه بیانگر این است که ادمیتانس نیز شامل دو جزءِ حقیقی (رسانایی) $G = \dfrac{R}{R^2 + X^2(\omega)}$ و جزءِ انگاری(سوسپتانس) $B(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{R^2 + X^2(\omega)}$ با واحد زیمنس است و برابر است با :

$$Y(j\omega) = G - jB(\omega)$$

ادمیتانس را می توان بصورت $Y(j\omega) = ye^{j\phi_y}$ نمایش داد که قدر مطلق آن $y = \sqrt{G^2 + B^2(\omega)}$ و زاویه فاز آن برابر است با :

$$\phi_y = tg^{-1}\left(-\frac{B(\omega)}{G}\right) = -tg^{-1}\left[\frac{\dfrac{X(\omega)}{R^2 + X^2(\omega)}}{\dfrac{R}{R^2 + X^2(\omega)}}\right] = -tg^{-1}\frac{X(\omega)}{R} = -\phi_Z$$

قدر مطلق ادمیتانس $y = G - jB(\omega)$ بیانگر مثلث قائم الزاویه ای به نام مثلث ادمیتانس است . (شکل ۷-۱۵)



شکل (۷-۱۵)

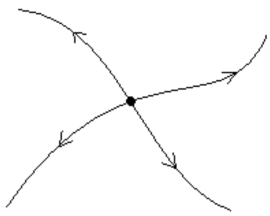
بنابر این روابط بین جریان و ولتاژ یک مدار عبارتند از :

$$V = Z(j\omega)I$$

$$I = Y(j\omega)V$$

۷-٤- قوانین کیرشهف در جریان متناوب سینوسی حالت دائم :

۷-٤-۱- قانون جریان های کیرشهف :، هرگاه یک گره از یک شبکه مطابق شکل (۷-۱۶) را در نظر گیریم و جریان شاخه ها دارای فرکانس یکسان باشند و بصورت رابطه $i_K(t) = I_{mK}\cos(\omega t + \phi_K)$ تعریف شده باشند . درنتیجه به صورت فازوری چنین بیان می گردند .



شکل (۷-۱۶)

$$i_K(t) = \mathrm{Re}\left[I_{mK}e^{j(\omega t+\phi_K)}\right] = \mathrm{Re}\left[I_{mK}e^{j\phi_K}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[I_K e^{j\omega t}\right]$$

و طبق قانون جریان ها در گره داریم :

$$KCL \Rightarrow \sum_{K=1}^{n} i_K(t) = 0$$

با جایگذاری فرم فازوری جریان ها در رابطه KCL

$$\sum_{K=1}^{n} I_{mK}\cos(\omega t + \phi_K) = \sum_{K=1}^{n}\mathrm{Re}\left[I_K e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\sum_{K=1}^{n} I_K e^{j\omega t}\right] = 0$$

با توجه به خاصیت توابع برداری می توان نوشت :

$$\sum_{K=1}^{n} I_K e^{j\omega t} = e^{j\omega t}\sum_{K=1}^{n} I_K = 0$$

بنابر این چنین نتیجه می شود :

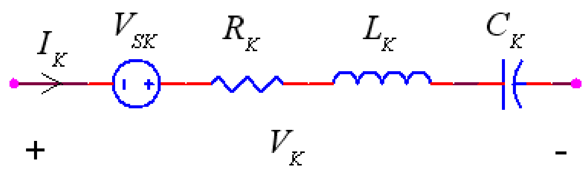
$$\sum_{K=1}^{n} I_K = 0$$

همانطور که رابطه اخیر نشان می دهد .

در جریان متناوب سینوسی حالت دائم قانون جریان های کیرشهف چنین بیان می شود :

☑ ***جمع برداری جریان ها در هر گره از یک شبکه فشرده برابر صفر است .***

• **۷-٤-۲- قانون ولتاژ های کیرشهف در جریان متناوب سینوسی** ، هرگاه یک حلقه متشکل از n شاخه و هر شاخه مطابق شکل (۷-۱۷) باشد را در نظر گیریم در مورد شاخه Kام داریم :



شکل(۷-۱۷)

$$V_K = -V_{SK} + \left[R_K + j(L_K\omega - \frac{1}{C_K\omega}) \right] I_K = -V_{SK} + Z_K(j\omega) I_K$$

و طبق قانون ولتاژ ها جمع ولتاژ های پیرامون حلقه برابر صفر است و با جایگذاری مقادیر فازوری در رابطه KVL :

$$KVL \Rightarrow \sum_{K=1}^{n} v_K(t) = 0 \text{ یا } \sum_{K=1}^{n} \mathrm{Re}\left[V_K e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\sum_{K=1}^{n} V_K e^{j\omega t}\right] = 0$$

$$e^{j\omega t}\sum_{K=1}^{n} V_K = 0 \Rightarrow \sum_{K=1}^{n} V_K = 0$$

$$\sum_{K=1}^{n}\left[-V_{SK} + Z_K(j\omega)I_K\right] = 0 \Rightarrow \sum_{K=1}^{n} V_{SK} = \sum_{K=1}^{n} Z_K(j\omega) I_K$$

بنابر این قانون ولتاژ ها در جریان متناوب سینوسی در حالت سینوسی بیانگر این است که :

☑ ***جمع برداری ولتاژ ها پیرامون یک حلقه برابر صفر است*** .

یا به عبارت دیگر :

☑ جمع برداری نیروهای محرکه در حلقه برابر جمع برداری ولتاژدو سر امپدانس شاخه های حلقه می باشد .

• ۷-٤-۳- تحلیل مدار های الکتریکی با ورودی سینوسی دائم :

۱- تعیین پاسخ دائم مدار های RLC با ورودی جریان متناوب سینوسی

همانطور که در فصول گذشته مشاهده گردید پاسخ کامل یک مدار RLC عبارت است از جمع دو پاسخ همگن و دائم .

از طرف دیگر بیان شد که پاسخ دائم مشابه ورودی مدار می باشد بنابر این اگر ورودی یک مدار $x(t)$ برابر باشد با :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) u(t)$$

پاسخ دائم مدار نیز برابر است با :

$$y_p(t) = Y_m \cos(\omega t + \theta)$$

برای تعیین $y_P(t)$ پاسخ دائم نیز می توان با توجه به مبحث فازوری به فرم زیر عمل نمود .

الف : فازور ورودی $X = X_m e^{j\phi}$ را مشخص می نماییم .

ب : فازور پاسخ را Y در نظر می گیریم .

ج : امپدانس یا ادمیتانس شاخه ها را با توجه به واکنایی های سلفی و خازنی یا (سوسپتانس سلفی و خازنی) مشخص می نماییم .

د : با توجه به قوانین کیرشهف در حالت فازوری و روش های تحلیلی فازور پاسخ را مشخص می نماییم .

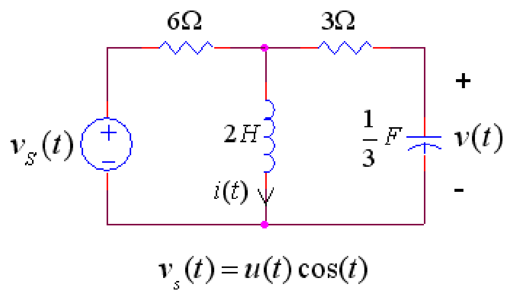
ه : پاسخ فازوری را به حوزه زمان منتقل نموده پاسخ حاصل در حوزه زمان پاسخ دائم می باشد .

۲- روش های تحلیلی

همانگونه که در فصل سوم بیان شد روش های تحلیلی برای ساده و منظم نمودن تحلیل مدار ها بکار می روند و اساس تحلیل بر مبنای قوانین KCL و KVL می باشد . بنا بر این روش های تحلیلی را

نیز می توان در جریان متناوب سینوسی حالت دائم نیز بکار برد و در صورتیکه فرکانس منابع یکسان باشد از روش فازوری (فاز برداری) استفاده نمود ، در نتیجه معادلات در این حالت بصورت معادلات با اعداد مختلط نوشته می شوند و پاسخ ها نیز بصورت فازور (عدد مختلط) بدست می آیند . در این قسمت ابتدا به تحلیل یک مدار RLC و همچنین به تحلیل مثال هایی با استفاده از روش های تحلیلی گره ، تحلیل مش ، جمع اثر (بر همنهی) می پردازیم .

• **مثال(۷-۳) :** در مدار شکل (۷-۱۸) در صورتی که $v_S(t)=u(t)Cost$ باشد:



شکل(۷-۱۸)

الف: با استفاده از روش فازوری (فاز برداری) پاسخ دائم مدار $v_P(t)$ را بدست آورید.

ب : مقادیر $\frac{di}{dt}(0^+)$ و $\frac{dv}{dt}(0^+)$ را محاسبه نمائید .

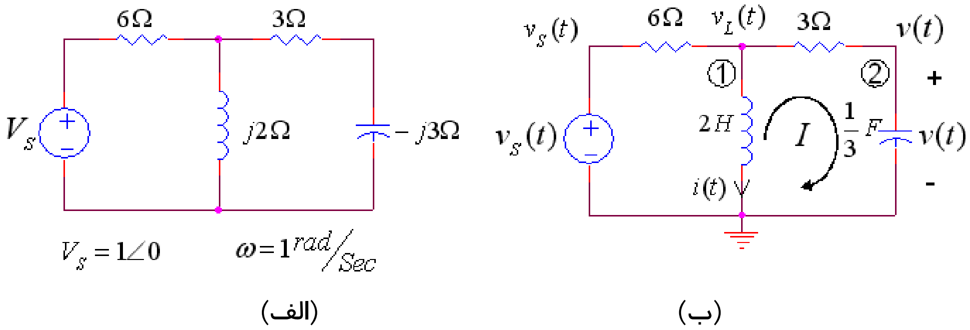
ج : معادله دیفرانسل مدار را بر حسب $v(t)$ بنویسید.

د : پاسخ کامل مدار $v(t)$ را بدست آورید.

ه : معادلات حالت مدار را با توجه به بردار حالت $X=\begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ بصورت برداری بنویسید.

• **پا سخ :**

الف : فازور ورودی را معین نموده و امپدانس سلف و خازن را حساب می کنیم وباتوجه مدار معادل در حالت فازوری نشان داده شده در شکل (۷-۱۹-الف) به روش پتانسیل گره فازور ولتاژ خازن را از دستگاه معادلات حساب می نماییم وآن را به حوزه زمان انتقال می دهیم :



شکل(۷-۱۹)

$$v_S(t) = u(t)Cost$$

$$v_S(t) = \mathrm{Re}\left[1e^{j(t+0)}\right] = \mathrm{Re}\left[1e^{j0}e^{jt}\right] = \mathrm{Re}\left[V_S e^{jt}\right] \Rightarrow V_S = 1e^{j0} = 1\angle 0 \quad V \quad \text{و} \quad \omega = 1\frac{rad}{Sec}$$

$$jX_L(\omega) = jL\omega = j\times 2\times 1 = j2\Omega \quad \text{و} \quad -jX_C(\omega) = \frac{-j}{C\omega} = \frac{-j}{(1/3)\times 1} = -j3\Omega$$

اگر ولتاژگره ها را V_L و V_S, V نامگذاری کنیم در نتیجه معادلات KCL عبارت است از :

$$\begin{cases} \dfrac{V_L - V_S}{6} + \dfrac{V_L}{j2} + \dfrac{V_L - V}{3} = 0 \\ \dfrac{V}{-j3} + \dfrac{V - V_L}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-j3)V_L - 2V = V_S \\ -V_L + (1+j1)V = 0 \end{cases} \Rightarrow V = \frac{\begin{vmatrix} 3(1-j1) & V_S \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3(1-j1) & -2 \\ -1 & (1+j1) \end{vmatrix}}$$

$$V = \frac{V_S}{3(1-j1)(1+j1) - 1\times 2} = \frac{1\angle 0}{6-2} = \frac{1}{4}\angle 0, V$$

حال ولتاژ خازن را در حوزه زمان بدست می آوریم :

$$v(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{4}e^{j0}e^{jt}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{4}e^{jt}\right] \Rightarrow v(t) = \frac{1}{4}CoS(t), V$$

ب : از آنجا که ورودی مدار در $t = 0^-$ برابر صفر است بنابراین ولتاژ خازن وجریان سلف برابر با صفر می باشند و با توجه به این مسئله که تغییر نا گهانی را نمی پذیرند نتیجه می شود :

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = v(0) = 0, i_L(0^-) = i_L(0^+) = i(0) = 0$$

اگر در مدار شکل (۷-۱۹-ب) در گره ۱ معادله KCL بنویسیم ، داریم :

$$\frac{v_L(t) - v_S(t)}{6} + i(t) + \frac{v_L(t) - v(t)}{3} = 0$$

و در لحظه $t = 0^+$ در معادله KCL مقدار قرار دهیم ، با توجه به $v_S(0^+) = 1$ نتیجه می شود :

$$\frac{v_L(0^+) - v_S(0^+)}{6} + i(0^+) + \frac{v_L(0^+) - v(0^+)}{3} = 0$$

$$\frac{v_L(0^+) - 1}{6} + \frac{v_L(0^+)}{3} = 0 \Rightarrow 3v_L(0^+) = 1 \quad v_L(0^+) = \frac{1}{3}V$$

بنابر این :

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{\frac{1}{3}}{2}$$

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{1}{6}A/Sec$$

و در حلقه ۱ داریم :

$$\frac{2di}{dt} = 3\times\frac{1}{3}\frac{dv}{dt} + v(t)$$

و در لحظه $t = 0^+$ داریم :

$$2\times\frac{1}{6} = \frac{dv}{dt}(0^+) + 0$$

$$\frac{dv}{dt}(0^+) = \frac{1}{3} V\!\!\diagup_{Sec}$$

ج : برای نوشتن معادله دیفرانسیل مدار از روش گره استفاده می کنیم و برای گره های ۱ و ۲ بر حسب پتانسیل گره ها KCL می نویسیم :

$$\begin{cases} KCL(1) \Rightarrow \dfrac{v_L(t) - v_S(t)}{6} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t v_L\,dt + i(0) + \dfrac{v_L(t) - v(t)}{3} \\ KCL(2) \Rightarrow \dfrac{v(t) - v_L(t)}{3} + \dfrac{1}{3}\dfrac{dv}{dt} = 0 \end{cases}$$

و از رابطه KCL(۲) ولتاژ $v_L(t)$ را بر حسب $v(t)$ محاسبه و در معادله KCL(۱) قرار داده و با انتگرال گیری از معادله KCL(۱) معادله دیفرانسیل را بدست می آوریم .

از KCL(۲) چنین نتیجه می شود :

$$KCL(2) \Rightarrow v_L(t) = v(t) + \frac{dv}{dt}$$

با جایگذاری $v_L(t)$ در معادله KCL(۱) چنین نتیجه می شود :

$$KCL(1) \Rightarrow \frac{1}{6}(v(t) + \frac{dv}{dt}) + \frac{1}{2}\int_0^t (v(t) + \frac{dv}{dt})dt + i(0) + \frac{1}{3}(v(t) + \frac{dv}{dt}) - \frac{1}{3}v(t) = \frac{1}{6}v_S(t)$$

$$KCL(1) \Rightarrow \frac{1}{6}v(t) + (\frac{1}{6} + \frac{1}{3})\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\int_0^t (v(t) + \frac{dv}{dt})dt + i(0) = \frac{1}{6}u(t)\cos(t)$$

پس از مشتق گیری از طرفین معادله چنین حاصل می شود :

$$KCL(1) \Rightarrow \frac{1}{6}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{2}v(t) + \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{6}u(t)\sin t$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{4}{6}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}v(t) = -\frac{1}{6}u(t)\sin t$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{4}{3}\frac{dv}{dt} + v(t) = -\frac{1}{3}u(t)\sin t$$

د : برای تعیین پاسخ $v(t)$ داریم :

$$v(t) = v_h + v_P$$

از بند الف $v_P(t) = \frac{1}{4}\cos t$ بدست آمد برای محاسبه v_h معادله مشخصه معادله دیفرانسیل را نوشته و فرکانس های طبیعی را محاسبه می کنیم .

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{4}{3}\frac{dv}{dt} + v(t) = 0$$

$$S^2 + \frac{4}{3}S + 1 = 0 \Rightarrow S = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - 1} = -\frac{2}{3} \pm j\frac{\sqrt{5}}{3}$$

بنابر این :

$$v(t) = Ke^{-\frac{2}{3}}\cos(\frac{\sqrt{5}}{3}t + \phi) + \frac{1}{4}\cos t$$

و برای محاسبه K و ϕ از دستگاه زیر با توجه به $v(0) = 0$ و $\frac{dv}{dt}(0^+) = \frac{1}{3}$ استفاده می کنیم .

$$\begin{cases} v(0) = 0 = K\cos\phi + \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{dv}{dt}(0^+) = \dfrac{1}{3} = -\dfrac{2}{3}K\cos\phi - \dfrac{\sqrt{5}}{3}K\sin\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} K\cos\phi = -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{3} = -\dfrac{2}{3}(-\dfrac{1}{4}) - \dfrac{\sqrt{5}}{3}K\sin\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K\cos\phi = -\dfrac{1}{4} \\ K\sin\phi = -\dfrac{1}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$tg\phi = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{5}}}{-\frac{1}{4}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.894 \Rightarrow \phi = 41.8^\circ$$

$$K\cos\phi = -\frac{1}{4} \Rightarrow K = \frac{-\frac{1}{4}}{\cos 41.8} = -\frac{1}{4\times 0.745}$$

$$K = -\frac{1}{2.98} \Rightarrow K = -0.336$$

بنابر این پاسخ کامل $v(t)$ عبارت است از :

$$v(t) = (-0.336e^{-\frac{2}{3}}\cos(\frac{\sqrt{5}}{3}t + 41.8^\circ) + \frac{1}{4}\cos t)u(t)$$

۵ : برای نوشتن معادلات حالت مدار اگر به معادله گره (۱) در شکل (۷-۱۹-ب) توجه شود داریم :

$$\frac{v_L(t) - v_S(t)}{6} + i(t) + \frac{v_L(t) - v(t)}{3} = 0$$

با ساده کردن معادله چنین نتیجه می شود :

$$3v_L(t) - v_S(t) + 6i(t) - 2v(t) = 0$$

یا

$$3v_L(t) = -6i(t) + 2v(t) + v_S(t)$$

$$3\times 2\frac{di}{dt} = -6i(t) + 2v(t) + v_S(t)$$

$$\frac{di}{dt} = -i(t) + \frac{1}{3}v(t) + \frac{1}{6}v_S(t)$$

با نوشتن معادله حلقه (I)در شکل (۷-۱۹-ب) داریم :

$$3\times\frac{1}{3}\frac{dv}{dt} + v(t) = 2\frac{di}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -v(t) + 2[-i(t) + \frac{1}{3}v(t) + \frac{1}{6}v_S(t)]$$

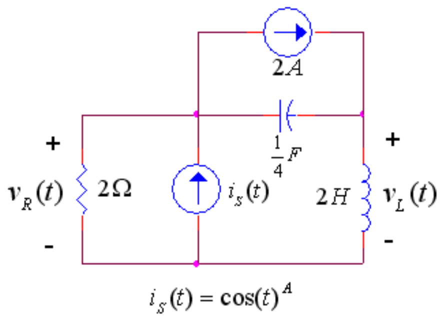
$$\frac{dv}{dt} = -2i(t) - \frac{1}{3}v(t) + \frac{1}{3}v_S(t)$$

بنابر این معادلات حالت عبارتند از :

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = -i(t) + \dfrac{1}{3}v(t) + \dfrac{1}{6}v_S(t) \\ \dfrac{dv}{dt} = -2i(t) - \dfrac{1}{3}v(t) + \dfrac{1}{3}v_S(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{di}{dt} \\ \dfrac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \dfrac{1}{3} \\ -2 & -\dfrac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{3} \end{bmatrix} v_S(t)$$

o**مثال(۷-٤) :** در مدار شکل (۷-۲۰) ، $v_L(t)$ و $v_R(t)$ را محاسبه نمایید .



شکل (۷-۲۰)

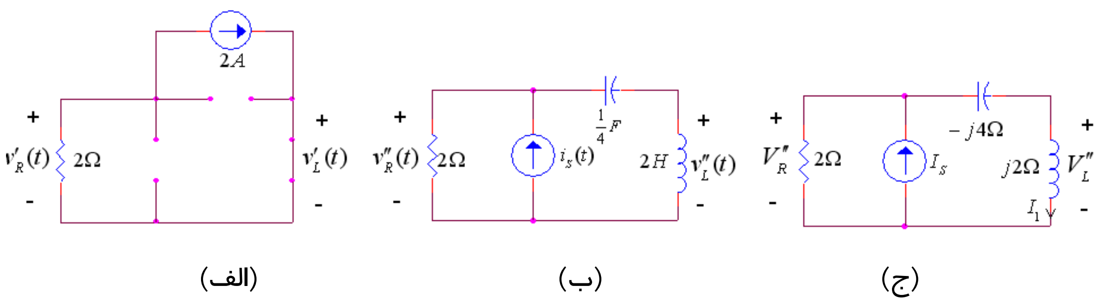
• پا سخ :

اگر به منابع مدار توجه شود منابع جریان مدار دارای فرکانس های متفاوت می باشند ، بنابر این برای تعیین پاسخ مدار باید از اصل جمع اثر استفاده نمود و پاسخ ها را به ازاءِ هر یک از منابع مدار جداگانه محاسبه و سپس در حوزه زمان آنها را با هم جمع کرد . بنابر این ، این چنین عمل می کنیم :

الف : اثر منبع ۲ A : منبع جریان $i_S(t)$ را باز نموده و از آنجا که سلف در مقابل جریان مستقیم اتصال کوتاه و خازن مدار باز می باشد ، با توجه به مدار معادل شکل (۷-۲۱-الف) داریم :

$$v'_L(t) = 0$$

$$v'_R(t) = -2 \times 2 = -4V$$



شکل(۷-۲۱)

ب : اثر منبع جریان $i_S(t)=\cos t$ A : در این حالت منبع ۲ A مدار را باز نموده و با استفاده از مدار معادل شکل (۷-۲۱-ب) $v''_L(t)$ و $v''_R(t)$ را محاسبه می کنیم .

چون در این حالت منبع سینوسی است از روش فازوری استفاده نموده و امپدانس سلف و خازن را محاسبه می کنیم :

$$i_S(t)=\cos t \ \text{A} \Rightarrow I_S\angle 0\ \text{A} \ \text{و}\ \omega = 1\, {rad}/{\sec}$$

$$jL\omega = j\times 2\times 1 = j2\Omega \ \text{و}\ -\frac{j}{C\omega} = -\frac{j}{\frac{1}{4}\times 1} = -j4\Omega$$

حال با استفاده از مدار معادل شکل (۷-۲۱-ج) مقادیر فازوری V''_L و V''_R را محاسبه می کنیم .

با استفاده از تقسیم جریان I_1 را حساب می کنیم .

$$I_1 = \frac{2\times I_S}{2-j4+j2} = \frac{2\times 1\angle 0}{2+j2} = \frac{1}{1-j} = \frac{1+j}{2}$$

$$V''_L = j2I_1 = j2\times\frac{1+j}{2} \quad V''_L = -1+j = \sqrt{2}\angle +135^\circ$$

و

$$V''_R = (I_S - I_1)\times 2 = (1\angle 0 - \frac{1+j}{2})\times 2 = 1-j = \sqrt{2}\angle -45^\circ$$

اگر بردارهای V''_L و V''_R را به حوزه زمان منتقل کنیم نتیجه می شود :

$$v''_L(t) = \text{Re}\left[\sqrt{2}e^{j135}.e^{jt}\right] = \text{Re}\left[\sqrt{2}e^{j(t+135^\circ)}\right] \Rightarrow v''_L(t) = \sqrt{2}\cos(t+135^\circ)\ \text{V}$$

و

$$v''_R(t) = \text{Re}\left[\sqrt{2}e^{-j45}.e^{jt}\right] = \text{Re}\left[\sqrt{2}e^{j(t+45^\circ)}\right] \Rightarrow v''_R(t) = \sqrt{2}\cos(t-45^\circ)\ \ \text{V}$$

بنابر این :

$$v_L(t) = v'_L(t) + v''_L(t) = 0 + \sqrt{2}\cos(t+135^\circ)$$

$$v_L(t) = \sqrt{2}\cos(t+135^\circ)\ \ \text{V}$$

$$v_R(t) = v'_R(t) + v''_R(t) = -4 + \sqrt{2}\cos(t-45^\circ)V$$

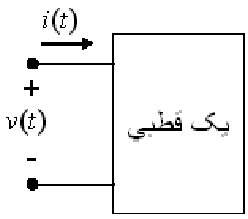
۷-۵-توان در جریان متناوب سینوسی:

۷-۵-۱- توان لحظه ای :

حاصلضرب ولتاژ دو سر یک عنصر در جریان آن را توان لحظه ای گویند و واحد توان لحظه ای وات (W) می باشد .

بنابر این اگر ولتاژ دو سر یک شبکه قطبی مانند شکل (۷-۲۲) برابر $v(t)=V_m\cos(\omega t+\phi_v)$ و جریان آن برابر $i(t)=I_m\cos(\omega t+\phi_i)$ باشند . توان لحظه ای آن برابر است با :

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m\cos(\omega t+\phi_v)\cos(\omega t+\phi_i)$$

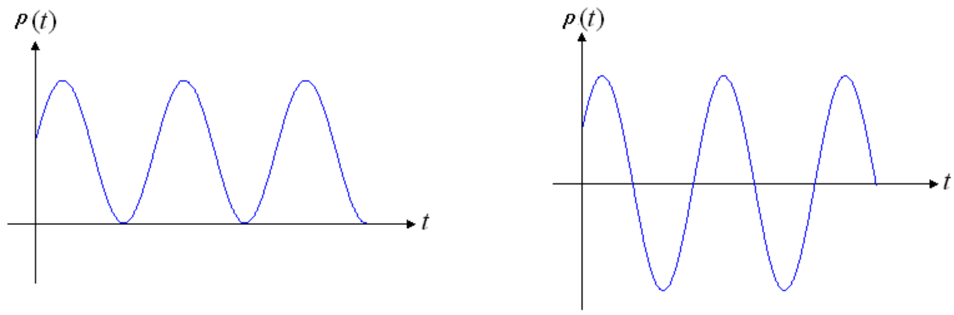


شکل (۷-۲۲)

بنابر این توان لحظه ای یک مقاومت برابر است با :

$$p(t)=v(t)i(t)=V_mI_m\cos^2(\omega t+\phi)=\frac{V_mI_m}{2}+\frac{V_mI_m}{2}\cos 2(\omega t+\phi)$$

که در شکل (۷-۲۳-الف) رسم شده است .



(الف) (ب)

شکل (۷-۲۳)

توان لحظه ای یک سلف یا خازن برابر است با :

$$p(t)=v(t)i(t)=V_mI_m\cos(\omega t+\phi)\sin(\omega t+\phi)=\frac{V_mI_m}{2}\sin 2(\omega t+\phi)$$

که در شکل (۷-۲۳-ب) رسم شده است .

• ۷-۵-۲- توان میانگین ، توان راکتیو ، توان ظاهری :

❖ توان میانگین (توان اکتیو) :

با توجه به توان لحظه ای یک شبکه یک قطبی با امپدانس $Z=R+jX(\omega)$ که یک تابع تناوبی با دوره تناوب T است ، مقدار متوسط (میانگین) آن برابر است با :

$$P_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T h(t)dt \Rightarrow P_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T V_mI_m\cos(\omega t+\phi_v)\cos(\omega t+\phi_i)dt$$

$$P_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}V_mI_m\left[\cos(\phi_v-\phi_i)+\cos(2\omega t+\phi_v+\phi_i)\right]dt$$

از آنجاکه مقدار متوسط یک تابع سینوسی در یک دوره تناوب T برابر صفر است در نتیجه مقدار میانگین توان برابر است با :

$$P_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}V_mI_m\cos(\phi_v-\phi_i)dt$$

$$P_{av}=\frac{V_mI_m}{2}\cos\phi=V_eI_e\cos\phi \quad \mathrm{W}$$

واحد توان میانگین وات (W) است و توان میانگین چون در مقاومت R بصورت حرارت و گرما ایجاد می گردد آن را توان مصرفی نیز گویند .

بر اساس رابطه :

$$P_{av}=\frac{V_mI_m}{2}\cos\phi=\frac{V_m}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos\phi=V_eI_e\cos\phi$$

توان در جریان متناوب سینوسی با مقادیر مؤثر (RMS) ولتاژ و جریان متناسب است .

❖ **توان راکتیو :**

در قسمت انگاری یک امپدانس ، توانی که ایجاد می گردد توان راکتیوی نامیده می شود و با Q نمایش داده می شود و عبارت است از :

$$Q=V_eI_e\sin\phi$$

واحد توان راکتیو را ولت آمپر راکتیو یا VAR(وار) گویند .

❖ **توان ظاهری :**

توانی که در یک امپدانس بوجود می آید را توان ظاهری گویند و باSنمایش داده می شود و واحد آن (ولت آمپر) (VA) می باشد و برابر است با :

$$S=V_eI_e$$

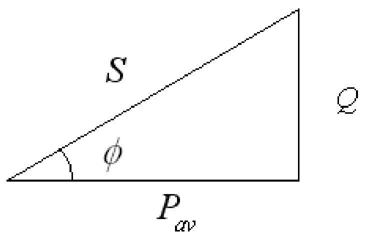
و اگر به روابط $P_{av}=V_eI_e\cos\phi$ و $Q=V_eI_e\sin\phi$ و $S=V_eI_e$ توجه کنیم مشاهده می شود که :

$$S=\sqrt{P_{av}^2+Q^2}$$

و این رابطه بیانگر یک مثلث قائم الزاویه بنام مثلث توان است .

مثلث توان در شکل (۷-۲٤) رسم شده است و در این مثلث زاویه ϕ زاویه اختلاف فاز بین ولتاژ و جریان برابر است با : $\phi=\phi_v-\phi_i$ و همچنین ضریب توان (PF) برابر است با :

$$\cos\phi=\frac{P_{av}}{S}$$



شکل (۷-۲٤)

• ۷-۵-۳- توان مختلط $\bar{S}$:

با توجه به اساس تحلیل مدارهای جریان متناوب سینوسی در حالت دائم ولتاژها و جریان ها بر حسب فازور (فاز برداری) بیان می گردند بنابر این توان را می توان بصورت مختلط محاسبه نمود و توان مختلط $\bar{S}$ برابر است با :

$$\bar{S}=\frac{1}{2}V\overset{*}{I}$$

در این رابطه فازور ولتاژ $V=V_m e^{j\phi_v}$ و فازور جریان $I=I_m e^{j\phi_i}$ و مزدوج آن $\overset{*}{I}=I_m e^{-j\phi_i}$ می باشد ، در نتیجه :

$$\overline{S}=\frac{1}{2}V_m e^{j\phi_v}I_m e^{-j\phi_i}=\frac{V_m I_m}{2}e^{j(\phi_v-\phi_i)}=\frac{V_m I_m}{2}e^{j\phi}$$

با بسط تابع $\overline{S}=\frac{V_m I_m}{2}e^{j\phi}$ نتیجه می شود :

$$\overline{S}=\frac{V_m I_m}{2}e^{j\phi}=\frac{V_m I_m}{2}\cos\phi+j\frac{V_m I_m}{2}\sin\phi=P_{av}+jQ$$

و بر اساس $P_{av}=\frac{1}{2}V_m I_m\cos\phi$ و $Q=\frac{1}{2}V_m I_m\sin\phi$ نتیجه می شود :

$$\overline{S}=\frac{1}{2}V\overset{*}{I}=P_{av}+jQ$$

یا به عبارت دیگر :

توان میانگین $P_{av}=\mathrm{Re}[\overline{S}]=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}V\overset{*}{I}\right]$

توان راکتیو $Q=\mathrm{Im}.[\overline{S}]=\mathrm{Im}.\left[\frac{1}{2}V\overset{*}{I}\right]$

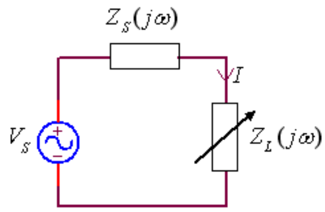
ضمناً توان مختلط را می توان از روابط $\overline{S}=\frac{1}{2}\times\frac{|V|^2}{\overset{*}{Z}(j\omega)}$ یا $\overline{S}=\frac{1}{2}Z(j\omega)|I|^2$ محاسبه نمود .

در ادامه مبحث بررسی توان در جریان متناوب سینوسی به قضیه انتقال حداکثر توان ، جمع پذیری توان ها و بهبود ضریب توان در شبکه ها می پردازیم .

- **۷-۵-٤- قضیه انتقال حداکثر توان :**

در این قضیه به مسئله شرایط انتقال حداکثر توان میانگین (توان اکتیو) که در سیستم های مخابراتی دارای اهمیت ویژه است پرداخته می شود .

فرضاً منبع ولتاژ V_S با امپدانس $Z_S(j\omega)$ که امپدانس بار $Z_L(j\omega)$ را تغذیه می نماید در نظر می گیریم .(شکل (۷-۲۵))



شکل (۷-۲۵)

در صورتیکه $Z_S(j\omega)=R_S+jX_S(\omega)$ و $Z_L(j\omega)=R_L+jX_L(\omega)$ باشند جریان مدار :

$$I=\frac{V_S}{Z_S(j\omega)+Z_L(j\omega)}=\frac{V_S}{[R_S+jX_S(\omega)]+[R_L+jX_L(\omega)]}=\frac{V_S}{[R_S+R_L]+j[X_S(\omega)+X_L(\omega)]}$$

$$|I|=\frac{|V_S|}{\sqrt{(R_S+R_L)^2+[X_S(\omega)+X_L(\omega)]^2}}$$

از آنجا که توان میانگین در مقاومت R_L ایجاد می شود بنابر این :

$$P_L=\frac{1}{2}R_L\,|I|^2 \Rightarrow P_L=\frac{1}{2}R_L\,\frac{|V_S|^2}{[R_S+R_L]^2+[X_S(\omega)+X_L(\omega)]^2}$$

حال به بررسی شرایط انتقال حداکثر توان (P_{LMax}) می پردازیم .

باید توجه نمود که امپدانس از دو جزءِ تشکیل شده است ، که هر یک از دو جزءِ حقیقی و انگاری و یا هر دو جزءِ می توانند تغییر نمایند ، بنابر این به هر یک از حالات تغییر پذیری می پردازیم :

الف : مقدار R_L ثابت و مقدار $X_L(\omega)$ تغییر پذیر است :

در این حالت برای انتقال حداکثر توان از رابطه $\frac{dP_L}{dX_L}=0$ شرط انتقال حداکثررا بدست می آوریم

چنین نتیجه می شود: $X_L(\omega)=-X_S(\omega)$ و توان ماکزیمم $P_{LMax}=\frac{1}{2}R_L\frac{|V_S|^2}{(R_S+R_L)^2}$ بدست می آید ..

بطور مثال بار هایی مانند سلف متغیر یا خازن متغیر نیز دارای این شرایط می باشند ، زیرا مقدار مقاومت آنها تغییر ناپذیر است .

ب : مقدار R_L متغیر و مقدار $X_L(\omega)$ ثابت است :

در این حالت برای تعیین شرایط انتقال حداکثر توان از رابطه $\frac{dP_L}{dR_L}=0$ شرط انتقال حداکثر توان را محاسبه می کنیم . چنین نتیجه می شود که :

$$R_L=\sqrt{R_S^2+[X_S(\omega)+X_L(\omega)]^2}$$

بطور مثال بار های اهمی خالص (مقاومتی) تابع این شرط می باشند ، زیرا راکتانس آن ها صفر است و تغییر نمی کند و در نتیجه برای این بارها می توان نوشت :

$$R_L=\sqrt{R_S^2+X_S^2(\omega)}=|Z_S(j\omega)|$$

یعنی شرط انتقال حداکثر توان این است که بار اهمی برابر قدرمطلق امپدانس منبع باشد .

ج : مقادیر R_L و $X_L(\omega)$ هر دو متغیرند :

در این حالت از شرایط $\frac{dP_L}{dX_L}=0$ و $\frac{dP_L}{dR_L}=0$ استفاده می شود و چنین نتیجه می شود :

$$\begin{cases} X_L(\omega)=-X_S(\omega) \\ R_L=\sqrt{R_S^2+[X_S(\omega)+X_L(\omega)]^2}=R_S \end{cases}$$

بنابر این شرط انتقال حداکثر توان عبارت است از :

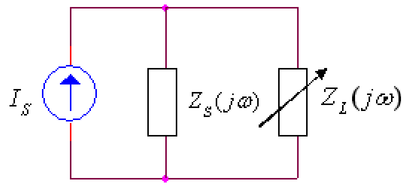
$$Z_L(j\omega)=R_L+jX_L(\omega)=R_S-jX_S(\omega)=\overset{*}{Z}_S(j\omega)\Rightarrow Z_L(j\omega)=\overset{*}{Z}_S(j\omega)$$

بدین مفهوم که امپدانس بار مزدوج امپدانس منبع می باشدو حداکثر توان از رابطه :

$$P_{LMax} = \frac{|V_S|^2}{8R_L}$$

بدست می آید .

- در صورتی که منبع جریان شکل (۷-۲۶) به مدار اعمال گردد توان ماکزیمم از رابطه $P_{LMax} = R_L \frac{|I_S|^2}{8}$ به دست می آید.



شکل (۷-۲۶)

- در صورتی که $|V_S|$ و یا $|I_S|$ بر حسب مقادیر موثر (RMS) مشخص باشند ، توان ماکزیمم از رابطه

$$P_{LMax} = \frac{|V_S|^2}{4R_L} \qquad \text{یا} \qquad P_{LMax} = R_L \frac{|I_S|^2}{4}$$

حاصل می شود .

• ۷-۵-۵- قضیه جمع پذیری توان ها :

هرگاه شبکه ای یک قطبی توسط منابع سینوسی با فرکانس های متفاوت $\omega_1, \omega_2, \cdots$ تغذیه گردد توانی که شبکه جذب می کند برا بر است با مجمو ع توان ها یی که هریک از منابع به تنهایی به شبکه تحویل می دهند .

برای اثبات موضوع اگر فرض کنیم که دو منبع :

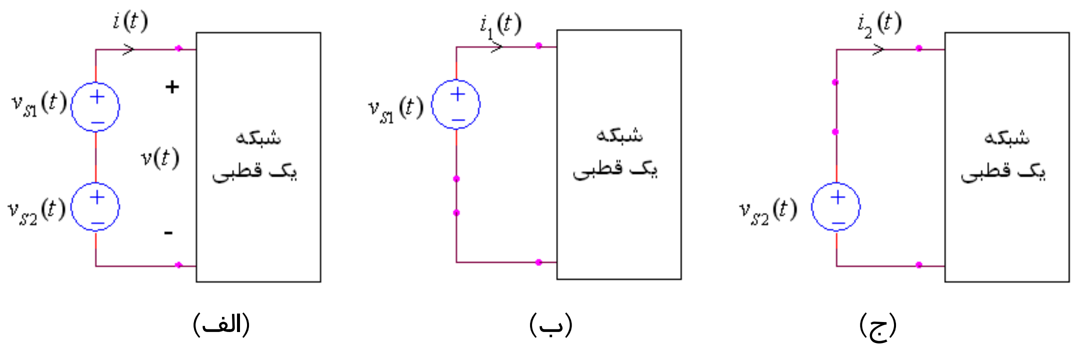
$$\begin{cases} v_{S1}(t) = V_{m1}\cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ v_{S2}(t) = V_{m2}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

به شبکه شکل (۷-۲۷- الف) اعمال گردند می توان جریان ورودی $i(t)$ را از طریق جمع اثر محاسبه کرد . در نتیجه به ازاءِ منبع $v_{S1}(t)$ واتصال کوتاه فرض کردن منبع $v_{S2}(t)$ مطابق شکل(۷-۲۷- ب) جریان $i_1(t)$ وبه ازاءِ منبع $v_{S2}(t)$ واتصال کوتاه فرض کردن $v_{S1}(t)$مانند شکل (۷-۲۷- ج) جریان $i_2(t)$ مطابق روابط زیر حاصل می شوند

$$\begin{cases} i_1(t) = I_{m1}\cos(\omega_1 t + \theta_1) \\ i_2(t) = I_{m2}\cos(\omega_2 t + \theta) \end{cases}$$

بنابراین نوان لحظه ا ی شبکه برابراست با :

$$p(t) = [v_{S1}(t) + v_{S2}(t)][i_1(t) + i_2(t)] = v_{S1}(t)i_1(t) + v_{S2}(t)i_2(t) + v_{S1}(t)i_2(t) + v_{S2}(t)i_1(t)$$



شکل (۷-۲۷)

با توجه به اینکه توان لحظه ای موجی تناوبی است و مقدار توان میانگین از رابطه :

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$

بدست می آید واز طرف دیگر توان لحظه ای برا بربا مجموع حاصلضرب ولتاژ منابع در جریان ها است بنابراین توان میانگین برابر است با :

$$P_{av} = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} v_{S1}(t)i_1(t)dt + \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} v_{S2}(t)i_2(t)dt = \frac{1}{2}V_{m1}I_{m1}\cos(\phi_1-\theta_1) + \frac{1}{2}V_{m2}I_{m2}\cos(\phi_2-\theta_2)$$

$$P_{av} = P_{av1} + P_{av2}$$

- **تذکر :** باید توجه نمود که بدلیل متفاوت بودن فرکانس ها $\int_0^T v_{S1}(t)i_2(t)dt = 0$ و $\int_0^T v_{S2}(t)i_1(t)dt = 0$ است .

- اگر شبکه یک قطبی شکل (۷-۲۷- الف) مقاومتی وامپدانس آن برابر با R باشد در این صورت با فرض I_{e1}, I_{e2} و I_e مقادیر موثر جریان های $i_1(t)$ ، $i_2(t)$ و $i(t)$ می توان در رابطه جمع توان ها مقدار قرار داد وروش تعیین جریان موثر ورودی شبکه را نتیجه گرفت :

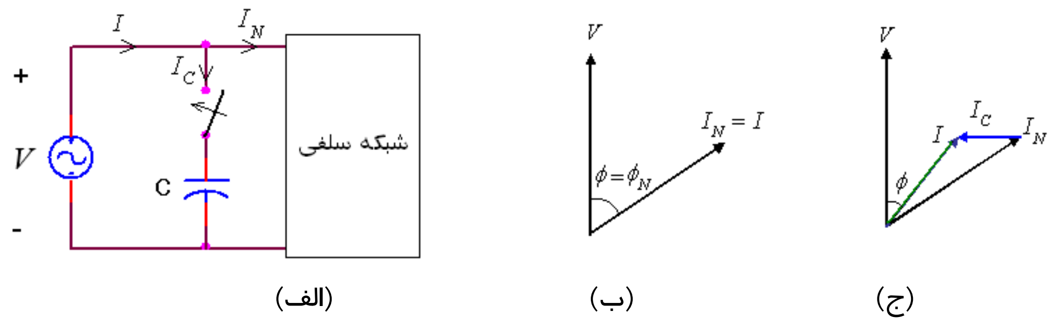
$$P_{av} = P_{av1} + P_{av2} \Rightarrow RI_e^2 = RI_{e1}^2 + RI_{e2}^2 \Rightarrow I_e^2 = I_{e1}^2 + I_{e2}^2$$
$$I_e = \sqrt{I_{e1}^2 + I_{e2}^2}$$

و بر همین اساس ولتاژ موثر شبکه برابر است با :

$$V_e = \sqrt{V_{e1}^2 + V_{e2}^2}$$

• ۷-۵- ۶ - تصحیح ضریب توان

یکی از نکات مورد توجه در تحلیل سیستم ها و شبکه های الکتریکی تصحیح ضریب توان است برای آشنایی با این موضوع یک شبکه با امپدانس $Z_N(j\omega) = R_N + jX_N(\omega)$ مطابق شکل(۷-۲۸-الف) که ولتاژ V به آن اعمال شده وجریان I_N وارد شبکه می شود در نظر گرفته شده است .



شکل (۷-۲۸)

اولاً : زاویه اختلاف فاز ϕ_N بستگی به مقادیر مقاومت و راکتانس ونوع راکتانس دارد .بنابراین اگر شبکه سلفی فرض شود جریان نسبت به ولتاژ تاخیر فاز دارد وهمان طور که در شکل (۷-ب) از دیاگرام برداری (دیاگرام فازوری) شکل (۷- ۲۸-ب) مشاهده می شود است $\phi = \phi_N$ و $I = I_N$

هرچه ϕ بزرگتر باشد (راکتانس بزرگتر باشد) ضریب توان کوچکتر می شود .

ثانیاً : برای کاهش زاویه اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ شبکه N ، خازن را با شبکه موازی می کنیم ، در نتیجه جریان I_C از خازن عبور می کند و بر اساس KCL جریان کلی I برابر است با $I_N + I_C$ و جریان I_C نسبت به V (ولتاژ دو سر خازن) ۹۰ درجه تقدم فاز دارد .

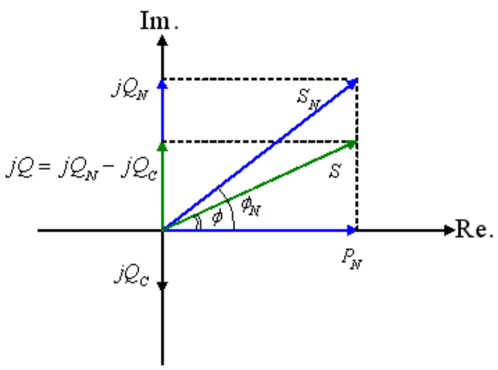
بنابر این از دیاگرام شکل (۷- ۲۸- ج) مشاهده می شود که با موازی کردن خازن با شبکه سلفی زاویه ϕ را کاهش داده در نتیجه ضریب توان افزایش می یابد . و ضمناً قدر مطلق جریان I کاهش می یابد و کاهش جریان دریافتی از منابع فیزیکی (مولد های فیزیکی) در توزیع جریان بین بارهای موازی دارای اهمیت است .

بنابر این بر اساس مطالب فوق اگر ضریب توان در مرحله اول $\cos\phi_N$ و پس از بهبود برابر $\cos\phi$ فرض شود ، با توجه به دیاگرام فازوری شکل (۷- ۲۸- ج) می توان نتیجه گرفت :

الف : توان میانگین که از مولد دریافت می شود قبل از اعمال خازن و پس از آن ثابت است و تغییر نمی کند . $P = P_N$

ب : توان راکتیو Q پس از اعمال خازن از رابطه $Q = Q_N - Q_C$ محاسبه می گردد ، که در این رابطه Q_N توان راکتیو شبکه N و Q_C توان راکتیو خازن می باشد .

ج : دیاگرام فازوری شکل (۷-۲۹) رابطه توان در مورد تصحیح ضریب توان را نشان می دهد .



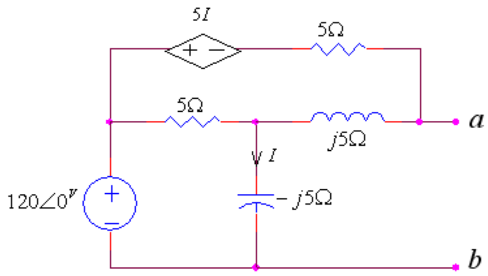
شکل (۷-۲۹)

د : بین مقدار جریان های $|I_N|$ و $|I|$ و جریان خازن $|I_C|$ با توجه به ثابت بودن ولتاژ $|V|$ روابط زیر برقرار است :

$$\begin{cases} |I|\cos\phi = |I_N|\cos\phi_N \\ |I|\sin\phi = |I_N|\sin\phi_N - |I_C| \end{cases}$$

حال با توجه به مسئله توان و قضایای ذکر شده در این مبحث به ذکر چند مثال می پردازیم .

- **مثال(۷-5):** مدار شکل (۷-۳۰) مفروض است.



شکل(۷-۳۰)

الف : مدار معادل تونن را از دو نقطه a و b بدست آورید.

ب : اگر مقاومت متغییر R بعنوان بار انتخاب وبین دو سر a و b متصل شود مقدار آن را چنان تعیین کنید که حداکثر توان را از مدار در یافت نماید .

ج : اگر به جای R از امپدانس متغییر $Z_L(j\omega)$ استفاده شود امپدانس $Z_L(j\omega)$ و حداکثر توان را بدست آورید .

- **پاسخ :**

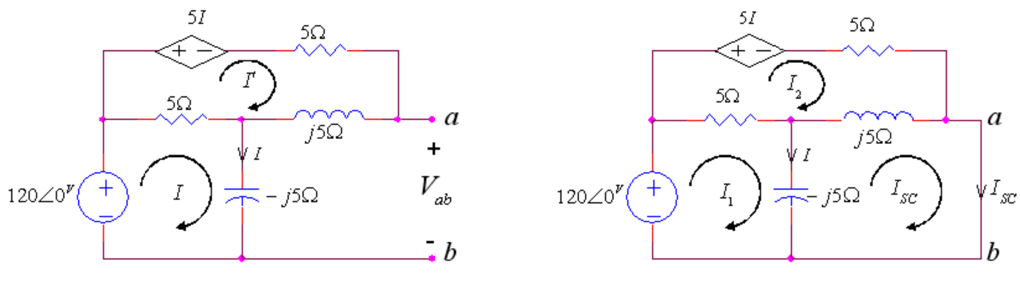
الف : با توجه به این که مدار در حالت فازوری داده شده ابتدا با استفاده از روش مش ولتاژ مدار باز $V_{OC} = V_{ab}$ را در مدار شکل (۷-۳۱-الف) از رابطه (۱) بدست می آوریم.

$$\begin{cases} (5-j5)I - 5I' = 120\angle 0 \\ -5I + (10+j5)I' = -5I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5-j5)I - 5I' = 120\angle 0 \\ (10+j5)I' = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} I' = 0 \\ I = 12(1+j1) \approx 16.9\angle 45^\circ A \end{cases}$$

$V_{ab} = j5I' - j5I$ رابطه(۱)

$$V_{ab} = j5\times 0 - j5\times 12(1+j1) = 60\sqrt{2}\angle -90+45 = 84.8\angle -45^\circ V$$



(الف) (ب)

شکل (۷-۳۱)

پس از محاسبه ولتاژ مدار باز جریان اتصال کوتاه را مجدداً از روش مش در شکل (۷-۳۱-ب) حساب می نماییم .

$$\begin{cases}(5-j5)I_1-5I_2+j5I_{SC}=120\angle 0\\-5I_1+(10+j5)I_2-j5I_{SC}=-5I\\j5I_1-j5I_2+(j5-j5)I_{SC}=0\\I_1-I_{SC}=I\end{cases}$$

دستگاه را با جایگذاری مقدار به جای I ساده می نماییم :

$$\begin{cases}(1-j)I_1-I_2+jI_{SC}=24\angle 0\\0\times I_1+(2+j)I_2-(1+j)I_{SC}=0\\jI_1-jI_2+0\times I_{SC}=0\end{cases}$$

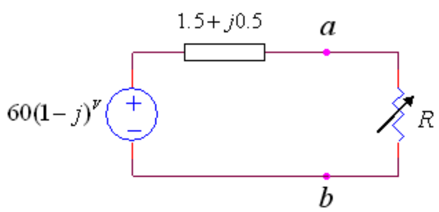
از روش کرامر I_{SC} را حساب می کنیم :

$$I_{SC}=\frac{\begin{vmatrix}1-j & -1 & 24\angle 0\\0 & 2+j & 0\\j & -j & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1-j & -1 & j\\0 & 2+j & -1-j\\j & -j & 0\end{vmatrix}}=\frac{-24(j)(2+j)}{-j(j)(2+j)-(-1-j)[-j(1-j)+1\times j]}=\frac{24-j48}{2+j-1-j}$$

$$I_{SC}=\frac{24(1-j2)}{1}=24-j48=53.66\angle -63.4^o\,A$$

$$Z_{th}=\frac{V_{OC}}{I_{SC}}=\frac{60(1-j1)}{24(1-j2)}=\frac{5}{2}\times\frac{3+j}{5}=1.5+j0.5\Omega$$

ب : بنابراین مدار معادل مدار در شکل (۷- ۳۲) رسم شده است .



شکل (۷-۳۲)

حال مقاومت را حساب می کنیم :

$$R=\sqrt{R_S{}^2+(X_S(\omega))^2}=|Z_S(j\omega)|$$

$$R=\sqrt{(1.5)^2+(0.5)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}=1.58\Omega$$

ج : شرایط انتقال حداکثر توان $Z_L(j\omega)=Z_S^*(j\omega)$ است ، بنابراین :

$$Z_L(j\omega)=1.5-j0.5\Omega$$

$$P_{LMax}=\frac{|V_{th}|^2}{8R_L}\quad\Rightarrow\quad P_{LMax}=\frac{(60\sqrt{2})^2}{8\times 1.5}=\frac{3600\times 2}{12}\quad\Rightarrow\quad P_{LMax}=600W$$

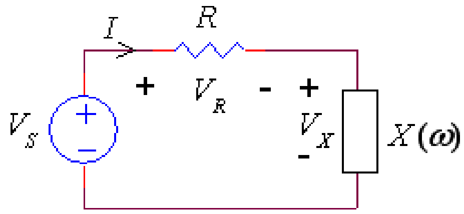
• **مثال(۷-۶):** برای تعیین مقدار R و $X(\omega)$ ترکیب سری یک مقاومت و یک راکتانس آنها را به یک منبع ولتاژ سینوسی با امپدانس صفر $(Z_S = 0)$ وصل می نماییم و اندازه گیری های زیر را انجام می دهیم :

الف : توسط ولتمتر جریان متناوب مقادیر ولتاژ دو سر منبع ولتاژ و دو سر راکتانس را اندازه گیری می نماییم ، ولتمتر به ترتیب مقادیر $150V$ و $100V$ را نشان می دهد .

ب : توسط یک واتمتر (وات سنج) دقیق توان متوسط (میانگین) داده شده توسط منبع را اندازه گیری می نماییم . واتمتر $100W$ را نشان می دهد .

مقادیر R و $X(\omega)$ و مقدار موثر جریان را به دست آورید .

• **پاسخ :** اگر مداری مطابق شکل (۷-۳۳) در نظر بگیریم :



شکل(۷-۳۳)

در آزمایش (الف) ولتمتر مقادیر موثر ولتاژهای فازوری را نشان می دهد و امپدانس مدار به دلیل نامعین بودن نوع راکتانس به صورت $Z = R \pm jX(\omega)$ نوشته می شود . با فرض I فازور جریان میتوان نوشت :

$$V_S = RI \pm jX(\omega)I \quad \Rightarrow \quad V_S = V_R \pm jV_X$$

بنابراین رابطه مقادیر ولتاژها برابر است با :

$$|V_S| = \sqrt{|V_R|^2 + |V_X|^2}$$

از این رابطه مقدار ولتاژ (V_R) را حساب می کنیم :

$$|V_S|^2 = |V_R|^2 + |V_X|^2 \quad \Rightarrow \quad (150)^2 = |V_R|^2 + (100)^2 \quad \Rightarrow \quad |V_R|^2 = 22500 - 10000$$

$$|V_R|^2 = 12500 \quad \Rightarrow \quad |V_R| = 50\sqrt{5}V_{RMS}$$

با توجه به آزمایش (ب) توانی را که واتمتر نشان می دهد توان میانگینی است که در مقاومت مصرف شده و از رابطه $P_{av} = \frac{|V_R|^2}{R}$ قابل محاسبه می باشد.

بنابراین R و سپس $|I|$ را حساب می کنیم :

$$100 = \frac{12500}{R} \qquad \Rightarrow R = 125\Omega$$

$$|I| = \frac{|V_R|}{R} \Rightarrow |I| = \frac{50\sqrt{5}}{125} \Rightarrow |I| = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0.89A$$

و در مورد راکتانس $X(\omega)$ می توان نوشت :

$$|V_X| = X(\omega)|I| \Rightarrow 100 = X(\omega) \times \frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$X(\omega) = \frac{500}{2\sqrt{5}} \Rightarrow X(\omega) = 50\sqrt{5}\Omega$$

• **مثال (۷-۷) :** جریان های $i_1(t) = 10\cos(2\omega_o t) + 20\cos(5\omega_o t)$ و $i_2(t) = I_o + 5\cos(\omega_o t)$ مفروضند . به ازای چه مقادیر I_o مقادیر موثر آنها برابرند . $(I_{e1} = I_{e2})$

• **پاسخ :** با توجه به خاصیت جمع پذیری توان ها مقدار موثر هر یک از جریان های ی $i_1(t)$ و $i_2(t)$ از رابطه عمومی زیر و همچنین رابطه بین دامنه و مقدار موثر موج سینوسی $(I = \frac{I_m}{\sqrt{2}})$ به دست می آید .

$$I_e = \sqrt{I_1^{\ 2} + I_2^{\ 2} + \dots}$$
$$I_{e1} = \sqrt{(\frac{10}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{20}{\sqrt{2}})^2} \Rightarrow I_{e1} = \sqrt{\frac{100}{2} + \frac{400}{2}} = \sqrt{250}$$

مقدار موثر موج dc برابر مقدار آن است ، بنابراین :

$$I_{e2} = \sqrt{(I_o)^2 + (\frac{5}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{I_o^{\ 2} + \frac{25}{2}}$$

بنابراین اگر مقادیر I_{e1} و I_{e2} را مساوی قرار دهیم ، نتیجه می شود :

$$\sqrt{250} = \sqrt{I_o^{\ 2} + \frac{25}{2}} \quad \Rightarrow \quad 250 = I_o^{\ 2} + \frac{25}{2} \quad \Rightarrow \quad I_o^{\ 2} = 250 - \frac{25}{2} \quad \Rightarrow \quad I_o^{\ 2} = \frac{475}{2} = 237.5$$
$$I_o = \pm\sqrt{237.5} \quad \Rightarrow \quad I_o \approx \pm 15.4$$