۳: $h(t)e^{-t}$ انتگرال پذیر باشد ← یعنی سیستم شامل محور $j\omega$ باشد یعنی تبدیل فوریه داشته باشد

← ROC باید سمت راست خط $+1$ باشد.

۱- پایدار
۲- غیرعلی

$ROC: \ -2 < Re(s) < 3$

۴: $h(t)e^{3t}$ تبدیل فوریه نداشته باشد:

۱- ناپایدار
۲- غیرعلی

← ۲- بیرون از ROC خط $+3$ باشد ←

$ROC: \ Re(s) < -2$

*** اگر تابع تبدیل $H(s)$ گویا باشد یعنی سیستم علی باشد ← اگر ROC سمت راست راست‌ترین قطب باشد ← سیستم علی خواهد بود ***

مثال ۱۵: ورودی $x(t)=0 \quad t>0$ به سیستم LTI اعمال کرده‌ایم و خروجی

$$y(t) = -\frac{2}{3} e^{2t} u(-t) + \frac{1}{3} e^{-t} u(t) \longrightarrow Re(s) > -1$$

و $X(s) = \dfrac{s+1}{s-2}$. مطلوبست $h(t)=?$ $\quad Re(s) > 2$

حل. ورودی چپ سو است. خروجی دو طرفه است.

$ROC_X : Re(s) < 2$

$$Y(s) = -\frac{2}{3} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{-2(s+1) + s+2}{3(s-2)(s+1)} = -\frac{1}{3} \frac{s}{(s-2)(s+1)}$$

$$H(s) = -\frac{1}{3} \frac{\frac{s}{(s-2)(s+1)}}{\frac{s+1}{s-2}} = -\frac{1}{3}$$

$X_1(s)=\frac{1}{s} \rightarrow Y_1=\frac{1}{s}\times\frac{g(s)}{P(s)} \rightarrow$ مطمئناً $g(s)$ دارای یک صفر در

مبدا است. زیرا باید قطبی در مبدا نداشته

باشیم. (می‌خواهیم انتگرال محدود باشد)

$$g(s)=sT(s)$$

$$Y_1(s)=\frac{T(s)}{P(s)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|dt<\infty$$

$X_2=\frac{1}{s^2} \rightarrow Y_2=\frac{1}{s^2}\times\frac{sT(s)}{P(s)}=\frac{T(s)}{sP(s)} \rightarrow$ در غیر صورت چون سیگنال

انتگرال پذیر نیست پس $T(s)$ باید

صفری در مبدا داشته باشد.

وقتی خروجی به ازای سیگنال ورودی $h_0(t)$ محدود است یعنی تبدیل لاپلاس آن هیچ قطبی ندارد. زیرا ROC آن کل کل

صفحه s است.

$$H_0(s)=(s^2+2s+2)H(s)=(s^2+2s+2)\frac{sT(s)}{P(s)}$$

پس $P(s)$ باید همان (s^2+2s+2) باشد تا کاملاً بصورت ساده شود.

$\Rightarrow P(s)=s^2+2s+2$ چون اصلاً هیچ صورتی در خروج نیست پس $T(s)$ فقط

یک K خواهد بود

$$\Rightarrow H(s)=\frac{sT(s)}{s^2+2s+2}=\frac{Ks}{s^2+2s+2}$$

$$H(1)=0.2 \Rightarrow \frac{K}{1+2+2}=0.2 \Rightarrow \boxed{K=1}$$

د- از حالت کلی: اگر درجه صورت مساوی درجه مخرج باشد ← در تبدیل وارون آن ضربه خواهیم داشت.

$x_1(t)=\delta(t)$

$$H(s)=\frac{s}{s^2+2s+2}$$

$Y(s)=\frac{n}{m} \rightarrow A+\dots \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} A\delta(t) \rightarrow \delta(t)$ ضربه داریم.

درجه $n=m$

حال $R_h \cap R_x \overset{\text{زیرمجموعه}}{\subset} R_y$ باید $\Rightarrow$

تابع تبدیل $\Rightarrow$ معادل

$$\Rightarrow R_h: Re(s) > -1 \Rightarrow H(s) = \frac{s}{(s+1)^2} = \frac{s+1-1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$Re(s) > -1$ $\quad$ $Re(s) > -1$

$$\Rightarrow h(t) = (e^{-t} - te^{-t})u(t)$$ ← سیستم علی و پایدار است

سوال ۱۶: $h(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم پایدار و علی LTI است. $H(s)$ تابع تبدیل و گسترده در

s برابر ۲ از است و $H(s)$ یک صفر در بی‌نهایت دارد.

$H(1) = ۰/۲$

بی‌نهایت اصلاً درجه صورت و مخرج

از درجه مخرج بزرگتر شد، صفر در بی‌نهایت داریم.

$u_1(t) = u(t)$ خروجی سیستم به ازای ورودی یک مطلقاً انتگرال‌پذیر است.

خروجی سیستم به ازای ورودی $t u(t)$ ... نیست.

سیگنال مشتق تابع ... محدود است.

$h_0(t) = h''(t) + 2h'(t) + 2h(t)$

معادل کدام $H(s)$ ؟

۱) $\frac{s}{s^2+2s+2}$ $\qquad$ ۲) $\frac{2s^2}{(s^2+2s+2)(s+1)}$

۳) $\frac{(s+1)(s+4)}{8(s(s^2+2s+2))}$ $\qquad$ ۴) $\frac{1}{2}\frac{s+1}{s^2+2s+1}$

۱۵: ... سیگنال مطلقاً انتگرال‌پذیر است ...

... سیستم ... ۵ ...

... سیستم ... باشند.

سوال ۱۷ : کدام وارون‌پذیر است؟

1) $y(t)=\frac{\sin x(t)}{x(t)}$ → تک‌به‌یک نیست → وارون‌پذیر نیست

$x(t)=k \Rightarrow y(t)=\frac{\sin k}{k}$

$x(t)=-k \Rightarrow y(t)=\frac{\sin(-k)}{-k}=\frac{+\sin k}{+k}$

2) $y(t)=e^{t x(t)}$ ⇒ ورودی در لحظه صفر حذف می‌شود و در خروجی دیده نمی‌شود → $y(0)=e^{0\times x(0)}=1$ → وارون‌پذیر نیست

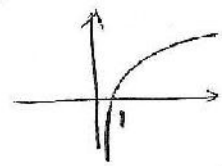
3) $y(t)=\cos(x(t-2))$ → وارون‌پذیر نیست → $x_1(t)\Rightarrow y_1=\cos(x_1(t-2))$

$x_2=x_1+2k\pi \Rightarrow y_2=\cos(x_2(t-2))=\cos(x_1(t-2)+2k\pi)$

$=\cos(x_1(t-2))$

4) $y(t)=\ln x(t)$ → تک‌به‌یک است → وارون‌پذیر است

$x_1\neq x_2 \Rightarrow y_1\neq y_2$



سوال ۱۸ : کدام وارون‌پذیر است؟

1) $y(n)=nx(n)$ → ورودی در لحظه صفر حذف می‌شود و در خروجی دیده نمی‌شود → $y(0)=0\cdot x(0)$ ⇒ وارون‌پذیر نیست

2) $y(n)=x(\underbrace{1-n}_{m})$ → هیچ اطلاعاتی حذف نمی‌شود → وارون‌پذیر است

$1-n=m$

$x(m)=y(n)=y(1-m)$

با هر اطلاعاتی که داریم

معادله سیستم وارون ⇒ $y(m)=x(1-n)$

3) $y(n)=x(2n)$ → ورودی‌های با اندیس فرد در خروجی دیده نمی‌شوند ⇒ وارون‌پذیر نیست

4) $y(n)=x(n+2)\cdot x(n-2)$ → $\begin{cases} x(n+2)=k \\ x(n-2)=k \end{cases} \Rightarrow y(n)=k\times k=k^2$ $\begin{cases} x(n)=-k \\ x(n-2)=-k \end{cases} \Rightarrow y(n)=-k\times -k=k^2$

وارون‌پذیر نباشد.

5) $y(n)=\begin{cases} x(n+1); & n \text{ فرد} \\ x(n-1); & n \text{ زوج} \end{cases}$

چون برای زوج‌ها و فردها به اطلاعات نیاز دارد

⇒ تبدیل به یکدیگر و پس وارون‌پذیر است.

در لحظات زوج خروجی برابر ورودی در لحظات فرد است و در لحظات فرد خروجی برابر ورودی در لحظات زوج است.

معادله سیستم وارون $y(n)$: $x(n)=\begin{cases} y(n+1); & n \text{ فرد} \\ y(n-1); & n \text{ زوج} \end{cases}$

$y(1)=x(2)$

$y(8)=x(7)$

اگر یک سیستم خطی باشد شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری این سیستم آن است که تنها ورودی‌ای که

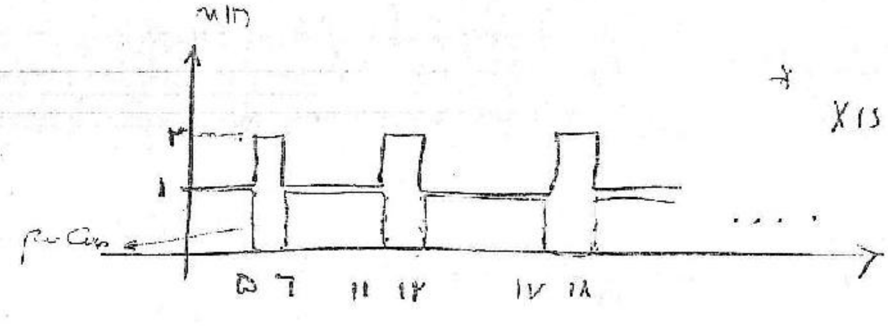
خروجی سیستم صفر، $y(n)=0$ اگر شد ورودی هم $x(n)=0$ (هیچ جواب دیگری نداشت)

مثال $y(n)=x(n)-x(n-2)$ → این سیستم خطی است ولی

وارون‌پذیر نیست زیرا خروجی صفر شد به ازای ورودی غیر صفر

$x(n)=k \to y(n)=k-k$

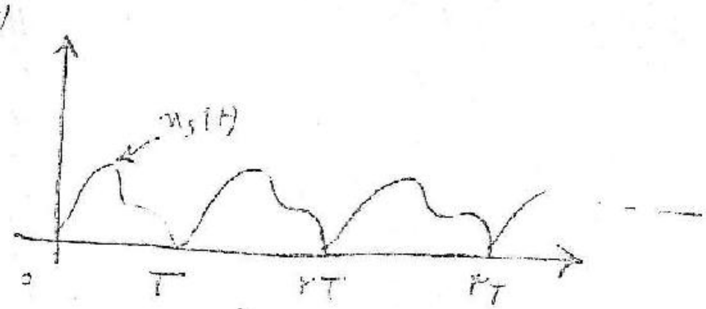
:۱۶ سؤال

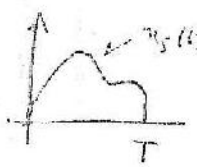


$$* \quad X(s) = \frac{1 - e^{-\alpha s}}{s(2 - e^{-\beta s})}$$

$$\alpha, \beta = ?$$

:حل





$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_s(t - kT)$$

$$= x_s(t) + x_s(t-T) + x_s(t-2T) + \dots$$

$$X(s) = X_s(t)\left(1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots\right)$$

$$= X_s(t)\,\frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

$$|e^{-sT}| < 1 \Rightarrow |e^{sT}| > 1 \Rightarrow \boxed{Re(s) > 0}$$

همانطور که دیده می‌شود [illegible] (سمت راست [illegible])

:ادامه

$$* \quad X(s) = \frac{X_s(s)}{1 - e^{-Ts}} \qquad \beta = T = 6$$

$X_s(s) = ?$

$$x_s(t) = \tfrac{1}{s}(1 - e^{-5s}) - \tfrac{1}{s}(e^{-5s} - e^{-6s}) = \tfrac{1}{s}(1 - e^{-5s} - e^{-5s} + e^{-6s}) = \tfrac{1}{s}(1 - e^{-5s})$$

$$x_s(t) = u(t) + u(t-5) - 2u(t-6)$$

$$X_s(s) = \tfrac{1}{s} + \tfrac{1}{s}e^{-5s} - 2\,\tfrac{1}{s}e^{-6s} \quad \to X(s) = \frac{\frac{1}{s}(1 - e^{-5s})}{1 - e^{-6s}}$$

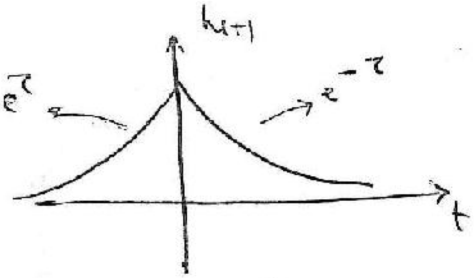
$$X_s(s) = \tfrac{1}{s}(1 + e^{-5s} - 2e^{-6s}) \qquad \Rightarrow \alpha = 5,\ \beta = 6$$

$$\Rightarrow \quad X(s) = \frac{\frac{1}{s}(1 + e^{-5s} - 2e^{-6s})}{1 - e^{-6s}}$$

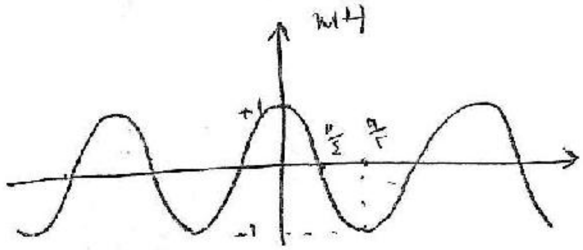
مثال ۳۲: ورودی سیستم LTI، $x(t) = \cos 2t$ و $h(t) = e^{-|t|}$ می‌باشد.

مطلوبست $y(t) = ?$

حل: روش اول: راه کانولوشن.



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau} \times \cos 2(t-\tau)\, d\tau$$



$$+ \int_{0}^{+\infty} e^{-\tau} \times \cos 2(t-\tau)\, d\tau$$

روش دوم: استفاده از روش‌های فوریه: (روش سینوسی)

$$H(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \qquad e^{-\alpha|t|} \xrightarrow{\text{فوریه}} \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

چون ورودی $\cos 2t$ است باید $H(j\omega)$ را در فرکانس $\omega = 2$ بیابیم.

زیرا ورودی ما از این نوع است. چون پاسخ سیستم به ورودی سینوسی است.

$$y(t) = H(j2) \cdot \cos 2t = 0.4 \cos 2t$$

مثال ۳۳: فرض کنید ورودی $x(t) = \cos 2t\, u(t)$ در سیستم LTI باشد.

حل: چون $x(t) = \cos 2t\, u(t)$ است. و $u(t)$ باعث می‌شود که سیستم از لحظه صفر شروع شود. و سیستم را سکون اولیه فرض می‌کنیم:

$$H(s) = \frac{+2}{1-s^2} \longrightarrow s = \pm 1 \quad \text{ریشه‌های مخرج}$$

$$y(t) = A e^{-t} + B e^{t} + \underbrace{0.4 \cos 2t}_{\text{پاسخ خاص}}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{array}\right\} \text{سکون اولیه}$$

$y(n) = K - K = 0$ وارون‌پذیر نیست

مثال ۱۹ : حاصل انتگرال زیر را بیابید

$$I = \int_{-2}^{4} (t^2+5t)\,\delta(-3t+5)\,dt$$

حل :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at)\,dt = \frac{1}{|a|}$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at+b)\,dt = \frac{1}{|a|}$$

$$I = \int_{-2}^{4} \left(\frac{25}{9} + \frac{5\times 5}{3}\right) \delta(-3t+5)\,dt = \frac{100}{9}\underbrace{\int_{-2}^{4} \delta(-3t+5)\,dt}_{\frac{1}{|-3|}} = \frac{100}{9} \times \frac{1}{|-3|}$$

$$= \frac{100}{27}$$

$-3t+5 = 0 \Rightarrow t = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$ که در بازه $(-2,4)$ قرار دارد $\Rightarrow$

نکته :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f(t))\,dt = \sum_{t=\alpha_i}^{\alpha_n} \frac{1}{|f'(t)|}$$

$$f(t) = (t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_n)$$

مثال ۲۰ : ضرایب مجهول $\delta((t-\alpha)(t-\beta)) = A\delta(t-\alpha) + B\delta(t-\beta)$ مقادیر A و B ؟

$$\int_{\alpha^-}^{\alpha^+} \delta((t-\alpha)(t-\beta)) = A\int_{\alpha^-}^{\alpha^+} \delta(t-\alpha) + B\int_{\alpha^-}^{\alpha^+} \delta(t-\beta)$$

$\alpha \neq \beta$

$= A$

$f(t) = (t-\alpha)(t-\beta)$

$\Rightarrow \delta((t-\alpha)(t-\beta))$

تمرین

مثال ۲۱ :

$$\delta(t^2-1) = A\delta(t-1) + B\delta(t+1)$$

$$A = (2)^{-1} \quad B = -(2)^{-1}$$

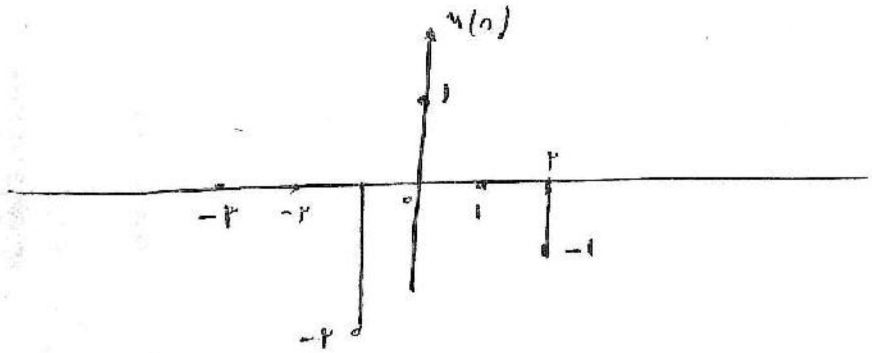
حل ۲ سری فوریه سیگنالهای گسسته زمان:

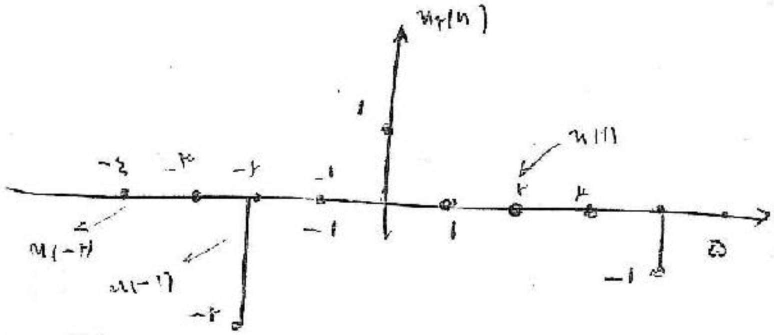
خاصیت انبساط زمانی:

$$x_m(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{m}) & \text{n مضرب m باشد} \\ 0 & \text{n مضرب m نباشد} \end{cases}$$

مثال: $m=2$

$$x_2(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{2}) & \text{زوج: n مضرب ۲ باشد} \\ 0 & \text{فرد: n مضرب ۲ نباشد} \end{cases}$$





که فاصله بین هر دو نمونه $\underline{\underline{m-1}}$ صفر گذاشتیم. این یک سیستم دارای حافظه است

$x(n) \xrightarrow{\text{ضرایب فوریه}} a_k$ با دوره N

$$x_m(n) \longrightarrow b_k = \frac{1}{N'} \sum x_m(n) e^{-j\omega_0' k n} = \frac{1}{mN} \sum_{k'=0}^{N-1} x(n/m) e^{-j\omega_0' k(n)}$$

$$N' = m.N$$

$$\omega_0' = \frac{2\pi}{N'} = \frac{2\pi}{mN} = \frac{1}{m}\frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{m}$$

$n = m.k'$ n مضرب m باشد

$$b_k = \frac{1}{MN} \sum_{k'=0}^{N-1} x\left(\frac{mk'}{m}\right) e^{-j(\frac{\omega_0}{m})k(mk')} = \frac{1}{MN} \sum_{k'=0}^{N-1} x(k') e^{-jk\omega_0(k')}$$

مثال ۲۲ : در مورد خصوصیات سیستم زیر بحث کنید.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t+1} x(\tau)\,d\tau$$

پایداری - تغییرناپذیری با زمان - خطی - علیت .

حل : خطی : چون رابطه انتگرال‌گیری خطی است و ورودی و خروجی هر دو به توان یک هستند ← سیستم خطی است .

تغییرناپذیری با زمان :

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

$$= x(t) * \underline{u(t)}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t+1} x(\tau)\,d\tau = x(t) * u(t+1)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \; * \delta(t+1)$$

$$= \int_{-\infty}^{t+1} x(\tau)\,d\tau$$

$$= x(t) * \underbrace{u(t) * \delta(t+1)}$$

$$= x(t) * u(t+1) \longrightarrow$$

چون هر دو سیستم متغیر با زمان نیستند کانولوشن هر دو ← کل سیستم LTI است

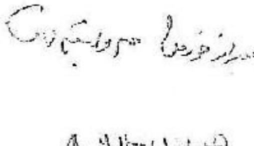
چون تفاوت آرگومان x و y در t+1 ثابت است ← تغییرناپذیر با زمان است .

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)\,d\tau \longrightarrow$$ خطی و تغییرناپذیر با زمان

$$y(\alpha t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\alpha t-t} x(\tau)\,d\tau \Rightarrow$$ تغییرپذیر با زمان

علیت : چون خروجی در لحظه t به t+1 هم بستگی دارد ← غیرعلی است چون به آینده ورودی وابسته است

یا چون پاسخ ضربه $u(t+1)$ به ازای t منفی صفر نیست غیرعلی است $y(0)=\int_{-\infty}^{1} x(\tau)d\tau$

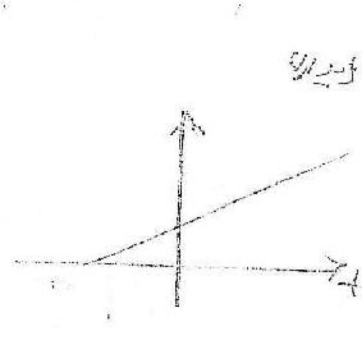


پایداری : چون پاسخ ضربه این سیستم یعنی $u(t+1)$ انتگرال‌پذیر نیست ← ناپایدار است

← مثال نقض برای ناپایداری

$$x(t)=u(t)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t+1} u(\tau)\,d\tau = r(t+1)$$



ناپایدار است .

ص ۲۱

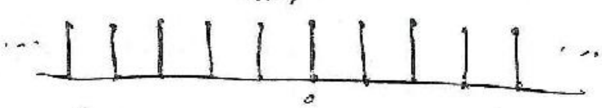
مسائل مربوط به فصل دوم

سؤال ۶: $h(n)=a^n u(n)$, $x_1(n)=1$, $x_2(n)=(-1)^n$, $> y_1(n)=1$

$y_2(n)=?$

حل:

گام اول $x_1(n)=$ سیگنال همیشه ثابت → فرکانس صفر



$$h(n)=a^n u(n) \longrightarrow H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

ورودی × پاسخ فرکانسی در فرکانس صفر

$$y_1(n)=(1)\,H(e^{j(0)})$$

$$=\frac{1}{1-ae^{-j0}}=\frac{1}{1-a}$$

گام دوم

$$x_2(n)=(-1)^n=(e^{j\pi})^n=e^{j\pi n}\longrightarrow e^{j\omega_0 n}$$

که $\omega_0=\pi$

$$H(e^{j\pi})=\frac{1}{1-ae^{-j\pi}}=\frac{1}{1-a(-1)}=\frac{1}{1+a}$$

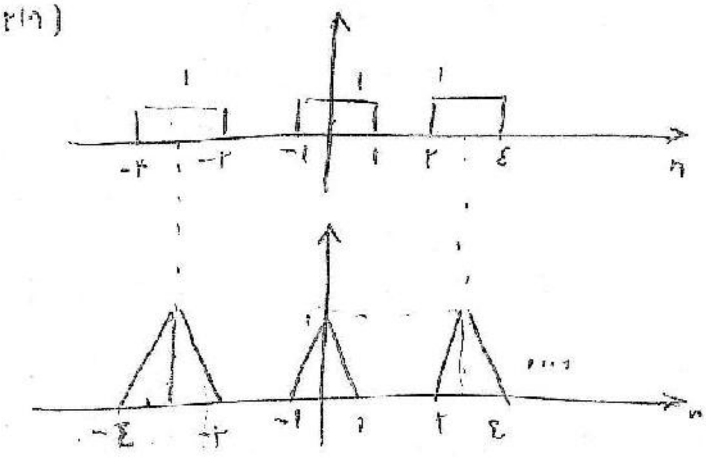
$$y_2(n)=x_2(n)\,H(e^{j\pi})$$

$$=e^{j\pi n}\cdot\frac{1}{1+a}=\frac{(-1)^n}{1+a}$$

سؤال ۷: $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kN)\,\delta(n-kN)$ ، کدام یک از خواص سیستم صادق است؟

کانولوشن سیگنالهای متناهی

$$x_3(n)=x_1(n) \circledast x_2(n)$$



(در حالت سیستم های خطی تغییر ناپذیر با زمان گسسته زمان این قضیه ثابت می‌شود.)

تبدیل فوریه گسسته زمان :

چون ω متناوب با 2π تکرار است پس کل تبدیل فوریه آن را با دوره تناوب در نظر میگیریم

$$X(e^{j\omega}) = F(x[n]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$X(e^{j\omega})$ = سیگنال متناوب با دوره   که

$$\omega = 2\pi$$

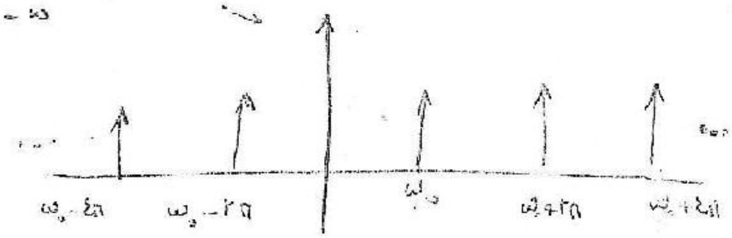
و

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

مثال :

$$e^{j\omega_0 t} \longrightarrow 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

$$e^{j\omega_0 n} \longrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\omega_0-2k\pi)$$



$$\cos\omega_0 t \longrightarrow \pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

$$\cos\omega_0 t \longrightarrow \pi\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)+\delta(\omega+\omega_0-2k\pi)\right)\right)$$

$$x(n) = a^n u(n) \xrightarrow{F} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad |a|<1$$

حالت خاص : بنابراین

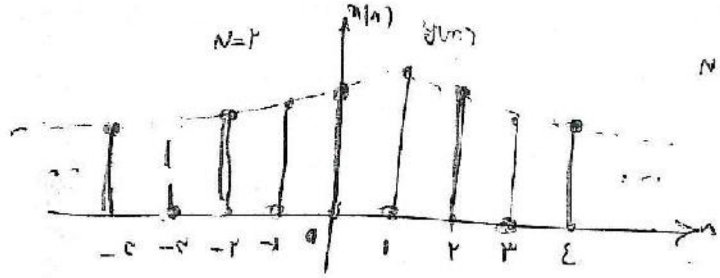
$$a=1 \longrightarrow x(n)=u(n) \xrightarrow{F} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi\sum\delta(\omega-2k\pi)$$

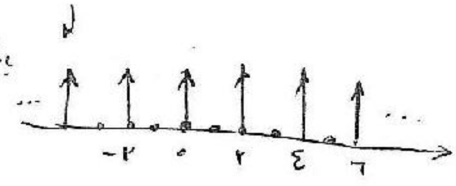
$\Leftarrow$ چون δ متناوب است

$$a=-1 \longrightarrow x(n)=(-1)^n u(n) \xrightarrow{F} \frac{1}{1+e^{-j\omega}}$$

$$= x(n)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(n-kN)\right)$$

$$\cdots + \delta(n+N) + \delta(n) + \delta(n-N) + \cdots$$





$$y(n) = \begin{cases} x(n) & ; \ n \text{ مضرب } N \text{ باشد } \rightarrow n = Nk \\ 0 & ; \ n \text{ مضرب } N \text{ نباشد} \end{cases}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید اگر $N=2$ باشد فقط در مکان‌های زوج ورودی را در خروجی داریم و در مکان‌های فرد ورودی‌ها در خروجی حذف می‌شوند ← بدون حافظه باشد.

سیستم بدون حافظه است ← با فرض صفر است یا به ورودی در همان لحظه وابسته است.

اگر ورودی محدود باشد ← خروجی یا صفر می‌شود و یا برابر با ورودی (کران‌دار) می‌شود ← پایدار است.

تغییرپذیر با زمان است ← در آن نقاطی که مضرب N هستند، در زمان‌هایی که مضرب N نباشند خروجی صفر می‌شود

سؤال ۸: در سؤال قبل چه ارتباطی بین طیف خروجی $Y(e^{j\omega})$ و طیف ورودی $X(e^{j\omega})$ وجود دارد؟

(قطار ضربه) ; $p(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(n-kN)$

$y(n) = x(n)\cdot p(n)$

$x_1(n)\cdot x_2(n) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \circledast X_2(e^{j\omega})$

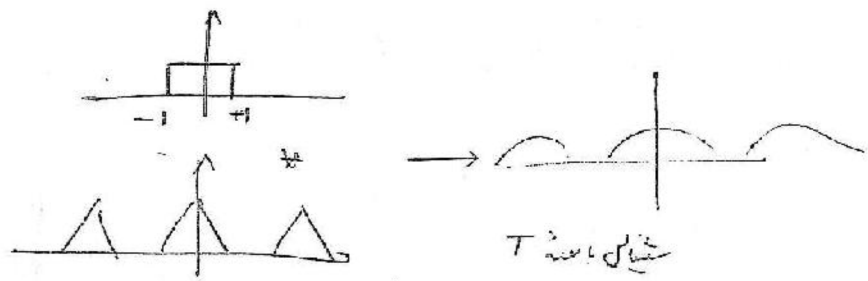
پیوسته $x_1(t)\cdot x_2(t) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$

گسسته $x_3 = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)\, x_2(n-k)$ با فرض اینکه تناوب x_1 و x_2 برابر N باشد.

پیوسته $x_3 = \int_{\langle T \rangle} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$

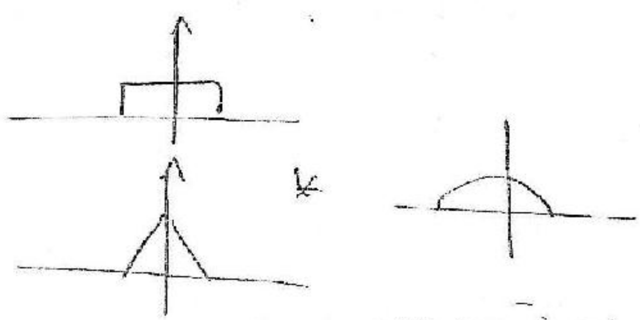
روش محاسبه: راه اول:

یک دوره $x_1(t)$ را انتخاب می‌کنیم و $x_2(t)$ را به $x_2(t-\tau)$ تبدیل کرده و در یک دوره متناوب کانوال می‌کنیم



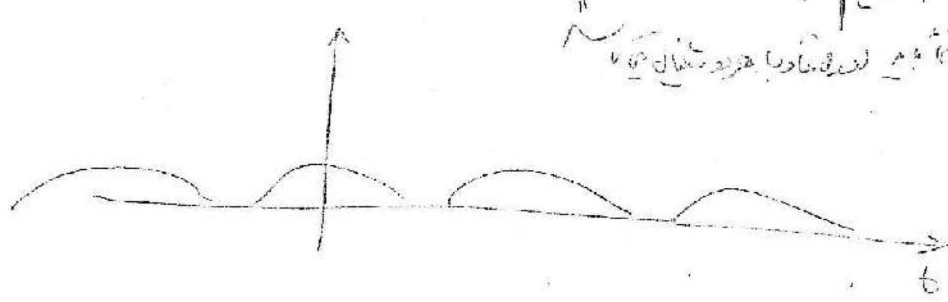
می‌توانیم بخواهیم یک قسمت را در یک سیگنال متناوب کانوال کنیم. (این روش ساده‌تر است)

روش دوم:



سپس سیگنال حاصل را با دوره تناوب T

متناوب می‌کنیم:



نمونه‌برداری سیگنال:

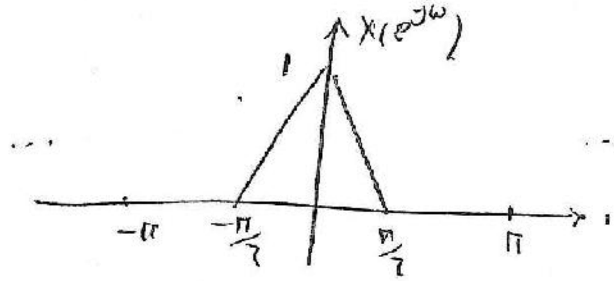
$x(kN)$ نمونه‌های سیگنال را نشان می‌دهد

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kN)\, \delta(n-kN) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]\, \delta(n-kN)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j\left(\omega - \frac{2k\pi}{N}\right)}\right)$$

مهم بسیار

مثال) فرض کنید تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ را به صورت زیر داشته باشیم.



$T = 2\pi$ دوره

$$y(n) = x(n) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-6k)$$

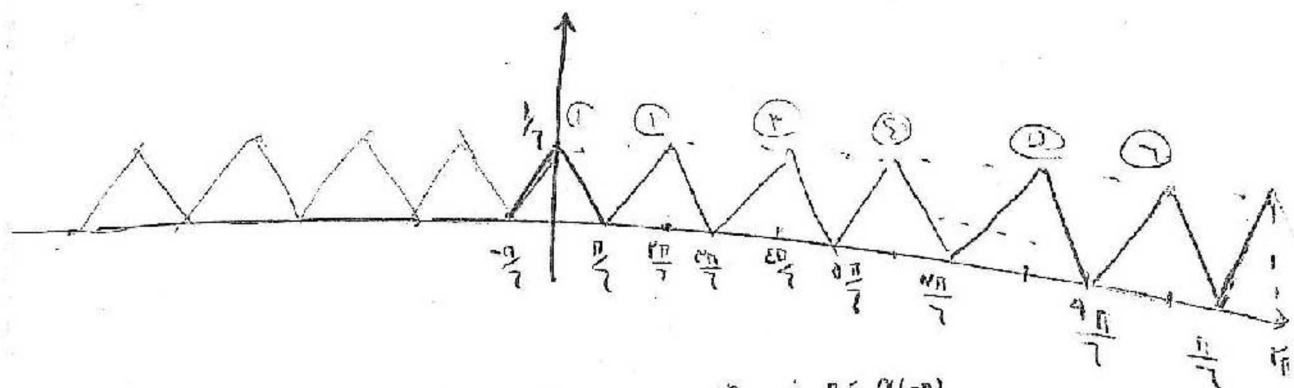
تعداد صفرها / دوره ۶

مطلوب است $Y(e^{j\omega})$ ؟

حل:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{5} X\left(e^{j\left(\omega - \frac{2k\pi}{6}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{5} X\left(e^{j\left(\omega - \frac{k\pi}{3}\right)}\right)$$



سؤال ۹ : $y(n) = \begin{cases} n & ; n \geq x(-n) \\ x(n) & ; n < x(n) \end{cases}$ آیا وارون‌پذیر است؟

حل : علیت ← چون فرض سیستم ، $x(-n)$ را داشتیم است ← سیستم غیرعلی است

برای بازه‌های منفی مشکل ساز است .

کجا پایدار ← مثال نقض

$x(n) = 0 \longrightarrow x(-n) = 0$ اگر

تذکر: اگر سیگنال $x(n)$ با دوره N متناوب باشد. ضرایب سری فوریه آن a_k خواهد بود که با دوره N متناوب هستند.

$$x(n):\begin{cases} N \\ a_k = a_{k+N}\end{cases}$$

$$\text{پیوسته}\begin{cases} x(t) \\ T \\ a_k\end{cases} \xrightarrow{F} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, \delta\!\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

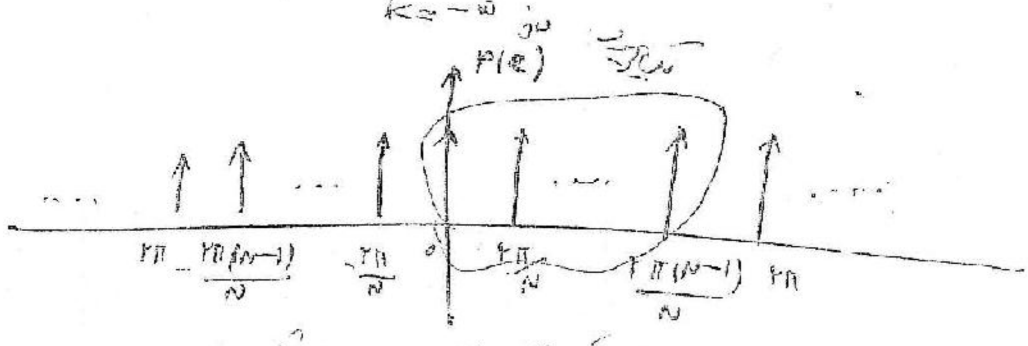
a_k متناوب نیست

$$\text{گسسته}\begin{cases} x(n) \\ N \text{ متناوب با} \\ a_k = a_{k+N}\end{cases} \xrightarrow[F]{\text{تبدیل فوریه}} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, \delta\!\left(\omega - k\underbrace{\left(\frac{2\pi}{N}\right)}_{\omega_0}\right)$$

در اینجا a_k هم متناوب است.

ضرایب سری فوریه قطار ضربه $= \frac{1}{N}$

$$P(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N}\, \delta\!\left(\omega - \frac{2k\pi}{N}\right)$$



(در فاصله صفر تا 2π، N تا ضربه داریم)

تناوب $= 2\pi$

$$y(n) = x(n)\cdot p(n)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\left(X(e^{j\omega}) \circledast P(e^{j\omega})\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \circledast \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\!\left(\omega - \frac{2k\pi}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(X(e^{j\omega}) * \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \delta\!\left(\omega - \frac{2k\pi}{N}\right)}_{\text{N تا ضربه در یک تناوب}}\right)$$

۳٤

$X(s)$ تبدیل لاپلاس $\qquad \delta(t-t_0) \longrightarrow e^{-st_0}$

$$X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nT} e^{-s(nT)} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(1+s)nT} = 1 + e^{-(s+1)T} + e^{-(s+1)2T} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-e^{-(s+1)T}} \qquad \text{به شرط} \quad |q|<1$$

$$\left| e^{-(s+1)T} \right| < 1$$

$$\Rightarrow -(s+1)T < 0$$

$$\Rightarrow \underset{Re(s)}{(s+1)}T > 0$$

$$\Rightarrow Re(s)+1 > 0$$

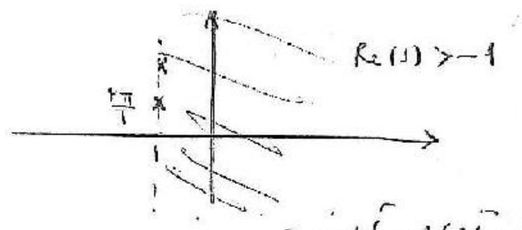
$$\Rightarrow Re(s) > -1$$

تعیین مقادیر s تا انتگرال در آنجا همگرا باشد قرار دارد.

قطبها :

$$1 - e^{-(s+1)T} = 0 \Rightarrow e^{-(s+1)T} = 1 \Rightarrow -(s+1)T = j2k\pi$$

$$\Rightarrow s = -1 - j\frac{2k\pi}{T}$$



آیا تبدیل فوریه‌ی سیگنال موجود است یا خیر؟

حل: بله هست، به جای s ـــ jω قرار می‌دهیم

$$X(s) = \frac{1}{1-e^{-(s+1)T}} \longrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{1-e^{-(j\omega+1)T}} = \frac{1}{1-e^{-j\omega T}e^{-T}}$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{به ازای } \frac{2\pi}{T} \text{ متناوب است.}$$

متناوب $\qquad e^{jx}$

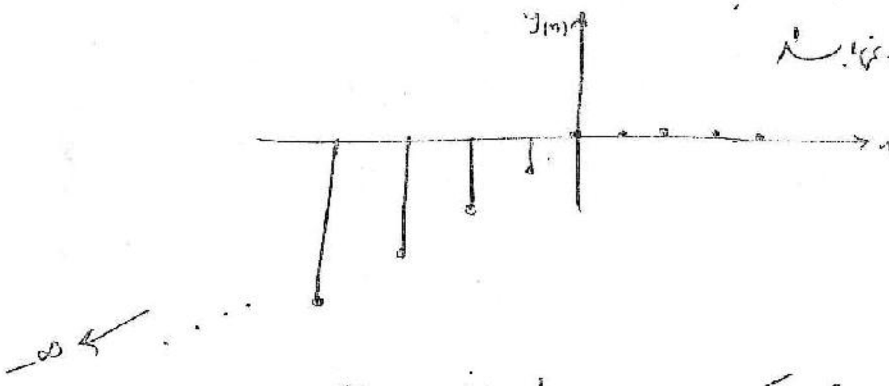
$x = 2\pi$:

متناوب است.

این n سیستم را نمایش می‌کند

$$y(n) = \begin{cases} n & n \leqslant 0 \quad x(-n)=0 \\ x(n)=0 & n > 0 \quad x(-n)=0 \end{cases}$$

صورت $x(n)=0$ [illegible]



محدود نمی‌باشد

[illegible]

سوال ۵: $\alpha, \beta = ?$ که $|H(e^{j\omega})| = 1$ گردد.

$$y(n) - \alpha y(n-1) = \beta x(n) + x(n-1)$$

حل:

$$Y(e^{j\omega}) - \alpha e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) = \beta X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega}) e^{-j\omega}$$

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{\beta + e^{-j\omega}}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

$$|H| = 1 \Rightarrow |H|^2 = H \cdot \bar{H} = \frac{\beta + e^{-j\omega}}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \cdot \frac{\beta + e^{j\omega}}{1 - \alpha e^{j\omega}}$$

$$= \frac{\beta^2 + 1 + 2\beta \cos\omega}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\omega} = 1 \Rightarrow \beta^2 + 2\beta\cos\omega = \alpha^2 - 2\alpha\cos\omega$$

چون این رابطه باید به ازای همه ω ها برقرار باشد ضرایب cos باید برابر باشند

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta^2 = \alpha^2 \Rightarrow \beta = \pm\alpha \\ 2\beta = -2\alpha \Rightarrow \beta = -\alpha \end{cases} \Rightarrow \beta = -\alpha$$

جلسه پنجم

سوال ۱) تبدیل فوریه $x(t)$ را بیابید $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nT} \delta(t - nT)$.

حل:

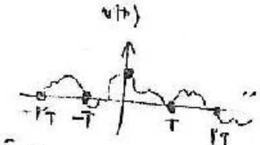
$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nT} \delta(t - nT) = e^{-t} u(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

حل:

$x(t) \longrightarrow \otimes \xrightarrow{\text{سیگنال نمونه برداری شده}} x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-kT)$

$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) \qquad = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)$

$= x(0)\delta(t) = 1\times\delta(t) = \delta(t)$



فقط در سیگنال نمونه گرفته شده nT ضرب داریم

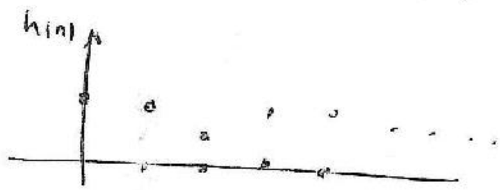
$\delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)} y(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$ تمرین ۱

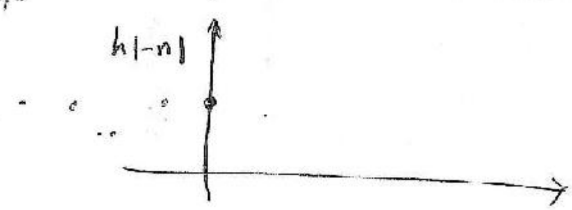
مثال ۴: $H_R = 1 + \alpha\cos\omega$ $\qquad h(n) = ?$ کسینوسی

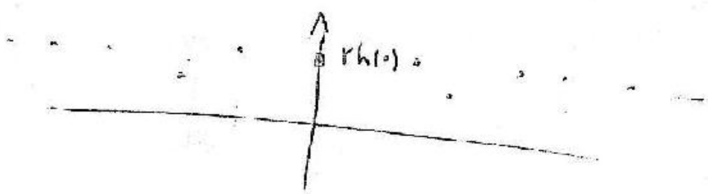
حل: با استفاده از Re ... تبدیل فوریه آن را پیدا کنیم ... سیگنال زوج

$$h_{ev}(n) = \frac{h(n) + h(-n)}{2} \xrightarrow{F} Re(H(e^{j\omega}))$$

فرض کنید $h(n)$ علی باشد (فرض میکنیم)





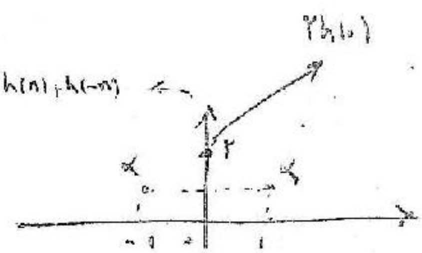


$$\Rightarrow \quad h(n) + h(-n) \xrightarrow{F} 2Re(H(e^{j\omega}))$$

$H_R = 1 + \alpha\cos\omega \qquad \alpha e^{j\omega} + \alpha e^{-j\omega} \qquad F^{-1}(H_R) = h(n) + h(-n)$

$2H_R = 2 + 2\alpha\cos\omega$

$F^{-1}(2H_R) = 2\delta(n) + \alpha\delta(n+1) + \alpha\delta(n-1)$



سؤال ۱ : سری دوم

$$Y(e^{j\omega}) = 2X(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) - \frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$$

میدانیم $x(n-n_0) \longrightarrow X(e^{j\omega})\, e^{-j\omega n_0}$

، $n\,x(n) \longrightarrow j\,\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

$$\Rightarrow \; y(n) = 2x(n) + x(n-1) - \frac{n\,x[n]}{j}$$

⇒ سیستم خطی | (تغییر پذیر با زمان است)

⇒ تغییر پذیر با زمان است

⇒ سیستم علّی است

سری ۲

سؤال ۳ : اگر $x(n)=\delta(n)$ ، پاسخ ضربه را مشخص کنید.

$x(n)=\delta(n)$ $\qquad \delta(n) \xrightarrow{F} 1$

$h(n)=?$

در حوزه فرکانس داریم .

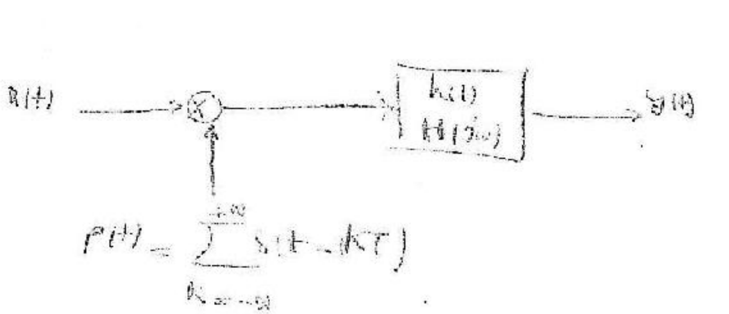
$$X(e^{j\omega})=1 \quad H(e^{j\omega}) = 2\times 1 + e^{-j\omega} - \frac{d}{d\omega}(1)$$

$$= 2 + e^{-j\omega}$$

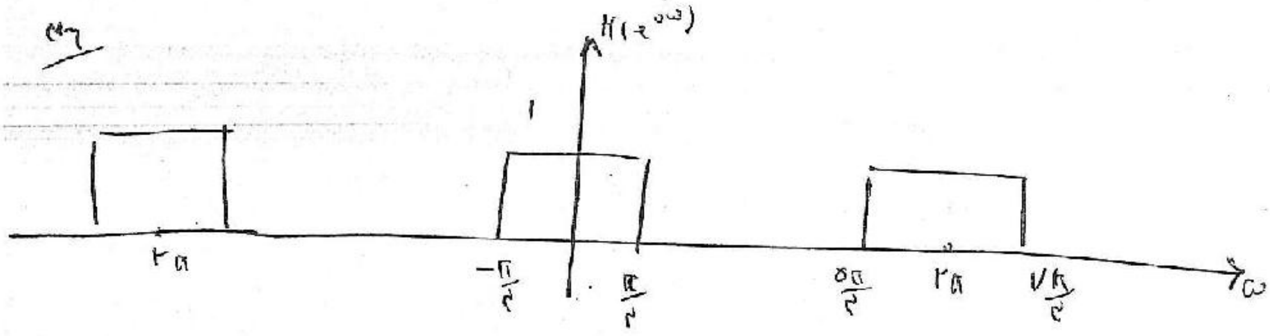
$$\Rightarrow \; h(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1)$$

یا : $h(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1) - \overbrace{\frac{n\,\delta(n)}{j}}^{0\times\delta(n)} = 2\delta(n) + \delta(n-1)$

سؤال ۴ :



$$x(nT) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$



$\frac{k\pi}{4} \Rightarrow 0 \longrightarrow \frac{7\pi}{4}$

$\frac{k\pi}{4} = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ عبور داده شود

$k = 0, 1, 7$

$\Rightarrow x_s(n)$ از فیلتر عبور می‌کند $= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} e^{j\frac{\pi}{4}n} + \frac{1}{8} e^{j\frac{7\pi}{4}}$ $\qquad e^{j\alpha}$

$\longrightarrow$ دوره‌ی 2π است

پس $y(n) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{j\frac{7\pi}{4}}\right)$ درصورتی که تناوب را 2π منفی دهیم

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi n}{4} \to$ نمره ۱

(آشنا ۸۸)

مسئله دوم

تبدیل لاپلاس

$\int e^{a(t-\tau)} h(\tau)\, d\tau = e^{at} \int e^{-a\tau} h(\tau)\, d\tau$ سؤال ۱۱ : (آشنا ۷۸)

اگر $x(t) = e^{at}$ ~~x(t)~~ $\longrightarrow y(t) = e^{at} H(a)$

تبدیل لاپلاس h(t) در نقطه a

اگر a جزء ROC H نباشد ← $H(a)=\infty$ فرض می‌شود درحالی‌که سیستم پایدار نخواهد

پاسخ فرکانس.

سؤال ۱۱ : $e^{2t} \xrightarrow{h(t)} H(2)\, e^{2t} \Rightarrow H(2) = \frac{3}{5}$

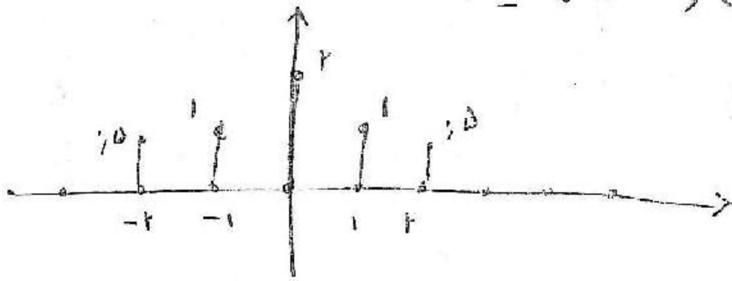
$\Rightarrow H(2) = \frac{4+2a+1}{4+6+b} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5(5+2a) = 3(10+b)$

مطمئناً تنها راه دیگر این است که $h(n)$ نیز وارون $h(-n)$ است، و در نتیجه $2h(n)$ است

$$\Rightarrow h(n) = \delta(n) + \alpha\,\delta(n-1)$$

مثال ۲: فرض کنید که $x(n)\big|_{n<0} = 0$ است، و شمای سیگنال زوج آن به شکل زیر است

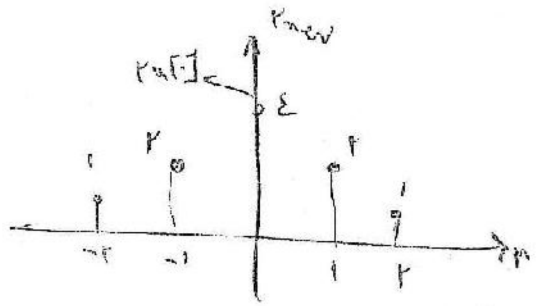
(کنکور ۷۷)



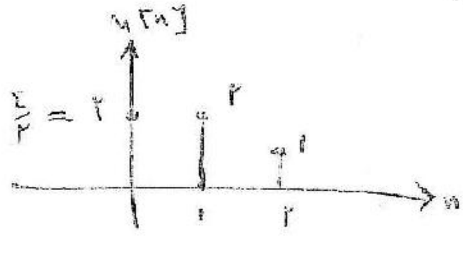
تبدیل فوریه سیگنال را بدست آورید.

حل:

$$x_{ev} = \frac{x(n) + x(-n)}{2} \Rightarrow 2x_{ev} = x(n) + x(-n)$$



← بنابراین $x(n)$ برابر است با:



مثال ۳:

حل: [illegible]

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-8k) \longrightarrow \text{سیگنال با دوره تناوب } 8$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$a[n] \text{ ضرایب سری فوریه } = \frac{1}{N} = \frac{1}{8}$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{7} \left(\frac{1}{8}\right) e^{jk\left(\frac{\pi}{4}\right)n}$$

[illegible]

[illegible]

اگر $a\geq 0$ گرد سیستم ← سیستم بالاگذر خواهد بود ← به خاطر بسپارید

$$y(n) - a\,y(n-1) = x(n)$$

سیستم پایین‌گذر ← $0<a<1$

بالاگذر ← $-1<a<0$

توجه: سؤال ۱۲:

$$y_1(n) - 0.9\,y_1(n-1) = 0.1\,x_1(n) \quad 0<a<1 \Rightarrow \text{پایین‌گذر}$$

$$y_2(n) + 0.9\,y_2(n-1) = 0.1\,x_2(n) \quad -1<a<0 \Rightarrow \text{بالاگذر}$$

سؤال ۱۳: مشخصات سیگنال زمان گسسته ... با توجه به تبدیل فوریه آن ... را بیابید.

۱) $Re\left(X(e^{j\omega})\right) = 0$ ← سیگنال فرد

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$\underbrace{Re\left(X(e^{j\omega})\right)}_{\text{قسمت زوج}} = 0 \xrightarrow{F^{-1}} \frac{x(n)+x(-n)}{2} = 0 \Rightarrow x[n] = -x[-n] \quad \text{سیگنال فرد}$$

۲) $X(e^{j0}) = 0$

$$X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) = 0$$

بنابر: مجموع سیگنال $= X(e^{j0})$

۴) $X(e^{j\pi}) = 0$

$$X(e^{j\pi}) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\pi n}$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(2K) - \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(2K+1)$$

$=$ مجموع نمونه‌ها با اندیس زوج $-$ مجموع نمونه‌ها با اندیس فرد $= X(e^{j\pi})$

$X(e^{j\pi}) = 0 \Rightarrow$ مجموع نمونه‌ها با اندیس زوج $=$ مجموع نمونه‌ها با اندیس فرد

۲)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$$

$$\Rightarrow 2\pi x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\cdot e^{j\omega n}\,d\omega$$

$$\Rightarrow 2\pi x[0] = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\,d\omega$$

$$\int^{\pi} X(e^{j\omega})\,d\omega \;... \; x[0]$$

سوال ۱۲ :

تعیین سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان

$$y(n) + a\,y(n-1) = x(n)$$

اول: برای بدست آوردن پاسخ ضربه ی سیستم کافیست $x(n) = \delta(n)$

$$Y(e^{j\omega}) - a e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

$$H = Y/X = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} \qquad |H| = ?$$

$h(n) = (a)^n u(n) \xrightarrow{\text{شرط پایداری}} |a| < 1$

$$\Rightarrow |H|^2 = H \cdot H^* = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-ae^{j\omega}} = \frac{1}{1+a^2-2a\cos\omega}$$

$$\Rightarrow |H| = \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$$

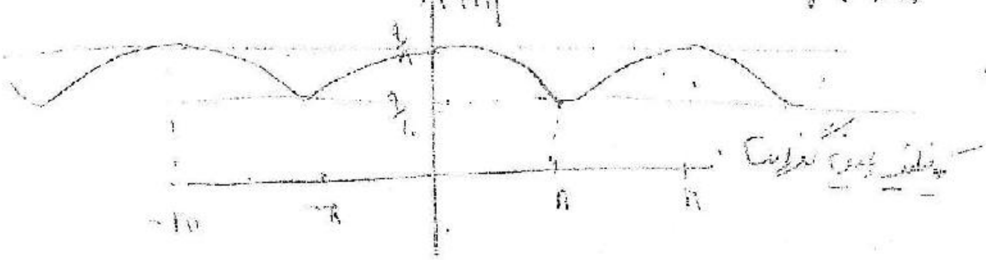
بر اساس شرط پایداری / در حوزه تغییرات a ما بیشتر

$$|a| < 1 \longrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 & \text{(سیستم ایده آل)} \\ -1 < a < 0 & \text{سیستم بالاگذر است} \end{cases}$$

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}} \xrightarrow{\omega=0 \text{ در فرکانس}} |H(e^{j0})| = \frac{1}{\sqrt{(1-a)^2}} = \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-a}$$

$$\xrightarrow{\omega=\pi \text{ در فرکانس}} |H(e^{j\pi})| = \frac{1}{\sqrt{(1+a)^2}} = \frac{1}{1+a}$$

$\Rightarrow$



فرض $a = 1/9$

$|H(0)| = 9$ ← $a = 8/9$ فرض

$|H(\pi)| = 9/10$

۳۸

سؤال ۱۵ :

$x[n]$ متناوب است با دوره

تناوب ۵ $\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{5}$

. زوج است

$$x[n] = \sum_{k=0}^{k=4} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{5})n}$$

چون زوج است

$$= \cancel{2\sum_{k=0}^{4} a_k \cos(k\frac{2\pi}{5}n)}$$

فرکانس‌های از فیلتر عبور می‌کنند $\quad 0 , \frac{2\pi}{5} , \frac{8\pi}{5}$

چون $\frac{8\pi}{5}$ بیشتر از π است ← $-\frac{2\pi}{5}$ عبور می‌کند.

$e^{-\frac{2\pi}{5}}$ فرکانس $\frac{8\pi}{5}$ در واقع است

$$y(n) = a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{5}} + a_4 e^{j\frac{8\pi}{5}} = a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{5}} + a_{-1} e^{j-\frac{2\pi}{5}n}$$

$$a_4 = a_{-1} = a_9$$

اگر $x(n)$ زوج است $\longrightarrow$ a_k حقیقی زوج است $\qquad a_k = a_{-k}$

$$\Rightarrow a_1 = a_{-1}$$
$$a_4 = a_{-4}$$

$$y(n) = a_0 + 2a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) = \frac{1}{5}(2+2+1+1+2) = \frac{8}{5} = 1.6$$

$$x(1) = x(-1)e^{j\frac{2\pi}{5}}$$

$$a_1 = \frac{1}{5}\sum_{n=-2}^{2} x(n) e^{-j(1)\frac{2\pi}{5}n} \qquad x_2 = x_{-2}e^{j\frac{4\pi}{5}}$$

$x(-1)$

چون سیگنال زوج است

$$x(0) + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{5}} + x(2)e^{-j\frac{4\pi}{5}} + x(3)e^{j\frac{2\pi}{5}} + x(4)e^{-j\frac{8\pi}{5}}$$

$$= \frac{1}{5}\left(x(0) + 2x(1)\cos\frac{2\pi}{5} + 2x(2)\cos\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$= 0.42$$

سؤال ۱۶ : $\qquad Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$ ← خیر

$$x(n) \longrightarrow \otimes \longrightarrow y(n)$$
$$(-1)^n$$

سیستم خطی است

مورد ۱: در نمودار ... ضرب شده ... سیستم خطی است

در نمودار ... سیستم تغییرپذیر با زمان است

$$y(n) = (-1)^n x(n)$$

سوال ۱۲ :

$$a = X(e^{j\pi}) = \text{مجموع نمونه‌های زوج – مجموع نمونه‌های فرد}$$

$$= (۲+۲+۱+۲) - (۰+۱+۲-۱)$$

$$= ۷ - ۲ = ۵$$

$$b = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, d\omega = ۲\pi\, x[۰] = ۲\pi \times ۲ = ۴\pi$$

سراسری ۸۱، ۸۲

$$c = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^{۲} d\omega = ?$$

قضیه پارسوال

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^{۲} = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^{۲}\, d\omega$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^{۲}\, d\omega = ۲\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^{۲}$$

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \xrightarrow{F^{-1}} ?$$

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{F^{-1}} x(n)$$

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \xrightarrow{F^{-1}} \frac{n\, x(n)}{j} = -jn\, x[n]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^{۲} d\omega = ۲\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |-jn\, x(n)|^{۲}$$

$$= ۲\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n\, x(n)|^{۲}$$

$$= ۲\pi \Big(\underbrace{(۰\times ۲)^{۲}}_{۰} + \underbrace{(۱\times ۱)^{۲}}_{۱} + \underbrace{(۲\times ۲)^{۲}}_{۱۶} + \underbrace{(۳\times ۳)^{۲}}_{۸۱} + \underbrace{(۴\times ۱)^{۲}}_{۱۶} + \underbrace{(۵\times(-۲))^{۲}}_{۱۰۰} + \underbrace{(۶\times ۲)^{۲}}_{۱۴۴} \Big)$$

$$= ۲\pi(۳۵۸) = ۷۱۶\pi$$

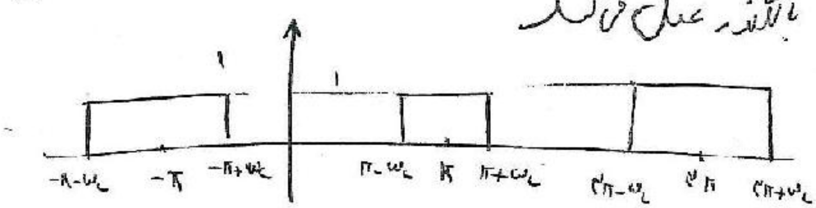
۳۹

$$Y(e^{j\omega}) = X_2(e^{j(\omega-2\pi)}) = X(e^{j(\omega-2\pi)})H(e^{j(\omega-\pi)})$$

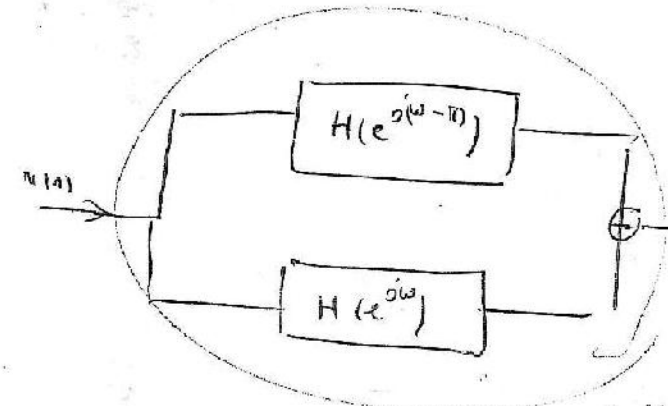
$$= X(e^{j\omega})\,H(e^{j(\omega-\pi)})$$

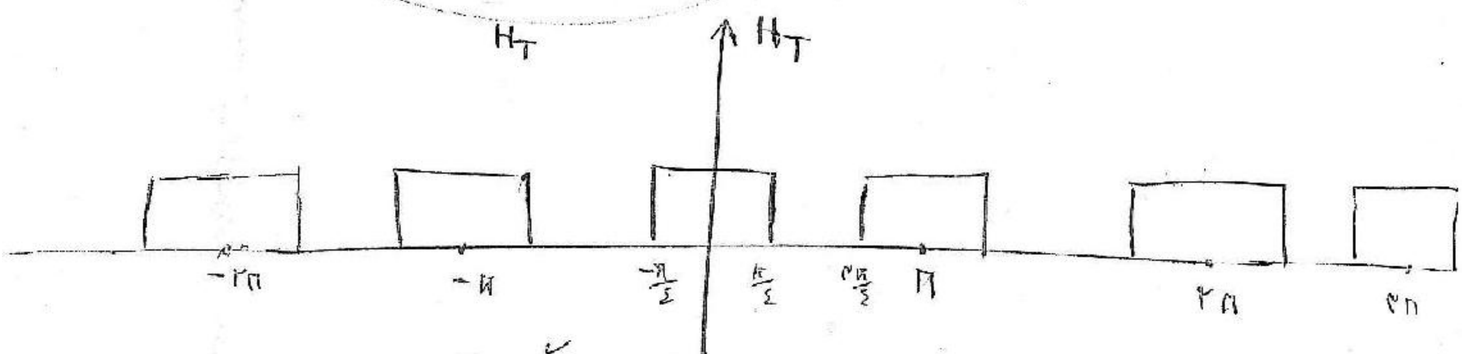
← سیستم کلی خطی تغییرناپذیر با زمان است .

سیستم معادل $H = \frac{Y}{X} = H(e^{j(\omega-\pi)})$ کل سیستم مثل یک فیلتر بالاگذر عمل می‌کند



تمرین ۲ : سؤال ۱۶ را :





فیلتر میان‌نگذر است .

فرکانس های بین $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ را عبور نمی‌دهد . ← تمرین ۳

سؤال ۱۷ : $x(n) = \frac{\sin n\pi}{8} - 2\cos\frac{n\pi}{4}$

$$h(n) = \frac{\sin\frac{n\pi}{6}\cdot\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2\pi^2}$$

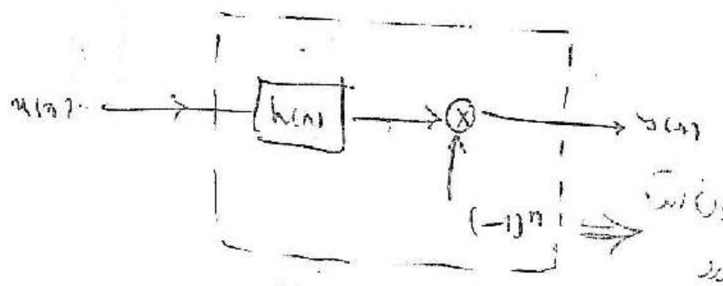
$$y(e^{j\omega}) = \sum y(n)\, e^{-j\omega n} = \sum (-1)^n x(n)\, e^{-j\omega n}$$

$$= \sum e^{j\pi n}\, x(n)\, e^{-j\omega n}$$

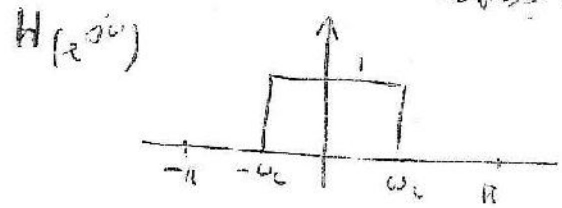
$$= \sum x(n)\, e^{-j(\omega-\pi)n}$$

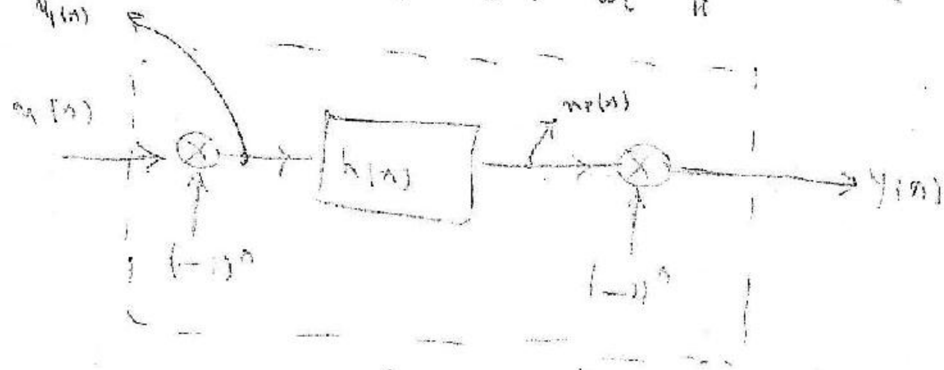
$$X(e^{j\omega}) = \sum x(n)\, e^{-j\omega n} \qquad = X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$$

[illegible] X [illegible]



[illegible]





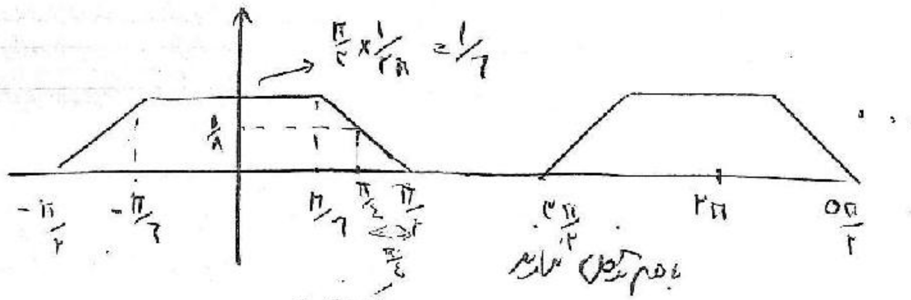
$$x_1(n) = x(n) \times (-1)^n$$

$$X_1(e^{j\omega}) = X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$$

$$x_2(n) = x_1(n) * h(n)$$

$$= X_1(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) = X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) H(e^{j\omega})$$

۴.



$x(n) = \sin\frac{n\pi}{8} - 2\cos\frac{n\pi}{4}$ (روش: $\frac{\pi}{4}$ از فیلتر عبور می‌کند) $\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{8}$ → قسمتی از فیلتر عبور می‌کند — هر دو از فیلتر عبور می‌کنند

$$\Rightarrow y(n) = \frac{1}{4}\sin\frac{n\pi}{8} - 2\times\frac{1}{8}\cos\frac{n\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\sin\frac{n\pi}{8} - \frac{1}{4}\cos\frac{n\pi}{4}$$

مثال: (انتگرال‌گیر) معکوس این سیستم را بیابید. $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

حل:

پیوسته $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt \xrightarrow{\text{معکوس}} y(t) = \frac{dx}{dt}$

معکوس سیستم:

$y(n) = x(n) - x(n-1)$ حاصل تفاضل

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

$$y(n-1) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k)$$

$$\Rightarrow y(n) - y(n-1) = x(n) \Rightarrow y(n) = x(n) - x(n-1)$$

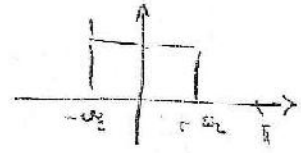
این سیستم معکوس‌پذیر نیست زیرا ... ← $y(n)=0$ ...

از دو ورودی مختلف ...

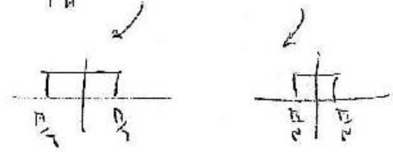
تا سیستم یک به یک نباشد معکوس‌پذیر نیست.

حل:

میدانیم $\dfrac{\sin \omega_c n}{\pi n} \longrightarrow$



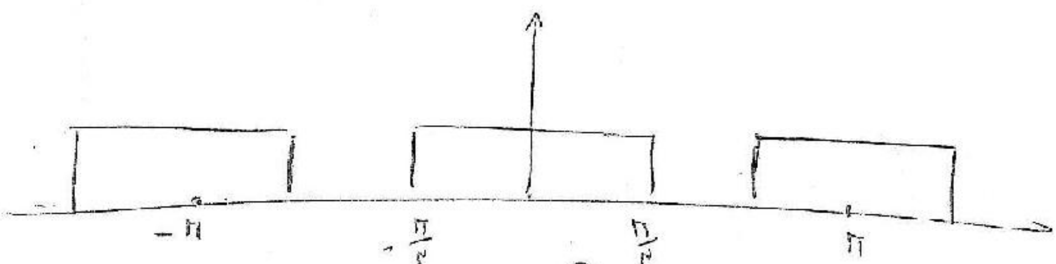
$$h(n) = \underbrace{\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n\pi}}_{h_1(n)} \cdot \underbrace{\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n\pi}}_{h_2(n)} \longrightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H_1(e^{j\omega}) \circledast H_2(e^{j\omega})$$



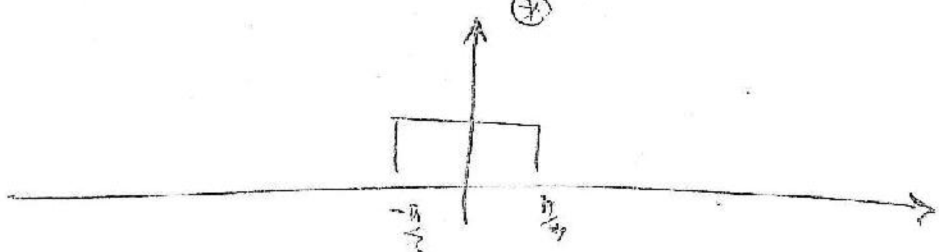
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \left(H_1(e^{j\omega}) \circledast H_2(e^{j\omega}) \right)$$

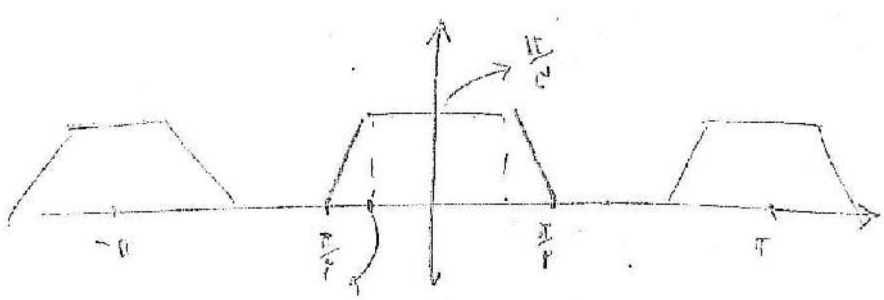
کانولوشن متناوب $\rightarrow$ آنها را که میخواهیم کانولوشن

تبدیل فوریه دوره تناوب 2π



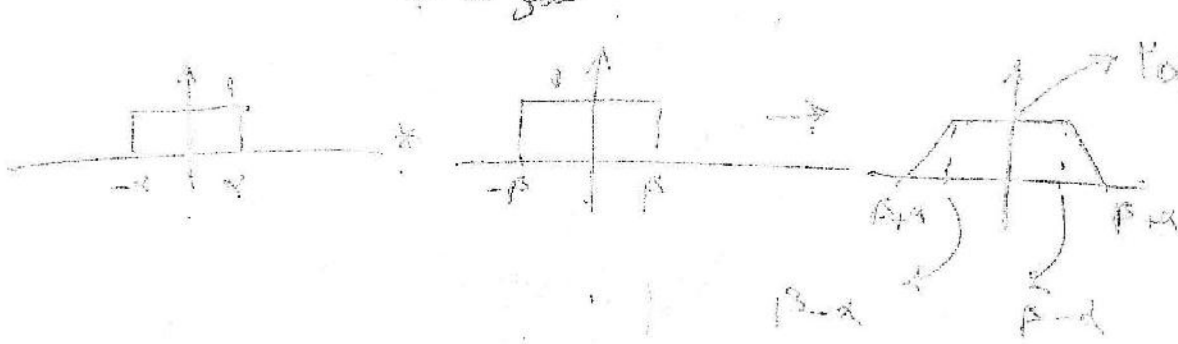
$\circledast$





$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

ضلع $-$ شیب



نکته: $x(t)*f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$

$$x(t)*f(t)u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$$

مثال: در سیستم $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha^2} x(\alpha - t)\,d\alpha$ خواص زیر را بررسی کنید.

تغییرناپذیری با زمان و پایداری.

حل: از صحیح بودن عملگر کانولوشن که تغییرپذیری با زمان است.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha^2} x\left(-(t-\alpha)\right) d\alpha$$

$$= e^{-t^2} * x(-t)\,u(t) \quad \rightarrow \text{تغییرپذیر با زمان است}$$

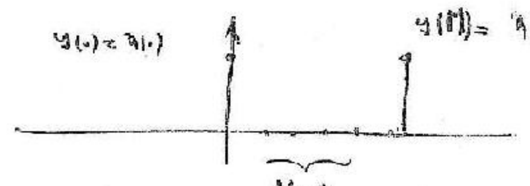
← در مورد پایداری: با ورودی محدود خروجی را بیابیم.

$$y_{max} = \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha^2}\underbrace{(N)}_{\text{ماکزیمم مقدار}} d\alpha \;\xRightarrow{t\to\infty}\; y_{max} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}$$

پایدار است. بیشترین مقدار خروجی را هم پیدا کردیم.

مثال: $y(n) = \begin{cases} x(n/M) & \text{مضرب } M \text{ است} \\ 0 \,; & n \text{ مضرب } M \text{ نیست} \end{cases}$ رابطه‌ی بین تبدیل فوریه X و Y را بیابید.

حل: بین هر دو نمونه‌ی ورودی آمده، $M-1$ صفر قرار می‌دهد ؛ کار سیستم



هیچ نمونه‌ای حذف نمی‌شود ← وارون‌پذیر است.

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n/M)\,e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,e^{-j\omega Mk}$$

$n = Mk$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,e^{-j(M\omega)k}$$

سؤال: $y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau)\,d\tau$ آیا این سیستم LTI می‌باشد؟ توضیح

پاسخ ضربهٔ سیستم وارون سیستم توصیف شده، معادله با رابطه کدام است: (سال ۸۲)

۱) $\delta(t)$ ۲) $\delta'(t)$ ۳) $\delta(t)+\delta'(t)$ ۴) $u(t)$

حل:

$$y(t)=f(t)u(t) * x(t) \leftarrow$$ آیا این فرم داریم؟ (فرم کلی LTI)

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, f(t-\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau \qquad t-\tau>0 \Rightarrow \tau<t \Rightarrow u(t-\tau)=1$$

$u(t-\tau)$ اثر $\leftarrow \tau$

$$=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, f(t-\tau)\,d\tau \longrightarrow$$ این فرم از فرم‌های سیستم LTI است.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow f(t)u(t)=e^{-t}u(t)$$

$$\Rightarrow \text{پاسخ ضربه} = e^{-t}u(t)$$

← با توجه به پاسخ ضربهٔ سیستم وارون باید از گزینه‌ها استفاده کنیم که اثر کانولوشن را مرتفع کنیم

$$\underbrace{h(t)}_{e^{-t}u(t)} * h^{-1}(t)=\delta(t)$$

در گزینه‌ها کدام گزینه جواب $\delta(t)+\delta'(t)$ است.

زیرا $$\left(\delta(t)+\delta'(t)\right) * e^{-t}u(t)=e^{-t}u(t)+\frac{d\,e^{-t}u(t)}{dt}$$

$$=e^{-t}u(t)-e^{-t}u(t)+e^{-t}\delta(t)=\delta(t)$$

← از راه تبدیل لاپلاس

$$h(t)=e^{-t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1} \xrightarrow{\text{وارون}} = s+1$$

$$\Rightarrow h^{-1}(t)=\delta'(t)+\delta(t)$$

اگر $y(n) = x(nM)$ باشد ← نمونه‌برداری نزولی.

یعنی بین هر دو داده $(M-1)$ تا از بین می‌رود.

مثال: فرض کنید یک سیستم با پاسخ ضربه $h_1(t)$ داریم. آیا سیستم LTI $h_2(t) = h_1(-t)$ نیز پایدار است؟

حل: حتماً پایدار است.

$$h_1(t) \longrightarrow H_1(s)$$

$$h_2(t) = h_1(-t) \longrightarrow H_2(s) = H_1(-s)$$

چون $h_1(t)$ پایدار است محور $\underset{ROC}{\wedge}$ $H_1(s)$ شامل محور است

$$\underset{\text{پایدار}}{h_1(t)} \longrightarrow \underset{\text{کراندار است}}{H_1(j\omega)}$$

$$H_2(j\omega) = \underset{\text{کراندار است}}{H_1(-j\omega)} \Rightarrow h_2(t)$$ پایدار است.

مثال: فرض کنید $X(s)$ مشخص است و می‌دانیم $h(t)$ ~~حقیقی~~ گویا است. کلی‌تر از $H(s)$ بگوییم؟ می‌توانیم $h(t)$ برسیم.

جلسه ششم

مثال: در مورد خواص سیستم زیر بحث کنید.

$$y(t) = e^{-|t+1|}\cos\left(x(t-1) + \frac{\pi}{4}\right)$$

۱- خطی: غیرخطی است. زیرا x آرگومان تابع کسینوس است.

۲- تغییرناپذیر با زمان: چون ضرایب سیستم وابسته به زمان است ← سیستم تغییرپذیر با زمان است.

۳- حافظه: حافظه‌دار است.

۴- علی بودن: علی است چون به گذشته وابسته است.

۵- وارون‌پذیری: وارون‌ناپذیر است. چون cos وارون‌ناپذیر است.

$$x(t-1) + 2k\pi \longrightarrow y(t)$$

$$x_1 \longrightarrow y_1$$

$$x_1 + 2k\pi \longrightarrow y_2 = y_1$$

تبدیل فوریه ورودی $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, e^{-j\omega k}$

$$\Rightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = X(e^{jM\omega})$$

در حوزه فرکانس [illegible] سیگنال [illegible] می‌شود

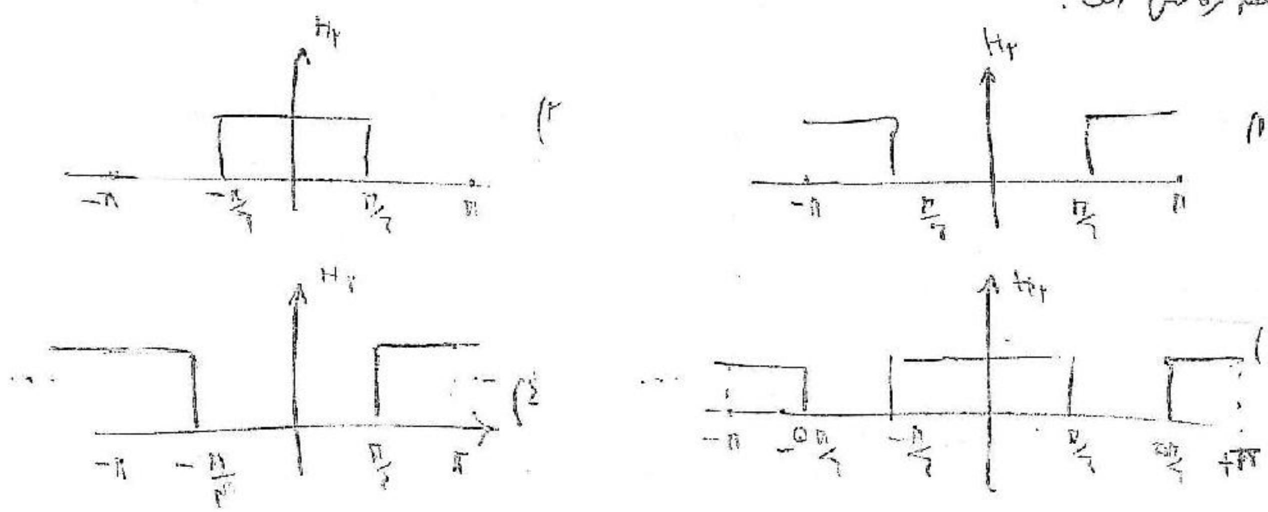
پریود سیگنال Y : $\frac{2\pi}{M}$

[illegible] $M=2$ [illegible]

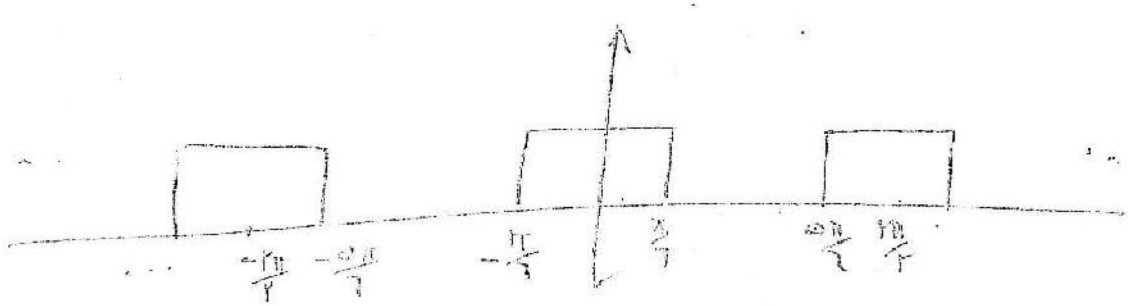
سوال: با فرض اینکه $h_1[n]$ پاسخ ضربه یک سیستم LTI است که دارای پاسخ فرکانسی یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل است با فرکانس قطع $\omega = \frac{\pi}{2}$ است. سیستم با پاسخ ضربه

$$h_2(n) = \begin{cases} h_1(\frac{n}{2}) & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

دارای کدام مشخصه فرکانسی است؟



حل: $H_2(e^{j\omega}) = H_1(e^{j2\omega}) \longrightarrow$ فشرده شده.

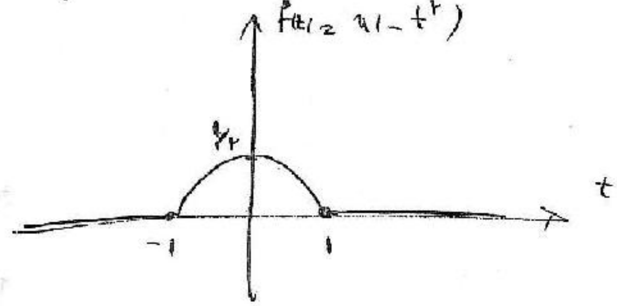


[illegible] پریود [illegible] بر ۲ تقسیم می‌شود. [illegible]

$$f(t) = x(-t^2)$$

$$-\infty < t < +\infty \Rightarrow -\infty < -t^2 < 0$$

$$f(t) = x(-t^2) = \begin{cases} 0 & |t| > 1 \Rightarrow -t^2 < -1 \\ \dfrac{-t^2+1}{2} & |t| < 1 \Rightarrow -1 < -t^2 < 0 \end{cases}$$



$$I' = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t^2)\,dt = \int_{-1}^{1} \left(\frac{-t^2}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = -\frac{t^3}{6} + \frac{1}{2}t \Big]_{-1}^{1}$$

$$= \cancel{-\tfrac{1}{6}} + \cancel{\tfrac{1}{2}} \cancel{-\tfrac{1}{6}} + \cancel{\tfrac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}$$

نکته:

$$y(t) = x(t) * f(t)u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t-\alpha)\,x(\alpha)\,d\alpha \quad *$$

فقط هنگامی است انتگرال های بالا معرف سیستم تغییرناپذیر سیستم LTI است

یا TI است.

$$* \; y(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\alpha)\,x(\alpha)\,d\alpha \longrightarrow$$ انتگرال کانولوشن نیست ← تغییرپذیر با زمان

$* \;$ مثال $\quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha\, x(\alpha)\, d\alpha \longrightarrow$ تغییرپذیر با زمان

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} (t-\alpha)\, x(\alpha)\, d\alpha \longrightarrow$$ تغییرناپذیر با زمان

برای اثبات تغییرپذیری * عملا تغییرپذیر با زمان انتگرال ها همچنان است زیرا اثبات را با * تفاوت دارد

اثبات:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\alpha)\,x_1(\alpha)\,d\alpha \longleftarrow x_1(t)$$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\alpha)\,x_1(\alpha - t_0)\,d\alpha \longleftarrow x_1(t-t_0) = x_2(t)$$

$$\alpha - t_0 = \beta$$

$$\alpha = \beta + t_0$$

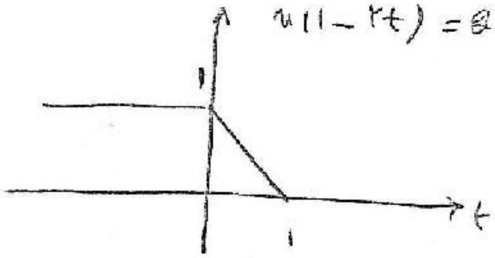
تمرین: سیستم پایداری

$x(t) = e^{-|t+1|} \times \frac{1}{t} \leq 1$

محدود [illegible] کراندار

سوال: اگر $x(1-2t)$ بصورت زیر باشد. انتگرال زیر را بدست آورید

تست



$$I = \int_{-\infty}^{0} x(t)\,dt$$

2 (۴ $\frac{1}{4}$ (۳ $\frac{1}{2}$ (۲ 1 (۱

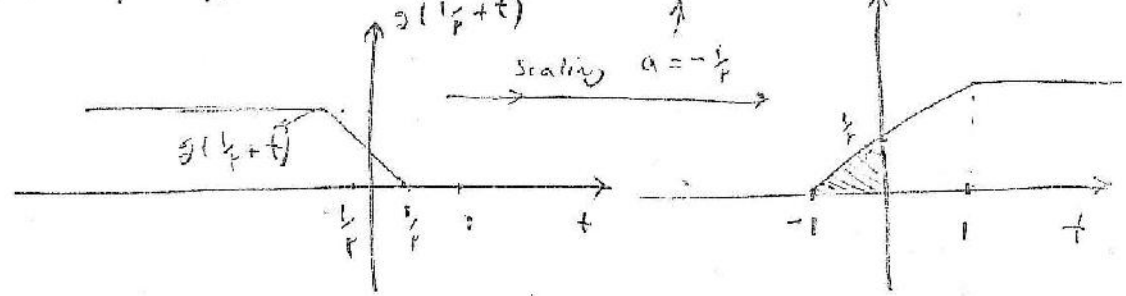
حل:

$$x(\overbrace{1-2t}^{\alpha}) = g(t) \qquad 1-2t = \alpha$$

$$x(\alpha) = g(t) \qquad t = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$x(\alpha) = g\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x(t) = g\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right)$$

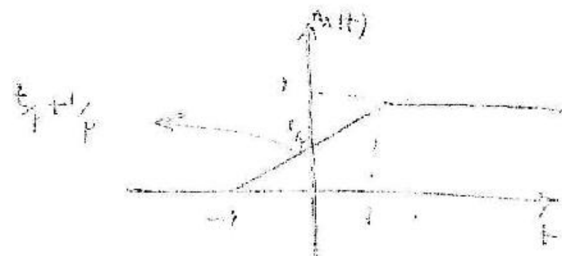


$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} x(t)\,dt = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

تمرین:

$$I' = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t^2)\,dt$$

، $x(-t^2)$ [illegible] $x(t)$ [illegible]



$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ \frac{t+1}{2} & -1 \leq t \leq 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$