ریاضی عمومی:

منابع:

دکتر مسعود نیکوکار-توابع عددی و برداری (دکتر امیر هوشنگ یمینی)-توماس

توابع چند متغیره:

تابع $f:E\to D$ را یک تابع 2متغیره گوییم هرگاه:

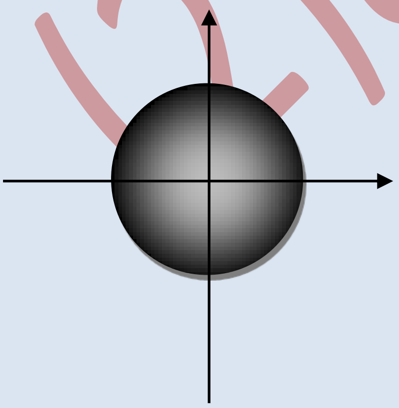
$\forall (x,y)\in E \quad \exists z\in D \quad s.t. \;\; f(x,y)=z$

$E=\{(X,Y)|X,Y\in R\}\subseteq R^2$

(دامنه تابع قسمتی از صفحه است و برد تابع دامنه ای از اعداد حقیقی است) $D=\{z|z\in r\}\subseteq R$

دامنه و برد تابع زیر را بیابید؟ $f_{(x,y)}=\sqrt{9-x^2-y^2}$

دایره ای به مرکز $O(0,0)$ و شعاع 3 $\leftarrow x^2+y^2=9$ اگر $9-x^2-y^2\geq 0 \to x^2+y^2\leq 9$



دامنه: دیسک تو پر به مرکز $O(0,0)$ وشعاع (3)

برد:

$x^2 + y^2 \geq 0$

$-x2 - y2 \leq 0 \rightarrow 9 - x2 - y2 \leq 9 \rightarrow 0 \leq \sqrt{9 - x2 - y2} \leq 3$

$Rf \in [0,3]$ یا $0 \leq R_f \leq 3$

R_f برد است.

نکته:

معادلات صفحه

دایره ای به مرکز $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ و o شعاع R

1- $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

بیضی به مرکز $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ و O نیم اقطار (قطر) b,a

2- $\frac{(X-\propto)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

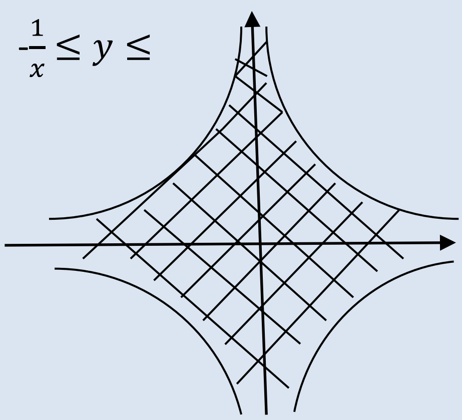
هذلول به مرکز $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ و O نیم اقطار b,a

3- $\frac{(x-\propto)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

تمرین: دامنه توابع زیر را بیابید؟

$f_{(x,y)} = \sin^{-1}(x,y)$

$-1 \leq xy \leq 1 \quad -\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x}$



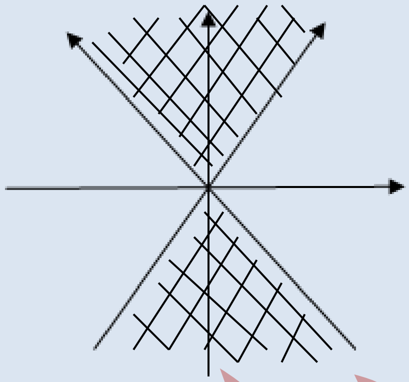
$f_{(x,y)} = \ln(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}) > 0$

$\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2} > 0$

$x^2 - y^2 > 0 \rightarrow y^2 < x^2$

$y^2 - x^2 < 0 \rightarrow y^2 - x^2 = 0$

$y^2 = x^2 \quad \rightarrow y = \pm x$



تعریف:

یک چند جمله ای از 2 متغیر y,x تابعی مانند f(x,y) از مجموعه جملاتی به فرم $\alpha\, x^n y^m$ است که در آن اعداد حقیقی $m,n \in z^+, \in \alpha R$ هستند و درجه جمله ای برابر است با بزرگترین مجموع توان های X,Y که در چند جمله ای ظاهر می شود.

تابع n متغیره:

تابعی است که به هر n تایی مرتب مانند(X1,X2,….,Xn) از R^n یک عدد حقیقی از بردار منظور می کند.

F(x,y,z)=2x+3y-z

تعریف فاصله 2نقطه در فضای n بعدی:

اگر نقطه $A \begin{vmatrix} a1 \\ a2 \\ . \\ . \\ an \end{vmatrix}$ **و** $B \begin{vmatrix} b1 \\ b2 \\ . \\ . \\ bn \end{vmatrix}$ **2 نقطه در فضای R^n باشند(یعنی $A,B \in R^n$)آنگاه فاصله آن دو را با نرم $\|A - B\|$ نمایش می دهند.**

$\|A - B\| = \sqrt{(a1 - b1)2} + (a_2-b_2)^2 + \dots + (a_n-b_n)^2$

حد تابع دو متغیره:

$\lim_{x \to a} f_x = l$

$\forall \in > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \text{s.t} \ |x - a| < \delta \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$

تعریف ریاضی حد تابع دو متغیره:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$$

$$\forall\epsilon > 0\ \ \exists\delta > 0 \quad \text{s.t}\sqrt{(x-a)2 + (y-b)2} < \delta \quad |f(x,y) - l| < \epsilon$$

مثال: ثابت کنید؟

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} 4x + y = 5$$

$$\forall\epsilon > 0\ \ \exists\delta > 0 \quad \text{s.t}\sqrt{(x-a)2 + (y-b)2} < \delta\ |4\text{x} + \text{y} - 5| < \epsilon$$

$$|4x + y - 5| = |4x - 4 + y - 1| = |4(x-1) + (y-1)|$$

$$\leq |4(x-1)| + |y-1|$$

$$\leq 4|x-1| + |y-1|$$

$$|x-1| = \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta$$

$$< 4\delta + \delta = 5\delta \quad 5\delta < 4 \qquad \delta < \frac{4}{5}$$

$$|y-1| = \sqrt{(y-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta$$

حدود مکرر:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a}\left[\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right] = l_{12} \\ \lim\limits_{y\to b}\left[\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right] = l_{21} \end{cases}$$

اگر L_{21}, L_{12} موجو باشند ولی $L_{21} \neq L_{12}$ باشد آنگاه تابع دو متغیره در نقطه a,b حد نخواهد داشت اگر L_{21},

L_{12} وجود باشند و حد تابع نیز موجود باشد(حد تابع برابر با)آنگاه حتما باید $L_{21} = L_{12}$ باشد.

نکته:با وجود برابر بودن L_{21}, L_{12} نمی توان گفت که تابع حتما حد دارد زیرا تابع 2 متغیره است نه تک متغیره .

مثال:حد تابع زیر را بررسی کنید؟

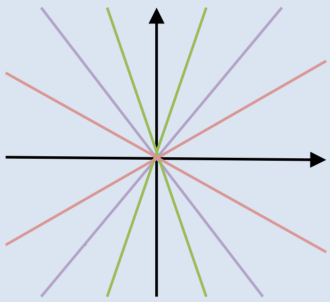
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x - y}{x + \sin y} = \frac{0}{0}$$

$$L_{12} = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{\sin x - y}{x + \sin y}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

$$L_{21}=\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-y}{x+\sin y}\right]=\lim_{y\to 0}\left(\frac{-y}{\sin y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1$$

پس تابع حد ندارد.$L_{21}\neq L_{12}$

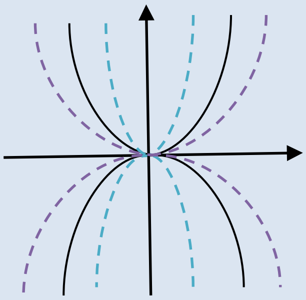
دسته مسیر های گذرانده از مبداء:



$Y=mx$

$X=my$

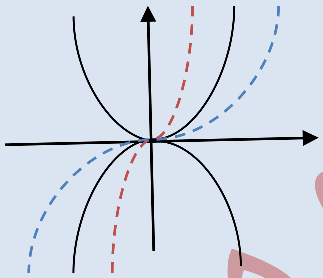
دسته خطوط گذرانده از مبداء



$Y=mx^2$

$X=my^2$

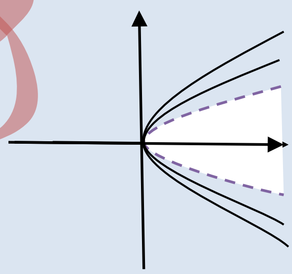
دسته سعی های گذرانده از مبداء



اگر ضابطه منفی بخورد نمودار نسبت به محورxهاقرینه می شد.

$Y=mx^3$

$X=my^3$



$Y=\sqrt{x}$

$Y=m\sqrt{x}$

$Y=-m\sqrt{x}$

نکته:

اگر حدی که آن را بررسی می کنیم از لحاظ درجه صورت و مخرج یکسان باشد دسته خطوط y=mx را استفاده می کنیم.در صورت برابر نبودن درجه صورت و مخرج از مسیرهای کمک می گیریم که صورت و مخرج را هم درجه کنند.

حال صورت و مخرج هم درجه هستند می توان حد راحل کرد.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^2}{x^4+yx^2}\ \xrightarrow[\text{جاگذاری}]{y=mx^2}\ \frac{x^4+(mx^2)^2}{x^4+x^2(mx^2)}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+mx^4}{x^4+mx^4} = \frac{x^4(1+m)}{x^4(1+m)} = 1$$

جلسه دوم:

مثال:ثابت کنید که حدروبه رو موجود نیست اما $0=L_{12}=L_{21}$ است.

$$f_{(x,y)}=\frac{x^2y}{x^4y^2}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{(x,y)}$ **موجود نیست** $L_{12}=L_{21}=0$

$$L_{12}=\lim_{x\to0}\left[\lim_{y\to0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right]=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

$$L_{21}=\lim_{(y\to0)}\left[\lim_{(x\to0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right]=0$$

$$\frac{\text{دسته مسیر}}{y=mx^2}\ \lim_{x\to0}\frac{x^2(mx^2)}{x^4+(mx^2)^4}=\lim_{x\to0}\frac{mx^4}{x^4+m^2x^4}=\lim_{x\to0}\frac{mx^4}{x^4(1+m^2)}=\frac{m}{1+m^2}$$

مهم:با تغییر xجواب حد تغییر می کندلذا حد ندارد.

$$M=1\to\frac{1}{2}\neq m=2\to\frac{2}{5}$$

مثال:آیا حد روبرو موجوداست.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{my}{x^2+y^2}$$

چون صورت و مخرج هم درجه هستند(درجه2)لذابرای این حد مسیرهای مناسب است.

$$\lim_{m\to0}\frac{x(mx)}{x^2+(mx)^2}\ \mathrm{Lim}\frac{x(mx)}{x^2+(mx)^2}=\lim\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

با تغییرx جواب حد تغییر می کند لذا حد ندارد.

تمرین :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^2(mx^2)}{x^2+(mx^2)^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x^4m}{x^2+m^2x^4}=\lim_{x\to0}\frac{3mx^4}{m^2x^4+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3mx^4}{x^2(1+m^2)}=\frac{3m}{1+m^2}$$

پیوستگی تابع دو متغیره:

تابع nمتغیره f در نقطه $X_0 \epsilon R^n$ پیوسته است اگر و تنها اگر هر سه شرط زیر برقرار باشد.

1- تابع در نقطه X_0 تعریف شده باشد یعنی $F(X_0)$ موجود باشد.

2- $\lim_{x\to x_\circ} f(x)$ موجود باشد.

3- $\lim_{x\to x_\circ} f(x) = f(X_0)$ حد تابع با مقدار تابع برابر باشد.

مثال: آیا تابع $f(x,y)$ در(o,o)پیوسته است.

$$F(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^3+y^3} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^3+y^3} \xrightarrow[y=mx]{\text{صورت و مخرج هم درجه}} lim \frac{x^2(mx)}{x^3+(mx)^2} = \frac{m}{1+m^3}$$

با تغییر xجواب حد تغییر می کند لذا حد ندارد‌پس پیوسته نیست.

انواع ناپیوستگی:

اگر در بررسی پیوستگی تابع f شرط دوم برقرار نباشد گوییم ناپیوستگی اساسی است در غیر این صورت ناپیوستگی را رفع شدنی گوییم.

تمرین:

تابع h(x) را طوری بیابید که تابع $f(x,y)$ در R^2 پیوسته باشد

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x-y} & (x,y)\neq(0,0) \\ h(x) & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x-y} \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = 0$$

$$h(x) = 0$$

تمرین:

آیا تابع روبرو در (0و0)پیوسته است؟

$$F(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\sin\frac{x}{y} + y^2\sin\frac{y}{x}$$

مشتق:

مشتقات جزئی یا نسبی: $y = f(x)$

مشتق تابع یک متغیره(در حالت کلی) $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

مشتق تابع nمتغیره نسبت به x $f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta(x)} = \frac{\partial f}{\partial x}$

مشتق تابع n متغیره نسبت به y $f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta(y)} = \frac{\partial f}{\partial y}$

مشتق تابع در نقطه x_0 $f'(x_0) = \lim_{x\to x^\circ}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

مشتق تابع 2متغیره نسبت به x_0 $\frac{\partial f}{\partial x}\Big| = \lim\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y)}{x-x_0}$

مشتق تابع 2متغیره نسبت بهy_0 $\frac{\partial f}{\partial x}\Big| = \lim\frac{f(x0,y)-f(x0,y0)}{y-y0}$

مثال: $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ را برای تابع روبرو در نقطه (1و0)بدست آورید.

$$F(x,y) = \frac{1}{y}\cos x^2$$

در مشتق گیری نسبت به xهر متغیری که غیر x باشد با آن مانند عدد برخورد می کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}(2\cos x^2)_x = \frac{1}{y}(-2x\sin x^2) = -\frac{2x}{y}\sin x^2 \to = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos x^2\left(\frac{1}{y}\right) = \cos x^2\left(\frac{0-1}{y^2}\right) = \frac{-\cos x^2}{y^2} \to = -1$$

نکته: فرمول های مشتق:

$Y=c \to y'=0$

$Y=x^n \to nx^{n-1} \Rightarrow\ y=\sqrt{x} \Rightarrow y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$Y=\sin x \to\ y'=\cos x$

$Y=\cos x \to y'=-\sin x$

$Y=\tan x \to\ y'=1+\tan^2 x$

$Y=\cot x \rightarrow \quad y'=-(1+\cot^2 x)$

$Y=L_{nx} \quad y'=\frac{1}{x}$

$Y=e^x \quad y'=e^x$

$Y=a^x \quad y'=a^x Ln_a$

$Y=\text{Arcsin}x \quad y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$Y=\text{Arc cos}x \quad y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$Y=\text{Arcc tan } x \quad y'=\frac{1}{1+x^2}$

$Y=\text{Arc cot}x \quad y'=\frac{-1}{1+x^2}$

$Y=u+v \quad y'=u'+v'$

$Y=uv \quad y'=u'.v+v'.u$

$Y=\frac{u}{v} \quad y'=\frac{u.v-v.u}{v^2}$

$(n^u)=nu'u^{n-1}$

جلسه سوم:

مشتق پذیری و دیفرانسیل:

$$\begin{cases} f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x,\Delta x) \\ f(x+\Delta x) - f(x) \simeq f'(x,\Delta x) \end{cases}$$

دیفرانسیل تابع دو بعدی (دو متغیره):

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \simeq f(x,y) + f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$

لغو تابع دو متغیره:

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \simeq f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$

$d_f = f_x \Delta x + f_y \Delta y$

مثال :

استوانه ای به شعاع 4cm و ارتفاع 5cm مفروض است اگر شعاع را به 3/9 و ارتفاع آن را به 5/2 برسانیم چه تغییری در حجم به وجود می آید؟

$V(r,h)=\pi r^2 h$

$V_r(r,h)=2\pi rh$

$V_h(r,h)=\pi r^2$

$\Delta r=-0/1 \qquad \Delta h=+0/2$

$\Delta v=v_2(r,h)\Delta r+vh(r,h)\Delta h$

$=2\pi rh(-0/1)+\pi r^2(0/2)=2\pi(4)(5)(-0/1)+\pi(4)^2(0/2)=-0/8\pi$

مثال: (قضیه)

اگر f (x,y)در نقطه $(x_\circ, y)$مشتق پذیر باشد آنگاه f(x,y)در (x_0,y_0) پیوسته است.

مثال)

تابع f به صورت زیر مفروض است ثابت کنید: fx(2,2) , fy(2,2)

ولی تابع در نقطه (2و2)مشتق پذیرنیست.

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y+4 & x=2 \text{ یا } y=2 \\ 3 & x\neq 2, y\neq 2 \end{cases}$$

چون در نقطه 2ناپیوستگی داریم تنها باید از راه تعریف حل کنیم.

$$fx(2,2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x,2)-f(2,2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x+2+4)-(2+2+4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8+\Delta x-8}{\Delta x}=1$$

$$fy(2,2)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(2,2+\Delta y)-f(2,2)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(2+2+\Delta y+4)-(2+2+4)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta y}=1$$

باید از تابع حد بگیرید تا نشان دهیم پیوسته نیست.

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} f(x,y)$$

دو مسیر که از نقطه(2و2)می گذرندرا انتخاب می کنیم و حد را برای آن ها بررسی می کنیم.

$X=2 \qquad \lim_{y\to 2} 2+y+4=8$

پس تابع حدندارد لذا پیوسته نیست چون $\neq$

Y=x $\quad \lim_{(x,y)\to(2,2)} 3 = 3$

پیوسته نیست پس مشکل پذیر هم نیست

قاعده زنجیره ای:

قضیه: فرض کنید تابع z=f(x,y) مشتق پذیر باشد و x=x(r,s) و y=y(r,s) دو تابع دو متغیره باشندبه طوریکه:

$\frac{\partial x}{\partial r},\frac{\partial x}{\partial s},\frac{\partial y}{\partial r},\frac{\partial y}{\partial s}$ همگی موجود و پیوسته باشند آنگاه:

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}$$

مثال:

$Z=e^{xy^2}$ و $y=t\sin t$, $m=t\cos t$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial t}$ را در نقطه $t=\frac{\tau}{2}$ محاسبه کنید؟

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$

$=y^2e^{xy2}[\cos t+t(-\sin t)]+(2xy)\,e^{xy2}(\sin t+t\cos t)$

$=(t^2\sin^2 t)e^{(t\cos t)(t2\sin 2t)}[\cos t-t\sin t]+2(t\sin t)(t\cos t)e^{(t\cos t)(t2\sin 2t)}(\sin t+t\cos t)$

$=\frac{\pi}{2}(0-\frac{\pi}{2})+0=(\frac{-\pi}{2})^3=\frac{-\pi 3}{8}$

مثال:

شعاع استوانه ای با سرعت $3^{cm}/_{s}$ و ارتفاع آن با سرعت $5^{cm}/_{s}$ افزایش می یابد حجم این استوانه با چه سرعتی افزایش می یابد زمانی که شعاع 15cm و ارتفاع 25cm است؟

$\frac{dr}{dt}=3^{cm}/_{s}$ $\quad$ r=15cm

H=25cm

$\frac{dh}{dt}=5^{cm}/_{s}$ $\quad \frac{dv}{dt}=?$ $\quad$ $v(r,h)=\pi r^2h$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial h}.\frac{\partial h}{\partial t}$$

$=(2\pi rh)(3)+\pi r^2(5)=6\pi rh+5\pi r^2=6\pi\,(15)(25)+5\pi\,(5)^2=2250\pi+1125\pi$

تمرین:اگر تابع رو به رو مفروض باشند و در آن $x=\frac{r}{s}$, $y=\frac{s}{r}$ می باشد. $\quad Z=\sin\frac{x}{y}$

$\frac{dz}{dr},\frac{dz}{ds}$ را محاسبه کنید؟

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y})(\frac{1}{s})+(\frac{-x}{y2})(\cos\frac{x}{y})(\frac{-s}{r2})=(-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y})\left[\frac{1}{s}+\frac{x}{y}.\frac{s}{r2}\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}=(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y})(\frac{-r}{s2})+(\frac{-x}{y2})(\cos\frac{x}{y})(\frac{1}{r})$$

$$=(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y})\left[\frac{-r}{s2}+\left(\frac{-x}{y}\right)(\frac{1}{r})\right]$$

مشتقات منفی:هر گاه x,y به صورت مخطوط باشد و نتوان آن ها را از هم تفکیک کرد از مشتق ضمنی استفاده می کردیم مانند $xy^2=\cos\frac{x}{y}$ در دبیرستان زمانی از مشتق گیری ضمنی استفاده می کردیم که نمی توانستیم متغیر وابسته یعنی y را در یک طرف تساوی تنها کنیم یا آن را به فرم y=f(x) بنویسیم. در این صورت از مشتق گیری حتمی استفاده می کردیم هم اکنون نیز اگر نتوانیم متغیر مستقل را از متغیرهای وابسته جدا کنیم از مشتق گیری حتمی استفاده کنیم.

$$F(x,y,z)=o\rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{fx}{fz}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{fy}{fz},\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{fz}{fy}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{fx}{fy}$$

مثال:

اگر sin xy+sin xz+sin z=1 باشد $\frac{\partial z}{\partial x}$ را محاسبه کنید.

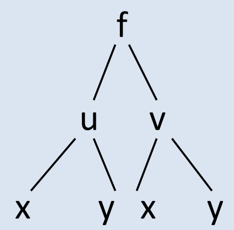
$$F(x,y,z)=0\rightarrow \sin xy+\sin xz+\sin yz-1=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{fx}{fz}=-\frac{ycosxy+zcosxz}{xcosxz+ycosyz}$$

تمرین(خیلی مهم):

اگر w=f(x+y,x-y) و نسبت به u=x+y,v=x-y مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد نشان دهید.

$$\frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial w}{\partial y}=(\frac{\partial f}{\partial u})^2-(\frac{\partial f}{\partial v})^2$$



$$\frac{\partial f}{\partial u}=a\qquad\frac{\partial f}{\partial v}=b\qquad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$(\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v})(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v})$$

$(\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v})(\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v})$

$\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial v}).\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v})\ \frac{u=x+y\to x=u-y}{v.x-y\to y=v-x}$

$\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial x}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial y}\quad \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial w}{\partial y}=(\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x})(\frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial y})=(fu+fv)(fu.fv)=(fu)^2-(fv)^2$

جلسه چهارم:

مشتقات جزئی مراتب بالاتر:

$X=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$

$X=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$

$F_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$

$F_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$

مثال:

اگر $z=x^y$ باشد نشان دهید:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})\quad \frac{\partial z}{\partial y}\ x^yLnx\quad \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=yx^{y-1}Lnx+x^y\frac{1}{x}$

$=yx^{y-1}Lnx+x^{y-1}=x^{y-1}(yLnx+1)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\delta x}=\frac{\partial\delta}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})\quad \frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}\quad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=x^{y-1}+yx^{y-1}Lnx=x^{y-1}(yLnx+1)$

یاداوری:

$y=Lnu\quad y=a^u$

$y'=\frac{u'}{u}\qquad y'=u'a^uLna$

قضیه:

اگر $f(x,y)$ تابعه ای دو متغیره با مشتقات جزئی fyx,fxy,fy,fx باشد که همگی آن ها در همسایگی (x_0,y_0) پیوسته باشند آنگاه:

$Fxy(x_0,y_0)=fyx(x_0,y_0)$

مثال:

اگر $y=2s-t,\ x=s+3t,\ u=x^2+y^2$ نشان دهید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}=2x(3)+2y(-1)=6x-2y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}(6x-2y)=6\frac{\partial x}{\partial t}-2\frac{\partial y}{\partial t}=6(3)-2(-1)=20$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}=2x(1)+2y(2)=2x+4y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial s}(2x+4y)=2\frac{\delta x}{\delta s}+4\frac{\delta y}{\delta s}=2+4(2)=10=20$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

ماکسیمم و مینیمم توابع دو متغیره:

فرض کنید تابع $z=f(x,y)$ در همسایگی نقطه (x_0,y_0) تعریف شده باشند:

الف) f در (x_0,y_0) دارای یک مقدار مینیمم نسبی است اگر یک همسایگی از (x_0,y_0) وجود داشته باشد به طوریکه به ازای هر (x,y) در همسایگی $f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$

ب) f در (x_0,y_0) دارای یک مقدار ماکسیمم نسبی است اگر یک همسایگی از (x_0,y_0) وجود داشته باشد به طوریکه به ازای هر (x,y) در همسایگی $f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$

ج) اگر f در (x_0,y_0) دارای یک ماکسیمم نسبی یا مینیمم نسبی باشد گوییم f در (x_0,y_0) دارای یک مقدار اکستر مم نسبی است و نقطه (x_0,y_0) را نقطه اکسترمم تابع f گوییم.

نکته:

اگر در تعاریف بالا همسایگی مورد نظر به دامنه تابع f ارتقاء داده شود آنگاه نقطه (x_0,y_0) را اکسترمم مطلق تابع f گوییم.

قضیه:

اگر (x_0,y_0) یک نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x,y)$ باشند آنگاه هر یک از مشتقات جزئی $fx(x_0,y_0)$ و برابر صفر هستند یا وجود ندارند.

تعریف:

نقطه (x_0,y_0) را نقطه بحرانی تابع f گوییم هرگاه f در (x_0,y_0) مشتق پذیر نباشد یا $fx(x_0,y_0)$ و $fy(x_0,y_0)$ باشد.

مثال:

نقاط اکستر مم تابع رو به رو را بررسی کنید:

$F(x,y)=y^2-xy+2x+y+1$

$Fy=2y-x+1 \quad fy=0 \quad -x+1=-4 \quad x=51$

$f(2,5)=7$ **به نظر می یاد که (5,2) نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد.**

همسایگی نقطه(2و5)را به صورت (5+h,2+k)نشان می دهید:

$F(5+h,2+k)=(2+k)^2-(5+h)(2+k)+2(5+h)+(2+k)+1$

$=4+4k+k^2-(10+2h+5k+hk)+10+2h+k+3$

$=k^2-hk+7 \implies k(k-h)$

نکته: بسته به اینکه مقدار h,k منفی یا مثبت در نظر گرفته شود مقدار همسایگی تغییر کرده لذا (5,2)نمی توان اکسترمم گرفت .

$$\begin{cases} k > h \to (5,2) & min \\ k < h \to (5,2) & max \end{cases}$$

تمرین:

نقاط اکسترمم تابع رو به رو را در صورت وجود بیابید.

$F(x,y)=\frac{x^2+y^2}{(x,y)^2}$

$x+y \neq 0$

قضیه آزمون مشتق دوم:

اگر (x_0,y_0) نقطه بحرانی تابع $f(x,y)$ باشند و مقام مشتقات نسبی مرتبه اول و دوم در همسایگی (x_0,y_0) پیوسته باشند آنگاه قرار می دهیم:

$A=f_{xx}(x_0,y_0)$

$B=f_{xy}(x_0,y_0)$

$C=f_y(x_0,y_0)$

مبین تابع مورد نظر را به صورت $D=B^2-AC$ قرار می دهیم.

الف)اگر $D>0$ نقطه (x_0,y_0) یک نقطه زمینی است.

ب)اگر $D=0$ آزمون نتیجه ای ندارد.

ج)اگر $D<0$ نقطه $A>0$ نقطه (x_0,y_0) نقطه min نسبی می شود.

=اگر $A<0,D<0$ نقطه (x_0,y_0) نقطه max نسبی می شود.

مثال:

ماهیت نقطه بحرانی تابع رو به رو را بررسی کنید.

$F(x,y)=x^3+3xy^2+3y^2-15x+2$

$f'x=3x^2+3y^2-15=0$ $\quad \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} 3x2=15\to x2=5\to x=\pm\sqrt{5} \\ 3+3y2=15\to 3y2=12\to y=\pm 2 \end{matrix}$

$f'=6xy+6y=0$ $\quad (x+1)=0$

$A\left|\begin{matrix}\sqrt{5}\\0\end{matrix}\right.$ $\quad B\left|\begin{matrix}-\sqrt{5}\\0\end{matrix}\right.$ $\quad C\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$ $\quad D\left|\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right.$

$A=f_{xx}=6x$

$B=f_{xy}=6y$

$C=f_{yy}=6x+6$

$D=36y^2-36x^2+36x=36(y^2-x^2+x)$

– ماهیت نقطه $A\left|\begin{matrix}\sqrt{5}\\0\end{matrix}\right.$:

$D=36(-5+\sqrt{5})<0$

$A=6\sqrt{5}>0$

در نتیجه نقطه $A\left|\begin{matrix}\sqrt{5}\\0\end{matrix}\right.$ min نسبی f است.

– ماهیت نقطه $B\left|\begin{matrix}-\sqrt{5}\\0\end{matrix}\right.$:

$D=36(-5+\sqrt{5})<0$

$A=6(-\sqrt{5})<0$

در نتیجه نقطه $B\left|\begin{matrix}-\sqrt{5}\\0\end{matrix}\right.$ max نسبی f است.

– ماهیت نقطه $C\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$:

$D=36(4-1-1)>0$

چون d مثبت است پس زینی است.

– ماهیت نقطه $D\left|\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right.$: زینی

$D=36(4-1-1)>0$

جلسه پنجم:

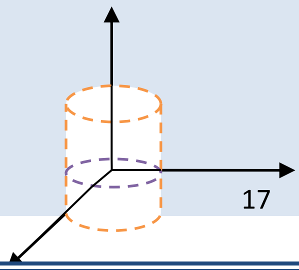
سطح یا رویه:

مکان هندسی نقاطی مانند $p\left|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right.$ که در معادله $f(x,y,z)=0$ صدق می کند را یک رویه یا سطح می نامیم.

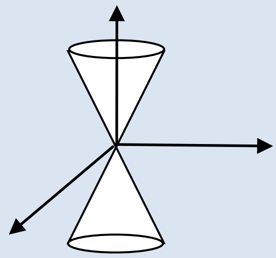
سطحی که معادله اش نسبت به متغیرهای x,y,z از درجه دوم باشد سطح یا رویه درجه دوم باشد سطح یا رویه درجه دوم گویند.

استوانه بیضوی:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

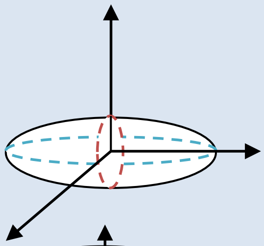


مخروط بیضوی



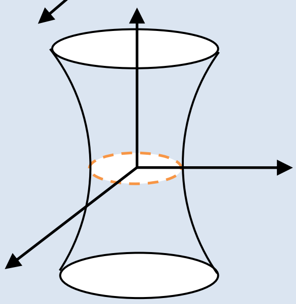
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

بیضی گون:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

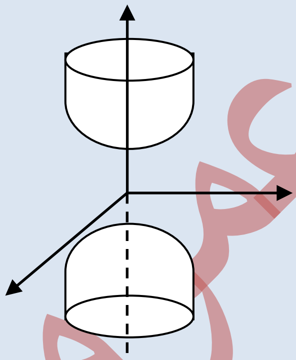
هذلولی گون یکپارچه:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

2 تا هذلولی و یک بیضی(چون شکل جدا نیست یکپارچه می شود).

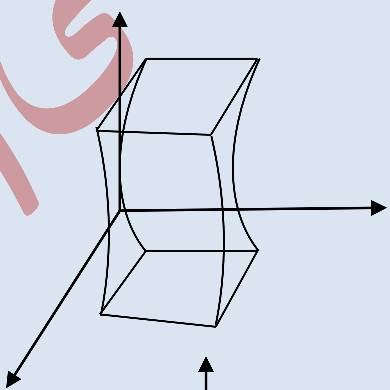
هذلولی گون دو پارچه:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

چون از 2دیدگاه به ما هذلولی می ده و از یک دیدگاه بیضی دو پارچه (چون از هم جداست).

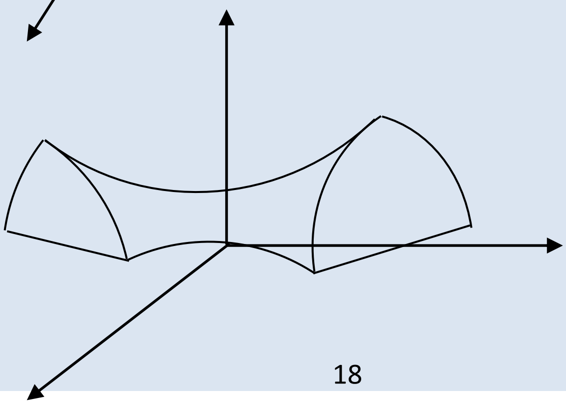
استوانه هذلولی:



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

سهمی گون هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$



یادآوری:

1) معادله دایره $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \Rightarrow x^2+y^2=R^2$

2) معادله بیضی $\frac{(x-\alpha)^2}{(a)^2}+\frac{(y-\beta)^2}{(b)^2}=1 \quad \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

معادله

3) هذلولی $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \quad \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

4) معادله سهمی $(y-\beta)^2=4p(x-\alpha) \Longrightarrow y^2=4px$

اثبات معادله:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$z=0 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$z=k \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\text{طرفین تقسیم بر}}{\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)} \longrightarrow \frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}=1$$

در جایی که نیم اقطار صفر می شود و به نقطه تبدیل می شوند دیگر نمی توان شکل را ادامه داد یعنی $k>c$ دیگر وجود ندارد

برای مرحله اول $z=0$ قرار داده تاشکل در صفحه xy تشکیل شود سپس برای مرحله دوم $z=k$ که k<c است قرار می دهیم که معادله به صورت معادله 2 در می آید سپس از تصمیم معادله فوق بر $1-\frac{k^2}{c^2}$ به معادله 3 می رسیم چون k<c است عدد $\frac{k^2}{c^2}$ کمتر از یک بوده لذا مضرب $(1-\frac{k^2}{c^2})$ نیز کمتر از یک است و این نشان دهنده این است که نیم اقطار بیضی در حال کوچک شدن هستند.اگر k>c باشد آنگاه مضرب $(1-\frac{k^2}{c^2})$ یک

عدد منفی خواهد شد که با صورت معادله تناقض دارد زیرا جمع دو عدد منفی هیچگاه برابر 1 نخواهد شد. سپس نقطه انتهایی محور zها برابر c خواهد شد چون در این فرمول k توان 2 دارد همین استدلال تا c− ادامه می یابد.

استدلال معادله: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

چون جمع 2 عدد + هرگز1− نمی شود پس این معادله هیچوقت در کف موجود نیست. $z=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$

$$z=c \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{c^2}{c^2}=-1 \implies \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

انتگرال دوگانه:

فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع در متغیره باشد که بر ناحیه R تعریف شده باشد اگر عددی چون L یافت شود به طوریکه برای هر ε مثبت، دلتای مثبتی وجود داشته باشد به قسمتی که برای هر افراز Δ که فرم $\Delta(\|\Delta\|)$ کوچکتر از δ باشد $(\|\Delta\|<\delta)$ و تمام انتخاب های ممکنه (x_i,y_i) در R_i داشته باشیم:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta A_i - L\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta A_i = L$$

در اینصورت تابع f را روی R انتگرال پذیر گوییم و حد L را انتگرال 2 گانه تابع f روی R می نامیم و با نماد $\iint f(x,y)\,dA$ نشان می دهیم.

اگر $Z=f(x,y)$ روی ناحیه بسته و متناهی R نامنفی باشد حجم جسمی که از پایین به وسیله ناحیه R واقع در صفحه xy و از بالا به وسیله‌ی رویه‌ی $Z=f(x,y)$ محصور شده است برابر است با:

$$V=\iint f(x,y)\,dA$$

پس:

$$\text{مساحت ناحیه}R = \iint dA$$

انتگرال دوگانه روی سطح مساحت را حساب می کند.

چون انتگرال دوگانه تعمیم انتگرال یگانه است لذا تمام خواص انتگرال یگانه را دارد.

حالت های مختلف محاسبه قاعده:

الف) اگر **R** یک ناحیهٔ مستطیلی باشد.

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$$

برای محاسبه انتگرال دوگانه در این حالت ابتدا انتگرال داخل را محاسبه می کنیم. نوجه می کنیم که انتگرال گیری را نسبت به متغیری انجام دهیم که دیفرانسیل آن در ابتدا هست و متغیر دیگر را در این انتگرال گیری ثابت فرض می کنیم.

ب) اگر **R** ناحیه شکل زیر باشد.

$$\text{(آزاد) مستقل است} \rightarrow \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\right] dx$$

این انتگرال دوگانه خاصیت جابجایی نداشته زیرا همیشه حدودی که مستقل هستند باید بیرون انتگرال دوگانه قرار گیرند و حدود وابسته داخل باشند.

ج) اگر **R** ناحیه شکل زیر باشد.

$$\int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dy\right] dx$$

این انتگرال نیز خاصیت جابجایی ندارد زیرا همشه حدودی که مستقل هستند باید بیرون انتگرال دوگانه قرار گیرند و حدود وابسته داخل باشند.

جلسه ششم:

مثال:

$$\int_0^1\int_0^{2x} e^{x^3} y\,dy\,dx$$

$$\int_0^{2x} e^{x^3} y\,dy = e^{x^3}\int_0^{2x} y\,dy = e^{x^3}\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^{2x} = e^{x^3}\frac{1}{2}(4x^2-0) = 2x^2e^{x^3}$$

$$\int_0^1 2x^2e^{x^3}dx = \frac{2}{3}\int_0^1 3x^2\,e^{x^3}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}e^{x^3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(e^1-e^0) = \frac{2}{3}(e-1)$$

مثال:

اگر R ناحیهٔ مثلثی شکل ایجاد شده در ربع اول بوسیله خط $x+y=1$ باشد حاصل انتگرال دوگانه $\iint(y-\sqrt{x})\,dA$ را محاسبه کنید.

$$\int_0^1\int_0^{1-x}(y-\sqrt{x})\,dy\,dx$$

$$\int_0^{1-x}(y-\sqrt{x})dy = \frac{y^2}{2}-\sqrt{2}y\Big|_0^{1-x} = \frac{(1-x)^2}{2}-\sqrt{x}(1-x)$$

$$\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}-\sqrt{x}(1-x)\right]dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 -(1-x)^2dx - \int_0^1\left(\sqrt{2}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(1-x)^3}{3}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2}\Big|_0^1 = \left(-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5} =$$

$$\frac{5-20+12}{30} = \frac{-3}{30} = -\frac{1}{10} = -0.1$$

تمرین:

$$\int_0^1\int_0^{1-y}(y-\sqrt{x})\,dy\,dx$$

$$\int_0^{1-y}(y-\sqrt{x})\,dy = y-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}x\Big|_0^{1-y} = y-\frac{(1-y)^{\frac{3}{2}}}{3/2}(1-y)$$

$$\int_0^1 y-\frac{(1-y)^{\frac{3}{2}}}{3/2}(1-y)dy = \int_0^1 y\,dy-\frac{2}{3}\int_0^1(1-y)^{\frac{3}{2}}dy+\int_0^1(1-y)dy$$

$$\frac{y^2}{3}\Big]\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \frac{2}{3}$$

مثال:

$$\int_0^1\int_0^1 |y-\sqrt{x}|\,dy\,dx$$

$$\int_0^1\int_0^x (x-y)\,dy\,dx + \int_0^1\int_0^y -(x-y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 xy - \frac{y^2}{2}\Big|_0^x dx - \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - yx\right)\Big|_0^y dy$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) dx - \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} - y^2\right) dy = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

مثال:

اگر R ناحیه محصور بین منحنی $y=\sqrt{x}$ و خطوط $y=1$ و $y=2$ و $y=x$ باشد انتگرال دوگانه $\iint \sin\frac{\pi x}{2y}\,dA$ را بدست آورید.

$$\int_1^2\int_y^{y^2} \sin\frac{\pi x}{2y}\,dy\,dx$$

$$= \int_1^2 -\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2y}\Big|_y^{y^2} dy = \int_1^2 -\frac{2y}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{2y} - \cos\frac{\pi}{2}\right) dy$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}\,dy = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{2y}{\pi}\sin\frac{\pi y}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi y}{2}\right]\begin{matrix}2\\1\end{matrix}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{4}{\pi}\sin\pi + \frac{4}{\pi^2}\cos\pi\right) - \left(\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{8}{\pi^3} + \frac{4}{\pi^2}$$

تمرین:

1)

$$\int_3^4\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\,dx$$

(2

$$\iint x^2\sqrt{9-y^2}$$

– R ناحیه درون دایره $x^2+y^2=9$

(3

$$\iint e^{2y-x}\ dA$$

– R ناحیه مثلثی محدود به سه رأس $(0,0)(2,0)(2,1)$

(2

$$4\iint x^2\sqrt{9-y^2}dA$$

$$=4\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}} x^2\sqrt{9-y^2}\,dx\,dy$$

$$=4\int_0^3\sqrt{9-y^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{9-y^2}}\ dy=\frac{4}{3}\int_0^3\sqrt{9-y^2}\left(\sqrt{9-y^2}\right)^3\ dy=$$

$$\frac{4}{3}\int_0^3(9-y^2)\,(9-y^2)\,dy=\frac{4}{3}\int_0^3(81-81y^2+y^4)dy=\frac{4}{3}\left(81y-6y^3+\frac{y^4}{5}\right)\Big|_0^3$$

$$=4(8)-6(9)+\frac{81}{5}$$

(3

$$y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x+x_0)\qquad\qquad \Big|_0^0\qquad \Big|_1^2$$

$$y=mx$$

$$1=m2\qquad\qquad\to m=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^2\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}x} e^{2y-x}\ 2dydx$$

$$\int_0^2\frac{1}{2}\ e^{2y-x}\ \Big|_0^{\frac{1}{2}x}\ dx=\int_0^2\frac{1}{2}(e^0-e^{-x})dx$$

$$\to\frac{1}{2}\int_0^2-\ e^{-x}dx=\frac{1}{2}\ e^{-x}\int_0^2=\frac{1}{2}(e^{-2}-1)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^2}-1\right)=\frac{1-e^2}{2e^2}$$

نکته:

یک انتگرال مضاعف را می توان به راحتی به وسیله یکی از دو حالت انتگرال مکرر ب و ج محاسبه کرد ولی ممکن است یکی از انتگرال ها از دیگری آسان تر باشد.

مثال:

R ناحیه محصور در ربع اول بوسیله خطوط $x = 1$ و $y = x$

$$\iint \frac{\sin x}{x}\, dA$$

اگر انتگرال دوگانه طوری حدودش بیان شود که y ها آزاد و x ها مستقل شود آنگاه انتگرال داخلی قابل حل نخواهد بود.

پس برای نوشتن حدود x را آزاد می کنیم و y را وابسته به x می نویسیم.

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy\, dx$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, y\Big|_0^x dx \to = \int_0^1 \sin x\ dx = -\cos x\Big|_0^1 = -\cos 1 + 1 = 1 - \cos 1$$

نکته:

اگر انتگرال داخل مثل مثال بالا قابل حل نباشد باید آزادی متغیرها را تعویض کنیم به این کار در انتگرال دوگانه تعویض ترتیب گویند.

مثال:

انتگرال زیر را تعویض ترتیب نمایید.

در اینجا x آزاد است باید y را آزاد کنیم.

$$\int_0^2 \int_1^{e^x} f(x,y)\, dy\, dx$$

$$\int_1^{e^2} \int_{\mathrm{lng}}^{e^x} f(x,y)\, dx\, dy$$

مثال:

تعويض ترتيب:

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$x = \sqrt{4-2y^2}$ $\qquad$ $y = 0$

$x = -\sqrt{4-2y^2}$ $\qquad$ $y = \sqrt{2}$

$x^2 = 4-2y^2 \to x^2+2y^2 = 4 \to \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2} = 1$ معادله بیضی $a^2 = 4 \to a = 2$

$b^2 = 4 \to b = \sqrt{2}$

$$\to \frac{y^2}{2} = 1-\frac{x^4}{4}$$

$$\to y = \sqrt{2-\frac{x^2}{2}}$$

نکته:

$x^2+y^2 = a^2$

$$\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}} f(x,y)\,dy\,dx$$

تمرين:

(1

$$\int_{-1}^{0}\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

(2

$$\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$$

(1

$$\int_{-1}^{0}\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

$x = 0 \qquad y = \sqrt{1 - x^2} \to y^2 = (1 - x^2) \to y^2 + x^2 = 1$ دایره

$x = -1 \qquad y = x + 1$

2)

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy$$

$x = 0 \qquad y = 1$

$x = y \qquad y = 0$

جلسه هفتم:

مثال:

مساحت ناحیهٔ محصور بین دو منحنی $y = 9 - x^2$ و $y = x^2 - 9$ را بیابید.

$y = 9 - x^2 \to 9 - x^2 = 0 \to x = \pm 3$

$y = x^2 - 9 \to x^2 - 9 = 0 \to x = \pm 3$

برای نوشتن انتگرال x ها را آزاد فرض می کنیم چون حل انتگرال راحتتر خواهد بود.

$$S = \int_{-3}^{3} \int_{x^2-9}^{9-x^2} dy\ dx = \int_{-3}^{3} [9 - x^2 - (x^2 - 9)]dx$$

$$\int_{-3}^{3} (-2x^2 + 18)dx = -2\frac{x^3}{3} + 18x\Big|_{-3}^{3} = \left[-\frac{2}{3}(3)^3 + 18(3) - (18 - 54)\right]$$

$$= -36 + 108 = 72$$

نکته:

برای محاسبه حجم جسم محصوری که از بالا به رویه‌ی $Z = f(x, y)$ و از اطراف به رویه های $f_1(x, y)$ و $f_2(x, y)$ محدود است باید انتگرال دوگانه $\iint ZdA$ محاسبه شود این انتگرال دوگانه بر روی ناحیه R خواهد بود که R تصویر رویهٔ محصور روی صفحه uy است.

مثال:

حجم جسمی را که بوسیله دو رویهٔ $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + z^2 = 4$ محصور است را بیابید. چون معادله اول $(x^2 + y^2 = 4)$ شامل z نمی باشد لذا تأثیر گذار در مساحت قاعده خواهد شد.

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\to z = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

به علت تقارن شکل می توان نتایج بالا را در نظر گرفت و آنرا دوباره ذکر کرد.

نمونه دیگر انتگرال گیری:

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} = 4\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} 2\sqrt{4-x^2}\,dy\,dx$$

$$= 8\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\left(\sqrt{4-x^2} - 0\right)dx = 8\int_{0}^{2}\left(\sqrt{4-x^2}\right)dx = 8\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2} =$$

$$8\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{128}{3}$$

نکته:

در مثال قبل اگر محدودهٔ x ها را آزاد در نظر می گرفتیم حل انتگرال بی نهایت سخت می شد.

$$4\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} 2\sqrt{4-x^2}\,dx\,dy$$

$$8\int_{0}^{2}\left[\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{4-x^2}\,dx\right]dy$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{a^2 - x^2}\right|$$

اگر در هر دو معادله z داشته باشیم مقدار z را از معادله درآورده 2 معادله را مساوی هم قرار دهیم.

نکته:

در این مثال یک رویه شامل z نبوده و z مسأله تنها از رویه دوم بدست می آید و رویه اول تنها در قاعده مسأله نقش خواهد داشت اما اگر در مساأله ای هر دو رویه شامل z باشند باید z های آن ها را پیدا کرد و با هم مساوی قرار داد تا مقاله ای بر حسب x, y بدست آید که سازنده مساحت قاعده است. (در صفحه xy)

تمرین:

حجم جسم محصوری که از بالا به سهمی گون $z = x^2 + 4y^2$ و از اطراف به استوانه های $x = y^2$ و $y = x^2$ محدود است را بدست آورید.

تغییر متغیر در انتگرال دوگانه:

اگر R_1 و R_2 در زیر مجموعه از فضای R^2 باشد نگاشت یک به یکی از R_1 به R_2 به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\iint f(x,y)\ dA = \iint f[h(u,V),g(u,V)]\,|j|dudV$$

ژاکوبین تغییر دستگاه

$$|j| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,V)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial V} & \frac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix}$$

مثال:

انتگرال دوگانه زیر را محاسبه کنید:

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} cos\frac{x-y}{x+y}dx\,dy$$

$$-\begin{cases} x-y=u \\ x+y=V \end{cases} \qquad -2y = u - V \qquad y = \frac{V-u}{2}$$

$$+\begin{cases} x-y=u \\ x+y=V \end{cases} \qquad 2x = u + V \qquad x = \frac{u+V}{2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\partial x}{\partial V} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{\partial y}{\partial V} = \frac{1}{2}$$

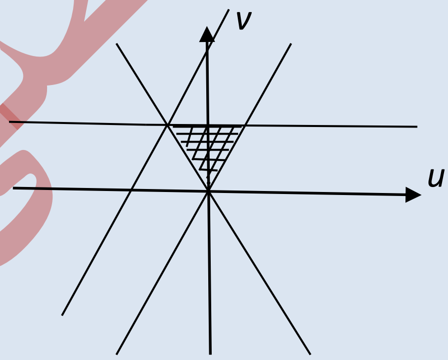
$$|j| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{1} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$y = 0 \ \rightarrow \frac{V-u}{2} = 0 \rightarrow u = V$$

$$y = 1 \ \rightarrow \frac{V-u}{2} = 1 \rightarrow V = u + 2$$

$$x = 0 \ \rightarrow \frac{u+V}{2} = 0 \rightarrow V = -u$$

$$x = 1 - y \ \rightarrow \frac{u+V}{2} = 1 - \frac{V-u}{2} \rightarrow u + V = 2 - V + u \rightarrow V = 1$$



$$\int_0^1 \int_{-V}^{V} cos\frac{u}{V}\,\frac{1}{2} du\, dV = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-V}^{V} cos\frac{u}{V}\ du\, dV =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 V\, sin\frac{u}{V}\Big|_{-V}^{V} dV = \frac{1}{2}\int_0^1 V(sin\,1 + sin\,1)\, dV$$

$$= sin\,1 \int_0^1 V\, dV = \frac{sin\,1}{2}$$

نکته:

$$sin(-1) = -sin\,1$$

تمرین:

انتگرال دوگانه زیر را حل کنید:

$$\iint (x-y)\, sin(x-y)\ dxdy$$

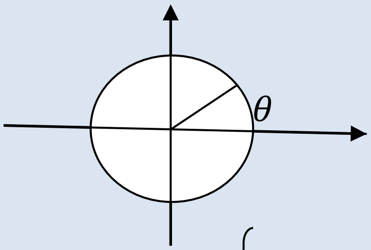
R ناحیه ای است به رئوس $\left|\begin{matrix}0\\ \pi\end{matrix}\right.$ و $\left|\begin{matrix}\pi\\ 2\pi\end{matrix}\right.$ و $\left|\begin{matrix}2\pi\\ \pi\end{matrix}\right.$ و $\left|\begin{matrix}\pi\\ 0\end{matrix}\right.$

تغییر متغیر در دستگاه قطبی:

می دانیم متغریها در دستگاه قطبی به صورت زیر به دستگاه دکارتی تبدیل می شوند.

$u = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$



$(x, y) \to (r, \theta)$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ تبدیل دکارتی به قطبی

$\theta = Arc\tan\frac{y}{x}$

$$|j| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$= r$

$dxdy = r\,dr\,d\theta$

$x^2 + y^2 = r^2$

مثال:

انتگرال دوگانه زیر را با تغییر متغیر قطبی حل کنید:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dy\,dx$$

$\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$

r^2

$x = 1$

$x = -1$

$y = 0$

$y = \sqrt{1 - x^2} \;\to\; x^2 + y^2 = 1$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\sqrt{1-r^2} - 2r\,dr\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(0-\frac{2}{3}\right)0$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{\pi}{3}$$

برای اینکه انتگرال زیر رادیکال ایجاد شود باید یک 2- اضافه متمم کنیم.

$1 - r^2 = u$

$du = -2r\,dr$

جلسه هشتم:

مثال:

با استفاده از انتگرال دوگانه مقدار $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\ dx$ را محاسبه کنید.

خودمان در نظر می گیریم : $I = \int_0^{\infty} e^{-y^2}\ dy$

$$I^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2}.e^{-y^2}\ dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\ dx\,dy$$

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr = \frac{1}{-2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}(-2)r\,dr = \frac{1}{-2}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{-2}(e^{-\infty}-e^0) = \frac{1}{2}$$

$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{-\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \qquad \rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

نکته:

در چه مواقعی از تغییر متغیر قطبی استفاده می شود؟

اگر در عبارت تحت انتگرال عامل $x^2 + y^2$ به هر عنوان ظاهر شود و یا ناحیه انتگرال گیری که از حدود انتگرال دوگانه مشخص می شود تمام یا قسمتی از یک دایره باشد از تغییر متغیر قطبی استفاده می کنیم.

مثال:

مطلوب است محاسبه حجم جسم واقع در داخل استوانه $x^2 + y^2 = 9$ که از بالا به وسیلهٔ صفحه $z = 4$ و از پایین به وسیلهٔ رویه $x^2 + y^2 + 4z = 16$ محصور است.

هر گاه z^2 در صورت سوال بود باید در انتگرال گیری z بالایی را از z پایینی کمک کنیم. (یک z از بالا و دیگری ازپایین ناحیه را جدا می کنند) به جای $z \rightarrow z$ بالا- z پایین می نویسیم.

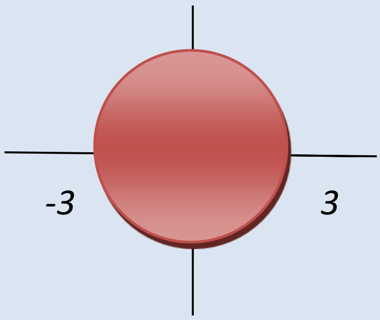
$$V = \iint z dA = \iint 4 - \frac{1}{4}(16 - x^2 - y^2)\, dA$$

$$= \frac{1}{4}\iint (x^2 + y^2) dxdy$$

$$x^2 + y^2 + 4z = 16$$

$$z = \frac{1}{4}(16 - x^2 - y^2)$$

R داخل دایره به شعاع 3 است.



خودمان یک ربع را انتگرال می گیریم و بعد 4 برابر می کنیم (برای راحتی کار)

$$\frac{1}{4}\times 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3} r^2\ rdr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3} r^3\ \ dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^4}{4}\Big|_0^3\ d\theta$$

$$=\frac{81}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta=\frac{81\pi}{8}$$

مهم

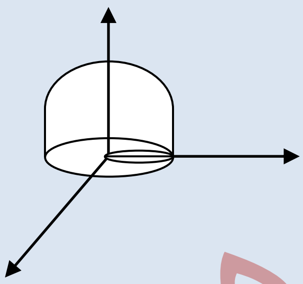
مثال:

حجم جسم محصور به صفحه xy و استوانه $x^2+y^2=ax$ و کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ را بیابید.

ضرب x نصف می شود و جمله دوم اتحاد نوع اول قرار می گیرد. و بعد جمله دوم اتحاد به توان (2) کم می‌شود.

$$x^2+y^2=ax\ \to x^2+ax+y^2=0$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+y^2=0\to\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^0=\frac{a^2}{4}$$



دایره ای به مرکز $0\,\Big|\begin{matrix}\frac{a}{2}\\0\end{matrix}$ و شعاع $\frac{a}{2}$ قطبی:

$$x^2+y^2=ax$$

$$r^2=arc\cos\theta$$

$$r=a\cos\theta$$

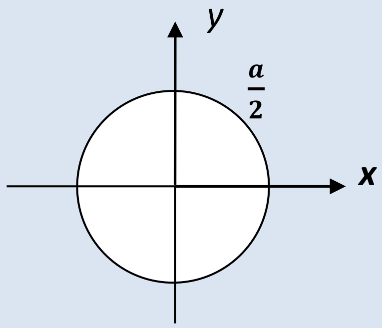
$$r=0\to a\cos\theta=0$$

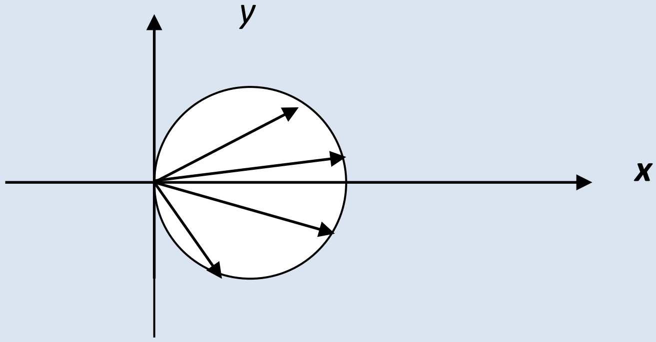
$$\cos\theta=0$$

$$\theta=\frac{\pi}{2}\,,-\frac{\pi}{2}$$

$$V=\iint zdA=\iint\sqrt{a^2-x^2-y^2}\qquad dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dydx$$

مثال:





$$\theta = -\frac{\pi}{2} \rightarrow r = a\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow r = a\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$x^2 + y^2 = ay$$

$$r^2 = ar\sin\theta$$

$$r = a\sin\theta$$

$$0 = a\sin\theta \rightarrow \sin\theta = 0$$

$$\theta = 0, \pi$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{a\cos\theta}\sqrt{a^2 - r^2}\,(-2)r\,dr\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(a^2 - r^2)}{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{a\cos\theta}\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[(a^2 - a^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} - (a^2)^{\frac{3}{2}}\right]d\theta$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(a^2(1 - \cos^2\theta)\right)^{\frac{3}{2}} - a^3\right]d\theta$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a^3\sin^3\theta - a^3)d\theta = -\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta - 1)d\theta$$

$$= -\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta + \frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$

$$= -\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\sin\theta\,\,d\theta + \frac{-a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta + (-)\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-)\cos^3\theta$$

$$\sin\theta\,d\theta + \frac{a^3}{3}\pi$$

$$= -\frac{a^3}{3}(-\cos\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{a^3}{3}\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi a^3}{3} = \frac{\pi a^3}{3}$$

تمرین:

حجم جسم محصور بین کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و سهمی گون $x^2 + y^2 = 3z$ را بیابید. 2 مساحت ناحیهٔ داخل دایره $r = 2\,a\sin\theta$ و خارج دایره $r = a$ را بیابید.

$$r^2 = 2ra\sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = 2ay$$

3 حدود ناحیه بین 2 خط $x + y = 1$ و $x + y = 2$ را بوسیله متغیرهای قطبی بیابید.

4 انتگرال دوگانه زیر را حل کنید

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\tan\theta\sec\theta} r^2\cos^2\theta\, dr d\theta$$

جلسه نهم:

همانند استدلالی که برای انتگرال دوگانه داشتیم برای تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ می توان نوشت:

$$\iiint f(x,y,z)\, dV$$

می دانیم $dV = dxdydz$ است پس اگر $h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)$

$$R = \{(x,y)|a \le x \le b \quad , g\_1\,(x) \le y \le g\_2\,(x) \quad \}$$

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\, dxydz$$

اگر در فرمول مذکور $f(x,y,z) = 1$ باشد محاسبه این انتگرال 3 گانه همان محاسبه حجم خواهد شد.

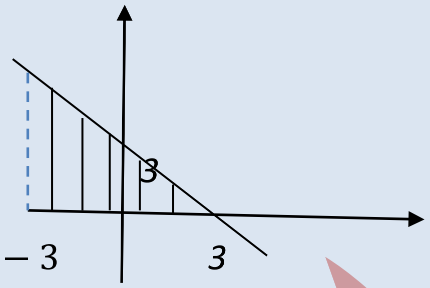
مثال:

اگر D ناحیه محصور به استوانه $x^2 + z^2 = 9$ و صفحات $x + y = 3$ و $x = 0$ و $y = 0$ و بالای صفحه xy باشد مطلوب است محاسبه

$$\iiint (xz + 3z)\, dV$$

$x^2 + z^2 = 9 \to x^2 = 9 \to x = \pm 3$

$z^2 = 9 - x^2 \to z = \pm\sqrt{9 - x^2}$



$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{3-x}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}(xz + 3z)\, dzdydx$$

$$= \int_{-}^{3}\int_{0}^{3-x} x\frac{z^2}{2} + 3\frac{z^2}{2}\Big|_{0}^{\sqrt{9-x^2}} dydx$$

$$= \int_{-3}^{3}\int_{0}^{3-x} \frac{(x+3)}{2}(9 - x^2 - 0)\, dydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{3}\int_{0}^{3-x} (-x^3 - 3x^2 + 9x + 27)\, dydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} (-x^3 - 3x^2 + 9x + 27)y \Big|_{0}^{3-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} (-x^3 - 3x^2 + 9x + 27)(3 - x)dx = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} x^4 - 18x^2 + 81\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5} - 18\frac{x^3}{3} + 81x\right)\Big|_{-3}^{3} = \frac{648}{5}$$

مثال:

مطلوب است محاسبه حجم جسم صلبی که به سهی گون $x^2 + (y+1)^2 = 4 - z$ و صفحهٔ $2y + z = 2$ محصور است …

$z_1 = 4 - x^2 - (y+1)^2$

$z_2 = 2 - 2y \quad \to 4 - x^2 - (y^2 + 2y + 1) = 2 - 2y$

$4 - x^2 - y^2 - 2y - 1 = 2 - 2y \;\to -x^2 - y^2 = -1 \to x^2 + y^2 = 1$

سازندهٔ ناحیه R در صفحه xy (الف)

برای بدست آوردن حد بالا و پایین در z نقطه $\Big|_{0}^{0}$ را در 2 فرمول جاگذاری کرده هر کدام که مقدار بیشتری شد صفحه بالایی را تشکیل می دهد.

$$x^2 + (y+1)^2 = 4 - z$$

$$z = 3$$

$$2y + z = 2 \ \to z = 2$$

$$4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{2-2y}^{4-x^2-(y+1)^2} dz\, dy\, dx$$

$$= -4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2 - 1)\, dy\, dx = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r^2 - 1)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r^3 - r)\, dr\, d\theta = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4} - \frac{r^2}{2}\Big|_0^1\, d\theta = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

تمرین:

مطلوب است محاسبه حجم جسم صلبی که از بالا به رویه $u^2 = 4 - z$ و از پایین به صفحهٔ $x + 2z + 2 = 0$ و از طرف چپ و راست بوسیلهٔ صفحات $y = 0$ و $y = 6$ محصور است.

تمرین:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{2(x^2+y^2)}^{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dz\, dy\, dx$$

مطالعهٔ آزاد:

1 - اگر چگالی حجمی جسم محصور به ناحیه D در نقطه $S(x,y,z)$ باشد آنگاه جرم جسم محصور به D برابر است با:

$$M = \iiint S(x,y,z)\, dV$$

2- مختصات مرکز ثقل:

$$\bar{x} = \frac{\iiint x\, S(x,y,z)\, dV}{M}$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint y\, S(x,y,z)\, dV}{M}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint z\, S(x,y,z)\, dV}{M}$$

3- مختصات گرانیکاه:

$$\bar{x} = \frac{\iiint x\ dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\iiint y\ dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\iiint z\ dV}{V}$$

4- گشتاور درماند نسبت به صفحات:

$$I_{xy} = \iiint z^2\, S(x,y,z)\, dV$$

$$I_{xz} = \iiint y^2\, S(x,y,z)\, dV$$

$$I_{yz} = \iiint x^2\, S(x,y,z)\, dV$$

5- گشتاور درماند نسبت به محورها:

$$I_x = \iiint (y^2 + z^2)\, S(x,y,z)\, dV$$

$$I_y = \iiint (x^2 + z^2)\, S(x,y,z)\, dV$$

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2)\, S(x,y,z)\, dV$$

6- گشتاور درماند نسبت به مبدأ:

$$I_0 = \iiint (x^2 + y^2 + z^2)\, S(x,y,z)\, dV$$

7- شعاع چرخشی:

$$R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} \qquad R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}$$

8- شعاع چرخش نسبت به مبدأ:

$$R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} \qquad R_0 = \sqrt{\frac{I_0}{M}}$$

مختصات کروی:

در دستگاه مختصات کروی هر نقطه مانند P دارای سه تایی مرتب $P(\rho,\varphi,\theta)$ است که در آن $P \geq 0$،

$0 \leq u \leq \pi$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ قرار دارد.

ρ : فاصله نقطه از مبدأ

φ : زاویه شعاع حامل آن نقطه با جهت مثبت محور z ها

θ : زاویه شعاع حامل تصویر نقطه در صفحه xy با جهت مثبت

تبدیل مختصات کروی به دکارتی و بلعکس:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

تبدیل دکارتی به کروی $\leftarrow$

$$\theta = tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$$ تبدیل کروی به دکارتی ←

$$z = \rho \cos\varphi$$

ژاکوبین:

$$|j| = \rho^2 \sin\varphi$$

$$dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

مثال:

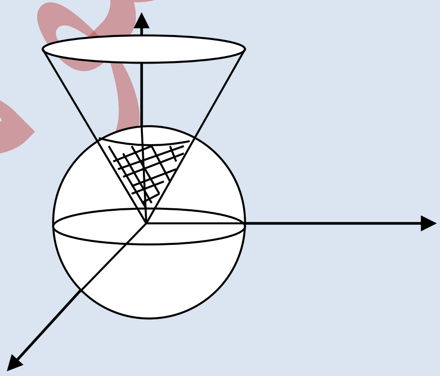
حجم جدا شده از کرهٔ $\rho = a$ بوسیله مخروط $\varphi = \propto$ را بیابید.

$\rho = a$: مکان هندسی تمام نقاطی است که از یک نقطه مشخص فاصله a را دارد.

- چون دایراه کامل است پس θ بین 0 و 2π می چرخد.

- زاویه از 0 تا $\propto$ است چون اگر بالاتر از $\propto$ برود شکل تشکیل نمی شود

-شعاع هم از 0 تا a است ...



$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\propto}\int_0^{a} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\propto} \sin\varphi \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\propto} \sin\varphi\ \, d\varphi\, d\theta$$

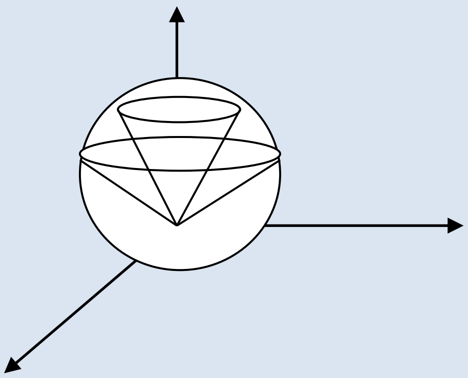
$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} (-\cos\varphi)\Big|_0^{\propto} d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} (-\cos\propto +1) d\theta$$

$$= \frac{a^3(1-\cos\propto)}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{3} a^3(1-\cos\propto)$$

- برای چک کردن اینکه آیا درست حل کردیم یا نه به $\propto$ مقدار می دهیم. $\propto = 0$ نباید هیچ حجمی ایجاد کند و $\propto = \frac{\pi}{2}$ باید سخت حجم را ایجاد کند.

تمرین:

حجم جدا شده از کرهٔ $\rho = a$ بوسیلهٔ مخروط های $\varphi = \propto$ و $\varphi = \beta$ که $0 < \propto < \beta < \frac{\pi}{2}$ است، را بیابید.



توابع برداری:

توابع برداری توابعی هستند که از فضای R^n و R^m تعریف می شوند. مثلاً توابع برداری $f: |R^2 \to |R^3$ به صورت:

$$f(x,y) = f_1(x,y)\vec{\imath} + f_2(x,y)\vec{\jmath} + f_3(x,y)\vec{k}$$

- حد و پیوستگی توابع برداری به حد و پیوستگی مؤلفه های تابع بستگی دارد مثلاً تابع $f: |R \to |R^3$ با ضابطهٔ:

$$f(t) = t\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath} + e^t\vec{k}$$

در $t = 0$ پیوسته است زیرا هر یک از سه مؤلفه تابع f در $t = 0$ پیوسته است.

منحنی های فضایی:

فرض کنید R یک تابع برداری از $|R$ به $|R^2$ یا $|R^3$ باشد و به مقدار حقیقی t مقادیر $\langle x(t), y(t)\rangle$ یا $\langle x(t), x(t), z(t)\rangle$ به ترتیب در صفحه و فضا نسبت می دهد.

$x = a\cos\theta$

$y = a\sin\theta \qquad \to x^2 + y^2 = a^2 \qquad \leftarrow$ معادله دایره با شعاع a

$0 \le \theta \le 2\pi$

$x = a\cos\theta$

$y = b\sin\theta \qquad \to \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad$ بیضی به نیم اقطار b, a

$0 \le \theta \le 2\pi$

$x = a \cosh \theta$

$y = b \sinh \theta \quad \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ هذلولی به نیم اقطار b, a

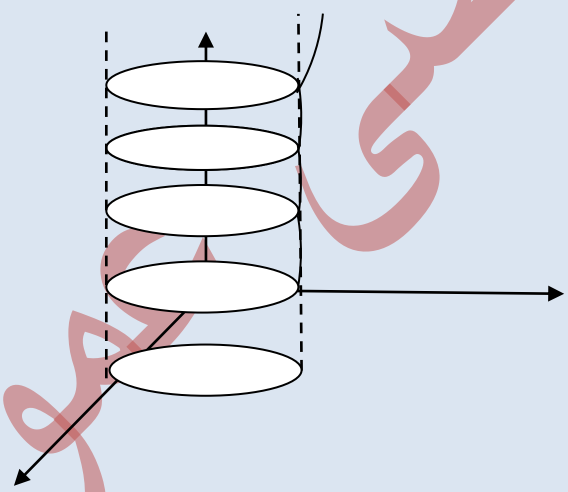
$0 \le \theta \le 2\pi$

نکته:

$$\sinh \theta = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$ ← هیپوبولیک

$$\cosh \theta = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

مثال:



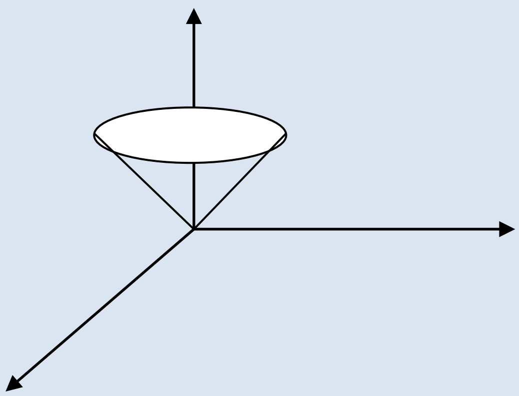
$x = a \cos t$

$y = a \sin t$

$z = a\, t$

$0 \le t \le 2\pi$

مثال:



$x = e^{-t} \cos t$

$y = e^{-t} \sin t$

$z = e^{-t}$

$0 \le t \le 2\pi$

1-مهدی افرا نصفی(اصلاح-نمودار-فرمول نویسی)

2-عادل پور اکبر

3-مبین کشاورز

4-محمود بشری

5-امیر محمد شفیع نژاد

6-ابوذر عشوری

7-مجید دولتی

8-نادر ازغ

9-سجاد کاشفی

10-کاوه تقی نژاد

11-مصطفی شاد منش

12-محمد عبدالله

13-مهیار ایرانی ترکده

14-سمیه مرادی

15-پروانه طوفانی

16-فیض الله مجلسی

17-بهنام خسروی یکتا

18-اکبر قربانیان

(با تشکر از استاد گرامی ,استاد عزیزی)