بسمه تعالی

جزوه

تجزیه و تحلیل سیستم ها

دانشگاه

صنعتی امیرکبیر

استاد

دکتر آقایی نیا

تجزیه و تحلیل سیستمهای خطی

"اعوذ بالله من الشیطان الرجیم"

"بسم الله الرحمن الرحیم"

"انّ ربّک هو الخلاق العلیم - حجر ۸۶"

۷۹،۱۱،۱۶

پیش نیاز — مدار I و II - معادلات دیفرانسیل.

مراجع → سیگنال و سیستم - زیر.
سیگنال و سیستم - اپن هایم

مباحث این درس در حوزه مدارهاست. یعنی المانها ایده‌آل هستند و محدودیتها را در آن در نظر نمی‌گیریم.
مثلی با عنوان ... است

تجزیه و تحلیل: پیدا کردن پاسخ از روی ورودی - و نیز شرایط و محدودیتهای آن.

سیستم: مجموعه‌ای از اجزا که باهم ارتباط دارند و وظایف و هدف خاصی را دنبال می‌کنند.

سیگنال: پارامترهای فیزیکی که از اجزای یک سیستم انتخاب شده‌اند برای کنترل و ...

سیستم خطی: سیستمی که در آن اصل superposition صدق می‌کند.

بیشتر سیستمهایی که با آن سروکار داریم با تقریب خطی پاسخ مورد نظر ما را می‌دهند. مدل تقریب تکه‌ای خطی برای بسیاری از سیستمهای غیرخطی مناسب هستند. درضمن هر سیستم غیرخطی قواعد خاص خود را برای آنالیز دارند. و نمی‌توان روش کلی برای آنها بیان کرد.

سیگنال — قطعی یا deterministic، با مشخص بودن اجزای دامنه پاسخ مشخص است.
یا تصادفی، با مشخص بودن دامنه، نتوانیم بعد از بعد را مشخص کنیم.

سیگنالها — ۱- زمان پیوسته، دامنه پیوسته — آنالوگ
۲- زمان گسسته، دامنه پیوسته — گسسته

۳ـ زمان پیوسته ، دامنه گسسته ← پالس
۴ـ زمان گسسته ، دامنه گسسته ← دیجیتال

سیگنالها ← متناوب
↙ نامتناوب .

تمام عمر نفس راست ناختیم پس آنک   بیا به تجربه در آسمان پری بزنیم
اگر چه عیب حوی است زیستن اما   خوشا که دست به تصمیم بهتری بزنیم

۷۹،۱۱،۱۸

اگر T_1 دوره تناوب x_1 و T_2 دوره تناوب x_2 باشد و $\frac{T_2}{T_1}$ گویا باشد ، $\alpha x_1 + \beta x_2$ نیز گویا خواهد بود .
متناوب

۱ـ با توجه به قوانین مربوطه دیاگرام جسم آزاد را رسم می‌کنیم . سیستم را مشخص کنیم
هر چیزی از خارج به آن وارد می‌شود ، مشخص می‌کنیم و ...)
۲ـ دیاگرام را برای جرمهای مستقل رسم می‌کنیم .
۳ـ معادله دیفرانسیل مرتبه 2 را حل می‌کنیم .

اگر یک سیستم را با فرکانس ω تحریک شود ، خروجی نیز همان فرکانس ω را دارد . $\exp(j\omega t)$
استفاده از این ویژه این سیستم‌ها است : (سیستمهای خطی) پس برای یافتن پاسخ پایدار (steady state) سیستمهای خطی می‌توان از "فازورها" استفاده کرد .

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta) = Re(\bar{X} e^{j\omega t})$$
$$\bar{X} = A e^{j\theta}$$

طیف یک طرفه سیگنال : دامنه یا فاز را برمبنای فرکانس یا ω می‌کشیم .

$x(t) = -20 \sin(100\pi t + 30^\circ)$

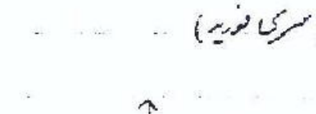
دامنه هیچ وقت منفی نیست ← $x(t) = 20 \sin(100\pi t + 210^\circ)$

$x(t) = 20\cos(\omega t + 120^\circ)$ قرار داد این است که همه را به کسینوس تبدیل کنیم

اگر سیگنال بصورت کسینوسی و سینوسی نباشد ولی متناوب باشد باید آنرا برحسب سری کسینوس بسط دهیم. (با سری فوریه)

مثلاً:

$$A\Pi(t/\tau) = \begin{cases} A & |t|<\tau/2 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$



پس $A_1\sin(\omega t+\theta_1) + B_1\cos(\omega t+\theta_2) \rightarrow$ توان سیستم: $\frac{A_1^2}{2}+\frac{B_1^2}{2}$

دامنه برای یافتن توان و انرژی و ... بکار می رود.

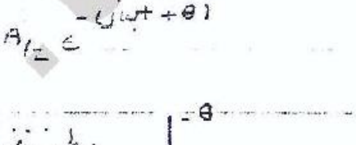
فاز میزان تاخیر را نشان می دهد. یعنی مشخص می کند که ورودی و خروجی چقدر اختلاف فاز دارند.

طیف دوطرفه:

$$x(t) = A\cos(\omega t+\theta) = Re(\bar{X} e^{j\omega t}) = \frac{A}{2} e^{j(\omega t+\theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega t+\theta)}$$

فرکانس منفی که نداریم. فرکانس فازور، فرکانس واقعی نیست.

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$



در صفر هر عددی می تواند باشد.

$u_{-1}(t)$ برای این تعریف شده است که به ما نشان می دهد که نقطه ای وجود دارد در سیستم که مشتق چپ و راست در آن تفاوت می کند.

$$u_{-2}(t) = \int_{-\infty}^{t} u_{-1}(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} t & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$u_{i-1}(t) \triangleq \int_{-\infty}^{t} u_i(\lambda)\, d\lambda \Rightarrow u_i(t) = \frac{d\, u_{i-1}(t)}{dt}$$

$$u_{-3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t^2 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$u_{-3}(t)$ و $u_{-3}(-t)$ برابر نیستند، زیرا شرط برابر بودن دو تابع این است که هم مقدار آن و هم دامنه آنها برابر باشد.

نوشتن توابع برحسب توابع منفرد.

مثال:

$$A\Pi(t/\tau) = A\, u_{-1}(t+\tau/2) - A\, u_{-1}(t-\tau/2)$$

تیر را قدرت پرهیز نباشد ز نشانه — مرغ مسکین چه کند گر نرود در پی دانه

پای عاشق نتوان بست به افسون و فسانه — ای که گفتی مرو اندر پی خوبان زمانه

ما کجاییم در این بحر تفکر تو کجایی؟

۷/۱۱/۲

رسم شکل $x(\beta t+\alpha)$ از روی $x(t)$ ← $x(\beta t+\alpha)$ ← $x(\beta(t+\alpha/\beta))$

آ. اگر $\frac{\alpha}{\beta}$ مثبت باشد $x(t)$ به اندازه $\frac{\alpha}{\beta}$ به چپ انتقال می‌یابد. اگر $\frac{\alpha}{\beta}$ منفی باشد $x(t)$ به اندازه $\frac{\alpha}{\beta}$ به راست انتقال می‌یابد.

ب. اگر $|\beta|>1$ باشد تابع به اندازه $|\beta|$ فشرده می‌شود، و اگر $|\beta|<1$ تابع به اندازه $\frac{1}{|\beta|}$ کشیده می‌شود.

پ. اگر $\beta<0$، تابع نسبت به محور y ها قرینه می‌شود...

$$x(t) \rightarrow x(-t) \rightarrow x(-|\beta| t) \rightarrow x\left(-|\beta|\left(t-\frac{\alpha}{|\beta|}\right)\right)$$

مثال

$$x(t) = \Pi(2t+6) = \begin{cases} 1 & |2t+6|<1/2 \rightarrow -13/4<t<-11/4 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

خواص ضربه واحد :

1- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$ $\qquad x(t) = 1 \quad , t_0 = 0$

اثبات :

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

2- $\delta(t - t_0)$ در همه جاها بجز $t = t_0$ صفر است .

$$\int_{-\infty}^{t_0-\varepsilon} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = 0 \;,\; \int_{t_0+\varepsilon}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = 0 \xrightarrow{\text{ثابت کنید}} \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{نامعین} & t = 0 \end{cases}$$

3- $\delta(t) = \dfrac{dU_{-1}(t)}{dt}$

اثبات :

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)\, dt = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = U_{-1}(t) \Rightarrow \delta(t) = \frac{dU_{-1}(t)}{dt}$$

درکتاب بروش دیگری گفته

4- $\delta(\alpha t) = \dfrac{1}{|\alpha|}\,\delta(t) \longrightarrow \alpha = -1 \Rightarrow \delta(-t) = \delta(t)$: تابع ضربه زوج است

5- $x(t)\,\delta(t - t_0) = x(t_0)\,\delta(t - t_0)$

یک خاصیت مهم :

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\delta^{(n)}(t-t_0)\,dt = \begin{cases} (-1)^n x^{(n)}(t_0) & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

اثبات :

$$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

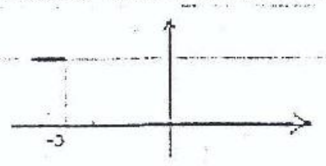
$$\frac{d}{dt}\left[x(t)\,\delta(t-t_0)\right] = \dot{x}(t)\,\delta(t-t_0) + x(t)\,\dot{\delta}(t-t_0)$$
$$= \dot{x}(t_0)\,\delta(t-t_0) + x(t)\,\dot{\delta}(t-t_0)$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$\int_{t_1}^{t_2} d\left[x(t)\,\delta(t-t_0)\right] = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)\,\delta(t-t_0)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\dot{\delta}(t-t_0)\,dt$$

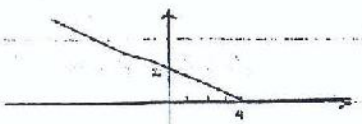
سمت چپ صفر است .

برای رسم جدید :

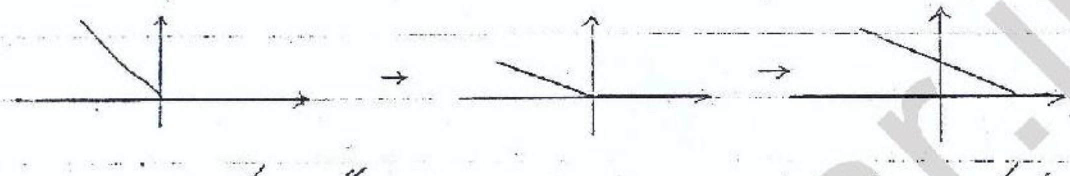


$x_1(t) = \Pi\left[2(t+3)\right]$

$$x_2(t) = r(-0.5t+2) = \begin{cases} -0.5t+2 & -0.5t+2>0 \Rightarrow t<4 \\ 0 & t>4 \end{cases}$$

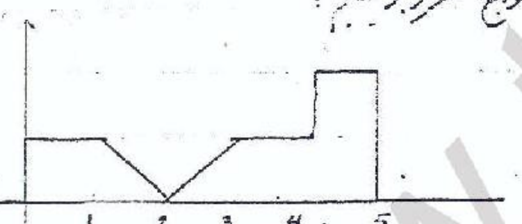


برای بدست آوردن از روی $r(t)$: $r\left[-0.5(t-4)\right]$



چک کردن چند نقطه بعد از ~~محاسبه~~ اشتباهات احتمالی جلوگیری می کند !

می خواهیم این تابع را بصورت ترکیب خطی توابع منفرد بنویسیم :



آ. باید اطمینان حاصل کنیم که نمودار از مجموعه ای از خطها تشکیل شده است .

ب. از $-\infty$ شروع می کنیم اولین تابع $u_{-1}(t)$ است که تا 1 معتبر است .

پ. تسترهای بعدی تابع را بجای مسودت انجام می دهیم .

$$u_{-1}(t) - u_{-2}(t-1) + 2u_{-2}(t-2) - u_{-2}(t-3) + u_{-1}(t-4) - 2u_{-1}(t-5)$$

<u>تابع ضربه واحد :</u>

هر تابعی که در این رابطه صدق کند ، تابع ضربه واحد است .

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} x(t_0) & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0 : & \text{o.w} \end{cases}$$

پیوسته $x(t)$ در t_0

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-\lambda)\,dt = x(\lambda)$$

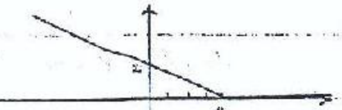
این انتگرال ما را بیاد "کانولوشن" می اندازد . $\left(x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda \right)$

پس می توان گفت که ضربه واحد عضو خنثی در عمل کانولوشن است .

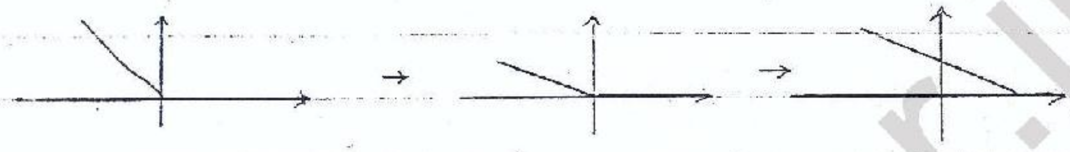
بردار جدید.

$x_1(t) = \Pi[2(t+3)]$

$$x_2(t) = r(-0.5t+2) = \begin{cases} -0.5t+2 & -0.5t+2>0 \Rightarrow t<4 \\ 0 & t>4 \end{cases}$$

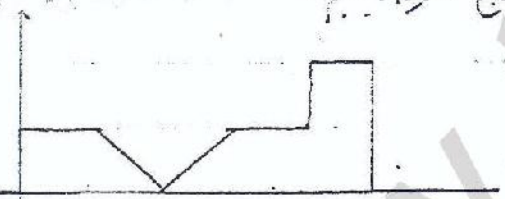


برای بدست آوردن از روی $r(t)$: $r[-0.5(t-4)]$



چک کردن چند نقطه هم از اشتباهات احتمالی جلوگیری می کند!

می خواهیم این تابع را بصورت ترکیب خطی توابع منفرد بنویسیم:



آ. باید اطمینان حاصل کنیم که نمودار از مجموعه ای از خطها تشکیل شده است.

ب. از $-\infty$ شروع می کنیم اولین تابع $u_{-1}(t)$ است که تا 1 معتبر است

پ. تغییرهای بعدی تابع را به همین صورت انجام می دهیم.

$$u_{-1}(t) - u_{-2}(t-1) + 2u_{-2}(t-2) - u_{-2}(t-3) + u_{-1}(t-4) - 2u_{-1}(t-5)$$

تابع ضربه واحد:

هر تابعی که در این رابطه صدق کند، تابع ضربه واحد است.

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} x(t_0) & t_1<t_0<t_2 \\ 0 : & \text{o.w} \end{cases}$$

$x(t)$ در t_0 پیوسته

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-\lambda)\,dt = x(\lambda)$$

این انتگرال ما را به یاد «کانولوشن» $\left(x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda\right)$ می اندازد.

پس می توان گفت که ضربه واحد عضو خنثی در عمل کانولوشن است.

مثال :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\,\delta(t-10)\,dt = e^{-100\alpha}$$

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-\alpha t^2}\,\delta(t+10)\,dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\,\delta(t-10)\,dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[5\,\delta(t) + e^{-(t-1)}\delta(t) + \cos(5\pi t)\,\delta(t) + e^{-t^2}\delta(t)\right]dt$$

- نشان دهید که این یک تابع ضربه است. $x(t) = 1/\varepsilon\ \Pi(t/\varepsilon)$

سیگنال:

- انرژی ← $E \triangleq \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt$ ← $0 < E < \infty$ ⇐ سیگنال انرژی
- توان ← $P \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt$ ← $0 < P < \infty$ ⇐ سیگنال توان

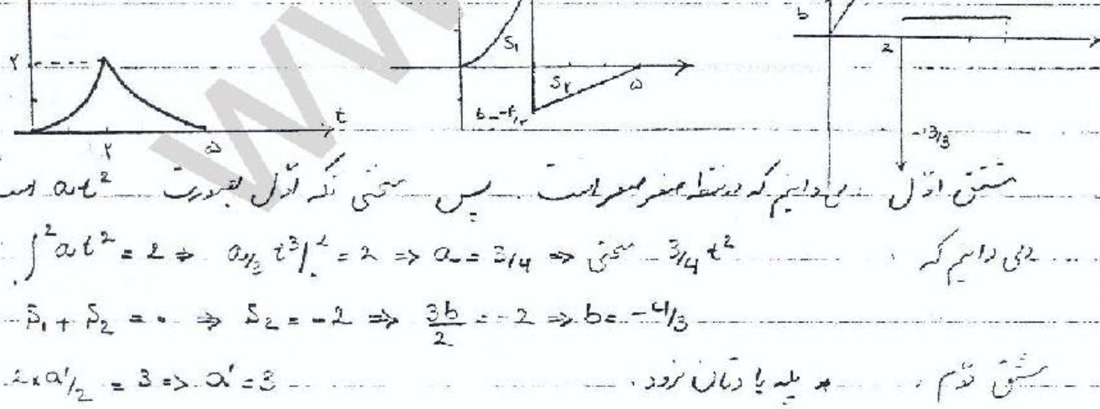
S : چگالی طیف توان $\qquad P = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\,df$

E : چگالی طیف انرژی $\qquad E = \int_{-\infty}^{+\infty} E(f)\,df$

آسمان بار امانت نتوانست کشید

قرعه فال به نام من دیوانه زدند!

۷۹/۱۱/۲۵ :



مشتق اول را می‌دانیم که در نقطه صفر صفر است. پس منحنی تکه اول به صورت at^2 است

می‌دانیم که $\int_0^2 at^2 = 2 \Rightarrow a/3\ t^3\big|_0^2 = 2 \Rightarrow a = 3/4 \Rightarrow$ منحنی $3/4\, t^2$

$S_1 + S_2 = 0 \Rightarrow S_2 = -2 \Rightarrow \frac{3b}{2} = -2 \Rightarrow b = -4/3$

مشتق دوم : به پله یا دلتا نرود. $\quad 2\times\alpha'/2 = 3 \Rightarrow \alpha' = 3$

$3\times 2/2 - 13/3 + 3b = 0 \Rightarrow b = 4/9$

حل : $\ddot{x}(t) = 3/2\, u_{-2}(t) - 3/2\, u_{-2}(t-2) - \frac{23}{9}u_{-1}(t-2) - 13/3\, u_0(t-2) - 4/9\, u_{-1}(t-5)$

$\Rightarrow x(t) = 3/2\, u_{-4}(t) - 3/2\, u_{-4}(t-2) - \frac{23}{9}u_{-3}(t-2) - 13/3\, u_{-2}(t-2) - 4/9\, u_{-3}(t-5)$

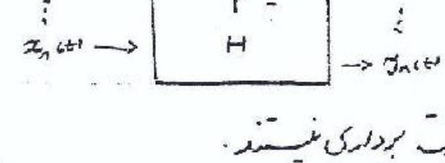
ورودی x باید X را پیدا کنیم. در این صورت که در اندیس توابع شود ۲. تا اضافی کنیم

آنالیز سیستم در حوزه زمان :

روشهای یافتن پاسخ یک سیستم خطی ← حل معادله دیفرانسیل

← استفاده از رابطه کانولوشن

← حل در فضاهای تبدیل یافته (لاپلاس، فوریه و ...)



$$\vec{y}(t) = H[\vec{X}(t)]$$

اگر ورودی تکی باشد، دیگر x و y بصورت برداری نیستند.

H یک عملگر است. که به این معنا نیست که $y = H(x(t))$ زیرا ممکن است

مثلاً H یک انتگرال گیر باشد که به $x(t)$ و x در t های عدد t بستگی خواهد داشت.

اگر $Y(t) = H(X(t))$ باشد به سیستم، سیستم بدون حافظه می‌گوییم.

ما در یک سیستم را بررسی می‌کنیم. فعلاً یعنی ما پاسخ a.c را آنالیز می‌کنیم

پاسخ کلی به صورت مجموع پاسخ a.c و d.c است.

معادله کلی

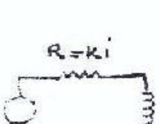
$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_0 x(t)$$

ملاحظه می‌شود که معادله عدد ثابت (مقدار d.c) ندارد.

در سه جا ما فرم این معادله را نخواهیم داشت:

۱- المان غیرخطی در مدار باشد.

مثال:



$$V(t) = V_R + V_L = Ri + L\,\frac{di}{dt} = Ki^2 + L\,\frac{di}{dt}$$

۲ـ عنصری داشته باشیم که متغیری از زمان باشد . (در مثال مثل $R=kt$)

۳ـ گسترده باشد (طول موج اندازه اجزای سیستم با طول موج قابل مقایسه باشد .)

در این صورت از معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده می کنیم .

در مخابرات با فرکانس بالا و خطوط انتقال بلند ، مدارهای گسترده داریم.

آنالیز دینامیک سیستمهای خطی فشرده (غیر متغیر با زمان) :

ورودی $x(t)$ → $\boxed{h(t)}$ → خروجی $y(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, x(t-\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$$

$h(t)$ را باید پیدا کنیم و از آن $y(t)$ را بیابیم.

تعریف دقیق $h(t)$ (پاسخ ضربه) :

پاسخ اعمال ضربه به سیستم به شرط اینکه قبل از اعمال ضربه سیستم در حال آرامش باشد (یعنی شرایط اولیه صفر باشد) (تمام المانهای سیستم، دارای انرژی صفر باشند)

برای یافتن پاسخ ضربه چهار روش وجود دارد :

۱ـ حل معادله دیفرانسیل و یافتن H از روی آن (وقتی بصورت انتگرال کانولوشن نوشته شد)

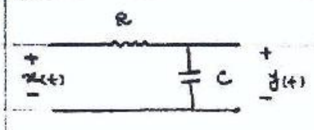
۲ـ پیدا کردن پاسخ ضربه با استفاده از معادله دیفرانسیل .

۳ـ استفاده از فضای تبدیل یافته لاپلاس .

۴ـ استفاده از سایر توابع منفرد و مشتق و انتگرال گرفتن.

رسد آدمی به جایی که به جز خدا نبیند ...

۷۹،۱۱،۳۰



* روش اول: $x(t) = V_R(t) + y(t) = RC\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t)$

$$\Rightarrow RC\,\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$$

$$\Rightarrow RC\,\dot{y}_h(t) + y_h(t) = 0 \Rightarrow y_h(t) = A\,e^{-t/RC}$$

$$\Rightarrow y(t) = A(t)\,e^{-t/RC}$$

$$A(t_0) = y(t_0)\,e^{t_0/RC}$$

حل می‌کنیم $\longrightarrow$ $A(t) = \dfrac{1}{RC}\displaystyle\int_{t_0}^{t} x(\lambda)\,e^{\lambda/RC}\,d\lambda + A(t_0)$

$$\Rightarrow y(t) = y_0\,e^{\frac{t_0-t}{RC}} + \int_{t_0}^{t} \frac{x(\lambda)\,e^{\frac{\lambda-t}{RC}}}{RC}\,d\lambda = \int_{-\infty}^{t} \frac{x(\lambda)\,e^{\frac{\lambda-t}{RC}}}{RC}\,d\lambda$$

انتگرال کانولوشن از $-\infty$ تا $+\infty$ است، باند پایین را درست کردیم، باند بالا را هم درست می‌کنیم

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\lambda)\,e^{\frac{\lambda-t}{RC}}}{RC}\,u(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$\Rightarrow h(t-\lambda) = \frac{1}{RC}\,e^{\frac{-(t-\lambda)}{RC}}\,u(t-\lambda)$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{RC}\,e^{-t/RC}\,u(t)$$

□ برای معادله درجه ۲ به این روش حل کنید. (L اضافه کنید به مدار بالا)

* روش دوم:

برای پیدا کردن پاسخ ضربه در حقیقت باید معادله زیر را حل کنیم. با علم به اینکه شرایط اولیه صفر است.

$$RC\,\dot{h}(t) + h(t) = \delta(t)$$

(سیستم غیرعلّی: قبل از اعمال ورودی پاسخ وجود دارد.
برای یک سیستم غیرعلّی آیا باید تعریف پاسخ ضربه را تغییر داد؟)

تفاوت معادله فوق با معادله همگن مثال قبل فقط در یک نقطه است، پس پیش‌بینی می‌کنیم که $h(t)$ و $y_h(t)$ خیلی شبیه هم هستند.

$$y_h(t) = A\,e^{-t/RC} \longrightarrow h(t) = A\,e^{-t/RC}\,u(t)$$

(ب) ملا ... از معادله دیفرانسیل نمی آید، از اینجا هم می آید که می خواهیم سیستم علّی باشد یعنی قبل از صفر، مقدار تابع صفر است.

$$RC\, y_h'(t) + y_h(t) = 0$$

$$RC\, h'(t) + h(t) = \delta(t)$$

ناپیوستگی ورودی از نوع ضربه است، $h(t)$ که ما نوشتیم ناپیوستگی از نوع پله است و در $h'(t)$ ناپیوستگی از نوع ضربه است، جمع ناپیوستگی ضربه و پله، ضربه است.

پس الگوریتم بصورت زیر است:

۱- پاسخ کلی را پیدا کنیم.

۲- پاسخ را برای t های منفی صفر کنیم.

۳- آنالیز ناپیوستگی می کنیم.

۴- با استفاده از معادله دیفرانسیل ضرایب دیفرانسیل را پیدا کنیم.

$$RC\, h'(t) + h(t) = \delta(t)$$

در دیفرانسیل t، dt ضرب می کنیم و از $-\varepsilon$ تا ε انتگرال می گیریم

$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(t) = 0$ ، زیرا $h(t)$ ناپیوستگی از نوع محدود دارد و انتگرال آن صفر است. (بنا به قضیه میانگین)

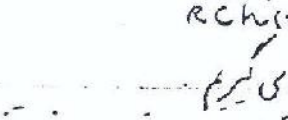
$$\Rightarrow RC\, h(0^+) - 0 + 0 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(0^+) = \frac{1}{RC}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

* روش سوم:

پاسخ پله را پیدا کنیم.



شبکه اساسی را رسم می کنیم، τ را پیدا می کنیم، شرط اولیه و نهایی را پیدا می کنیم.

پاسخ بصورت زیر است:

$$y_u(t) = [A e^{-t/RC} + B]\, u(t)$$

$$\begin{cases} B = \text{مقدار نهایی} \quad \rightarrow B = 1 \\ A + B = \text{مقدار اولیه} \quad \rightarrow A + B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_u(t) = (1 - e^{-t/RC})\, u(t)$$

پاسخ ضربه مشتق y_u است.

$$y'_u(t) = +\frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) + 0(1 - e^{0})\,\delta(t)$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

استدلال زیر برای پیدا کردن A:

اتصال کوتاه در $t=0$ خازن $\Rightarrow i(t) = \frac{\delta(t)}{R} \rightarrow q(t) = \frac{1}{R}$

$$\rightarrow V_c(0^+) = y(0^+) = h(0^+) = \frac{1}{RC}$$

نحوه محاسبه انتگرال کانولوشن:

* تعاریف اساسی:

سیستم تغییرناپذیر با زمان (time invarient

اگر: $y(t) = H[x(t)]$

$$\Rightarrow \underbrace{y(t-\tau)}_{\text{پاسخ شیفت داده شده سیستم}} = \underbrace{H[x(t-\tau)]}_{\text{پاسخ سیستم به ورودی شیفت داده شده}}$$

۱- $x_1(t)$ اعمال می کنیم، پاسخ را $y_1(t)$ می نامیم.

مثال:

$y(t) = t\, x(t)$

$y_1(t) = t\, x_1(t)$

$y_2(t) = t\, x_2(t)$

$x_2 = x_1(t-\tau)$

$y_2(t) = t\,x_1(t-\tau)$ پاسخ سیستم به ورودی شیفت داده شده

$y'_2(t) = (t-\tau)\,x_1(t-\tau)$ $y_2 \neq y'_2 \rightarrow$ time varying

ثابت کنید معادله‌ی دیفرانسیل با ضرایب ثابت T.I است.

آنانکه خاک را به نظر کیمیا کنند   آیا بود که گوشه‌ی چشمی به ما کنند!!

٨٦,١٢,٢

• خاصیتهای مختلف یک سیستم:

۱- خاصیتهای سیستمهای T.I:

اگر پاسخ به $x(t)$ را داشته باشیم، پاسخ به $x_1(t-\tau)$ را نیز داریم.

۲- خاصیت سیستم خطی: $H[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 H[x_1(t)] + \alpha_2 H[x_2(t)]$

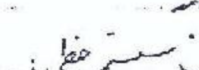
$y(t) = ax^3 + bx$ خطی نیست

$y = t\,x(t)$ خطی است

ترکیب سری دو سیستم خطی آیا لزوماً خطی است؟ بله

$$H_c[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = H_B[\alpha_1 \overbrace{y_1(t)}^{H_A(x_1(t))} + \alpha_2 y_2(t)] = \alpha_1 z_1(t) + \alpha_2 z_2(t)$$

$$= \alpha_1 H_B[H_A(x_1(t))] + \alpha_2 H_B[H_A(x_2(t))]$$



اگر C خطی باشد، لزوماً A و B خطی نخواهند بود. مثلاً A مربع کننده و B جذر گیرنده باشد.

در مورد موازی تحقیق کنید.

می‌خواهیم ثابت کنیم (در سیستم LTI): $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda$

داریم: $x(t)=x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta(t-\lambda)\,d\lambda$

$$y(t)=\mathcal{H}[x(t)]=\mathcal{H}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta(t-\lambda)\,d\lambda\Big] \xrightarrow{\text{خطی}}$$

$\delta(t-\lambda)=\delta(\lambda-t)$

$$\xrightarrow{\text{خطی}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}[x(\lambda)\delta(t-\lambda)]\,d\lambda \overset{\text{خطی}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,\mathcal{H}[\delta(t-\lambda)]\,d\lambda$$

$h_\lambda(t),\ h(t,\lambda)$

$$\xrightarrow{LTI} y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda = x(t)*h(t)$$

ادعا می‌کنیم که پاسخ به هر ورودی را در یک سیستم LTI، با دانستن پاسخ ضربه می‌توانیم بدست آوریم. زیرا پاسخ $\alpha x_1+\beta x_2$ را برای L سیستم و پاسخ $x(t-\tau)$ را برای سیستم TI داریم.

* تمرین: نشان دهید که معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت معرف سیستم LTI است.

۳ـ خاصیت علّی بودن:

در حقیقت باید بگوییم که سیستم ما قابلیت پیشگویی آینده را ندارد.

$$\big(x_1(t)=x_2(t),\ \forall t<t_0\big) \Rightarrow \big(y_1(t)=y_2(t),\ \forall t<t_0\big)$$

- علّی هست یا نه؟ ax^3+bx if $x_1-x_2=0 \Rightarrow$

$$ax_1^3+bx_1-ax_2^3-bx_2 = a(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+b(x_1-x_2)=0$$

$$\Rightarrow (x_1-x_2=0) \Rightarrow (y_1-y_2=0)$$

اگر سیستم LTI باشد، شرط علّی بودن آن است که $h(t)=0 \quad t<0$

فرض می‌کنیم سیستم LTI و علّی $\Rightarrow h(t)=0 \quad t<0$.

فرض می‌کنیم سیستم LTI و $t<0$ و $h(t)=0$ و مقدم قضیه علّی بودن برقرار است ← تالی قضیه علّی بودن را ثابت می‌کنیم.

آنالیز سیستم در حوزه زمان :

قضایای کانولوشن :

1- $h_1 * h_2 = h_2 * h_1$

$\to \boxed{A} \to \boxed{B} \to \qquad \to \boxed{B} \to \boxed{A} \to$

یعنی در سیستم سری و LTI : ترتیب کردها مهم نیست .

$-\frac{d}{dt}(h_1(t) * h_2(t)) = h'_1(t) * h_2(t) = h_1(t) * h'_2(t)$

$h_1(t) \to \boxed{h_2(t)} \to h_1(t) * h_2(t) \qquad h'_1(t) \to \boxed{h_2(t)} \to h'_1(t) * h_2(t) = [h_1(t) * h_2(t)]'$

$\Rightarrow x_1(t) * x_2(t) = x_1^{m}(t) \cdot x_2^{-m}(t)$

پس،

۱- ورودی را شیفت بدهیم، خروجی شیفت داده می‌شود.

۲- ورودی را α برابر کنیم، خروجی را α برابر می‌کنیم.

۳- ورودی‌ها را باهم جمع کنیم، خروجی‌ها را هم باید باهم جمع کنیم.

۴- از ورودی مشتق بگیریم، از خروجی نیز باید مشتق بگیریم.

۵- از ورودی انتگرال بگیریم، از خروجی نیز باید انتگرال بگیریم. انتگرال‌ها باید از $-\infty$ تا t باشد.

آسمان بار امانت نتوانست کشید   قرعه فال به نام من دیوانه زدند

۷۴/۱۲/۷

$T_1 \le t \le T_2$

$\hat{x}(t) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n\Delta\lambda)\,\Pi\left(\frac{t-n\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right)$

$T_1 = (N_1 - 1/2)\Delta\lambda$

$T_2 = (N_2 + 1/2)\Delta\lambda$

سیستم غیرعلی $y(t) = x(t+1)$ $h(t) =$ پاسخ ضربه $\delta(t+1)$

برای ضربه‌های منفی $h(t)$ صفر نیست، پس علی نیست.

۴- پایدار بودن:

مثلاً در مکانیک، اگر جسمی متعادل را از نقطه تعادلش دور کنیم، دوباره به مکان تعادلش بازی گردد. سیستمی را پایداری گوییم که در پایین ترین سطح انرژی خودش را باشد (یا حداکثر بی‌نظمی)

در مهندسی برق به سیستمی پایداری گوییم که به ازای ورودی محدود، خروجی محدود بدهد. $(BIBO)$ $|x(t)| < M \Rightarrow |y(t)| < N$

با این تعریف مشتق ناپایدار است. چون به ازای ورودی پله، ضربه می‌دهد.

. پایدار است یا نه. $tx(t) =$

$x(t) = u(t) \to t\, u(t)$ محدود نیست زیرا

$t \to \infty \Rightarrow tx(t) \to \infty$

۵- سیستم بدون حافظه:

$H[x(t_0)] = f[x(t_0), t_0]$

$t\,x(t)$ و $ax^3 + bx$ بدون حافظه هستند. $\int_{-\infty}^{t} x(t)$ حافظه دارد

پس در یک سیستم بدون حافظه y به $x(t)$ و خود t بستگی دارد.

نشان دهید اگر $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt < N$، سیستم LTI پایدار است. (یعنی اگر سطح زیر منحنی پاسخ ضربه محدود باشد) کافی است. لازم بودن را تحقیق کنید.

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n\Delta\lambda) \cdot \frac{1}{\Delta\lambda} \Pi\left(\frac{t-n\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right) \Delta\lambda$$

$$\hat{y}(t) = \mathcal{H}[\hat{x}(t)] = \mathcal{H}\left[\sum_{N_1}^{N_2} x(n\Delta\lambda) \cdot \frac{1}{\Delta\lambda} \Pi\left(\frac{t-n\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right) \Delta\lambda\right]$$

$$\overset{\text{خطی}}{=} \sum_{N_1}^{N_2} \mathcal{H}\left[x(n\Delta\lambda) \cdot \frac{1}{\Delta\lambda} \Pi\left(\frac{t-n\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right) \Delta\lambda\right]$$

$$\overset{\text{خطی}}{=} \sum_{N_1}^{N_2} x(n\Delta\lambda)\, \mathcal{H}\left[\frac{1}{\Delta\lambda} \Pi\left(\frac{t-n\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right)\right] \Delta\lambda$$

$$\Delta\lambda \to 0 \Rightarrow \lim \hat{y}(t) = y(t) = \int_{T_1}^{T_2} x(\lambda) \underbrace{\mathcal{H}[\delta(t-\lambda)]}_{h_\lambda(t)} d\lambda$$

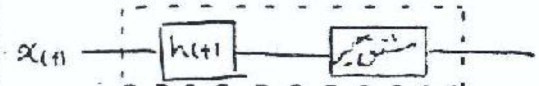
$h_\lambda(t) \rightarrow$ درمورد تغییرپذیر بودن بازمان اطلاعی نداریم.

$$\overset{T.I}{\Rightarrow} y(t) = \int_{T_1}^{T_2} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda \quad \leftarrow$$ قیدکاملی T_1 و T_2 نداریم.

این همان است که قبلاً اثبات کردیم. ($LTI \Rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$)

طبق این استدلال پاسخ این ورودی به سیستم که از $\int_{T_1}^{T_2}$ بدست می آید با پاسخ شکل قبلی مساوی می شود ! اشکال کار در اینجاست که تعریف پاسخ ضربه در اینجا نقض می شود. چون پیش از T_1 سیستم درحال آرامش نیست. پس در اینجا حد پایین انتگرال را $-\infty$ درنظر میگیریم.



$$y(t) = [x(t) * h(t)]'$$

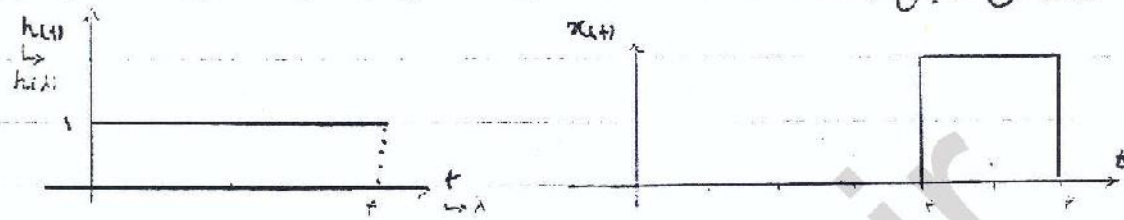
کل بلوک و سیستم مشتق گیر یک سیستم LTI است پس :

9,

$$y(t) = x'(t) * h(t)$$

اگر پاسخ ضربه کل سیستم را نیز بدست بیاوریم، یک رابطه دیگر نیز می‌توان نوشت (خروجی را بصورت کانولوشن پاسخ ضربه کل و ورودی بدست می‌آوریم)

۱- روش گرافیکی :



۱- تصمیم می‌گیریم که کدام تابع را حرکت دهیم (بهتر است آنکه محدود است حرکت داده شود)
۲- توابع را برحسب λ رسم می‌کنیم.

برای ست کردن شکل t را ۴ درنظر می‌گیریم و رسم می‌کنیم $x_1(\lambda) = x(4-\lambda)$ را .
حالا شکل چک می‌کنیم که $x_1(-1) = 2 = x(4-(-1))$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<4 & \\ 2(t-4) & 4<t<6 & t-4\geq 0 ,\ t-6\leq 0 \\ 4 & 6<t<8 & t-4<4 \quad t-6>0 \\ 2(10-t) & 8<t<10 & t-4\geq 4 \quad t-6<4 \\ 0 & t>10 & \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که مرتبه تابع رابطه تغییر کرد، یعنی از پیوستگی پله به پیوستگی ramp تبدیل شد (طبیعی است زیرا کانولوشن عمل انتگرال‌گیری دارد.)

و نیز مشاهده می شود که بازه پاسخ مجموع بازه های ورودی و $h(t)$ است .

در روش ترسیمی شکل پاسخ را می بینیم ، فرمول قسمتهای مختلف را نیز خواهیم داشت .

۲_ محاسبه مستقیم:

$$x(t) = 2u_{-1}(t-4) - 2u_{-1}(t-6)$$
$$h(t) = u_{-1}(t) - u_{-1}(t-4)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, x(t-\lambda)\, d\lambda = 2\int_{0}^{4} [u_{-1}(t-\lambda-4) - u_{-1}(t-\lambda-6)]\, d\lambda$$

$$= 2\left[-u_{-2}(t-\lambda-4) + u_{-2}(t-\lambda-6)\right]_0^4$$

۳_ استفاده از تبدیل لاپلاس و فوریه (در حوزه لاپلاس و فوریه ، کانولوشن ضرب می شود)

۴_ استفاده از خصلتهای زیر:

$$x(t) * \delta(t-t_1) = x(t-t_1)$$
$$x_1(t) * x_2(t) = x_1^{(+m)}(t) * x_2^{(-m)}(t)$$

$$h(t) = u_{-1}(t) - u_{-1}(t-4) \Rightarrow h'(t) = \delta(t) - \delta(t-4)$$
$$x(t) = 2u_{-1}(t-4) - 2u_{-1}(t-6) \Rightarrow x^{(-1)}(t) = 2u_{-2}(t-4) - 2u_{-2}(t-6)$$

$$h(t) * x(t) = h'(t) * x^{(-1)}(t) = 2u_{-2}(t-4) - 2u_{-2}(t-6) - 2u_{-2}(t-8) + 2u_{-2}(t-10)$$

این روش را با روش ترسیمی می توان انجام کرد.

سن اگر برخزم

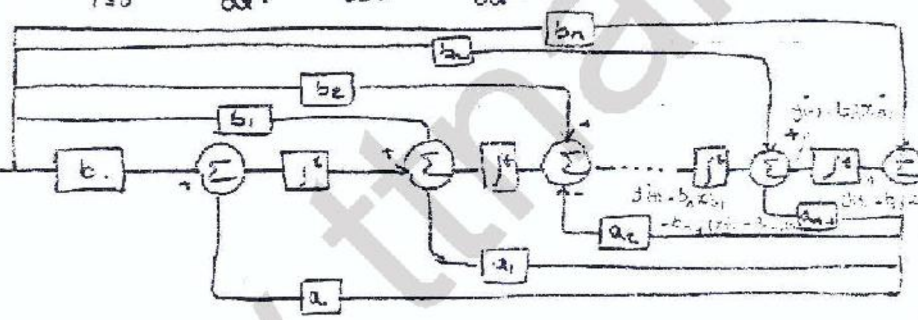
۷۹/۱۲/

در روش سوم اگر $x(t)=u_{-3}(at+b) + u_{-2}(t+5)$ داشته باشیم، از سوپرپوزیشن استفاده می‌کنیم:

$$\underbrace{u_{-3}(at+b)}_{x_1(t)} \quad \underbrace{u_{-2}(t+5)}_{x_2(t)}$$

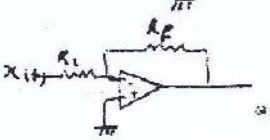
$$h(t) * x(t) = h^{(-2)}(t) * \ddot{x}_2(t) + h^{(-3)}(t) * x_1^{(3)}(t)$$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{N} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}$$

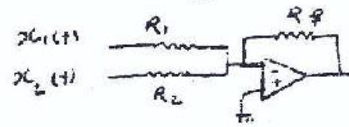


انتگرال گیر: $y(t) = \frac{-1}{RC}\int i(t)\,dt$

ضرب کننده: منفی ثابت $\frac{y(t)-0}{R_f} = \frac{0-x(t)}{R_1} \Rightarrow y(t) = \frac{-R_f}{R_1}x(t)$



جمع کننده: $y(t) = \frac{-R_f}{R_1}x_1(t) - \frac{R_f}{R_2}x_2(t)$



چرا از انتگرال گیر استفاده می‌کنیم؟ چون می‌خواهیم کامپیوتر آنالوگ پایدار باشد.
برای مشتق گیر در حوزه لاپلاس داریم: $[y(t)]' = sY(s)$ و هرچه فرکانس بیشتر شود گین نیز زیاد می‌شود. مشتق گیر حساسیت بالایی دارد. مشتق گیر تقویت می‌کند.

- در اولین گام معادله دیفرانسیل سیستم را می‌نویسیم.

- روش کلی در مورد بلوک دیاگرامها - نوشتن روابط برای جمع کننده‌ها و
ه تعداد انتگرال گیرها را پیدا کنید؟)

روش سیستماتیک برای نوشتن معادلات حاکم بر سیستم خطی شده:

۱- تعیین اجزای اساسی مدل یا سیستم و مشخص کردن رابطه هر جزء. مثلاً در مدار مقاومت - سلف ... ، خازن ...

۲- رابطه بین اجزا را می‌نویسیم. مثلاً KVL , KCL و ... در مدار

۳- حذف متغیرهای وابسته (که مستقل نیستند)

۴- مدل ساز و آنالیزگر بر روی مدل بحث می‌کنند و براساس دقت لازم معادلات بدست آمده ساده‌تر و یا پیچیده‌تر می‌شود.

۵- حل معادلات سیستم با استفاده از روشهای سیستماتیک

مدل سازی مکانیک انتقالی - دورانی:

- تعریف جسم صلب.
- چه جسمی در مکانیک انتقالی صدق می‌کند؟ جسمی که همه اجزایش از یک بردار انتقال تبعیت می‌کند

جهت i از سر مثبت v وارد می‌شود. این $v(t) = R\,i(t)$
قرارداد برای این است که "توان مصرف کننده مثبت در بیاید"

11/

- در اولین گام معادله دیفرانسیل سیستم را می‌نویسیم.
- روش کلی در مورد بلوک دیاگرامها - نوشتن روابط برای جمع کننده‌ها

۵ تعداد انتگرال گیرها را پیدا کنید؟)

روش سیستماتیک برای نوشتن معادلات حاکم بر سیستم خطی فشرده:

۱- تعیین اجزای اساسی مدل یا سیستم و مشخص کردن رابطه هر جزء. مثلاً در مدار مقاومت - سلف ... ، خازن ...

۲- رابطه بین اجزا را می‌نویسیم. مثلاً KVL ، KCL و ... در مدار

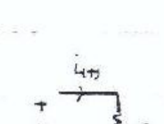
۳- حذف متغیرهای وابسته (که مستقل نیستند)

۴- مدل ساز و آنالیزگر بر روی مدل بحث می‌کند و براساس دقت لازم معادلات بدست آمده ساده‌تر و یا پیچیده‌تر می‌شود.

۵- حل معادلات سیستم با استفاده از روشهای سیستماتیک

مدل سازی مکانیک انتقالی - دورانی:

- تعریف جسم صلب.
- چه جسمی از مکانیک انتقالی تبعیت می‌کند؟ جسمی که همه اجزایش از یک بردار انتقال تبعیت می‌کند

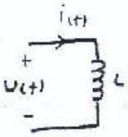


جهت i از سر مثبت v وارد می‌شود. این قرارداد برای این است که "توان مصرف کننده مثبت در بیاید" $v(t) = R\,i(t)$

متغیر عرضی: در این مدار ولتاژ یا اختلاف پتانسیل ← وسیله اندازه‌گیری در دو سر جزء قرار می‌گیرد
در مکانیک سرعت، شتاب و ...

متغیر عبوری: در این مدار جریان ← وسیله اندازه‌گیری را در مسیر متغیر قرار می‌دهیم.

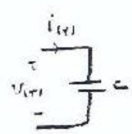
توان لحظه‌ای = متغیر عبوری × متغیر عرضی



$\Phi = Li \rightarrow$ (از تعریف L آمده است $L = \frac{\Phi}{i}$)

$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \rightarrow i(t) = \frac{1}{L}\int^{t} v(\lambda)\, d\lambda$

توان متوسط $= \frac{1}{2} L I^2$



رابطه اصلی: $Q = CV$

$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\lambda)\, d\lambda$

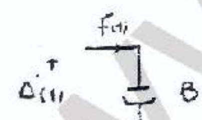
توان متوسط $= \frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2} qv = \frac{1}{2} C V^2$

توان متوسط در سلف و خازن صفر است.

* در مکانیک انتقالی:

متغیر عرضی: سرعت   متغیر عبوری: نیرو

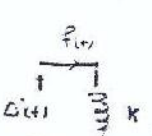
کمک فنر:



$F(t) = B\Delta$

$\Delta' = \frac{1}{B} F$

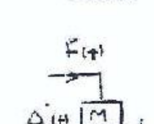
فنر:



$F = K\Delta x = K\int_{-\infty}^{t} \Delta'(\lambda)\, d\lambda$

$\Delta'(t) = \frac{1}{K}\frac{dF(t)}{dt}$ $\frac{1}{2} K \Delta^2$

جرم:



$f(t) = M\frac{d\Delta'(t)}{dt}$

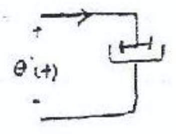
$\Delta'(t) = \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{t} f(\lambda)\, d\lambda$ $E_c = \frac{1}{2} M \Delta'^2$

معادل ترانسفورماتور در مکانیک انتقالی، اهرم با سر و سطح است.

* در مکانیک دورانی :

متغیر عرضی: سرعت زاویه‌ای $\theta'(t)$ متغیر عبوری: گشتاور $T(t)$

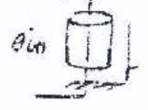
کمک فنر زاویه‌ای :



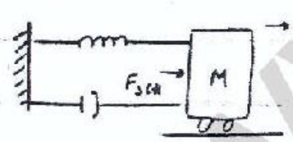
$$T = B\theta'$$
$$\theta' = \frac{1}{B} T$$

فنر زاویه‌ای :

$$T(t) = K\theta = K\int^{t} \theta'(\lambda)\, d\lambda$$
$$\theta'(t) = \frac{1}{K}\frac{d T(t)}{dt}$$
$$E = \frac{1}{2} K\theta^2$$

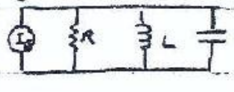


$$T(t) = J\frac{d\theta'(t)}{dt}$$
$$\theta'(t) = \frac{1}{J}\int_{-\infty}^{t} T(\lambda)\, d\lambda$$
$$E_c = \frac{1}{2} J \theta'^2$$



$$F_s(t) = M\frac{d\Delta'}{dt} + K\Delta + B\Delta'$$

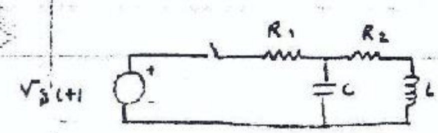
$$I_s = C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int v\, dt$$



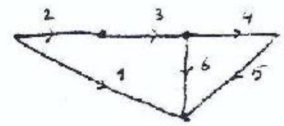
$C \longleftrightarrow M$ $\frac{1}{R} \longleftrightarrow B$ $\frac{1}{L} \longleftrightarrow K$

* گراف: مجموعه‌ای از شاخه‌ها و گره‌ها است که هر جزئی از سیستم را با یک شاخه متناظر کنیم.

گراف جهت دار: جهت متغیر عبوری را در شاخه‌ها که متناظر با اجزا است، مشخص می‌کنیم، جهت متغیر عرضی خود بخود تحمیل می‌شود (تا توان مصرف کننده مثبت باشد)



این مدار ۶ جزء دارد.



* $v_1(t) = V_s(t)$

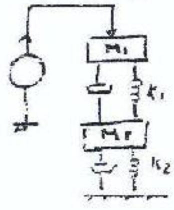
* $\begin{cases} i_2(t) = 0 & \text{اگر سوئیچ باز باشد.} \\ v_2(t) = 0 & \text{اگر سوئیچ بسته باشد.} \end{cases}$

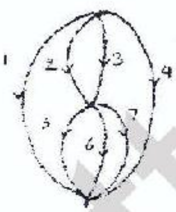
$v_3(t) = R_1 i_3(t)$

$v_4(t) = R_2 i_4(t)$

$v_5(t) = L \dfrac{d i_5(t)}{dt}$

$i_6(t) = C \dfrac{d v_6(t)}{dt}$





به ازای اجرام مستقل گره رسم می‌کنیم. یک گره هم با گره زمین در نظر می‌گیریم. از تمام اجرام مستقل یک شاخه به گره زمین می‌کشیم. گراف نشان می‌دهد که متغیر عبوری چگونه تقسیم می‌شود. مثلاً در اینجا $f_s(t)$ تقسیم می‌شود، قسمتی به فنر قسمتی به کمک فنر می‌رود و قسمتی هم صرف شتاب دادن به m_1 می‌شود. (شاخه ۴) می‌توانیم شاخه مربوطه را به گره وسطی هم ببریم (بجای زمین). ولی در آن صورت سرعت و شتاب و ... m_1 را نسبت به m_2 می‌سنجیم.

$f_1(t) = -f_s(t)$

$f_2(t) = B_1 \Delta_2(t)$ $\qquad$ $f_3(t) = K_1 \Delta_3(t)$

$f_4(t) = M_1 \dfrac{d \Delta_4(t)}{dt}$ $\qquad$ $f_5(t) = B_2 \Delta_5(t)$

$f_6(t) = K_2 \Delta_6(t)$ $\qquad$ $f_7(t) = M_2 \dfrac{d \Delta_7(t)}{dt}$

در علیه قربان اسماعیت را با دست خودت نابود کن. اسماعیل ابراهیم پسرش بود. اسماعیل تو شاید ...
شرحی

۷۶/۱۲/۱۸

اگر یک گراف دارای b شاخه و n گره باشد:

رابطه بین متغیر عرضی و طولی هر شاخه ← N معادله ← 2N متغیر

قانون تعمیم یافته KCL ← b-1 معادله مستقل

قانون تعمیم یافته KVL ← N-(b-1)

درخت: گراف متصلی که هیچ دوری ندارد.

هر گرافی که b گره دارد، b-1 شاخه دارد (درخت آن). آنهایی را که حذف کرده‌ایم link می‌گوییم. (link ← اتصال)

* قانون تعمیم یافته KCL:

گرافی شامل n شاخه جهت دار، گراف سیستم معرف یک سیستم است.

اگر $v_j(t)$ متغیر عبوری شاخه j ام باشد، داریم:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j v_j(t) = 0$$

$$a_j = \begin{cases} 0 & \text{اگر شاخه j ام با گره k ام تلاقی نداشته باشد} \\ +1 & \text{اگر شاخه j ام با گره k ام تلاقی داشته باشد و جهت آن به سمت خارج گره است} \\ -1 & \text{اگر شاخه j ام با گره k ام تلاقی داشته باشد و جهت آن به سمت داخل گره است} \end{cases}$$

مثال:

$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$

$a_5 = a_6 = a_7 = 0$

قانون عام گره‌ها: درختی گرافی که b تا گره دارد، b-1 شاخه دارد.

* قانون تعمیم یافته KVL (قانون عام حلقه‌ها)

مش حلقه‌ای است که در آن حلقه دیگری قرار ندارد. (می‌توان به روشهای دیگری نیز مش را تعریف کرد.) بجای معادله حلقه، معادله مش می‌نویسیم ← مرحله ساده‌سازی خود بخود انجام می‌شود. ۱۳

اگر گراف خطی ما به ساخه جهت دار داشته باشد. برای حلقه k ام داریم:

$$\sum_{j=1}^{7} b_j V_j = 0$$

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{وقتی شاخه j ام در حلقه k ام وجود ندارد.} \\ +1 & \text{وقتی شاخه j ام در حلقه k ام وجود دارد و جهت آن هم جهت جهت گردش است} \\ -1 & \text{وقتی شاخه j ام در حلقه k ام وجود دارد و جهت آن در خلاف جهت گردش است} \end{cases}$$

۵ : تمرین: برای سیستم قبلی کلیه اطلاعات را بنویسید. $b_3 = b_4 = b_6 = b_7 = 0$

برای حلقه سمت چپ $b_1 = 1$ $b_2 = b_5 = -1$

سری فوریه : آنالیز هارمونیک = آنالیز [illegible] (استفاده)

چرا از فوریه استفاده می کنیم؟

۱- اگر ورودیهای سیستم را به ورودیهای ویژه یک سیستم تبدیل کنیم، آن را بررسی کنیم، کار ما ساده‌تر است.

۲- بهترین راه برای یافتن پاسخ دائم steady state (بطور مستقیم) در سیستم خطی استفاده از تبدیلهای فوریه و لاپلاس است. چون به شرط اولیه نیاز ندارد و برای از $-\infty$ آغاز می شود.

۳- محاسبه کانولوشن و دکانولوشن در حوزه لاپلاس و فوریه آسانتر است (مثلاً زمانی که پاسخ و ورودی را داریم و تابع مربوط به سیستم را می خواهیم.)

* $\exp(j\omega t)$ ها توابع ویژه سیستمهای خطی هستند.

۴- سری فوریه از تقریبهایی برای بیان یک تابع است که کمترین خطا را دارد.

۵- ثابت کنید که در یک تابع متناوب وقتی روی یک دوره تناوب انتگرال می گیریم نقطه شروع مهم نیست.

داریم:

$$1. \int^{T} \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \end{cases}$$

2. $\int^{T} \cos(m\omega_0 t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\, dt = \begin{cases} T_0/2 & m=n \\ 0 & m\neq n \end{cases}$

3. $\int^{T} \sin(n\omega_0 t)\, \cos(m\omega_0 t)\, dt = 0$

4. $\int^{T} \sin(m\omega_0 t)\, dt = 0$

5. $\int^{T} \cos(m\omega_0 t) = \begin{cases} 0 & m\neq 0 \\ T_0 & m=0 \end{cases}$

6. $\int^{T} e^{j\omega_0 m t}\, dt = \begin{cases} 0 & m\neq 0 \\ T_0 & m=0 \end{cases}$

$x(t)$ تابع متناوب با دوره تناوب T_0 :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right)$$

برای محاسبه a_0 : طرفین را در dt ضرب می‌کنیم روی T_0 انتگرال می‌گیریم. a_0 مقدار متوسط یا dc تابع است

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{T_0} \int^{T_0} x(t)\, dt$$

اگر مقدار dc به سیگنال اضافه کنیم فقط a_0 را تغییر می‌دهد. (اگر بقیه ضرایب را هم تغییر بدهد، دلیل بر غیرخطی بودن سیگنال است ← روش تشخیص سیگنال غیرخطی)

برای محاسبه a_n : طرفین را در $\cos n\omega_0 t\, dt$ ضرب می‌کنیم. روی T_0 انتگرال می‌گیریم. انتگرال مجموع برابر مجموع انتگرالهاست. ... ($m\neq 0$ فراموش نشود)

$$\int^{T} x(t) \cos m\omega_0 t\, dt = \int^{T} a_m \cos m\omega t \cdot \cos n\omega t\, dt = \frac{T_0}{2} a_m$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{2}{T_0} \int^{T_0} x(t) \cos m\omega_0 t\, dt$$

$$\Rightarrow b_m = \frac{2}{T_0} \int^{T_0} x(t) \sin m\omega_0 t\, dt$$

- اگر $x(t)$ زوج باشد، b_n ها صفر است. به دو دلیل یکی از تعریف اوّلیه: چون $x(t)$ زوج است. طرف راست معادله هم باید زوج باشد. پس ضرایب سینوس صفر است. دوّم آنکه انتگرال تابع فرد صفر است.

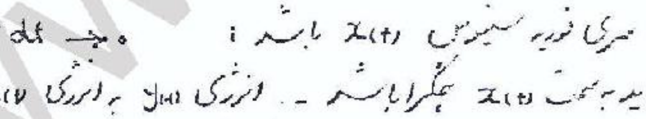
- اگر $x(t)$ فرد باشد، a_n ها صفر است.

∆ تساوی در معادله $x(t) = a_0 + \dots$ به چه معنایی است؟

۱. سری باید همگرا باشد ← برای هر تابع متناوبی نمی‌توان سری فوریه نوشت.
۲. در یک جهت باید به سمت $x(t)$ میل کند.
اگر x در تا پیوسته باشد ← $x(t) = a_0 + \sum a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$

شرایط دیریکله: ۱. تابع به صورت مطلق قابل انتگرال‌گیری باشد.
(شرط کافی برای ۲. تعداد ناپیوستگی‌ها در یک دوره محدود باشد
داشتن سری فوریه) ۳. تعداد ماکزیمم و مینیمم‌ها محدود باشد (← $\sin 1/x$ این شرط را ندارد)

اگر $y(t)$ سری فوریه سینوسی $x(t)$ باشد: $\int^{T_0} |y(t) - x(t)|^2 dt \to 0$
← سری باید به سمت $x(t)$ همگرا باشد. انرژی $y(t)$ به انرژی $x(t)$ میل می‌کند.

سری فوریه  یکسان است. تعداد محدود نقاط ناپیوسته در حاصل انتگرال ضرایب فوریه تأثیری ندارد. (فوریه شکل سمت چپ را اگر بنویسیم، به تابع پیوسته سمت راست می‌رسیم. / انرژی در این دو تابع یکسان است. چون نقاط ناپیوستگی عرضی ندارد.
و البته به شرط آنکه ناپیوستگی ضربه نباشد فوریه یکسان است.

می‌خواهیم سری این تابع نامتناوب ضرایب فوریه بنویسیم؟
به روش‌های مختلفی این تابع را به صورت متناوب درمی‌آوریم که ضرایب سری‌های متفاوتی به ما می‌دهند. ولی همه اینها در $[T_1, T_2]$ همه یکی هستند.

زیرا فوریه اثبات کرد اگر $x(t)$ پیوسته باشد، سری فوریه آن به سمت خودش میل می کند. در فاصله $[T_1, T_2]$ (فقط در این فاصله) تابع پیوسته است. حاصل انتگرال ضرایب یکتا است. بنابراین ضرایب در این فاصله به صورت یکتا محاسبه می شود.

۵ : برای موارد زیر سری فوریه حساب کنید:

۱ـ یکسوشده نیم موج تک فاز $\frac{1}{\pi} + \sum \frac{(-1)^n}{(n^2-1)\pi} \cos n\omega_0 t$

۲ـ یکسوشده تمام موج تک فاز $\frac{2}{\pi} + \sum \frac{4+2(-1)^n}{(n^2-1)\pi} \cos n\omega_0 t$

۳ـ یکسوشده تمام موج سه فاز

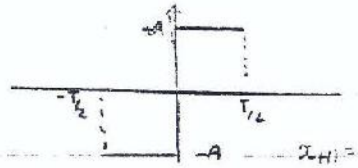
۴ـ یکسوشده نیم موج سه فاز

۵ـ موج مثلثی

۶ـ موج پرشی

۷ـ موج دندانه اره ای

مثال: تابع فرد ... $a_n = 0$



$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} A \sin n\omega_0 t \, dt = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{4A}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \cdots\right)$$

در این مثال:

دامنه هارمونیک زوج صفر و دامنه هارمونیک فرد، متناسب با شماره آن است. مثلا دامنه هارمونیک ۹۹ ام، $\frac{1}{99}$ ام دامنه اصلی است

و نیز داریم ... به ازای ($t = T/4$)

$$A = \frac{4A}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right)$$

جهان را چه آفریدید!

ـ جهان را این آفریدم!

به لطف کودکانه اعجاز...

۷۱/۱۲/۲۱

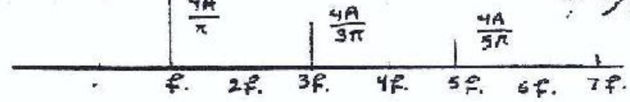
۶ $$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

اگر

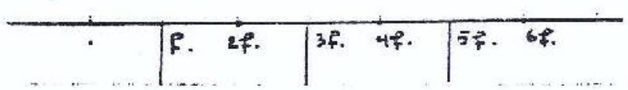
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = -\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n}$$

طیف یک طرفه دامنه موج مربعی با فرکانس f_0 و دامنه A :



طیف فاز موج مربعی با فرکانس f_0 و دامنه A



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega t}$$

طرفین را در $e^{-jn\omega}$ ضرب می‌کنیم، و از آن انتگرال می‌گیریم. ←

$$X_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$X_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos n\omega_0 t\, dt - \frac{j}{T_0}\int x(t)\sin n\omega_0 t\, dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_n = \frac{1}{2}a_n - \frac{j}{2}b_n & n > 0 \\ X_n = \frac{1}{2}a_n + \frac{j}{2}b_n & n < 0 \end{cases} \Rightarrow |X_n| = |X_{-n}|$$

از روش دیگر،

اگر $x(t)$ حقیقی : $X_n^* = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{jn\omega t}\, dt = X_{-n} \Rightarrow \begin{cases} |X_n| = |X_{-n}| \\ \angle X_n = -\angle X_{-n} \end{cases}$

⇐ طیف دامنه زوج و طیف فاز فرد است (اگر $x(t)$ حقیقی باشد)

اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد، X_n حقیقی و زوج است.

اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد، X_n تنها موهومی و فرد است (طیف فاز تنها $\pm\pi/2$ است)

سیگنالی "تقارن نیم موج فرد" دارد که $x(t - T/2) = -x(t)$

نتیجه: سیگنالی که تقارن نصف موج فرد دارد، هارمونیک زوج ندارد.

$$X_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int^{T_0/2} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt + \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$t_1 = t - T_0/2 \qquad = \frac{1}{T_0}\int^{T_0/2} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt + \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} -x(t_1)\, e^{-jn\omega_0 t_1}\, e^{-jn\omega_0 T_0/2}\, dt_1$$

$$= (1-e^{jn\pi})\, \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{2}{T_0}\int^{T_0/2} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt & \text{فرد } n \end{cases}$$

اگر بگوییم $x(t)$ دارای تقارن نصف موج زوج است، درحقیقت دوره تناوب را اشتباه درنظر گرفته ایم! دوره تناوب $T_0/2$ آن است.

۵: ضرایب

۵: داریم $\sum X_n e^{jn\omega_0 t} = A_0 + \sum A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$. رابطه بین θ_n ! X_n

و داشته X_n را با A_n بیابید. $\theta_n = \angle X_n$, $|X_n| = 1/2 A_n \quad n \neq 0$

$X_0 = A_0 = a_0$

* اگر مشتق $x(t)$ سری فوریه داشته باشد، رابطه ضرایب آن چگونه است؟

$y(t) = x'(t)$

$$x(t) = A_0 + \sum A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$y(t) = A_0' + \sum^{\infty} A_n' \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} Y_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$y(t) = x'(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (jn\omega_0) X_n e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow Y_n = (jn\omega_0) X_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |Y_n| = |n|\, \omega_0 |X_n| \\ \angle Y_n = \pm \pi/2 + \angle X_n \end{cases}$$

اگر $y(t) = x(t - t_0)$ باشد، $Y_n = X_n e^{-jn\omega_0 t_0}$

* درباره سیگنال متناوب داریم: $P_{av} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\, dt$

این تعریف همان تعریف قبلی است. ($\frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt$)

برای اثبات از این طرف به آن طرف می‌رویم $\frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|^2 dt \Rightarrow$

به استقرا: $T_1 = K T_0 \quad \rightarrow \quad K \rightarrow \infty$

(اگر از فرمول قبلی به این فرمول برسیم، اشکال پیش می‌آید چون T بزرگی که به بی‌نهایت میل می‌دهیم مضرب صحیحی از T_0 نیست)

می‌خواهیم نشان دهیم:

$$P_{av} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty}|X_n|^2$$

$$P_{av} = \frac{1}{T_0}\int x(t)\cdot x^*(t)\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} X_n^* e^{-jn\omega_0 t}\right) dt$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n^* \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{-\infty}^{+\infty}|X_n|^2$$

این همان مسئله‌ای است که در مدارها گفتیم: $P_{av} = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} A_n^2$

طیف دوطرفه: سری دوطرفه را پیدا کنیم.

۵ تعریف فضای برداری

مجموعه پدید آورنده. $\vec{\omega} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$

اگر $v_1, \dots, v_4$ مستقل خطی باشند، مجموعه برداری پایه را می‌سازند. اگر این بردارها متعامد خطی باشند، پایه مناسب‌تر است.

$\vec{\omega} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 + \alpha_4\vec{v}_4 \leftarrow$ مجموعه پدید آورنده

$$\int_T \varphi_m(t)\,\varphi_n^*(t)\, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

* فرض کنیم $v_4=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ ، $v_3=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}$ ، $v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ ، $v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ می خواهیم بردارهای یکه متعامد از آنها بسازیم: (بسط را)

$$\vec{v}_1 \Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} \Rightarrow \vec{u}_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$v_2' = v_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)\,u_1 \qquad \vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2'}{|\vec{v}_2'|} \qquad v_2' = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\ \sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\end{bmatrix}$$

$$v_3' = \vec{v}_3 - \left[(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3)\,\vec{u}_1 + (\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3)\,\vec{u}_2\right] \to \dots \qquad v_3' = \vec{v}_3 - [2\vec{u}_1 + 8\vec{u}_2]$$

$$\Rightarrow v_3' = \begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\4\sqrt{2}\\4\sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3-4\sqrt{2}\\5-4\sqrt{2}\end{bmatrix} \qquad \hat{u}_3 = \frac{\vec{v}_3'}{|\vec{v}_3'|}$$

$x(t)$ را تصویر کنیم

$$x(t)\ \text{تصویر} = y(t) = \sum_{K=1}^{N} \alpha_n \Phi_n(t)$$

معیار ما این است که انرژی توان خطا می‌نیمم شود. (معیار ما root mean square error است)

$$\mathcal{E}_N = \int_T |y(t) - x(t)|^2\, dt$$

$$\mathcal{E}_N = \int_T \left[x(t) - \sum_1^N d_n \Phi_n(t)\right]\left[x^*(t) - \sum_1^N d_n^* \Phi_n^*(t)\right] dt$$
$$= \int_T |x(t)|^2 dt + \underbrace{\sum_1^N \left| d_n - \int_T x(t)\, \Phi_n^*(t)\, dt \right|^2} - \sum_1^N \left| \int_T x(t)\, \Phi_n^*\, dt \right|^2$$

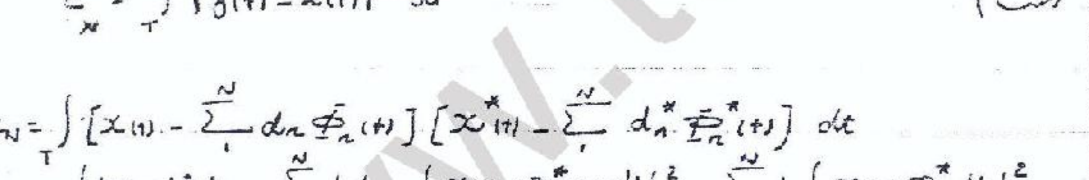
برای می‌نیمم کردن $\mathcal{E}_N$ فقط قسمت وسط را می‌توانیم بررسی کنیم (به d_n بستگی دارد)

$$\Rightarrow d_n = \int_T x(t)\, \Phi_n^*(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{N_{min}} = \int_T |x(t)|^2 dt - \sum_{n=1}^{N} |d_n|^2$$

$$\mathcal{E}_N \to 0 \Leftarrow N \to \infty$$

مثال:



الف - نشان دهید φ ها متعامد هستند. $\frac{1}{T}\int \varphi_m(t)\,\varphi_n^*(t)\,dt = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ 1 & m=n \end{cases}$

ب - برای $x_1 = \cos 2\pi t$ ، $x_2 = \sin 2\pi t$ ، $y(t)$ را طوری بیابید که خطای توان می نیمم شود.

در $m \neq n$:

$\int \varphi_1 \varphi_2\, dt = \int \varphi_2\, dt = 0$ → سطح زیر منحنی صفر است

$\int \varphi_1 \varphi_3\, dt = \int \varphi_3\, dt = 0$

$\int \varphi_2 \varphi_3\, dt = \int_0^{0.5} \varphi_3\, dt - \int_{0.5}^{1} \varphi_3\, dt = 0$

در $m = n$ ، سطح زیر منحنی ها یک است.

$x_1(t) = \cos 2\pi t$

$d_3 = \frac{2}{\pi}$

$\rightarrow \hat{x}(t) = \frac{2}{\pi}\varphi_3(t)$ $\qquad \varepsilon_n = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}$

$x_2(t) = \sin 2\pi t \quad 0 \le t < 1 \qquad d_1 = 0 \qquad d_2 = \frac{2}{\pi} \qquad d_3 = 0$

$y(t) = \varphi_1(t)d_1 + d_2\varphi_2(t) + d_3\varphi_3(t) = \ldots$

تمرین ۵ : آیا اگر سیگنال را شیفت بدهیم ، انرژی سیگنال خطا تغییری می کند.

گویند که در خانه دل ، بس چراغی

افروخته ...

۷۹,۱۲,۲۴

تبدیل فوریه :

$X(f)$ تبدیل فوریه $x(t)$ است.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

۵ : رابطه پایین را به وسیله تعریف بالا اثبات کنید.

شرط کافی برای اینکه انتگرال فوق همگرا باشد :

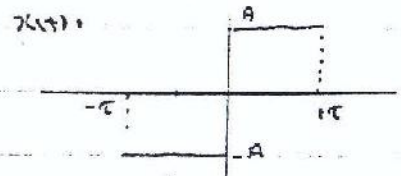
۱ - $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt$ محدود باشد.

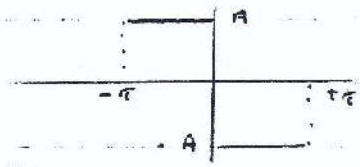
۲ - هر ناپیوستگی در $x(t)$ محدود باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\tau \, Sinc(f\tau) = x(0) = \Pi(t/\tau)\big|_{t=0} = A$$

۵ : تبدیل فوریه شکل زیر را بیابید.

$$x(t) = A\,\Pi\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right) - A\,\Pi\left(\frac{t+\tau/2}{\tau}\right)$$





$$\Rightarrow X(f) = A\tau e^{-j\pi f\tau} Sinc(f\tau) - A\tau e^{+j\pi f\tau} Sinc(f\tau) = \frac{A}{j\pi f}\left(1 - Cos(2\pi f\tau)\right)$$

تبدیل فوریه ضربه واحد 1 است (نتیجه مستقیم از تعریف $\delta(t)$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi ft}\,dt = e^{-j2\pi f(0)} = 1$$

$$\Rightarrow \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft}\,df$$

قضیه پارسوال :

۵ : $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t)\,dt \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, Y^*(f)\,df$$

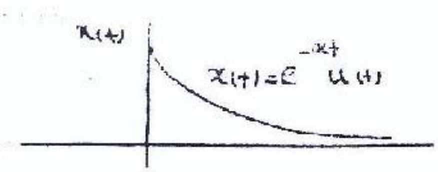
حالت خاصی از عبارت بالا قضیه پارسوال است.

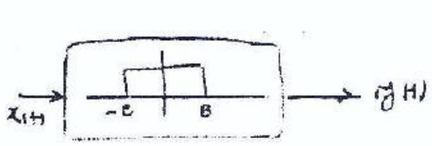
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,df$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,x^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)\, e^{-j2\pi ft}\,df\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\,dt}_{X(f)}\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)\, X(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,df$$

مثال : خروجی انرژی سیگنال فوق را هنگامیکه از یک سیستم پایین گذری گذرد حساب کنید. چند درصد انرژی سیگنال از سیستم عبور کرده.





$y(t) = x(t) * h(t)$ $\qquad Y(f) = X(f)\, H(f)$ ـ راه حل

$$E_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df$$

با استفاده از تابع ......

خواص تبدیل فوریه :

۱ـ خطی بودن $\qquad \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \longleftrightarrow \alpha_1 X_1(f) + \alpha_2 X_2(f)$

۲ـ شیفت زمانی $\qquad x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(f)$

مشاهده می شود که فقط طیف فاز را تغییر می دهد.

t_0 : تأخیر (delay) ← تأخیر مربوط به فاز است.

۳ـ مقیاس بندی ـ scaling $\qquad x(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X(f/\alpha)$

← در حوزه زمان فشرده ↔ در حوزه فرکانس گسترده.

۴ـ جابجایی ـ duality $\qquad X(t) \leftrightarrow x(-f)$

۴ـ مدولاسیون یا شیفت فرکانسی $\qquad x(t) e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow X(f - f_0)$

$$x(t) \cos \omega_0 t \longleftrightarrow \tfrac{1}{2} X(f-f_0) + \tfrac{1}{2} X(f+f_0)$$

۵ـ مشتق $\qquad \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j 2\pi f X(f)$

ـ اثبات کنید

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t} df \Rightarrow \dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, (j2\pi f)\, e^{j2\pi f t} df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f)\, e^{j2\pi f t} df \rightarrow \dot{x}(t) \leftrightarrow j 2\pi f\, X(f)$$

اثبات مشتق زمان:

$$F\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= x(t)e^{-j2\pi ft}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt}_{X(f)}$$

$|e^{-j2\pi ft}|$ یک است پس در حد $x(t)$ را بررسی می‌کنیم. طبق تعریف $x(t)\big|_{t\to\infty} = 0$!

۵. اگر رویهد تبدیل فوریه داشته باشد، $x(\infty)=0$ چرا؟ در اثبات مشتق یک نکته‌ای وجود دارد. چیست؟

۵: با استقرا درباره $\frac{d^n x}{dt^n}$ بدست آورید. $F(x^{(n)}(t)) = (j2\pi f)^n X(f)$

۶ ـ $x^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda \longleftrightarrow (j2\pi f)^{-1} X(f) + \frac{1}{2} X(0)\delta(f)$

$y(t) = x^{-1}(t) \Rightarrow x(t) = \frac{dy(t)}{dt}$

$X(f) = (j2\pi f)Y(f) \Rightarrow Y(f) = \frac{1}{j2\pi f} X(f)$ ← غلط ← چرا؟

اثبات:

$y(t) = x^{-1}(t) = u(t) * x(t)$

$Y(f) = \mathcal{F}[u(t)] \cdot X(f)$

$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2}\delta(t)$

$X(0)$ سطح زیر منحنی (انتگرال) $x(t)$ است (مقدار D.C سیگنال) ← سیگنالی که مقدار D.C ندارد، اثبات بالا درمورد آن غلط نیست

۷ ـ $z(t) = x(t) * y(t) \longleftrightarrow Z(f) = X(f) \cdot Y(f)$

اثبات: $Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) y(t-\lambda) e^{-j2\pi ft} d\lambda\, dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\lambda)\, e^{-j2\pi f t}\, dt\, d\lambda \qquad \text{با تعویض} \quad t-\lambda=u$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} y(u)\, e^{-j2\pi f u}\, e^{-j2\pi f \lambda}\, du\, d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, e^{-j2\pi f \lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} y(u)\, e^{-j2\pi f u}\, du\, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, e^{-j2\pi f\lambda}\, Y(f)\, d\lambda = X(f)\cdot Y(f)$$

جواب lowpass

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, y(t-\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f)\, e^{j2\pi f(t-\lambda)}\, df\, d\lambda \qquad AT\,\mathrm{Sinc}\, fT \longrightarrow A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f\lambda}\, e^{j2\pi f t}\, Y(f)\, df\, d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, e^{-j2\pi f \lambda}\, d\lambda}_{X(f)} \Big] e^{j2\pi f t}\, df$$

و نیز داریم:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \Rightarrow Z(f) = X(f)\, Y(f)$$

▲ استدلال دیگری پیدا کنید؟

$$z(t) = x(t)\cdot y(t) \longleftrightarrow Z(f) = X(f) * Y(f)$$

▲ : ادامه دهید اثباتش را.

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(f)\, e^{j2\pi f t}\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) * Y(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)\, Y(f-\lambda)\, d\lambda\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f-\lambda)\, e^{j2\pi f t}\, df\, d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} Y(u)\, e^{j2\pi\lambda t}\, e^{j2\pi u t}\, df\, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)\, e^{j2\pi\lambda t}\, y(t)\, d\lambda$$

$$= y(t) \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df = x(t)\, y(t)$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f')\, e^{j2\pi f' t}\, df'\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f')\, e^{j2\pi f' t}\, e^{-j2\pi f t}\, df'\, dt \qquad \lambda = f - f'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f-\lambda)\, e^{-j2\pi\lambda t}\, d\lambda\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f-\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi\lambda t}\, dt\, d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f-\lambda)\, X(\lambda)\, d\lambda = X(f) * Y(f)$$

دوباره آینه‌ها با تو مهربان شده اند ...

۱۹ فروردین ۸۰

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ -1 & t<0 \end{cases} = 2u_{-1}(t) - 1$$ ناپیوستگی از نوع پرش پله است

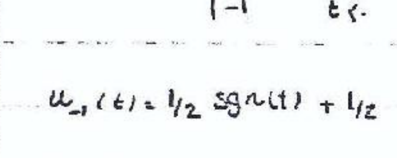
$$u_{-1}(t) = 1/2\, sgn(t) + 1/2$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon|t|} sgn(t) \longleftrightarrow F(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|t|} sgn(t)\, e^{-j\omega t} dt$$
$$= \int_{-\infty}^{0} -e^{\varepsilon t - j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon t} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{\varepsilon - j\omega} + \frac{1}{\varepsilon + j\omega}$$

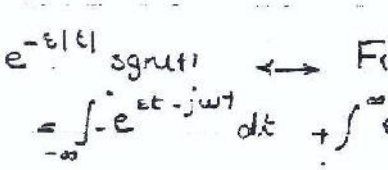
$$F(sgn(t)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{-1}{\varepsilon - j\omega} + \frac{1}{\varepsilon + j\omega}\right) = \frac{2}{j\omega} = 2(j\omega)^{-1}$$

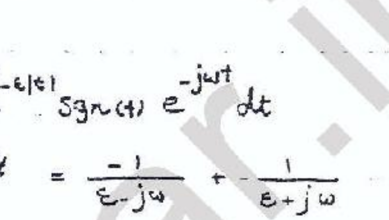
$$x(t) = u_{-1}(t) = 1/2\, sgn(t) + 1/2$$
$$\Rightarrow F[u_{-1}(t)] = (j\omega)^{-1} + 1/2\, \delta(f)$$

پالس مثلثی : $x(t) = \Lambda(t/\tau)$ ۳ نقطه شکست



۳ نقطه ناپیوستگی





با نگاه ساده می توان گفت که چون تابع حقیقی و زوج است ، فوریه آن حقیقی و زوج است
و نیز مقدار آن در نقطه صفر سطح زیر منحنی $(A\tau)$ است .

$$x''(t) = A/\tau\, \delta(t+\tau) - 2A/\tau\, \delta(t) + A/\tau\, \delta(t-\tau)$$
$$X_2(f) = \tau\, \mathrm{Sinc}^2(f\tau)$$
$$X(f) = \frac{X_2(f)}{(j2\pi f)^2} = A\tau\, \mathrm{Sinc}^2(f\tau)$$

پالس مثلثی از کانولوشن دو پالس مربعی بدست می‌آید ⇐ فوریه آن از ضرب دو تابع پالس مربعی بدست می‌آید. پس از این راه هم می‌توان فوریه پالس مثلثی را بدست آورد (بهتر است A را بگذاریم کنار، با دامنه ۱ حساب کنیم و از قضیه scaling استفاده کنیم.)

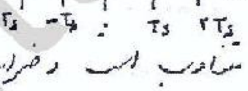
۵: فوریه بدست آورید. $x_2(t)=\cos(\omega_0 t)$ $\quad x(t)=\sin\omega_0(t)$

تمام اطلاعات موجود در یک موج متناوب در یک دوره تناوب آن موجود است.
پس ضرایب سری فوریه موج را می‌توان از روی تبدیل فوریه primitive آن نوشت.

$$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}P(t-mT) = P(t) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(t-mT)$$

برای یافتن ضرایب سری فوریه $x(t)$، فوریه $\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-mT)$ را بدست می‌آوریم. این تابع هیچکدام از شرطهای کافی داشتن فوریه را ندارد.

$$y_s(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-mT_s)$$



$y_s(t)$ یک تابع متناوب است و ضرایب سری فوریه را می‌توان برای آن نوشت.

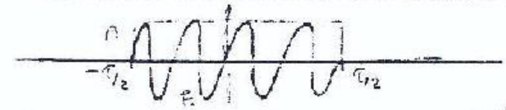
$$y_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Y_n e^{jn\omega_s t} = f_s\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{jn\omega_s t}$$
$$\Rightarrow F(y_s(t)) = f_s\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(f-nf_s)$$

تبدیل فوریه $x(t)$ (متناوب) از ضرب $P(f)$ و $F(y_s(t))$ بدست می‌آید.
حالا ضرایب سری فوریه $x(t)$ را بدست می‌آوریم

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_n e^{j\omega_s n t} \rightarrow F(x(t))=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_n\,\delta(f-nf_s)$$

$$x(t)=P(t) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(t-mT) \Rightarrow F(x(t)) = P(f)\cdot\sum_{m=-\infty}^{+\infty}f_s\,\delta(f-mf_s)$$
$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}f_s\,P(nf_s)\,\delta(f-mf_s)$$
$$\Rightarrow X_n = f_s\,P(nf_s)$$

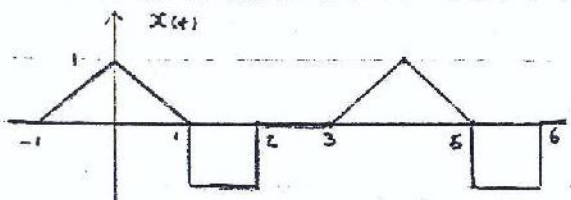
تبدیل فوریه پالس زیر را بدست آورید.



$$\rightarrow A\Pi(t/\tau)\cos(2\pi f_0 t) = x(t)$$

$$X(f) = A\tau\,\mathrm{Sinc}(f\tau) * \left[\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right]$$

$$= \frac{A\tau}{2}\mathrm{Sinc}(f-f_0)\tau + \frac{A\tau}{2}\mathrm{Sinc}(f+f_0)\tau$$



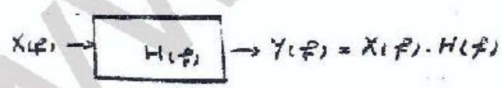
$$P(t) = \Lambda(t) - \Pi\left(\frac{t-1.5}{1}\right)$$

$$\Rightarrow P(f) = \mathrm{Sinc}^2(f) - e^{-j3\pi f}\,\mathrm{Sinc}(f)$$

$$X_n = f_s P(nf_s) = \frac{1}{4}P\left(\frac{1}{4}n\right)$$

$$\Rightarrow X_n = 0.25\left[\mathrm{Sinc}^2(0.25n) - e^{-j0.75\pi n}\,\mathrm{Sinc}(0.25n)\right]$$

۸۰/۱/۲۱



مشخصه فرکانسی سیستم:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \qquad H(f) = F[h(t)]$$

در سری و انتگرال فوریه صدق می‌کند.

$$|Y(f)| = |X(f)|\,|H(f)|$$

$$\angle Y(f) = \angle X(f) + \angle H(f)$$

برای سری می‌توان نوشت:

$$|Y(nf_0)| = |X(nf_0)|\cdot|H(nf_0)|$$

$$|Y_n| = |X_n|\,|H(nf_0)|$$

$$\angle Y_n = \angle X_n + \angle H(nf_0)$$

پاسخ سیستم به ورودی $x(t)=Ae^{j\omega t}$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(t-\lambda)\,h(\lambda)\,d\lambda = A e^{j\omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, e^{-j\omega\lambda}\, d\lambda}_{H(f)}$$

روشهای بدست آوردن تبدیل فوریه پاسخ ضربه:

۱ـ تبدیل فوریه پاسخ ضربه را مستقیماً محاسبه می‌کنیم.

۲ـ استفاده از $\frac{Y(f)}{X(f)}$ بعنوان پاسخ فرکانسی.

۳ـ نوشتن پاسخ فرکانسی از روی معادله دیفرانسیل.

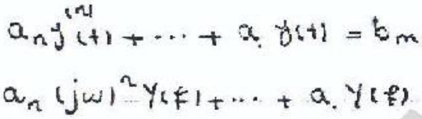
$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \cdots + b_0 x(t)$$

$$a_n (j\omega)^n Y(f) + \cdots + a_0 Y(f) = b_m (j\omega)^m X(f) \cdots + b_0 X(f)$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots}$$

۴ـ استفاده از آنالیز فازوری. نسبت خروجی به ورودی را در حوزه فازبردار می‌نویسیم.
(حل مداری)

سیستم بدون اعوجاج (distortionless):

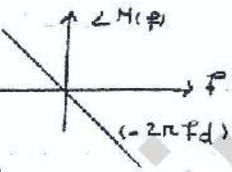


$$\frac{V_2}{V_1} = k$$

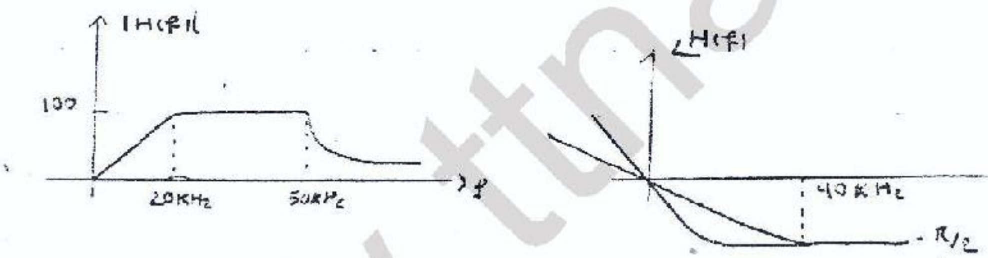
سیستم بدون اعوجاج به این صورت است: ورودی $x(t) \to K x(t-t_d)$ خروجی

$$\Rightarrow H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{K e^{-j\omega t_d} X(f)}{X(f)} = K e^{-j\omega t_d}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(f)| = K \\ \angle H(f) \to \text{خطی} \quad -\omega t \pm \pi \end{cases}$$



پس سیستمی بدون اعوجاج است که فاز آن خطی و دامنهٔ آن ثابت وجود دارد، و چنین سیستمی که از $f=-\infty$ تا $+\infty$ چنین خاصیتی داشته باشد، نداریم. پس برای ما مهم است که این خواص در محدودهٔ فرکانسی پهنای باند $X(f)$ وجود داشته باشند.



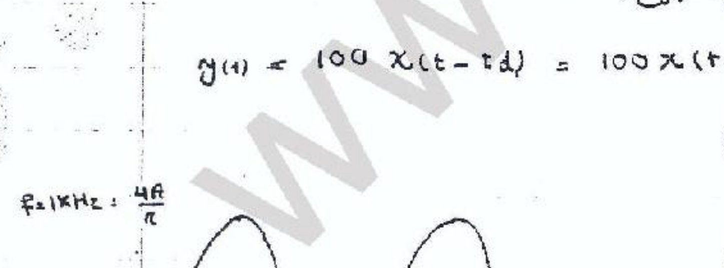
پس این سیستم در فاصله $(20-40)$ Hz بدون اعوجاج است.

gain این سیستم 100 است.

و تأخیر این $\frac{-\pi_a}{50} / -2\pi = \frac{1}{160}$ (ms) است.

$$y(t) = 100\, x(t-t_d) = 100\, x\left(t - \frac{1}{160}\text{ms}\right)$$

در فاصلهٔ محدوده 0-20 اعوجاج دامنه داریم. ورودی موج مربعی به سیستم می‌دهیم. زمانی که مثلاً $f=1KHz$ است. هارمونیکهای اول و سوم در شکل کشیده شده است. داریم:



$$f=1KHz \Rightarrow A = 5 \times \frac{4A}{\pi} = 20A/\pi$$

$$f=3KHz \Rightarrow A = 5 \times 3 \times \frac{4A}{3\pi} = 20A/\pi$$

دامنه خروجی برای هارمونیکهای اول و 3 یک جور شده. و در نتیجه خروجی مشابه ورودی نخواهد بود. یعنی خروجی موج مربعی نخواهد بود.

در محدوده 50-40 اعوجاج فاز داریم. $f_0 = 11KHz$

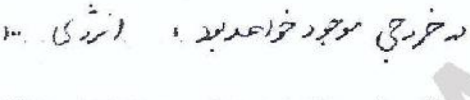
دامنه تغییر نکند، ولی فاز مثلاً هارمونیک سوم تغییر کند، مجموع حاصل دیگر $x(t)$ سابق نخواهد بود.

اعوجاج دامنه و فاز ← هارمونیکها و دامنه‌ها دستخوش تغییر می‌شوند.

اعوجاج غیرخطی: $y(t) = K x^2(t)$

پهنه بزرگ می‌شود $\therefore$ مثلاً $Y(f) = K \underbrace{X(f)}_{\text{مربع}} * \underbrace{X(f)}_{\text{مربع}}$

تست تقویت کننده با ورودی موج مربعی :



اگر گین، گین ولتاژ باشد:

در تقویت کننده غیر ایده آل که صد درصد انرژی در خروجی موجود خواهد بود، انرژی 10 وات خواهد بود.

* ممکن است گین، گین توان باشد.

اگر تقویت کننده غیر ایده آل باشد از هارمونیک اول تا 49 دامنه‌ها را حساب می‌کنیم و توان را محاسبه می‌کنیم.

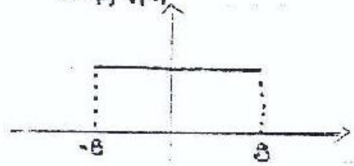
$X(f) \to \boxed{\quad} \to Y(f)$

در اینجا باید H(f) را باید پیدا کنیم و سپس آنرا سنتز کنیم. در حقیقت در اینجا به دیکانولوشن نیاز داریم. برعکس گذشته که ورودی و پاسخ ضربه را داشتیم و تجزیه و تحلیل می کنیم یعنی جواب را می یابیم.

فیلتر ایده آل:

بیشتر فیلترها در حوزه فرکانس بیان و بررسی می شوند.
فیلتر ایده آل بایستی در محدوده گذر باید بدون اعوجاج باشد.

۱ـ فیلتر پایین گذر:

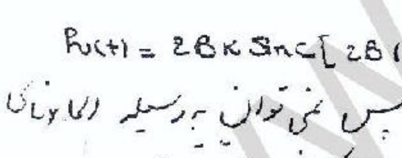


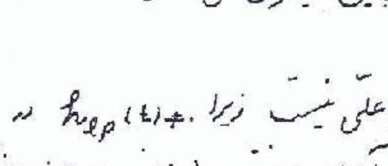
اگر ورودی در محدوده گذر باشد خروجی $Kx(t-t_0)$ خواهد بود و اگر نباشد خروجی صفر باشد.
ولی چنین فیلتری نمی توان ساخت.

$$h_{LP}(t) = 2BK\,\mathrm{Sinc}[2B(t-t_0)]$$

این علّی نیست زیرا $h_{LP}(t) \neq 0$ در زمانهای منفی. پس نمی توان به وسیله المانهای فیزیکی آنرا ساخت. (یعنی در حوزه فرکانسی نمی توان لبه فرکانسی راست)

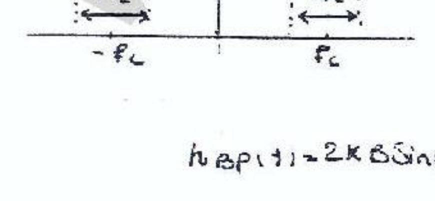
۲ـ فیلتر میان گذر:

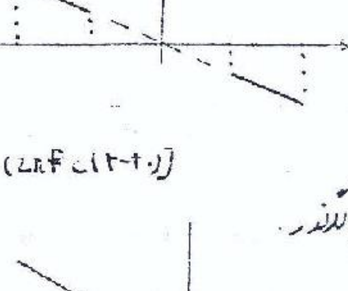




$$h_{BP}(t) = 2KB\,\mathrm{Sinc}[B(t-t_0)]\cos(2\pi f_c(t-t_0))$$

۳ـ فیلتر بالا گذر:





$$h_{hp}(t) = \delta(t) - 2BK\,\mathrm{Sinc}\,[2B(t-t_0)]$$

۴- فیلتر میان گذر

$$h(t) = \delta(t) - 2KB\;\mathrm{Sinc}\,[B(t-t_0)]\,\mathrm{Cos}\,2\pi f_c(t-t_0)$$

* پدیده windowing

از یک پنجره ای یک سری فوریه را نگاه می کنیم. (تعداد جملات محدود) مثل اینکه یک پنجره مربعی در ... ضرب کنیم. پنجره مربعی sinc دارد در حوزه فرکانس. پس به شکل موج ما overshoot می دهد. اندازه overshoot ها به تعداد جملات انتخاب شده بستگی ندارد ولی فرکانس آنها به تعداد جملات بستگی دارد.

* درجه همگرایی roll off

نشان دهنده شدت افتادن طیف است. (ایده ای از سرعت رفتن به صفر به ما می دهد به ازای بزرگ شدن فرکانس.)

می توان تبدیل فوریه را پیدا کرد و بعد دید که تابع بدست آمده هم اندازه چه $\frac{1}{x^n}$ ای است.

راه ساده تر، از $x(t)$ مشتق می گیریم. اگر مشتق $(k+1)$ ام ضربه شد، مرتبه همگرایی سیستم $(k+1)$ است.

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\frac{d^{k+1}x(t)}{dt^{k+1}} = \sum (jn\omega_0)^{k+1} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\rightarrow |X_n| = \frac{c}{|n\omega_0|^{k+1}}$$

این برای سری است.

در حالت کلی بدست می آید: $\frac{c'}{f^{k+1}}$

پالس مربعی درجه: ۱ پالس مثلثی درجه: ۲

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\frac{1}{t-\lambda}\,d\lambda$$

$$\hat{X}(f) = X(f)\cdot[-j\,\mathrm{sgn}(f)]$$

$$\mathrm{sgn}(t) \longleftrightarrow (j\pi f)^{-1} \xrightarrow{\text{از خاصیت دوگانی}} \; : \; F\left[\frac{1}{\pi t}\right] = -j\,\mathrm{sgn}(f)\,X(f)$$

سپس به راحتی ثابت می‌شود :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(t)|^2\,dt$$

و

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\hat{x}(t)\,dt = 0$$

درحقیقت اگر از سیگنالی تبدیل هیلبرت بگیریم، طیف دامنه‌اش تغییر نمی‌کند، فقط فاز تغییر می‌کند. در برای $f>0$ فاز $-\pi/2$ و برای $f<0$، فاز $\pi/2$ تغییر فاز می‌دهد.

مثلاً اگر یک سیگنال متناوب داشته باشیم بسط فوریه‌اش را بنویسیم :

$$x(t) = A_0 + \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

خواهیم داشت:

$$\hat{x}(t) = A_0' + \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n - \pi/2)$$

پیدا کنید

تابع تحلیلی است که در ناحیه تعریفش، در هر نقطه در همسایگی آن مشتق‌پذیر باشد

شرط کوشی - ریمان :

$$x(t) = u(t) + jv(t) \qquad \partial u/\partial\sigma = \frac{\partial v}{\partial\omega}$$

$$t = \sigma + j\omega \qquad \partial u/\partial\omega = -\partial v/\partial\sigma$$

به زبان ساده‌تر بخش حقیقی و موهومی تعریف تابع به هم وابسته اند.

سیگنال تحلیلی است که طیفش یک طرفه باشد (مثبت باشد یا در مبدأ به هم شیفت — به قضیه مدولاسیون توجه شود.)

نشان می‌خواهیم که بخش موهومی و حقیقی چنین سیگنالی به هم مرتبط هستند.

$$z(t) = x(t) + j\, y(t)$$

$$Z(f) = 0 \;:\; f<0$$

$$Z(f) = X(f) + j\, Y(f) \Rightarrow \underset{Z(f)=0}{f<0} \Rightarrow \begin{cases} Y(f) = +j\, X(f) & f<0 \\ Y(f) = -j\, X(f) & f>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(f) = -j\, \mathrm{sgn}(f)\, X(f)$$

$$\Rightarrow y(t) = \hat{x}(t)$$

اگر برای $Z(f) = 0 \;:\; f>0$ حساب کنیم $y(t) = -\hat{x}(t)$

ثابت کنید: $\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$

سیگنالی علی است که برای $x(t) = 0 \;:\; t<0$. پس بخش موهومی و حقیقی مشخصه فرکانسی سیگنال علی به هم با هم وابسته اند.

در سیستم علی داریم: $h_e(t) = h_e(t) + \mathrm{sgn}(t)\, h_e(t)$

$$H(f) = H'(f) + \frac{1}{j\pi f} * H'(f) = H'(f) - j\left[\hat{H}'(f)\right]$$

$h(t)$ حقیقی و زوج ⇐ $H'(f)$ حقیقی و زوج ⇐ در بخش موهومی $H(f)$ که $\hat{H}'(f)$ صرفاً حقیقی است که نشان می‌دهد بخش حقیقی و موهومی $H(f)$ به هم مربوط هستند.

تبدیل لاپلاس:

آنالیز فوریه به ما بخش steady state پاسخ را می‌دهد. تعریف لاپلاس به ما کمک می‌کند که بخش گذرای پاسخ را هم ببینیم. / در تبدیل لاپلاس نسبت به تبدیل فوریه یک ترم همراه کننده $e^{-\sigma t}$ خواهیم داشت، پس کلاس سیگنال‌هایی که تبدیل لاپلاس دارند بزرگتر از

کلاس سیگنالهایی است که تبدیل فوریه دارند / لاپلاس شرایط اولیه را به صورت مناسب بر ما می دهد.

قطره بودن تا کی؟!

۷۸۰/۱/۲۸

فرض می کنیم انتگرال علی است . در تبدیل فوریه بجای $j\omega$ می گذاریم $s=\sigma+j\omega$

$$X(\sigma+j\omega) = \int_{0}^{\infty} x(t)\, e^{-\sigma t}\, e^{-j\omega t}\, dt = F[x(t)e^{-\sigma t}]$$

علی بودن

پس تبدیل لاپلاس یک طرفه (یا دوطرفه برای سیگنال علی) را تعریف می کنیم:

$$L[x(t)] \triangleq X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt \qquad s=\sigma+j\omega$$

$$x(t)\, e^{-\sigma t} = F^{-1}[X(\sigma+j\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma+j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

F به s تبدیل شده

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds$$

نواحی از صفحه s که در آن این انتگرال (تعریف لاپلاس) همگراست، ناحیه همگرایی نامیده می شود. ROC

تبدیل لاپلاس بدست آورید:

$x(t)=1$ چون لاپلاس یکطرفه است، $x(t)$ همان $u(t)$ است.

$$L(1) = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\, dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{s} - 0 = \frac{1}{s}$$

$|e^{-st}| = |e^{-\sigma t}| \times 1$ زیرا $e^{-(\sigma+j\omega)t}$ قطعاً تابع $e^{-\sigma}$ است.

$\Rightarrow$ if $Re[-s] < 0$ then $e^{-st} \to 0$

ناحیه همگرایی $\sigma > 0$

... نیست. اگر بگذاریم $\sigma=0$، یعنی تبدیل فوریه را بخواهیم، این انتگرال تبدیل فوریه را به ما نمی دهد)

انتگرال تبدیل لاپلاس $x(t)$ مطلقاً همگراست ، اگر برای $c>\sigma$ داشته باشیم : $\int_L^{\infty} |x(t)|\, dt \leq k < \infty$ و L عدد مثبت

و نیز داشته باشیم :

$$|x(t)| \leq A e^{ct} \qquad t > L$$

پس اگر $|x(t)|$ سریعتر از نمایی رشد نکند ، $x(t)$ تبدیل لاپلاس دارد.

کمترین مقدار c که رابطه را برقرار کند ، ناحیه همگرایی را مشخص می کند. این رابطه برای ما مشخص می کند که ۱- ناحیه همگرایی پیوسته است.

۲- ناحیه همگرایی از جایی موازی محور $j\omega$ تا $+\infty$ می رود (right-sided همیشه)

۳-

ناحیه همگرایی شامل هیچ قطبی نیست. قطب جایی است که انتگرال همگرا نیست!

در مثال بالا $\quad |1| \leq \overset{=1}{A} e^{0 \times t} = 1 \rightarrow \sigma > 0$

$x(t) = t^{-1/2} \qquad |t^{-1/2}| < 1 \cdot e^{t} \qquad \sigma > 0$

برای این کار تحقیق در ... ما در نظر می گیریم که $t > 1$ (به یاد داریم که اگر از یک سری دلخواه تعداد محدودی جمله حذف کنیم ، در همگرایی آن تغییری ایجاد نمی شود)

$x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$

روش ۱: $|e^{-\alpha t}| \times 1 < 1 \times e^{ct} \rightarrow c = Re(-\alpha) \rightarrow \sigma > -Re(\alpha)$

روش ۲: $\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st}\, dt = \frac{-1}{s+\alpha} e^{-(s+\alpha)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha} \qquad \sigma > -Re(\alpha)$

شرط اینکه سیگنال علّی باشد ، این است که ناحیه همگرایی شامل ∞ باشد.

$x(t) = \delta(t)$

$\int^{\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = 1$ تمام صفحه s

قضایای اصلی تبدیل لاپلاس :

* خطی بودن: $1-\alpha_1 x_1(t) + \beta_1 x_2(t) \longrightarrow \alpha_1 L(x_1(t)) + \beta L(x_2(t))$

* ناحیه همگرایی: اشتراک دو ناحیه (به مرزها دقت می‌شود)

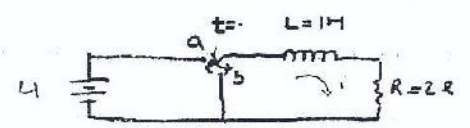
* مشتق: 2. $\frac{d(x(t))}{dt} \rightarrow sX(s) - x(0^-)$

$$L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}dt \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} sX(s) - x(0^-)$$

3. $\frac{d^n(x(t))}{dt^n} \rightarrow s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x'(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-)$

* ناحیه همگرایی خودش است. (به مرزها دقت شود)

مثال:



$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0$

$i(t=0^-) = \frac{4}{2} = 2A$

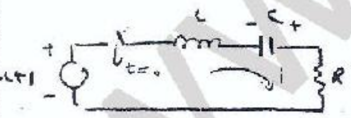
$\rightarrow LsI(s) - Li(0^-) + RI(s) = 0 \rightarrow (Ls+R)I_s = Li(0^-)$

$\rightarrow I_s = \frac{2}{s+2} \rightarrow i(t) = 2e^{-2t} \quad t>0 \rightarrow \begin{cases} 2 & t<0 \\ 2e^{-2t} & t>0 \end{cases}$

* انتگرال: * ناحیه همگرایی = ?

4. $L\left[\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda\right] = \frac{X(s)}{s} + \frac{x^{(-1)}(0^-)}{s}$

اگر انتگرال را از 0 بگیریم و x را در آن نقطه پیوسته در نظر بگیریم، جمله دوم را نخواهیم داشت.



$V_c(0^-)$ را داریم. $i(0^-) = 0$

$$x(t) = L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\lambda)d\lambda + Ri(t)$$

$$LsI(s) - 0 + \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{1}{Cs}\int_{-\infty}^{0^-} i(\lambda)d\lambda + RI_s = X(s)$$

داریم $q(0^-) = \int_{-\infty}^{0^-} i(\lambda)d\lambda$ ، $-V(0^-) = \frac{q(0^-)}{C}$ با توجه به پلاریته $V_c(0^-)$ که نداشتیم جهت جریانی که در نظر گرفتیم

* شیفت فرکانسی: ناحیه همگرایی؟

5. $x(t)e^{-\alpha t} \longrightarrow X(s+\alpha)$

* ناحیه همگرایی: $ROC = R - Re\{\alpha\}$ به سمت راست شیفت داده می‌شود. اگر $\alpha = j\omega \Rightarrow ROC = R$

ط. تبدیل لاپلاس پیدا کنید:

$$\cos\omega_0 t \rightarrow = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\sin\omega_0 t \rightarrow = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \rightarrow \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t \rightarrow \frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

$$e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t \rightarrow \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

$$t\, e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t \rightarrow$$

$$t\, e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t \rightarrow$$

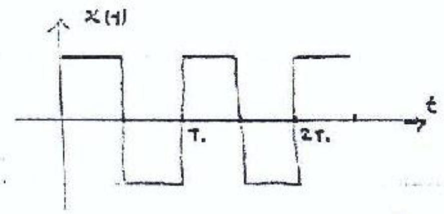
* شیفت زمانی.

$$6.\quad x(t-t_0)\,u(t-t_0) \longrightarrow e^{-st_0}X(s) \qquad *\ ROC = R$$

تندوبی می خورد دفتر سر بچه ها ...

۷۶/۲/۲

- پیدا کردن تبدیل لاپلاس موج مربعی:



$$x(t) = u(t) - 2u(t - T_0/2) + 2u(t - T_0) - \dots$$

$$X(s) = \frac{1}{s}\left(1 - 2e^{-sT_0/2} + 2e^{-sT_0} - \dots\right)$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{2}{1+e^{-sT_0/2}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{s}\,\frac{1-e^{-sT_0/2}}{1+e^{-sT_0/2}}$$

ناحیه همگرایی

$$|e^{-sT_0/2}| < 1 \Rightarrow \sigma > 0$$

* کانولوشن:

$$7.\quad y(t) \triangleq x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow Y(s) = X_1(s)\,.\,X_2(s)$$

ناحیه همگرایی: اشتراک نواحی همگرایی x_1 و x_2

$$Y(s) = \int_0^\infty y(s)\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x_1(\lambda)\, x_2(t-\lambda)\, d\lambda\right) e^{-st}\, dt$$

$$t - \lambda = \eta$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty x_1(\lambda)\, x_2(\eta)\, d\lambda\; e^{-s(\eta+\lambda)}\, d\eta$$

$$= \int_0^{\infty} x_1(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \int_0^{\infty} x_2(\eta) e^{-s\eta} d\eta$$

حدود تغییرات η از $(-\lambda)$ تا ∞ است. λ عدد مثبتی است (از ۰ تا ∞)
چون سیستم علی است حدود از ۰ تا ∞ می‌شود.

* پس: $\quad$ 8. $y(t) \triangleq x_1(t) * x_2(t) \longrightarrow Y(s) = X_1(s) \cdot X_2(s)$

8. $\quad t\, x(t) \longleftrightarrow -\dfrac{dX(s)}{ds}$

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t)\, dt \rightarrow -\frac{dX(s)}{ds} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, t\, x(t)\, dt$$

• ناحیه همگرایی: σ:

* 9. $\quad \dfrac{x(t)}{t} \longleftrightarrow \displaystyle\int_s^{\infty} X(\tilde{s})\, d\tilde{s}$

* تابع متناوب: $\quad$ 10. $f(t) = f(t+T) \longleftrightarrow \dfrac{\int_0^T f(t) e^{-st} dt}{1 - e^{-sT}}$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t)\, dt + \cdots$$

$$t_1 = t - T$$

$$= \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + e^{-sT} \int_0^T e^{-st_1} f(t_1)\, dt_1 + \cdots$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \cdots) \underbrace{\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt}$$

این جمله تبدیل لاپلاس primitive است که با انتگرال از ۰ تا T می‌شود
چون بقیه جمله‌ها جابجا می‌شود

$$\Rightarrow L[f(t)] = \frac{\int_0^T f(t) e^{-st} dt}{1 - e^{-sT}}$$

* ناحیه همگرایی: $\sigma > 0$

درحقیقت ناحیه همگرایی اشتراک $\sigma > 0$ و جایی است که $\int_0^T f(t) e^{-st} dt$ همگرا است.

۵ : تبدیل لاپلاس موج مربعی را بدست آورید و بوسیله آن تبدیل لاپلاس موج مثلثی را پیدا کنید.

$$\text{موج مربعی} = \frac{1}{s}\,\frac{(1-e^{-sT/2})^2}{1-e^{-sT}} = \frac{1}{s}\,\frac{1-e^{-sT/2}}{1+e^{-sT/2}}$$

$$\text{موج مثلثی} = \frac{1}{s^2}\,\frac{1-e^{-sT/2}}{1+e^{-sT/2}} + 0$$

۱۲. $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$

اینجا یعنی $|s| \to \infty$ ولی این روش نوشتن هم درست است.

زیرا برای تابع موهومی که حد یا مشتق دارد، مستقل از مسیری که انتخاب می کنیم داریم:

وقتی $s \to s_0$ می رود، $f(s)$ به سمت $f(s_0)$ می رود. پس اگر s را حقیقی در نظر بگیریم هم $f(s)$ به سمت $f(s_0)$ میل خواهد کرد.

حالت اول برای اثبات: $x(t)$ تابع پیوسته در نقطه $t=0$ است.

فرض $\leftarrow$ ۱. ناپیوستگی $\frac{dx(t)}{dt}$ حداکثر از نوع پله است.
۲. $x(0^-) = x(0^+)$

ونیز داریم $\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s) - x(0^-)$

$$\lim_{s\to\infty}\left[\int_{0}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt\right] = \lim_{s\to\infty}\left[sX(s) - x(0^-)\right]$$

بشرطی که ∞ در ناحیه همگرایی باشد

هر عدد محدودی هم باشد برای ما مهم نیست

$$\lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt = \lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{0^+}\frac{dx(t)}{dt}\,(\;)\,dt + \int_{0^+}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-\infty}dt = 0$$

حالت دوم: وقتی $x(t)$ تابعی ناپیوسته در نقطه $t=0$ است.

$$\lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{0^+}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt = x(t)\Big|_{0^-}^{0^+} = x(0^+) - x(0^-)$$

اگر (Δ) ثابت کنیم:

$$\lim_{\substack{s\to\infty\\ t\to 0}} e^{-st} = 1$$

قضیه مقدار نهایی:

۱۳. $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$

از این قضیه می فهمیم که ناحیه همگرایی نیم صفحه راست است و قطبی در آن نداریم.

$$\lim_{s\to 0}\int_{0^-}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}\underbrace{e^{-st}}_{1}dt=\lim_{s\to 0}\left[sX(s)-x(0^-)\right]$$

$$\hookrightarrow \lim_{t\to\infty}x(t)-\cancel{x(0^-)}=\lim_{s\to 0}sX(s)-\cancel{x(0^-)}$$

* خاصیت scaling یا مقیاس‌بندی   13. $x(\alpha t)\longleftrightarrow \frac{1}{\alpha}X\left(\frac{s}{\alpha}\right)\quad \alpha>0$

$\alpha>0$ است زیرا ما لاپلاس یکطرفه می‌گیریم و فقط قسمت مثبت محور زمان را در نظر می‌گیریم.

ناحیه همگرایی $ROC=\frac{R}{\alpha}$

* تبدیل لاپلاس حاصلضرب را پیدا کنید.   14. $x_1(t)\cdot x_2(t)\longleftrightarrow$

عکس تبدیل لاپلاس :

بیشتر توابعی که ما از آنها عکس لاپلاس می‌گیریم به صورت $\frac{P(s)}{Q(s)}$ است. زیرا تابع تبدیل $H(s)$ (که از معادله دیفرانسیل بدست آمده) به صورت کسری است. و ورودی‌های ما هم که به صورت $\sin(t)$ یا e^{-at} یا $u(t)$ است. که لاپلاس کسری دارند $\Rightarrow$ تبدیل لاپلاس $y(t)$ به صورت حاصلضرب دو کسر یعنی کسری می‌باشد.

آ. ریشه ساده.

$$X(s)=\frac{10}{s^2+10s+16}=\frac{10}{(s+2)(s+8)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+8}$$

راههای بدست آوردن A و B :

۱. مخرج مشترک می‌گیریم یا مقدارگذاری می‌کنیم.

۲. روش "هوی ساید" $\lim_{s\to -2}X(s)(s+2)=A$

. یک نقطه هم تست کنید.

$$\Rightarrow A=5/3\ ,\quad B=-5/3\quad \rightarrow x(t)=\left[5/3\,e^{-2t}-5/3\,e^{-8t}\right]u(t)$$

ب. ریشه موهومی ساده:

روش قبلی قابل استفاده است . ولی باعث می‌شود (۳ تا که یکی مزدوج است) که نهایتا باز هم باید دو به هم ترکیب شود .

$$X(s)=\frac{15s^2+25s+20}{(s^2+1)(s+2)(s+8)}=\frac{B_1s+B_2}{s^2+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{-2}{s+8}$$

برای محاسبه $As+B$: در (s^2+1) دوطرف را ضرب می‌کنیم و $s^2=-1$:

$$\rightarrow X(s)=\frac{25s+5}{10s+15}=B_1s+B_2$$

در $(10s-15)$ ضرب می‌کنیم .

$$\rightarrow X(s)=\frac{(5s+1)(2s-3)}{(2s+3)(2s-3)}=\frac{-13s-13}{-13}=B_1s+B_2$$

$$\Rightarrow B_1=B_2=1$$

ب* ریشه تکراری (ساده)

$$X(s)=\frac{10s}{(s+2)^2(s+8)}=\underbrace{\frac{A_1}{(s+2)^2}+\frac{A_2}{s+2}}+\frac{A_3}{s+8}\rightarrow A_3=-\frac{20}{9}$$

$$=\frac{As+B}{(s+2)^2}$$

A_1 از روش هویساید : $A_1=-10/3$

$$X(s)=\frac{P(s)}{(s+\alpha)^n\varphi(s)}=\frac{A_1}{s+\alpha}+\frac{A_2}{(s+\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(s+\alpha)^n}+\frac{B}{\varphi(s)}$$

$$A_m=\frac{1}{(n-m)!}\frac{d^{(n-m)}}{ds^{(n-m)}}\left[(s+\alpha)^nX(s)\right]_{s=-\alpha}$$

یک دست جام باده و یک دست زلف یار

رقصی چنین میانه میدانم آرزوست

۸۰/۱۲/۹ :

* ت : ریشه موهومی تکراری .

$$X(s) = \frac{s^4+5s^3+12s^2+7s+15}{(s+2)(s^2+1)^2}$$

۵ : از روش عملی حساب کنید (محاسبه طولانی)

$$X(s) = \frac{A_1}{s+2} + \frac{B_1 s + C_1}{s^2+1} + \frac{B_2 s + C_2}{(s^2+1)^2}$$

A_1 : مشخص

B_2, C_2 : در $(s^2+1)^2$ ضرب ← ، $s^2=-1$

← به کسری می‌رسیم که آن را بصورت مخرج مشترک را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

B_1, C_1 ← بهتر است مقدار دهی کنیم.

برای گرفتن عکس تبدیل لاپلاس:

۱- روش کانولوشن:

$$\frac{B_2 s + C_2}{(s^2+1)^2} \rightarrow \frac{B_2}{(s^2+1)} * \frac{s + C_2/B_2}{(s^2+1)}$$

۲- روش مشتق‌گیری در حوزه فرکانس

$$\frac{dX(s)}{ds} \rightarrow -t\,x(t)$$

$$\frac{1}{(s+\alpha)^n} \rightarrow \text{روش مشتق گیری در حوزه } s \rightarrow \frac{-t}{-(n-1)} \times \frac{-t}{-(n-2)} \times \dots \times \frac{-t}{-(n-(n-1))}\, e^{-\alpha t}$$

روش کانولوشن

$$\frac{1}{s^n} \;,\; \text{تغییر شیفت} \;* \rightarrow \frac{1}{(n-1)!} t^{(n-1)} e^{-\alpha t}$$

تبدیل لاپلاس دوطرفه:

گاهی توالی کلیدزنی‌ها (که با هم آسنکرون هستند) باعث می‌شود از لاپلاس دوطرفه استفاده کنیم.

$$X_d(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st}\, dt = \mathcal{L}_d[x(t)]$$

→ double side

شرط کافی برای این که این انتگرال مطلق همگرا باشد، این است که

$$|x(t)| \leq \begin{cases} A e^{ct} & t>0 \\ A e^{bt} & t<0 \end{cases} \Rightarrow \forall s:\ c<s<b \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{-st}|\, dt < \infty$$