اگر $x(t)$ در زمانهای منفی صفر باشد، لاپلاس دوطرفه خود بخود یکطرفه می‌شود.

- L_d پیدا کنید. (مشخص)

$x_1(t)=e^{\alpha t}u(t)$ $\quad L_d(x_1(t))=L_s(x_1(t))=\frac{1}{s-\alpha}$ $\quad s>\alpha$

$x_2(t)=-e^{\alpha t}u(-t)$ $\quad L_d(x_2(t))=\frac{1}{s-\alpha}$ $\quad s<\alpha$

در لاپلاس دوطرفه مشخص کردن ناحیه همگرایی الزامی است. مثلاً برای $\frac{1}{s-\alpha}$ اگر ناحیه همگرایی مشخص نشده باشد، دو تابع علی و غیرعلی فوق را به ما می‌دهد.

* پیدا کردن تابع لاپلاس دوطرفه از روی لاپلاس یکطرفه:

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t) \rightarrow \begin{cases} x_1(t)=x(t)u(t) \\ x_2(t)=x(t)u(-t) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}x_2(t)e^{-st}dt+\underbrace{\int_{0}^{+\infty}x_1(t)e^{-st}dt}_{X_1(s)}$$

با ناحیه همگرایی مشخص شده $\rightarrow X_1(s)$

$$\int_{-\infty}^{0}x_2(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{+\infty}x_2(-t_1)e^{+st_1}dt_1=Y(-s) \xrightarrow{\text{دهیم}} y(t)=x_2(-t)$$

مثال:

$$x(t)=\underbrace{e^{-3t}u(t)}_{x_1(t)}+\underbrace{e^{2t}u(-t)}_{x_2(t)} \qquad X_d(s)=X_1(s)+X_2(-s)$$

$$X_2(-s)=L_s[x_2(-t)]$$

$$x_1(t)=e^{-3t}u(t)\longrightarrow X_1(s)=\frac{1}{s+3}\quad s>-3$$

$$y(t)=x_2(-t)=e^{-2t}u(t)\longrightarrow Y(s)=\frac{1}{s+2}\quad s>-2\longrightarrow Y(-s)=\frac{1}{-s+2}\quad s<2$$

$$\hookrightarrow X_d(s)=\frac{1}{s+3}+\frac{1}{-s+2}\qquad -3<s<2$$

باز هم ناحیه همگرایی پیوسته است و شامل هیچ قطبی نیست.

Δ رابطه لاپلاس دوطرفه و تبدیل فوریه را پیدا کنید.

$$X(s) = \frac{2s}{(s+3)(s+1)} \qquad -3 < \sigma < -1$$

$$X(s) = \frac{3}{s+3} - \frac{1}{s+1}$$

تمام قطب‌هایی که ناحیه همگرایی دست راست آن‌هاست متناظر با $X_1(s)$ هستند.

" " " " " " چپ " " " " " $X_2(s)$

$$\Rightarrow X_1(s) = \frac{3}{s+3} \longrightarrow x_1(t) = 3e^{-3t}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{-s+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) \rightarrow e^{t}u(t) \Rightarrow x_2(-t) \Rightarrow x_2(t) = e^{-t}u(-t)$$

$$\hookrightarrow x(t) = -3e^{-3t}u(t) + e^{-t}u(-t)$$

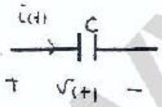
آب حیات عشق را ترجمه نشاید !

۸۰/۲/۱۱:

<u>کاربرد تبدیل لاپلاس :</u>

... مدار در حوزه لاپلاس :

چون تبدیل لاپلاس تبدیل خطی است ، ترکیب مدار در این حوزه دستخوش تغییر نمی شود . مثلاً فرم موازی و سری تغییر نمی کند . چون اگر $v_1(t) = v_2(t)$ و $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ باشد خواهیم داشت $I(s) = I_1(s) + I_2(s)$, $V_1(s) = V_2(s)$

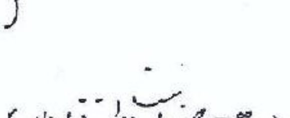


$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\lambda)\, d\lambda$$

$$V(s) = \frac{1}{C}\left[\frac{I(s)}{s} + \frac{i^{-1}(0^-)}{s}\right]$$

برابر است با بار در $-\infty$ صفر است (طبق قرارداد) $i^{(-1)}(0^-) = \int_{-\infty}^{0^-} i(\lambda)\, d\lambda = q(0^-) - q(-\infty) = q(0^-)$

$$\Rightarrow V(s) = \frac{1}{Cs} I(s) + \frac{V_c(0^-)}{s}$$



جهت منبع : با توجه به اینکه در $t = 0^+$ ، $V(0^+)$ با $V(0^-)$ مساوی است ، جهت مشخص می شود.

$x(1) \xrightarrow{\text{فیلتر}} x(1)\ \mathrm{Sinc}\, f_s(t-T_s)$

$\vdots$

$\sum x(n)\,\delta(t-nT_s) \xrightarrow{\text{فیلتر}} \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)\ \mathrm{Sinc} f_s(t-nT_s) = x(t)$

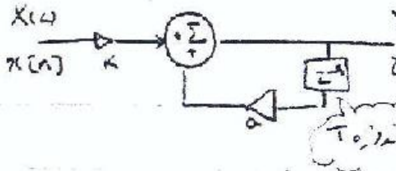
$\to \varphi_n(t) = \mathrm{Sinc}\, f_s(t-nT_s)$

ـ $\varphi_n(t)$ تابعی که $x_{(t)}$ را به $x(t)$ تبدیل می‌کند.

$t=0 \to x(0)$ ... بدست می‌آوریم

۸۰/۳/۱۴

مثال:



رابطه ورودی خروجی؟ تابع تبدیل؟ پاسخ فرکانسی؟

رابطه بین K و a تا گین dc یک شود؟ شرط پایداری؟

رابطه ورودی خروجی = معادله دیفرانس

$-\boxed{z^{-3}}- \quad : \quad -\boxed{z^{-1}}-\boxed{z^{-1}}-\boxed{z^{-1}}-$

تاخیر به اندازه $3T_0$ یعنی ۳ تا تاخیر به اندازه T_0.

۱- نمودار را در z رسم می‌کنیم ۲- اول تابع تبدیل را می‌نویسیم

ب- $KX(z) + aZ^{-1}Y(z) = Y(z) \to Y(z) = \frac{KX(z)}{1-aZ^{-1}} \Rightarrow H(z) = \frac{K}{1-az^{-1}}$

الف- $Kx[n] + ay[n-1] = y[n]$ ناحیه همگرایی $|z|>|a|$

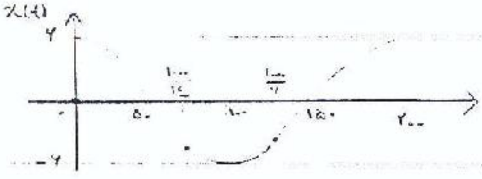
ت- شرط پایداری $|a|<1$

$H(e^{j\omega}) = \frac{K}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{|K|}{\sqrt{(1-a\cos\omega)^2+a^2\sin^2\omega}} \angle H(e^{j\omega})$

پ- $\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 - \tan^{-1}\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega} & K>0 \\ \pi - \tan^{-1}\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega} & K<0 \end{cases}$

ث- گین dc $= H(z)\big|_{z=1} = \left|\frac{K}{1-a}\right| = 1 \qquad a+K=1$

مثال، فرض می کنیم که سیگنال ورودی $x(t) = 6\cos 10\pi t$ را با در فرکانس $f_1 = \cancel{10\pi}\ 7\ Hz$ ، $f_2 = 14\ Hz$ نمونه برداری می کنیم .



$$X(f) = 3\delta(f-5) + 3\delta(f+5)$$

$$X_s(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_s X(f - k f_s)$$

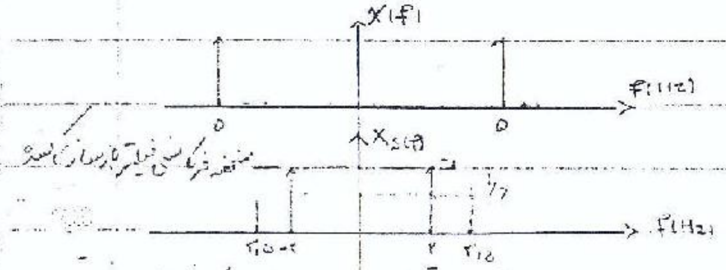
$$X_s(f) = 7\sum_{-\infty}^{\infty} X(f - 7k)$$

$$= \dots + 7X(f+7) + 7X(f)$$

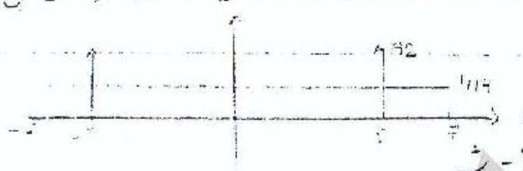
$$+ 7X(f-7) + \dots$$

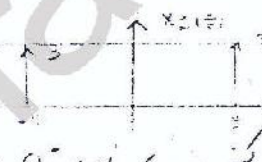
$$X_s(f) = \sum 21\,\delta(f-5-7k)$$

$$+ 21\,\delta(f+5-7k)$$

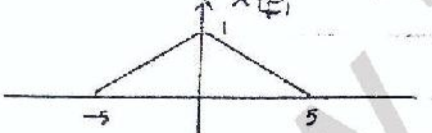


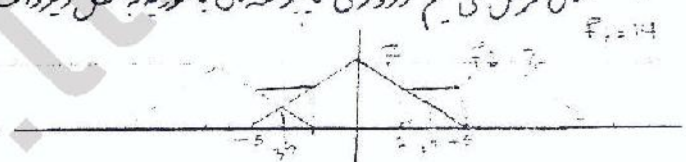
پس داخل درست را سازی مجدد ولی فرکانس صحیح نیست





حال فرض می کنیم ورودی ناپیوسته ای با فوریه به شکل زیر داشته باشیم :





در این حالت زمانی هم شامل sinc و هم شامل $sinc^2$ است. بنابراین پاسخ درست نیست به دلیل اینکه شرط نایکویست برقرار نیست

* مسئله را با $f_s = 14$ حل کنید

<u>ساخت فیلتر دیجیتال</u> :

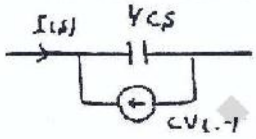
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{r} L_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{M} K_j z^{-j}}$$

اگر فرم منبع با متغیری که آنرا داریم بررسی می کنیم یکی باشد. این متغیر از نوع پله است

" " " " " " " متفاوت " " " " " " ضربه " و به صورت

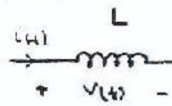
عدد ظاهر می شود.

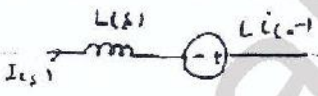
$I(s) = Cs \cdot V(s) - C V_c(0^-)$

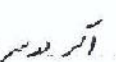


در $t=0$ جهت ضربه داده باید در جهتی باشد که جریان هم جهت $I(s)$ باشد.

* سلف:



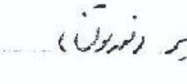


اگر دو سر سلف را در لحظه اتصال کوتاه کنیم جهت جریان ← خواهد بود  پس منبع

باید در جهتی باشد که اتصال جهت بدهد 

فرم دیگر (نورتن):

* مقاومت:



* ترانسفورماتور:

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1(t) = (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{d(i_1+i_2)}{dt} \\ v_2(t) = M \frac{d(i_1+i_2)}{dt} + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

۵ چرا می توانیم توان بگیریم؟

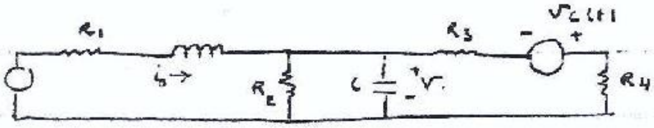
برالمان خطی که دارای توان را در سرآن توان گرفت. وقتی که سایر اجزای مدار خطی ۳۱/

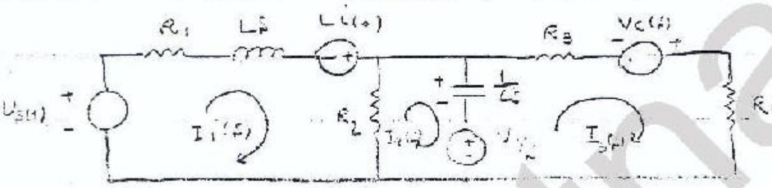
هستند. وقتی المان خطی نباشد، ولی بقیه اجزا خطی باشند هم می‌توان تونن گرفت.

چطور معادل تونن را بدست می‌آوریم؟ دو سر المان را اتصال کوتاه می‌کنیم، جریان را می‌خوانیم. اتصال باز می‌کنیم ولتاژ را می‌خوانیم V_{Th} ← $Z_{th} = \frac{V_{op}}{i_{cs}}$

وقتی منابع وابسته در مدار داریم، صفر کردن منابع مستقل کافیست ← V_T می‌گذاریم.

ماتریس امپدانس و ادمیتانس بنویسید؟





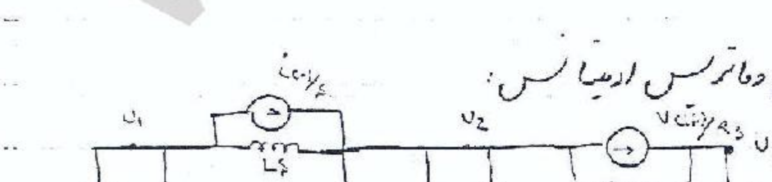
ماتریس امپدانس عبارتست از:

$$\begin{pmatrix} R_1+Ls+R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+\frac{1}{Cs} & \frac{-1}{Cs} \\ 0 & \frac{-1}{Cs} & \frac{1}{Cs}+R_3+R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Li(0^-)+V_s(s) \\ -\frac{V_0}{s} \\ V_c(s)+V_0/s \end{pmatrix}$$

فرض کنیم $V_c(t) = K i_1(t)$ $\qquad V_c(s) = K I_1(s)$

$$\begin{pmatrix} R_1+Ls+R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+\frac{1}{Cs} & \frac{-1}{Cs} \\ -K & \frac{-1}{Cs} & \frac{1}{Cs}+R_3+R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Li(0^-)+V_s(s) \\ -\frac{V_0}{s} \\ \frac{V_0}{s} \end{pmatrix}$$

رابطه بین ماتریس امپدانس و ماتریس ادمیتانس:



$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{LS} & \frac{-1}{LS} & 0 \\ \frac{-1}{LS} & \frac{1}{LS}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{CS}+\frac{1}{R_3} & \frac{-1}{R_3} \\ 0 & \frac{-1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(S) \\ U_2(S) \\ U_3(S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i(0)}{S}+\frac{V_s(S)}{R_1} \\ -\frac{V_C(S)}{R_3}+\frac{i_0}{S}+CV_0 \\ \frac{V_C(S)}{R_3} \end{pmatrix}$$

آب حیات عشق را در رگ ما روانه کن
آینهٔ صبوح را ترجمهٔ شبانه کن!

٨٠/٢/١٨

$$x(s) \text{ , } x(t) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s) = H(s)\,X(s) \text{ , } y(t) = h(t) * x(t)$$

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Big|$ تمام شرایط اولیه صفر   یا $H(s) = L\{h(t)\}$

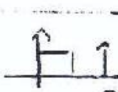
معادله دیفرانسیل ارتباط‌دهندهٔ x و y باعث می‌شود که $H(s)$ تابع کسری باشد.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0}$$

در دو بلوک سری، تابع تبدیلها ضرب می‌شوند.
" " " موازی، " " جمع "

اگر $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ باشد وارون آن خواهد بود: $G(s) = \frac{D(s)}{N(s)}$
به شرطی که ناحیه همگرایی $H(s)$ و $G(s)$ هم‌پوشانی داشته باشند.

هر سیستمی وارون ندارد. $\longrightarrow \boxed{\text{ILPF } H_1} \longrightarrow \boxed{H_1 \text{ وارون}} \longrightarrow$ حرکتی



f_0

تابع تبدیل مستقل از ورودی است.
تابع تبدیل با بدست آوردن قرار دادن همه شرایط اولیه مساوی صفر بدست می‌آید.

با دانستن معادله دیفرانسیل $H(s)$ می توان را نوشت . و بالعکس .

- علی بودن ، چگونه از $H(s)$ می فهمیم که تابع علی است یا نه ؟ $H(s)$ باید right-sided باشد .

- پایداری ← مکانیک : گرانیگاه پایین نقطه آویز باشد - رسیدن به حداقل انرژی و حداکثر نظمی

y_{zir} : پاسخ ورودی صفر y_{zir} = zero input response

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} |y_{zir}(t)| \to 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} |y_{zir}(t)| \to \infty \\ \lim\limits_{t\to\infty} |y_{zir}(t)| = L < \infty \end{cases}$$

دو نوع ناپایداری

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (ROC) \ \text{ثابت}$$

ریشه های $N(s)$ ~~نقطه~~ صفرهای تابع تبدیل .

ریشه های $D(s)$ قطبهای تابع تبدیل .

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0}$$

* درجه $N(s)$ > درجه $D(s)$ سیستم ناپایدار است

زیرا با ورودی پله خروجی ضربه یا مشتقاتش را به ما می دهد .

$$H(s) = K_m s^m + P(s) \quad m > 0$$

$$K_m s^m \times \frac{1}{s} = K_m s^{m-1} \rightarrow \text{ضربه یا مشتقاتش}$$

* اگر یکی از ضرایب در $D(s)$ صفر یا منفی باشد ، سیستم ناپایدار است . زیرا باعث می شود قطبی در سمت مثبت محور بوجود بیاید .

صفر خودش یک ورودی محدود است ! اگر $H(s)$ ~~Zero~~ قطب مثبتی داشته باشد ، در حوزه زمان یک نمایی افزایشی می دهد ⟸ BIBO نیست .

$$D(s) = (s+P_1)(s+P_2)\cdots(s+P_n) = s^n + (P_1+P_2+\cdots+P_n)s^{n-1} + (P_1P_2+\cdots+\ldots)s^{n-2} + \cdots$$

همه ضرایب a_n را ثابت داریم

اگر یکی از ضرایب s ها مثبت باشند ، ضرایب s^x ها مثبت خواهند بود . پس وقتی یکی از ضرایب منفی بوده بنابه برهان خلف حداقل یک نقطه قطب در قسمت مثبت محور وجود دارد .

چند جمله‌ای با ضرایب مثبت هم داریم که ریشه هایشان منفی است . پس وقتی که $D(s)$ ضرایب مثبت هم دارند ، باید از روشهای دیگری برای تشخیص پایداری استفاده کنیم .

روش Routh_Hurwitz :

در سه زمان از این روش استفاده می‌کنیم
۱- درجه صورت بزرگتر از مخرج باشد .
۲- مخرج ریشه منفی یا صفر دارد .
۳- وقتی که مخرج تجزیه شده است . (یا بخشی از مخرج)

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0$$

s^n $\quad a_n \;;\; a_{n-2} \;;\; a_{n-4} \;\ldots$

s^{n-1} $\quad a_{n-1} \;;\; a_{n-3} \;;\; a_{n-5} \;\ldots$

s^{n-2} $\quad b_1 = \dfrac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \;;\; b_2 = \dfrac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \;;$

s^{n-3} $\quad c_1 = \dfrac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1} \;; \ldots \;;$

s^1 $\quad ;$

s^0 $\quad ;$

تعداد ریشه های مثبت برابر تعداد تغییر علامتها در ستون اول است .

$$D(s) = s^4 + 5s^3 + s^2 + 10s + 1$$

s^4 $\quad 1 \quad 1 \quad 1$ → در ستون اول به اولین منفی که رسیدیم می‌فهمیم ناپایدار است .

s^3 $\quad 5 \quad 10$

s^2 $\quad -1 \quad 1$ ← جای a_{n-4} است

s^1 $\quad 15$

قطب روی محور $j\omega$ هم ناپایدار است. زیرا $\lim |h(t)| \to \infty$ زیرا وقتی قدر مطلق می‌گیریم طاقهای منفی کسینوس هم بالا می‌آیند ← سطح زیر پاسخ بی‌نهایت می‌شود.

مثال: $D(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + 3$

s^4	1	1	3
s^3	1	1	0
s^2	$0+\varepsilon$	3	
s	$\frac{\varepsilon-3}{\varepsilon}$		
s^0	3		

۲ تغییر علامت

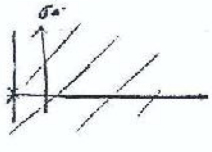
مثال: $L(s) = s^7 + 3s^6 + 3s^5 + s^4 + s^3 + 3s^2 + 3s + 1$

s^7	1	3	1	3
s^6	3	1	3	1
s^5	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	0
s^4	1	0	1	0
s^3	$0 \to 4$	0	0	0
s^2	$0+\varepsilon$	1		
s^1	$\frac{-4}{\varepsilon}$			
s^0	1			

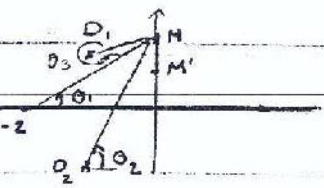
سطر مربوط به s^3 صفر است. خط بالای آن برابر s^4+1 است. از آن مشتق می‌گیریم، ضرایبش را در جلوی s^3 قرار می‌دهیم. s^4+1 خود یکی از عاملهای مخرج است.

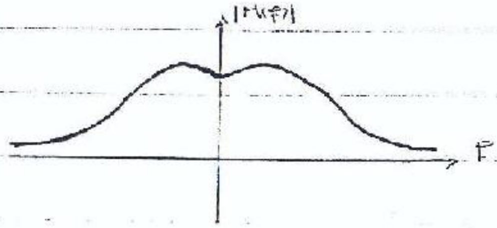
پیدا کردن $H(f)$ از روی $H(s)$

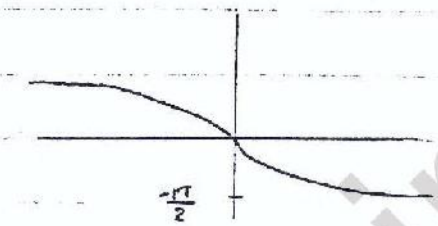
اگر ناحیه همگرایی محور $j\omega$ را دربرگیرد سیستم پایدار است و می‌توان در $\sigma + j\omega$، σ را صفر قرار داد و بجای s، $j\omega$ گذاشت. (تبدیل فوریه همان تبدیل لاپلاس است)



$$H(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2+1} = \frac{s+2}{(s+1+j)(s+1-j)}$$







$$|H(f)| = \frac{MA}{MD_1 \cdot MD_2}$$

$$\measuredangle Z = \frac{|Z_1|}{|Z_2||Z_3|} e^{j(\theta_1 - \theta_2 - \theta_3)}$$

زیرا اگر $Z = \frac{Z_1}{Z_2 Z_3}$

پاسخ پاسخ

پاسخ حالت صفر وقتی که شرایط اولیه صفر باشد .

شرایط اولیه را صفر می‌گذاریم.

$$a_n\left[s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - s\,y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)\right]$$
$$+ a_{n-1}\left[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - \dots - y^{(n-2)}(0)\right] + \dots + a_1\left[sY(s) - y(0)\right] + a_0 Y(s)$$
$$= \left[b_m s^m + \dots + b_0\right] X(s)$$

شرایط اولیه ورودی را براساس اصل برهم‌نهی اعمال می‌کنیم ابتدا جدا. پس نیازی به آوردن آنها در اینجا نداریم .

$$\Rightarrow D(s)Y(s) - C(s) = N(s)X(s)$$

$$C(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i s^{i-1} y(0) + \sum_{i=2}^{n} a_i s^{i-2} y'(0) + \dots + (a_n s + a_{n-1}) y^{(n-2)}(0) + a_n y^{(n-1)}(0)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} X(s) + \frac{C(s)}{D(s)}$$

$$y(t) = y_{zsr}(t) + y_{zir}(t)$$

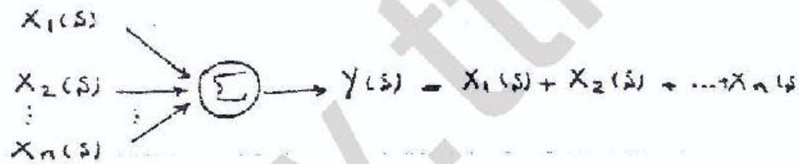
یافتن پاسخ کلی از روی معادله دیفرانسیل با داشتن شرایط اولیه ؟

شرایط اولیه مساوی $x_1(t) \rightarrow y_1(t) \qquad x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

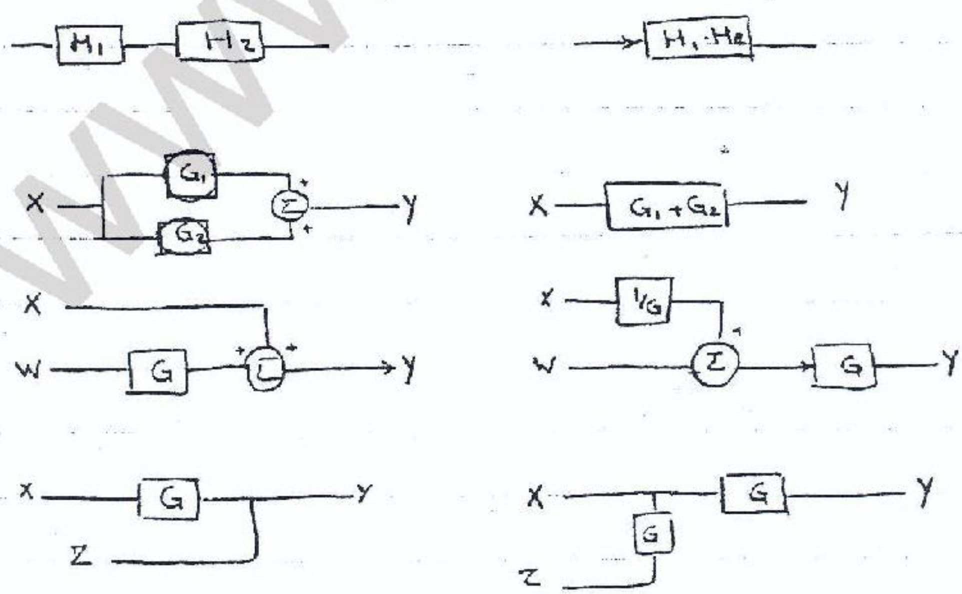
$$H(s) = \frac{L[y_2(t) - y_1(t)]}{L[x_2(t) - x_1(t)]}$$

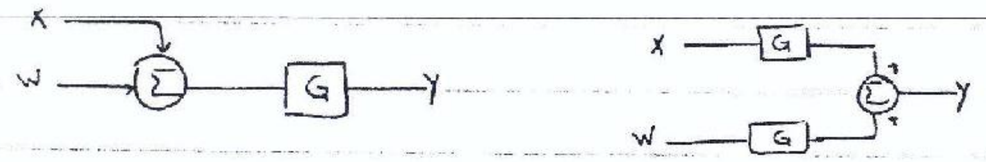
٨٠/٢/٢٥:

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s) = H(s)\,X(s)$$



$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s) + \dots + X_n(s)$$

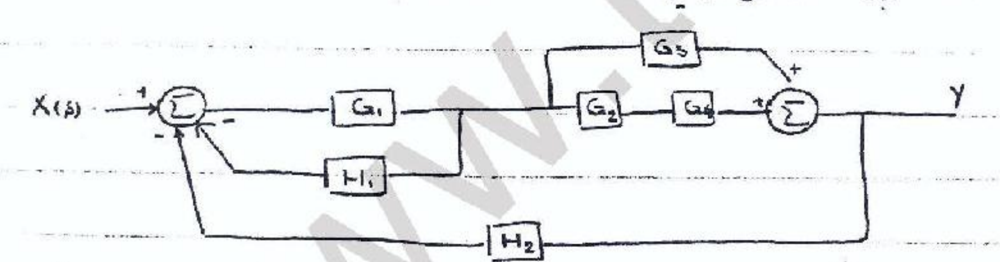




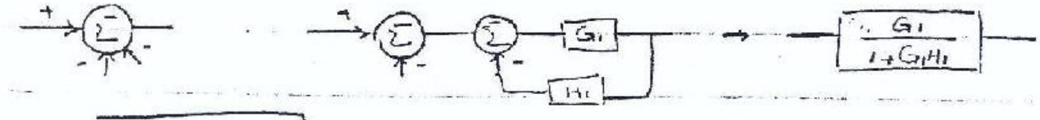
$$[X(s) - H(s)Y(s)]\,G(s) = Y(s)$$

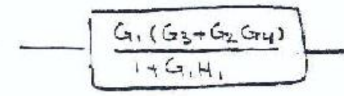
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+GH}$$

مثال : هدف : پیدا کردن تابع تبدیل



یک روش این است که ما





۳۵/ $T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A}{1+AH_2} = \frac{G_1(G_3+G_2G_4)}{1+G_1H_1+G_1H_2(G_3+G_2G_4)}$

آنالیز سیستم در فضای حالت

برای مشخص کردن سیستم
بردار حالت، شامل کمترین اطلاعات از یک سیستم است به شرط اینکه اگر ورودی را در t بشناسیم، خروجی را در $t \geq t$ بشناسیم.

سیستمهای چند ورودی و چند خروجی با این روش قابل حل هستند.

نکته مهم در فضای حالت این است که معادله دیفرانسیل مرتبه n به n معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می شود.

۱- سهولت بکارگیری روش واحد برای سیستمهای تک ورودی، تک خروجی و چند ورودی، چند خروجی.
۲- امکان مطالعه رفتار درونی سیستم.
۳- روش مناسب و الگوریتمی برای شبیه سازی کامپیوتری.

تعداد متغیرهای حالت به تعداد متغیرهای ذخیره کننده مستقل مربوط است.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1m}u_m \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2m}u_m \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{nm}u_m \end{cases}$$

$$\dot{X}_{n\times 1} = A_{n\times n}X_{n\times 1} + B_{n\times m}U_{m\times 1}$$ (معادله حالت)

$$A\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{pmatrix}$$

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}U_1 + \dots + d_{1m}U_m$$

$$\vdots$$

$$y_p = c_{p1}x_1 + \dots + c_{pn}x_n + d_{p1}U_1 + \dots + d_{pm}U_m$$

$$\underset{p\times1}{Y} = \underset{p\times n}{C}X + \underset{p\times m}{D}U \qquad \text{(معادله خروجی)}$$

A: از حالت درونی صفحه سیستم خبری می‌دهد. نشان می‌دهد حتی در نبود خروجی چگونه حالت خروجی به تغییرات ورودی بستگی دارد. [illegible]

D: تأثیر مستقیم خروجی از ورودی.

C: چگونه خروجی تابع state هاست.

B: چگونه ورودی مستقیماً روی تغییر state ها تأثیر می‌گذارد.

حل معادلات حالت.

* روش ۱:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$\dot{X}(t_0 + K\Delta t) = \frac{x(t_0 + (K+1)\Delta t) - x(t_0 + K\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow X(t_0 + (K+1)\Delta t) = X(t_0 + K\Delta t) + \Delta t \times \left[A X(t_0 + K\Delta t) + B U(t_0 + K\Delta t)\right]$$

$$K = 0 \rightarrow X(t_0 + \Delta t) \rightarrow X(t_0 + 2\Delta t) \dots$$

حالا تنها کار این است که معادله حالت را بنویسیم. مثلاً: ۳۶، $y'' + 3y' + 10y = \underbrace{\lg \sin x}_{\text{ورودی}}$

این روش برای برنامه‌نویسی کامپیوتر مناسب است.

* روش ۲:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX + Du \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{X}_h = A X_h \\ \dot{X}_p = A X_p + Bu \end{array}\right\} \to X_p + \lambda X_h$$

نشان دهید $X_h(t) = e^{A(t-t_0)} X_0$

$$\varphi_{(t)} = e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \quad (\text{مرتبه } n)$$

$$\frac{d e^{At}}{dt} = A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A$$

$$\int e^{At} dt = A^{-1} e^{At} = e^{At} A^{-1}$$

$$\varphi(t_1 + t_2) = \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2)$$

$$[\varphi(t)^{-1}] = \varphi(-t)$$

پاسخ معادله: $X(t) = e^{A(t-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\lambda)} B\, u(\lambda)\, d\lambda$

$\varphi(t) = e^{At} \to$ *state transition matrix*

$$\Rightarrow Y(t) = C\,(\varphi(t-t_0))\, X_0 + \int_{t_0}^{t} C \varphi(t-\lambda)\, B\, u(\lambda)\, d\lambda + D\, u(t)$$

بعد از نوشتن معادله حالت اولین قدم محاسبه ماتریس e^{At} است.

* روش ۳ (لاپلاس):

$$\begin{cases} X' = AX + BU \\ X(t_0) = X_0 \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

$$\Rightarrow SX(s) - X_0 = AX(s) + BU(s)$$

$$\rightarrow (SI - A)X(s) = X_0 + BU(s)$$

$$\rightarrow X(s) = (SI-A)^{-1}X_0 + (SI-A)^{-1}BU(s)$$

$$\rightarrow Y(s) = C(SI-A)^{-1}X_0 + \left[C(SI-A)^{-1}B + D\right]U(s)$$

$\Phi(t) \leftrightarrow \Phi(s)$ رابطه بالا نتیجه می‌دهد که $\Phi(s) = (SI-A)^{-1}$

$$H(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{X_0=0} \Rightarrow H(s) = C(SI-A)^{-1}B + D$$

$$\rightarrow H(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

در رابطه بالا تعریف می‌کنیم: $h_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_{ij}(s)]$

h_{ij} : خروجی i ام است به شرط آنکه ورودی j ام ضربه باشد (بقیه ورودیها اتصال کوتاه یا مدار باز هستند)

محاسبه e^{At}

هر توانی از ماتریس را بصورت ترکیب خطی n ماتریس می‌توان نوشت.

اگر ماتریس قطری باشد:

مثال: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & (-2)^2 \end{pmatrix} t^2/2!$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$\Phi = e^{At}$ ← ماتریسی که در آن $\Phi_{ii} = e^{A_{ii}}$ است.

پس اگر عناصر قطر در A مثبت باشند سیستم ناپایدار است.
بهتر است state ها را طوری انتخاب کنیم که A قطری باشد:
ماتریس قطری، یعنی state ها از هم دکوپله هستند. از هم مستقلند و بر هم تأثیر نمی‌گذارند.

* درحالت کلی:

مثال: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+5)+6}\begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{-6}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3} & \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \\ \frac{-6}{s+2} + \frac{6}{s+3} & \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \begin{pmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{pmatrix}$$

عبور باید کرد؛
و هم‌نورد افق‌های دور باید شد...

۸۰/۳/۸

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\det(A - A) = 0 \rightarrow$ قضیه کایلی-همیلتون، هر ماتریسی در معادله مشخصه خودش صدق می‌کند

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} + \dots - a_1 A + a_0 I$$

$$A^{n+1} = -a_{n-1}A^n - a_{n-2}A^{n-1} \dots - a_1 A^2 + a_0 A$$

هر توانی از A را می‌توان بصورت $A^{n+1} = C_{n-1}A^{n-1} + \dots + C_1A + C_0 I$ ←
مجموع جملاتی نوشت که توان آنها از $n-1$ بیشتر نیست.

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots$$

$$\Phi(t) = e^{At} = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t) A + \dots + \alpha_{n-1}(t) A^{n-1}$$

$$\left.\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= \alpha_0(t) + \lambda_1 \alpha_1(t) + \dots + \lambda_1^{n-1}\alpha_{n-1}(t) \\ e^{\lambda_2 t} &= \alpha_0(t) + \lambda_2 \alpha_1(t) + \dots + \lambda_2^{n-1}\alpha_{n-1}(t) \end{aligned}\right\} \text{ معادله مجهول } n \text{ } n$$

ریشه‌های تکراری چه حالتی پیش می‌آید ← آنگاه ← ریشه تکراری هم ریشه خودش هم ریشه مشتقش است.

مثال: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$ $\quad e^{At} = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t) A$

$\det(A-\lambda I) = 0 \rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{-2t} &= \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) \\ e^{-3t} &= \alpha_0(t) - 3\alpha_1(t) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-2t} \\ \alpha_1(t) = e^{-2t} - e^{-3t} \end{cases}$$

$$\Phi(t) = e^{At} = (3e^{-2t} - 2e^{-3t})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (e^{-2t} - e^{-3t})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$A^{500} = \alpha_1 I + \alpha_2 A$. برای پیدا کردن α_1 و α_2 ریشه‌های معادله مشخصه را لازم داریم.

$$\begin{aligned} \rightarrow (-2)^{500} &= \alpha_1 - 2\alpha_2 \\ (-3)^{500} &= \alpha_1 - 3\alpha_2 \end{aligned}$$

مثال پاسخ کامل سیستم زیر را بیابید.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad u = u_{-1}(t) \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y(s) = \underset{\downarrow}{\overset{\text{ورودی صفر}}{C(sI-A)^{-1}X_0}} + \underset{\downarrow}{\overset{\text{حالت صفر}}{C(sI-A)^{-1}BU(s)}}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ s+1 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ s+1 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{s(s^2+3s+2)}\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ s+1 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix} s+2 \\ 2(s+1) \end{pmatrix} + \frac{1}{s(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix} 1 \\ s+1 \end{pmatrix}$$

مثال ۵)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad u_1 = u_{-1}(t) \quad u_2 = e^{-3t}u(t)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ را شما بدست آورید

* چرا ما نمی‌توانیم برمبنای جریان شاخه‌ها (سلفها) و ولتاژ گره‌ها، متغیرهای حالت و مشتقاتشان را بنویسیم؟
هر متغیر عرضی و عبوری در مدار برمبنای جریان سلفها و ولتاژ گره‌ها قابل بیان است و V_c و V_c و I_L و I_L هم متغیرهای عرضی و عبوری هستند.
متغیرهای عرضی و عبوری سلفها و خازنها معادلات حالت را به ما می‌دهند (می‌بینیم متغیرهای لازم) که براساس آن سایر متغیرهای مدار را می‌توان نوشت. جریان سلفها و ولتاژ گره‌ها هم از متغیرهای مدار هستند.

۳ - روشی برای سیستم تک ورودی تک خروجی (با استفاده از $H(s)$)

معادلات حالت را به فرم قطبی می‌نویسیم.

$$H(s) = \frac{\overset{\text{لاپلاس خروجی}}{Y(s)}}{\underset{\text{لاپلاس ورودی}}{X(s)}} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{B_1}{s-p_1} + \frac{B_2}{s-p_2} + \dots + \frac{B_n}{s-p_n}$$

مثال :

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{4}{(s+1)(s+2)}=\frac{4}{s+1}-\frac{4}{s+2}$$

$$Y(s)=\underbrace{\frac{4\,U(s)}{s+1}}_{x_1(s)}+\underbrace{\frac{-4\,U(s)}{s+2}}_{x_2(s)} \;\rightarrow\; y(t)=\begin{bmatrix}4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} U(s)=(s+1)\,x_1(s) \Rightarrow s x_1(s)=-x_1(s)+U(s) \\ U(s)=(s+2)\,x_2(s) \Rightarrow s x_2(s)=-2x_2(s)+U(s) \end{array} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1(t)=-x_1(t)+U(t)\\ \dot{x}_2(t)=-2x_2(t)+U(t)\end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}u(t)$$

پس در حالت کلی داریم (ریشه تکراری نداریم)

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_n(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1 & & 0\\ & P_2 & \\ 0 & \ddots & P_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}$$

۵ : اگر درجه صورت و مخرج یکی باشد چه ؟

* وقتی ریشه تکراری داشته باشیم :

بخشی از $Y(s)$ که تکراری است در نظر میگیریم :

$$Y_i(s)=\underbrace{\frac{A\,U(s)}{(s-P_i)^2}}_{X_{i_1}(s)}+\underbrace{\frac{B\,U(s)}{(s-P_i)}}_{X_{i_2}(s)}$$

$$\begin{array}{l} X_{i_1}(s)=\dfrac{U(s)}{(s-P_i)^2}=\dfrac{X_{i_2}(s)}{(s-P_i)} \\ X_{i_2}(s)=\dfrac{U(s)}{s-P_i} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} sX_{i_1}(s)=P_i X_{i_1}(s)+X_{i_2}(s)\\ sX_{i_2}(s)=P_i X_{i_2}(s)+U(s)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_{i_1}(t)=P_i x_{i_1}(t)+x_{i_2}(t)\\ \dot{x}_{i_2}(t)=P_i x_{i_2}(t)+U(t)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_{i1}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_i & 1 \\ 0 & p_i \end{pmatrix}}_{\text{بلوک جردن مرتبه ۲}} \begin{pmatrix} x_{i1}(t) \\ x_{i2}(t) \end{pmatrix} + \cdots$$

بلوک جردن مرتبه ۴ : $\begin{pmatrix} p_1 & 1 & & \\ & p_2 & 1 & \\ & & p_3 & 1 \\ 0 & & & p_4 \end{pmatrix}$

پس، بعد از حالت قطری راحت‌ترین که به فرم بالا مثلثی (یا پایین مثلثی) باشد.

۵ یک ماتریس ۵×۵. در حالت کلی، برای معادلات حالت داریم، پایداری سیستم را چطوری بررسی می‌کنیم؟ $H(s)$ را از فرمول بدست می‌آوریم، از روش

مثال:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2+3s+9}{(s+2)(s+3)(s+1)^3} = \frac{\overset{3.5}{E_1}}{(s+1)^3} + \frac{\overset{-4.75}{E_2}}{(s+1)^2} + \frac{\overset{5.375}{E_3}}{(s+1)} + \frac{\overset{-7}{E_4}}{s+2} + \frac{\overset{1.125}{E_5}}{s+3}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} U$$

$$Y = \begin{pmatrix} 3.5 & -4.75 & 5.375 & -7 & 1.125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

معادلات حالت در یک سیستم گسسته

$$X[k+1] = F X[k] + G U[k]$$
$$Y[k] = H X[k] + J U[k]$$

بردار حالت سیستم گسسته، می‌گیم اطلاعاتی که اگر در لحظه (sample) k بدانیم و ورودی را از آن sample به بعد بشناسیم می‌توانیم

$$X[1] = F X[0] + G U[0]$$
$$X[2] = F X[1] + G U[1] = F^2 X[0] + F G U[0] + G U[1]$$
$$X[3] = F X[2] + G U[2] = F^3 X[0] + F^2 G U[0] + F G U[1] + G U[2]$$
$$\vdots$$

حل: $$x[k] = \underbrace{F^{k}x[0]}_{\text{پاسخ ورودی صفر}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} F^{k-j-1} G\, u(j)}_{\text{پاسخ حالت صفر}}$$

$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx + Du \qquad x_0 = x_0(t)$

$$\left.\begin{aligned} y(kT) &= C\,x(kT) + D\,u(kT) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned}\right\} \rightarrow \qquad \begin{aligned} H &= C \\ J &= D \end{aligned}$$

$t_0 = kT \quad kT \le t \le (k+1)T \quad x(t) = e^{A(t-kT)} x_{kT} + \int_{kT}^{t} e^{A(t-\lambda)} B\, u[kT]\, d\lambda$

$$x(k+1) = e^{AT} x[k] + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\lambda)} d\lambda \; B\, u[k]$$

$$x[k+1] = F\,x[k] + G\,u[k]$$

$F = e^{AT} \qquad F = \Phi(T)$

$\left(\int e^{At} dt = A^{-1} e^{At} = e^{At} e^{-0}\right)$

$$G = (e^{AT} - I)A^{-1}B \Rightarrow G = (F - I)A^{-1}B$$

مثال:
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$f = 10\ Hz$

$$y = (1 \quad 2) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$T = 0.1\ sec \quad F = e^{AT} = \begin{pmatrix} 0.875 & 0.073 \\ -0.467 & 0.585 \end{pmatrix}$$

$$G = (F - I)A^{-1}E = \begin{pmatrix} 0.108 & 0.103 \\ 0.051 & 0.052 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2[k+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.595 & 0.078 \\ -0.467 & 0.595 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.193 & 0.105 \\ 0.052 & 0.052 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1[k] \\ u_2[k] \end{pmatrix}$$

$$y[k] = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix}$$

کودکی می‌بینی،
رفته از کاج بلندی بالا،
جوجه بردارد از لانه نور،
و از او می‌پرسی
خانه دوست کجاست؟

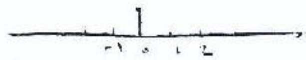
تجزیه و تحلیل سیستمهای خطی گسسته :

۸۰/۲/۹

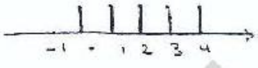
روابط در اینجا ساده‌ترند چون در آنها با حد برخوردی نداریم. و در فرمولها تشابه پیدا می‌کنیم.

مثلاً

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

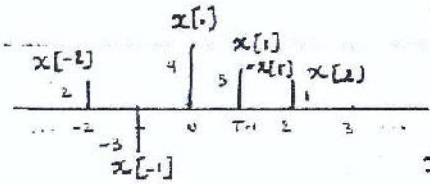


$$u[n] = \begin{cases} 1 & n\geq 0 \\ 0 & o.w \end{cases} \rightarrow \delta[n] = u[n] - u[n-1]$$



۸۰/۲/۱۱

سیگنال منفصل = مجموعه نمونه‌هایش.



$$x[n] = \{\ldots, 2, -3, \underset{\uparrow}{4}, 3, 1, \ldots\}$$

بیانگر زمان صفر

$x[n_0]$: مقدار x در زمان n_0 را نشان می‌دهد. $x[n]$ کل سیگنال را.

روش دیگر نشان دادن

$$X(z) = \ldots\ 2z^{2} - 3z^{1} + 4 + 3z^{-1} + 1z^{-2} + \ldots$$

روش دیگر:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases} \rightarrow \delta[n-n_0] = \begin{cases} 1 & n=n_0 \\ 0 & n\neq n_0 \end{cases}$$

$$\ldots + 2\delta[n+2] - 3\delta[n+1] + 4\delta[n] + 3\delta[n-1] + 1\delta[n-2] + \ldots$$

$$\hookrightarrow x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

$$x_1[n] * x_2[n] \triangleq \sum_{-\infty}^{+\infty} x_1[k]\, x_2[n-k]$$

$$\Leftarrow\quad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x[k]\,\delta[n-k] = x[n] * \delta[n]$$

مثال دهید $x[n-n_0] = \delta[n-n_0] * x[n]$

خواص کانولوشن در حالت پیوسته را در حالت گسسته تحقیق کنید!

۸۰/۲/۱۲:

* سیگنال متناوب : $x[n+N] = x[n]$ —— $\exists\ N \in \mathbb{N}$

$x[n] = A \cos(n\omega_0 + \varphi)$ فرکانس sampling

$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{k}$ عدد صحیح

$\frac{F_0}{F_s} =$ عدد گویا

فرکانس تابع متناوب

وقتی از تابع پیوسته ۴ نمونه برداری می کنیم ، سیگنال گسسته بدست آمده بشرطی متناوب خواهد بود که نسبت فرکانس نمونه برداری و فرکانس تابع گویا باشد

* انرژی سیگنال $E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 < M \rightarrow$ energy signal

توان سیگنال $P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} |x[k]|^2 < M \rightarrow$ power signal

(تعریف) ای توانیم داشته باشیم :

$x[n] + y[n] = z[n]$

$x[n] \cdot y[n] = z[n]$

$y[n] = \alpha \xi x[n]$

$y[n] = x[n-n_0]$

$$\begin{cases} \delta[n] = u[n] - u[n-1] \\ u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \end{cases} \quad \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

$x[n] \rightarrow \boxed{\nabla} \rightarrow y[n] = x[n] - x[n-1]$ backward difference

معکوس هم هستند

ترتیب بی جایی $x[n] \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y[n] = \sum_{-\infty}^{n} x[k]$

برای اینکه ثابت کنیم جابجایی است . پشت هم می بندیم . پاسخ ضربه ترکیب باید ضربه باشد $h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$

ترکیب دو سیستم

سیستم گسسته: سیستمی که ورودی و خروجی آن سیگنال گسسته باشد.

$$\xrightarrow{x[n]} \boxed{T} \longrightarrow y[n] = T\left(x[n]\right)$$

* تعریف سیستم گسسته خطی:

$$T[\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]] = \alpha_1 T(x_1[n]) + \alpha_2 T(x_2[n])$$

مثال: سیستم backward difference خطی است.

* سیستم T.I $y[n] = T(x[n]) \Rightarrow y[n-n_0] = T(x[n-n_0])$

shift invariant n_0 عدد صحیحی از T است. برای ما این دو (S.I و T.I) یک معنی دارد.

مثال: T.I نیست $y[n] = n x[n]$

$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = n x_1[n] \qquad x_2[n] \rightarrow y_2[n] = n x_2[n]$

$x_2[n] = x_1[n-N] \rightarrow y_2[n] = n\, x_1[n-n_0] \neq y_1[n-n_0] = (n-N)\, x_1[n-N]$

* سیستم علّی: $\forall\, x_1[n] = x_2[n] \quad \forall\, n < n_0 \rightarrow y_1[n] = y_2[n]$

* سیستم پایدار: $\forall x \ \forall n \quad |x[n]| < M \Rightarrow |y[n]| < N$

$LTI \rightarrow n < 0 \quad h[n] = 0$

* سیستم بدون حافظه $y[n_0] = f(n_0, x[n_0])$

می خواهیم ثابت کنیم که در یک سیستم LTI: $\delta[n] \rightarrow \boxed{T} \rightarrow h[n]$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

گر $y[n] = T(x[n]) = T\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right) \overset{L}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T\left(x[k]\,\delta[n-k]\right)$

همان دیده $x[n-n_0] = \delta[n-n_0] * x[n]$

خواص کانولوشن در حالت پیوسته را در حالت گسسته تحقیق کنید!

۸۰/۲/۱۷:

* سیگنال متناوب : $x[n+N] = x[n] \quad \exists\, N \in \mathbb{N}$

$x[n] = A\cos(n\omega_0 + \varphi)$ فرکانس sampling

$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{K}$ عدد صحیح

$\frac{F_0}{F_s} =$ عدد گویا

فرکانس تابع متناوب

وقتی از تابع پیوسته هم نمونه برداری می کنیم ، سیگنال گسسته بدست آمده به شرطی متناوب خواهد بود که نسبت فرکانس نمونه برداری و فرکانس تابع گویا باشد

* انرژی سیگنال $E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 < M \quad \leftarrow$ energy signal

توان سیگنال $P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} |x[k]|^2 < M \quad \leftarrow$ power signal

(تعریف) ای توانیم داشته باشیم :

$x[n] + y[n] = z[n]$

$x[n] \cdot y[n] = z[n]$

$y[n] = \alpha \, x[n]$

$y[n] = x[n-n_0]$

$$\begin{cases} \delta[n] = u[n] - u[n-1] \\ u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \end{cases} \qquad \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

$x[n] \rightarrow \boxed{\nabla} \rightarrow y[n] = x[n] - x[n-1]$ backward difference

معکوس هم هستند

ترکیب متوالی

$x[n] \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y[n] = \sum_{-\infty}^{n} x[k]$

برای اینکه ثابت کنیم معکوس است ، پشت هم می بندیم . پاسخ ضربه ترکیب باید ضربه باشد $h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$

ترکیب آبشاری

$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n]$ $\qquad h[n] = 0 \quad n<0$

$h[n] = \alpha h[n-1] + \delta[n]$ $\qquad h[0] = 1$

$h[n] = ?$ $\qquad h[1] = \alpha$ $\Rightarrow \underline{h[n] = \alpha^n U[n]}$

$h[2] = \alpha^2$

$\vdots$

$h[n] = \alpha^n$

$h[n-1] = \alpha^{-1} h[n] - \alpha^{-1} \delta[n]$ $\qquad h[n] = 0 \quad n \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} h[0] = 0 \\ h[-1] = -\alpha^{-1} \\ h[-2] = -\alpha^{-2} \\ \vdots \\ h[-n] = -\alpha^{-n} \end{array}\right\} \rightarrow h[n] = -\alpha^{n} U[-n-1]$$

۸۰/۲/۲۳

$|x[n]| < M \Rightarrow |y[n]| < N$

ـ نشان دهید شرط پایداری برای سیستم علّی LTI (لازم و کافی) این است که: $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h[k]| < M_1$

$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-k]\, x[k]$

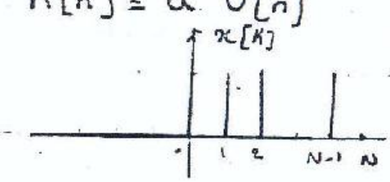
Final impulse response , fir ـــــ تعداد جملات پاسخ ضربه محدود

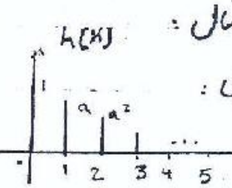
infinal impulse response iir ـــــ تعداد جملات پاسخ ضربه نامحدود

روشهای محاسبه کانولوشن [illegible] مانند روشهای محاسبه در حالت پیوسته است.

مثال : $\qquad h[n] = \alpha^n U[n] \qquad x[n] = U[n] - U[n-N]$

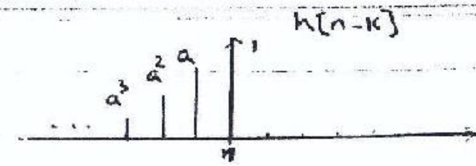
۱- روش ترسیمی :





برای احتمال کردن به پارامتر (n)

مقداری دهیم.



$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x[K]\, h[n-K] \quad \begin{cases} 0 & n<0 \\ \displaystyle\sum_{K=0}^{n} a^{n-K} = \frac{a^{n}(1-a^{-(n+1)})}{1-a^{-1}} & 0 \leq n < N \\ \displaystyle\sum_{K=0}^{N-1} a^{n-K} = a^{n}\frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}} & N \leq n \end{cases}$$

۲ـ روش سیستم:

$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h[n-K]\, x[K]$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} (U[K] - U[K-N])\, a^{n-K} U[n-K]$$

$$= \sum_{K=0}^{\min\{N-1,n\}} a^{n-K} = \begin{cases} 0 & n<0 \\ \displaystyle\sum_{K=0}^{n} a^{n-K} = a^{n}\frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} & 0 \leq n < N \\ \displaystyle\sum_{K=0}^{N-1} a^{n-K} = a^{n}\frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}} & N \leq n \end{cases}$$

۳ـ

$$x[n] = U[n] - U[n-N] = \delta[n] + \delta[n-1] + \dots + \delta[n-(N-1)]$$

$$x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$$

$$x[n] * h[n] = h[n] + h[n-1] + \dots h[n-(N-1)]$$

$$= a^{n} U[n] + a^{n-1} U[n-1] + \dots a^{n-(N-1)} U[n-(N-1)]$$

جان بالایی است ها

$$a_N y[n-N] + a_{N-1} y[n-(N-1)] + \dots + a_0 y[n] = b_M x[n-M] + \dots + b_0 x[n]$$

$$\sum_{K=0}^{N} a_K\, y[n-K] = \sum_{r=0}^{M} b_r\, x[n-r] \qquad \text{LCCDE}$$

ه نشان دهید هر سیستم معادله LCCDE معرف سیستم LTI است.

معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه خطی ثبت.

▲ درحالت پیوسته initial rest condition یعنی آنکه
در مورد گسسته تحقیق کنید.

* شرط لازم و کافی برای آنکه سیستم FIR باشد آن است که $N=0$
به شرط آنکه pole zero cancellation نباشد یعنی صورت و مخرج ریشه مساوی نداشته باشند

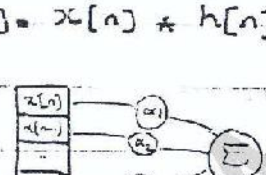
اثبات :

$$N=0 \rightarrow a_0 y[n] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r] \rightarrow h[n] = \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} \delta[n-r]$$

تعداد آن محدود ← FIR

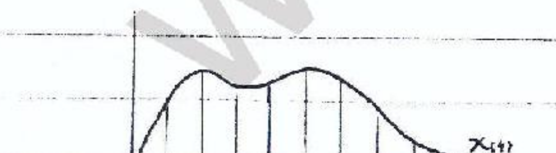
$$FIR \quad h[n] = \sum_{r=0}^{M} b_r \delta[n-r]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * \sum_{r=0}^{M} b_r \delta[n-r] = \sum_{r=0}^{M} b_r (x[n] * \delta[n-r])$$



فیدبک ندارد
اگر فیدبک داشته باشد IIR است

تبدیل Z :



$$x_s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t-nT)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t-nT)$$

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t-nT) \right) e^{-st} dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \int_{0}^{\infty} \delta(t-nT) e^{-st} dt$$

$$z = e^{+Ts}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

تعریف می‌کنیم تبدیل Z را:

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{تبدیل } Z} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[0] + x[1] z^{-1} + x[2] z^{-2} + \dots$$

مثال:

$$X(z) = 1 + 2z^{-100} \longleftrightarrow x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-100]$$

$\sigma = 0 \quad s = j\omega \quad z = e^{sT} = e^{j\omega T}$

* شرط پایداری:

ناحیه همگرایی دایره واحد را در برگیرد.

مثال تبدیل Z پیدا کنید:

$\delta[n] \longleftrightarrow 1 \qquad ROC =$ تمام صفحه

$U[n] \longleftrightarrow X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$

بزرگترین قطب را در نظر می‌گیریم ROC ناحیه بزرگتر از دایره‌ای به شعاع آن است.

۱. ناحیه همگرایی به شکل ◎ ـ قطبی را در بر نمی‌گیرد.

۲. right-sided ← خارج دایره تا بینهایت

۳. پیوسته.

خواص تبدیل Z:

$1-\ \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] \longrightarrow \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z)$

اشتراک ROC_1 , ROC_2 : ROC

$2-\ y[n] = x[n-n_0]\, U[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0} X(z)$

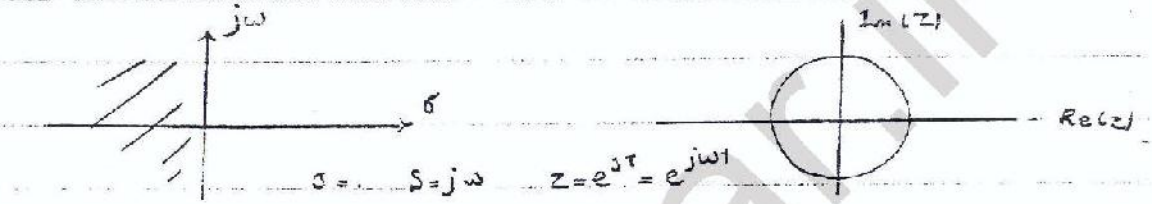
$n_0 > 0$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

تعریف می‌کنیم تبدیل z را:

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{تبدیل } z} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[0] + x[1] z^{-1} + x[2] z^{-2} + \cdots$$

مثال: $X(z) = 1 + 2z^{-100} \longleftrightarrow x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-100]$



* شرط پایداری:

ناحیه همگرایی دایره واحد را در بر گیرد.

مثال تبدیل z پیدا کنید:

$\delta[n] \longleftrightarrow 1$ ROC = تمام صفحه z

$U[n] \longleftrightarrow X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$ $|z| > 1$

بزرگترین قطب را در نظر می‌گیریم ROC ناحیه بزرگتر از دایره‌ای به شعاع آن است.

۱. ناحیه همگرایی به شکل ◎ - قطبی را در بر نمی‌گیرد.

۲. right-sided ← خارج دایره تا بینهایت

۳. پیوسته.

خواص تبدیل z:

1- $\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] \longrightarrow \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z)$

ROC: اشتراک ROC_1 , ROC_2

2- $y[n] = x[n-n_0]U[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0} X(z)$

$n_0 \geq 0$

3. $x[0] = \lim_{|z| \to \infty} X(z)$

4. $\lim_{n \to \infty} x[n] = \lim_{|z| \to 1} (1 - z^{-1}) X(z)$

Δ : نشان دهید اگر همه قطبها خارج دایره واحد بودند، $x[n]$ ناپایدار است و $x[\infty] = \infty$
و اگر همه قطبها داخل دایره واحد بودند، $x[n]$ پایدار است و $x[\infty] = 0$.

Δ : نشان دهید اگر یکی دایره واحد هم قطب بود، $x[n]$ محدود است ولی پایدار نیست. (یعنی هر حالت پایدار غیرصفر قاعدتاً از قطب ساده $|z| = 1$ ناشی شده است و می توان نوشت $X(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}} + G(z)$
→ با قضیه مقدار نهایی بدست می آید → $x[\infty] = K$.)

Δ مثال:

1- $e^{\alpha n}$ $\quad \sum_{0}^{\infty} e^{\alpha n} z^{-n} = \sum_{0}^{\infty} (e^{\alpha} z^{-1})^{n} = \frac{1}{1 - e^{\alpha} z^{-1}} \quad \frac{e^{\alpha}}{|z|} < 1 \quad |z| > e^{\alpha}$

2- $\sin bn = \frac{z \sin b}{z^2 - 2z \cos b + 1}$

3- $\cos bn$

4- $n e^{an} \sin bn$

5- $e^{\alpha n} \sin bn = \frac{e^{a} z^{-1} \sin b}{1 - 2z^{-1} e^{a} \cos b + (e^{a} z^{-1})^2}$

6- $e^{\alpha n} \cos bn = \frac{1 - e^{a} z^{-1} \cos b}{1 - 2z^{-1} e^{a} \cos b + (e^{a} z^{-1})^2}$

$$\sin bn = \frac{e^{jbn} - e^{-jbn}}{2j} \Rightarrow X(z) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1 - e^{jb} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-jb} z^{-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2j} \left(\frac{1 - e^{-jb} z^{-1} - 1 + e^{jb} z^{-1}}{1 - e^{-jb} z^{-1} - e^{jb} z^{-1} + z^{-2}} \right) = \frac{z^{-1} \sin b}{1 - 2 z^{-1} \cos b + z^{-2}}$$

۸۰/۲/۳۰

5. $y[n] = x_1[n] * x_2[n] \longleftrightarrow Y(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$

ناحیه همگرایی : اشتراک نواحی همگرایی X_1 و X_2 . (صفر و بینهایت دقت شود.)

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] z^{-n}, \quad y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k] \qquad x_1[n] \,,\, x_2[n] \text{ علّی}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k] z^{-n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x_1[k] \sum_{n=0}^{\infty} x_2[n-k] z^{-n} \longrightarrow \begin{matrix} n_1 = n-k \\ n = n_1+k \end{matrix} \longrightarrow$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x_1[k] z^{-k} \sum_{\cancel{n_1=-k}}^{\infty} x_2[n_1] z^{-n_1}$$

$\hookrightarrow n_1 = 0 \Leftarrow$ صفر است $n_1<0$ برای $x_2[n_1]$ و $-k<0$

$$= X_1(z) X_2(z)$$

$$\xrightarrow[x[n]]{X(z)} \boxed{H(z)}_{h[n]} \longrightarrow \begin{matrix} Y(z) = H(z)X(z) \\ y[n] = h[n] * x[n] \end{matrix}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Big|_{\text{شرایط اولیه صفر}} \longleftrightarrow H(z) = \mathcal{Z}\left[h[n] \right]$$

$$6.\ y[n] = \alpha^{n} x[n] \longleftrightarrow Y(z) = X(\alpha^{-1} z)$$

$$\mathcal{Z}\ Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \alpha^{n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \times (\alpha^{-1} z)^{-n}$$

$$7.\ y[n] = n\, x[n] \longleftrightarrow Y(z) = -z \frac{dX(z)}{dz}$$

ناحیه همگرایی = ناحیه همگرایی $X(z)$ (به صفر در بینهایت دقت شود)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \rightarrow \frac{dX(z)}{dz} = -\sum_{n=0}^{\infty} n\, x[n] z^{-n-1}$$

$$\rightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, x[n] z^{-n}$$

مثال $\quad z[n] = n\, x[n] \qquad y[n] = n\, z[n] \qquad y[n] = n^2 x[n]$

$$Z(z) = -z \frac{dX(z)}{dz} \qquad Y(z) = -z \frac{dZ(z)}{dz} \qquad \rightarrow Y(z) = z^2 \frac{d^2 X(z)}{dz^2} + z \frac{dX(z)}{dz}$$

$* \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r] \rightarrow H(z)=?$

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

$$\rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

پس تابع تبدیل سیستمی که با معادله LCCDE بیان می‌شود rational function است.

محاسبه عکس تبدیل z :

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[0]+x[1]z^{-1}+\dots$$

محاسبه عکس تبدیل z ← روش تقسیم یا بسط سری ← اگر rational function نبود هم قابل استفاده است.
← روش تجزیه به کسرهای ساده ← جمله عمومی را بدست می‌دهد.

مثال: $X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}} = 1+z^{-1}+z^{-2}+\dots \Rightarrow x[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases} = u[n]$

$|z^{-1}|<1 \rightarrow |z|>1$

$$X(z)=\sin(z^{-1}) = z^{-1}-\frac{z^{-3}}{3!}+\frac{z^{-5}}{5!}-\dots$$

$$x[n]=\begin{cases}0 & n \text{ زوج} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n!} & n \text{ فرد}\end{cases}$$

مثال: روش تجزیه به کسرهای ساده

$$X(z)=\frac{1}{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2-1.2z+0.2}=\frac{z^2}{(z-1)(z-0.2)}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z}{(z-1)(z-0.2)}=\frac{1.25}{z-1}+\frac{-0.25}{z-0.2}$$

$$\hookrightarrow X(z)=\frac{X(z)}{z^{-1}\times z}=\frac{1.25}{1-z^{-1}}-\frac{0.25}{1-0.2z^{-1}}$$

$$* \; k^n U[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-kz^{-1}} \qquad |z|>k \; *$$

$$\Rightarrow x[n] = 1.25\, U[n] - 0.25\,(0.2)^n U[n] \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x[n] = 1.25 \ldots$$

مثال قبل به روش ۱:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-1.2z^{-1}-0.2z^{-2} \\ \hline 1.2z^{-1}-0.2z^{-2} & 1+1.2z^{-1}+1.24z^{-2}+1.248z^{-3} \\ 1.24z^{-2}-0.24z^{-3} & \end{array}$$

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = 1.25$$

مثال: $x_1[n] = x[n-2] \rightarrow$ شیفت (روش ۱)

$$X_1(z) = \frac{z^{-2}}{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}}$$

روش ۲)

$$X_1(z) \times \frac{z^2}{z^2} = \frac{1}{z^2-1.2z+0.2z} = \frac{1}{(z-1)(z-0.2)}$$

$$\frac{X_1(z)}{z} = \frac{1}{z(z-1)(z-0.2)} = \frac{5}{z} + \frac{1.25}{z-1} - \frac{6.25}{z-0.2}$$

$$\Rightarrow X_1(z) = 5 + \frac{1.25}{1-z^{-1}} - \frac{6.25}{1-0.2z^{-1}} \Rightarrow x[n] = 5\delta[n] + 1.25\,U[n] - 6.25\,(0.2)^n U[n]$$

$$x_1[0] = 0 \qquad x_1[1] = 0 \qquad x_1[2] = 1 \qquad x_1[3] = 1.2 \quad \ldots$$

پاسخ ضربه:

$$y[n] = x[n] + x[n-2] \xrightarrow{\text{FIR}} h[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$$

$$Y(z) = X(z) + z^{-2}X(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + z^{-2} \rightarrow h[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$$

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n] \xrightarrow{\text{IIR}}$$ حل معادله دیفرانس $\quad h[n] = \alpha^n U[n] \quad |\alpha|<1$

تبدیل z $\quad Y(z) - \alpha z^{-1} Y(z) = X(z)$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \Rightarrow h[n] = \alpha^n U[n]$$

$$H(z) = \frac{z}{z-\alpha} \qquad |z| = |\alpha| \qquad |\alpha| < 1$$

$$x[n] = A e^{j(\omega n + \theta)} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} h[k]\, A\, e^{j\omega(n-k)+j\theta} = A e^{j(\omega n+\theta)} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k}}_{\text{مشخصه فرکانسی سیستم}}$$

$=$ DTFT ؟

⇐ دامنه خروجی = دامنه ورودی × دامنه مشخصه ، فاز خروجی = فاز ورودی + فاز مشخصه

$$H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega})$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} \qquad H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

پس مشخصه فرکانسی همان تبدیل Z پاسخ ضربه است اگر $z = e^{j\omega}$ ([illegible])

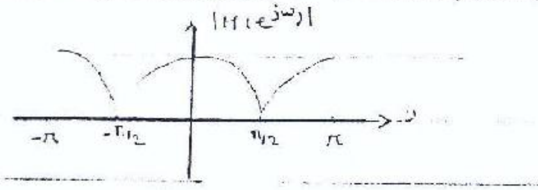
$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2\pi)})$ مشخصه فرکانسی چون متناوب است در بازه $(-\pi,\pi)$ رسم می‌کنیم. $\omega = \frac{2\pi}{T_s}$

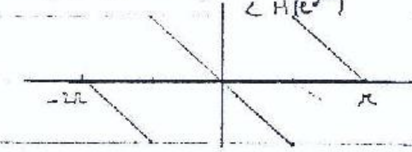
$|H(e^{j\omega})|$ تابعی زوج ، $\angle H(e^{j\omega})$ تابعی فرد

$$y[n] = x[n] + x[n-2] \qquad Y(z) = X(z) + X(z)\, z^{-2}$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + z^{-2}$$

$$H(e^{j\omega}) = 1 + e^{-2j\omega} = e^{-j\omega}(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) = \underbrace{e^{-j\omega}}_{\text{فاز} \to \text{فرد}} \times \underbrace{2\cos\omega}_{\text{زوج} \to \text{نمی‌تواند منفی شود}}$$





این فیلتر میان نگذر است. $f=0 \to \omega=0 \to e^{j\omega} \Rightarrow z=1$ ← dc گین ← $H(z=1)$

$\frac{f_s}{2}$ گین در ← $H(z=-1)$

$x[n] = A\cos \omega n$

$\omega=0 \to x[0]=A \quad x[1]=A \quad x[2]=A$

ماکزیمم تغییرات به ازای $\omega=\pi$ $\quad \omega=\pi \to x[0]=A \quad x[1]=-A \quad x[2]=A$

پایین گذر   بالاگذر   میان نگذر   میان گذر

۸۰/۳/۴

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$ DTFT: Descrete Time Fourier Trans

همه خواص تبدیل Z را دارد چون دقیقاً همان تبدیل Z را داریم که به جای Z ، $e^{j\omega}$ گذاشته ایم.

یافتن معکوس رابطه بالا. $\to \int_0^{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega m}\, d\omega = \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega(n-m)}\, d\omega$

$$\to \int_0^{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega m}\, d\omega = \sum x[n] \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-j\omega(n-m)}\, d\omega}_{2\pi\,\delta_{mn}} = 2\pi\, x[m]$$

$$\begin{cases} m=n & 1 \\ m\neq n & 0 \end{cases}$$

$$\to x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

شرط کافی برای وجود فوریه این است که سیگنال، انرژی سیگنال باشد. $\sum_{-\infty}^{+\infty} |x[k]|^2 < \infty$

تمرین

Δ DTFT ، را برای $u[n]$ بدست آورید.

- مثال: پاسخ پله سیستم $S[n]$ است. $U[n] \to S[n]$

ورودی را بصورت ترکیب توابع خطی می‌نویسیم ← بصورت ترکیب ضربه‌های واحد

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$h[n] = S[n] - S[n-1]$$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \underbrace{S[n] * x[n]}_{y_S[n]} - S[n-1] * x[n]$$

$$y[n] = y_S[n] - y_S[n-1]$$

۵) اثبات کنید:

$$x_1[n-n_1] * x_2[n-n_2] = y[n-n_1-n_2] = x_1[n-n_3] * x_2[n-n_4]$$

به شرط آنکه $n_1+n_2=n_3+n_4$

- مثال: $x[n]$، سیستم علی فرض می‌شود $\quad y[n] - \alpha y[n-1] = x[n]$

مقدار داده شده ← $y[-1]$ $\quad \to y[n] = \alpha y[n-1] + x[n]$

$n=0 \quad y[0] = \alpha y[-1] + x[0]$

$n=1 \quad y[1] = \alpha y[0] + x[1] = \alpha^2 y[-1] + \alpha x[0] + x[1]$

$n=2 \quad y[2] = \alpha y[1] + x[2] = \alpha^3 y[-1] + \alpha^2 x[0] + \alpha x[1] + x[2]$

$$\vdots \to y[n] = \underbrace{\alpha^{n+1} y[-1]}_{\text{پاسخ ورودی صفر سیستم}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \alpha^k x[n-k]}_{\text{پاسخ حالت صفر سیستم } h[n]*x[n]} \qquad |\alpha|>1$$

* روش‌های حل معادله دیفرانس ← تبدیل Z
↘ روش حل زمانی

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n]$$

پاسخ همگن $\quad y_h[n] - \alpha y_h[n-1] = 0$

به دنبال تابعی هستیم که خودش با شیفت داده‌هایش ضریبی از خودش باشد ...

$x[n] = \lambda^n \longrightarrow x[n-n_0] = \lambda^{n-n_0} = \frac{1}{\lambda^{n_0}} \lambda^n$

$\longrightarrow \lambda^n - \alpha \lambda^{n-1} = 0 \longrightarrow \lambda^{n-1}(\lambda - \alpha) = 0 \quad \lambda = \alpha$

$y_h[n] = c_1 (\alpha)^n \longrightarrow y[-1] = c_1 \alpha^{-1}$

مثال: $y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n]$

$y_h[n] - 3y_h[n-1] - 4y_h[n-2] = 0$

$y_h[n] = \lambda^n \longrightarrow$ پاسخ پیشنهادی

دو تا شرط اولیه دارد که باید متوالی باشند. مثلاً $y[-1]$ و $y[-2]$

$\lambda^n - 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} = 0 \longrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 4 , \lambda_2 = -1$

$\longrightarrow y_h[n] = c_1(-1)^n + c_2(4)^n$

نتیجه: سیستم ناپایدار است. (-1) روی دایره واحد و 4 خارج آن.

ولی ناپایدار است که $c_1 \neq 0$ $\quad y_h[n] = c_1(2)^n + c_2(1/3)^n$

یعنی اگر c_1 طوری باشد که قطب بیرون دایره واحد را حذف کند، پایدار می‌شود.

۵ بخش همگن پاسخ را چگونه از تبدیل z بدست می‌آوریم.

ما شرایط اولیه را در بخش همگن می‌آوریم.

سیستم خطی: برای x_p و y_p معنی دارد.

اگر شرط اولیه برای پاسخ خصوصی صدق کند، سیستم از خطی بودن می‌افتد.

روشهای حل برای پاسخ خصوصی ← روش تغییر پارامتر ← استفاده می‌کنیم در اینجا.

یا بر مبنای جنس ورودی، یک پاسخ در نظر می‌گرفتیم.

روش اپراتوری ← که همان روش z است.

ورودی	پاسخ پیشنهادی
A	K
$A m^{n}$	$K m^{n}$
$A n^{m}$ (معادل با n^m در پیوسته)	$K_0 n^{m} + K_1 n^{m-1} + \dots + K_m$
$A^{n} n^{m}$	$A^{n} (K_0 n^{m} + \dots + K_m)$
$A \cos\omega_0 n$ یا $A \sin\omega_0 n$	$K_1 \cos\omega_0 n + K_2 \sin\omega_0 n$

مثال: $y[n] - \alpha\, y[n-1] = u[n]$

پاسخ پیشنهادی K برای $n > 0$ تا $y[n-1]$ را هم در برگیرد

$K - \alpha K = 1 \implies K = \frac{1}{1-\alpha} \rightarrow y_p[n] = \frac{1}{1-\alpha} \quad n > 0$

پاسخ همگن و پاسخ خصوصی توسط نقطه شروع و شرط اولیه با هم ادغام می‌شوند. اگر سیستم شرایط اولیه نداشت پاسخ همگن هم نداریم.

مثال: $y[n] - \frac{5}{6}\, y[n-1] + \frac{1}{6}\, y[n-2] = 2^{n} u[n]$

$y_p[n] = K 2^{n} \qquad n \geq 2$

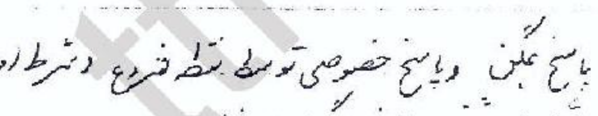
$K 2^{n} - \frac{5}{6} K 2^{n-1} + \frac{1}{6} K 2^{n-2} = 2^{n}$

$2^{2} K - \frac{5}{6} 2 K + \frac{1}{6} K = 2^{2} \qquad K = \frac{8}{5}$

$\longrightarrow y_p[n] = \frac{8}{5} (2)^{K}$

شرایط اولیه $y[0]$ و $y[1]$

$x(t)$ —×— $x_s(t)$



* به چه صورت $x(t)$ را از روی x_s بدست بیاوریم. (بدست آوردن سیگنال آنالوگ از روی سیگنال گسسته)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,\varphi_n(t) = x(t)$$

می توانیم بجای کلید یک سیگنال متناوب $p(t)$ (به صورت کشیده شده) را در $x(t)$ ضرب کنیم. $p(t)$ متناوب ← فوریه دارد ← یعنی می توان نوشت:

$$(*)\; p(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_s t}$$

$$x_s(t) = x(t)\cdot p(t)$$

$$X_s(f) = \mathcal{F}[x_s(t)] = X(f) * P(f)$$

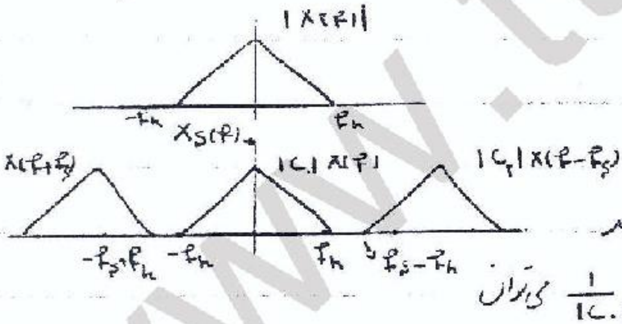
$X_s(f)$ اینجا به معنای تبدیل فوریه $x_s(t)$ است نه به معنی sample های X_s

$$(*) \Rightarrow P(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\,\delta(f-nf_s)$$

$$\Rightarrow * X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n X(f-nf_s) *$$

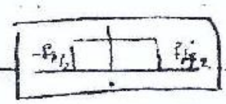
اگر ایده آل باشد C_n ها f_s (یعنی اگر $p(t)$ قطار ضربه باشد $C_n = f_s$)

$$\Rightarrow X_s(f) = \dots + C_{-1}X(f+f_s) + C_0 X(f) + C_1 X(f-f_s) + \dots$$



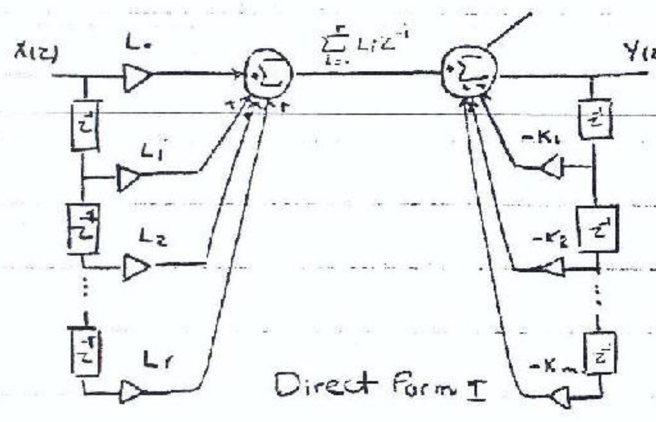
اگر این نواحی هم پوشانی نداشته باشند بوسیله یک فیلتر lowpass با بهره $\frac{1}{|C_0|}$ می توان $X(f)$، نمونه بالایی را بدست آورد.

$$\left.\begin{array}{l} f_h < f_s - f_h \\ -f_h > -f_s + f_h \end{array}\right\} \rightarrow f_s > 2f_h \quad \text{شرط نایکوئیست}$$

$x_s(t)$  $x(t)$

$x_s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t-nT_s)$ $\qquad h(t) = \mathrm{Sinc}(f_s t)$ $\qquad y(t)$

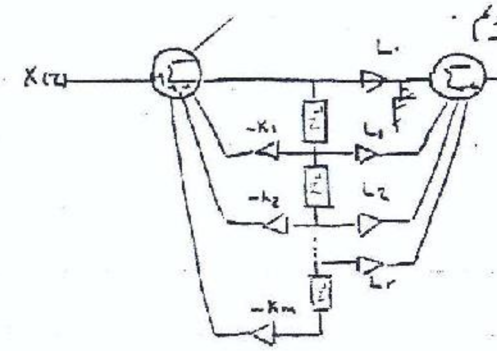
$$x(\cdot)\,\delta(t) \xrightarrow{\text{فیلتر}} x(\cdot)\,\mathrm{Sin}f_s t$$



(1

$$\sum_{i=1}^{r} L_i z^{-i} X(z) - \sum_{j=1}^{M} K_j z^{-j} Y(z) = Y(z)$$

در سیستم خطی جای دو عملگر را می توان تغییر داد. پس داریم:



(۲ Direct Form II

فرم کانونی : کمینه تأخیر را دارد.

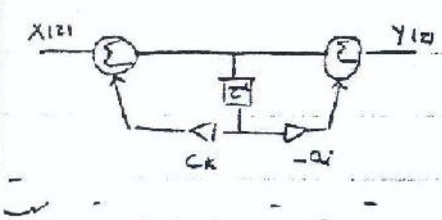
(۳

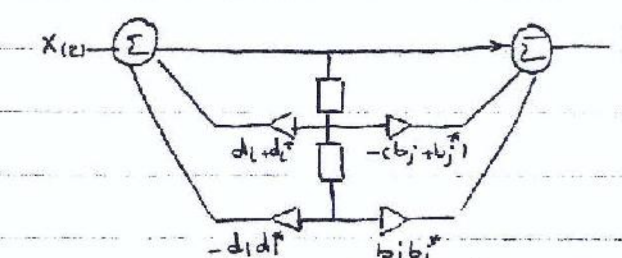
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{r} L_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{M} K_j z^{-j}} = K z^{-m} \frac{\prod_{i=1}^{N_1} (1 - a_i z^{-1}) \prod_{j=1}^{N_2} (1 - b_j^* z^{-1})(1 - b_j z^{-1})}{\prod_{k=1}^{D_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{l=1}^{D_2} (1 - d_l^* z^{-1})(1 - d_l z^{-1})}$$

$$H_1(z) = \frac{1 - a_i z^{-1}}{1 - c_k z^{-1}} \qquad H_2(z) = \frac{(1 - b_j z^{-1})(1 - b_j^* z^{-1})}{(1 - d_l z^{-1})(1 - d_l^* z^{-1})}$$

حقیقی ← اندازه

$$= \frac{1 - (b_j + b_j^*) z^{-1} + b_j b_j^* z^{-2}}{1 - (d_l + d_l^*) z^{-1} + d_l d_l^* z^{-2}}$$



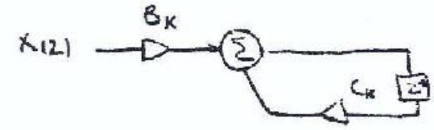


تمام جملات H(z) یا به صورت H1(z) است یا به صورت H2(z). بنابراین با داشتن اینها کل

روش ساخت سری cascade

به صورت cascade پشت سرهم می بندیم

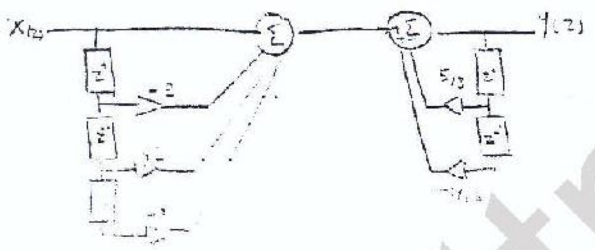
$$H(z)=\sum_{i=1}^{M} A_i z^{-i}+\sum_{k=1}^{D_1}\frac{B_k}{1-C_k z^{-1}}+\sum_{\ell=1}^{D_2}\frac{1-e_\ell z^{-1}}{(1-d_\ell z^{-1})(1-d_\ell^{*} z^{-1})}$$



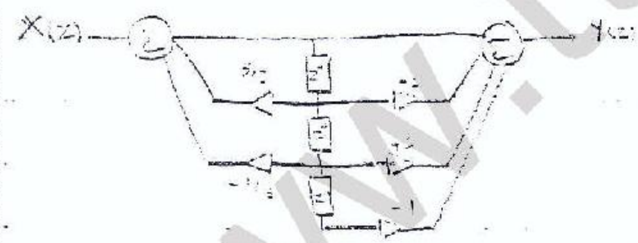
$$\frac{B_k}{1-C_k z^{-1}}$$

مثال :

$$H(z)=\frac{(1-z^{-1})^3}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{8}z^{-1})}=\frac{1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3}}{1-\frac{5}{8}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}}$$

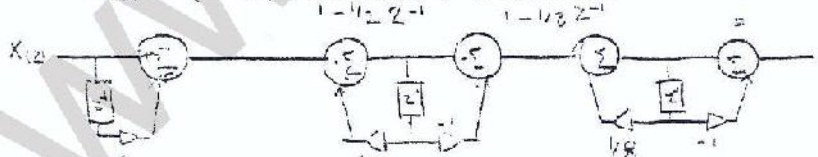


: Direct Form I



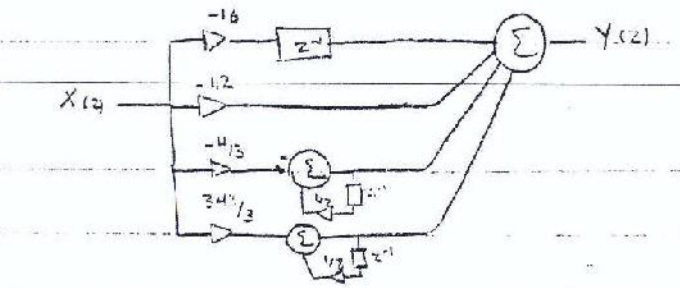
: Direct Form II

$$H(z)=(1-z^{-1})\times\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\times\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{8}z^{-1}}$$



$$\frac{H(z)}{z}=\frac{(z-1)^3}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{8})z^2}=\frac{\overset{-16}{A}}{z^2}+\frac{\overset{-112}{B}}{z}+\frac{\overset{-4/3}{C}}{z-\frac{1}{2}}+\frac{\overset{343/3}{D}}{z-\frac{1}{8}}$$

$$\Rightarrow H(z)=-16z^{-1}-112-\frac{4}{3}\,\frac{1}{1-z^{-1}/2}+\frac{343}{3}\times\frac{1}{1-z^{-1}/8}$$



فرم موازی : تأخیر ماکزیمم برابر با تأخیر یکی از این شاخه‌ها.

قضیه تلگان :

در یک گراف اگر (V, I) صدق کند، [-V, -I] و [V, -I] و [-V, I] هم صدق می‌کند، پس جهت در گراف مهم نیست. تعداد شاخه‌ها هم مهم نیست (اگر یکی از گراف‌ها شاخه‌های بیشتری داشته باشد، برای تساوی همان شاخه‌ها را با گین صفری می‌گذاریم)

$\Rightarrow$

نتیجه قضیه تلگان این است که می‌توان در ۴ حالت بالا جهت‌ها را تغییر داد و ۴ حالت جدید به دست آورد.

۸۰/۳/۱۹ :

تبدیل فوریه گسسته :

در پیوسته، $x(t) = \sum X_K e^{j2\pi k f_0 t}$

$$X_K = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$X_k = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} x_s(n\Delta t)\, e^{-j2\pi k \frac{n\Delta t}{T_0}} \times \frac{T_0}{N}$$

در پیوسته داشتیم : t

در گسسته داریم : $n\Delta t$

دوره تناوب سیگنال پیوسته $T_0 = N\Delta t$

دوره تناوب سیگنال گسسته

۵۴

$$\Rightarrow X_K = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi K \frac{n \Delta t}{T}}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j(\frac{2\pi}{N}) K n}$$

حالا تعریف می‌کنیم DFT را به این صورت :

فرمول سنتز $\quad X[K] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j(\frac{2\pi}{N}) K n} \qquad K=0,1,\dots,N-1$

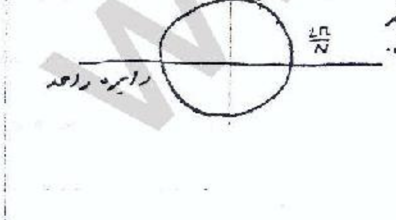
DFT نیز متناوب است . نشان دهید : $\quad X[K+N] = X[K]$

$$K=0 \Rightarrow X[K] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \rightarrow \text{جمع سیگنال}$$

$$X_1(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, Z^{-n}$$

$$Z = e^{-j\frac{2\pi}{N} K}$$

$$\Rightarrow X_1(Z) \xrightarrow{\text{تبدیل می‌شود}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, Z^{-n}$$



DFT همان sample های DTFT است .
یعنی اگر از روی DTFT نمونه برداری کنیم و فاصله‌ها $\frac{2\pi}{N}$ باشد، DFT بدست می‌آید.
برای یک سکانس DFT تعریف می‌کنیم .
هر سکانس انرژی دار را می‌توانیم DFT

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} X[K]\, e^{j\frac{2\pi}{N} K n}$$

گاهی $e^{-j\frac{2\pi}{N}} = W_N$

$$= \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{K-1} x[l]\, e^{-j(\frac{2\pi}{N})Kl} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}Kn}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{K-1} x[K] \sum_{K=0}^{N-1} e^{-j(\frac{2\pi}{N})Kl}\, e^{j\frac{2\pi}{N}Kn} = x[n]$$

$$\sum_{K=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(n-l)K} = \begin{cases} 0 & n \neq l \;\&\; n \neq N+l \\ N & n \overset{K}{=} l \end{cases} = N\,\delta_{n,l}$$

تمام خواص DTFT در DFT هم صدق می کند. ←

DFT خطی است.

△ فرض کنید $N_1 = 3$ و $N_2 = 6$، در مجموع، DFT کدام یک را لحاظ می کنیم N_1 یا N_2؟

اگر $x[n]$ حقیقی باشد،

△ امکان داشتن که با آن $X[k]$ را بدست می آوریم (DFT)، IDFT نیز بدست می آوریم.
در این صورت که $x^*[n]$ را می دهیم.

مثال

$$x[n] = 4 + 3\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \rightarrow N' = 4 \qquad N = 8$$

$$x[n] = 4 + \frac{3}{2j}\left(e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2}\right) = 4 - \frac{3}{2}j\left(e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2}\right)$$

$$X_K = \sum_{n=0}^{7} \left(4 - 3/2j\, e^{jn\pi/2} + 3/2j\, e^{-jn\pi/2}\right) e^{-j\frac{2\pi}{8}Kn}$$

$$= 4\sum_{n=0}^{7} e^{-j\frac{2\pi}{8}Kn} - 3/2j \sum_{n=0}^{7} e^{j\frac{n\pi}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{8}Kn} + 3/2j \sum_{n=0}^{7} e^{-j\frac{n\pi}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{8}Kn}$$

$$= 4 \times 8\, \delta_{K,0} - 3/2j \times 8\, \delta_{K,2} + 8 \times 3/2j\, \delta_{K,6}$$

$$e^{j\frac{n\pi}{2}} = e^{j\frac{2\pi}{8}\times 2}$$

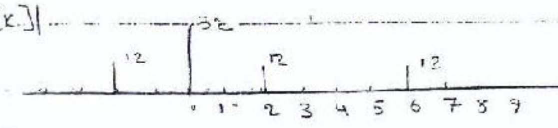
چون متناوب است بجای 2- می گذاریم 6

$X[0] = 32$ → ۸ بار ۴ با خودش جمع شده است

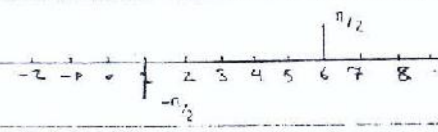
$X[1] = 0 \qquad X[2] = -12j \qquad X[3] = X[4] = X[5] = 0$

$X[6] = 12j$ $\qquad\qquad$ $X[7] = 0$

$|X[K]|$



$\angle X[K]$



خواص DFT :

1) تناوب

2) $\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] \longrightarrow \alpha_1 X_1[K] + \alpha_2 X_2[K]$

3) $x[n-m] \longleftrightarrow e^{-\frac{2\pi}{N}Km} X[K]$

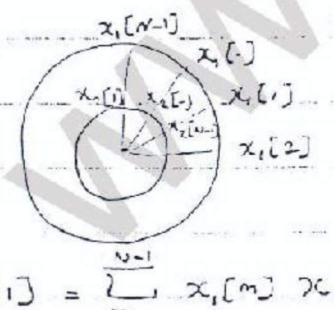
~~4) $x[n]$~~

4) $x[n] e^{j\frac{2\pi}{N}nm} \longleftrightarrow X[K-m]$

5) $\frac{1}{N} X[n] \longleftrightarrow x[-K]$ (تقارن duality

6) $x_1[N] \, \textcircled{N} \, x_2[N] \longleftrightarrow X_1[K] X_2[K]$ کانولوشن حلقوی

$$y[n] = x_1[n] \, \textcircled{N} \, x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[n-m]$$



$$y[0] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[-m] = x_1[0] x_2[0] + x_1[1] x_2[N-1] + \dots$$

$$y[1] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[1-m] = x_1[0] x_2[1] + x_1[1] x_2[0] + x_1[2] x_2[N-1] + \dots$$

یعنی دایره بیرونی ثابت و دایره داخلی را یک واحد می‌چرخانیم ...

به همین دلیل می‌گوییم کانولوشن حلقوی

کانولوشن حلقوی و خطی یک جواب را می‌دهند. چون تعدادشان یکی نیست [illegible]

کانولوشن خطی ← تعداد $N_1 + N_2 - 1$

$y[n] = x_1[n] \circledast x_2[n]$

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n]\, W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]\, x_2[n-m]\, W_N^{kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n-m]\, W_N^{kn} = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \Big(\sum_{n_1=-m}^{N-1} x_2[n_1]\, W_N^{kn_1} \Big) \times W_N^{km}$$

جمع نمونه‌های یک دوره سیگنال متناوب به نقطه شروع بستگی ندارد

$$= X_1[k]\, X_2[k]$$

7) $x_1[-n] \longleftrightarrow X_1^*[k]$

8) $\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$

$y[n] = x_1[n] \circledast x_2[n] \qquad x_2[n] = x_1[-n]$

$y[n] = x_1[n] \circledast x_1[-n]$

$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]\, x_2[n-m] \longrightarrow y[0] = \sum_{n=0}^{N-1} |x_1[n]|^2$

$Y[k] = X_1[k]\, X_2[k] = X_1[k]\, X_1^*[k]$

$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k]\, W_N^{-kn}$

$$y[0] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1[k]\, X_1^*[k] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_1[k]|^2$$

9) DFT یک تابع حقیقی و زوج، حقیقی و زوج است.

10) 〃 〃 〃 فرد، موهومی خالص و فرد 〃

۱۴