بسمه تعالی

جزوه ی الکترومغناطیس - رشته ی برق- گرایش شبکه های انتقال و توزیع – دانشگاه آزاد شوشتر- استاد محقق

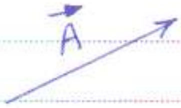
Subject: 1

Year. Month. Date. ( )

ج اول ۸۹/۷/۲۱

فصل اول:

آنالیز برداری



$|\vec{A}|$ یا A ← اندازه بردار

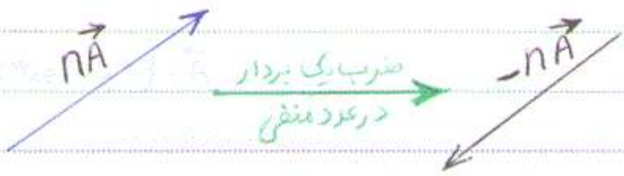
$\vec{A}$ ← خود بردار

$$\begin{cases} AB = 4 \\ \vec{A}\cdot\vec{B} \neq 4 \end{cases}$$

$$|\vec{A}+\vec{B}| \neq A+B$$

جمع خود بردارها $\neq$ جمع اندازه بردارها.

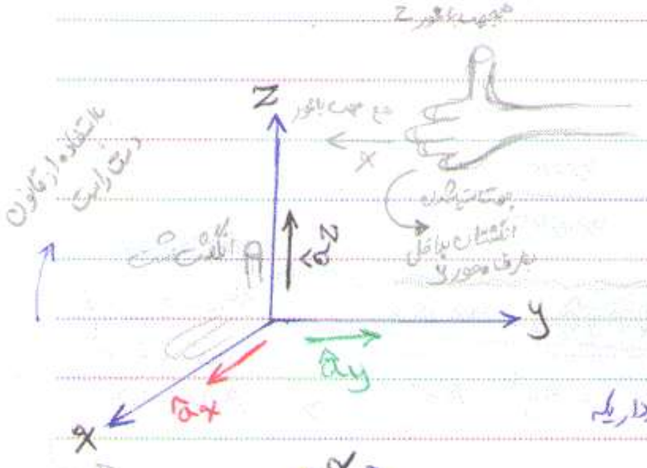
ضرب عدد در بردار: عدد منفی در بردار جهت بردار را عوض میکنه.



دستگاههای مختصات متعامد متداول:

الف) دستگاه مختصات دکارتی (کارتزین):

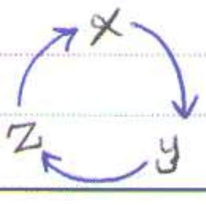
متعامد: برای مشخص کردن یک نقطه در فضا از سه صفحه عمود بر هم استفاده میکنند.



بردار یکه $\hat{a}_x$: برداری با طول یک در امتداد محور x ها

$\hat{a}_x$ ← علامت بردار یکه

بردارهای یکه دو به دو بر هم عمودند



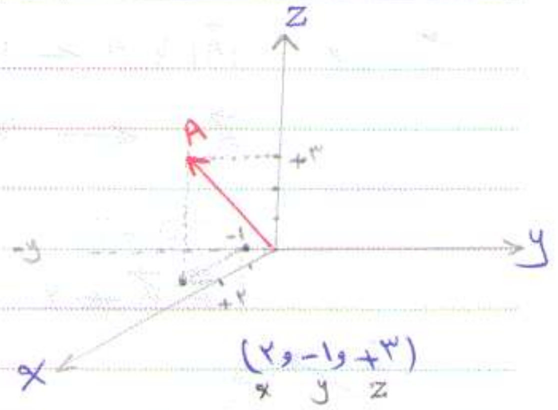
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

مولفه‌های یک بردار میباشد $\overset{x}{(٢}\,\overset{y}{,-١}\,\overset{z}{,+٣)}$

(مثال)

$$\begin{cases} \vec{A} = ٢\hat{a}_x - \hat{a}_y + ٣\hat{a}_z \\ \vec{B} = ٣/٥\hat{a}_x + ۴\hat{a}_y - ٧\hat{a}_z \end{cases}$$



١) $\vec{A}+\vec{B} = ٥/٥\hat{a}_x + ٣\hat{a}_y - ۴\hat{a}_z$

٢) $\vec{A}-\vec{B} = \vec{A}+(-\vec{B}) = -١/٥\hat{a}_x - ٥\hat{a}_y + ١٠\hat{a}_z$

٣) $\underbrace{-٢/٧٥\vec{A}}_{\text{ضرب یک عدد در } A} + \underbrace{\frac{١}{٢}\vec{B}}_{\text{ضرب یک عدد در } B} = \dots$

اندازه بردار یا داخل قدرمطلق $|\vec{A}|$: $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

مؤلفه های یک بردار $\vec{A} = (\overset{x}{٢}, \overset{y}{-١}, \overset{z}{+٣})$

بردار یکه A $\quad \hat{a}_A = \dfrac{\vec{A}\ \text{خود بردار}}{A\ \text{اندازه بردار}} =$

$$\hat{a}_A = \frac{A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

خود بردار A: $\dfrac{٢\hat{a}_x - \hat{a}_y + ٣\hat{a}_z}{\sqrt{٢^٢+(-١)^٢+٣^٢} = \sqrt{١۴}}$ اندازه بردار A

طرفین وسطین بردار A $\quad \vec{A} = \underbrace{A}_{\text{اندازه بردار } A} \cdot \underbrace{\hat{a}_A}_{\text{بردار یکه } A}$

PAPCO

Subject: 2
Year. Month. Date. ( )

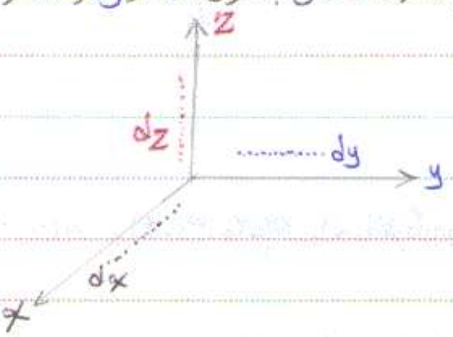
المان :

یک قسمت از یک چیز بزرگ که آنقدر کوچک است که میتوان آنرا بعنوان یک نقطه در نظر گرفت

المان های دستگاه دکارتی :

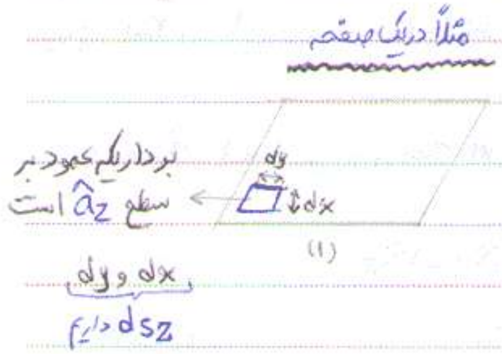
۱ـ المان های طول :

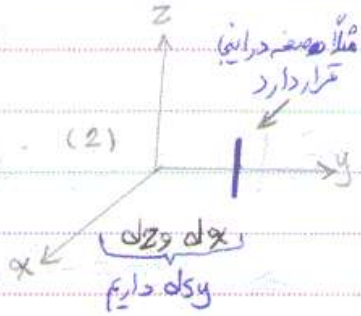
المانهائی که در امتداد x و y و z باشند. المانهائی با طول dx و dy و dz گویند (مثل پاره خطها میباشند)



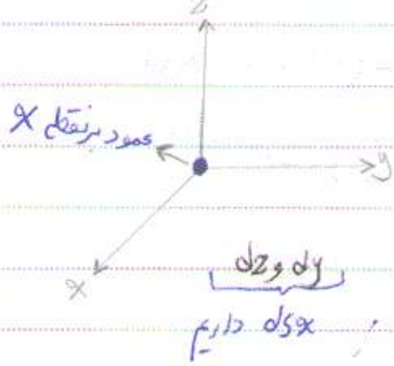
dx و dy و dz المان های طول میباشند

۲ـ المان های سطح :





ds : یعنی المان سطح



$$\begin{cases} \vec{ds}_z = dx\,dy\,\hat{a}_z \\ \vec{ds}_y = dx\,dz\,\hat{a}_y \\ \vec{ds}_x = dy\,dz\,\hat{a}_x \end{cases}$$

دو طرف حاصل مساوی بایستی بصورت برداری باشند

$\rightarrow = \wedge$

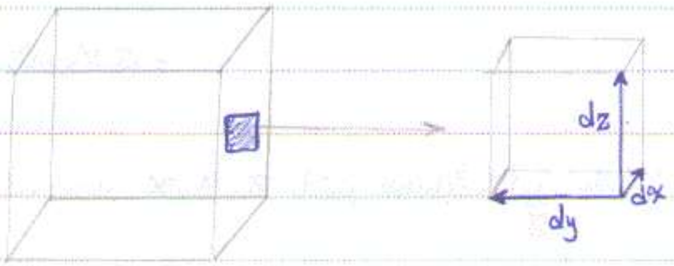
علامت بردار

P4PCO

المان حجم : dv

المان حجم برداری نیست. بصورت حاصلضرب طول × عرض × ارتفاع میباشد

dx , dy , dz



تمرین) 1-1 درمتن درس

نقاط $M(-1,2,1)$ و $N(3,-3,0)$ و $P(-2,-3,-4)$ را در نظر بگیرید. کمیات زیر را بیابید

الف) $\vec{R}_{MN}$ (منظور برداری است که نقطه M را به N وصل میکند) ب) $\vec{R}_{MN}+\vec{R}_{MP}$

پ) $|\vec{r}_m|$ (اندازه بردار مکان نقطه m)

ت) $\hat{a}_{MP}$ (بردار یکه ای در جهت M به P) ث) $|2\vec{r}_P - 3\vec{r}_N|$ اندازه بردار

الف) $\vec{R}_{MN} = \vec{r}_m - \vec{r}_N$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} r_m = -1\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 1\hat{a}_z \\ r_N = 3\hat{a}_x - 3\hat{a}_y \end{cases}$$

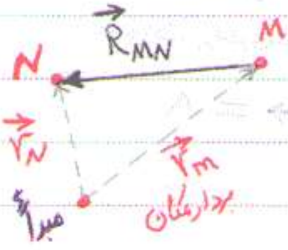
بردار مکان r_m

بردار مکان r_N

$\vec{R}_{MN} = \vec{r}_N - \vec{r}_m$ طبق ۱-۱۱ کتاب

$$\rightarrow \vec{R}_{MN} = -\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + \hat{a}_z - (3\hat{a}_x - 3\hat{a}_y)$$

$$\boxed{\vec{R}_{MN} = -4\hat{a}_x + 5\hat{a}_y + \hat{a}_z}$$ اشتباه است



اگر ابتدای دو بردار یکی باشد از انتهای بردار اول به انتهای بردار دوم رسم میشود

$\vec{BA} = \vec{A} - \vec{B}$

$\vec{R}_{MN} = \vec{R}_N - \vec{R}_M$

Subject: 3
Year. Month. Date. ( )

پ) $|\vec{r}_m| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $M(-1,2,1)$

$|\vec{r}_m| = \sqrt{(-1)^2+(2)^2+(1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

ت) $\hat{a}_{MP} = \dfrac{\vec{R}_{MP}}{|\vec{R}_{MP}|}$ خود بردار / اندازه بردار

$\vec{R}_{MP} = \vec{r}_m - \vec{r}_p$

$\vec{r}_p = -2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y - 4\hat{a}_z$ $\rightarrow \vec{R}_{MP} = \hat{a}_x + 5\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$

$|\vec{R}_{MP}| = \sqrt{(1)^2+(5)^2+(5)^2} = \sqrt{51} = 7{,}14$

$\rightarrow \hat{a}_{MP} = \dfrac{a_x + 5a_y + 5a_z}{7{,}14} = 0{,}14\hat{a}_x + 0{,}7\hat{a}_y + 0{,}7\hat{a}_z$

ب) $\vec{R}_{MN} + \vec{R}_{MP}$ داشتیم $r_m = -\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + \hat{a}_z$

$r_p = -2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y - 4\hat{a}_z$

داشتیم $\vec{R}_{MN} = -4\hat{a}_x + 5\hat{a}_y + \hat{a}_z$

$\rightarrow$ $\vec{R}_{MP} = r_m - r_p = -\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + \hat{a}_z + 2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y + 4\hat{a}_z =$

$\rightarrow \vec{R}_{MP} = \hat{a}_x + 5\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$

P4PCO

میدان برداری :

یک معادله یا تابعی که به هر نقطه از فضا ، یک بردار نسبت میدهد.

یک تابع برداری است برای هر نقطه از فضا یک نقطه معرفی میکند

$$\vec{S} = \frac{1}{xy^2z}\left[2x\hat{a}_x + y^3\hat{a}_y - \hat{a}_z\right]$$

مثال) M (۲, ۱, −۳)

$$\vec{S}_M = \frac{1}{2\times 1^2\times(-3)}\left[4\hat{a}_x + \hat{a}_y - \hat{a}_z\right]$$

$$\boxed{\vec{S}_M = -\frac{4}{6}\hat{a}_x - \frac{1}{6}\hat{a}_y + \frac{1}{6}\hat{a}_z}$$

ضرب بردارها :

الف) ضرب داخلی یا نقطه‌ای - ۱ اسکالر

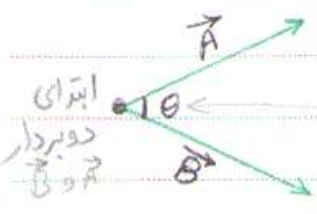
ب) ضرب خارجی یا برداری

ضرب داخلی یا نقطه‌ای با نماد نقطه نشان داده میشود

اندازه A — اندازه B — زاویه بین هردو B و A

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$ → زاویه کوچکتر بین ابتدای دو بردار

نکات مهم *



۱- دو بردار عمود برهم دارای زاویه صفر میباشند (زاویه بین آنها θ)

۲- زاویه بین دو بردار از ۹۰ تا ۱۸۰ حاصلضرب داخلی آنها منفی است

$$90 < \theta < 180$$

۳- حاصلضرب داخلی دو بردار یکه ، متفاوت صفر است

$$\hat{a}_x\cdot\hat{a}_y = \hat{a}_y\cdot\hat{a}_z = \hat{a}_x\cdot\hat{a}_z = 0$$

$$\hat{a}_x\cdot\hat{a}_x = 1 = \hat{a}_y\cdot\hat{a}_y = \hat{a}_z\cdot\hat{a}_z$$

۴- حاصلضرب داخلی یک بردار یکه در خودش برابر یک است

۵- اگر زاویه θ بین صفر تا 90° باشد حاصلضرب داخلی مثبت است $0<\theta<90^\circ$

* حاصلضرب نیرو در جابجائی کار است
* زمانیکه نیروئی وارد شود و جابجائی نیز در همان جهت انجام گیرد کار انجام گرفته است

اگر جسم تغییر مکان بیابد کار انجام گرفته است

جسم
جسم
نیرو F

F نیرو
کار انجام نگیرد

آیا $\vec{A}\cdot\vec{B}$ با $\vec{B}\cdot\vec{A}$ فرق دارد؟
بایستی از طریق فرمول زیر بررسی شود

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\underline{\theta} \longrightarrow \text{زاویه کوچکتر بین ابتدای دو بردار}$$
$$\vec{B}\cdot\vec{A}=BA\cos\theta$$

حاصلضرب $\vec{A}\cdot\vec{A}$ را محاسبه کنید؟
یعنی بردار $\vec{A}$ در خودش ضرب داخلی شود

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=A\cdot A\cos\underline{\theta} \longrightarrow$$
زاویه بین دو بردار که صفر است یعنی زاویه ای وجود ندارد

$$\longrightarrow \boxed{\vec{A}\cdot\vec{A}=A^2}$$
~~حاصلضرب~~

نکته * حاصلضرب داخلی یک عدد است.

$$\begin{cases}\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z\\ \vec{B}=B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z\end{cases} \longrightarrow \vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\left.\begin{array}{l}a_x\cdot a_y=0\\ a_x\cdot a_z=0\\ a_y\cdot a_z=0\end{array}\right\} \longrightarrow \text{برهم عمود هستند}$$

حاصلضرب دو بردار یکه هم نام یک است (داخلی، برابر) $\hat{a}_x\cdot\hat{a}_x=1$
حاصلضرب دو بردار یکه غیرهمنام برابر صفر است $\hat{a}_x\cdot\hat{a}_y=0$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

زاویه داخلی آنها را میتوان حساب کرد

$$\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|AB|}$$
$\vec{A}\cdot\vec{B} \rightarrow$ بردار $\vec{A}$ در بردار $\vec{B}$
$|AB| \rightarrow$ اندازه A در اندازه B

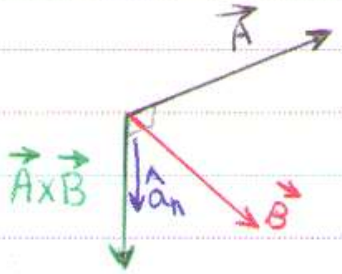
* میدان مغناطیسی، سرعت، نیرو کمیتهای برداری هستند

ضرب خارجی :

نماد ضرب خارجی X میباشد. $\vec{A}\times\vec{B}$

* در ضرب خارجی، حاصل، یک بردار است که اندازه آن برابر $AB\sin\theta$ بوده و جهت آن بر هر دو بردار عمود و از قاعده دست راست بدست می‌آید (نرمال یا عمود n)

$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{a}_n$ بردار یکه a_n



$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{a}_n$

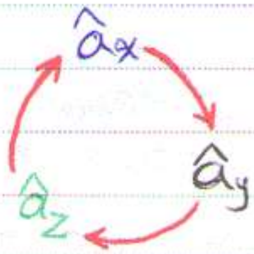
بردار یکه * دست راست در جهت $\vec{A}$ بطوریکه خم شدن چهار انگشت بطرف $\vec{B}$ باشد، آنگاه انگشت شست جهت $\hat{a}_n$ است.

* اگر A و B هم جهت باشند حاصلضرب خارجی دو بردار صفر است یعنی $\theta = 0$ یا $\theta = 180°$

* اگر دو بردار A و B بر هم عمود باشند حاصلضرب خارجی آنها ماکزیمم است یعنی $\theta = 90°$ (بیشینه)
$\sin 90° = 1$

$$\begin{cases} \hat{a}_x\times\hat{a}_x = 0 = \hat{a}_y\times\hat{a}_y = \hat{a}_z\times\hat{a}_z \\ \left.\begin{array}{l} \hat{a}_x\times\hat{a}_y = \hat{a}_z \\ \hat{a}_y\times\hat{a}_z = \hat{a}_x \\ \hat{a}_z\times\hat{a}_x = \hat{a}_y \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{یک منفی ضرب میشوند}]{\text{اگر برعکس شوند در}} \begin{cases} \hat{a}_y\times\hat{a}_x = -\hat{a}_z \\ \hat{a}_z\times\hat{a}_y = -\hat{a}_x \\ \hat{a}_x\times\hat{a}_z = -\hat{a}_y \end{cases} \end{cases}$$

* در ضرب خارجی خاصیت جابجائی نداریم یا منفی داریم



$\vec{B}\times\vec{A} = \vec{A}\times\vec{B}$ آیا باهم مساوی هستند؟

$B\times A = -A\times B$ در یک منفی با هم متفاوتند

ضرب خارجی دو بردار با داشتن مولفه ها

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{array}{|ccc|l} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z & \rightarrow \vec{A}\times\vec{B} \\ A_x & A_y & A_z & \rightarrow \text{مولفه‌های بردار اول} \\ B_x & B_y & B_z & \rightarrow \text{مولفه‌های بردار دوم} \end{array}$$

$$=(\qquad)\hat{a}_x - (\qquad)\hat{a}_y + (\qquad)\hat{a}_z$$

$$= \hat{a}_x\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \hat{a}_y\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{a}_z\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} = \hat{a}_x(A_yB_z - A_zB_y) - \hat{a}_y(A_xB_z - A_zB_x)$$
$$+ \hat{a}_z(A_xB_y - A_yB_x)$$

Subject: ۸۹/۷/۲۸ جلسه دوم
Year. Month. Date.

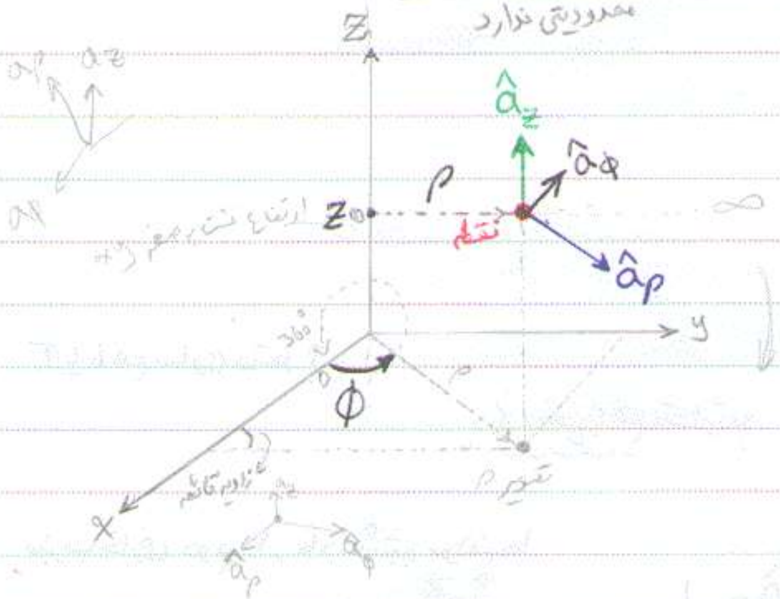
دستگاه مختصات استوانه‌ای (z و ϕ و ρ)

* کمترین فاصله که ρ تا محور z ممکن است داشته باشد صفر است
ρ نمیتوانیم منفی باشد چون ρ منفی نداریم

ρ : فاصله عمودی تا محور z (بطور کلی : $0 \leq \rho < \infty$)

ϕ : زاویه‌ای که ρ با جهت مثبت محور x میسازد (بطور کلی : $0 \leq \phi < 2\pi$) 360°

z : ارتفاع نسبت به صفحه xy (بطور کلی : $-\infty < z < +\infty$)
محدودیتی ندارد



* متغیرهای دستگاه مختصات استوانه‌ای
ρ ، ϕ و z هستند

* متغیرهای دستگاه مختصات کروی
r ، θ و ϕ هستند
فاصله تا مبدا مختصات

بردارهای یکه :

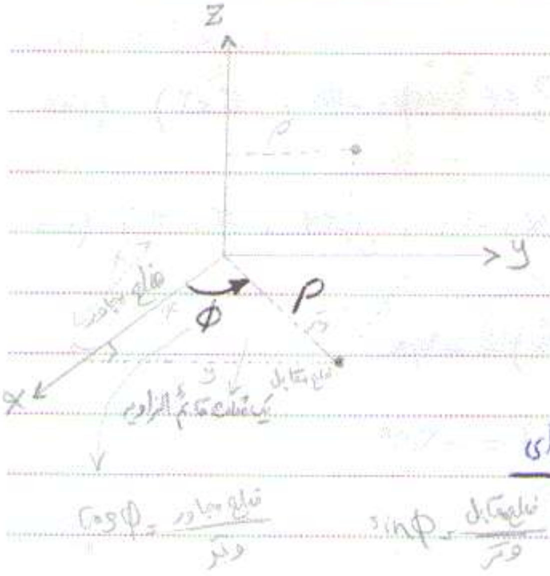
$\hat{a}_\rho$: برداری بطول یک در جهت افزایش ρ در نقطه مورد نظر (در نقاط مختلف جهت $\hat{a}_\rho$ فرق دارد)

$\hat{a}_\phi$: برداری بطول یک در جهت افزایش ϕ در نقطه مورد نظر (در نقاط مختلف جهت $\hat{a}_\phi$ فرق دارد)

$\hat{a}_z$: برداری بطول یک در جهت افزایش z در نقطه مورد نظر (در همه نقاط یکسان است)

* همواره $\hat{a}_\rho$ و $\hat{a}_\phi$ برهم عمودند و $\hat{a}_z$ بر هر دو عمود است

PAPCO



رابطه بین مختصات استوانه‌ای و کارتزین:

زاویه ϕ نزدیک به x است

استوانه‌ای به کارتزین

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

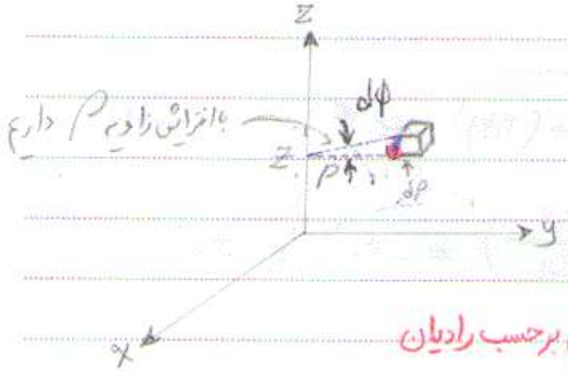
کارتزین به استوانه‌ای

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = tg^{-1}\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

المانها:

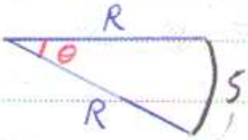
الف) المانهای طول

$d\rho$ و $\rho d\phi$ و dz



θ: زاویه برحسب رادیان

طول سطح $S = R\theta$



فرمول تبدیل درجه به رادیان

$$\frac{\pi}{180} \times (\text{درجه}) = \text{رادیان}$$

ب) المانهای حجم (معادله عرض به ارتفاع)

$\rho d\rho d\phi dz$

ج) المانهای سطح

$\rho d\phi dz$, $d\rho dz$, $\rho d\rho d\phi$

ds_ρ (۱) , ds_ϕ (۲) , ds_z (۳)

بردار یکه عمود بر آنها $\pm\hat{a}_z$ است

در نمای استوانه

ت ۱-۵ کتاب)

الف) $C\,(\rho=4.4$ و $\phi=-115$ و $z=2)$ مختصات کارتزین؟

ب) $D\,(x=-3.1$ و $y=2.6$ و $z=-3)$ مختصات استوانه‌ای؟

حل الف)

کارتزین

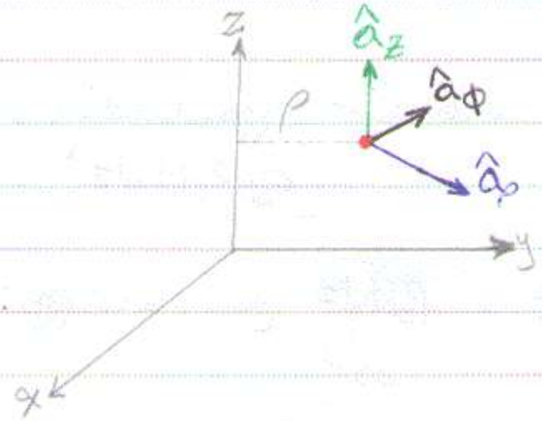
$$\begin{cases} x=\rho\cos\phi=4.4\times\cos(-115^\circ)=-1.8 \\ y=\rho\sin\phi=4.4\times\sin(-115^\circ)=-3.99 \\ z=z=2 \end{cases}$$

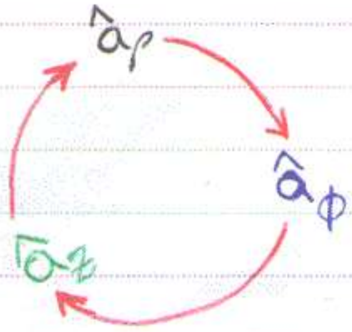
حل ب)

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-3.1)^2+(2.6)^2}\simeq 4 \\ \phi=tg^{-1}\dfrac{y}{x}=tg^{-1}\left(\dfrac{2.6}{-3.1}\right)=-40^\circ \text{ یا } 140^\circ \\ z=z=-3 \end{cases}$$

۴٫۰۴

ضرب خارجی بردارهای یکّه :

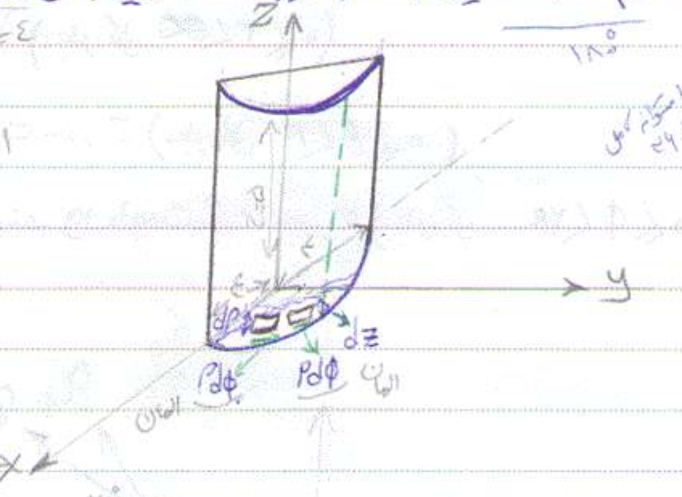




Subject: 7
Year. Month. Date. ( )

مثال) حجم و مساحت نیم استوانه‌ای زیر را با انتگرال گیری بدست آورید. (شعاع برابر ۴ و ارتفاع برابر ۵)

$z=5 \quad \rho=4$



حجم استوانه = مساحت قاعده × ارتفاع

حجم کره = $\frac{4}{3}\pi r^3$

حجم نیم استوانه = $\frac{1}{2}\pi r^2 \times h$

حجم نیم کره = $\frac{2}{3}\pi r^3$

حجم $V=\int dV=\int_{z=0}^{5}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{4} \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$

$$V=\int_{z=0}^{5}\int_{\phi=0}^{\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^4 d\phi\, dz = 8\int_{z=0}^{5}[\phi]_0^{\pi}\, dz = 8\pi\int_0^5 dz$$

$\rightarrow \boxed{V=40\pi}$

* روی کل سطح جانبی ρ ثابت است یعنی برابر ۴ است

حجم نیم استوانه $V=\frac{1}{2}\pi r^2 . h=\frac{1}{2}\pi\times 16\times 5=\boxed{40\pi}$

نیم استوانه است که در وسط برش داده شده و در نتیجه حالت مستطیل تبدیل شده که هرکدام دارای شعاع ۴ در هر دو طرف است

سطح $S=\int dS=\int_{z=0}^{5}\int_{\phi=0}^{\pi}\underbrace{\rho\, d\phi\, dz}_{ds_\rho}+2\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{4}\underbrace{\rho\, d\rho\, d\phi}_{ds_z}+2\int_{z=0}^{5}\int_{\rho=0}^{4}\underbrace{d\rho\, dz}_{ds_\phi}$

دو تا نیم دایره در بالا و پایین داریم

دو صفحه راست داریم

$\rightarrow S=4\times\pi\times 5+2\times\frac{16}{2}\times\pi+2\times 4\times 5=$

$S=20\pi+16\pi+40=36\pi+40$

$S=36\times 3.14+40=153.04 \simeq 153$

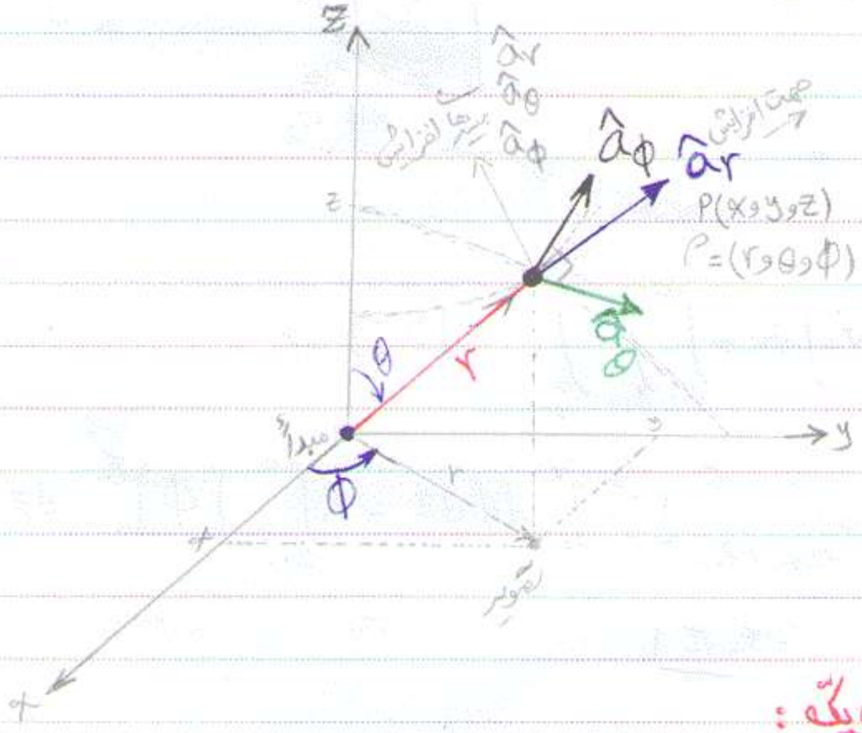
Subject:
Year. Month. Date. ( )

دستگاه مختصات کروی (r و θ و ϕ)

r : فاصله نقطه از مبدأ (بطور کلی $0 \leqslant r < \infty$)

θ : زاویه r با جهت مثبت محور z (بطور کلی $0 \leqslant \theta < \pi$) 180°

ϕ : زاویه تصویر r در صفحه xy با جهت مثبت محور x (بطور کلی $0 \leqslant \phi < 2\pi$) 360°



بردارهای یکه :

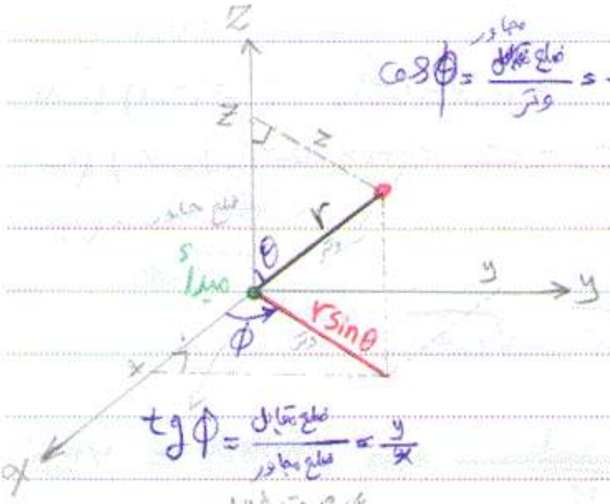
$\hat{a}_r$: برداری بطول یک در جهت افزایش r در نقطه مورد نظر (در نقاط مختلف فرق دارد)

$\hat{a}_\theta$: برداری بطول یک در جهت افزایش θ در نقطه مورد نظر (در نقاط مختلف فرق دارد)

$\hat{a}_\phi$: برداری بطول یک در جهت افزایش ϕ در نقطه مورد نظر (در نقاط مختلف فرق دارد)

* دو به دو برهم عمودند

PAPCO



تبدیلات مختصات کروی و کارتزین :

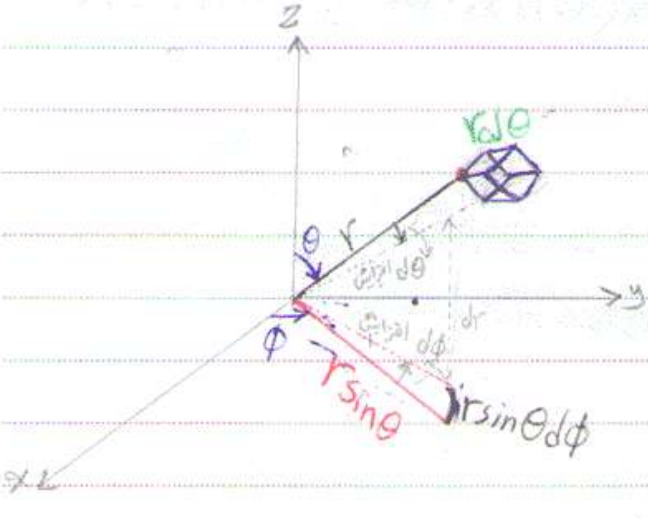
$\cos\phi = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{z}{r}$

تبدیل کروی به کارتزین
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$tg\phi = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{y}{x}$

یک مثلث قائم الزاویه

تبدیل کارتزین به کروی
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \phi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$



المانهای مختصات کروی :

الف) المانهای طول

dr و $rd\theta$ و $r\sin\theta d\phi$

ب) المان حجم

$r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

ج) المانهای سطح

$r^2\sin\theta d\theta d\phi$ * و $r\sin\theta dr d\phi$ * و $r dr d\theta$

ds_r ← بردار یکه $\pm\hat{a}_r$ بر سطح ds_r عمود است — ds_θ — ds_ϕ

$\phi = 90^\circ$ ، $\theta = \pi/2$ فقط این دو را در نیم کره داریم

تمرین ۱-۷)

الف) C(-۳و۲و۱) مختصات کروی؟

ب) D(r=۵ و θ=۲۰° و φ=-۷۰°) مختصات کارتزین؟

پ) فاصله C تا D؟

r و φ

$C = (-3, 2, 1)$ (x, y, z)

$C(-3, 2, 1)$

کروی

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(-3)^2+(2)^2+(1)^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} = 3.74$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{14}} = \cos^{-1} 0.267261241 = 74.5^\circ$$

$-0.6666 = -33.7^\circ$

$$\phi = tg^{-1}\frac{y}{x} = tg^{-1}\frac{2}{-3} = tg^{-1} 0.333333333 = 18.4^\circ = -33.7^\circ$$

$D(r=5,\ \theta=20^\circ,\ \phi=-70^\circ)$

کارتزین

$$x = r\sin\theta\cos\phi = 5\times\sin 20^\circ\times\cos(-70^\circ) = 5\times 0.342\times 0.342 = 0.58482$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi = 5\times\sin(20^\circ)\times\sin(-70^\circ) = 5\times 0.342\times(-0.93969) = -1.6$$

$$z = r\cos\phi = 5\times\cos(-70^\circ) = 1.71$$

$$d\theta = \theta_D - \theta_C = 20^\circ - 74.5^\circ = 54.5^\circ$$

$$54.5^\circ\times(\theta) = 54.5^\circ\times 20^\circ = 1090^\circ$$

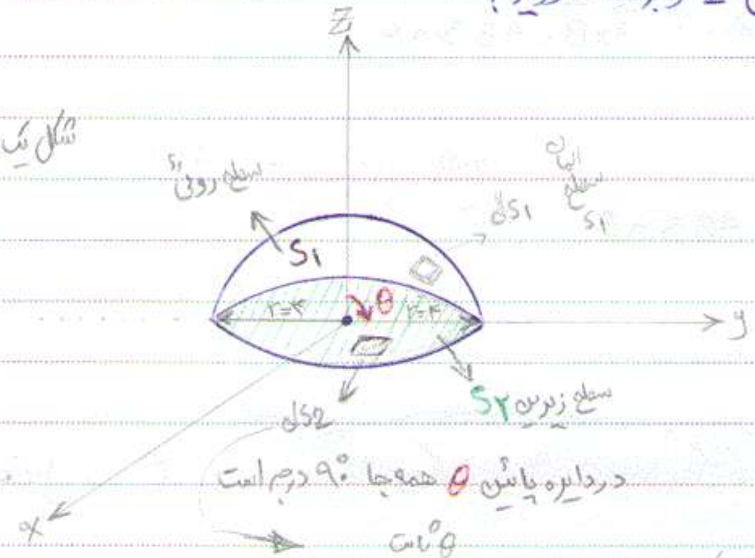
PAPCO

Subject: 9
Year. Month. Date. ( )

مثال) حجم و مساحت نیمکره ای بشعاع ۴ را بدست آورید؟

S_1 : سطح بالائی نیم کره

S_2 : سطح زیرین نیم کره



در دایره پائین θ همه جا ۹۰ درجه است

θ ثابت ۹۰

۲ تغییر میکنند

dS_1 و dS_2

هیچ المانی θ آن از ۹۰ درجه بیشتر نیست

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ حجم کره: داریم

$V = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}\pi r^3$ حجم نیم کره (نصف کره)

$$\text{حجم} \quad V=\int dv=\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{4} \underbrace{r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi}_{\text{المان حجم}}$$

$$\text{مساحت} \quad S=S_1+S_2=\int dS_1+\int dS_2$$

$$=\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \underbrace{r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi}_{dS_1 \,=\, dS_r} \Big|_{r=4} + \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{4} \underbrace{r \sin\theta \, dr \, d\phi}_{dS_2 \,=\, dS_\theta} \Big|_{\theta=\pi/2}$$

برای سطح

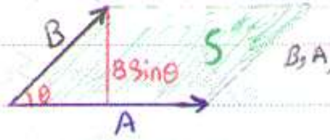
در نیم کره dS_r و dS_θ داریم

در نیم استوانه $\underbrace{2\,dS_\phi}_{\text{۲ تا داریم}} + \underbrace{2\,dS_z}_{\text{۲ تا داریم}} + \underbrace{dS_\rho}_{\text{یکی داریم}}$

Subject: ۸۹/۸/۵

Year. Month. Date. ( )

تمرینات آخر فصل مسائل فصل یک: ۱ و ۲ و ۵ و ۸ و ۹ و ۹ و ۱۴ و ۱۵ و ۲۳ و ۲۷ مهم



اندازه حاصلضرب خارجی دو بردار A و B $\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta$

اندازه حاصلضرب خارجی آنها = مساحت متوازی‌الاضلاعی که با دو بردار تشکیل شود

$S = |\vec{A}\times\vec{B}| = AB\sin\theta$ مساحت متوازی‌الاضلاع

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\square}$ مساحت مثلث — مساحت متوازی‌الاضلاع

فصل دوم: قانون کولن و شدت میدان الکتریکی

اگر جسمی باردار باشد یعنی یک الکترون به آن اضافه و یا کم شده است.

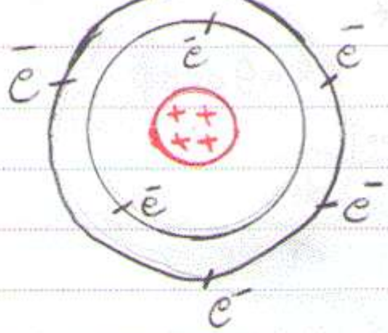
جسم باردار:

جسمی که تعادل تعداد الکترون و پروتونهایش بهم خورده باشد.

بار الکتریکی:

ویژگی ذاتی برخی ذرات بنیادی مثل الکترون، پروتون و ... — جرم جزء ذاتی است — نوترون بار خنثی دارد

الکترون علاوه بر اینکه جرم دارد بار که یک ویژگی ذاتی است را نیز دارد



e ← جرم دارد

e ← بار دارد $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C کولن

مقدار بار هر الکترون در همه جا و همیشه یکسان و به مقدار ... میباشد

چرا الکترون دارای بار منفی و پروتون دارای بار مثبت است؟

این یک امر کاملاً قراردادی است که بوسیله دانشمندان در روز اول نامگذاری شوند

PAPCO

Subject: 10
Year. Month. Date. ( )

اصل پایستگی بار الکتریکی :

در هر فرآیندی مقدار خالص بار قبل و بعد از فرآیند باید برابر باشد .

گاما 8 اشعه

$E = hf$ فرکانس

e^-

e^+

این انرژی حداقل به اندازه دو الکترون است

$E = mc^2$ قانون نسبیت انیشتین

انرژی ، جرم ، سرعت نور به توان ۲

جاذبه قوی هسته ای :

چون پروتون‌ها و نوترون‌ها در هسته تحت جاذبه قوی هسته ای هستند نمیتوان بوسیله مالش و ... پروتون‌ها و نوترون‌ها

را جدا کرد و فقط بوسیله وسایل پیشرفته مثل شتاب دهنده‌ها و ... امکان پذیر است

کوانتیدگی بار الکتریکی :

بار هر جسم مضرب صحیحی از بار الکترون است $q = ne$

اگر n تا بار الکتریکی از آن گرفته باشیم مثبت میشود $\rightarrow q = +ne$

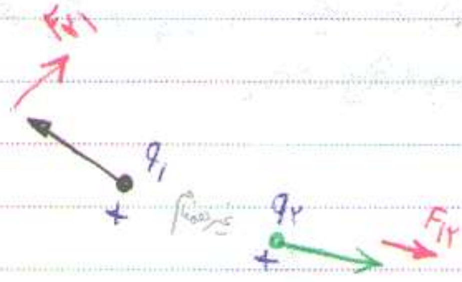
اگر n تا بار الکتریکی به آن بدهیم (اضافه کنیم) بار منفی است $\rightarrow q = -ne$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

K برای بارهای نقطه‌ای

ضریب گذردهی الکتریکی خلاء $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$

$K = 9 \times 10^9$



دو بار همنام یکدیگر را دفع میکنند

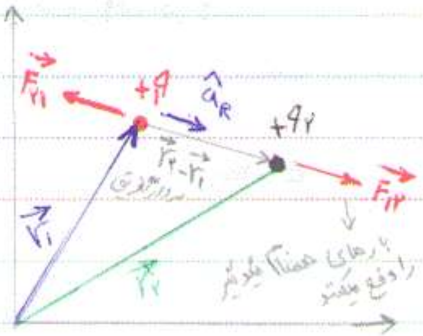
بار نقطه ای :

جسم بارداری که ابعاد (حجم) آن در مقایسه با فاصله یا ذرات دیگر ناچیز است .

$F_{12} = F_{21} = F$ طبق قانون سوم نیوتن

از لحاظ جهت همیشه برعکس هم هستند

PAPCO



$$\vec{F}_{12}=K\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^2}\hat{a}_R \rightarrow$$ جهت بردار یکه

$$\hat{a}_R=\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}$$

بردار یکه — خود بردار — اندازه بردار

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{12}=K\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}$$

$$F_{12}=F_{21}=F$$

$$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$$ در یک منفی باهم تفاوت دارند

$$\rightarrow F_{21}=\dots\dots=-F_{12}$$ به جای ۱ و ۲ را باهم عوض کنیم

اگر علامتها متفاوت باشند یعنی یکی مثبت و دیگری منفی باشد

علامت منفی برای اندازه یک نیرو فرق نمیکند ولی برای جهت فرق میکند

مثال ۲-۱

تمرین ۲-۱) بار $Q_A=-20\mu C$ در $A(-6,4,7)$ و بار $Q_B=-50\mu C$ در $B(5,8,-2)$ قرار دارند. نیروئی که Q_B بر Q_A وارد میکند چقدر است؟

$$r_A=-6\hat{a}_x+4\hat{a}_y+7\hat{a}_z \qquad r_B=5\hat{a}_x+8\hat{a}_y-2\hat{a}_z$$

$$\vec{F}_{BA}=K\frac{Q_B\,Q_A}{\underbrace{|\vec{r}_A-\vec{r}_B|}_{|r_{BA}|}}\underbrace{(\vec{r}_A-\vec{r}_B)}_{(r_{BA})}$$

$$r_A-r_B=(-6\hat{a}_x+4\hat{a}_y+7\hat{a}_z)-(5\hat{a}_x+8\hat{a}_y-2\hat{a}_z)=-11\hat{a}_x-4\hat{a}_y+9\hat{a}_z$$

$$|\vec{r}_A-\vec{r}_B|=\sqrt{(-11)^2+(-4)^2+(9)^2}=\sqrt{121+16+81}=\sqrt{226}=15$$

۱۴٫۷۶

Subject: ۱۸

Year. Month. Date. ( )

10^{-9}

$$\vec{F}_{BA} = \frac{(-۵۰\times۱۰^{-۴})(-۲۰\times۱۰^{-۴})}{۱۵}\left(-۱۱\hat{a}_x - ۴\hat{a}_y + ۹\hat{a}_z\right)$$

$$F_{BA} = ۹\times۱۰^{۹} \times \frac{۱۰^{-۹}}{[illegible]}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

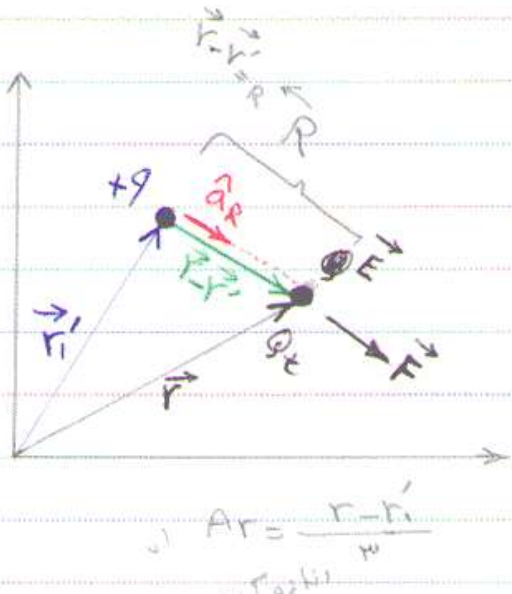
* همیشه یک ذره باردار در فضای اطراف خودش تغییر ایجاد میکند

میدان الکتریکی:

هر بار الکتریکی در فضای اطراف خود یک تغییر ایجاد میکند که باعث میشود بر ذرات دیگر در آن فضا نیرو وارد شود به این خاصیت میدان الکتریکی $\vec{E}$ میگوئیم.

تعریف دقیق میدان الکتریکی:

میدان الکتریکی نیروی وارد بر واحد بار مثبت در هر نقطه است: از لحاظ جهت هم جهت با بار مثبت است



$$E = \frac{F}{Q_t}$$

E: میدان الکتریکی بر حسب نیوتن بر کولن $\frac{N}{C}$

F: نیرو بر حسب نیوتن N

Q_t: بار بر حسب کولن C

$\vec{r}'$: محل منشأ میدان

$\vec{r}$: میدان

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_t} = \frac{\frac{KqQ_t}{R^2}}{Q_t} = K\frac{q}{R^2}$$

اندازه میدان حاصل از بار نقطه‌ای q در فاصله R

* نکته‌های مهم از این به بعد

مختصات پریم دار: محل منشأ میدان‌ها

مختصات بدون پریم: محل محاسبه میدان.

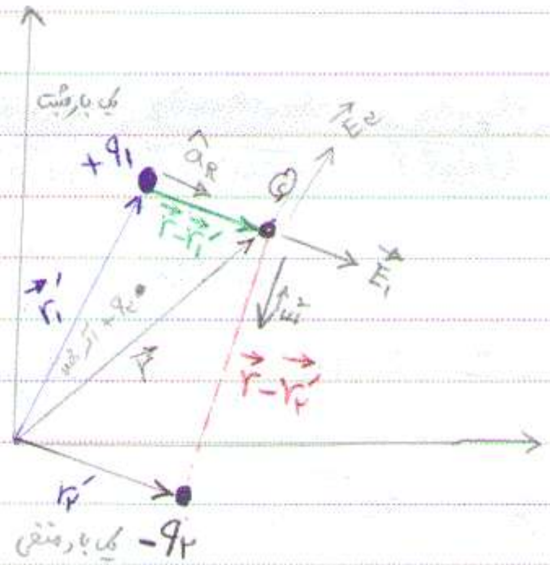
$$\vec{E} = K\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\hat{a}_R \Rightarrow \vec{E} = K\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

PaPCO

اگر (n عدد) چند بار q_i در محل های $\vec{r}_i'$ وجود داشته باشند ، میدان $\vec{E}$ در محل $\vec{r}$ برابر است با:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots = K\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1'|}(\vec{r}-\vec{r}_1') + K\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2'|}(\vec{r}-\vec{r}_2') + \dots$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} K\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)}$$



اگر یک بار Q و چند بار q_i داشته باشیم و بخواهیم نیروی وارد بر آن را بدست آوریم ، ابتدا

میدان را در محل Q بدست می آوریم سپس

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

$$\rightarrow \vec{F} = Q\vec{E}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۳ـ۲)

چهار بار مشابه ۳ nC در نقاط $P_1(1,1,0)$ ، $P_2(-1,1,0)$ ، $P_3(-1,-1,0)$ ، $P_4(1,-1,0)$ قرار دارند. میدان الکتریکی در نقطه $P(1,1,1)$ را حساب کنید؟

$\vec{r}'_1 = \hat{a}_x + \hat{a}_y$ $\quad \hat{a}_z = 0$

$\vec{r}'_2 = -\hat{a}_x + \hat{a}_y$

$\vec{r}'_3 = -\hat{a}_x - \hat{a}_y$

$\vec{r}'_4 = \hat{a}_x - \hat{a}_y$

$\vec{r} = \hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z$

$E = Kq\left[\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'_1|^3}(r-r'_1) + \right.$

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \underbrace{9\times10^9}_{K} \times \underbrace{3\times10^{-9}}_{q} \left\{ \frac{\hat{a}_z}{1^3} + \frac{2\hat{a}_x + \hat{a}_z}{\left(\sqrt{2^2+1^2}\right)^3} + \frac{2\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + \hat{a}_z}{\left(\sqrt{2^2+2^2+1^2}\right)^3} + \frac{2\hat{a}_y + \hat{a}_z}{\left(\sqrt{4+1}\right)^3} \right\}$$

$r-r'_1 \quad r-r'_2 \quad r-r'_3 \quad r-r'_4$

$|r-r'_2|^3 \quad |r-r'_3|^3$

کسرها باعث میشود ضرائب همه اعشاری باشند

$$\rightarrow E = 27\left\{ \left(\frac{2}{5^{3/2}} + \frac{2}{27}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{2}{27} + \frac{2}{5^{3/2}}\right)\hat{a}_y + \left(1 + \frac{1}{5^{3/2}} + \frac{1}{27} + \frac{1}{5^{3/2}}\right)\hat{a}_z \right\}$$

$\left(\sqrt{5}\right)^3$

$\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$ (n → توان، m → ریشه)

تمرین ۲-۳ ص ۱۸

مسائل ص ۲۵ ۳ و ۵ و ۶ و ۹

امتحان تا اینجا

میدان الکتریکی ناشی از اجسام با بار غیر نقطه‌ای :

انواع توزیع بار غیر نقطه‌ای

الف) توزیع حجمی :

C/m^3 سه طرف دارد

چگالی بار حجمی $\rho_v = \dfrac{dq}{dv}$ یا $dq = \rho_v \cdot dv$

المان در یک جسم حجیم

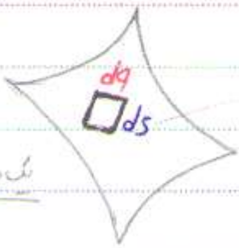
کل بار $Q = \int dq = \iiint \rho_v \, dv$

این فرمول فقط برای زمانیکه توزیع بار یکنواخت باشد $\rho_v = \dfrac{Q}{v}$

ب) توزیع سطحی :

C/m^2 چونکه دو سطح دارد

ds المان سطح



یک صفحه

چگالی بار سطح $\rho_s = \dfrac{dq}{ds}$ یا $dq = \rho_s \cdot ds$

کل بار $Q = \int dq = \iint \rho_s \, ds$

ds همیشه دوتائی است، پس انتگرال آنها دوتائی هستند.

انتگرال دوگانه شد

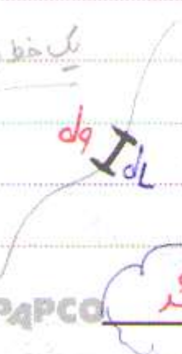
همیشه یک سطح شامل دو دیفرانسیل داریم

برای زمانیکه توزیع بار یکنواخت باشد $\rho_s = \dfrac{Q}{s}$

ج) توزیع خطی :

C/m

یک خط بار



چگالی بار خطی $\rho_L = \dfrac{dq}{dL}$ یا $dq = \rho_L \, dL$

dL طول

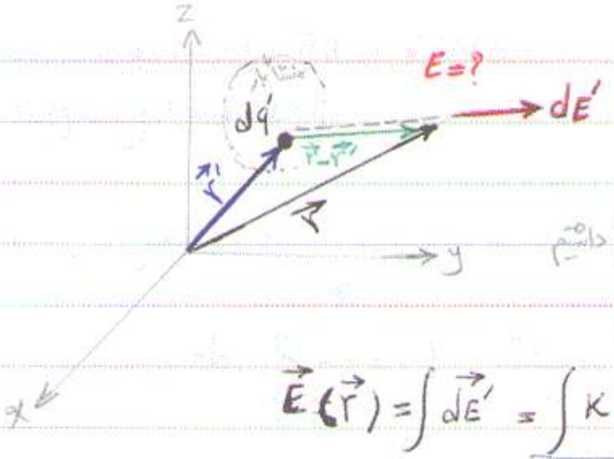
کل بار $Q = \int dq = \int \rho_L \, dL$

اگر توزیع بار یکنواخت باشد $\rho_L = \dfrac{Q}{L}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محاسبه میدان از روش مستقیم:

منشاء بار را با پریم دار نشان میدهند

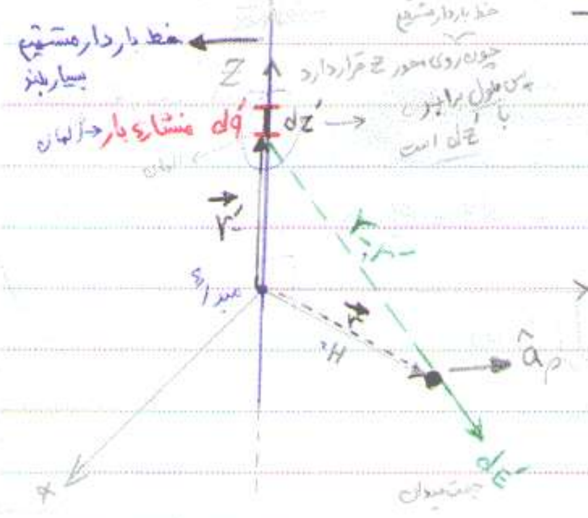


در روش نقطه‌ای داشتیم: $E = K \dfrac{q}{|r-r'|^3}(r-r')$ $\quad K=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E}' = \int K \frac{dq'}{|r-r'|^3}(r-r')$$

سه نوع بار داریم: $dq' = \begin{cases} \rho_v\, dv' & \text{بار حجمی} \\ \rho_s\, ds' & \text{سطحی} \\ \rho_L\, dl' & \text{خطی} \end{cases}$

مثال) محاسبه میدان الکتریکی ناشی از خط باردار مستقیم بسیار بلند با چگالی خطی یکنواخت ρ_L در فاصله H



$\hat{a}_\rho$ در صفحه xy بصورت شعاعی از محور z دور میشود

- توزیع بار خطی است

- بردار r' بردار مکان از مبدا به المان است

$$r - r' = H\hat{a}_\rho - z'\hat{a}_z$$

$$dq' = \rho_L\, dz'$$

$$\vec{r}' = z' \cdot \hat{a}_z$$

$\hat{a}_z$ در جهت اندازه بردار یکه

$$r = H \cdot \hat{a}_\rho$$

طبق مختصات استوانه‌ای داریم

دقیقا شکل فاصله نقطه P تا محور z است

$$\Rightarrow \quad |r-r'|^3 = \left(\sqrt{H^2+z'^2}\right)^3 = \left(H^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

معادله: سمت چپ که داخل قدرمطلق میرود سمت راست بتوان دو رسیده و زیر رادیکال میرود

در ضرب داخلی $|\hat{a}_\rho|^2 = 1$ یا $\hat{a}_\rho \cdot \hat{a}_\rho = 1$

امتحان تابع از میدان بار مثلا هست تکمیل از میدان الکتریکی باردار غیر نقطه‌ای

Subject: ۱۱۴

Year. Month. Date.

dq میدان بارهای گسسته $\vec{E} = \Sigma \cdots$

$\vec{F} = q\vec{E}$ $(r - r')$

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_L dz'}{(H^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} (H\hat{a}_\rho - z'\hat{a}_z) =$$

بالاترین نقطه روی محور z می‌شود $+\infty$

اندازه $|r - r'|$

$$= K \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_L H dz'}{(H^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{a}_\rho - K \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_L z' dz'}{(H^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{a}_z$$

۱- از لحاظ تقارن فیزیکی
۲- از لحاظ ریاضی که فرد است
حاصل صفر می‌شود

پایین‌ترین نقطه روی محور z می‌شود $-\infty$

طبق روابط ریاضی

$$\int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 + u^2}}$$

$$= K \rho_L H \left[\frac{z'}{H^2 \sqrt{H^2 + z'^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \hat{a}_\rho$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_L}{H} [1 - (-1)] \hat{a}_\rho \Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 H} \hat{a}_\rho}$$

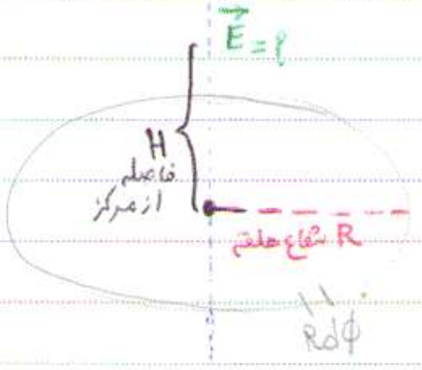
$\frac{\infty}{\infty} = 1$

$\frac{\infty}{-\infty} = -1$

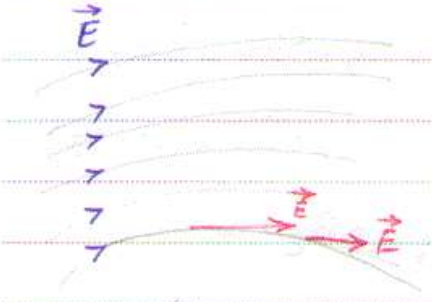
* حلقه باردار: خطی که بصورت دایره درآمده باشد.

مثال) میدان الکتریکی ناشی از حلقه باردار با چگالی خطی یکنواخت ρ_L را در فاصله H از مرکز روی محور حلقه حساب کنید

راهنمایی: حلقه را در صفحه XY به مرکزیت مبدأ در نظر بگیرید و از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده کنید

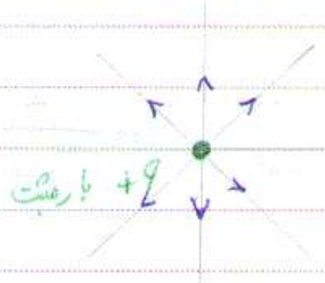


خطوط میدان الکتریکی :



توزیع غیر یکنواخت میدان

توزیع یکنواخت میدان



بار مثبت (جهت میدان از بار خارج میشود)

بار منفی (جهت میدان به طرف بار است)

مسئله ۱-۸ فصل اول)

$\vec{F} = -10\hat{a}_x + 20x(y-1)\hat{a}_y$ و $\vec{G} = 2x^2y\hat{a}_x - 4\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ دو میدان برداری اند. در نقطه $P(2,3,-4)$

الف) $|\vec{F}|$ اندازه F ب) $|\vec{G}|$

پ) بردار یکه ای در جهت $\vec{F}-\vec{G}$ ت) بردار یکه ای در جهت $\vec{F}+\vec{G}$

الف) $\vec{F}_P = -10\hat{a}_x + 20(2)(3-1)\hat{a}_y = -10\hat{a}_x + 80\hat{a}_y$

اندازه F در نقطه P: $|\vec{F}_P| = \sqrt{(-10)^2 + (80)^2} = \sqrt{100+6400} = \sqrt{6500} = 80.62$

ب) $\vec{G}_P = 2(2)^2(3)\hat{a}_x - 4\hat{a}_y + (-4)\hat{a}_z = 24\hat{a}_x - 4\hat{a}_y - 4\hat{a}_z$

$|\vec{G}_P| = \sqrt{(24)^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{576+16+16} = \sqrt{608} = 24.65$

$P(\overset{x}{2}, \overset{y}{3}, \overset{z}{-4})$

ب) $\vec{F}_p - \vec{G}_p = -10\hat{a}_x + 20x^2(y-1)\hat{a}_y - (2x^2y\hat{a}_x - 4\hat{a}_y + z\hat{a}_z)$

$\vec{F}_p - \vec{G}_p = -10\hat{a}_x + 20(2)^2(3-1)\hat{a}_y - (2(2)^2(3)\hat{a}_x - 4\hat{a}_y + (-4)\hat{a}_z)$

$= -10\hat{a}_x + 80\hat{a}_y - 24\hat{a}_x + 4\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$

$\rightarrow \vec{F}_p - \vec{G}_p = -34\hat{a}_x + 84\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$

بردار یکه $\hat{a} = \dfrac{\overset{\text{خود بردار}}{\vec{F}_p - \vec{G}_p}}{\underset{\text{اندازه بردار}}{|F_p - G_p|}} = \dfrac{-34}{\underbrace{\sqrt{34^2+84^2+4^2}}_{90.7}}\hat{a}_x + \dfrac{84}{\sqrt{34^2+84^2+4^2}}\hat{a}_y + \dfrac{4}{\sqrt{34^2+84^2+4^2}}\hat{a}_z$

$\dfrac{84}{90.7} = 0.92 \qquad \dfrac{4}{90.7} = 0.04$

$\hat{a} = -0.37\hat{a}_x + 0.92\hat{a}_y + 0.04\hat{a}_z$

ت) $\vec{F}_p + \vec{G}_p = -10\hat{a}_x + 20x^2(y-1)\hat{a}_y + 2x^2y\hat{a}_x - 4\hat{a}_y + z\hat{a}_z$

$= -10\hat{a}_x + 20(2)^2(3-1)\hat{a}_y + 2(2)^2(3)\hat{a}_x - 4\hat{a}_y - 4\hat{a}_z$

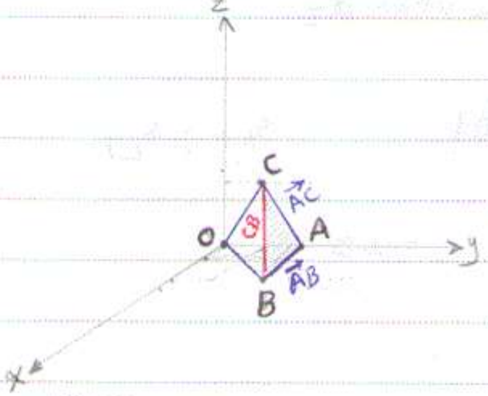
$\vec{F}_p + \vec{G}_p = -10\hat{a}_x + 80\hat{a}_y + 24\hat{a}_x - 4\hat{a}_y - 4\hat{a}_z = 14\hat{a}_x + 76\hat{a}_y - 4\hat{a}_z$

بردار یکه $\hat{a} = \dfrac{\overset{\text{خود بردار}}{\vec{F}_p + \vec{G}_p}}{\underset{\text{اندازه بردار}}{|\vec{F}_p + \vec{G}_p|}} = \dfrac{14}{\underbrace{\sqrt{14^2+76^2+(-4)^2}}_{77.4}}\hat{a}_x + \dfrac{76}{\sqrt{14^2+76^2+(-4)^2}}\hat{a}_y + \dfrac{-4}{\sqrt{14^2+76^2+(-4)^2}}\hat{a}_z$

$\dfrac{76}{77.4} = 0.98 \qquad \dfrac{-4}{77.4} = -0.05$

$\hat{a} = 0.18\hat{a}_x + 0.98\hat{a}_y - 0.05\hat{a}_z$

مسئله ۱-۱۴) چهار رأس یک چهاروجهی منتظم در $O(0,0,0)$ ، $A(0,1,0)$ ، $B(0.5\sqrt{3}, 0.5, 0)$ ، $C\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, 0.5, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ قرار دارد. الف) بردار یکه‌ای عمود بر وجه ABC (و به سمت بیرون) بیابید ب) مساحت وجه ABC را بیابید.



الف) $\hat{a}_n = \frac{\overbrace{\vec{AB}\times\vec{AC}}^{\text{ضرب داخل}}}{|\vec{AB}\times\vec{AC}|}$ $\hat{a}_n = \frac{\vec{AC}\times\vec{AB}}{|\vec{AC}\times\vec{AB}|}$

بردار یکه عمود بر ABC

اندازه ضرب داخل

$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\hat{a}_x + (y_B - y_A)\hat{a}_y + (z_B - z_A)\hat{a}_z$$

$$\vec{AB} = (0.5\sqrt{3} - 0)\hat{a}_x + (0.5 - 1)\hat{a}_y + (0 - 0)\hat{a}_z = 0.5\sqrt{3}\,\hat{a}_x - 0.5\hat{a}_y = 0.865\hat{a}_x - 0.5\hat{a}_y$$

$$\vec{AC} = (x_C - x_A)\hat{a}_x + (y_C - y_A)\hat{a}_y + (z_C - z_A)\hat{a}_z$$

$$\vec{AC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - 0\right)\hat{a}_x + (0.5 - 1)\hat{a}_y + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - 0\right)\hat{a}_z = 0.288\hat{a}_x - 0.5\hat{a}_y + 0.485\hat{a}_z$$

$$\vec{AC}\times\vec{AB} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 0.288 & -0.5 & 0.485 \\ 0.865 & -0.5 & 0 \end{vmatrix} = \hat{a}_x \begin{vmatrix} -0.5 & 0.485 \\ -0.5 & 0 \end{vmatrix} - \hat{a}_y \begin{vmatrix} 0.288 & 0.485 \\ 0.865 & 0 \end{vmatrix} + \hat{a}_z \begin{vmatrix} 0.288 & -0.5 \\ 0.865 & -0.5 \end{vmatrix}$$

ضرب خارجی

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = 0.342\hat{a}_x + 0.592\hat{a}_y + 0.288\hat{a}_z$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

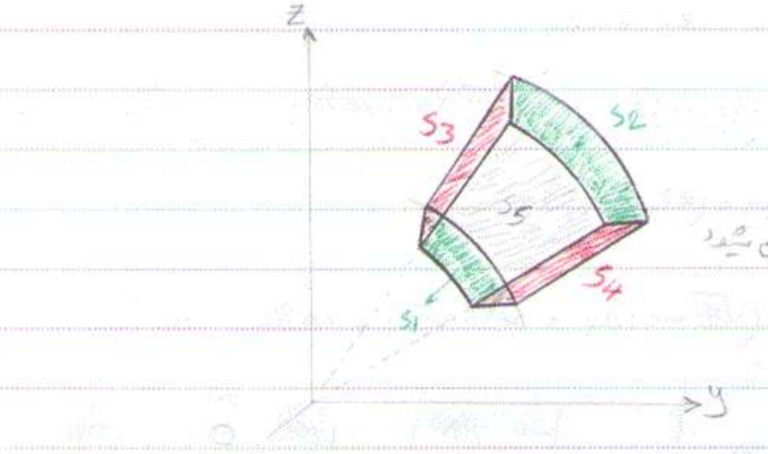
$$\hat a_n = \frac{\vec{AC}\times\vec{AB}}{|\vec{AC}\times\vec{AB}|} = \frac{/۳۴۲\,\hat a_x + /۵۹۲\,\hat a_y + /۲۸۸\,\hat a_z}{\underbrace{\sqrt{(/۳۴۲)^۲+(/۵۹۲)^۲+(/۲۸۸)^۲}}_{/۷۴۱}} = \frac{/۳۴۲\,a_x + /۵۹۲\,\hat a_y + /۲۸۸\,\hat a_z}{/۷۴۱}$$

$$\hat a_n = /۴۶۱\,\hat a_x + /۷۹۸\,\hat a_y + /۳۸۸\,\hat a_z$$

ب) مساحت مثلث ABC $= \frac{۱}{۲}\,|\vec{AC}\times\vec{AB}|$ $\qquad S_\Delta = \frac{۱}{۲} S_\square$

مساحت مثلث ABC $= \frac{۱}{۲} \times /۷۴۱ = /۳۷۰۵$

تمرین ۱-۲۷) سطوح $r=۲$ و $r=۴$ و $\theta=۳۰^\circ$ و $\theta=۵۰^\circ$ و $\phi=۲۰^\circ$ و $\phi=۶۰^\circ$ سطح بسته ای تشکیل میدهند. الف) حجم داخل این سطح چقدر است؟ ب) کل مساحت این سطح چقدر است؟ پ) طول کل ۱۲ لبه این سطح را بیابید.



S_6 به پشت شود

۶ سطح داریم

در دستگاه کروی هستیم

حتماً حجم اشکال بصورت ۳تا انتگرال است

حجم $\quad v = \int dv = \int_{\phi=۲۰^\circ}^{۶۰^\circ}\int_{\theta=۳۰^\circ}^{۵۰^\circ}\int_{r=۲}^{۴} r^۲ \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\phi$

$dv = r^۲ \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$ در مختصات کروی

PAPCO

$$-\left[\cos 50^\circ - \cos 30^\circ\right] = -\left[0/642 - 0/866\right]$$
$$= -\left[-0/224\right] = 0/224$$

Subject: 17
Year. Month. Date.

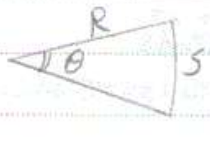
$$V=\int_{20}^{60}\int_{30}^{50}\left[\frac{r^3}{3}\right]_2^4 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{56}{3}\int_{20^\circ}^{60^\circ}\left[-\cos\theta\right]_{30}^{50} d\phi$$

درجه

رادیان

$$V=\frac{56}{3}\times 0/22\times\left[\phi\right]_{\pi/9}^{\pi/3} = \frac{56}{3}\times 0/22\times\frac{2\pi}{9} = 2/854$$

در این جا θ باید برحسب رادیان باشد



تبدیل درجه به رادیان $20^\circ\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{9}$

درجه $60^\circ\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$ رادیان

$\frac{6}{}$ (سطح)
شش مساحت داریم (ا ب

$$S=\int dS=\int dS_1+\int dS_2+\dots+\int dS_6$$

$$\to S_1=\int_{\phi=\pi/9}^{\phi=\pi/3}\int_{\theta=30^\circ}^{50^\circ} r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi = 4\int_{\pi/9}^{\pi/3}\left[-\cos\theta\right]_{30^\circ}^{50^\circ} d\phi = 4\times 0/22\times\frac{2\pi}{9} = 0/614$$

ds_r $r^2=4$

$$S_2=\int_{\phi=\pi/9}^{\phi=\pi/3}\int_{\theta=30^\circ}^{50^\circ} r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi = 16\times 0/22\times\frac{2\pi}{9} = 2/456$$

$r^2=16$

در این انتگرال شعاع ۲ ثابت است

$$ds_\theta\quad S_3=\int_{\phi=\pi/9}^{\phi=\pi/3}\int_{r=2}^{r=4} r\underbrace{\sin\theta}_{=30^\circ}\, dr\, d\phi =$$

r^2, $\sin\theta$, r — اعداد ثابت و بیرون می آیند

در سطح S_3 $\sin\theta$ ثابت است

$$S_4=\int_{\phi=\pi/9}^{\phi=\pi/3}\int_{r=2}^{r=4} r\underbrace{\sin\theta}_{=50^\circ}\, dr\, d\phi =$$

$$S_5=\int_{r=2}^{4}\int_{\theta=30^\circ}^{50^\circ} r\, d\theta\, dr = r\iint d\theta\, dr$$

$$S_6=r\iint d\theta\, dr$$

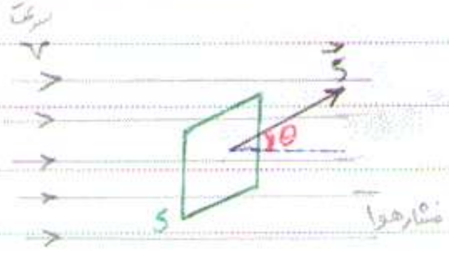
PAPCO

۸۹/ ۸/۱۹

فصل سوم (۳):

چگالی شار الکتریکی ، قانون گاوس و دیورژانس

مفهوم شار:



$$\psi \propto v S \cos\theta \Rightarrow \psi \propto \vec{v} \cdot \vec{S}$$

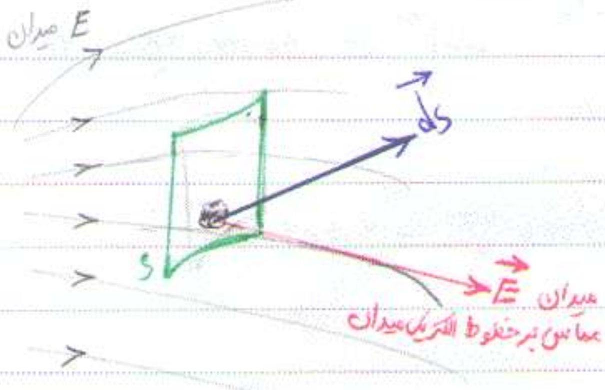
شار ، چگالی ، سطح ، سرعت

اگر v و S یکنواخت یا تخت باشند

$$d\psi \propto v\, ds \cos\theta \Rightarrow \psi \propto \vec{v} \cdot \vec{ds}$$

اگر v غیر یکنواخت یا S انحناء داشته باشد

S: صفحه



شار میدان الکتریکی

$$d\psi\ \vec{E} \cdot \vec{ds} \Rightarrow d\psi = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

$$\Rightarrow \psi = \int_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

تعریف چگالی شار الکتریکی یا (جابجائی الکتریکی): $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \psi = \int_S \vec{D} \cdot \vec{ds}$

اپسیلون صفر

برای خلاء $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$

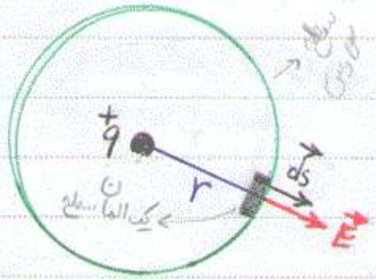
قانون گاوس:

شار الکتریکی که رونده از هر سطح بسته فرضی برابر است با بار خالص درون آن سطح. (این قانون برای بدست آوردن میدان در مسائلی کاربرد دارد که از تقارن موجود در آن مسائل بتوان سطح بسته ای را پیدا کرد که میدان روی آن ثابت باشد)

$$\oint_s \vec{D} \cdot \vec{ds} = q$$

انتگرال سطح بسته فرضی — ذات — مساحت — بار خالص درون سطح بسته

بدست آوردن میدان الکتریکی در قانون گاوس



$\overset{+}{q}$: یک بار مثبت

r : فاصله بار از سطح گاوس

E : میدان الکتریکی در جهت شعاع r (که خارج میشود)

ds : المان سطح

سطح گاوس : کره به شعاع r به مرکزیت بار نقطه ای q (از تقارن میدانیم که میدان همه جای سطح این کره یکسان و عمود بر سطح است)

$$\oint_s \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{ds} = q$$

$$\oint_s \epsilon_0 E\,ds \underbrace{\cos 0^\circ}_{1} = q$$

$\vec{E}$ و $\vec{ds}$ در تمام نقاط هم جهت و زاویه بین آنها صفر است $\cos 0^\circ = 1$

به طور یکنواخت بیرون می‌زند

$$\epsilon_0 E \underbrace{\oint_s ds}_{\text{مساحت کره}} = q$$

مساحت کره $= 4\pi r^2$

$$\epsilon_0 \cdot E\, 4\pi r^2 = q \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{a}_r}$$

قانون کولن با قانون گاوس هم ارز یا هم معادله اند

ϵ_0 (اپسیلون صفر) برای خلأ برابر با 8.85×10^{-12} میباشد

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(قانون گاوس همواره برای هر سطح فرضی برقرار است. ولی فقط برای برخی مسائل میتوان میدان را با آن بدست آورد)

$\rho_L = H$

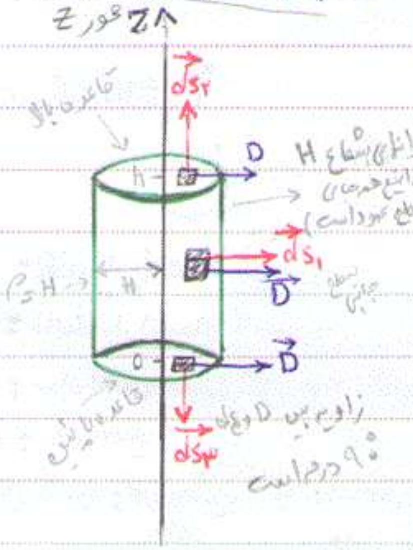
مثال) بدست آوردن میدان الکتریکی خط باردار یکنواخت نامتناهی به چگالی ρ_L در فاصله H

یک سطح گاوس استوانه‌ای جهت E و D یکسان است

برای حل مسئله یک استوانه که دو سر آن پوشیده (کوتر) است را بصورت فرضی به صورت (اطراف) خط باردار در نظر میگیریم. سه المان روی استوانه در نظر میگیریم. المان روی سطح جانبی ۰ و در بالا و پایین ۹۰°

h تا ۰ فاصله انتخابی از ته تا سر قوطی

H فاصله خط باردار تا لبه قوطی



خط باردار — سطح جانبی — قاعده بالائی — قاعده پایینی

$\cos 90° = 0$
$\cos 0 = 1$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{s}_1 + \int_{S_2} \vec{D}\cdot d\vec{s}_2 + \int_{S_3} \vec{D}\cdot d\vec{s}_3$$

زاویه بین ds و D در سطح جانبی — زاویه بین ds و D در بالا و پایین قوطی

$$= \int_{S_1} D\,ds_1 \cos 0° + \int_{S_2} D\,ds_2 \cos 90° + \int_{S_3} D\,ds_3 \cos 90°$$

$$= D\int ds_1 = D\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{h} \underbrace{\rho\,dz\,d\phi}_{ds\rho} = D\,2\pi h H = Q$$ رابطه ①

$\rho = H$

چون ρ_L یکنواخت است: خالص $Q = \rho_L h$ رابطه ② — h: طول خط باردار

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه میگیریم: $D\,2\pi \cancel{h} H = \rho_L \cancel{h}$

چون یک طرف معادله‌ها با هم مساوی است. طرف دیگر آنها را برابر هم قرار میدهیم.

$D = \epsilon_0 E$

$$D = \frac{\rho_L}{2\pi H} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 H}\hat{a}_\rho}$$

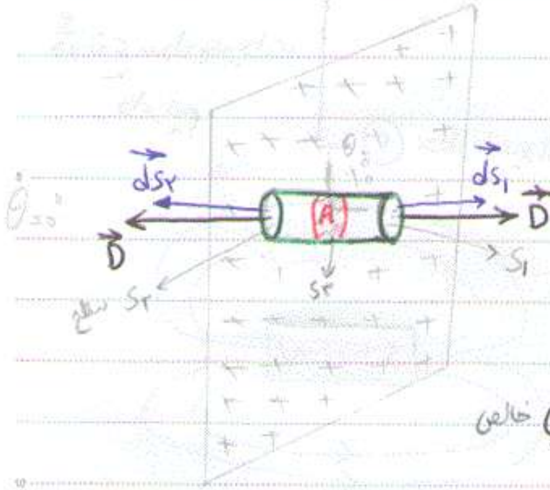
PAPCO

الکترومگ

مثال) بدست آوردن میدان ناشی از صفحه باردار یکنواخت نامتناهی به چگالی سطحی ρ_s :

باید صفحه نارسانا باشد

یک قوطی که درون صفحه وارد شده است



$S_1 = S_2 = S_3$

$$Q_{\text{خالص}} = \rho_s A$$

قانون گاوس

$$Q_{\text{خالص}} = \oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \int_{S_1} D\,ds_1 \cos 0^\circ + \int_{S_2} D\,ds_2 \cos 0^\circ + \int_{S_3} D\,ds_3 \cancel{\cos 90^\circ}$$

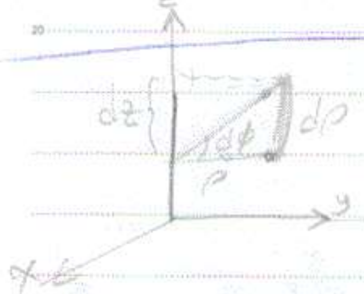
$S_1 = S_2 = A$

$$= D\underbrace{\int_{S_1} ds_1}_{A} + D\underbrace{\int_{S_2} ds_2}_{A} = 2DA$$

برابر A میباشند

$$\Rightarrow \rho_s A = 2DA \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\rho_s}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}\hat{a}_n}$$



المان طول : dz و $\rho d\phi$ و $d\rho$

المان حجم : $\rho d\rho d\phi dz$

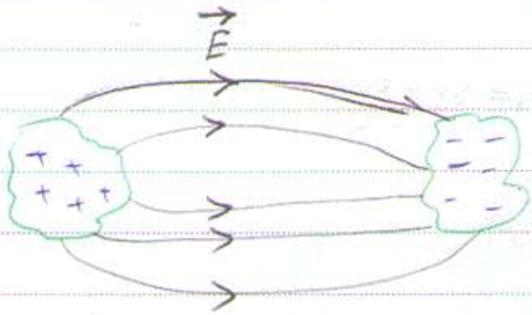
المان سطح : $ds_z : \rho d\rho d\phi$

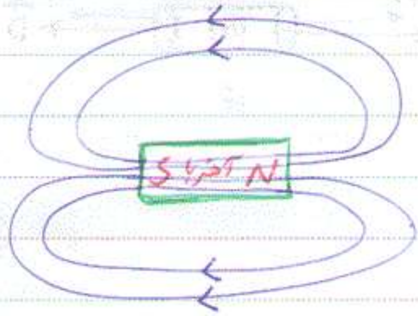
$ds_\rho : \rho d\phi dz$

$ds_\phi : dz d\rho$

دیورژانس :

دو نوع میدان برداری داریم
① خطوط میدان ابتدا و انتها دارند
② خطوط میدان منحنی های بسته ای تشکیل میدهند



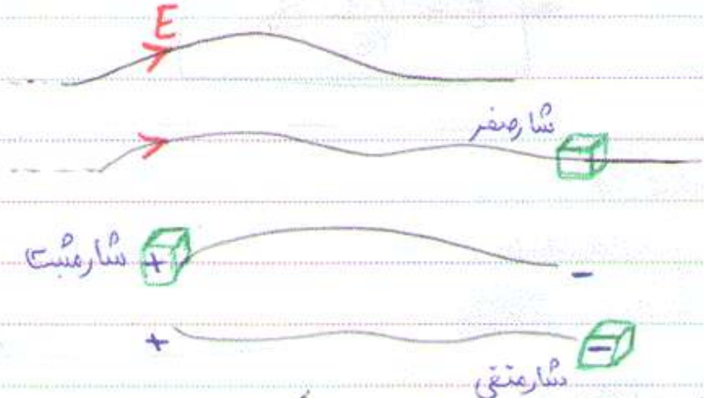


تعریف دیورژانس :

دیورژانس میدان برداری $\vec{A}$ در نقطه ی P برابر است با شار خروجی از یک سطح بسته حول نقطه P تقسیم بر حجم آن سطح وقتی حجم آن به صفر میل کند.

$$div \vec{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_s \vec{A} \cdot \vec{ds}}{\Delta v}$$

S سطح بسته در بر گیرنده Δv



نتیجه : دیورژانس عملگری است که کیفیت تولید یا نابودی خطوط میدان در یک نقطه را تعیین میکند

توجه : $div \vec{A}$ را با $\vec{\nabla} \cdot A$ نیز نشان میدهیم
نماد دیورژانس

Subject: 20

Year. Month. Date. ( )

عملگر دیورژانس در مختصات مختلف :
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z$$

الف) دکارتی : $\vec{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$ مهم

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ب) استوانه‌ای : $\vec{A} = A_\rho\hat{a}_\rho + A_\phi\hat{a}_\phi + A_z\hat{a}_z$ مهم

مشتق

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ب۲) کروی : $\vec{A} = A_r\hat{a}_r + A_\theta\hat{a}_\theta + A_\phi\hat{a}_\phi$ مهم

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

A_θ

نتیجه * دیورژانس نوعی مشتق گیری برداری است که حاصل آن اسکالر است .
(عدد)

نتیجه * اگر عملگر $\vec{\nabla}$ (دل) را در مختصات کارتزین بصورت

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z$$

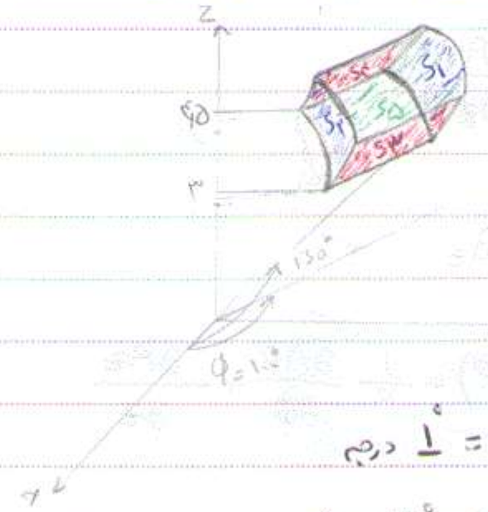
در نظر بگیریم ، دیورژانس مشابه ضرب داخلی ∇ در میدان برداری است .

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

مسئله ۱-۲۳) $\rho=3$ تا $\rho=5$ و $\phi=100^\circ$ تا $\phi=130^\circ$ و $z=3$ تا $z=4.5$ سطح بسته ای

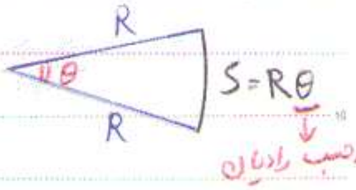
تشکیل میدهند الف) حجم آن را حساب کنید ب) کل مساحت را حساب کنید پ) طول کل ۱۲ لبه آن را حساب کنید



S_1 و S_2 سطح جلو و پشت

S_3 و S_4 سطح بالائی و سطح زیرین

S_5 و S_6 سطح جانبی رو به بیرونی و سطح جانبی رو به داخل (پشت)



1° درجه $= \frac{\pi}{180}$ رادیان

$$\phi = 130^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{13\pi}{18}$$

تبدیل درجه به رادیان (برای ϕ)

$$\phi = 100^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{18}$$

الف) $v = \int dv = \int_{z=3}^{4.5}\int_{\phi=\frac{10\pi}{18}}^{\frac{13\pi}{18}}\int_{\rho=3}^{5} \rho\, d\rho\, d\phi\, dz = \int_3^5 \int_{\frac{10\pi}{18}}^{\frac{13\pi}{18}} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_3^5 d\phi\, dz =$

$$\frac{\rho^2}{2}\Big|_3^5 = \frac{25}{2} - \frac{9}{2} = \frac{25-9}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\rightarrow 8\int_3^{4.5} [\phi]_{\frac{10\pi}{18}}^{\frac{13\pi}{18}} dz = 8 \times \frac{3\pi}{18}[z]_3^{4.5} = 8\times\frac{3\pi}{18}\times 1.5 = 2\pi = 6.28$$

حالت منحنی دارد

۶ سطح داریم

ب) $S = \oint_s ds = \int ds_1 + \int ds_2 + \int ds_3 + \int ds_4 + \int ds_5 + \int ds_6$

$$S = \underbrace{\int_3^{4.5}\int_{\frac{10\pi}{18}}^{\frac{13\pi}{18}} \rho\, d\phi\, dz + \int_3^{4.5}\int_{\frac{10\pi}{18}}^{\frac{13\pi}{18}} \rho\, d\phi\, dz}_{ds_\rho} + \underbrace{\int_3^{5}\int_{\frac{10\pi}{18}}^{\frac{13\pi}{18}} \rho\, d\rho\, d\phi + \int_3^{5}\int_{\frac{10\pi}{18}}^{\frac{13\pi}{18}} \rho\, d\rho\, d\phi}_{ds_z} +$$

$$\underbrace{\int_3^5\int_3^{4.5} d\rho\, dz + \int_3^5\int_3^{4.5} d\rho\, dz}_{ds_\phi} =$$

عملگر دیورژانس در مختصات مختلف:
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z$$

الف) دکارتی: $\vec{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$ مهم

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ب) استوانه‌ای: $\vec{A} = A_\rho\hat{a}_\rho + A_\phi\hat{a}_\phi + A_z\hat{a}_z$ مهم

مشتق

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

پ) کروی: $\vec{A} = A_r\hat{a}_r + A_\theta\hat{a}_\theta + A_\phi\hat{a}_\phi$ مهم

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

A_θ

نتیجه * دیورژانس نوعی مشتق گیری برداری است که حاصل آن اسکالر است.
(عدد)

نتیجه * اگر عملگر $\vec{\nabla}$ (دل) را در مختصات کارتزین بصورت
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z$$
در نظر بگیریم، دیورژانس مشابه ضرب داخلی ∇ در میدان برداری است.

PAPCO

Subject: 22

Year. Month. Date. ( ) ۸۹/۹/۳

تمرین متن کتاب ۳-۷)

الف) دکارتی

$$\vec{D} = \underbrace{(2xyz - y^2)}_{D_x}\hat{a}_x + \underbrace{(x^2z - 2xy)}_{D_y}\hat{a}_y + \underbrace{x^2y}_{D_z}\hat{a}_z \quad \text{و} \quad P_A(\overset{x}{2},\overset{y}{3},\overset{z}{-1})$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \frac{\partial}{\partial x}(2xyz - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2z - 2xy) + \frac{\partial}{\partial z}x^2y$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 2yz - 2x + 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot D\Big|_{P_A} = 2(3)(-1) - 2(2) = -10$$

ب) استوانه‌ای

$$\vec{D} = 2\rho z^2 \sin^2\phi\,\hat{a}_\rho + \rho z^2 \sin 2\phi\,\hat{a}_\phi + 2\rho^2 z \sin^2\phi\,\hat{a}_z \quad \text{و} \quad P_B(\overset{\rho}{2},\overset{\phi}{110°},\overset{z}{-1})$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\,\underbrace{2\rho z^2\sin^2\phi}_{\hat{a}_\rho}) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(\rho z^2\sin 2\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(2\rho^2 z\sin^2\phi) =$$

$$\rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4z^2\sin^2\phi + 2z^2\cos 2\phi + 2\rho^2\sin^2\phi$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\Big|_{P_B} = 4(-1)^2\sin^2(110°) + 2(-1)^2\cos 2(110°) + 2(2)^2\sin^2(110°) =$$

کروی

پ)

$$\vec{D} = 2r\sin\theta\cos\phi\,\hat{a}_r + r\cos\theta\cos\phi\,\hat{a}_\theta - r\sin\phi\,\hat{a}_\phi \quad \text{و} \quad P_C(1/5,\overset{\theta}{30°},\overset{\phi}{50°})$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادلهٔ اول ماکسول در حالت الکترواستاتیک :

انتگرال بسته سطح — قانون گاوس

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v} = \rho_v \rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v}$$

تغییرات حجم

چگالی حجمی بار در آن نقطه

معادله اول ماکسول یا (فرم نقطه‌ای یا دیفرانسیلی قانون گاوس)

دیورژانس نقطه‌ای جابجایی در حجم

چگالی حجمی توزیع یکنواخت: $\rho_v = \frac{Q}{v}$

$\rho_s = \frac{Q}{S}$

$\rho_L = \frac{Q}{L}$

طبق قانون گاوس انتگرال $D\cdot ds$ برابر با Q است وقتیکه حجم خیلی کوچک شود ρ_v داریم

* (قانون گاوس فرم انتگرالی معادله اول ماکسول است)

قضیه دیورژانس :

قانون گاوس: $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q$

توزیع حجمی چگالی بار: $\int_v \rho_v \, dv = Q$

معادله اول ماکسول: $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v$

$$\Rightarrow \boxed{\int_v \vec{\nabla}\cdot\vec{D} \, dv = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}}$$

قضیه دیورژانس

(S سطح بسته‌ای که حجم V را در برگرفته است)

* قضیه دیورژانس یک انتگرال حجمی را به یک انتگرال سطحی تبدیل میکند

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

معادله اول ماکسول در حالت الکترواستاتیک:

انتگرال بسته سطح — قانون گاوس

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_s \vec{D}\cdot\vec{ds}}{\underbrace{\Delta v}_{\text{تغییرات حجم}}} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v} = \rho_v \rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v}$$

چگالی حجمی بار در آن نقطه

معادله اول ماکسول یا (فرم نقطه‌ای یا دیفرانسیلی قانون گاوس)

دیورژانس نقطه‌ای جابجایی در حجم

چگالی حجمی توزیع بار در واحد حجم $\rho_v = \frac{Q}{v}$

$\rho_s = \frac{Q}{s}$

$\rho_L = \frac{Q}{L}$

طبق قانون گاوس انتگرال $D.ds$ برابر با Q است

وقتی حجم خیلی کوچک شود ρ_v داریم

* (قانون گاوس فرم انتگرالی معادله اول ماکسول است)

قضیه دیورژانس:

قانون گاوس: $\oint_s \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q$

توزیع حجمی چگالی بار: $\int_v \rho_v\, dv = Q$

معادله اول ماکسول: $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v$

$$\Rightarrow \boxed{\int_v \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dv = \oint_s \vec{D}\cdot\vec{ds}}$$

قضیه دیورژانس

(S سطح بسته‌ای که حجم V را در بر گرفته است)

* قضیه دیورژانس یک انتگرال حجمی را به یک انتگرال سطحی تبدیل میکند

فصل چهارم :
انرژی و پتانسیل

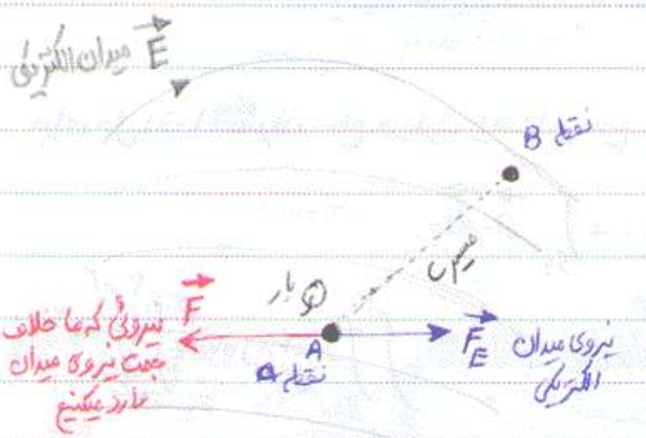
کار $W = F x \cos\theta = \vec{F} \cdot \vec{x}$

برای ایجاد کار W انرژی صرف شده است.

یا اگر مسیر مستقیم نباشد $dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} \Rightarrow W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$

کار یک المان است — یک المان جابجایی

انرژی:
① در اثر نیروهائی مثل اصطکاک به گرما تبدیل میشود (تلف میشود)
② بخاطر وجود نیروهائی مثل گرانش، الکتریکی، فنر و .... ذخیره میشود (انرژی پتانسیل)
③ به انرژی جنبشی تبدیل شود



$$\vec{F} = -Q\vec{E}$$
$$\vec{F}_E = Q\vec{E}$$

کار لازم برای جابجایی بار Q درون میدان $\vec{E}$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{L} = -\int_A^B Q \vec{E} \cdot d\vec{L} \Rightarrow \boxed{-Q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{L} = W}$$

Q ثابت بیرون می آید

$$(V_B - V_A =)\ \Delta V = \frac{W}{Q} \leftarrow$$ تعریف اختلاف پتانسیل بین دو نقطه

از تعریف: $\Delta V \Rightarrow \Delta V = \dfrac{-Q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{L}}{Q} \Rightarrow \boxed{\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{L}}$ اختلاف پتانسیل

$d\vec{L}$: دیفرانسیل طول مسیر

فصل چهارم :
انرژی و پتانسیل

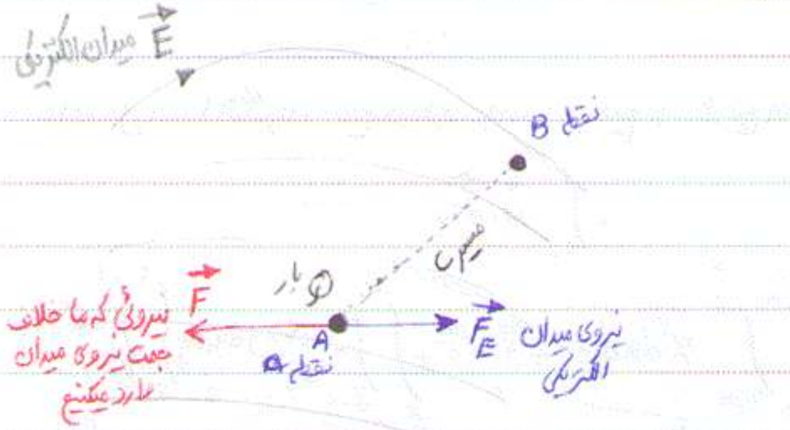
کار $W = F x \cos\theta = \vec{F} \cdot \vec{x}$

برای انجام کار W انرژی صرف شده است.

یا اگر مسیر مستقیم نباشد $dW = \vec{F} \cdot \vec{dx} \Rightarrow W = \int \vec{F} \cdot \vec{dx}$

کار یک المان جابجایی است
که المان جابجائی

انرژی:
① در اثر نیروهائی مثل اصطکاک بر گرما تبدیل میشود (تلف میشود)
② بخاطر وجود نیروهائی مثل گرانش ، الکتریکی ، فنر و .... ذخیره میشود (انرژی پتانسیل)
③ به انرژی جنبشی تبدیل شود



$\vec{F} = -Q \vec{E}$

$\vec{F}_E = Q \vec{E}$

کار لازم برای جابجائی بار Q درون میدان $\vec{E}$: $W = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dL} = -\int_A^B Q \vec{E} \cdot \vec{dL} \Rightarrow \boxed{-Q \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dL} = W}$

Q ثابت و بیرون می آید

$(V_B - V_A =)\ \Delta V = \dfrac{W}{Q}$ ← تعریف اختلاف پتانسیل بین دو نقطه

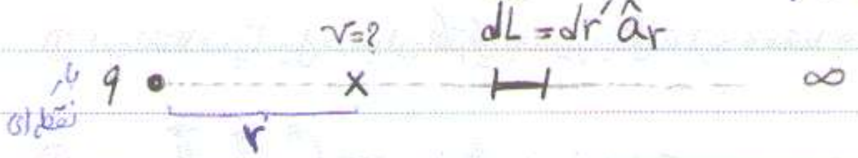
از تعریف ΔV : $\Rightarrow \Delta V = \dfrac{-Q \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dL}}{Q} \Rightarrow \boxed{\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dL}}$ اختلاف پتانسیل

$\vec{dL}$: دیفرانسیل طول مسیر

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال) پتانسیل ناشی از بار نقطه‌ای ؟



از قبل داشتیم در گاوس : $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{a}_r$

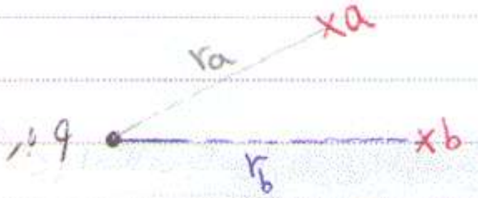
$$\rightarrow V = -\int_{\infty}^{r} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2}\,dr' \rightarrow \boxed{V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

$$V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \int r^{-2}\,dr = \frac{r^{-1}}{-1} = \left(\frac{-1}{r}\right)$$

پتانسیل ناشی از بار نقطه‌ای q در فاصله r از بار

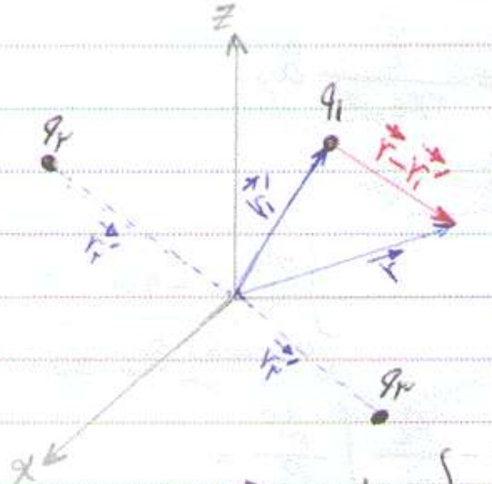
$$V = -\frac{q}{4\pi\epsilon}\times\left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)$$

* نتیجه اینکه پتانسیل کمیتی اسکالر است.
* اگر بار q مثبت باشد پتانسیل مثبت ایجاد میکند و اگر بار q منفی باشد پتانسیل ایجادی منفی است.



$$\boxed{V_{ab} = V_b - V_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)}$$

اختلاف پتانسیل در نقطه اطراف یک بار q

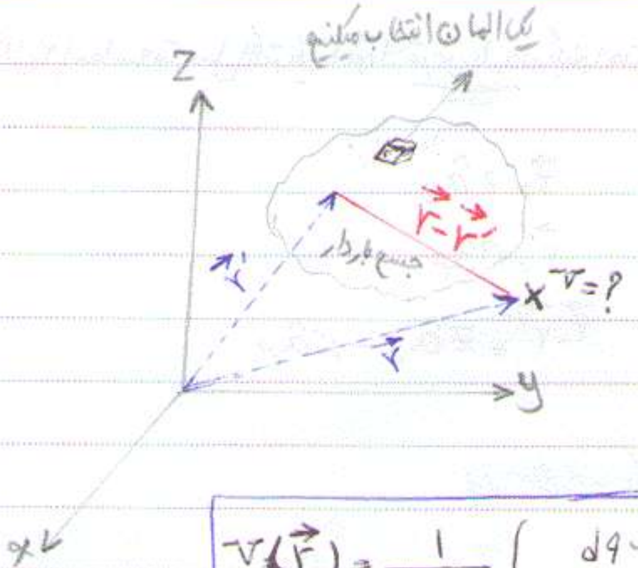


پتانسیل ناشی از n بار نقطه q_i که در محل های r_i' قرار دارند ، در محل $\vec{r}$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1'|} + \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2'|} + \cdots + \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n'|}\right\}$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|}}$$

پتانسیل ناشی از جسم باردار غیرنقطه ای :

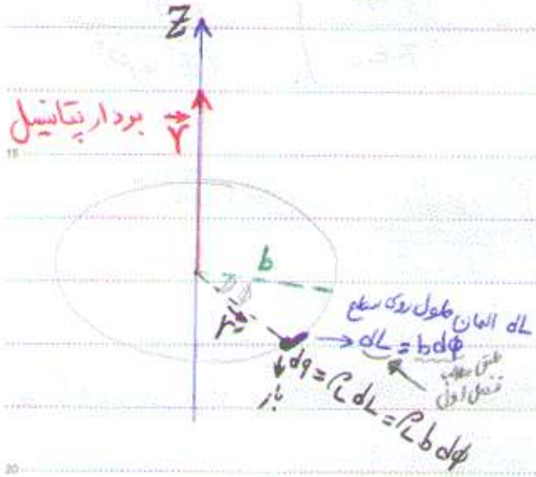


$$\boxed{V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

$$dq \rightarrow \begin{cases}\rho_v\,dv\\ \rho_s\,ds\\ \rho_L\,dL\end{cases}$$

این انتگرال در واقع روی جسم باردار گرفته میشود

مثال ۱) محاسبه پتانسیل الکتریکی ناشی از حلقه باردار یکنواخت بشعاع b و چگالی خطی ρ_L روی محور حلقه



$$\vec{r}=z\hat{a}_z$$

$$\vec{r}'=b\hat{a}_\rho$$

$$\vec{r}-\vec{r}'=z\hat{a}_z-b\hat{a}_\rho$$

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

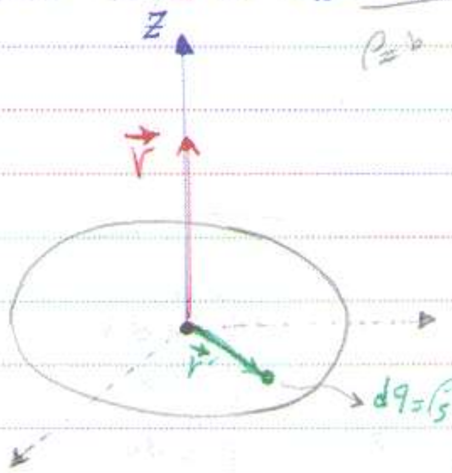
ثابت و بیرون می آیند

$$\rightarrow V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\rho_L\,b\,d\phi}{\sqrt{b^2+z^2}}=\frac{\rho_L\,b}{4\pi\epsilon_0\sqrt{b^2+z^2}}\int_0^{2\pi}d\phi \qquad =[\phi]_0^{2\pi}=2\pi$$

$$\rightarrow V=\frac{\rho_L\,b}{2\epsilon_0\sqrt{b^2+z^2}}$$

* شعاع برای این مسئله ثابت است

مثال ۲) محاسبه پتانسیل الکتریکی ناشی از قرص باردار یکنواخت بشعاع b و چگالی سطحی ρ_s روی محور قرص .



$$\vec{r} = z\hat{a}_z$$

$$\vec{r}' = \rho\hat{a}_\rho$$

$$\vec{r}-\vec{r}' = z\hat{a}_z - \rho\hat{a}_\rho$$

$$dq = \rho_s\, ds = \rho_s \rho\, d\rho\, d\phi$$

$ds_z \rightarrow$ المان سطح امتداد ds_z

قرص باردار

* چون با ds سروکار داریم انتگرال دوگانه است

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

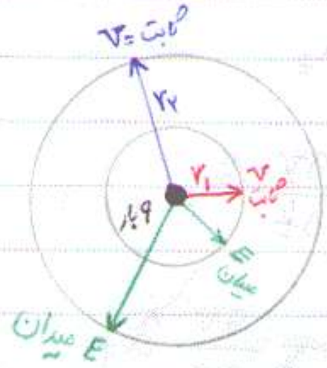
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{b} \frac{\rho_s \rho\, d\rho\, d\phi}{\sqrt{z^2+\rho^2}} = \frac{\rho_s 2\pi}{4\pi\epsilon_0}\int_0^b \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{z^2+\rho^2}}$$

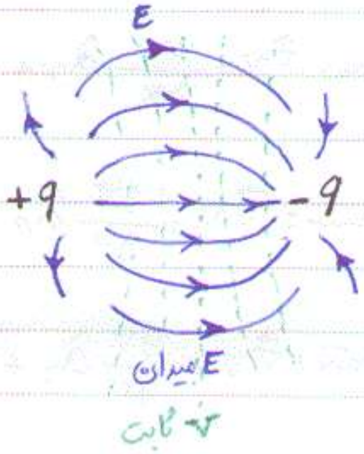
طبق فرمول $\int \frac{u\,du}{\sqrt{a^2+u^2}}$

* شعاع در این مثلث در نقاط مختلف متفاوت است

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$

$$\ln\left|\rho+\sqrt{z^2+\rho^2}\right|$$





مسیر میدان از بار مثبت بطرف بار منفی است

سطوح هم پتانسیل یک میدان اسکالر (عددی) را نشان میدهند

سطح هم پتانسیل :

مکان هندسی نقاطی است که پتانسیل روی آنها یکسان باشد

خطوط میدان الکتریکی همواره بر سطوح هم پتانسیل در هر نقطه عمود هستند

مشتق (جهت دار) پتانسیل = میدان الکتریکی ⟶ انتگرال میدان الکتریکی = پتانسیل الکتریکی

گرادیان :

عملگری است که اندازه و جهت شیب ماکزیمم یک میدان اسکالر را در هر نقطه تعیین میکند

گرادیان

عملگر برون نقطه روی پتانسیل $E = -\,\mathrm{grad}\,V = -\vec{\nabla} V$ میدان الکتریکی

میدان الکتریکی $E = \underbrace{-\vec{\nabla} V}$

منفی مشتق پتانسیل

Subject:
Year. Month. Date.

عملگر گرادیان در مختصات مختلف:

مختصات کارتزین: $\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z$

مختصات استوانه‌ای: $\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z$

مختصات کروی: $\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{a}_\phi$

در مختصات نیاز به حفظ کردن نیست ... هم نسبت به x و هم نسبت به y و z ...

مثال ۴-۳) میدان پتانسیل $V = 2x^2y - 5z$ و نقطه $P(-4, 3, 6)$ را در نظر بگیرید. در نقطه P:

الف) $\vec{E}$ میدان الکتریکی ب) جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ پ) چگالی پتانسیل ρ_v

مختصات کارتزین: $\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z$

$2x^2y - 5z$ مشتق گیری

مشتق گیری نسبت به x

الف) $\vec{E} = -\nabla V = -\left[(4xy)\hat{a}_x + (2x^2)\hat{a}_y - 5\hat{a}_z\right]$

$\rightarrow \vec{E}_P = -\left[(4\times(-4)\times(3))\hat{a}_x + (2)(-4)^2\hat{a}_y - 5\hat{a}_z\right]$

$\vec{E}_P = 48\hat{a}_x - 32\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$

ب) $\hat{a}_{EP} = \frac{\vec{E}_P}{|\vec{E}_P|} = \frac{48\hat{a}_x - 32\hat{a}_y + 5\hat{a}_z}{\sqrt{48^2 + 32^2 + 5^2}} = \%829\hat{a}_x - \%552\hat{a}_y + \%086\hat{a}_z$ $\quad 57{,}9$

پ) $\rho_v = \vec{\nabla}\cdot D = \epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\epsilon_0\left[4y + 0 + 0\right]$ $\quad 4\times 3 = 12$

$D = \epsilon_0 E$ دیورژانس ← مشتق میدان نسبت به x

در نقطه P

$$\boxed{\rho_v = 12\epsilon_0}$$

تابع پتانسیل ρ نه دارد و نه ϕ

PAPCO

Subject: 27
Year. Month. Date.

مثال) محاسبه میدان الکتریکی روی محور حلقه باردار یکنواخت (با مشتق گیری از پتانسیل)

پتانسیل روی محور حلقه باردار $V = \dfrac{\rho_L b}{2\epsilon_0\sqrt{b^2+z^2}}$ تابع پتانسیل ، نه ρ دارد نه ϕ

منفی گرادیان پتانسیل = میدان $\rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\left[\cancel{\dfrac{\partial V}{\partial \rho}}\hat{a}_\rho + \dfrac{1}{\rho}\cancel{\dfrac{\partial V}{\partial \phi}}\hat{a}_\phi + \dfrac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z\right]$

$$\vec{E} = -\left[\frac{-\rho_L b z}{2\epsilon_0(b^2+z^2)^{3/2}}\right]\hat{a}_z$$

مشتق

$$\left((b^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\left(2z(b^2+z^2)^{-3/2}\right) \qquad (U^a)' = aU'U^{a-1}$$

عبارتی از ρ و ϕ نداریم پس حاصل آنها صفر است.

در عمل، بیشتر اوقات میتوان تابع پتانسیل را توسط روشهائی بدست آورد.

مسائل فصل ٤ : ١٠ و ١٤ و ١٩ و ٢١ و ٢٢ و ٢٤ و ٢٦ و ٢٥

درجه

در میدان الکتریکی اختلاف پتانسیل هم میتواند توصیف کننده ویژگیهای الکتریکی باشد

-9 $+9$
چیزی که باعث پدیده های الکتریکی است اختلاف پتانسیل است نه خود پتانسیل و یا حتی بار مثبت و یا بار منفی
پتانسیل مشابه ارتفاع است.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل پنجم :
رساناها و دی الکتریک ها
معادلات پوآسون ولاپلاس

دیورژانس $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_v$ $\quad \vec{D}=\epsilon_0\vec{E} \quad \vec{E}=-\vec{\nabla}V$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\left(-\epsilon_0\vec{\nabla}V\right)=\rho_v$$

معادله‌ی پوآسون

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}V=-\frac{\rho_v}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\nabla^2V=-\frac{\rho_v}{\epsilon_0}}$$

عملگر لاپلاسین در مختصات دکارتی $\Rightarrow \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

معادله‌ی لاپلاس $\boxed{\nabla^2V=0} \leftarrow (\rho_v=0)$ اگر در نقطه‌ای بار وجود نداشته باشد

PAPCO

فصل هشتم ۸

میدان مغناطیسی ساکن :

$\vec{B} = \mu \vec{H}$

چگالی میدان مغناطیسی ← $\vec{B}$

شدت میدان مغناطیسی ← $\vec{H}$

رابطه فوق مشابه رابطه $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ است

تفاوت اساسی الکتریسته با مغناطیس :

در الکتریسیته تک قطبی الکتریکی (بار مثبت منفرد ، بار منفی منفرد) وجود دارد ولی در مغناطیس تک قطبی مغناطیسی وجود ندارد .

منشاء میدان مغناطیسی سه عامل است :

۱- مواد مغناطیسی دائمی (آهنربا)

۲- جریان الکتریکی *

۳- میدان الکتریکی متغیر با زمان

میدان مغناطیسی ساکن $\vec{B} = \mu \vec{H}$

تعریف جریان الکتریکی $I = \frac{dq}{dt}$

تعریف چگالی جریان الکتریکی $J = \frac{I}{S}$

S ← مساحت (سطح)

اگر چگالی در حالت یکنواخت با شد $J = \frac{dI}{dS}$ A/m^2 $\frac{\text{آمپر}}{\text{متر مربع}}$

Subject:
Year. Month. Date. ( ) ۸۹/۹/۱۷

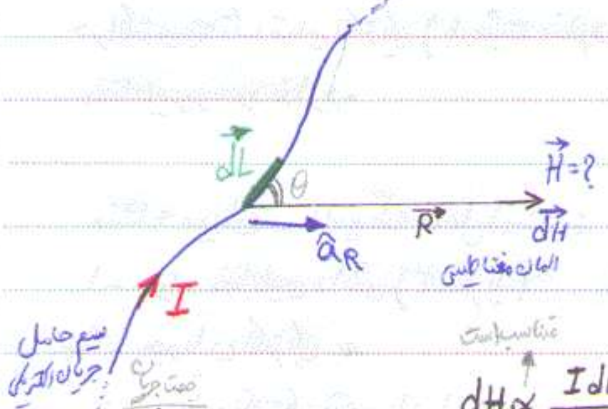
معرفی حیگالی مغناطیسی

میدان مغناطیسی H

حیگالی میدان مغناطیسی ∇

در این فصل میدان الکتریکی ناشی از جریان‌های الکتریکی را بررسی میکنیم . سیم حامل جریان

میدان مغناطیسی بیشترین مقدارش جائیست که عمود برسیم حامل جریان الکتریکی است . و در فواصل طولانی تر و جلو و عقب تر یا ناچیز است .



متناسب است ، از لحاظ برداری متناسب

$$dH \propto \frac{I\,dL}{R^2}\sin\theta \Rightarrow \vec{dH} \propto \frac{I\vec{dL}\times\hat{a}_R}{R^2}$$

بردار یکه عمود بر سطح سیم dL

فاصله به توان دو

$$\rightarrow \vec{dH} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{I\vec{dL}\times R}{R^3} \qquad \hat{a}_R = \frac{\vec{R}}{|R|} \qquad |R|R^2 = R^3$$

میدان مغناطیسی ناشی از کل سیم

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\oint_C \frac{I\vec{dL}\times R}{R^3}}$$

مسیر مدار بسته

یا

$\vec{dI}$ بصورت برداری

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\oint \frac{I\vec{dL}\times\hat{a}_R}{R^2}}$$

قانون بیوساوار

انگشت شست در جهت جریان ، جمع شدن چهار انگشت در جهت میدان

PAPCO

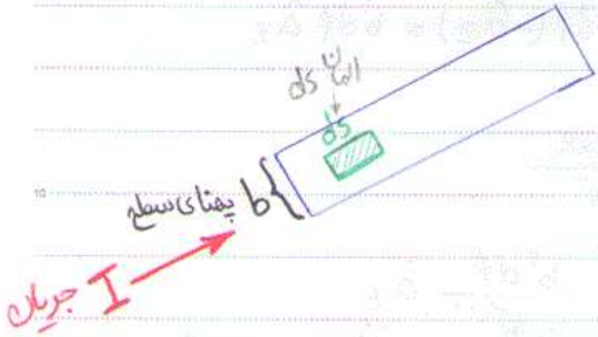
برای جریان سطحی:

اگر جریان بطور یکنواخت توزیع شده باشد

$$\boxed{|\vec{K}| = \frac{I}{b}}$$

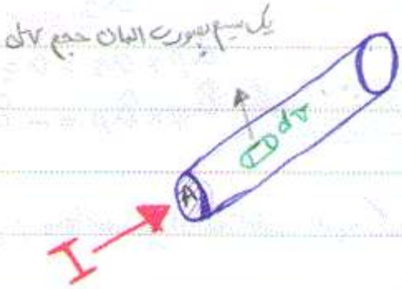
K در جهت جریان است (یا در جهت شارش بار است)

$$\text{اندازه چگالی جریان سطحی} = \frac{\text{کل جریان}}{\text{پهنای سطح}}$$



$$\longrightarrow \vec{dI} = \vec{K}\, ds$$

جریان حجمی:

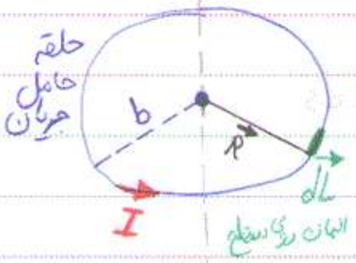


چگالی جریان حجمی $|\vec{J}| = \frac{I}{A}$ ⟶ مساحت سطح مقطع سیم

$$\longrightarrow \vec{dI} = \vec{J}\, dv$$

Subject: ۸۵۰
Year. Month. Date. ( )

مثال) محاسبه میدان مغناطیسی حلقه نازک جریان I بشعاع b در مرکز حلقه توسط قانون بیوساوار
المان جریان به محل مورد نظر. پس یک بردار از المان بمرکز حلقه وصل میشود.



مختصات استوانه‌ای

$$\begin{cases} \vec{dL} = \rho\, d\phi\, \hat{a}_\phi = b\, d\phi\, \hat{a}_\phi \\ \vec{R} = b(-\hat{a}_\rho) = -b\hat{a}_\rho \end{cases}$$

$$\vec{dL} \times \vec{R} = -b^2 d\phi(-\hat{a}_z) = b^2 d\phi\, \hat{a}_z$$

ضرب خارجی

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\oint \frac{\vec{dL}\times R}{R^3}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cancel{b^2}\, d\phi}{\cancel{b^3}_{\,b}}\, \hat{a}_z$$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi b}(2\pi)\,\hat{a}_z$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{I}{2b}\hat{a}_z}$$

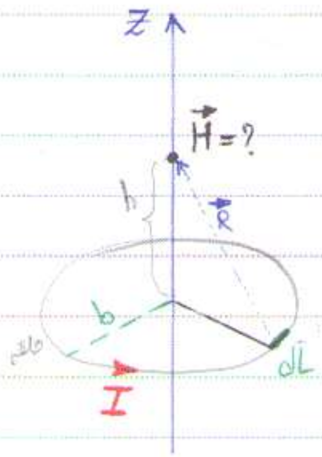
$$\hat{a}_\rho \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_z$$

برعکس $$\hat{a}_\phi \times \hat{a}_\rho = -\hat{a}_z$$

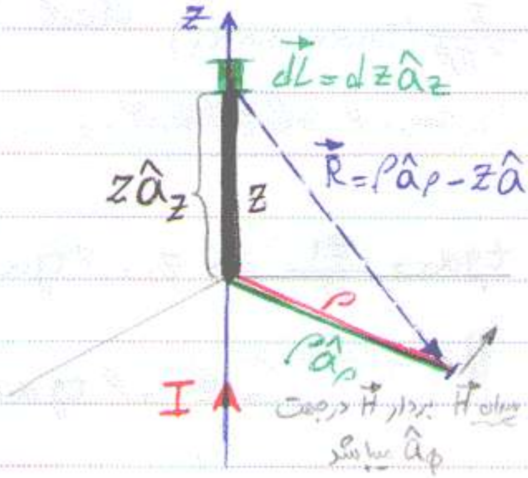
دستی ل اول داشتیم (ضرب خارجی)

---

* **تمرین:** محاسبه میدان مغناطیسی حلقه نازک جریان I بشعاع b روی محور حلقه بفاصله h از مرکز؟



تمرین ۸-۳) محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از سیم نازک مستقیم بسیار بلند حامل جریان I در فاصله ρ



این بار جریان را روی محور z انداختیم

المان جریان روی محور z قرار دارد، پس اندازه المان چون روی محور z است میشود $\vec{dL} = dz\,\hat{a}_z$

برداری که از انتها به ابتدا وصل میشود بردار تفاضل است

$$\vec{R} = \rho\hat{a}_\rho - z\hat{a}_z$$

در ضرب خارجی $\hat{a}_z \times \hat{a}_z = 0$

مقدار $R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

$$\vec{dL} \times \vec{R} = dz\,\hat{a}_z \times (\rho\hat{a}_\rho - z\hat{a}_z) = \rho\, dz\, \hat{a}_\phi + 0$$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho\, dz\, \hat{a}_\phi}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{I\rho}{4\pi}\left[\frac{z}{\rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} \hat{a}_\phi$$

$$\rightarrow \vec{H} = \frac{I}{4\pi\rho}\left[1-(-1)\right]\hat{a}_\phi \Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\hat{a}_\phi}$$

در حد بالا وقتی که z به $+\infty$ میل کند حاصل عبارت میشود $+1$

و در حد پایینی وقتی که z به $-\infty$ میل کند حاصل عبارت میشود -1

وقتی که نصف سیم بی نهایت $+\infty$ باشد ۱ میشود

وقتی نصف سیم بی نهایت منفی $-\infty$ باشد ۱- میشود

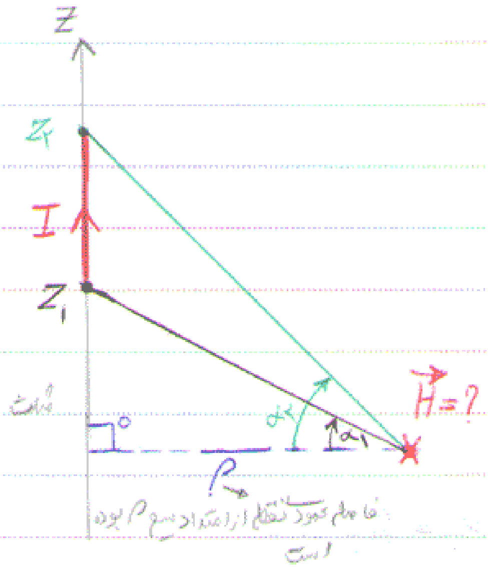
$$\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}}$$

فرمول ریاضی اثبات شده

تمرین) میدان مغناطیسی ناشی از قطعه سیم حامل جریان I در نقطه ای مطابق شکل .

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi\rho}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$ ثابت کنید

چون روی محور z جریان در نظر گرفته شده H در جهت $\hat{a}_\phi$ میباشد (مختصات استوانه ای)



$$tg\alpha_1 = \frac{z_1}{\rho} \rightarrow z_1 = \rho\, tg\alpha_1$$

$$\rightarrow z_2 = \rho\, tg\alpha_2$$

PAPCO

قانون بیوساوار $dH = \frac{I}{4\pi}\frac{dL\sin\theta}{R^2}$ مقایسه با میدان الکتریکی توسط قانون کولن $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{R^2}$

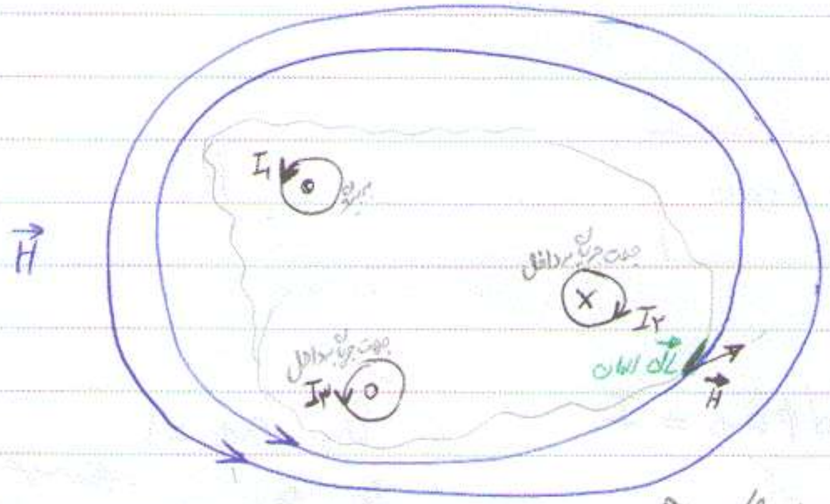
در این زاویه

میدان الکتریکی را علاوه بر قانون کولن میتوان از قانون گاوس محاسبه کرد.

قانون گاوس سطح بسته
قانون مداری آمپر مسیر بسته

قانون مداری آمپر:

برای محاسبه میدان مغناطیسی در مسائلی کاربرد دارد که باتوجه به تقارن مسأله بتوان مسیر فرضی بسته‌ای انتخاب کرد همه جای مسیر $\vec{H}\cdot\vec{dL}$ مقدار ثابتی باشد و H از انتگرال بیرون می‌آید ؛ آنگاه $\oint dL$ برابر طول مسیر است.



$$\boxed{\oint \vec{H}\cdot\vec{dL} = I \text{ خالص}}$$

در این شکل

$$\oint_C \vec{H}\,\vec{dL} = I_1 + I_3 - I_2$$

قانون بیوساوار ← متناظر الکتریکی ← قانون کولن
قانون مداری آمپر ← متناظر ← قانون گاوس در الکتریسته

Subject:
Year. Month. Date.

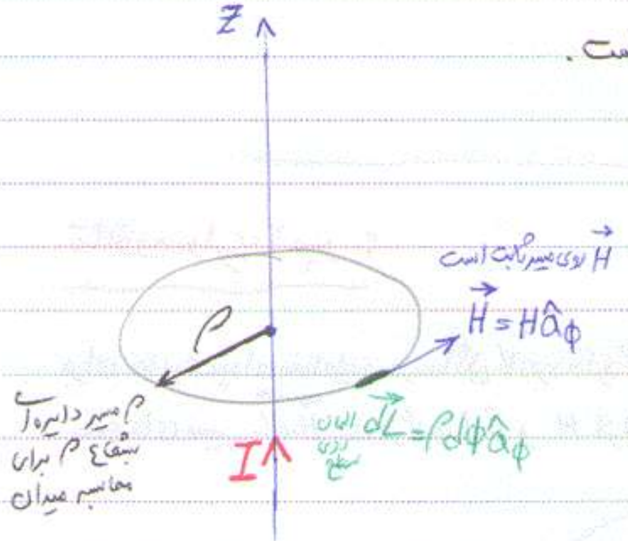
مثال) محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از سیم مستقیم بسیار بلند حامل جریان I در فاصله ρ (با قانون مداری آمپر)

میدان مغناطیسی روی مسیر دایره به مرکزیت سیم ثابت است.

حل: از تقارن مسئله میدانیم که میدان مغناطیسی روی مسیر دایره ای به مرکزیت سیم مقداری ثابت است.

جریان خالص در این مسیر I است.

H از تقارن مسئله در جهت dL و روی مسیر ثابت است.



$$\boxed{\oint \vec{H}\cdot d\vec{L} = I_{\text{خالص}}}$$

در یک مسیر دایره ای ۰ تا 2π ، 360°

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{H\hat{a}_\phi}_{\vec{H}} \cdot \underbrace{\rho\, d\phi\, \hat{a}_\phi}_{d\vec{L}} = I$$

ضرب نقطه ای:
$\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\phi = 1$
$\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_z =$ صفر

$$\rightarrow \underbrace{H\rho}_{\text{به صورت اعداد ثابت بیرون انتگرال می آیند}} \int_0^{2\pi} d\phi = I \rightarrow 2\pi H\rho = I$$

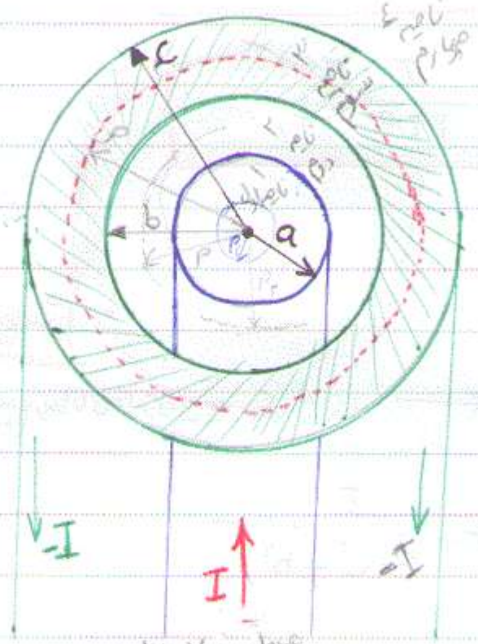
$$\rightarrow \vec{H}\rho\, 2\pi = I$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\hat{a}_\phi}$$

میدان مغناطیسی یک کابل هم محور

مهم

مثال) محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از کابل هم محور مستقیم بسیار بلند به شعاع‌های a و b و c که جریان‌ها I و $-I$ در آن برقرار است



a : شعاع رسانای داخلی

b : شعاع داخلی رسانا (هادی) بیرونی

c : شعاع خارجی رسانای خارجی (بیرونی)

جریان I از رسانای داخلی به بالا میرود

دو استوانه هم محور بسیار بلند

حل: چون سیم‌ها استوانه‌ای هم مرکز بینهایت بلند داریم از تقارن مسأله انتظار میرود H روی هر مسیر دایره‌ای هم مرکز با محور z (محور سیم) مقدار ثابتی داشته باشد

ناحیه اول درون سیم داخلی (در این ناحیه $\rho < a$ در این مسیر جریان خالص کمتر یا مساوی با I است $I_{خالص} \leq I$)

چگالی جریان در رسانای داخلی (حجمی) $\quad J = \dfrac{I \;\text{(جریان کل)}}{A \;\text{(مساحت کل سیم داخلی)}} \longrightarrow J_1 = \dfrac{I}{\pi a^2} \longrightarrow$ مساحت کل سیم داخلی

πr^2 = مساحت دایره

$$\oint_C \vec{H}\cdot \vec{dL} = I_{\text{خالص}}$$

چگالی جریان

H در همه جای مسیر ثابت است $\longrightarrow H \oint dL = J_1 \cdot S_1 \longrightarrow$ مساحت مسیر بسته (سطح مقطع)

$$H\,2\pi\rho = \frac{I}{\pi a^2}\,\pi\rho^2 \longrightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi a^2}\,\rho\,\hat{a}_\phi}$$

انتگرال dL مساوی طول مسیر بسته است $\oint dL = 2\pi\rho$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ناحیه دوم ۲:

بین دو رسانا (فضای خالی بین دو رسانا) $a<\rho<b \longleftarrow I = I$ خالص

$$\oint_C \vec{H}\,d\vec{L} = I_{\text{خالص}}$$

$$H\oint_C dL = I \longrightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\hat{a}_\phi}$$

طول مسیر

$$H\,2\pi\rho = I$$

ناحیه سوم ۳:

درون سیم رسانای خارجی یعنی $b<\rho<c \longleftarrow 0 < I_{\text{خالص}} < I_{\text{کل}}$

چگالی جریان در رسانای خارجی

$$J_2 \text{ یا } J = \frac{I}{A_2} = \frac{I}{\pi(c^2-b^2)}$$

جریان کل که رو به بیرون است / مساحت سیم خارجی

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{L} = I - I_2 S_2$$

$I - J_2 S_2$

ρ شعاع مسیر در رسانای خارجی

به علت وجود ρ در آن

$$H\oint dL = I - \frac{I}{\pi(c^2-b^2)}\pi(\rho^2-b^2)$$

$2\pi\rho$

$$H\,2\pi\rho = I\left(1-\frac{\rho^2-b^2}{c^2-b^2}\right) = I\left(\frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}\right)$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}\right)\hat{a}_\phi}$$

PAPCO

Subject: 33
Year. Month. Date. ( )

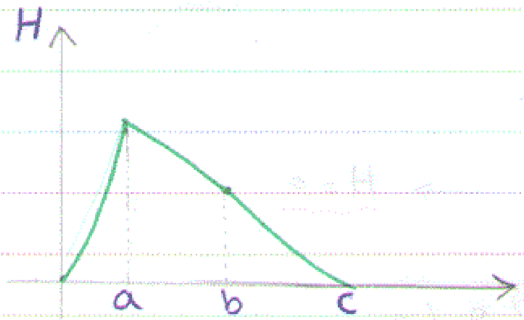
ناحیه چهارم: کابل هم محور یا کابل کواکسیال سیم آنتن یا سیم‌کشی بردن سیگنال‌ها

خارج از کابل هم محور $\rho > c$

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dL} = I \quad \text{خالص}$$

$$H \oint dL = I - I = 0$$

$\rightarrow \boxed{H = 0}$ میدان خارج در کابل کواکسیال (خارج یا بیرون از آن) صفر است



مثال) محاسبه میدان مغناطیسی درون چنبره دارای N دور با شعاع هر حلقه a و شعاع متوسط ρ_0 حامل جریان I

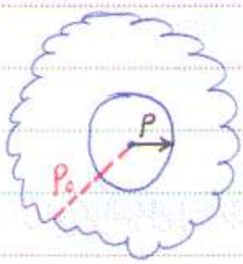
ص ۲۱۴

اگر H وجود داشته باشد باید در همه جای مسیر دایره ای یکسان باشد.

کرل $\vec{\nabla}\times\vec{H}$

دیورژانس $\vec{\nabla}\cdot\vec{H}$

الف) $\rho < \rho_0 - a$



$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{L} = I_{\text{خالص}} = 0$$

$$\to H\oint dL = 0 \to \underline{H = 0}$$

ب) $\rho > \rho_0 + a$

$$\to I_{\text{خالص}} = 0 \longrightarrow \underline{H = 0}$$

$\boxed{\oint d\vec{L} = 2\pi\rho}$ مهم

پ) $\rho_0 - a < \rho < \rho_0 + a$

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{L} = I_{\text{خالص}} = NI$$

$$\to H\oint_C \underbrace{dL}_{\text{محیط دایره مسیرها}} = NI \longrightarrow dL = 2\pi\rho$$

$$\to H\,2\pi\rho = NI$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{NI}{2\pi\rho}\hat{a}_\phi}$$

یک برش افقی از چنبره را در نظر گرفته ایم

* در میدان مغناطیسی جریان الکتریکی باعث ایجاد خطوط مغناطیسی میشود * یادآوری

کرل CURL :

در برخی میدان های برداری ، خطوط میدان بصورت منحنی های بسته هستند . عملگری که قدرت چرخا ندگی و جهت بردار عمود بر سطح بیشترین چرخش در یک نقطه را مشخص میکند ، کرل نام دارد.

تعریف اولیه عملگر کرل روی میدان برداری $\vec{H}$:

$$CURL\ \vec{H} = \lim \frac{\oint \vec{H}\cdot\vec{dL}}{\Delta S}\,\hat{a}_n$$

اگر بخواهیم بصورت برداری باشد

$\hat{a}_n$: جهت عمود بر صفحه ای که چرخش H در آن صفحه بیشینه (ماکزیمم) باشد.

$\Delta S \to 0$ شرط اینکه مساحت بسمت صفر میل کند
(المانی که بسمت صفر میل میکند یک نقطه است)

عملگر کرل در مختصات کارتزین :

$$CURL\ \vec{H} = \underbrace{\vec{\nabla}\times}_{\text{نماد عملگر کرل}}\vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

حاصل دترمینان های که سطح اول بردارها
سطح دوم مشتقات بردار
سطح سوم مولفه های آن بردار میدان برداری
عملگر دل با ضرب نماد عملگر کرل است
$\vec{\nabla}\times$

عملگر کرل در مختصات استوانه ای :

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\hat{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\hat{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho H_\phi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\hat{a}_z$$

عملگر کرل در مختصات کروی :

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(H_\phi\sin\theta - \frac{\partial H_\phi}{\partial\phi}\right)\right]\hat{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\overset{\partial H_r}{\partial H_\rho}}{\underset{\partial\phi}{\partial z}} - \frac{\overset{\partial}{\partial H_z}}{\underset{\partial r}{\partial\theta}}\right]\hat{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\hat{a}_\phi$$

نقط

* عملگر کارتزین مهم است *

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر H میدان مغناطیسی باشد.

فرم نقطه‌ای (دیفرانسیلی) قانون مداری آمپر:

$\vec{J}$: چگالی جریان در آن نقطه مورد نظر

المان سطح کوچک

$$\boxed{\underbrace{\vec{\nabla}\times}_{\text{کرل}}\vec{H}=\vec{J}}$$

معادله دوم ماکسول برای میدان‌های مغناطیسی ساکن

$$\boxed{\oint_C \vec{H}\cdot\vec{dL}=I_{\text{خالص}}}$$

فرم انتگرالی مداری آمپر

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J} \quad (1)$$

خطوط میدان الکتریکی از یک نقطه شروع و به نقطه دیگر ختم میشوند.

نکته * کرل میدان الکتریکی ساکن همواره برابر صفر است:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \quad (2)$$

معادله سوم ماکسول برای میدان‌های ساکن

قضیه استوکس:

حال دو معادله بالا را بهم ربط میدهیم:

$$\int_S \vec{J}\cdot\vec{dS}=I_{\text{خالص}} \rightarrow \int_S \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{H})}_{\vec{J}}\cdot\vec{dS}=I_{\text{خالص}}=\oint_C \vec{H}\,\vec{dL}$$

سطح بسته

قانون مداری آمپر

$$\boxed{\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot\vec{dS}=\oint_C \vec{H}\,\vec{dL}}$$

C: مسیر بسته‌ای که سطح باز S را دربرگرفته است.

نباید یک سطح بسته باشد

قضیه دیورژانس انتگرال سه‌گانه (حجمی) را به دوگانه (سطحی) مربوط میکند

قضیه استوکس انتگرال دوگانه (سطحی) را به انتگرال یگانه (خطی) مربوط میکند

باید یک سطح باز باشد چون در سطح بسته حاصل صفر است

PAPCO

مثال ۸-۲) میدان برداری $\vec{H} = 0.2z^2\,\hat{a}_x$ را در نظر بگیرید. کرل $\vec{H}$ را در نقطه $P(1,2,3)$ بدست آورید.

حل: رابطه $\vec{H}$ فقط ضریب x دارد ($\hat{a}_x$) میدان برداری $\vec{H} = 0.2z^2\,\hat{a}_x$

کرل H به z بستگی دارد و در جهت a_y است.

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0.2z^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\times\hat{a}_x + (0.4z - 0)\,\hat{a}_y + 0\,\hat{a}_z = 0.4z\,\hat{a}_y$$

مشتق میدان برداری نسبت به x — مشتق نسبت به y — مشتق نسبت به z

$z = 3$

$$\rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{H}\Big|_P = 0.4\times 3\,\hat{a}_y = 1.2\,\hat{a}_y$$

$$+\hat{a}_x\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - (\hat{a}_y)\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0.2z^2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{a}_z\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0.2z^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-(\hat{a}_y)\underbrace{\left(-0.2z^2\times\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\text{مشتق نسبت به } z} + (\hat{a}_z)\underbrace{(0.2z^2)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)}_{\text{مشتق نسبت به } y \text{ که میشود صفر}} \longrightarrow$$

میدان برداری $\vec{H} = 0.2z^2\,\hat{a}_x$

$0.2\times 2z$

$$+a_y\left(2\times(0.2)z\right) \Rightarrow 0.4z\,\hat{a}_y$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۲۳-۸) میدان $\vec{H}=20\rho^2\hat{a}_\phi\ (\frac{A}{m})$ داده شده است.

H_ϕ که ضریب $\hat{a}_\phi$ است

الف) $\vec{J}$ را بیابید.

ب) با انتگرال گیری از $\vec{J}$، در سطح $\rho=1$ و $0<\phi<2\pi$ و $z=0$ کل جریان را که در جهت $\hat{a}_z$ از این سطح میگذرد بیابید. پ) کل جریان را با محاسبه یک انتگرال خط روی مسیر دایره‌ای $\rho=1$ و $0<\phi<2\pi$ و $z=0$ بدست آورید

چون H_ϕ داریم و تابعی از ρ است

هرگاه مشتق $\hat{a}_\phi$ نسبت به ρ باشد مشتق آن مخالف صفر است

الف)

الف

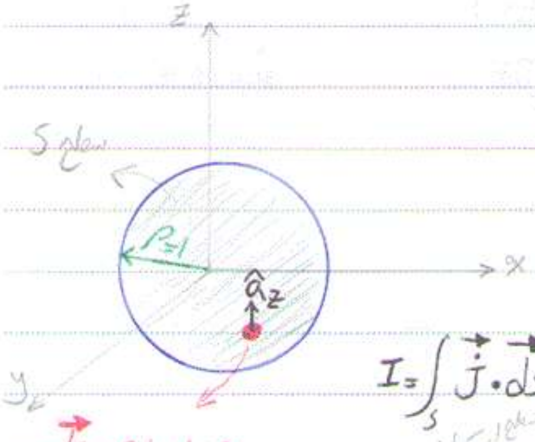
$$\vec{J}=\vec{\nabla}\times\vec{H}=0\,\hat{a}_\rho+0\,\hat{a}_\phi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(20\rho^3)\hat{a}_z$$

$$=\frac{1}{\rho}\times60\rho^2\hat{a}_z=60\rho\hat{a}_z$$

در مختصات استوانه‌ای $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_\phi)$

سطح یک دایره است چون $\rho=1$ که مقدار ϕ از ۰ تا 2π است

ب)



$\vec{ds}_z=\rho d\rho d\phi\,\hat{a}_z$

$$I=\int_s\vec{J}\cdot\vec{ds}=\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{1}(60\rho\hat{a}_z)\cdot(\rho d\rho d\phi\,\hat{a}_z)$$

سطح استوانه

$$I=60\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{1}\rho^2 d\rho d\phi=60\times2\pi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1=40\pi$$

در استوانه

عمود ثابت و بیرون می‌آید

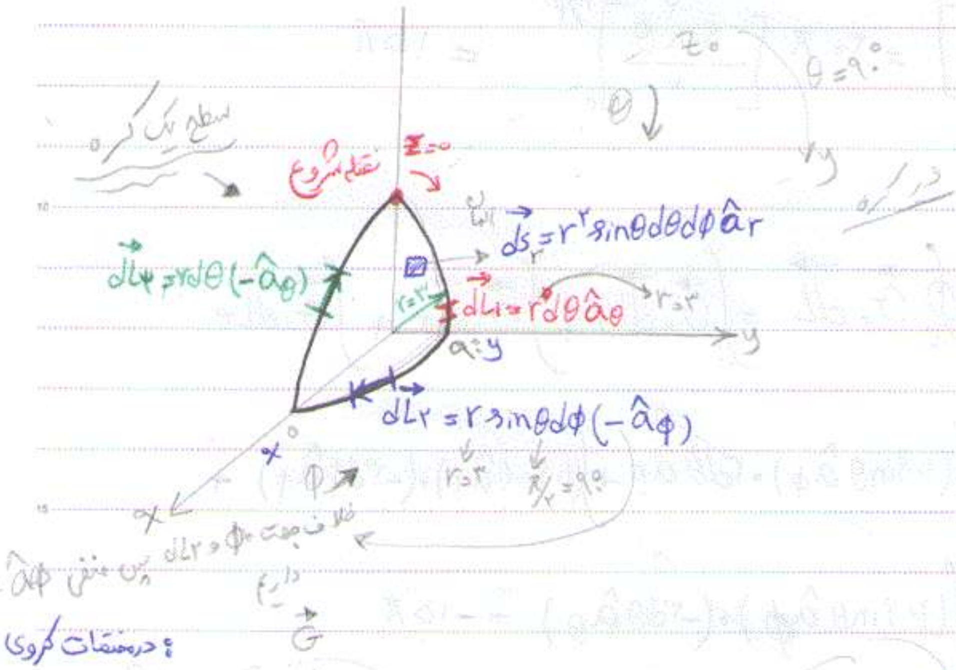
مثال ۸-۲۴) دو طرف قضیه استوکس را برای میدان برداری $\vec{G}=10\sin\theta\,\hat{a}_\phi$ و
سطح $r=3$ و $0<\theta<90$ و $0\leqslant\phi\leqslant 90^\circ$ حساب کنید. جهت بردار سطح را $\hat{a}_r$ فرض کنید.

یک کره

قضیه استوکس : $\int_s (\vec{\nabla}\times\vec{G})\cdot\vec{ds} = \oint_s \vec{G}\cdot\vec{dL}$

سطح بسته

در dL_1 ← r ثابت و ϕ ثابت است و فقط θ تغییر میکند



در مختصات کروی :

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\phi\sin\theta)-\frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rH_\phi)\right]\hat{a}_\theta + \cdots$$

$10\sin\theta\times\sin\theta$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta)-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\hat{a}_\phi$$

$$\rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{G} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(10\sin^2\theta)\hat{a}_r + \frac{1}{r}\left[-\frac{\partial}{\partial r}(r\times 10\sin\theta)\right]\hat{a}_\theta$$

$\times\ 20\cos\theta\sin\theta$

$$= \frac{20}{r}\cos\theta\,\hat{a}_r - \frac{10}{r}\sin\theta\,\hat{a}_\theta$$

PAPCO

$(\sin^2\theta)' = 2\sin\theta\cos\theta$

dsr

$$= \int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\frac{20}{r}\cos\theta\,\hat{a}_r - \frac{10}{r}\sin\theta\,\hat{a}_\theta\right)\cdot\left(r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\hat{a}_r\right)$$

$\sin\theta = u$

$\cos\theta\,d\theta = du$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} 20\,\underset{r=3}{r}\,\underbrace{\cos\theta\,d\theta}_{du}\,\overset{u}{\sin\theta} = 30\pi\int u\,du$$

$$= 30\pi\left[\frac{u^2}{2}\right] = 30\pi\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 15\pi$$

طرف انتگرال خط
قضیه استوکس ⇐

$$\oint_C \vec{G}\cdot d\vec{L} = \int \vec{G}\cdot d\vec{L}_1 + \int \vec{G}\cdot d\vec{L}_2 + \int \vec{G}\cdot d\vec{L}_3$$

$\hat{a}_\phi\cdot\hat{a}_\theta = 0$

ضرب داخلی بردارهای یکه

$$= \overset{0}{\cancel{\int (10\sin\theta\,\hat{a}_\phi)\cdot 3d\theta\,\hat{a}_\theta}} + \int (\underset{1}{10\sin\theta}\,\hat{a}_\phi)\cdot(-3d\phi\,\hat{a}_\phi) \quad (\theta = \pi/2) \; +$$

$$+ \overset{0}{\cancel{\int (10\sin\theta\,\hat{a}_\phi)\cdot(-3d\theta\,\hat{a}_\theta)}} = -15\pi$$

$$= 30\pi\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = -15\pi$$

⊖ دلیل منفی
باید جهت حرکت مسیر C را برعکس در نظر بگیریم