* ریاضی مهندسی - جلسه‌ی اول - ۹۲/۲/۲۴ - استاد کریمی - دوشنبه - 17-21:30 | 1

۵۰ درصد سؤالات ذهنی ← در زمان زیر ۱۰ دقیقه!

وظایف مدرس ← جهت دادن
← یاد دادن

وظایف دانشجو

① مرور ← اصلی‌ترین پارامتر ← بیشترین ضربه رو از این می‌خورند!!
بعد از ۷۲ ساعت، احتمال اینکه مطلب از ذهن خارج شود بالای ۹۰ درصد است!
مرور + جمع‌بندی + خلاصه‌برداری ← تسلط ← تست
دکتر کلر باشد مرور واجب‌تر از مطالعه کردن است!

② اگه درست و کامل با کلاس پیش رفتی که ok!
اگه نه! باید پیش مطالعه داشته باشی!

③ حق تقدم با افرادی است که سؤال می‌پرسند!

کتاب - جلد ۱ و ۲ -

* برق ← ۶ تا ۷ سؤال

* فرمول‌های مثلثات و تا جلسه‌ی آینده حفظ کن!

ریاضیات مهندسی ← فوریه
← توابع مختلط ← ۵۰ درصد
← معادلات با مشتقات جزئی
۵۰ درصد

ساده‌ترین ← کم‌زمان‌ترین

ترتیب سادگی (کم زمانی) : معادلات مشتقات جزئی ← توابع مختلط ← فوریه

* فوریه :

فوریه ←
- سری فوریه
- انتگرال فوریه
- تبدیل فوریه

← سمت راست متناوب است پس سمت چپ نیز باید باشد

- سری فوریه : می خواهیم یک تابع متناوب $f(x)$ را برحسب مجموعی از توابع $\cos\frac{n\pi}{l}x$ و $\sin\frac{n\pi}{l}x$ بنویسیم.

$$f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\text{متناوب}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\cos\frac{n\pi}{L}x}_{\text{متناوب}} + b_n \underbrace{\sin\frac{n\pi}{L}x}_{\text{متناوب}}$$

پس توابع نامتناوب سری فوریه ندارند فقط مخصوص توابع متناوب است

قدم اول : ضرایب مجهول چه طوری بدست می آیند؟

* یک معادله ⇐ $2n+1$ مجهول

راه حل معادله : خاصیت تعامد

- اگه خاصیت تعامد وجود نداشت نیازی نیست فرمول های فوریه را حفظ کنید!

دو بردار در هم عمود ⇐ ضرب داخلی صفر

* ضرب داخلی دو تابع حقیقی

ضرب داخلی f و g $\quad \langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ = ضرب داخلی f و g در بازه ی $[a,b]$

فرض: f و g مخالف صفر باشند

اگر ضرب داخلی دو تابع صفر شود ⇐ بر هم عمودند

$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow$ f و g در بازه ی $[a,b]$ متعامد هستند

۲

توابع یک خانواده ⇐ توابعی که یه ویژگی های مشخص داشته باشند که ما با مقداردهی به n ها این توابع را بدست آوریم

ex: $\sin nx , \sin 2x \Rightarrow$ فرق دارند اما تابع مولد همشون $\sin$ است، پس از یک خانواده اند

$g_n(x)$ ← یک خانواده

* اگر در یک خانواده از توابع ⇐ توابع دو به دو بر هم عمود باشند ⇐ $g_n(x)$: پایه متعامد

$$\langle g_n(x) , g_m(x) \rangle = \int_a^b g_n(x) g_m(x) dx = \begin{cases} 0 , & m \neq n \\ \|g_n\|^2 , & m = n \end{cases}$$

$$v \cdot v = |v|^2 \qquad \langle f,f \rangle = \int_a^b f^2 dx = \|f\|^2$$

مفهوم نرم برای توابع = مفهوم اندازه برای بردارها

نرم = ضرب داخلی هر تابع در خودش

$\sin nx \Rightarrow$ دو به دو بر هم عمودند

$$\int_{(T)} \sin nx \sin mx = \begin{cases} 0 , & m \neq n \\ \frac{T}{2} , & m = n \end{cases}$$

اثبات ⇐ $$\int_{(T)} \sin^2 nx\, dx = \int_0^T \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \frac{T}{2} - 0 = \frac{T}{2}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2nx)$$

$$\int_{(T)} \cos nx \cos mx\, dx = \begin{cases} 0 , & m \neq n \\ \frac{T}{2} , & m = n \end{cases}$$

** تابع پیوسته‌ی $f(x)$ را می‌توان برحسب پایه‌ی متعامد $g_n(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ مطابق زیر بسط داد

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(x)$$

$$a_n = \frac{1}{\|g_n\|^2} \int_a^b f(x) g_n(x)\,dx = \frac{\langle f, g_n \rangle}{\langle g_n, g_n \rangle}$$

* قبل نرمالیزه کردن در داریم که تقسیم بر اندازش می‌کنیم یعنی تقسیم بر ضرب داخلی در خودش

طول بازه هم است: $\int_{(T)} = \int_0^T \quad \int_{-L}^{L} \quad \int_{2L}^{4L} \quad \int_T^{2T} \cdots$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad L = \frac{T}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(x) \cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad T = 2L$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(x) \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\langle 1,1 \rangle = \int_0^T 1^2\,dx = T \qquad \text{نرم یک} = T$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(x)\,dx$$

گروه (1)

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{(T)} f(x) \cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{(T)} f(x) \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{(T)} f(x)\,dx$$

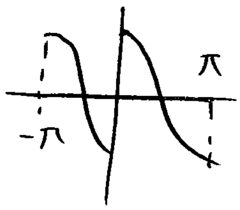
۳ 

متناوبند یا خیر؟
زوجند یا فرد یا نه زوج نه فرد؟

۱) $y=\cos x \quad 0\le x\le 2\pi$ متناوب نیست — نه زوج نه فرد

۲) $y=x \quad 0<x<1$ متناوب نیست، نه زوج نه فرد

۳) $y=x-[x]$ متناوب — نه زوج نه فرد $T=1$



۴) $y=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi \\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$ متناوب نیست — فرد

۵) $y=e^{-x}$ متناوب نیست، نه زوج است و نه فرد

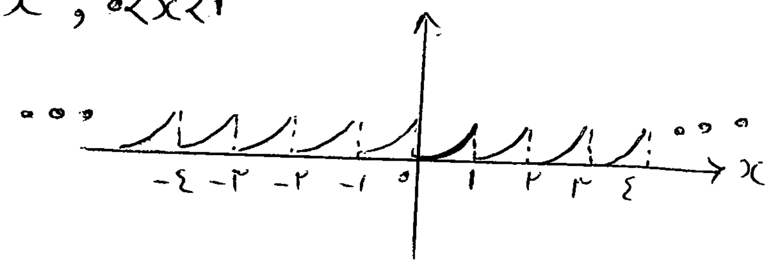
نکته: هر موقع تابعی با بیش از یک ضابطه داشتیم بهترین راه برای تشخیص زوج و فرد بودن رسم شکل است!

۱) توابعی که ذاتاً متناوب هستند:

$y=\sin x$
$y=\cos x$
$y=x-[x]$
$y=\operatorname{tg} x$
$\vdots$

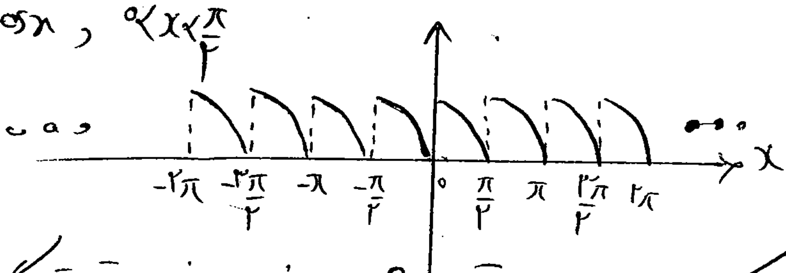
۲) توابعی که ذاتاً متناوب نیستند، اما به صورت تصنعی می‌توان آن‌ها را متناوب کرد

$y=x^2 \,,\; 0<x<1$



$f(x)=x^2 \; (0<x<1)$
$f(x+1)=f(x)$

$y=\cos x \,,\; 0<x<\frac{\pi}{2}$



* هر تابعی که در بازه‌ی محدود تعریف شده باشد متعلق به گروه (۲) است

* عادت کن توی ریاضی مهندسی همیشه اول به بازه دقت کن!

* متناوب ⇐ از $-\infty$ تا $+\infty$

۳) توابعی که نا متناوب هستند و بصورت تصنعی هم متناوب نمی شوند

$$\begin{cases} y=x \\ y=x^2 \\ y=e^{-x} \\ y=x^2+3x \\ \vdots \end{cases}$$

* توابع گروه (۲)، سری فوریه ندارند

- گروه ۳، حتما بازه نامحدود است

بازه نگاه کن ⇐ بازه نامحدود ⇐ گروه ۲ از بین میره
بازه نامحدود ⇐ گروه ۱ هم نیست چون از $-\infty$ تا $+\infty$ نیست
پس تنها جایی که ضابطه مهمه ⇐ از $-\infty$ تا $+\infty$ است

$y=f(x)\ ,\ x>0 \Rightarrow$ گروه ۳

$y=f(x)\ ,\ a<x<b \Rightarrow$ گروه ۲

$y=c$ عدد ثابت $\Rightarrow$ گروه ۱

$y=x^2,\ 0<x<1 \Rightarrow$ گروه ۲

* بازه ی گروه ۱ همیشه از $-\infty$ تا $+\infty$ است.

$y=f(x)$ → $\sin x$ ۱ / → x ۳ ⇒ باید به ضابطه رجوع کرد! چون بازه تعریف از $-\infty$ تا $+\infty$ است!

۶۹ درصد سوالات کنکور ⇐ گروه ۲
۱ درصد سوالات کنکور ⇐ گروه ۱

* در گروه ۲، حتما دوره ی تناوب، بازه ی تعریف تابع است!

که گرده‌ای مشکل اصلی بدست آوردن کوچکترین دوره تناوب است.

ما در سری فوریه، کوچکترین دوره‌ی تناوب را نیاز نداریم

دقت ها هر تابع دارای تناوب را روی هر مضربی از دوره‌ی تناوب آن بنویسیم، سری فوریه‌ی آن فرقی نمی‌کند!

پس در ریاضی مهندسی، معضلی به نام انتخاب دوره تناوب نداریم.

* سه مدل بیان برای سؤالات گروه ۱ داریم

(۱) سری فوریه تابع $y=f(x)$ و $0<x<a$ را بدست آورید

(۲) سری فوریه تابع $y=f(x)$، $0<x<a$ و $f(x+a)=f(x)$ را بدست آورید

(۳) اگر تعریف تابع در یک دوره‌ی تناوب بصورت $y=f(x)$، $0<x<a$ باشد، سری فوریه تابع را بدست آورید.

شکل (۱) در اصل غلط است ولی چون پیش فرض ذهنی این است، دیگه طراح کم‌ضعیف‌تر یعنی خود دانشجو باید تشخیص بده که این فقط تعریف آن در یک دوره است.

(گروه ۲)

$$\text{فرد } f(x) = \begin{cases} a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx=0 \\ a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=0 \\ b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)}_{\text{فرد}}\times\underbrace{\sin\frac{n\pi}{L}x}_{\text{فرد}}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases} \Longleftrightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\text{زوج } f(x) = \begin{cases} a_0=\frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\,dx \\ a_n=\frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \\ b_n=0 \end{cases} \Longleftrightarrow f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{L}x$$

توضیح

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

زوج ⇒ زوج — زوج — ~~فرد~~

فرد ⇒ ~~زوج~~ — ~~زوج~~ — فرد

سوال اصلی: از کجا تشخیص بدیم بسط فوریه‌ی تابع زوج یا فرد (قبل از محاسبه‌ی ضرایب) ؟

f:

- بازه متقارن است $(-a, a)$
  - f زوج ← بسط فوریه زوج
  - f فرد ← بسط فوریه فرد
  - f نه زوج نه فرد ← بسط فوریه نه زوج نه فرد
- بازه متقارن نیست ← شکل سری فوریه تابع را رسم می‌کنیم

* شکل سری فوریه تابع = شکل متناوب شده (تصحیحی) $f(x)$ است

* مثال) زوج یا فرد بودن بسط فوریه توابع داده شده را بررسی کنید.

1) $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2-x & 1<x<2 \end{cases}$ ⇒ متقارن نیست ← رسم شکل سری فوریه

2) $f(x)=\begin{cases} x & -1<x<1 \\ 2-x & 1<x<3 \end{cases}$ ⇒ بازه متقارن نیست ← شکل تابع رسم

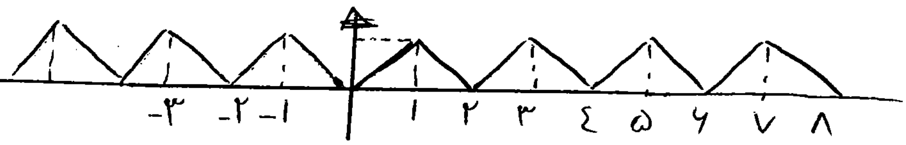
3) $f(x)=x \quad 0<x<1$ ⇒ بازه متقارن نیست ← شکل سری فوریه رسم

4) $f(x)=x-\frac{1}{2} \quad 0<x<\frac{1}{2}$ ⇒ متقارن نیست ← شکل سری فوریه رسم

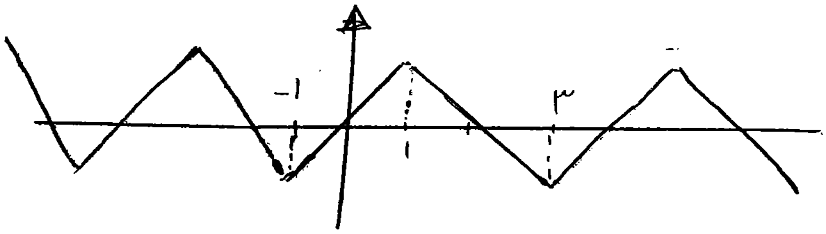
5) $f(x)=x+1 \quad 0<x<1$ ⇒ متقارن است (تابع نه زوج نه فرد پس بسط فوریه نه زوج نه فرد)

6) $f(x)=x \quad -1<x<1$ متقارن است پس تک ضابطه

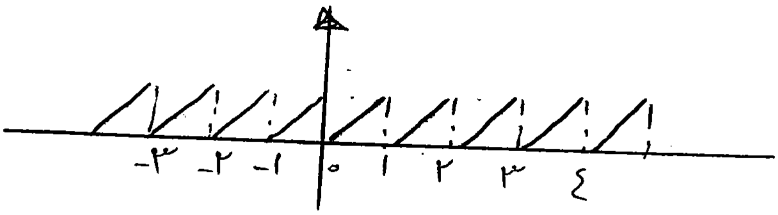
۱) سری فوریه زوج است



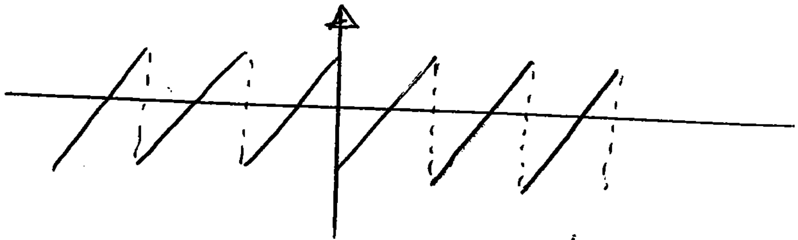
۲) سری فوریه فرد است



۳) سری فوریه نه زوج است، نه فرد



۴) سری فوریه فرد است.



۵) سری فوریه نه زوج است و نه فرد

۶) سری فوریه فرد است.

* اگه بازه متقارن نباشه، اصلاً به ضابطه نگاه نمی‌کنیم!

← تنها راه تشخیص: شکل سری فوریه است.

چه اصراری داریم قبل از محاسبه ضرایب، تشخیص زوج و فرد بدیم؟ محاسبات کم می‌شه! چون شاید b_n یا a_n حذف بشوند (صفر شوند)

* در تابع زوج حداقل یکی از a_0 یا a_n مخالف صفر باشد

* در تابع نه زوج نه فرد حداقل یکی از a_0، b_n یا a_n مخالف صفر باشد.

* روش کلی محاسبه سری فوریه :

۱) تشخیص دوره ی تناوب (T)

۲) تعیین حدود انتگرال : ابتدا بررسی می کنیم که بسط فوریه زوج یا فرد است یا خیر ⇐

اگر بسط فوریه زوج یا فرد باشد ⇐ از فرمول های گروه (۲) ضرایب را محاسبه می کنیم

* در این فرمول ها همیشه بازه ی انتگرالگیری از 0 تا L است

اگر بسط فوریه نه زوج و نه فرد باشد ⇐ از فرمول های گروه (۱) ضرایب را محاسبه می کنیم

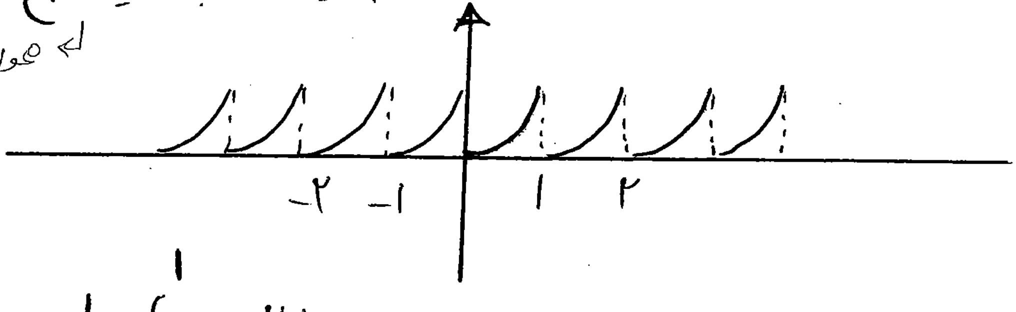
بازه ی انتگرال همواره برابر است با بازه ی تعریف تابع در نظر گرفته شود

* مثال : بسط فوریه ی تابع $y=x^2$, $0<x<1$ را بدست آورید.

$$T=1 \Rightarrow L=\frac{1}{2}$$

بازه متقارن نیست ⇐ شکل سری فوریه را رسم می کنیم. بسط فوریه نه زوج و نه فرد است

⇐ همون حدود تعریف تابع، حد انتگرال



$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{1/2}\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \cdots \\ a_n = \dfrac{1}{1/2}\displaystyle\int_0^1 x^2\cos\left(\dfrac{n\pi}{\frac{1}{2}}x\right)dx = \cdots \\ b_n = \dfrac{1}{1/2}\displaystyle\int_0^1 x^2\sin\left(\dfrac{n\pi}{1/2}x\right)dx = \cdots \end{cases}$$

— می‌تونی اینطوری هم بری :

$$a_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_2^3 (x-2)^2 dx$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_2^3 (x-2)^2 \cos\left(\frac{n\pi}{\frac{1}{2}} x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_2^3 (x-2)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{\frac{1}{2}} x\right) dx$$

درسته! ولی ضرورت نداره، چون کار رو سخت‌تر می‌کنه!

ولی اگه با عوض کردن بازه، راحت‌تر شد انتگرال بگیر ⇐ ولی تا حالا هم بازه‌هایی که طراح داده، بهترین بوده و لازم نیست عوض کنیم!

* مثال : سری فوریه تابع $f(x)$ که تعریف آن در یک دوره بصورت زیر است را بدست آورید

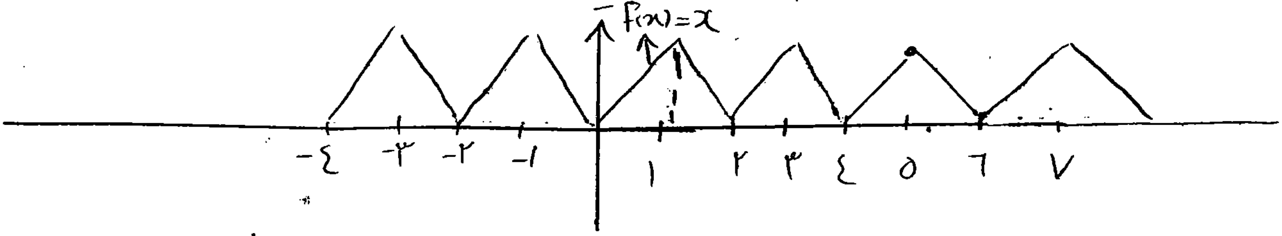
$$f(x) = \begin{cases} x-4 , & 4<x<5 \\ 6-x , & 5<x<6 \end{cases}$$

$T = 6-4 = 2$

$l = 1$

$T=2$

— بازه متقارن نیست ⇐ رسم شکل سری فوریه



$b_n = 0 \Leftarrow$ شکل سری فوریه تابع زوج است

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 x \, dx = 1$$

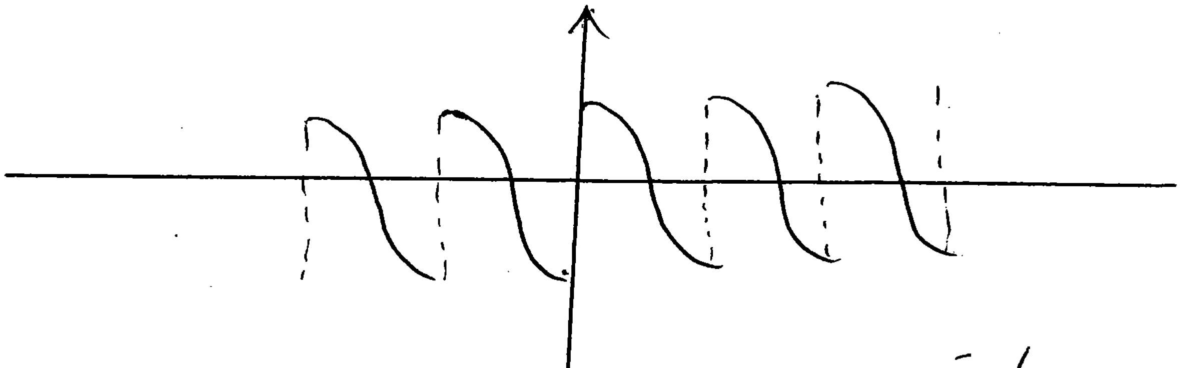
$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx = -2 \frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi^2}$$

نکته : همچنین در توابع زوج و فرد ⇐ بازه ۰ تا $\frac{T}{2}$ اهمیت دارد : همچنین بازه‌ی انتگرال‌گیری ۰ تا $\frac{T}{2}$ است

* مثال : سری فوریه تابع $f(x)$ که تعریف آن در یک دوره به صورت $f(x)=\cos x$, $0<x<\pi$ است را بدست آورید.

$T=\pi$

بازه متقارن نیست ⇐ رسم شکل سری فوریه



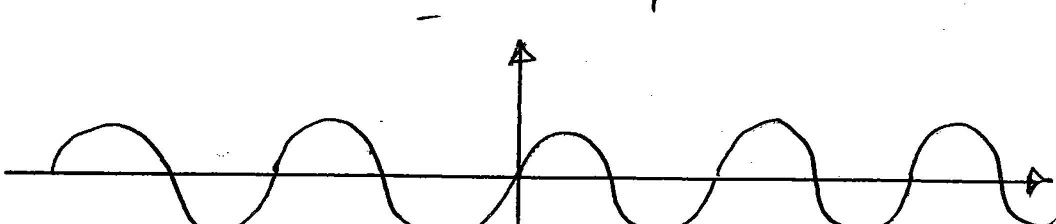
تابع فرد ⇐ $a_0=a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin(2nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos n\pi}{2n+1}+\frac{1-\cos n\pi}{2n-1}\right)$$

* مثال : سری فوریه تابع $f(x)=\sin x$ و $0<x<2\pi$ را محاسبه کنید.

$T=2\pi$

بازه متقارن نیست ⇐ رسم شکل سری فوریه



فرد ⇒ $a_0=a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-1)x}{n-1}-\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi}=0 \quad n\neq 1$$

n=1 برخلاف دیسته کار من ؟ ایراد کار کجاست ⇐ شد ۰

پس n=1 را جداگانه حساب می‌کنیم :

$$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=1$$

$$f(x)=\cancel{\frac{a_0}{2}}^{0}+\sum \cancel{a_n}^{0}\cos nx+\underbrace{b_n}\sin nx=\sin x$$

فقط b_1 را داریم

$$b_1=1$$

مثال) $f(x)=x^7+4x^6+7x^5+3x^2+4$ سط مکلورن؟

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$

هدف سط مکلورن ⇐ تابع را برحسب توان‌های x بسط دهیم

پس وقتی تابع اینطوریه ، همین می‌شه سط مک لورن

پس در حل مسئله به هدف فکر کنید !!!

هرکس با توجه به داشته‌هایی که داره ، بهترین انتخاب رو برای خودش داره !

هرچی داشته بیشتر ⇐ حق انتخاب بیشتر

حل مسئله: هدف ⇐ اول هدف تعیین کنیم، بعد بدنبال مسیر کار باشیم

هدف از سری فوریه ⇐ تابع را برحسب مجموعی از توابع sin و cos

از هر راهی بلدید ، برحسب مجموع sin و cos بنویسید می‌شه سری فوریه !

در سوال بالا هدف اینه که برحسب $\sin nx$ ننویسیم خوب وقتی خودش $\sin nx$ هست، پس دیگه حله!

ex: $f(x) = \sin^2 x$ و $0 < x < 2\pi$

$$f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x}$$

سری فوریه : عدد ثابت + مجموعی از جملات سینوس و کسینوس

$$\begin{cases} a_0/2 = 1/2 \\ a_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$a_n \cos nx$, $n = 2$, $a_n \to a_2$

بقیه ضرایب صفرند

* اگه تابع مثلثاتی نبود یا ثابت نبود ⇐ اصلاً کاری به این روش نداریم

← فقط مخصوص مثلثاتی و ثابت است

سوال: هر مثلثاتی دیدیم، حلش کنیم؟ نه به این دسته بندی دقت کن!

* تابع مثلثاتی

۱) بازه تعریف دارد ⇐ بازه‌ی تعریف (تناوب تصحیحی) مضرب صحیحی از تناوب ذاتی باشد، به روش های مثلثاتی می توان سری فوریه را بدست آورد.

۲) بازه تعریف ندارد : همواره به روش های مثلثاتی، می توان سری فوریه را بدست آورد.

* مثال قبل ⇒ π = تناوب تصنعی ، 2π = تناوب ذاتی ⇒ می‌شه!

$f(x)=\cos x \,,\; 0<x<\pi$ ⇒ π = تصنعی ، 2π = ذاتی ⇒ نمی‌شه!

* برق ۷۶/ در نمایش سری فوریه مثلثاتی $f(t)=\sin^2 t\cos 2t$ (با پریود 2π)

به شکل $\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nt+b_n\sin nt$ داریم:

۱) $a_0=-\frac{1}{4}$ و $a_2=\frac{1}{2}$ و $a_4=-\frac{1}{4}$ ۲) $a_0=-\frac{1}{2}$ و $a_2=\frac{1}{2}$ و $a_4=-\frac{1}{4}$

۳) $a_0=4$ و $a_2=2$ و $a_4=4$ ۴) $a_0=8$ و $a_2=2$ و $a_4=4$

تابع تعریف نشده ⇐ می‌رم سراغ روش‌های مثلثاتی

هرجا توان دیدی حذف

هرجا حاصلضرب دیدی ⇐ حاصلجمع

$$\frac{1-\cos 2t}{2}\cos 2t=\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}\cos^2 2t$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}}_{a_2}\cos 2t\underbrace{-\frac{1}{4}}_{\frac{a_0}{2}}\underbrace{-\frac{1}{4}}_{a_4}\cos 4t$$

نکته: هرجا دیدی که تعداد ضرایب سری فوریه محدود است، حتماً به روش‌های مثلثاتی حل می‌شود!

* مثال: مخابرات ۷۹ ابزاردقیق ۹۰

سری فوریه تابع $f(x)=4\sin x\cos^2 x$ کدام است؟

۱) $2\sin x+2\cos 2x$ ۲) $2\sin x+2\sin 2x$

۳) $\sin x+\cos 2x$ ۴) $\sin x+\sin 3x$ ✓

$$f(x)=4\sin x\,\frac{1+\cos 2x}{2}=2\sin x+\underbrace{2\sin x\cos 2x}_{\sin 3x-\sin x}=\sin x+\sin 3x$$

ضرایب محدود باشند * با عددگذاری هم میشه گزینه رو حدس زد

بین گزینه ۲ و ۴

$f(0)=0$

۱ غ

۲ می‌تونه درست باشه

۳ هم غلط

۴ می‌تونه درست باشه

$\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ ۲ غ، ۴ درست

* تقارن نیم موج - کسینوسی که فرد - نیم دامنه - محاسبه داخل سری فوریه

مشتق گیری / انتگرال گیری سری فوریه

تا ابتدای محاسبه سری‌ها با استفاده از سری فوریه

* ریاضی مهندسی - ۹۲/۴/۳۱ - جلسه‌ی دوم

* کوئیز ۹۰) سری فوریه تابع $f(x)=\cos(2x)$ ، $0<x<\frac{\pi}{2}$ با دوره تناوب $\frac{\pi}{2}$

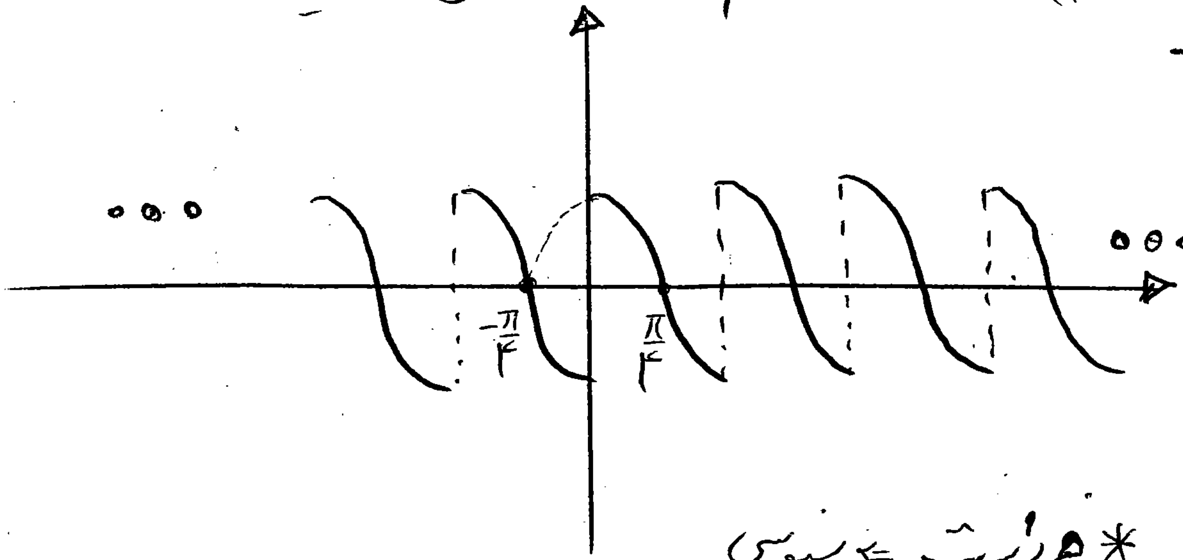
چگونه است؟

۱) سینوسی ۲) سینوسی کسینوسی ۳) کسینوسی ۴) سری فوریه ندارد

به بازه نگاه می‌کنیم ⇐ اگه متقارن بود ⇐ ضابطه

اگر متقارن نبود ⇐ شکل سری فوریه را رسم می‌کنیم!

شکل تابع در بازه‌ی مورد نظر رسم ⇐ تکرار : شکل سری فوریه



* فرد است ⇐ سینوسی

سینوسی ⇐ فرد
کسینوسی ⇐ زوج
سینوسی کسینوسی ⇐ نه زوج، نه فرد

پس فرد است ⇐ زوج = قرینه رو به بالا ⇐ $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}) \Rightarrow T=\frac{\pi}{2}$

* توی سایت: ۱۲ صفحه راجع به توابع زوج و فرد! دانلود کنید! m_karimi.ir

* برق ۷۰) اگر تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف شده باشد آنگاه سری فوریه $f(t)$ عبارت است از :

$$f(t)=\begin{cases} t & , \ 0\leq t<1 \\ 2-t & , \ 1\leq t<2 \end{cases} \quad , \quad f(t+2)=f(t)$$

۱) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$

۲) $\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos(2k-1)\pi t$ ✓

۳) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\pi t)$

۴) $\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$

* روش حل: ۱) تشخیص دوره تناوب ⇐ ۹۹ درصد تصحیح ⇐ بازه تعریف = دوره تناوب

۱ درصد ⇐ راهی عمومی!

۲) تشخیص زوج یا فرد بودن تابع : اول ⇐ بازه نگاه ⇐ متقارن ⇐ ضابطه ⇐ فرد ⇐ فرد

زوج ⇐ زوج

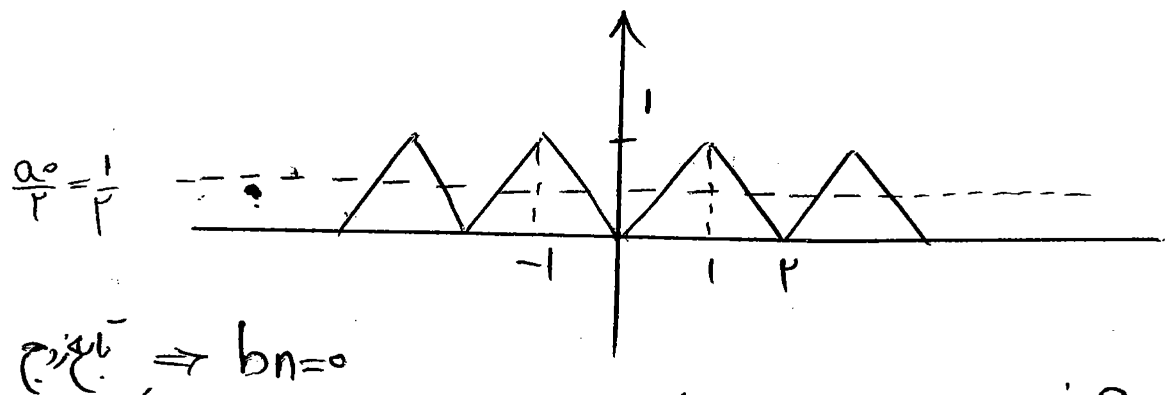
نه زوج نه فرد ⇐ نه زوج

⇐ نامتقارن ⇐ رسم شکل سری فوریه ⇐ زوج ⇐ زوج

فرد ⇐ فرد

نه زوج نه فرد ⇐ نه زوج

بازه متقارن نیست ⇐ رسم شکل سری فوریه ! $T=2 \rightarrow h=1$



تابع زوج $\Rightarrow b_n=0$

$\frac{a_0}{2}$ = ثابت فوریه = مقدار متوسط = dc تابع = $\dfrac{\text{جمع جبری مساحت در یک دوره}}{T}$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}$$

اگر در یک دوره تناوب شکل مثلث داشتیم: $\frac{a_0}{2}$ خطی است که بر ارتفاع عمود است و ارتفاع را نصف می‌کند.

10

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{h}\int_0^h f(x)\cos\frac{n\pi}{h}x\,dx \\ h=1 \qquad \Rightarrow \quad a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 t\cos n\pi t\,dt = \left(\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi^2}\right)\times(-2) \end{cases}$$

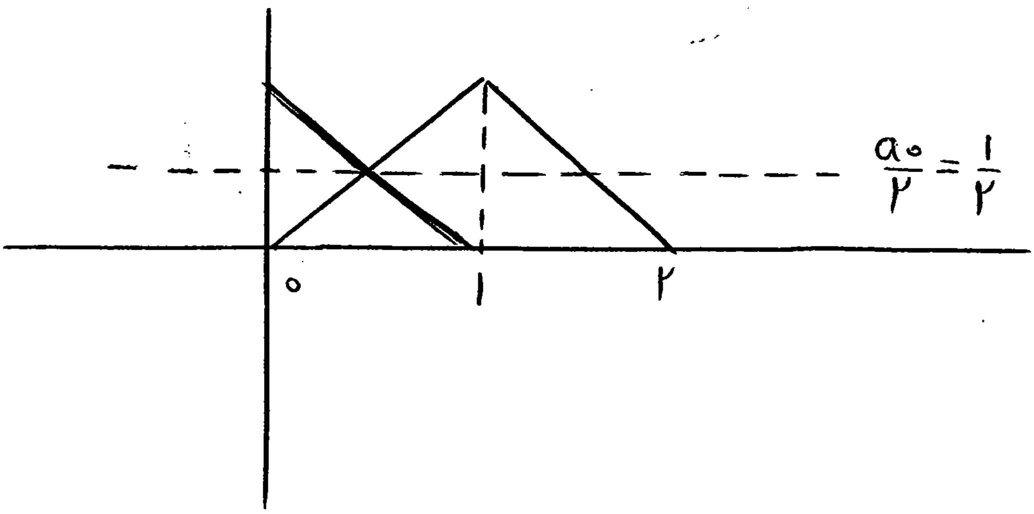
هرجا اینطوری شد مقدار دهی می‌کنیم یعنی یه بار n زوج و یه بار n فرد!

$$\begin{cases} n=2k \Rightarrow a_n = 0 \\ n=2k-1 \Rightarrow a_n = \frac{-4}{(2k-1)^2\pi^2} \end{cases} \Rightarrow a_n = \begin{cases} 0 & , n=2k \\ \frac{-4}{(2k-1)^2\pi^2} & , n=2k-1 \end{cases}$$

* اگر قرینه‌ی نیم پریود اول نسبت به $\frac{a_0}{2}$ بدست آوریم و به اندازه‌ی نیم پریود به سمت راست جابه‌جا کنیم در صورتیکه بر نیم پریود دوم منطبق گردد، سری فوریه فقط شامل هارمونیک های فرد است.

$$a_n \rightarrow a_1, a_3, \cdots$$

$$b_n \rightarrow b_1, b_3, \cdots$$



قرینه ۱ ⇐ هم فرد وجود دارد هم زوج

قرینه ۲ ⇐ k رو هر چی بدی ⇐ فقط گزینه‌های فرد ✓

قرینه ۳ ⇐ هم فرد و هم زوج

قرینه ۴ ⇐ هم زوج و هم فرد

[هیچ وقت خودمون تصمیم نمی‌گیریم از چه روشی بریم. سؤال به جای ما از چه روشی حل کن!
پس از گزینه‌ها اگه دیدیم حداقل یکیشون زوج یا فرد ندارد می‌شه از این روش استفاده کرد!]

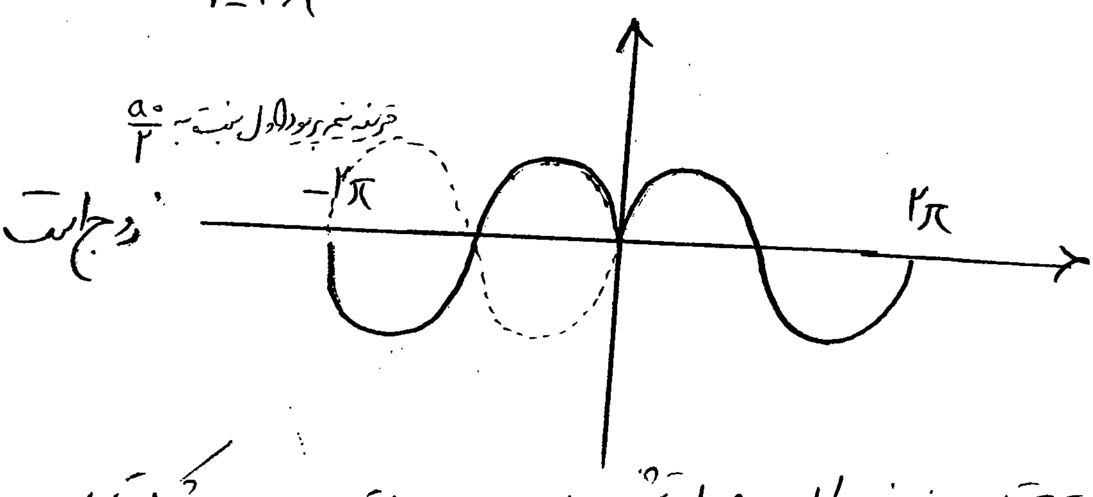
ص ۲۲

* برق ۷۱) هرگاه $F(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x<2\pi\\ -\sin x, & -2\pi<x<0\end{cases}$ و $f(x+4\pi)=f(x)$ باشد آنگاه

در سری فوریه $f(x)$ فقط جملات زیر ممکن است غیر صفر باشند.

× ۱) زوج کسینوسی ✓ ۲) فرد کسینوسی × ۳) زوج سینوسی × ۴) فرد سینوسی

$T=4\pi$



هر وقت تابع چند ضابطه‌ای: برای تشخیص زوج و فرد بودن تابع ⇐ رسم شکل تابع

زوج $b_n=0$ $\xRightarrow{b_n\ \text{سینوسی!}}$ ۳ و ۴ حذف

$\frac{a_0}{2}=0$ جمع جبری مساحت‌ها!

تو ریاضی مهندسی هیچوقت کار سعی و خطا انجام نمی دهیم!
هر کاری که انجام میدهیم حداقل سه گزینه را رد می کنیم!

سری فوریه فقط شامل هارمونیک های فرد است:

$$a_n \begin{cases} a_{2k} = 0 \Rightarrow \text{حذف} \\ a_{2k-1} \neq 0 \Rightarrow \text{فرد کسینوسی} \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{3}\right)$$

در سری فوریه تابع

$$f(t) = \begin{cases} -t-3 & -3 \leq t \leq -2 \\ -1 & -2 \leq t \leq -1 \\ t & -1 \leq t \leq 1 \\ 1 & 1 \leq t \leq 2 \\ -t+3 & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

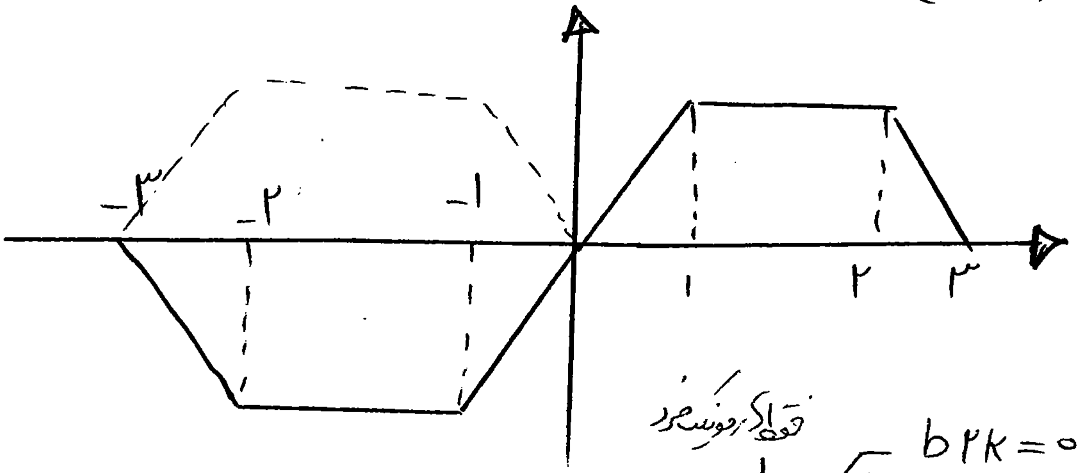
اگر در یک پریود ۲۳ ص (برق ۷۷

۱) a_n و n فرد ✗ ۲) a_n و n زوج ✗

۳) b_n و n زوج ✗ ۴) b_n و n فرد ✓

$T = 6 \longrightarrow h = 3$

قطعا ساده است ← نیازی به شکل سری فوریه نداریم!
اما چون تابع چند ضابطه ای است بهتر است برای تشخیص زوج و فرد بودن شکل خود تابع را رسم کنیم



f فرد $\longrightarrow a_0 = a_n = 0 \Rightarrow$ گزینه ۱ و ۲ غلط

قطعا گزینه درست

$$b_n \begin{cases} b_{2k} = 0 & \times \text{ گزینه ۳} \\ b_{2k-1} \neq 0 & \checkmark \text{ گزینه ۴} \end{cases}$$

اگر در بسط $f(x)$ ، $\frac{a_0}{2}=0$ و بسط فوریه فقط شامل هارمونیک های فرد باشد، آنگاه داریم :

الف) بسط فوریه نه زوج باشد نه فرد (تقارن نیم موج)

$$\begin{cases} a_{2n}=0 \quad , \quad a_{2n-1} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left((2n-1)\frac{\pi}{L}x\right)dx \\ b_{2n}=0 \quad , \quad b_{2n-1} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{L}x\right)dx \end{cases}$$

ب) بسط فوریه تابع زوج یا فرد باشد (تقارن ربع موج)

بسط فرد باشد $\Rightarrow \begin{cases} a_n=0 \\ b_{2n}=0 \ , \ b_{2n-1} = \frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{L}x\right)dx \end{cases}$

بسط زوج باشد $\Rightarrow \begin{cases} b_n=0 \\ a_{2n}=0 \ , \ a_{2n-1} = \frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\cos\left((2n-1)\frac{\pi}{L}x\right)dx \end{cases}$

و نکته ⇐ در مبحث سری فوریه، هر تقارنی باعث می‌شود یک سری از ضرایب سری فوریه صفر شوند و ادامه‌ی به فرمول‌ها، انتگرال‌شون دو برابر می‌شود و حدود انتگرال‌شون تقسیم بر ۲ می‌شه

زوج بودن $\Longrightarrow \begin{cases} b_n=0 \\ a_n = \overset{\frac{1}{L}\times 2}{\frac{2}{L}} \int_{0 \to \frac{0}{2}=0}^{L \to \frac{2L}{2}=L} \end{cases}$

فرد بودن $\Rightarrow \begin{cases} a_0=a_n=0 \\ b_n = \overset{\frac{1}{L}\times 2}{\frac{2}{L}} \int_{0 \to \frac{0}{2}}^{L \to \frac{2L}{2}=L} \end{cases}$

تقارن هارمونیک فرد

$$\begin{cases} a_{2n}=0 \quad \text{و} \quad b_{2n}=0 \\ a_{2n-1} = \text{ضریب} \times 2 \\ b_{2n-1} \quad \dfrac{\text{حد انتگرال}}{2} \end{cases}$$

نه زوج نه فرد → $\times 2$ $\frac{2}{L}\int_0^{L}$; $L \to \frac{2L}{2}$, $0 \to \frac{0}{2}$

زوج ($b_{2n-1}=0$) → $a_{2n-1} \times 2$ $\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}}$; $\frac{L}{2} \to \frac{L}{2}$, $0 \to \frac{0}{2}$

فرد ($a_{2n-1}=0$) → $b_{2n-1} \times 2$ $\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}}$; $\frac{L}{2} \to \frac{L}{2}$, $0 \to \frac{0}{2}$

ط ۲۶

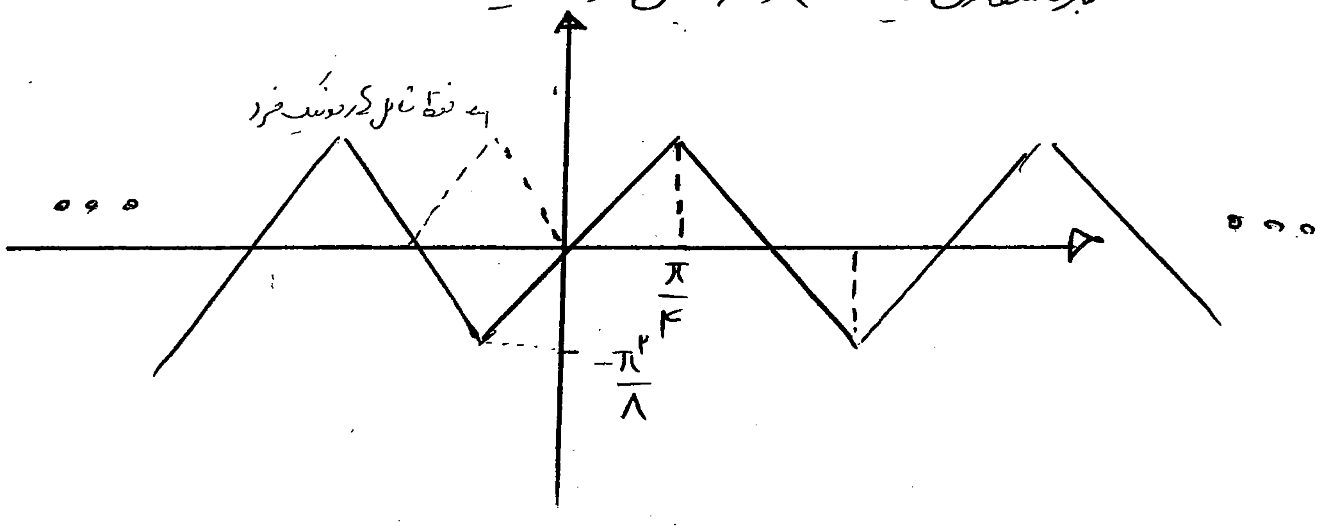
* قطعیک ۷۵)

$\frac{-(-1)^n}{(2n-1)^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$ ۲) ۱)

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{-(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^2}\sin(\pi t) \quad ۴) ✓$$ ۳)

$T = 2\pi \Rightarrow l = \pi$

بازه متقارن نیست ⇐ رسم شکل سری فوریه!



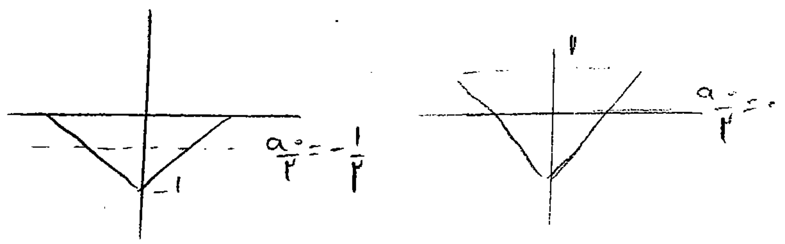
فرد ⇒ $a_0 = a_n = 0$

* تذکر: هرگاه در بسط فوریه شکل تابع در یک دوره مثلث متساوی الساقین باشد دو مطلب زیر همواره برقرارند:

۱) بسط فوریه همواره فقط شامل هارمونیک های فرد است

۲) مقدار متوسط تابع خطی است عمود بر ارتفاع که ارتفاع را نصف می کند (با توجه به علامت ارتفاع)

ex:



* طبق نکته فوق هم فقط شامل هارمونیک های فرد!

$$b_{2n}=0,\quad b_{2n-1}=\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\sin(2n-1)\frac{\pi}{L}x\,dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi t}{4}\sin(2n-1)t\,dt$$

$$=\frac{\sin\cancel{(2n-1)\frac{\pi}{2}}^{(-1)^{n+1}}}{(2n-1)^2} \Rightarrow \text{مقداردهی!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$$

$$\sin(2n-1)\frac{\pi}{2} \rightarrow (-1)^{n+1}$$

به ازای یک n درستش کن، تغییش خودکار درست می‌شه! منظورم n=1 است!

تابعی داشتیم که ۱ را همون اول ۱- ورش، به $(-1)^n$ ننویس، به ازای n=1 درستش کن، تغییش خودکار درسته!

JozveBargh.ir

توی گزینه ۳ ⇐ $n=1,3,5,\dots$ عکس در گزینه ۴ به جای n ← $2n+1$ گذاشته‌ایم!

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin \pi x\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi t}{4}\sin t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi(\pi-t)}{4}\sin \pi t\,dt\right]=0$$

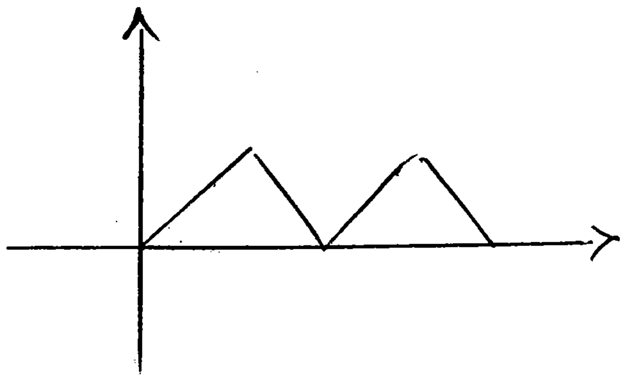
اگه تشخیص اولی رو می‌دادی ⇐ کلی کار ساده‌تر می‌شد!

* اگر تابع در یک دوره تناوب، دو بار تکرار شده باشد ⇐ نصف تابع حرکت = منطق ⇐ کسینوس زوج

* حالت تعمیم ← ۳ بار ← مضرب ۳ : کسینوس

۴ بار ← مضرب ۴ : کسینوس

هرگاه تابع در یک دوره دو بار تکرار شده باشد، شامل کسینوس‌های زوج است!

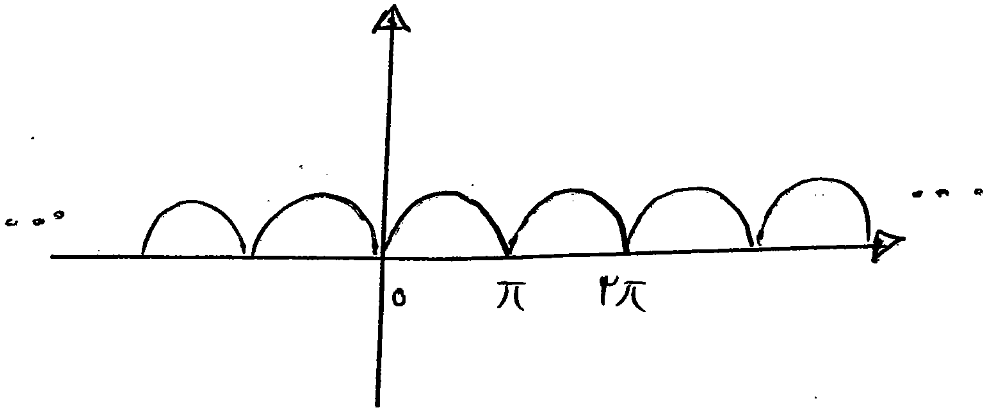


ص ۵۲ (دکتر ابراهیم بخارج)

۱ ✗ ۲ ✗

۳ ✗ ۴ ✓

$T=2\pi \Rightarrow$ بازه متقارن نیست ⇐ شکل سری فوریه رسم



سط فوریه تابع زوج $\Rightarrow bn=0$ ۲و۳ حذف

در یک دوره دو بار تکرار شده $\Rightarrow$ فقط زوج $\rightarrow$ ا ع

نکته : $T=2\pi \Rightarrow L=\pi \Rightarrow \frac{a_0}{2}+\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$

زوج $\cos 2nx$ و $\sin 2x$

اشتباه نگیم زوج! : $T=\pi , L=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{a_0}{2}+\sum a_n \cos 2nx + \sum b_n \sin 2nx$

$\Downarrow$

$\cos 4nx \leftarrow$ باید این باشه که زوج باشه!

وجود $2n$ لزوماً به معنای زوج بودن نیست!

کلا اول $\frac{n\pi}{L}$ را تشکیل داده‌ایم و دیدیم به جای n ← $2n$ گذاشته ⇐ ادعوضع میکنیم و

14

$$\begin{cases} y=\sin^2 x \;,\; 0<x<2\pi \overset{T=2\pi,\,L=\pi \,\Rightarrow\, a_n\cos nx}{\Longrightarrow} y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x \Rightarrow a_2=-\frac{1}{2} \\ y=\sin^2 x \;,\; 0<x<4\pi \overset{T=4\pi,\,L=2\pi \,\Rightarrow\, a_n\cos\frac{n}{2}x}{\Longrightarrow} y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x \Rightarrow a_4=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T \rightarrow a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \\ 2T \rightarrow a_2, a_4, a_6, \dots \end{cases}$$

*سری فوریه‌ها تفاوتی نمی‌کنند اما ضرایب فرق دارند!

$$\begin{cases} y=|\sin x| \;,\; 0<x<\pi \;,\; a_1, a_2, a_3, \dots \\ y=|\sin x| \;,\; 0<x<2\pi \;,\; a_2, a_4, a_6, \dots \end{cases}$$

*اینجا هم سری فوریه‌ها یکی هستند اما ضرایب فرق دارند!

که در فوریه منظورمون اندیس ضرایب است!

a_n همواره نسبت به n تابعی زوج است یعنی $a_{-n}=a_n$

b_n همواره نسبت به n تابعی فرد است یعنی $b_{-n}=-b_n$

۹۸ درصد مواقع:
- x^{2k} زوج
- x^{2k-1} فرد
- $\sin x$ فرد
- $\cos x$ زوج

زوج + زوج = زوج

فرد + فرد = فرد

زوج + فرد = نه زوج، نه فرد

زوج × زوج = زوج

فرد × فرد = زوج

زوج × فرد = فرد

– مثل + است!

÷ مثل × است!

$x^2+x \Rightarrow$ نه زوج نه فرد

$x+1 \Rightarrow$ نه زوج نه فرد

$1 = x^0 =$ زوج

$a_n = \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{x^2}$ زوج

$a_n = \frac{1}{n} \sim \frac{1}{x}$ فرد $\Rightarrow$ کاملاً غلط است!

نسبت به n مثل عدد ثابت است! کاری به آن نداریم!

** اثبات: $a_n = \frac{1}{L}\int_{(T)} \underbrace{f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx}_{\text{بر حسب n، زوج است}}$

پس a_n هم بایستی زوج باشد!

ص ۳۲

شهریور ۸۴)

۱) ✗

۲) ✓

۳) ✗

۴) ✗

گزینه ۱ غلط است ⇐ bn باید فرد ⇐ $b_n = \frac{\text{فرد}}{\text{فرد}} =$ زوج

چون bn باید فرد باشد ، گزینه ۴ غلط است ⇐ $b_n = \frac{\text{Sin} = \text{فرد}}{n = \text{فرد}} =$ زوج

گزینه ۳ غلط است ⇐ an باید زوج باشد ⇐ نه زوج نه فرد = (زوج + فرد) $= a_n$

Sin( ) 1

(دکترای انرژی مربوط به خارج مهندسی برق و پزشکی)

۱) ✗ ۲) ✗

۳) ✗ ۴) ✓

غ۱ $\Rightarrow$ a_n باید زوج باشد $\Rightarrow a_n = \frac{1}{\underbrace{2n}_{\text{زوج}} - \underbrace{1}_{\text{فرد}}}$ $\Rightarrow$ نه زوج نه فرد

غ۲ $\xrightarrow{b_n \text{ باید فرد}}$ نه زوج نه فرد = زوج + فرد $b_n = \frac{1}{2n+1}$

غ۳ $\xrightarrow{b_n \text{ باید فرد}}$ زوج = زوج + زوج $b_n = \frac{1}{\underbrace{4n^2}_{\text{زوج}} - \underbrace{1}_{\text{زوج}}}$

*مکانیک ۱۴۰۲) اگر F تابعی با دوره تناوب ۲π — حل بدم

۱) ✗ ✗ ۲) ✗ ✗

۳) ✓ ✓ ۴) ✗ ✗

✗ گزینه ۱ غ $\Leftarrow$ a_n باید زوج $\Leftarrow$ فرد $\Leftarrow \frac{1}{m}$

گزینه ۲ می‌تونه درست باشه! $(-1)^m = (-1)^{-m}$

$\frac{(-1)^m \text{ زوج}}{m \text{ فرد}}$ = فرد $\Leftarrow$ زوج است $\Leftarrow$ $(-1)^m$: $n=2 \rightarrow 1$، $n=-2 \rightarrow 1$

گزینه ۳ هم گزینه ۲ درست باشه : زوج $\Leftarrow a_n = \frac{1}{n^2} \Leftarrow a_{2m+1} = \frac{1}{(2m+1)^2}$

✗ گزینه ۴ غلط!! غلط b_n باید فرد $\Leftarrow$ زوج $\Leftarrow b_n = \frac{1}{n^2} \Leftarrow b_{2m+1} = \frac{1}{(2m+1)^2}$

* نکته

$$n \begin{cases} \to k \\ \to -k \end{cases} \Rightarrow$$

با تابع ها کسینوسی ⇐ زوج
با تابع ها سینوسی ⇐ فرد
در غیر از موارد فوق ⇐ نه زوج نه فرد!

ex:
$$\sum \frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{1}{n}\sin nx$$

$a_n = \frac{1}{n^2}$ ✓ $\qquad b_n = \frac{1}{n}$ ✓

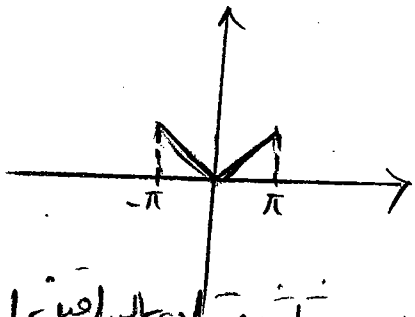
ادامه حل سؤال ⇐
حالا بین ۲ و ۳ ⇐

$f(x)=|x| \xRightarrow{\text{زوج است}}$ سط فوریه زوج است

* سط فوریه زوج $\Rightarrow b_n = 0 \Rightarrow$ گزینه ۲ غلط است ✗

حل سؤال با استفاده از گزینه ها؟ روش دوم

$T = 2\pi$



گزینه ۲ و ۴ ⇐ $b_n=0$ ⇐ تابع زوج است ✗
گزینه ۱ ⇐ فقط فرد ✗
(فقط باید فرد باشد m)

در یک دوره = مثلث متساوی الساقین!

* سؤال کنکور ۷۵
ص ۲۶

$$(-1)^{\frac{n+1}{2}} \begin{cases} n=1 \Rightarrow -1 \\ n=-1 \Rightarrow 1 \end{cases} \Rightarrow \text{فرد}$$

$$b_n = \text{فرد} = \frac{\text{فرد}}{\text{زوج}}$$ ⇐ گزینه ۴ درست است

* گزینه ۳ ⇐ $\frac{1}{n^2}$ = زوج ⇐ b_n باید فرد ⇐ غلط!

گزینه ۱ ⇐ $\frac{1}{n^2}$ = زوج ⇐ b_n باید فرد ⇐ غلط

گزینه ۲ ⇐ $\frac{1}{nn}$ = فرد ⇐ به این روش حذف نمی‌شود!

---

* سبط نیم دامنه :

تعریف تابع در نصف دامنه ی تعریف معلوم ⇐ سری فوریه!

طرح چنین سؤالی غلط است!

پس مفهوم این نیست که نصف دامنه ی تابع معلوم است!

نصف دامنه تابع ⇐ زبان ریاضی
نصف دیگه ⇐ داستان
می‌شه سری فوریه نوشت؟ بله!

داستان تعریف شده می‌تونه هر چیزی باشه؟ نه!

دو حالت دارد ⇐ نصف دامنه تعریف و در صورت سؤال بگه زوج! ⇐ قرینه نسبت به محور y!
نصف دامنه تعریف و در صورت سؤال بگه فرد! ⇐ قرینه نسبت به مبدأ!

منظور از نیم دامنه همینه! نصف‌ها با تعریف ریاضی نصف‌ها که کلمه ی زوج و فرد می‌گه!

سؤال دلمه: از کجا بفهمیم منظور طراح سؤال "نصف دامنه" یا "کل دامنه" است؟

*بسط نیم دامنه:

- بسط نیم دامنه همواره دو ویژگی زیر را داراست:

۱) دامنه‌ی تعریف تابع باید در بازه‌ی $[0, h]$ باشد

$$\begin{cases} y=f(x), & 1<x<3 \quad \times \\ y=f(x), & -2<x<0 \quad \times \\ y=f(x), & -1<x<1 \quad \times \end{cases}$$

۲) حتماً در صورت سؤال به زوج یا فرد بودن بسط اشاره شده باشد!

۱) بسط فوریه تابع $f(x)=\cos x$ ، $0<x<\pi$ را بدست آورید $\xleftarrow{\text{تمام دامنه}}$ $T=\pi,\ h=\frac{\pi}{2}$

۲) $\underbrace{\text{بسط کسینوسی}}_{\text{ویژگی ۲}}$ تابع $f(x)=\cos x$ ، $\underbrace{0<x<\pi}_{\text{ویژگی ۱}}$ را بدست آورید $\xleftarrow{\text{نیم دامنه}}$ $h=\pi$

*ex $\underbrace{\text{بسط سینوسی}}_{\text{ویژگی ۲ را دارد}}$ $f(x)=x$ ، $\underbrace{-\pi<x<\pi}_{\text{ویژگی ۱ را ندارد}}$ را بدست آورید ⇐ تمام دامنه

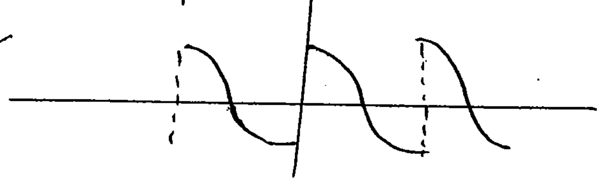
$T=2\pi$

برای محاسبه‌ی بسط نیم دامنه، دیگه رسم شکل سری فوریه لازم نیست ⇐ چون خودش زوج و فرد بودنو به ما می‌ده! پس یک نیم دامنه‌ها برابر تمام دامنه است.

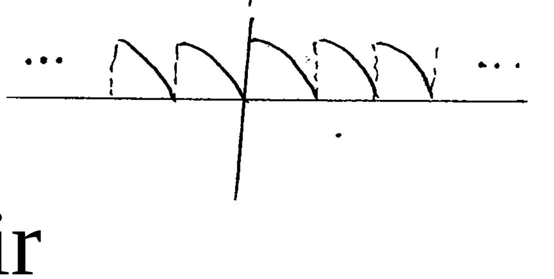
*مثال) $\underbrace{\text{بسط سینوسی}}_{\text{ویژگی ۲}}$ تابع $f(x)=\cos x$ ، $\underbrace{0<x<\frac{\pi}{2}}_{\text{ویژگی ۱}}$ را بدست آورید ⇐ نیم دامنه

$$\begin{cases} \text{تابع فرد} \Rightarrow a_0=a_n=0, \quad h=\frac{\pi}{2} \\ b_n=\frac{2}{h}\int_0^h f(x)\sin\frac{n\pi}{h}x\,dx=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin 2nx\,dx=\dots \end{cases}$$

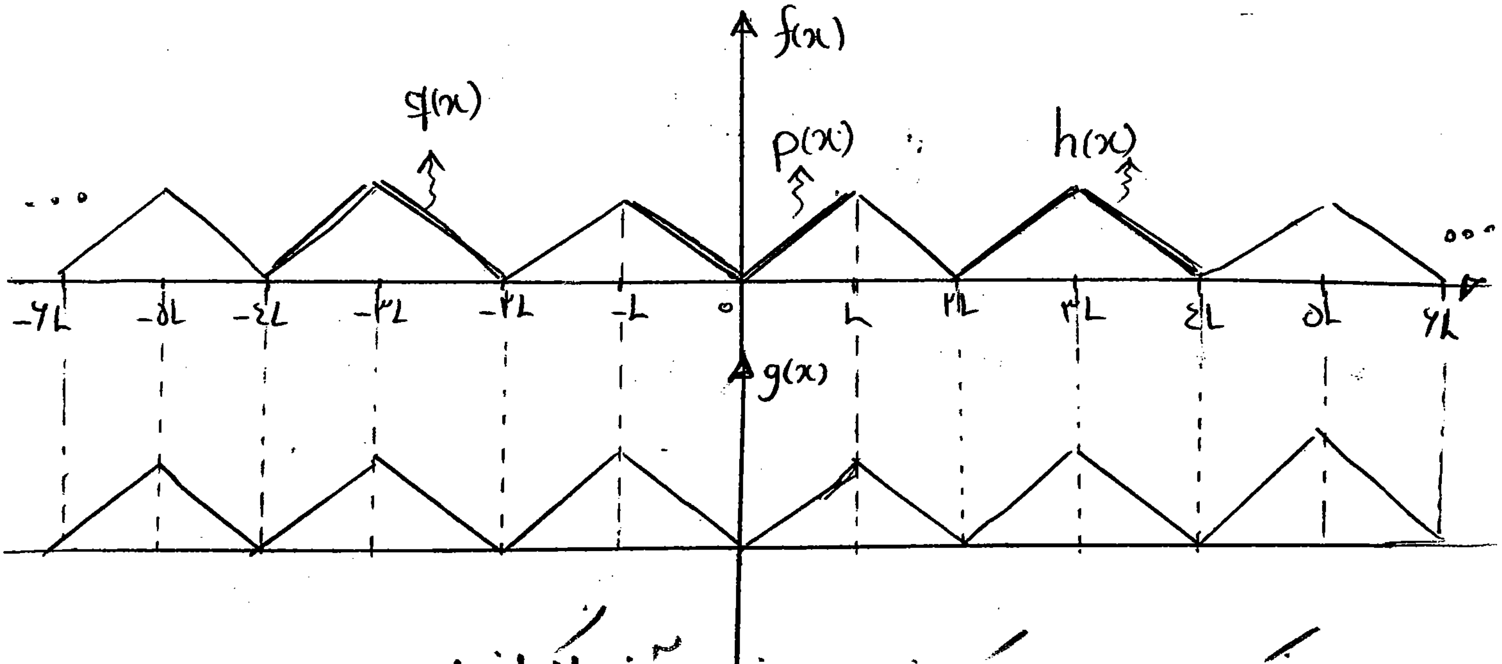
شکل نیم دامنه



شکل تمام دامنه



حل ۳۷) با رسم شکل سری فوریه نشان دهید بسط فوریه ی تابع $f(x)=\begin{cases} x & ,\ 0<x<L \\ 2L-x & ,\ L<x<2L \end{cases}$ با بسط فوریه کسینوسی تابع $g(x)=x$, $0<x<1$ یکسان است.



* شکل سری فوریه دو تابع یکسان ⇐ سری فوریه آن ها یکسان!

$$q(x)=\begin{cases} x+4L & ,\ -4L<x<-3L \\ -2L-x & ,\ -3L<x<-2L \end{cases},\quad p(x)=\begin{cases} -x & ,\ -L<x<0 \\ x & ,\ 0<x<L \end{cases},\quad h(x)=\begin{cases} x-4L & ,\ 4L<x<5L \\ 6L-x & ,\ 5L<x<6L \end{cases}$$

* پس اصلی ترین دلیل که دنبال بسط نیم دامنه هستیم ⇐ ساده نویسی ⇐ در محاسبات کار را راحت می کند

تابع زوج ⇒ $\begin{cases} b_n=0 \\ a_0=\frac{2}{L}\int_0^L x\,dx \ ,\ a_n=\frac{2}{L}\int_0^L x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\cdots \end{cases}$

تو همشون از ۰ تا L ⇐ تابع با x برابر است!

* پس دیدیم یه ساده ترینشون همان نیم دامنه بود ⇐ $g(x)$

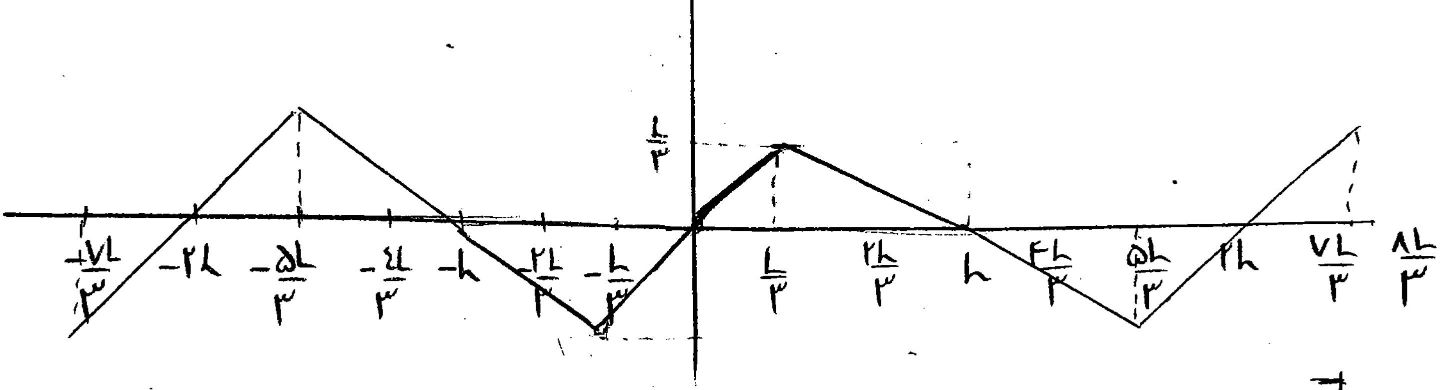
* همین یه نیم دامنه بود داره!

* هر بسط زوج و فرد تمام دامنه ای ⇐ میشه یه نیم دامنه براش نوشت!

حل
برق ۱۴

نیم دامنه است ⟸ { ۱ دوره تناوب > ۰ ، ۲ دوره تناوب به خاطر بودن سطح ساپه

* سطح سینوسی ← قرینه نیم دامنه است ← محور مختصات سم ۱
و بعد تکرارش می‌کنیم!



۱ غ است ⟸ $\frac{1}{3}$ باید $-\frac{L}{3}$ باشد!

۲ غ است ⟸ $-\frac{L}{3} \to -\frac{L}{3}$ ✓ و $0 \to 0$ ✓ و $-\frac{L}{3} \to L$ × باید ۰ بشه

۳ غ است ⟸ غ است
$L \to 0$ ✓
$\frac{5L}{3} \to -\frac{L}{3}$ ✓
$\frac{5L}{3} \to \frac{5L}{3}$ ×

۴ درست است ← $L \to 0$ ✓ ، $\frac{5L}{3} \to -\frac{L}{3}$ ✓

* سؤال اشتباه علمی دارد!

برق ۸۵) هرگاه $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ باشد، حاصل $\int_0^{\pi} f(x)\sin^3 x\,dx$ کدام گزینه است؟ صفحه ۳۰

۱) صفر ۲) $\frac{3\pi}{8}$ ۳) $\frac{3\pi}{16}$ ۴) $\frac{13\pi}{36}$ ✓

$a_0=a_n=0 \Rightarrow f(x)$ فرد و $\Rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} h=\pi \\ b_n=\frac{1}{n^2}\end{array}\right.$ $\Leftarrow \frac{n\pi}{h}=n \Rightarrow h=\pi$

$f(x)$ فرد $\Rightarrow b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

* از این فرمول خواسته که توش یک تابع مجهول وجود داشت ← باید برحسب انتگرالهای معلوم سعی کنید بنویسید

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{\pi}{2}b_n$$

* حالا مثلاً اگه توی سؤال خواسته بود ←

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin 5x\,dx=\frac{\pi}{2}b_5=\frac{\pi}{50}$$

حالا حل خودمون ←

$$\sin^3 x=\sin^2 x\cdot\sin x=\frac{1-\cos 2x}{2}\sin x=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\underbrace{\sin x\cos 2x}_{\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin x}=$$

$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$$

$$I=\frac{3}{4}\int_0^{\pi}\underbrace{f(x)\sin x\,dx}_{\frac{\pi}{2}b_1}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\underbrace{f(x)\sin 3x\,dx}_{\frac{\pi}{2}b_3}$$

$$=\frac{3\pi}{8}b_1-\frac{\pi}{8}b_3=\left(\frac{3\pi}{8}\times 1\right)-\left(\frac{\pi}{8}\times\frac{1}{9}\right)=\frac{\pi}{8}\left(3-\frac{1}{9}\right)=\frac{\pi}{8}\times\frac{26}{9}=\frac{13\pi}{36}$$

کامپیوتر ۹۲) ضرایب سری فوریه $f(x)$ با دوره تناوب 2π بصورت

$\left(\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2},\ a_n=\frac{2}{n},\ b_n=\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ است. جمله مستقل از x

در سری فوریه تابع $g(x)=f(x)\sin^2 x$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ✓۲) صفر ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin^2 x\,dx$$

پاسخ

برای $f(x)$ ها
$$\begin{cases}\dfrac{a_0}{2}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\\[2mm] a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx\\[2mm] b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx\end{cases}$$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\frac{1-\cos 2x}{2}=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}f(x)\,dx}_{\frac{1}{2}\times\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx}_{\frac{a_0}{2}}}-\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}f(x)\cos 2x\,dx}_{-\frac{1}{4}\times\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos 2x}_{a_2}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{a_0}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}\times a_2\right)=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}\times 1\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

* تا صفحه‌ی ۴۶ درس دادم! بخونید! ☺

* تا انتهای سری فوریه بخونید! : پیش مطالعه

JozveBargh.ir

* ریاضی مهندسی - ۹۲/۸/۷ - جلسه‌ی سوم

صفحه ۱۳ _ تست ۲۸

(سراسری ۸۸) هرگاه $f(x)$ تابعی زوج باشد، بازای $f(x) = \underbrace{x}_{f_1} + \underbrace{\cos 2x}_{f_2}$ (ویژگی ۲) $0 \leq x \leq \pi$ (ویژگی ۱)، آنگاه در سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $[-\pi, \pi]$

ضریب $\cos 2x$ کدام است؟

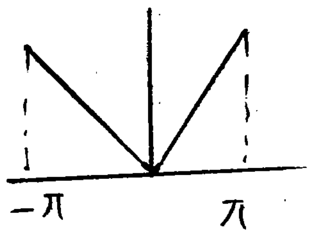
۱) ۰ ۲) ۱ ✓ ۳) $1 - \frac{1}{2\pi}$ ۴) $1 + \frac{1}{2\pi}$

تحت نیم دامنه است ⟸ ویژگی ۱، ویژگی ۲ را دارد!

$l = \pi \Rightarrow a_n \cos nx \Rightarrow a_2 = ?$

بجای a_2 کلی اول a_2 برای x پیدا می‌کنیم بعد a_2 برای $\cos 2x$ و بعد با هم جمع می‌کنیم!

برای f_1:



$\Rightarrow a_2 = 0$

$\xrightarrow{f_1 + f_2} a_2 = 0 + 1 = 1$

برای f_2: $\cos 2x \rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ \text{سایر ضرایب} = 0 \end{cases}$

دوره تناوب $= \frac{2\pi}{2}$

چون خودش مضرب‌ها از ذات خود روش مثلثاتی

روش ۱) خود سوال روش مثلثاتی نوشتیم، اگر توان یا ضرب نداشت بعد رو شه خودش. چون ما اینجا کاری به توان و روش کلی مثلثاتی انجام ندادیم، توان و حذف و ضرب به جمع تبدیل بشود

روش ۲) خودش جزء درستش جلو چشم‌مونه! $a_2 = 1 \cdot \cos 2x$

جواب اول سوال: در صورت تست سعی کنه با بیان تعریف دو [illegible] را ... اشتباه طراح بینه که خود [illegible] را ۱۰ صفحه توضیح کرده!

روش کلی همیشه جواب می‌دهد!

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\cos^2 x)\cos nx\,dx$$

منطق حکم می‌کند اول ۲ ابزارم ← بعد حل کنیم

$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\cos^2 x)\cos 2x\,dx=\dots=1$$

* روش اول کوتاه‌تر بود! اما همیشه روش کلی رو هم به خاطر داشته باش!

نکته‌ی زیبای این سؤال: داده‌ها را در نیم دامنه داده و پرسش را در تمام دامنه پرسیده!
کسی می‌تونه به این سؤال پاسخ بده که مفهوم نیم دامنه را درک کرده باشد!

کنکور ۹۲) سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $f(x)=x(L-x)$ و $0<x<L$ کدام است؟

1) $\frac{L^2}{6}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{L^2}{(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi x}{\ell}$ ✗

2) $\frac{\ell^2}{4}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{4(m\pi)^2}\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)$ ✗

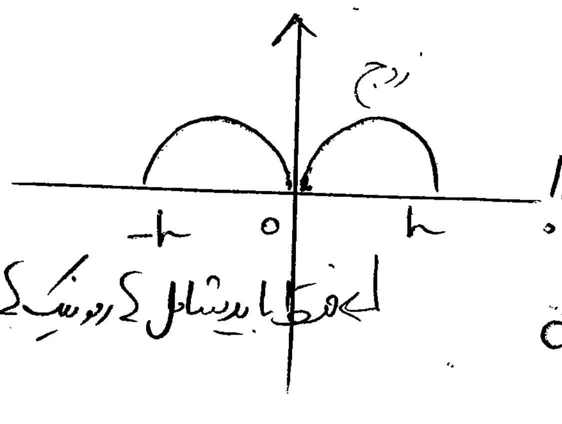
3) $\frac{L^2}{6}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{4(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi x}{L}$ ✓ زوج

4) $\frac{L^2}{6}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{(2m-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$ ✗ فرد

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^{L}(xL-x^2)\,dx=\frac{2}{L}\left(\frac{x^2}{2}L-\frac{x^3}{3}\right)_0^L=\frac{2}{L}\left(\frac{L^3}{2}-\frac{L^3}{3}\right)=\frac{L^2}{3}$$

۱ و ۲ غ

$$\frac{a_0}{2}=\frac{L^2}{6}$$



سری نیم ع است!

چون در بسط دوره ۲L بار تکرار شده

لذا فقط باید شامل ۲ جمله‌ای زوج باشد!

$a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}$

(همه گزینه‌ها را یاد می‌گیریم : توجه)

* از روی گزینه‌ها اول فهمیدم باید $\frac{a_0}{2}$ حساب کنم

* همگرایی ضرایب فوریه

دنباله‌های a_n و b_n، دنباله‌های همگرا به صفر هستند.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

گزینه‌ها به ما کمک می‌کنند! هر جا دیدی حد a_n یا b_n وقتی n میره صفر نشد اون گزینه غلط!

(برق ۷۰) تست ۲۰ اگر تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف شده باشد آنگاه سری فوریه $f(t)$ عبارت است از:

$$f(t)=\begin{cases} t & , \ 0<t<1 \\ 2-t & , \ 1<t<2 \end{cases} \qquad f(t+2)=f(t)$$

۱) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ ✗

۲) $\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos(2k-1)\pi t$ ✓

۳) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\pi t)$ ✗

۴) $\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi}{2}t$ ✗

$T=2$ و $h=1 \Rightarrow a_n \cos n\pi t$

گزینه ۱ غلط است. $\Rightarrow$ ۴

دوره تناوب‌ها: $2k\pi t$ ، $(2k-1)\pi t$ ، $4\pi t$ داشتن عیب ندارد! ولی تقسیم ایراد داره

گزینه ۳ غلط است: $\lim_{n\to\infty} \sin(n)$ وجود ندارد

* حداقل سرعت همگرایی ضرایب فوریه متناسب با $\frac{c}{n}$ است

هر چی توان مخرج بیشتر ← سرعت همگرایی بیشتر!

کمترین مقداری که توان می‌گیرد ۱ است!

$$a_n = \frac{7n^2+4n+1}{9n^7+3n^2+n+1} = \frac{7n^2}{9n^7} = \frac{c}{n^5}$$

$n\to\infty$

* اگر sin و cos داشتی از آن کسر فاکتور نگیر چون نوسانی اند و در سرعت تاثیر ندارند! قبل از دست‌طرشون می‌گیری!!

حل

سراسری ۸۴) کدام سری، سری فوریه تابعی انتگرال پذیر و متناوب با دوره تناوب 2π است.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}} \quad 1) \times$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1} \sin nx}{n} \quad 2) \checkmark$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n) \cos nx \quad 3) \times \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n-1)x}{\sqrt{n}} \quad 4) \times$$

* از روی درج و خرد بودن ضرایب a_n, b_n هم حل می‌شد!

* قضیه

$f(x)$ ناپیوسته $\Longleftrightarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n}$ همگرا می‌شود.

f پیوسته و f' ناپیوسته $\Longleftrightarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n^2}$ همگرا شود

($\frac{c}{n^2}$ حداقل سرعت a_n و b_n است)

f و f' پیوسته و f'' ناپیوسته $\Longleftrightarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n^3}$ همگرا می‌شود

($\frac{c}{n^3}$ حداقل سرعت a_n و b_n است)

⋮

f و f' و ... و $f^{(k-1)}$ پیوسته و $f^{(k)}$ ناپیوسته $\Longleftrightarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n^{k+1}}$ همگرا می‌شود

($\frac{c}{n^{k+1}}$ حداقل سرعت a_n و b_n است)

فرق تابع هموار و پیوسته : تابع هموار: مشتقات آن پیوسته است!

تابع اول: f پیوسته و f' ناپیوسته

تابع دوم: f و f' پیوسته و f'' ناپیوسته ← از تابع اولی هموارتر است!

پس مفهوم «هموارتر» داریم!

هرچه تابع هموارتر باشد ← سرعت همگرایی بیشتر است!

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

هرچه تابع ناپیوسته‌تر ← زمان بیشتری می‌خواد تا همگرا شه!

* منظور از همگرا: شکل Σ سریع‌تر به شکل اصلی تابع نزدیک می‌شود!

حالا می‌ریم سراغ کاربرد قضیه:

(1) اگر شکل f را داشته باشیم، قبل از محاسبه ضرایب سری فوریه می‌توانیم سرعت همگرایی آن را پیش‌بینی کنیم

(2) برعکس: خود ما که صورت سری فوریه را داریم قبل از رسم شکل می‌شه در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی آن صحبت کنیم. مثلاً: $\frac{c}{n^3}$: f پیوسته، f' ناپیوسته

JozveBargh.ir

* حالتی که از b_n یا a_n سریعتر آمد به، اولی می‌تونه بهتر باشه اما مرتبه : مفهوم جمله ۲ ‏ ۲۳

(* دکترای اعزام به خارج مهندسی برق دیگلی) ص ۵۲

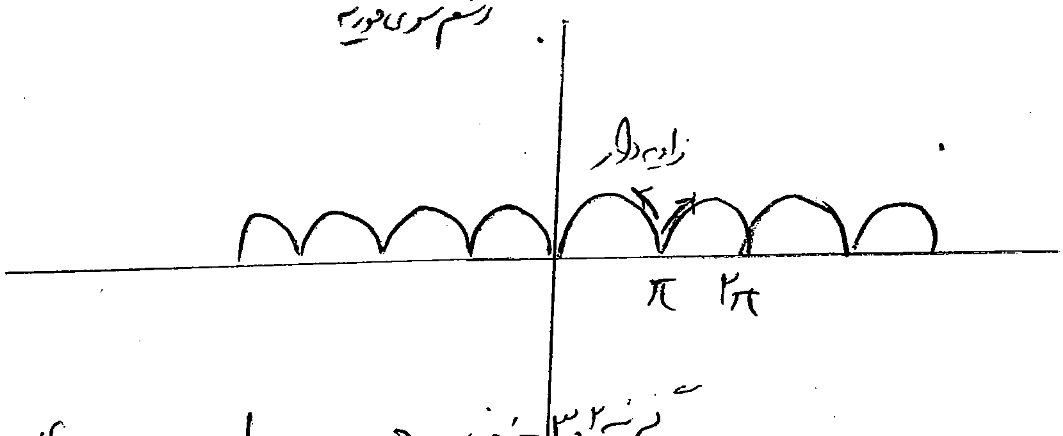
سری فوریه تابع $f(x)=|\sin x|$ و $0<x<2\pi$

۱) ✓ ‏ ‏ ‏ ‏ ۲) ✗

۳) ✗ ‏ ‏ ‏ ‏ ۴)

معیار استفاده از سرعت همگرایی ⟵ تفاوت توان (سرعت همگرایی) جوابها!

$T=2\pi$ و $l=\pi$ ‏ بازه متقارن است به راحتی زوج و فرد بودن ↓ رسم سری فوریه



زوج $\Longrightarrow b_n=0 \Longrightarrow$ حذف ۲ و ۳ گزینه

f پیوسته است!

f' ناپیوسته است { تمام معیارهای پیوستگی مشتق یک تابع پیوسته نقطه زاویه‌دار است)

{ نقطه زاویه دار داشت ⟸ f' ناپیوسته

{ نقطه زاویه دار نداشت ⟸ f' پیوسته

{ در این نقطه مماس یکتا وجود ندارد ⟸ (دو تا) مماس داریم!

f' ناپیوسته! : یعنی شیب حد راست ≠ شیب حد چپ (نقطه زاویه دار)

(مشتق راست ≠ مشتق چپ)

پیوسته و f' ناپیوسته ⇐ حداقل یکی از a_n و b_n باید سرعت آن $\frac{c}{n^2}$ باشد

$b_n=0$ ، پس حتما a_n باید سرعتش $\frac{c}{n^2}$ باشد.

$$\left.\begin{array}{l}\text{پیوسته}\\ f' \text{ ناپیوسته}\end{array}\right\} \Rightarrow a_n \sim \frac{c}{n^2} \Rightarrow$$ گزینه ۱ حذف!

اگه اول سرعت جمله‌ای ثابت می‌کردیم ⇐ ۲ هم حذف!

* مهم تاکید: همیشه سرعت جمله‌ای را از روی شکل تشخیص می‌دهیم. شکل رو رسم کنیم تا پیوستگی را بررسی کنیم

* معمولاً در سوالات کنکور تا f' کافیه!

اگر خواستی در مورد f'' اظهار نظر کنی باید f' رو رسم کنی، بعضی از ضابطه مشتق گیری‌ها رو رسم می‌کنی و بعد نظر می‌دی!!!

** !!! خودتون نه که ماهی بزن، حل کردن سرعت جمله‌ای خوب مانه!!! **

Random تستش کن!

اگر اختلاف ابعادی بین سرعت جمله‌ای زیاد ← حد کن

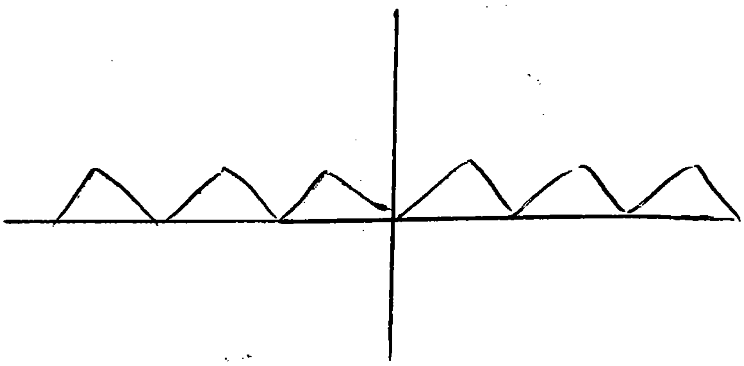
اما اگر سرعت جمله کلیسان ← کار بیهوده‌ای است!

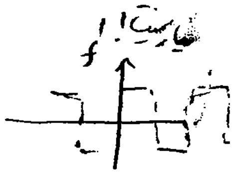
مکانیک ۷۲ / اگر F تابعی با دوره تناوب 2π باشد که با ضابطه $F(x)=|x|$ به ازای <u>۲۴</u>

$x\in[-\pi,\pi]$ تعریف شده است. آنگاه سری فوریه F برابر است با:

۱) ✗ ۲) ✗

۳) ✓ ۴) ✗





f پیوسته
f' ناپیوسته (نقطه‌ای) $\Big\} \Rightarrow a_n \sim \frac{c}{n^2}$ ۱و۲ حذف

صاد

* مثال: برگ <u>۷۴</u> ؟

۱)

۲)

۳) ✓

۴)

$a_n = \underline{\qquad}\ , n \neq 0 \sim \frac{c}{n^2}$ $\qquad$ $b_n = \underline{\qquad} \sim \frac{c}{n}$

← ناپیوسته

بررسی سایر گزینه‌ها!

۱) اولین ناپیوستگی سوم ← پس حداقل یکی از a_n یا b_n باید $\frac{c}{n^4}$ باشد ← غ

۲) دو بار گزینه باید داشته باشد ← حد صفر

← سرعت از $\frac{c}{n}$ کمتر نیست

← نمی‌توانند غ است ← نمی‌توانند

۴) قضیه جاگذاری نمی‌تواند! نمی‌توانند غ است ← غ است!

* وقتی همه ی سوالات را در هر مبحث حل کنید به مباحث اصلی مسلط شدید!

جلسه دهم

* شرایط دیریکله

برای محاسبه ی مقدار سری فوریه در نقطه ی x_0، نیازی به محاسبه ی ضرایب فوریه نیست بلکه می توان مطابق زیر عمل کرد :

x_0 نقطه پیوستگی $\Rightarrow$ مقدار سری فوریه $= f(x_0)$

x_0 نقطه گسستگی $\Rightarrow$ مقدار سری فوریه $= \dfrac{\lim_{x \to x_0^+} f(x) + \lim_{x \to x_0^-} f(x)}{2}$ = میانگین حد چپ و حد راست در نقطه ی

* مثال) مقدار سری فوریه $f(x)$ که تعریف آن در یک دوره ی تناوب مطابق زیر است، در نقاط داده شده را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \\ -2 & 2 < x < 3 \end{cases}$$

$x_0 = 0 \Rightarrow$ نقطه گسستگی $\rightarrow$ مقدار سری فوریه $= \dfrac{-2+0}{2} = -1$

$x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ نقطه پیوستگی $\rightarrow$ مقدار سری فوریه $= f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$x_0 = 1 \Rightarrow$ نقطه پیوستگی $\rightarrow$ مقدار سری فوریه $= f(1) = 1$

$x_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow$ نقطه پیوستگی $\rightarrow$ مقدار سری فوریه $= f(\frac{3}{2}) = 1$

$x_0 = 2 \Rightarrow$ نقطه گسستگی $\rightarrow$ مقدار سری فوریه $= \dfrac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$

$x_0 = \frac{5}{2} \Rightarrow$ نقطه پیوستگی $\rightarrow$ مقدار سری فوریه $= f(\frac{5}{2}) = -2$

$x_0 = 3 \Rightarrow$ نقطه گسستگی $\rightarrow$ مقدار سری فوریه $= \dfrac{-2+0}{2} = -1$

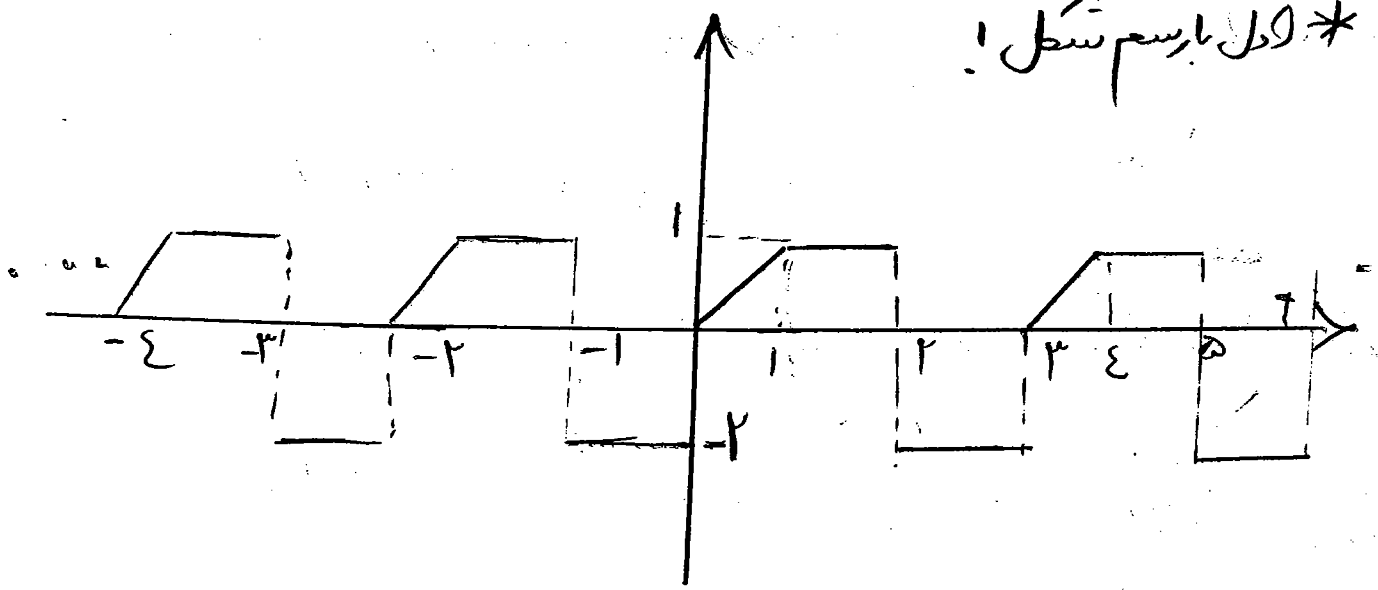
$x_0 = \underline{26789135 2} \Rightarrow \overset{\text{با تناوب}}{\equiv} 1 \rightarrow$ مقدار سری فوریه $= 1$

باقیمانده تقسیم بر ۳

$x_0 = -1967.3215437/5 \equiv 2,5 \rightarrow$ مقدار سری فوریه $= -2$

$x_0 = 8967543221,05 \equiv 0/5 \rightarrow$ مقدار سری فوریه $= \frac{1}{2}$

* اول با رسم شکل!



برای این سه تا x_0 آخر ← مضارب دوره تناوب را حذف می‌کنیم.

روی شکل نگاه کن ← رفتار در ۵ مثل رفتار در ۲ است!

وقتی می‌گیم مضارب دوره تناوب را حذف، یعنی بر ۳ تقسیم کن و باقیمانده را بنویس!

نقطه x_0:

- داخل دوره:
  - نقاط داخل بازه ← همواره پیوسته
  - نقاط تغییر ضابطه ← میانگین حد چپ و راست.
- روی مرز دوره ← میانگین مقدار ابتدا و انتهای دوره.
- خارج دوره ← با حذف مضارب دوره تناوب به داخل دوره یا روی مرز دوره، تبدیل می‌شود!

JozveBargh.ir

* هر تابع تکه ضابطه‌ای، همواره در دامنه‌ی تعریف خود پیوسته است!

تکه ضابطه‌ای: تکلیف روشنه ⇐ نقاط داخل همه پیوسته!

نقاط مرز را جداگانه بررسی می‌کنیم!

چند ضابطه‌ای ⇐ داخل بازه: حتماً پیوسته!

نقاط تغییر ضابطه: چه پیوسته چه ناپیوسته ⇐ $\dfrac{\text{حد راست} + \text{حد چپ}}{2}$

* پس با توجه به نکات فوق نیازی به رسم شکل نداریم!

ص ۴۸

(تست مکمل ۸۲) مقدار سری فوریه فقط تابع متناوب $-\pi<x<\pi$ و $f(x)=x^2+x$ در نقطه $x=\pi$ کدام است؟

۱) π ۲) π^2 ✓ ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $\pi^2+\pi$

π مرز است: $\dfrac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}=\dfrac{\pi^2+\cancel{\pi}+\pi^2-\cancel{\pi}}{2}=\pi^2$

* خودمم نفهمیدم چی شد ☹

سؤال: مطمئنم دامنه اگه $[0,\pi]$ بود ⇐

سطر کسینوسی، مقدار صفر؟

حتماً باید تمام دامنه را در نظر بگیرید! نیم دامنه غلط است!

$y=x\,,\quad 0<x<1$

از زاویه استفاده نکنید

عکس‌العمل $F(1)=1$، $F(-1)=-1$ ⇐ ⑤

بهتر به صورت کامل است که با شکل یا با تابع هر دو را بررسی کنیم.

بازه‌ی کل دامنه $-1<x<1$

$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ -x & -1<x<0 \end{cases}$

صورت حد راست و چپ ⇐ $(0,1)$

$f(1)=1$، $f(-1)=1$ ⇐ $\frac{1+1}{2}=1$

JozveBargh.ir

برای بررسی پیوستگی منحنی سری فوریه $y=f(x)$ و $a<x<b$، کافی است $f(a)$ و $f(b)$ را مقایسه کنیم. در صورت مساوی بودن، در مرزها، منحنی پیوسته است.

در صورت مساوی نبودن در مرزها، منحنی پیوسته نیست.

نیم دامنه:

- با رسم شکل تمام دامنه را مشخص می‌کنیم
- کل ضابطه را در تمام دامنه بدست می‌آوریم
- از تعریف زوج یا فرد، استفاده می‌کنیم

* مثال) در بسط سینوسی (تابع فرد) تابع

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 2-x, & 1<x<3 \end{cases}$$

مقدار سری فوریه در نقاط زیر را بدست آورید.

$$x=0 \xRightarrow{\text{تعریف تابع فرد}} f(0)=0$$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$x=2 \Rightarrow f(2)=3-2=1$$

مرزی $x=3 \Rightarrow \dfrac{f(3)+f(-3)}{2}=0$

فرد: $f(-3)=-f(3)$

$x=-1 \rightarrow f(-1)=-f(1)=-\frac{۲+۲}{۲}=-\frac{۳}{۲}$ $\frac{\text{حد راست}+\text{حد چپ}}{۲}$

$x=-۲ \rightarrow f(-۲)=-f(۲)=-1$

$x=۵ \rightarrow f(۵)\underset{(-۶)}{=}f(-1)=-f(1)=-\frac{۳}{۲}$

$x=1۲ \rightarrow f(1۲)\underset{(-1۲)}{=}f(0)=0$

$x=-1۷ \rightarrow f(-1۷)\underset{(+1۸)}{=}f(1)=\frac{۳}{۲}$

مثلاً $\Rightarrow \begin{cases} x=۵ \\ x=۵-۶=-1 \end{cases}$ $f(-1)=-f(1)=-\frac{۳}{۲}$

* انتگرالگیری از بسط فوریه : از طرفین بسط فوریه همواره می توان انتگرال گرفت!

$$f(x)=\frac{a_0}{۲}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\int f(x)dx=\overset{?}{\left(\frac{a_0}{۲}x\right)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\left(\frac{L}{n\pi}\right)\sin\frac{n\pi}{L}x+b_n\left(\frac{-L}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi}{L}x\right)\overset{?}{+c}$$

* انتگرالگیری همواره سرعت همگرایی را افزایش می دهد

$\frac{c}{n^k}\xrightarrow{\int}\frac{c}{n^{k+1}}$

* مشتق گیری از سری فوریه : اگر $f(x)$ پیوسته باشد، از طرفین بسط می توان مشتق گرفت

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(-\frac{n\pi}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\left(\frac{n\pi}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

* مشتق گیری همواره سرعت همگرایی را کاهش می‌دهد

$$\frac{c}{n^k} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{c}{n^{k-1}}$$

* محاسبه‌ی سری‌ها با استفاده از سری فوریه

۱) سری فوریه تابع مورد نظر را بدست می‌آوریم

۲) جمله‌ی عمومی سری داده شده را مشخص می‌کنیم

۳) ضرایب فوریه را با جمله‌ی عمومی مقایسه می‌کنیم. در صورت مشابه بودن (یکسان بودن سرعت همگرایی) با عددگذاری مناسب و ساده کردن، حاصل سری داده شده را بدست می‌آوریم. در غیر اینصورت با اعمال موارد زیر روی سری فوریه، تابع ضرایب فوریه را مشابه جمله‌ی عمومی سری می‌کنیم.

انتگرال‌گیری
مشتق‌گیری
رابطه پارسوال

* تست اصلی تست سوم است!! اول و ۲ رو معمولاً طراح میدا!

رابطه پارسوال $\Rightarrow$ $$\boxed{\frac{1}{h}\int_{(T)} (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)}$$

* تنها کاربردی که سری فوریه دارد حل نیز در آن بودن است!

ex: $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n}$$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \Rightarrow \frac{c}{n}$ سرعت هردو $\Rightarrow$ عکوردوا و ساده سرد

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ هم انتگرال جواب هم پارسوال! اولویت با پارسوال است! (حتما) $\Rightarrow$ پارسوال

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \Rightarrow$ دو بار انتگرال

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \Rightarrow$ یک بار انتگرال + پارسوال

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \Rightarrow$ ۴ بار انتگرال

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \Rightarrow$ ۲ بار انتگرال + پارسوال

برای ۳ اجرا شده اول به پارسوال بعد انتگرال؟ نه!

۲ تا نکته $\Leftarrow$ هیچ وقت بیش از یک پارسوال نداریم

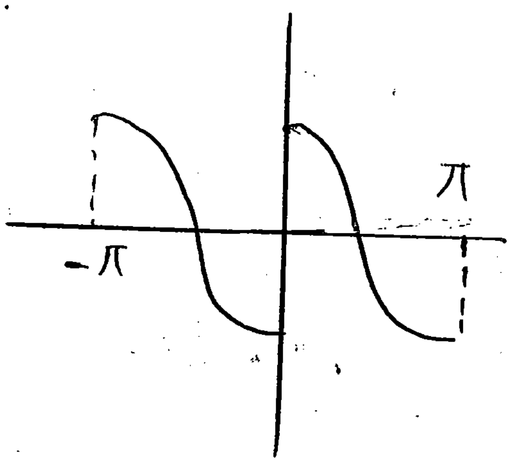
پارسوال حتماً آخرین مرحله است و بعد از آن اجازه‌ی انجام هیچ عملیاتی نداریم

* هر سؤالی تو کنکور دیدید، قبل از حل آن باید این مسیر را تشخیص بدهید!

* مثال با استفاده از بسط فوریه $f(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi \\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$ ، حاصل سری داده شده را بدست آورید.

$$\frac{1}{1^2\times 3^2}+\frac{1}{3^2\times 5^2}+\frac{1}{5^2\times 7^2}+\cdots=\sum\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}=\sum\frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

$T=2\pi \Rightarrow$ بازه متقارن است : شکل خود تابع را رسم



فرد $\Rightarrow a_0=a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1+\cos n\pi}{n+1}+\frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(1+\cos n\pi\right)\frac{2n}{n^2-1}$$

* هرگاه در سری فوریه عبارتهایی مانند $\cos n\pi$ ، $1-\cos n\pi$ و $\sin\frac{n\pi}{2}$ و $\cos n\frac{\pi}{2}$ و ... در ضرایب فوریه ایجاد شد برای استفاده از سری فوریه برای محاسبه ی سری ها، این عبارات حتما باید مقداردهی شوند

$\ldots n=2k$

$\ldots n=2k+1$

$$1+\cos n\pi = \begin{cases} 2 & , n=2k \\ 0 & , n=2k-1 \end{cases} \Rightarrow b_{2k}=\frac{4}{\pi}\,\frac{2k}{4k^2-1}$$

* قدم اول انجام شد!

$$\begin{cases} \cos x & , 0<x<\pi \\ -\cos x & , -\pi<x<0 \end{cases} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{4k^2-1}\sin 2kx$$

$$\cos x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{4k^2-1}\sin 2kx \quad , 0<x<\pi \checkmark$$

* کدام یک از این سری فوریه‌ها درست است؟ هر دو درست است!

هر تابع زوج یا فردی، حتماً می‌توانیم نیم دامنه متناظر آن را بنویسیم.

>0 یا <0 در دو بازه مختلف بنویسیم ⇐ نیم دامنه! ⇐ همیشه به عنوان نیم دامنه هم میشه نگاه کرد!

ایده: حل توی نیم دامنه، با حساب نیم دامنه ⇐ دوباره تمام دامنش کنید!

این دوتا هر دو درستند اما انتخاب با دوره است!

ضابطه تابع را از ۰ تا π بنویس ⇐ هر تابع زوج یا فرد

↓

نیم دامنه!

قدم بعد: حل عمومی سری

قدم سوم: مقایسه ⇐ ضرایب بسنجید!

* با چه عملیاتی می‌شه 2k را از بین برد؟

$$\cos x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{4k^2-1}\sin 2kx \quad 0<x<\pi \Rightarrow$$

انتگرال می‌گیریم

پارسوال

$$\int \Rightarrow \sin x = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx + C$$

C ⇐ ثابت فوریه $\sin x$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{4}{\pi}$$

* همیشه ثابت سمت راست، ثابت فوریه سمت چپ است.

بالای سطر آن فرد است: انتگرال فرد ⇐ زوج ⇐ پاسخ زوج است!

دقت: در فوریه، بالای زوج ⇐ انتگرال آن فرد بود ⇐ $C=0$ و نیازی به محاسبه C نبود!

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx, \quad 0<x<\pi$$

(زوج در نظر گرفته شده است)

a_0 و $\cos$ دارد ⇐ زوج

۲۵

بارسوال :

چون زوج است :
کران ← نصف
بازه ← دو برابر

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum \frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

← برای یادگیری

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2} = 2\left(\frac{a_0}{2}\right)^2}$$

$\Rightarrow$ (که اشتباه صحیح زده!) ← $2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = 2\times\frac{4}{\pi^2} = \frac{8}{\pi^2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}$$

جلسه بعد : اتمام سری فوریه
تا آخر انتگرال فوریه

تا اول ص ۱۰۳ : پیش مطالعه

۶۱

* ریاضی مهندسی - دوشنبه - ۹۲,۵,۱۴ - جلسه‌ی چهارم

مکانیک - ص ۷۰

الف) ×

ب) ×

ج) ✓

د) ×

$$x^2+x=x+4\sum(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+C$$

گزینه الف (غ) است :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\int f(x)\,dx=\overset{?}{\frac{a_0}{2}x}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{l}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)+b_n\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)+$$

*جملات سری فوریه فقط از جنس sin و cos و عدد ثابت هستند پس $\frac{a_0}{2}x$ را باید آن طرف تساوی انتقال داد.

* مهم با انتگرال‌گیری از سری فوریه $f(x)$ سری فوریه $\int f(x)\,dx$ بدست نمی‌آید

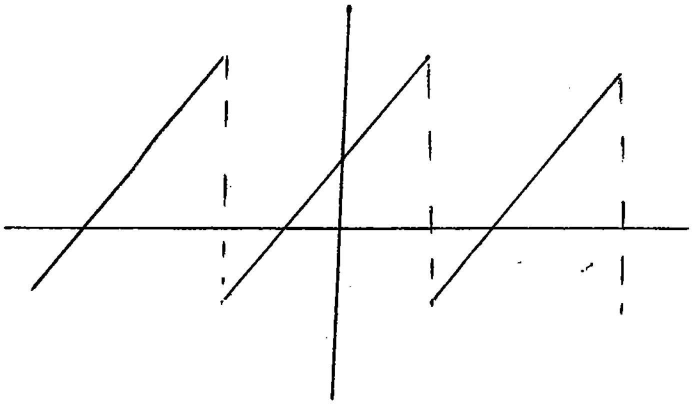
بلکه سری فوریه $\int f(x)\,dx-\frac{a_0}{2}x$ بدست می‌آید

پس گزینه‌ی الف غ است، چون با انتگرال‌گیری سری فوریه $x^2+x-x=x^2$ بدست می‌آید نه x^2+x!

ب) حملهٔ ب غلط است!

$$2 = -4\sum (-1)^n \cos nx$$

روش اول:



f ناپیوسته است $\Rightarrow$ $\boxed{\text{مشتق‌گیری مجاز نیست}}$

روش دوم: $f(\pi) \neq f(-\pi) \Rightarrow$ f ناپیوسته

روش سوم: $b_n \sim \frac{c}{n} \Rightarrow$ f ناپیوسته

روش چهارم: مشتق‌گیری باعث کاهش سرعت همگرایی می‌شود و چون b_n حداقل سرعت مجاز را دارد

مشتق‌گیری هم سرعت همگرایی را کاهش می‌دهد

کمترین سرعت مجاز $= \frac{c}{n}$

* پس با مشتق‌گیری از عبارت است غلط است!

روش پنجم: با مشتق‌گیری به سری واگرا می‌رسیم

حد $(-1)^n$ صفر نمی‌شود پس $\sum$ واگرا است جمع [illegible] اینجا ۲ شده [illegible]

روش ششم: اگر سری فوریه $g(x)$ سمت راست فقط عدد ۲ است

[illegible] باید ۲ شده است!

$$\sum a_n \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ یا حد نداشته باشد} \Rightarrow \text{سری واگرا} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \text{مشکوک} \end{cases}$$

ج حالا بین "ج" و "د" ← "د" ساده‌تر است، چون دیر تکلیفم معلومه!

π رادی عدد است ← اشتباه، هایش دو سری ۲ تقسیم!

$$\frac{-2\pi+1+2\pi+1}{2} = 1 \Rightarrow$$ پس "د" هم غلط است!

پس "ج" صحیح است!

* بررسی ج : قدم اول: سری فوریه ← طراح داده ✓

قدم دوم: جمله‌ی عمومی سری!

$$\sum \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$ ← (هر وقت منفی و مثبت داشتیم $(-1)^k$ برای تعیین علامت [illegible] حل)

قدم سوم: مقایسه جملات: مشابهند: هر دو سرعت همگرایی $\frac{c}{n}$

قدم چهارم: عددگذاری

: هر موقع خواستی عددگذاری باید دیگه جاش باشه!

$$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cancel{2}\times\frac{\pi}{\cancel{2}}+\cancel{1}=\cancel{1}-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} \Rightarrow \pi=-4\sum\frac{(-1)^{2k-1}(-1)^{k}}{2k-1}$$

مقدار دهی : $$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & , n=2k \\ (-1)^{k+1} & , n=2k-1 \end{cases}$$

← $(-1)^k$ برای تعیین علامت به ازای k [illegible] حل!

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}}$$

← ج درست است!

[* سؤال: چرا $\frac{\pi}{2}$ انتخاب؟ یه چارچوب برای ذهنت داشته باش. یکی از عواملی که باعث می‌شه حل خودت احتمالاً نداشته باشی اینه که اطلاعات نقاط $\frac{\pi}{2}$ ... اند. وقتی هدف توجه کنی، مسیر هموار می‌شود. اولش چند تا [illegible] Sin nπ ایده از بین می‌ره!]

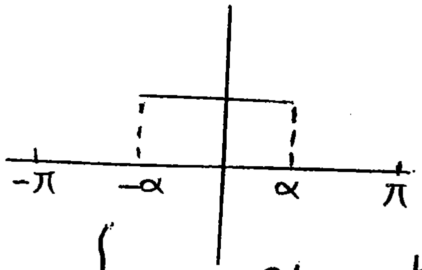
[انتخاب من از ۰ تا π است. چون سری فوریه مثلثاتی است پس امتحان دادم ۰ و $\frac{\pi}{2}$ و π، چون بجز این که
هر چی بردم باز هم این sin ها رو صفر می کنه ۱ و ۰ و π حذف می شوند چون ∑ را از بین می برند بین $\frac{\pi}{2}$ می دونه!
گزینه $\frac{\pi}{2}$ جواب داد که چیزی اینه تست کاملاً حل شده!]

* تفاوت دانشجویان "قوی" و "متوسط" ⇐ **نظم اطلاعات** ⇐ (اعتماد به اطلاعات)

** **مدیریت جلسه آزمون**

* برق ۸۹، کامپیوتر ۹۱ ص ۱۳، تست ۲۹

۴) ۳) ۲) ۱)



قدم اول و دوم و انجام داده فقط برای مقایسه باید به فرم ∑ باشد:

$$f(x)=\frac{\alpha}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}\cos nx$$

قدم سوم: هر وقت تلفن داشتی، بجز پارسوال، چیز دیگه ای چک نکن اشتباهه!

$l=\pi$

$$\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}(1)^2dx}_{\frac{2\alpha}{\pi}}+0=\frac{2\alpha^2}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2\Rightarrow\sum\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2=\frac{\alpha\pi-}{2}$$

۳۴

پارسوال : $\frac{1}{h}\int_{(T)} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

* مخصوص زوج و فرد بودن سمت راست

نکته : زوج ← $\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}$ ← $\frac{2}{l}\int_0^l$

نکته : $\frac{n\pi x}{h}$ $\cos x \Rightarrow l=\pi$

* نکته : این تابع عدد ثابت نیست!

مهندسی کشاورزی ۸۴) صفحه ۴۰، سؤال ۱۴۷

$$f(t) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi t + \frac{(-4)}{n\pi}\sin n\pi t\right]$$

باشد.

۱) ۲) ۳) ✓ ۴)

* detail :

مقایسه : توان ۲ ⇐ پارسوال ⇐ حالا $\frac{1}{n^2}$ اضافه است، باید حسابش کنیم و باید از همین سری فوریه به دست بیاید ⇐ $\frac{1}{n^2}$ مقایسه : مقایسه

* توان دو ⇐ پارسوال! ⇐ $\sum \frac{16}{n^2\pi^2}$ ⇐ $f(0)$ ⇐ دو طرف تساوی را صفر بگذاریم ⇐ $t=0$ ⇐ $t=0$ ⇐ باید $\cos n\pi t$ این جمله را عددگذاری ← لا

نقطه مرزی ⇐ به شرایط دیریکله

$T=2 \Rightarrow l=1$

* اینجا تابع نه زوج، نه فرد!

پارسول : $\frac{1}{1}\int_0^2 t^4\,dt = \frac{32}{9} + \sum\frac{16}{n^4\pi^4} + \sum\frac{16}{n^2\pi^2} \Rightarrow \frac{8}{3}$

باید $\cos n\pi t$ یک بشود ⇐ $t=0$

هر موقع خواستی عدد بگذاری باید شرایط دیریکله رعایت بشود!

$t=0 \Rightarrow \frac{0+4}{2} = \frac{4}{3} + \sum\frac{4}{n^2\pi^2}$ ⇐ $\frac{16}{n^2\pi^2}$ می‌خواهم پس در ۴ ضرب

$$\sum\frac{16}{n^2\pi^2} = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{32}{5} = \frac{32}{9} + \sum \frac{16}{n^4\pi^4} + \frac{8}{3}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{2}{9} - \frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^4}\sum \frac{1}{n^4}$$

$$\sum \frac{1}{n^4} = \pi^4\left(\frac{1}{90}\right)$$

نکته: عموماً اگر خواستید عدد گذاری کنید ⇐ با $\cos$!
اما اگه عدد گذاری نبود ⇐ اونی که مرتبه بزرگتره!

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^p} = ?$$ *

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} = ?$$

$$A = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots = \underbrace{\frac{1}{1^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} + \cdots}_{\text{فردها}} + \underbrace{\frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{6^p} + \cdots}_{\text{زوج ها}}$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^p} + \frac{1}{2^p}\Big(\underbrace{\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots}_{A}\Big)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^p} = A\left(1 - \frac{1}{2^p}\right)}$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^P} = \frac{1}{1^P} - \frac{1}{2^P} + \frac{1}{3^P} - \frac{1}{4^P} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1^P} + \frac{1}{3^P} + \cdots - \left(\frac{1}{2^P} + \frac{1}{4^P} + \frac{1}{6^P} + \cdots \right)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^P} = A\left(1 - \frac{1}{2^P}\right) - \frac{1}{2^P} A$$

$$\boxed{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^P} = A\left(1 - \frac{1}{2^{P-1}}\right)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{\pi^2}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \pi^3 \times (\quad)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \pi^4 \times \left(\frac{1}{90}\right)$$

$$*\sum \frac{1}{n^P}\ \begin{cases} \rightarrow \text{واگرا} & p\le 1 \\ \rightarrow \text{همگرا} & p>1 \end{cases}$$

ص ۵۲۶

مکانیک ۹۲) سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $f(x)=x(l-x)$ ، $0\le x\le l$ کدام است؟

۱) $\frac{L^2}{2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{L^2}{(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi x}{l}$

۲) $\frac{l^2}{4}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{4(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi x}{l}$

۳) $\frac{L^2}{6}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{4(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi x}{l}$

۴) $\frac{L^2}{6}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{(2m-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{l}$

$\sum\frac{1}{n^2}$ رو حفظ داریم ⇐ عدد بذاری!

باید $x=0$ قرار دهیم تا $\sum\frac{1}{n^2}$ بدست بیاد!

گزینه ۱ ⇐ $x=0$ $\quad f(0)=0$

گزینه ۱: $0=\frac{l^2}{2}-\frac{l^2}{\pi^2}\cancel{\sum\frac{1}{m^2}}$ ⇒ ۱ غلط است

گزینه ۲: $0=\frac{l^2}{4}+\frac{l^2}{\pi^2}\underbrace{\sum\frac{1}{n^2}}_{\text{مثبت}}$ ⇒ جمع دو عدد مثبت صفر نمی‌شه! ⇒ ۲ غلط است

* حتی لازم نبود $\sum\frac{1}{n^2}$ رو بدونیم!

⇐ $\sum$ مثبت ، علامت جمله اول ملاک است!

گزینه ۳: $0=\frac{l^2}{6}-\frac{l^2}{\pi^2}\times\frac{\pi^2}{6}$ ✓

گزینه ۴: $0=\frac{l^2}{6}-\frac{4l^2}{\pi^2}\cancel{\sum\frac{1}{(2m-1)^2}}\ \frac{\pi^2}{8}$ ⇒ ۴ غلط است

* اگر تساوی برقرار باشد ⇐ باید در دو نقطه تغییر دهیم! اگر در یک نقطه تغییر دهیم ⇐ ۲ می‌شه!

ص ۲۰

برق ۷۰)

گزینه ۱ $\Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2} + \sum \frac{2}{n^2\pi^2}$ غ (جمع دو عدد مثبت صفر نمی‌شود)

گزینه ۲ $\Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \times \frac{\pi^2}{8}$ ✓

گزینه ۳ $\Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2} + \sum 2\sin\frac{n\pi}{2} \rightarrow$ غ

واگرا

گزینه ۴ $\Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2} \xrightarrow{n \text{ زوج}} 0 = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{4k^2\pi^2} \Rightarrow$ غ

$\begin{cases} n(2k) & \text{زوج} \\ n(2k-1) & \text{فرد} \end{cases}$ (جمع دو عدد مثبت صفر نمی‌شود)

مخابرات ۸۸) سری فوریه گسسته ص ۷۳، سؤال ۴

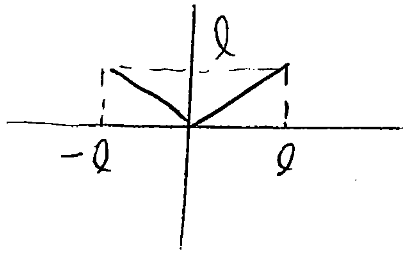
اول تا جایی که می‌تونی با روش‌های قبلی گزینه‌ها رو رد کن که می‌رسیم به دو گزینه، تفاوت فقط در عدد اول است!

۱) ✗

۲) ✗

۳) ✓

۴) ✗



$\frac{a_0}{2} \Rightarrow \frac{l}{2} \Rightarrow$ ۲ ع حذف!

$x=0 \Rightarrow 0$ گزینه ۱ غلط است!

f(0) صفر می‌شه! $\Longleftarrow$ جمع دو عدد مثبت صفر نمی‌شه! پس ۱ غلط است!

ص ۶۹

مغناطیس ۹۰، موارد ۹۲، دکتری مغناطیس ۹۲

خریت دوم: خیلی از Σ که می‌ترسن!

پس حفظ کردن این Σ ارزش داره!

نانوسوار هوافضا ۹۲

هوافضا ۹۱

برق ۹۲ اگر $f(x) = \sin^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{3x}{2} + \sin^2\frac{5x}{2}$ باشد مقدار انتگرال $A = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ کدام است؟

۱) 7π ۲) $\frac{21}{4}$ ۳) $\frac{21}{8}\pi$ ۴) $\frac{21}{4}\pi$ ✓

در حالت پارسوال ← $\sum$ نخواهند / $\int$ نخواهند

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 5x = \begin{cases} \frac{a_0}{2} = \frac{3}{2} \\ a_1 = a_3 = a_5 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$b_n = 0$ ضرایب

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{18}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{21\pi}{4}}$$

تفاوت:

۲ دانشجو: هر دو درس را بلدند ← سریع جواب می‌دهد / ← طول می‌کشد جواب دهد (اطلاعات یکسان) ⇐ چرا؟؟؟

* اولین شرط لازم برای حل تست ← یادگیری درس ← البته

صفحه تست ۲۲

برق ۸۴) اگر برای $-2 < x < 2$ داشته باشیم

$$x = \frac{4}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{2}x\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)\right.$$

۱) ۲) ✓ ۳) ۴)

از دید دانشجوی اول: $2 \times \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{2\pi} = \frac{4}{\pi^2}$

از دید دانشجوی دوم: از x به x^2 ← انتگرال

$$\frac{x^2}{2} = \frac{4}{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{2}x\right) - \frac{2}{9\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + \cdots\right. + C \quad \frac{a_0}{2}$$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \cdots$$

$$x^2 = \frac{8}{\pi}\left(\quad ---- \right)$$

$$x^2 - x = \frac{8}{\pi}\left(\quad -- \quad \right) - \frac{4}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{2}x\right) + \cdots\right.$$

در امتحان کنکور هرچی به دردمان نمی خوره، نباید بنویسیم!

عادت همه چیز نوشتن باید کمرنگ شود!

دانشجوی اول: خواسته ی طراح سؤال چیست؟

طراح سؤال ضریب $\cos \pi x$ را خواسته!

از x به x^2 انتگرال

در صورت اول چون بدردم نمی خوره، حذفش می کنم!

از x به x^2: انتگرال، اما همه ی جمله ها احتیاج ندارم

فقط به انتگرال $\sin \pi x$ احتیاج دارم

$\frac{1}{2\pi}$: انتگرال

$\frac{4}{\pi}$: $\frac{4}{\pi}$ در همه ضرب

2 : من $\frac{x^2}{2}$ دارم پس در 2 ضرب

باید اینجوری می شد نوشت :
$$\frac{x^2}{2} = \frac{4}{\pi}\left(\dots + \frac{1}{2\pi}\cos \pi x \right)$$

$\Leftarrow$ هرچی نوشتید اشکالی ندارد!

اصرار ما اینست که کارهای اضافی انجام نشود!

ص ۲۲ - سؤال ۲۱

کامپیوتر ۸ -

۱)

۲)

۳) ✓

۴)

اصل: گزینه ها جزء سؤالند ← "عادت کنید گزینه ها را همراه صورت سوال بخوانید"

خواندن صورت سؤال هم هنر است!

*۲ روش خواندن صورت سؤال ← ۱) عادی بخون (افراد قوی)

۲) افراد ضعیف: در روش اول با شتاب سؤال و حدکنی، لازم نیست دقیق بخونی!

تا جایی که رسیدی به پرسش! ← پرسش را با تمرکز بخون!

بعد از پرسش سراغ داده های مسأله میریم!

* توصیه من: خواندن سطحی ← پرسش ← گزینه ها (نه با دقت) ← سؤال دقیق!

"اصل اختلاف گزینه‌ها" بسیار مهم است!

اولین چیزی که در گزینه کرد جلب توجه می‌کند، اختلاف گزینه‌هاست. که به ما جهت می‌دهد!

ما در بحث ریاضی مهندسی هیچ‌گاه خودمون مسیر انتخاب نمی‌کنیم!

همیشه مسأله به ما "مسیر" را نشان می‌دهد!

تست کامپیوتر ۸۱

اولین اختلاف $= \frac{a_0}{2}$ با محاسبه آن ۲ تا از گزینه‌ها حذف ⇐ انتخاب خوبی است!

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{4\pi^2}{3} \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{2\pi^2}{3}$$

بدون استفاده از داده‌های مسأله تست حل کردیم!

* حالا اگه توی یکی دیگه از گزینه‌ها هم $\frac{2\pi^2}{3}$ بود چی؟

یه سری تست که هستند که طراح هر جوری گزینه کرد و با راه ذهنی حل می‌شه!
انجامش اینطوری است!

نقش دانشجوی دوم در کتاب است! ما در کلاس نقش دانشجوی اول را داریم.

* اگه توی کنکور $\frac{2\pi^2}{3}$ بود؟

اختلاف: + و - است!

π^2 مهم نیست، از سری فوریه x^2 ← به x^2 می‌خوام برسم!

$-x \int x\,dx-$

اختلاف چه موقع مفهوم داره؟ وقتی درس را بلد باشیم

اختلاف: زوج و فرد بودن

توان n

$\frac{a_0}{2}$

⋮

* کسی درس بلد نباشه نمی‌تونه دنبال اختلاف باشه!

ص ۵۸

برق ۷۱

۱)

۲) ✓

۳)

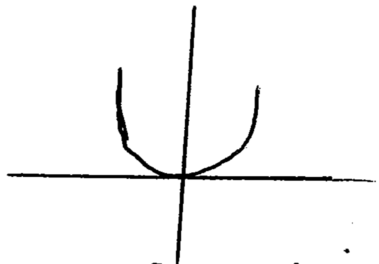
۴)

سری فوریه x^2 خواسته!

x^2 زوج

زوج ⇐ ۳ و ۴ حذف

اختلاف ۱ و ۲ ⇐ a_0 است



بالای محور ⇐ سطح زیر نمودار مثبت ⇐ a_0 مخالف صفر و مثبت! ⇐ ۱ غ

بالای محور ⇐ +

a_0 ← قسمی بالا، قسمی پایین ← بالا بیشتر ← +

برابر ← ۰

پایین بیشتر ← −

پایین محور ← +

* حالا اگر $\frac{a_0}{2}$ که هم یکی بود ⇐ اولین اختلاف علامت + و − است!

$x \xrightarrow{\int} x^2$

$\sin \longrightarrow -\cos$

گزینه ۱ غلط است!

$\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}x$

ص ۹ تست ۱۵

برق ۷۸ اگر بسط به سری کسینوسی فوریه

جملات

۱) x   ۲) x $\sin 3x$

۳) x   ۴) ✓ $\sin x$

با انتگرال‌گیری از تابع به سری فوریه $-\frac{a}{2}x$) می‌رسیم

$\Downarrow$

* با انتگرال‌گیری به سری فوریه $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}x\right)$ می‌رسیم پس صحیح است!

عدد ثابت واسه ما اهمیت نداره!

دانشجوی دوم: محاسبه و انتگرال‌گیری

دانشجوی اول: اختلاف گزینه‌ها

اولین اختلاف: کرونیکر

اگر از یک تابع انتگرال بگیریم، کرونیکر عوض نمی‌شه $\Leftarrow$ ۱ و ۳ حذف

اختلاف ۲ و ۴ $\Leftarrow$ گزینه ۲ از $\sin^3 x$ شروع می‌شه!

گزینه ۴ از $\sin x$ شروع می‌شه!

جمله اول انتگرال $\int \cos x = \sin x$ $\Leftarrow$ گزینه ۲ غلط است

۴۰ $\frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}\ell^2 x$

صفحه ۳۶
برق ۸۷

۱) ✓ ۲)

۳) ۴)

قسمت درسی : $x^2 \xrightarrow{\text{انتگرال}} x^3$

$:\frac{x^3}{3} - \frac{a_0}{2}x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\ell^2 x$

اولین اختلاف ⇐ سرعت همگرایی!

انتگرال ⇐ سرعت همگرایی ۱ واحد اضافه میشه!

$\frac{c}{n^2} \to \frac{c}{n^3}$ ⇐ پس ۱ درست است!

مغناطیس ۱۳۹۲ قبلی

اولین اختلاف $\Leftarrow \frac{a_0}{2}$

$\frac{a_0}{2} = \frac{\ell^2}{6} \Rightarrow$ ٤ ۱

اختلاف بعدی: کدوم نیست؟

هر کدوم شامل کدوم نیستند ج $\Leftarrow$

مغناطیس ۸۸ قبلی، ص ۹۳، ٤

اولین اختلاف $= \frac{a_0}{2}$ ۲ و ٤ حذف!

اختلاف بعدی ۱ و ۳ $\Leftarrow$ فقط اختلاف در عدد است

$\leftarrow$ تنها راه: نقطه گذاری!

* هر وقت اختلاف در عدد بود $\Leftarrow$ تنها راه نقطه گذاری است!

JozveBargh.ir

کامپیوتر ۸۷)

۱) ✓ ۲) ×

۳) × ۴) ×

۳ و ۴ ⇐ حذف
بین ۱ و ۲ ⇐ ۱

انتگرال : $2x \to x^2$

سری حقیقی : $\frac{c}{n} \xrightarrow{?} \frac{c}{n^2}$ ۳ و ۴ حذف!

۱ و ۲ ⇐ سینوسی و کسینوسی $\int \sin = \cos x \Rightarrow$ ۲ غ

* در این روش Risk وجود ندارد! Be Sure!

* هر «اختلاف مقدار» ما را به جواب می‌رساند!

مکانیک ۸۷، ص ۳۰، سؤال ۵۴

An= Bn

۱) ×

۲) ✓

۳) ×

۴) ×

باید
ضرایب کسینوس اینور = ضرایب کسینوس ادینور
" سینوس " = " سینوس "
تانژانت " = "
ادینور " = "

اولین اختلاف: ثابت ۲

مقدار ثابت اینور = مقدار ثابت ادینور

$$K^2 \cdot \frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2} \Rightarrow A_0 = \frac{a_0}{K^2} \Rightarrow$$ شرط ۳

اختلاف بعدی: یکی برحسب a_n، یکی برحسب b_n!

از ان باید دوبار مشتق ⇐ A_n برحسب a_n است! ۲ ← اغ

نکته: ترتیب اعداد غلط

*هرچی به دردمی خوره هی را عوض کند: اصل مهم.

۴۲

صفحه

کامپیوتر ۸۹)

۱) ✗ ۲) ✗

۳) ✓ ۴) ✗

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 \left(1-\frac{x^4}{4}\right)dx = x-\frac{x^3}{12}\Big|_0^2 = 2-\frac{8}{12} = \frac{4}{3}$$ اولین اختلاف = a_0

$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ اولی حذف

اختلاف بعدی: + و −

$x \xrightarrow{\int, \times(-1)} -x^2$

$\sin \xrightarrow{\int} -\cos \xrightarrow{\times(-1)} \cos x \Rightarrow$ غ ۲

صفحه ۱۴ است ۳۱

برق ۹۱)

$\frac{x^2}{4}\, g(x) = \cancel{4}[$

۱) ۲) ✓ ۳) ۴)

چه عملیاتی را از g(x) به ——— برسیم!

یعنی ما عملاً $\frac{g(x)}{4}$ است! چون روی ۴ هیچ عملیاتی انجام نشده!

حجم خم زیاد → انتگرال

انتگرال Cos چون sin ندارد پس یک منفی داریم! پس باید در − ضرب!

انتگرال دو دو منفی ضرب

$\frac{x^3}{12} - \frac{\pi^2}{12}x \Rightarrow -\frac{x^3}{12} + \frac{\pi^2}{12}x$

* مشخص دارم آشغاله، پس واسه ۱۴ هم تعاملش شیعماده، پس می‌دهش اینو!

شروع تست: فصل اول ✓

برق/مکانیک/کامپیوتر ⇐ تماماً حل کن.

شروع حل تست با رشته‌ی خودت بهتر است!

تعداد تست‌ها: حداقل ۲۵ درصد تست‌ها!

* انتگرال فوریه

$\omega = \frac{n\pi}{l}$, $n \to \infty$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big/ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)\right) d\omega$$

معادل سازی ←
- جمع $\sum$ ← { جمع پیوسته
- n گسسته ← ω پیوسته
- a_n برحسب n ← A برحسب ω
- $\cos$ برحسب $n\pi$ ← $\cos$ برحسب (ωx)
- b_n برحسب n ← B برحسب ω
- $\sin$ برحسب $n\pi$ ← $\sin$ برحسب (ωx)
- n گسسته ← $d\omega$

- دارا متناوب / تصنعی متناوب $\Longrightarrow$ سری فوریه
- نامتناوب $\Longrightarrow$ انتگرال فوریه

$l \to \infty \quad \int_{-l}^{l} : \int_{-\infty}^{+\infty}$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big/ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big/ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx$$

اختلاف در نگارش مرجع : ***

کدام درسته؟ *

JozveBargh.ir

* قبل از محاسبه: بررسی شرایط وجود!

* اگر تابع $f(x)$ انتگرال‌پذیر باشد، انتگرال فوریه آن وجود دارد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \text{عدد محدود} < M \Longleftrightarrow$$ $f(x)$ انتگرال‌پذیر است $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ انتگرال فوریه دارد

* هر تابع متناوب انتگرال فوریه ندارد

* مثال) بررسی کنید کدام یک از توابع زیر انتگرال فوریه دارند

1) $y=x$ $\times$ (∞ = سطح زیر نمودار)

2) $y=\cos x$ $\times$ (متناوب)

3) $y=\begin{cases} \sin x & , x>\pi \\ 0 & , x<\pi \end{cases}$ $\times$

4) $y=\begin{cases} \frac{1}{x} & -1<x<1 \\ 0 & \text{سایر حالات} \end{cases}$ $\times$

تو صفر بی‌نهایت داشته!

هر موقع مجانب قائم داشتیم انتگرال فوریه ندارد!

5) $y=x \quad , 0<x<1 \Rightarrow$ چون خارج بازه‌ی $[0,1]$ تعریف تابع مشخص نیست، طراح سوال غلط است!

طرح سوال غلط است! در انتگرال فوریه هر تابعی بدین باید تعریفش از $-\infty$ تا $+\infty$ معلوم باشد

6) $$y=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ e^{x} & -1<x<0 \\ x & 0<x<1 \\ \cos x & 1<x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}$$ ✓

جمع چند مساحت محدود = محدود

* اگر روی یکی از زمینه‌ها بود که انتگرال فوریه وجود دارد ⇐ بررسی می‌کنیم.

جلسه‌ی آینده : شرایط وجود انتگرال فوریه را گفتیم!

پیش مطالعه : انتهای تبدیل فوریه!

* ریاضی مهندسی - دوشنبه - ۹۲,۵,۲۱ - جلسه‌ی پنجم

$\frac{n\pi}{l}=\omega$

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$$

* مقایسه مبحث با مبحث سری فوریه از لحاظ سختی و سادگی

نمره سختی به مبحث سری فوریه = ۹۰

نمره سختی به مبحث انتگرال فوریه = ۱۰

* امروز ⇐ روز استراحت ما است ⇐ همه چیز مثل سری فوریه است ولی ساده‌تر!

در مبحث سری فوریه ⇐ روابط سری فوریه را نوشتیم ⇐ a_0 و a_n و b_n

اما نفهمیدیم باستی صرفاً به طیف اکتفا نکنیم! چون به مشکل برخواهیم خورد!

اینجا ⇐ اگر به طیف که هم اکتفا کنیم، مشکلی پیش نخواهد آمد!

* آیا در اینجا تشخیص زوج و فرد محاسبات را کاهش می‌دهد؟ بله، این تشخیص ۵۰ درصد محاسبات ما را کاهش می‌دهد.

$f(x)$ زوج $\Leftrightarrow \begin{cases} B(\omega)=0 \\ A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x$

$f(x)$ فرد $\Leftrightarrow \begin{cases} A(\omega)=0 \\ B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega x$

* حتماً باید تعریف تابع از $-\infty$ تا $+\infty$ باشد.

* مثال) انتگرال فوریه‌ی تابع

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , x<-6 \\ x & , -6<x<0 \\ \cos x & , 0<x<\pi \\ 3 & , \pi<x<5 \\ 0 & , x>5 \end{cases}$$

را بدست آورید.

بازه‌ها متقارن نیست $\Leftarrow$ نه زوج است نه فرد!

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{-6} 0\,\cancel{\cos\omega x\,dx} + \int_{-6}^{0} x\cos\omega x\,dx$$

$$+\int_{0}^{\pi}\cos x\cos\omega x\,dx + \int_{\pi}^{5} 3\cos\omega x\,dx + \int_{5}^{+\infty} 0\,\cancel{\cos\omega x\,dx}\Big) = \cdots$$

* عادت کنیم از این به بعد جاهایی که صفر است را هم بنویسیم!

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{-6} 0\,\cancel{\sin\omega x\,dx} + \int_{-6}^{0} x\sin\omega x\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos x\sin\omega x\,dx$$

$$+\int_{\pi}^{5} 3\sin\omega x\,dx + \int_{5}^{+\infty} 0\,\cancel{\sin\omega x\,dx}\Big) = \cdots$$

* تذکر

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & , 0<x<h \\ g(-x) & , -h<x<0 \end{cases} \Rightarrow$$ $f(x)$ زوج است

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & , 0<x<h \\ -g(-x) & , -h<x<0 \end{cases} \Rightarrow$$ $f(x)$ فرد است

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & , 0<x<\pi \\ -\cos x & , -\pi<x<0 \end{cases} \Rightarrow$$ فرد است!

$$f(x)=\begin{cases} \sin x & , 0<x<\pi \\ -\sin x & , -\pi<x<0 \end{cases} \Rightarrow$$ زوج است!

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & , 0<x<1 \\ -x+1 & , -1<x<0 \end{cases} \Rightarrow$$ زوج است!

کاربرد اصلی:

تمام دامنه سینوسی.

$$x^2+x+2=\sum b_n \sin nx \,, \quad 0<x<\pi$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+2 & 0<x<\pi \\ -(x^2-x+2) & -\pi<x<0 \end{cases}$$

* مثال) انتگرال فوریه‌ی تابع $f(x)=e^{-|x|}$ را بدست آورید.

زوج است $\quad B(\omega)=0$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos \omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\boxed{\int_0^\infty f(x)e^{-ax}dx=F(s)\Big|_{s=a}}$$ * بسیار مهم *

$$\sin ax \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\cos ax \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2+a^2}$$

* بسط نیم دامنه

[فرض بازه فوریه از لحاظ تئوری فقط سازه‌ای است. چون نصف از $-\infty$ تا $+\infty$ جرقه‌ی ۰ تا $+\infty$ ⇐ دوجانبه تا $-\infty$ ادامه‌ی تمام دامنه!

اگر تعریف تابع در بازه‌ی $(0, +\infty)$ داده شود "نیم دامنه" است و نیم دیگر با بیان کلمات زوج و فرد معلوم می‌شود.

[تست‌ها را هم می‌شه از روش کوتاه و هم کلی حل کرد. چون روش کلی اینجا خودش کوتاهه بهتره از روش کلی حل کنیم. تو مسائل فوریه اگر می‌خواستیم از روش کلی حل کنیم خیلی دردسر بود اما تو انتگرال فوریه اصلاً اینطور نیست!

در مرحله‌ی اول: تمرکز اصلی بر روش کلی است!

ص ۸۷

برق ۷۹، مکانیک ۹۲، مواد ۹۰

۱) ✓ ۲)

۳) ۴)

$$f(\omega)=A(\omega)$$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\cos\omega x\,dx \overset{\text{جزء به جزء}}{=}$$

$$\frac{2}{\pi}\;\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}=f(\omega)$$

[$f(\omega)$ نقش $A(\omega)$ را بازی می‌کند.
* طراح هر اسمی می‌تونه بزاره ⇐ (ضریب $\cos\omega x$ = $A(\omega)$)
چون جملات سینوسی نداریم ⇐ تابع زوج]

[* این دفعه طراح ضریب $\cos\omega x$ رو گذاشته بود $B(\omega)$ حواست باشه!]

ص ۸۸

برق ۷۷

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<\alpha \\ c & \cancel{\alpha}\ {-\beta}<x<\beta \\ 0 & x>\beta \end{cases}$$

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{\sin \overset{\omega}{\cancel{\lambda}}}{\overset{\omega}{\cancel{\lambda}}}\cos \overset{\omega}{\lambda}x \, d\overset{\omega}{\cancel{\lambda}}$$

۱)　　۲) ✓

۳)　　۴)

توصیه‌ای: هروقت انتگرال فوریه داشتی: متغیر را تبدیل به ω کن حتماً این کار را انجام بده!

$\omega \leftarrow x,\ t,\ \lambda,\ \dots$

تمام دامنه است یا نیم دامنه؟ تمام دامنه ⇐ حتماً باید زوج باشد ⇐ بازه باید متقارن باشد ⇐ $\alpha=-\beta$

چون در سری نیم دامنه انتگرال از صفر شروع شده!

تابع زوج ⇐ چون $\cos \lambda x$ داریم ⇐ ($\sin \lambda$ ربطی نداره چون بر حسب λ است)

$\alpha=-\beta$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\beta C\cos\omega x\,dx=\frac{2C}{\pi}\,\frac{\sin\beta\omega}{\omega} \longrightarrow A(\omega)=\frac{\sin\omega}{\omega} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2C}{\pi}=1 \\ \beta=1 \end{array} \right.$$

ص ۹۳، سؤال ۶

* برق ۸۰، نفت ۹۲

$$\int_0^\infty f(\omega)\cos\omega x\,d\omega=\begin{cases} \frac{1}{2}, & 0<x<1 \\ \frac{1}{4}, & x=1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$$

۱)　　۲)　　۳) ✓　　۴)

۴۸

$$f(\omega)=A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}\cos\omega x\,dx=\frac{\sin\omega}{\pi\omega}$$

قضیه: اگر تابعی در بازه‌ی محدودی در نقاط محدودی تعریف نشده باشد یا در نقاط محدودی مقدارش با مقدار تابع برابر نباشد، تاثیری در انتگرال ندارد!

ص ۹۳، سؤال ۷

* برق ۸۱)

۱) ✓   ۲)

۳)   ۴)

$$f(\omega)=B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\sin\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\omega}-\frac{\sin\omega}{\omega^2}\right)$$

* طراحان برق، کامپیوتر را مکانیک کنید!

ص ۹۸، سؤال

* ابزار دقیق ۹۰)

* مثل سؤال قبلی است!

dx را ... به جای $x \Leftarrow \omega$

$$\int_0^\infty f(\omega)\sin\alpha\omega\,d\omega=\begin{cases}1-\alpha, & 0\le\alpha\le1\\ 0, & \alpha>1\end{cases}$$

احالا چند تا تست به روش کوتاه حل می کنیم!

همه ی روش های کوتاه سری فوریه به خز که روشن ک۲ در این جا هم صادقند!

له ۲ روش کوتاه هم در هرجا جزء! اینجا باید پیوسته است و غیر تناوبی!

— روش های کوتاه مبحث سری فوریه در مبحث انتگرال فوریه نیز قابل استفاده هستند.

(۱) $A(\omega)$ نسبت به ω تابعی زوج است $A(-\omega)=A(\omega)$

$B(\omega)$ نسبت به ω تابعی فرد است $B(-\omega)=-B(\omega)$

(۲) سرعت همگرایی ⇐ همگی صادقند!

(۳) $A(\omega)$ و $B(\omega)$ به ازای هر ω محدود هستند (کراندار هستند)

(۴) $\lim_{\omega\to\infty} A(\omega)=0$ و $\lim_{\omega\to\infty} B(\omega)=0$

ص ۸۷

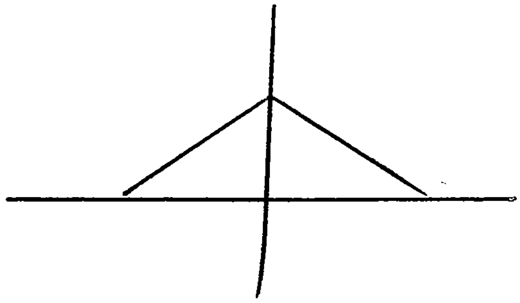
* برق ۷۹، مخابرات ۹۲، مواد ۹۰

روش کوتاه: اولین چیزی که باید حواسمون باشه اختلاف گزینه ها

اولین اختلاف: سرعت همگرایی

۱) ✓ ۲) ✗

۳) ✗ ۴) ✗



f پیوسته و f' ناپیوسته : سرعت همگرایی $\frac{c}{\omega^2}$ ⇐ ۴ غ

به ازای هر ω از صفر تا بی‌نهایت کسر مخرج باید محدود باشد

$\frac{2}{0}=\infty$ ⇐ ۲ غ

هر جایی توی A(ω) و B(ω) ریشه مخرج نداشته باشد ⇐ ۲ غ

اختلاف در ۳ ⇐ علامت (−)

اختلاف در عدد ⇐ چاره: عددگذاری!

به جای x، صفر قرار می‌دهیم که فقط انتگرال P(ω) بماند!
P(0) نقطه پیوستگی: شرط دیریکله:

$$x=0 \Rightarrow \int_0^{\infty} P(\omega)\,d\omega = 1$$

تابع منفی باشد، انتگرالش روی هر بازه‌ای منفی است!

گزینه ۳ همواره منفی است ⇐ از آنجا که B(ω) مخرج مثبت ⇐ پس ۳ هم غلط است!

مثال ۹۳ تست ۷

(برق ۸۱)

۱) ✓

۲) ×

۳) ×

۴) ×

گزینه ۳ و ۴ غلط ⇐ $P(\omega)$ همان $B(\omega)$ است نه باید صفر باشد

تعداد صفر = صفر + دو ج

عدد عدوم :

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{1+\cos\omega}{2\omega} = \frac{2}{0} = \infty \xrightarrow{H} \text{گزینه } 2$$

۲ هم غ است!

یه نکته دیگه: گزینه ۱ ⇐ $\lim_{\omega \to 0} B(\omega) = 0$

ص ۹۶، س ۱۰
سق (۸۲

۱) ✗ ۲) ✓

۳) ✓ ۴) ✗

$f(\omega)$ باید فرد باشد ⇐ ۱ و ۳ حذف!

بین ۲ و ۴ ⇐ بهترین راه: عددگذاری

$\omega =$ ریشه مخرج $= 1$

گزینه ۴) $\frac{2 \times (1-\cos\pi)}{\pi(0)} = \frac{4}{0} = \infty$ ⇐ ۴ ردی شد!

۲ درست است!

JozveBargh.ir

اینجا بخوان سؤال رو تحت کنند ⇐ محاسبات تحت : سؤال بعدی

حت ۱، سؤال ۳۶

نفت ۹۰) در معادله انتگرالی $x>0$

$$\int_0^\infty f(\omega)\cos\omega x\,d\omega = \frac{e^{-x}\sin x}{x}$$

۱) ✓

۲)

۳)

۴)

ایراد سؤال: سمت چپ زوج، سمت راست نه زوج نه فرد ⇐ تساوی غلط!
تصحیح ⇐ $x>0$ (نیم دامنه: دیگه مهم نیست)

* $f(\omega)$ نقش $A(\omega)$ را دارد

$$f(\omega)=A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin x}{x}\cos\omega x\,dx$$

* حالات سینوسی ندارم ⇐ تابع زوج

$$=\frac{2}{\pi}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin x\cos\omega x}{x}\right\}\Big|_{s=1}=\cdots$$

راه کوتاهتر:

$$\frac{df(\omega)}{d\omega}=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\sin x\sin\omega x\,dx=-\frac{2}{\pi}\mathcal{L}\left\{\sin x\sin\omega x\right\}\Big|_{s=}$$

$$\frac{df(\omega)}{d\omega}=-\frac{1}{\pi}\mathcal{L}\left\{\cos(\omega-1)x-\cos(\omega+1)x\right\}\Big|_{s=1}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{1+(\omega-1)^2}-\frac{1}{1+(\omega+1)^2}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
f(\omega) &= -\frac{1}{\pi}\left(tg^{-1}(\omega-1)-tg^{-1}(\omega+1)\right)+C \\
&= -\frac{1}{\pi}tg^{-1}\frac{\omega-1-\omega-1}{1+\omega^2-1}+C \\
&= -\frac{1}{\pi}tg^{-1}\frac{-2}{\omega^2}+C = \frac{1}{\pi}tg^{-1}\left(\frac{2}{\omega^2}\right)+\cancel{C} \\
&= -\frac{1}{\pi}tg^{-1}\left(\frac{\omega^2}{2}\right)+C_1
\end{aligned}
$$

این سؤال هنوزم غلط تایپی داره! (هر گزینه غلطه) $\lim_{\omega\to\infty} A(\omega)=0$ حد در بی‌نهایت صفر!

پاسخ صحیح را باید $\Leftarrow$ $\frac{1}{\pi}tg^{-1}\left(\frac{2}{\omega^2}\right)+C$ $\Leftarrow$ باید صفر شه $\Leftarrow$ پس C باید صفر شه!

در ضمن اجازه‌ی این جایگذاری را نداریم که بعد بشه C_1!

$$
\begin{cases}
tg^{-1}\alpha - tg^{-1}\beta = tg^{-1}\left(\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right) \\
tg^{-1}x + \cot g^{-1}x = \frac{\pi}{2} \\
tg^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cot g^{-1}x
\end{cases}
$$

نکته: اگه جواب بدست بیاریم $tg^{-1}x+C$! تو گزینه‌ها $-tg^{-1}\frac{1}{x}+C_1$ هست! چرا؟

چون $\Rightarrow tg^{-1}x+C = \frac{\pi}{2}-\cot g^{-1}x+C = \frac{\pi}{2}-tg^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)+C = -tg^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)+C_1$

* یادآوری

$$x^n f(x) \rightarrow (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

$$x^n f(x) \rightarrow j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

$\Downarrow$

* اگر ضرایب انتگرال فوریه $f(x)$، $A(\omega)$ و $B(\omega)$ باشند برای محاسبه‌ی ضرایب انتگرال فوریه‌ی $x^n f(x)$ کافی است از $A(\omega)$ و $B(\omega)$، n بار نسبت به x مشتق بگیریم و علامت آن به ترتیب مشتق nام، Cos و Sin است.

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x \, dx$$

$\downarrow$ مشتق

$$\frac{dB(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\cos(\omega x)\, dx$$

$\downarrow$ مشتق

$$-\frac{d^2 B(\omega)}{d\omega^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{-} x^2 f(x)\sin(\omega x)\, dx$$

*می‌خواهیم در مورد (Pm) x^2 نظر بدهیم ← علامت به آن طرف انتقال می‌دهیم!

صفحه ۹۴، سؤال ۳

* برق ۷۶)

۴) ۳) ۲) ۱) ✓

* معیار مشتق! علامت مشتق $\underbrace{(\cos)}_{-\sin x}$ = − : منفی !
$n=1$

ص ۸۹

* تست برق ۸۴) زیباترین سؤالی که تا به حال در مبحث انتگرال فوریه طرح شده است!

$$\int_0^\infty \underbrace{f(x)\sin(\omega x)\,dx}_{\frac{\pi}{2}B(\omega)} + \int_0^\infty \underbrace{x f(x)\cos(\omega x)}_{\frac{\pi}{2}\frac{dB(\omega)}{d\omega}}\,dx = 0$$

۴) ۳) ۲) ۱) ✓

$f(x)$ ضرب $\sin\omega x$ است ⇐ همه فرد است! گزینه‌ها صدق می‌کنند!
⇐ $f(x)$ فرد است!

$f(x)$ فرد است ⇒ $A(\omega)=0$

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$\frac{dB(\omega)}{d\omega}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty x f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$B(\omega)+\frac{dB(\omega)}{d\omega}=0 \Rightarrow \frac{dB(\omega)}{B(\omega)}=-d\omega$$

$$\Rightarrow \ln(B(\omega))=-\omega+\ln c \Rightarrow \boxed{B(\omega)=Ce^{-\omega}}$$

تو سری فوریه اینجوری مرسوم نبود!

اما اینجا دوتاش را باید بلد باشی: چه $f(x)$ بدهند $\leftarrow$ $A(\omega)$ و $B(\omega)$ بخواهند!

چه $A(\omega)$, $B(\omega)$ بدهند $\leftarrow$ $f(x)$ بخواهند!

$$f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x\,d\omega=\int_0^\infty ce^{-\omega}\sin\omega x\,d\omega=\frac{cx}{1+x^2}$$

$$f(1)=1 \Rightarrow c=2$$

* شرایط دیریکله در انتگرال فوریه مثل سری فوریه است ولی ساده‌تر

* مثال) مقدار انتگرال فوریه تابع

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<-2 \\ x^2+1 & -2<x<0 \\ e^x & 0<x<1 \\ 4 & 1<x<3 \\ 0 & x>3 \end{cases}$$

در نقاط داده‌شده را بدست آورید.

$x=-2 \xrightarrow{\text{مرزی}}$ مقدار $=\frac{0+5}{2}$ $\qquad \frac{\text{حد راست}+\text{حد چپ}}{2}$

$x=-1 \xrightarrow{\text{داخل}}$ مقدار $=f(-1)=2$

$x=0 \xrightarrow{\text{مرز}}$ مقدار $=\frac{1+1}{2}=1$

$x=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{داخل}}$ مقدار $=f(\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{2}}$

$x=1 \xrightarrow{\text{مرز}}$ مقدار $= \dfrac{e+4}{2}$

$x=2 \xrightarrow{\text{داخل}}$ مقدار $= f(2)=4$

$x=3 \xrightarrow{\text{مرز}}$ مقدار $= \dfrac{4+0}{2}=2$

$x=978934 \longrightarrow$ مقدار $=0$

$x=-765433{,}5 \longrightarrow$ مقدار $=0$

کار ساده‌تر شده!

* رابطه پارسوال

(شبیه رابطه پارسوال در سری فوریه)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx = \int_0^{\infty}\left((A(\omega))^2+(B(\omega))^2\right)d\omega$$

ممکنه برخی توی کتاب مرجع ببینی $\frac{1}{\pi}$ اونطرف است!
هم کتاب مرجع درست است هم اینجا!
این اختلاف ناشی از اندازه ضرایبی است که اول انتخاب کردیم [illegible]!

JozveBargh.ir

* محاسبه‌ی انتگرال‌های معین با استفاده از انتگرال فوریه:

(روش کار دقیقاً مثل محاسبه سری که با استفاده از سری فوریه ولی ساده‌تر!)

① انتگرال فوریه‌ی تابع مورد نظر را بدست آوریم

② عبارت مقابل انتگرال معین را با عبارت مقابل انتگرال فوریه مقایسه می‌کنیم. در صورت مشابه بودن «یکسان بودن سرعت همگرایی» با عددگذاری مناسب و ساده کردن، حاصل انتگرال را بدست می‌آوریم، درغیر اینصورت از رابطه‌ی پارسوال استفاده می‌کنیم

* طراح معمولاً انتگرال تو بیشتر جوری بده که یا با عددگذاری حل شه یا پارسوال! پس ساده‌تر!

* مثال) با استفاده از انتگرال فوریه‌ی سینوسی

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<a\\ 0 & x>a\end{cases}$$

حاصل انتگرال‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x}\sin x\,dx$

$$A(\omega)=0\ ,\ B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^a \sin\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\,\frac{1-\cos a\omega}{\omega}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos a\omega}{\omega}\sin\omega x\,d\omega$$

$x=a \Rightarrow \dfrac{1-\cos a\omega}{\omega}\sin a\omega \Rightarrow$ شبیه‌اش می‌شه $\dfrac{1-\cos\omega}{\omega}\sin$

ب) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx$

همه چیز را ساکن!
شبیه به بحث x را a بزاریم که حل می‌شوند!
عملاً جز a در مضارب a انتخاب دیگه‌ای نداریم. چون نمی‌دونیم کجاس!

الف) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega\,d\omega$

$$x=a \Longrightarrow \overbrace{\frac{1+0}{2}}^{f(a)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos a\omega}{\omega}\sin a\omega\,d\omega$$

$$\xrightarrow{a=1} \int_0^{\infty} \frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega\,d\omega = \frac{\pi}{4}$$

* در عدد گذاری‌ها به خط عرض کن، حتی بنی یا انتخاب شتریدالی و ساز گذاری اون نقطه قابل تشخیصه!

ب) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^4\omega}{\omega^2}\,d\omega$ $\Rightarrow$ مشابه نیست = پارسوال!

یادم: $\left\{\begin{array}{l} \text{سرعت همگرایی} = \frac{c}{\omega} \\ \text{سرعت همگرایی بالای} = \frac{c}{\omega^2} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ پارسوال!

پارسوال :

$\frac{2}{\pi}\int^{\infty} \xleftarrow{\text{پارسوال}}$ دوم f^2

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{a} (1)^2\,dx = \int_0^{\infty} \frac{4}{\pi^2}\,\frac{(\overbrace{1-\cos a\omega}^{2\sin^2\frac{a\omega}{2}})^2}{\omega^2}\,d\omega$$

$$\frac{2}{\pi}a = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{4\sin^4\frac{a\omega}{2}}{\omega^2}\,d\omega$$

$$\xrightarrow{a=2} \int_0^{\infty} \frac{\sin^4\omega}{\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{4}$$

صـ ۲۱۱

* کامپیوتر ۷۸)

۴)   ۳) $\frac{\pi}{4}$ ✓   ۲)   ۱)

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin\omega^2}{\omega}\,d\omega$$

مشاهده: سرعت همگرایی هردو $\frac{1}{\omega}$!

برای یکسان‌سازی ω^2 را با یک متغیر جدید بگیریم $\Leftarrow$

$$\xrightarrow[2\omega\,d\omega=du]{\omega^2=u} I=\int_0^\infty \frac{\sin u}{\omega}\frac{du}{2\omega}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du=\frac{\pi}{4}$$

$$t=0 \Rightarrow 1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega=\frac{\pi}{2}$$

صـ ۵۶۸، ت ۲۰، حل با دوم

* نانومواد ۹۲)

۴)   ۳) $\frac{\pi}{4}$ ✓   ۲)   ۱)

$$x=1 \xrightarrow{\text{نقطه تغییر ضابطه}} \frac{\cancel{\frac{1}{e}}+0}{2}\ (\times e)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cancel{1}-\cancel{\frac{1}{e}}(\cos\omega-\omega\sin\omega)}{1+\omega^2}\cos\omega\,d\omega$$

* تبدیل فوریه

در مبحث سری فوریه گفتیم ⇐ دو حالت داریم ← سری فوریه مثلثاتی ✓
← سری فوریه مختلط

در بحث انتگرال فوریه هم دو حالت داریم ← انتگرال فوریه مثلثاتی
← انتگرال فوریه مختلط ⇐ تبدیل فوریه!

بر همه‌ی اصولی که در مورد انتگرال فوریه گفتیم در مورد تبدیل فوریه هم صادق است!

مثلاً شرایط وجود انتگرال فوریه ← انتگرال‌پذیر باشد: شرط تبدیل فوریه هم همین است و ...
یا مثلاً تابع ثابت تبدیل فوریه ندارد مثل همان انتگرال فوریه!

نکته: تبدیل فوریه با تبدیل فوریه تعمیم یافته فرق دارد مثلاً $\cos x$ تبدیل فوریه ندارد اما تبدیل فوریه تعمیم یافته دارد

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega x}\, d\omega \\ F(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x}\, dx \end{cases}$$

سری فوریه مختلط

$$\begin{cases} f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{\frac{jn\pi}{l}x} \\ C_n = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-\frac{jn\pi}{l}x}\, dx \end{cases}$$

* انتخاب ما :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega x}\,d\omega \\ F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-j\omega x}\,dx \end{cases}$$

* کتاب کریزیگ : فرم متقارن : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

* سؤالات کنکور ← انتخاب ما شبیه است!

* "$F(\omega)$" را "تبدیل فوریه‌ی" $f(x)$ می‌نامیم

تبدیل فوریه:
- محاسبه با استفاده از تعریف
- محاسبه با استفاده از خواص

* مثال) تبدیل فوریه‌ی تابع

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , x<-2 \\ x & , -2<x<0 \\ \cos x & , 0<x<1 \\ e^{x} & , 1<x<3 \\ 0 & , x>3 \end{cases}$$

را بدست آورید.

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{-2}\cancel{0\, e^{-j\omega x}dx}+\int_{-2}^{0}x e^{-j\omega x}dx+\int_{0}^{1}\cos x\, e^{-j\omega x}dx+\int_{1}^{3}e^{x}e^{-j\omega x}dx+\cancel{\int_{3}^{+\infty}0\, e^{-j\omega x}dx}$$

$$= \ldots$$

* عبارت‌های صفر را از این به بعد نمی‌نویسیم!

آیا اینجا هم تشخیص زوج و فرد بودن تست می‌کند؟ بله!

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-j\omega x}\, dx$$

$$e^{-j\omega x}=\cos\omega x-j\sin\omega x$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\, dx-j\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\, dx$$

زوج $f(x) \Rightarrow F(\omega)=2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx$ (حقیقی)

فرد $f(x) \Rightarrow F(\omega)=-2j\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\omega x\, dx$ (موهومی)

*نکته:

$Real\ F(\omega)$ همه یک ضریبی از $A(\omega)$ است

$Im\ F(\omega)$ همه ضریبی از $B(\omega)$ است

*مثال) تبدیل فوریه‌ی $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ -e^{x}, & x<0 \end{cases}$ را بدست آورید.

فرد است $\Rightarrow F(\omega)=-2j\int_{0}^{\infty} e^{-x}\sin\omega x\, dw=-2j\dfrac{\omega}{1+\omega^2}$

* می‌شه از روی تبدیل لاپلاس ← تبدیل فوریه محاسبه کرد!

$$\begin{cases} F(s)=\int_{0}^{\infty} f(x)e^{-sx}\,dx \\ F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\omega x}\,dx \end{cases}$$

① $f(x)$ برای $x<0$، برابر صفر باشد

② $f(x)$، انتگرال‌پذیر باشد

$\Longleftarrow$ $F(\omega)=F(s)\Big|_{s=j\omega}$

* مثال ۱)

$$f(x)=\begin{cases} e^{-5x} & , x>0 \\ 0 & , x<0 \end{cases} \xRightarrow{\text{هر دو شرط را دارد}} F(\omega)=\frac{1}{s+5}\Big|_{s=j\omega}=\frac{1}{j\omega+5}$$

* مثال ۲)

$$f(x)=\begin{cases} \sin x & , x>0 \\ 0 & , x<0 \end{cases} \xRightarrow[\sin x \text{ انتگرال‌پذیر نیست}]{\text{شرط دوم را ندارد!}} F(s)=\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \cancel{F(\omega)=\frac{1}{s^2+1}\Big|_{s=j\omega}=\frac{1}{1-\omega^2}}$$

* خواص تبدیل فوریه

۱) خاصیت تغییر مقیاس : $f(x) \xrightarrow{F} F(\omega)$

$$f(ax) \longrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

۲) خاصیت انتقال نوع ۱ : $e^{jax} f(x) \xrightarrow{F} F(\omega - a)$

۳) خاصیت انتقال نوع ۲ : $f(x-a) \xrightarrow{F} e^{-ja\omega} F(\omega)$

۴) : $f^{(n)}(x) \xrightarrow{F} (j\omega)^n F(\omega)$

۵) : $x^n f(x) \longrightarrow (j)^n F^{(n)}(\omega)$

۶) خاصیت دوگان : $f(x) \longrightarrow F(\omega)$

$$F(x) \longrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

۷) رابطه پارسوال : $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

۸)
- الف) $f(x)$ زوج و حقیقی $\longrightarrow$ زوج و حقیقی $F(\omega)$
- ب) $f(x)$ فرد و حقیقی $\longrightarrow$ فرد و موهومی $F(\omega)$
- ج) $Re(F(\omega))$ نسبت به ω تابعی زوج است
- د) $Im(F(\omega))$ نسبت به ω تابعی فرد است

ه) $F(\omega)$ به ازای هر ω محدود است (کراندار است)

و) $\lim\limits_{\omega \to \infty} F(\omega) = 0$ حد

* خاصیت کانولوشن در کتاب هست ولی تا حالا تو کنکور نیومده!

توجه: عنوان بحث ⟸ "محاسبه‌ی تبدیل فوریه با استفاده از خواص"

⟵ پس باید خواص را حفظ باشیم!

فقط بازی با فرمول است، اما باید فرمول‌ها را حفظ باشید!

اگر این روابط و خواص حفظ باشه و این تقطیع و تجزیه کلیم یادتان بیاید ⟸ امکان ندارد تبدیل فوریه را جواب نده!

* ریاضی مهندسی - ۹۲/۵/۲۸ - جلسه‌ی ششم - دوشنبه

بحث امروز: محاسبه‌ی تبدیل فوریه با استفاده از خواص ⇐ خواص باید در ذهن ما باشد!

فقط حفظ کنی ⇐ حله!

خیلی شبیه روند محاسبه تبدیل لاپلاس است

هر تابع: ۲ حالت

ضابطه ساده است ⇐ تعریف

ضابطه ساده نیست ⇐ خواص ⇐ ① انتخاب هسته تابع

انتخاب هسته تابع: عبارت هایی که با استفاده از خواص ایجاد شوند: حذف ⇐ باقیمانده = هسته

$$ex: \quad \cancel{x}\,e^{\cancel{2jx}}\,tg^{-1}x \xrightarrow{\text{هسته}} tg^{-1}x$$

خاصیت ۵ خاصیت ۲

عموما دانشجویان در تشخیص هسته مشکل ندارن

Sin ax و Cos ax هم جزو خواص است!

$$\begin{cases} \sin ax = \dfrac{e^{jax} - e^{-jax}}{2j} \\ \cos ax = \dfrac{e^{jax} + e^{-jax}}{2} \end{cases}$$

* مثال تشریحی : روند کار !

* مثال) با استفاده از تبدیل فوریه ی $f(x)=e^{-a|x|}$ ، تبدیل فوریه ی $\frac{1}{x^2+a^2}$ را بدست آورید و سپس با استفاده از آن، تبدیل فوریه ی تابع $h(x)=xe^{-jx}\cos x \cot^{-1} x$ را بدست آورید

نیاز داریم تبدیل فوریه تابع را بدست آوریم ⇐ ضابطه ساده ⇐ تعریف

تبدیل لاپلاس

$$\text{زوج } f(x) \Rightarrow F(\omega)=2\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos\omega x\,dx = 2a\frac{1}{a^2+\omega^2}$$

$$\left.\frac{s}{s^2+\omega^2}\right|_{s=a}=\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

چه ارتباطی نشونه ⇐ به جای ω ، x نوشته !

تبدیل فوریه از تبدیل فوریه ⇐ دوگان !

خاصیت ⇐ نیاز به تبدیل فوریه ⇐ ضریب 2π ضرب و به جای x هم $(-\omega)$!

تذکر: حوزه زمان ⟶ حوزه فرکانس

(انیورجیم x) (ابیورجیم ω)

حالا چون می‌خوای از تبدیل فوریه، تبدیل فوریه بگیری، نیاز ⇐ دوگان !

* خواص بلدباشی تشخیص هسته ⇐ تا اینجا حله!

همه تا بشه تابع ساره باشد ← $e^{-a|x|}$ ⇐ عمل می‌شد $G(\omega)$ حل ✓

ولی من بدترین حالت رو گذاشتم ⇐ طولانی‌ترین حالت!

اما هیچوقت تو کنکور این بدترین رو نمی‌بینی!

با استفاده از تعریف هم ساده نیست! $Ctg\,x$

فرق تبدیل فوریه با لاپلاس ⇐ چون عمده لاپلاس هسته‌ها در جدول حفظ دارم!

اما اینجا کار اضافه‌ای هم داریم که باید یا از تعریف یا از خواص به دست آورد.

خود هسته هم اگر پیچیده بود ⇐ خواص!

چه خاصیت‌هایی می‌تونند برای تبدیل فوریه هسته کمک کنند ⇐ ① مشتق‌گیری ✓

② کانولوشن ✗

③ دوگان ✓

① همیشه مشتق تبدیل فوریش یا زیر اما خورش

② دوگان ⇐ بیشتر تو تست‌ها استفاده می‌شه از احتمال شرطی کمک می‌کنه!

اگر هسته با تعریف ساده نبود ⇐ اولین کار مشتق ⇐ در ۹۹ درصد موارد مشکل حل می‌شه

۱ درصد دیگر سراغ بقیه!

$$\frac{2a}{a^2+x^2} \xrightarrow{\text{خاصیت ۱ (دوگانی)}} 2\pi e^{-a|-\omega|} \xrightarrow{\text{(تقسیم بر ۲)}} \boxed{\frac{1}{x^2+a^2} \longrightarrow \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}}$$

قسمت بعدی مسأله: اصل کتاب.

یه تابع داده، تبدیل فوریه پیدا کن. ضابطه ساده نیست. می‌ریم سراغ خواص ⇐

اولین قدم: تشخیص هسته: $g(x)$

$$h(x) = x e^{-jx} \cos x \underbrace{\cot g^{-1} x}_{g(x)}$$

$$g(x) \longrightarrow G(\omega)$$

$$\cos x(\ldots) \longrightarrow \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}\, g(x) \xrightarrow{\text{خاصیت ۲}} \frac{1}{2}\left(G(\omega-1)+G(\omega+1)\right)$$

تقسیم اینو بدیم عدد ثابت ضرب $(\times\frac{1}{2})$ ⇐ اولی رو هم $\frac{1}{2}$ ضرب

بعدی هم e^{jax} ← (ω) را تبدیل به $(\omega-a)$ می‌کرد!

عادت کنم قبلی که را نتویسی!

$$e^{-jx}(\ldots\ldots) \xrightarrow{\text{خاصیت ۲}} \frac{1}{2}\left(G(\omega)+G(\omega+2)\right)$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ۵}} \frac{j}{2}\left(G(\omega)+G(\omega+2)\right)'$$

$$g(x) = \cot^{-1} x \Rightarrow g'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

خاصیت ۴   داده مسأله

$$\xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \begin{cases} j\omega G(\omega) = -\pi e^{-|\omega|} \\ \Rightarrow G(\omega) = \dfrac{-\pi e^{-|\omega|}}{j\omega} \end{cases}$$

$$H(\omega) = \frac{j}{2}\left(\frac{-\pi}{j\omega} e^{-|\omega|} + \frac{-\pi}{j(\omega+2)} e^{-|\omega+2|}\right)' = \cdots$$

ص۱۰

کامپیوتر ۸۲) تبدیل فوریه تابع $f(x)$

۱) ✓   ۲) ×

۳) ×   ۴) ×

ضابط ساده ⇐ تعریف!

(از تعریف یا استفاده می‌کنیم یا زوج و فرد بودن را هم در نظر می‌گیریم!)

$$f(x)\ \text{زوج} \Rightarrow F(\omega) = 2\int_0^2 1 \cos\omega x\, dx = \frac{2\sin 2\omega}{\omega}$$

از خواص هم حل می‌شه: خاصیت ۸: $\left\{\begin{array}{l} F(x)\ \text{زوج} \Leftarrow f(\omega)\ \text{زوج} \quad \Leftarrow \text{زوج و فرد} \Leftarrow ۲\ \text{ع} \\ ۲\ \text{نوع} \rightarrow F(\omega)\ \text{زوج} \Rightarrow F(x)\ \text{زوج} \end{array}\right.$

ش   درجهٔ صورت < درجهٔ مخرج

$\lim_{\omega \to \infty} F(\omega) = 0 \Rightarrow$ پس ۳، ۴ غ

ص ۱۰۴

* کامپیوتر ۷۸)

۱)   ۲)   ۳)   ۴)

از طرفین معادله تبدیل فوریه می‌گیریم.

خاصیت ۴   خاصیت ۱

$$j\omega Y(\omega) - 4Y(\omega) = \frac{1}{j\omega + 4}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{(j\omega - 4)(j\omega + 4)} \Rightarrow \boxed{Y(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 - 16}}$$

$$F(\omega) = \int_0^\infty e^{-4t} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{4 + j\omega} e^{-(4+j\omega)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{4 + j\omega}$$

۱۲۱

مواد (۸۲ صـ۱۰۱ اگر $F(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x} f(x)\,dx$ تبدیل فوریه‌ی $f(x)$ باشد،

۱) ✓   ۲)

۳)   ۴)

یادآوری: $f(x) \to F(\omega)$ (نوشتن جزء کلاس اضافی است!)

* هسته‌ی تابع $f(x)$ است!

$$\left(e^{jax}+e^{-jax}\right)f(x) \xrightarrow[\text{خاصیت ②}]{F} F(\omega-a)+F(\omega+a)$$

صـ۱۱۲

برق ۸۲)

$$f(t)=\underbrace{e^{\alpha|t|}}_{g(t)}\sin bt$$

۱) ✓   ۲)

۳)   ۴)

هسته $e^{-\alpha|t|}$ است!

($e^{\alpha t}$ را با $e^{\alpha jt}$ اشتباه نگیرید! دقت زیاد داشت ⇐ جزء خواص نیست!)

$$g(t) \to G(\omega)$$

$$\frac{e^{jbt}-e^{-jbt}}{2j}\,g(t) \to \frac{1}{2j}\left(G(\omega-b)-G(\omega+b)\right)$$

حقه ساده ⇐ تبدیل فوریه با استفاده از تعریف!

زوج و فرد بودن! ⇐ زوج ✓

زوج $g(t) \Rightarrow G(\omega)=2\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\cos\omega t\,dt=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

$$F(\omega)=\frac{1}{2j}\left(\frac{2\alpha}{\underbrace{\alpha^2+(\omega-b)^2}_{\alpha^2+\omega^2+b^2-2\omega b}}-\frac{2\alpha}{\underbrace{\alpha^2+(\omega+b)^2}_{\alpha^2+\omega^2+b^2+2\omega b}}\right)$$

$$=\frac{\alpha}{j}\left(\frac{4\omega b}{(\alpha^2+\omega^2+b^2)^2-4\omega^2 b^2}\right)$$

ص ۱۰۷

برق ۷۴) اگر تبدیل فوریه ی تابع $f(t)=\frac{t}{t^2+a^2}$ $(a>0)$

کنکور ۸۷

۱) ××× بی کران ← تبدیل فوریه ندارد e^{-an}

۲) ××× $\xrightarrow[\omega\to\infty]{\text{حد}}\infty$ ، e^{-an} تبدیل فوریه ندارد، $\xrightarrow[\omega\to\infty]{\text{حد}}\infty$

۳) ××× e^{-an} تبدیل فوریه ندارد

۴) ✓✓✓ $\xrightarrow[\omega\to\infty]{\text{حد}}\infty$

$$\begin{cases}-\pi i e^{-\omega a}, & \omega>0\\ \pi i e^{\omega a}, & \omega<0\end{cases}$$

روش آزمون به جای ۴ تا ابزار ← تبدیل فوریه

فرد ← ۴ هم فرد ✓

ص ۱۱۶

تست ۸۶، مغناطیس ۹۲، مواد)

چه موقع دوگان به درد می‌خوره ⇐ می‌خوام در این تست انتگرال بگیرم!

$$f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

۱) ✓ ۲)

۳) ۴)

دوگان گزینه زیر:
اگه گزینه‌ها رو نگاه کنی و:
تبدیل فوریه گزینه‌ها از صورت سؤال ساده‌تر ⇐ از گزینه‌ها تبدیل فوریه بگیر!

* تذکر: در تست‌های محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی یک تابع، اگر تبدیل فوریه‌ی گزینه‌ها، از صورت سؤال ساده‌تر باشد، بهتر است تبدیل فوریه‌ی گزینه‌ها را بدست آورده و از خاصیت دوگان استفاده کنیم.

اولین کار: به جای ω گزینه‌ها ⇐ x!
انتخاب شده برای کل گزینه‌ها ⇐ یه پاسخ انتخاب کنی!

$$f(x)=\begin{cases} 9, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$$

حالا از این تابع تبدیل فوریه می‌گیریم.

$$f(x)=\begin{cases} a & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases} \xrightarrow{\text{زوج}} F(\omega)=2\int_0^1 a\cos\omega x\,dx = 2a\frac{\sin\omega}{\omega}$$

نکته: چون ۴ تا بود ← اگه جای ω و x ← جابجا شود و ترنه طلا ترنه کلا !

اما اگه دو تا کانند داشتیم ← برای ۲ تا از ترنه کی ← یکی

برای ۲ تا ترنه ای آمده ← یکی دیگه

← عبارتی برسیم که اگه جای ω، x بزاریم ← مضربی از خالص شد ← ۲ تا ترنه

چادون ۲ ترنه ع، نیازی نیست دوگان بزنی ← جهت سوئیچ ترنه یکی

اینجا دوگان می‌زنیم: هیچ راه حل دیگری نداریم ← فقط جای ω و x

$$2a\,\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[\substack{\text{خاصیت دوگان} \\ \text{خاصیت ۲}}]{F} 2\pi f(-\omega)$$

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{F} \frac{\pi}{a}\begin{cases} a & |\omega|<1 \\ 0 & |\omega|>1 \end{cases}$$

*چون تابع زوج ← می‌شه جای ω، $-\omega$ گذاشت! مثبت!

خاصیت دوگان
خاصیت ۲

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{F} F(\omega) \\ F(x) \rightarrow 2\pi f(-\omega) \end{cases}$$

JozveBargh.ir

$e^{-j\frac{3}{2}\omega\pi}$ ۱۲ فرد ✗ ✗ ✗

$e^{-j\frac{1}{2}\omega\pi}$ ۱۱ فرد ✗

$e^{-j\frac{3}{2}\omega\pi}$ ۱۴ زوج ✓ ✓ ✓

$e^{-j\frac{1}{2}\omega\pi}$ ۱۳ زوج ✗

هر موقع تبدیل فوریه ی یک تابع از روی تبدیل فوریه ی تابع دیگه بدست میاد!

باید ریدم عملیات صورت گرفته کدام تابع رو داریم تبدیل شه

$\sin$ شده $\cos$ ← مشتق

t ← شده $\frac{t}{2}$ ← تغییر مقیاس

$-\pi$ ← 0 ← انتقال

۱- مشتق

۲- تغییر مقیاس

۳- انتقال

$f(x) \xrightarrow{F} F(\omega)$

خاصیت انتقال: $f(x-a) \xrightarrow{F} e^{-ja\omega} F(\omega)$

هر وقت تو تبدیل فوریه از $e^{-ja\omega}$ صرفنظر کنی ⇐ تبدیل فوریه قبل انتقال!

پس تو ضریب $e^{-j\omega\pi}$ صرفنظر ⇐ با جابجایی : تبدیل فوریه تابع قبل از انتقال

✗

قبل از انتقال

فرد زوج ← زوج $G(\omega)$ ← زوج
$f(t)$ ← فرد ← $F(\omega)$ فرد ← ترتیب ۱ زوج نسبت ← غ ← ✗
۳ ← ۲ ← ۱

صف ۱۰۴ ، صف ۱۰۹

برق ۸۷)

$$f(x) = e^{-x^2}$$

۱)

۲)

۳) ✓

۴)

* همش خورده . با تعریف یا با خواص؟ ⇐ خواص ⇐ اولین طرح: مشتق

$$f'(x) = -2x e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2x f(x)$$

حاصیت ۴ ، حاصیت ۵

$$j\omega F(\omega) = -2j \frac{dF\omega}{d\omega}$$

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} + \frac{\omega}{2} F(\omega) = 0$$

$$\frac{dF(\omega)}{F(\omega)} = -\frac{\omega}{2} d\omega \Rightarrow \ln(F(\omega)) = \frac{-\omega^2}{4} + \ln c$$

$$\boxed{F(\omega) = C e^{-\frac{\omega^2}{4}}}$$

سئوال ۲ ← صف ۱۱۰

جلد دوم:

برق ۷۶)

JozveBargh.ir

اختلاف گزینه ۳ و ۴ ⟸

گزینه ۴ ← خاصیت تغییر مقیاس

$$f(ax) \xrightarrow{F} \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

پس باید $F(2\omega)$ داشته باشیم ⟸ $\boxed{۳ غ}$

چون $p(t)$ زوج $\xrightarrow{خاصیت}$ $F(\omega)$ حقیقی و زوج ؟

$F(\omega)$ زوج و حقیقی

$g(t)$

اما فقط ۲ و ۴ زوج ← زوج

پس ۱ غ ، ۲ غ ✗

بین ۳ و ۴ ⟸ تنها اختلاف 2ω ⟸ تغییر مقیاس ← ۳ غ ← ۴ درست

$g(t)$ قبل از انتقال ⟸ زوج !

فقط تغییر مقیاس

حالا می‌خواهم انتقال که رو در نظر بگیریم !

به اندازه π انتقال ⟸ باید $e^{-j\pi\omega}$ ضرب ← تغییر مقیاس هم دارم ⟸ $e^{-j2\omega\pi}$

$$f(x) \to F(\omega)$$

$$f(\tfrac{x}{2}) \to 2F(2\omega)$$

پس باید تو در $e^{-j2\omega}$ ضرب بشه ⇐ ۱ و ۳ حذف! X

بین ۲ و ۴ ⇐ اختلاف ← ۴ در $e^{-j2\omega}$ ضرب شده

← ۲ در $e^{-j2\omega}$ ضرب نشده

چون متوازی : متوازی $e^{-j2\omega}$ ۲ یا ۴ ← ۴ درسته.

خواص خفط ⇐ هر فرمی تحلیل کنی به جواب می‌رسی!

تست ۱۰

کامپیوتر ۸۹)

۱) X

۲) ✓

۳)

۴) X

ضابطه ساده ← تعریف

اول زوج و فرد بودن ← * f فرد ← A

$$f(x) \text{ فرد } \longrightarrow F(\omega) = \frac{-2j}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 x \sin \omega x \, dx$$

(خودش نوشته تمام می‌داریم)

$$= \frac{-\sqrt{2} j}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{-\cos\omega}{\omega} + \frac{\sin\omega}{\omega^2} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, j \left(\frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^2} \right)$$

(از راه خواص هم می‌شه ولی منطقی نیست)

$f(x)$ فرد ← $F(\omega)$ فرد

$\frac{2\cos\omega}{-i\omega}$ $\quad$ $\frac{1}{\omega^2}(e^{i\omega}+e^{-i\omega})$

شرط ۱ دارد ⇐ ۲ $\qquad$ زوج + فرد = نه زوج نه فرد ← ۲ غ ×

شرط ۲ دارد ⇐ $\omega = 0 \rightarrow \infty$ (غ) ×

شرط ۳ دارد ⇐ ×

با فرمول قضیه ۲ :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-2j \frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{2j}{\omega^2} \sin\omega \right) \xrightarrow{\omega = 0} \infty$$

تنوع ۱ ← دو ← نامحدود ⇐ از اسم هم راه شد !

حل بدون : ص ۱۱۴، سوال ۲۳

* حقوق فضا ۹۱

۱)   ۲)   ۳)   ۴) ✓

خاصیت ۵

راه اول ← x ضرب شده ← در $\int$ ضرب = ۲ بار مشتق ⇐ تنها گزینه ۴ ✓

راه دوم ← $P(x)$ فرد ← فرد و زوج ... تنها گزینه زوج ⇐ گزینه ۴

راه سوم ← از e^{-x^2} اسم ... مشتق : در x ضرب ⇐ تنها گزینه ای خاصیت ۴ : مشتق تابع xe^{-x^2}

که در x ضرب شده ⇐ گزینه ۴ ✓

$$(e^{-x^2})' = -2x e^{-x^2}$$

* تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی

تبدیل فوریه کسینوسی $F_c(\omega) = \overset{\frac{2}{\pi}\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\bigcirc}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$

تبدیل فوریه سینوسی $F_s(\omega) = \overset{\frac{2}{\pi}\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\bigcirc}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$

✓ اختلاف نظر ضرایب ← بعضی که هیچی نمی‌ذارند

← بعضی که $\frac{2}{\pi}$

← بعضی که $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

هیچ فرقی بین انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی و تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی نیست!

انتخاب جواب بدون صفر بدیهی است.

ص ۱۱۷

برق ۸۷

$f(t) = \frac{e^{-at}}{t}$, $t \geq 0$ حتی بهتر بود!

۱)

۲) $tg^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) - \frac{\pi}{2}$ ✓

۳)

۴)

$$F_s(\omega)=\int_0^\infty \frac{e^{-at}}{t}\sin\omega t\,dt$$

$$=\mathcal{L}\left\{\frac{\sin\omega t}{t}\right\}\Big|_{s=a}=\ldots$$

روش دوم:

یا : $$\frac{dF_s(\omega)}{d\omega}=\int_0^\infty e^{-at}\cos\omega t\,dt \overset{\text{لاپلاس}}{=} \frac{a}{a^2+\omega^2}$$

$$\xrightarrow{\int \text{انتگرال}} F_s(\omega)=tg^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)+C$$

$$0=\frac{\pi}{2}+C \Rightarrow C=-\frac{\pi}{2}$$

اشتباه طراح سوال این بوده
که تصور کرده C هرچی
می‌تونه باشه!

حل‌شده‌ی قبل ⇐ نفت ۹۰

یادتونه؟

$$\frac{1}{\pi}tg^{-1}\left(\frac{2}{\omega^2}\right)+C=-\frac{1}{\pi}tg^{-1}\left(\frac{\omega^2}{C}\right)+C_1$$

طراح فکر کرده بود بجای C ← C_1 و غلط!
C هرچی نمی‌تونه باشه!

* تست‌هایی که اشتباه علمی دارند ← حذف نمی‌شوند ← علامت نزن!

حل جلد دوم ص ۱۱۱ سوال ۷

مکانیک ۸۲)

۱) ×

۲) ✓

۳) ×

۴) ×

$\lim_{\omega \to 1} f(\omega) = \infty$

$$F_c(\omega) = \int_0^\infty e^{-x} \cos \omega x \, dx = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ هم ضرب نشده ← برای ما ضریب مجاز است!

* خواص: $f(x)$ زوج ← $F_c(\omega)$ زوج ← ۱ و ۴ فرد ← حذف ×

گزینه ۳ ←

$\lim_{\omega \to 1} f(\omega) = \infty$ ← حذف ×

(همه سوالات مثبت را به مخرج می‌بریم)

* تبدیل فوریه‌ی تعمیم یافته :

* گفتیم هر تابعی که انتگرال‌پذیر نباشد ⟸ تبدیل فوریه ندارد

* توابعی که انتگرال‌پذیر نیستند ⟵ سرعت رشدشان نسبت به سرعت x^n در بی‌نهایت بیشتر ⟸ مثل e^x ⟸ تبدیل فوریه ندارند
⟵ سرعت رشدشان ‌‌کند
سرعت نزولشان از x^n کمتر ⟸ $\begin{cases} \sin x \\ 1 = x^0 \end{cases}$ ⟸ تبدیل فوریه ندارند
اما تبدیل فوریه تعمیم یافته دارند

* به طور ساده را با دو تعمیم تعمیم‌ها معیار ما دلتای دیراک است!

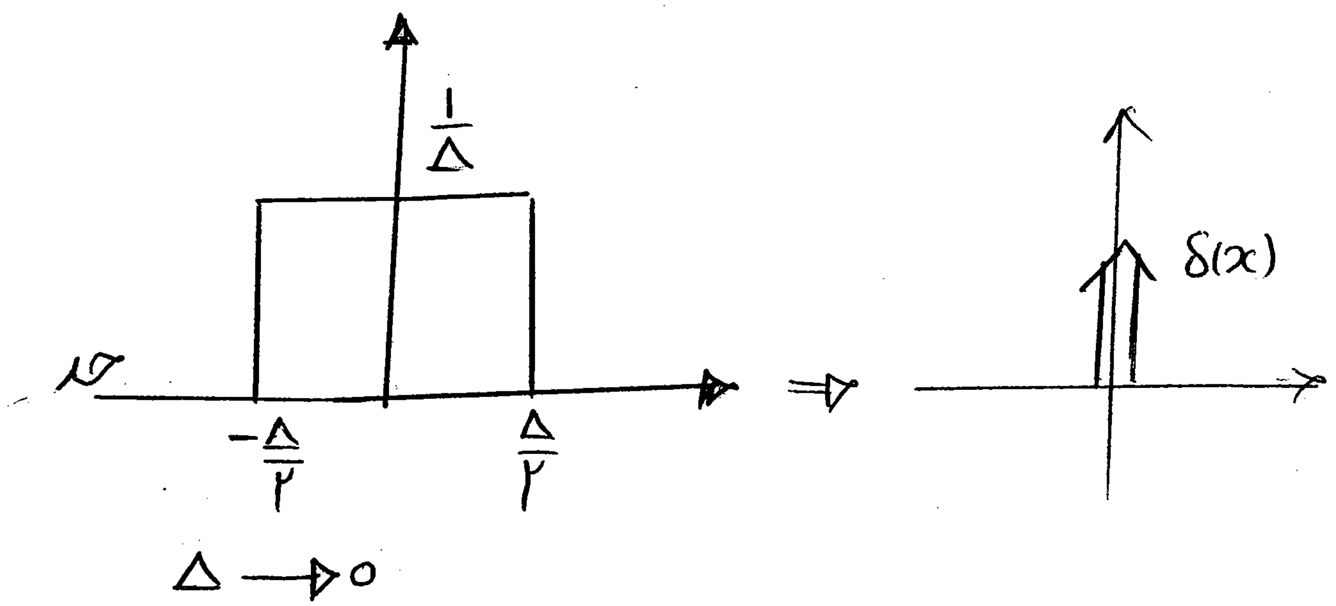
هر تابعی که در ضابطه خودش یا تبدیل فوریه ⟸ دلتای دیراک داشته باشد ⟸ تعمیم یافته
نداشت ⟸ معمولی

* اگر تابعی در ضابطه‌ی خودش یا در ضابطه‌ی تبدیل فوریه‌اش دلتای دیراک (تابع ضربه) داشته باشد، تبدیل فوریه‌ی آن تعمیم یافته است.

* حالا باید دلتای دیراک را معرفی کنیم!

دلتای دیراک

هرجا خواستیم اثر را در یک نقطه زمانی بررسی کنیم ← دلتای دیراک



خواص:

① $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} \delta(x)\,dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,dx = 1$

مهم*** ② $\delta(x-a)f(x) = \delta(x-a)f(a)$

(خاصیت غربالگری)

(خاصیت شیفت)

(خاصیت شیفت) ③ $\delta(x-a) * f(x) = f(x-a)$

④ $\dfrac{du_a(x)}{dx} = \delta(x-a)\,, \quad \dfrac{dr_a(x)}{dx} = u_a(x)$

ضربه $\xrightarrow{\text{انتگرال}}$ پله   پله $\xrightarrow{\text{انتگرال}}$ شیب

$$u_a(x) = u(x-a) = \begin{cases} 1 & , x \geq a \\ 0 & , x < a \end{cases}$$

$$\text{ضربه} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \text{پله}$$

$$\text{پله} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \text{شیب}$$

⑤ $\delta(x) \xrightarrow{F} 1$

اثبات: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(x) e^{-j\omega x}}_{\delta(x)} dx = 1$

⑥ $\delta(-x) = \delta(x)$

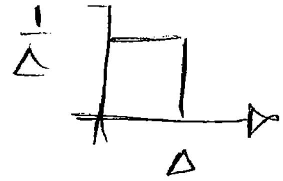
* مثال) سری فوریه تابع $f(x) = \delta(x)$, $-h < x < h$ را بدست آورید.

$$a_0 = \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} \delta(x)\, dx = \frac{1}{h}$$

$$a_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} \underbrace{\delta(x) \cos \frac{n\pi}{l} x}_{\delta(x)} dx = \frac{1}{h}$$

طبق خاصیت سیفتینگ ②

$$b_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} \underbrace{\delta(x) \sin \frac{n\pi}{l} x}\, dx = 0$$



روی زوج بودن $\delta(x)$ اختلاف نظر است.

خواص زوج بودن را دارد. ⇐ تعریف زوج !

اما اشکال اینه ⇐ آنه $\frac{2}{L}$ می‌شد

باید 0^+ و 0^- توجه کرد ⇐ بهتره از زوج بودن استفاده نکنی ⇐ دردسر است ! ⇐ بعداً

$\delta(x)$

$$f(x)=\frac{1}{2L}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

جمله a_n وقتی n به سمت بی‌نهایت ، صفر نشد !

اینجا اشکال نداره ∞ بشه ⇐ دلیل: چون از فوریه استفاده شد، اینو هم $\delta(x)$ هست و شده ∞ شد!

در مورد تعمیم یافته‌ها ⇐ بجز خواص همگرایی بقیه خواص قابل اجراست

تنها موضوعی که اجازه نداریم در تعمیم یافته‌ها استفاده کنید خواص همگرایی است!

⇐ بعداً می‌گیم! ?

همگرایی ⇐ فقط برای شکل پیوسته یا آنهایی که انتگرال نوسان دارند.

تعمیم یافته‌ها خواص همگرایی ندارند

* مثال) تبدیل فوریه ی $f(x)=1$ را بدست آورید.

قبلاً گفتیم $\underline{1}$ تبدیل فوریه ندارد ⟸ چون انتگرال‌پذیر نیست.
حالا می‌گیم تبدیل فوریه ی تعمیم یافته دارد!

$$\delta(x) \xrightarrow{F} 1$$

دوگان: $\quad 1 \xrightarrow{F} 2\pi\delta(-\omega)=2\pi\delta(\omega)$

* مثال) تبدیل فوریه ی $f(x)=\cos ax$ را بدست آورید

قبلاً گفتیم $\cos ax$ تبدیل فوریه ندارد ⟸ حالا می‌گیم تعمیم یافته دارد
قبلاً نمی‌تونستیم هسته را $\underline{1}$ انتخاب کنیم ⟸ حالا می‌تونیم
اگه sin بود:

* هسته را $\underline{1}$ انتخاب کنیم:

$$1 \xrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$$

$$\frac{e^{jax}+e^{-jax}}{2} \xrightarrow{F} \frac{\pi}{j}\pi\left(\delta(\omega-a)\mp\delta(\omega+a)\right)$$

* حل با استفاده از خواص!

* مثال) تبدیل فوریه ی $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ را بدست آورید.

تعمیم یافته نباشی ⇐ توی معمولی کم کم کارت راحته!
می‌تونی بری توی فضای تعمیم یافته دهنه بزرگی!
$xf(x)$ خاصیت هست که من بلدم ⇐ طرفین و مشتق میکنم!
قبلاً می‌ترسیدم چون مرتبه اینو تبدیل فوریه نداره ⇐ ولی حالا توی تعمیم یافته الآن میکنم

خاصیت ۵

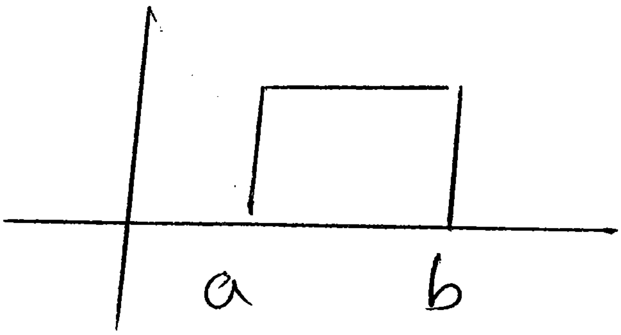
$$xf(x)=\sin x \xrightarrow{\text{تبدیل}} j\frac{dF(\omega)}{d\omega}=\frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)\right)$$

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega}=\pi\left(\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\right)$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} F(\omega)=\pi\left(u(\omega+1)-u(\omega-1)\right)=\begin{cases}\pi, & |\omega|<1\\ 0, & |\omega|>1\end{cases}$$

یادآوری: $u_a(x)-u_b(x)$

مثل فیلتر است!



* با اینو از تعمیم یافته خارج شدیم: در مثال ۸۱!

اعداد مختلط

$\arg(-1+j)$ $\qquad$ $\frac{3\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{4}$

$(8)^{\frac{1}{3}} = (32)^{\frac{1}{5}}$ $\qquad$ نادرست ، درست

$\ln(-1)$ $\qquad$ $i\pi$ درست ، غلط ، ۰

$\sin z = 2$ $\qquad$ دارد ، ندارد

$\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = 0$ $\qquad$ ندارد ، دارد

* مطالعه‌ی بخش ۱ از فصل دوم لازم است.

$$z = \overbrace{x + iy}^{\text{فرم کارتزی}} = \overbrace{r(\cos\theta + i\sin\theta)}^{\text{فرم قطبی (مثلثاتی)}} = r e^{\overbrace{i\theta}^{\text{فرم نمایی (اویلری)}}} = \overbrace{(x,y) = (r,\theta)}^{\text{فرض زوج مرتب}}$$

θ ← آرگومان یا فاز یا آوند z

$\theta = \mathrm{Arg}\, z$

r ← اندازه یا مدول یا هنگ z

$r = |z|$

$x = \mathrm{Re}(z)$: قسمت حقیقی z

$y = \mathrm{Im}(z)$: قسمت موهومی z

نکته و خصوصی:

$$\begin{cases} i = j = \sqrt{-1} \\ cis\theta = \cos\theta + i\sin\theta \end{cases}$$

* اولین چیزی که ما را یاری می کند این است که تبدیل این ها به هم دیگر.

* تبدیل فرم دکارتی به قطبی:

$$Z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} tg^{-1}\dfrac{y}{x} & \Leftarrow \text{اگر نقطه در ربع اول یا چهارم باشد} \\ \pi + tg^{-1}\dfrac{y}{x} & \Leftarrow \text{اگر نقطه در ربع دوم یا سوم باشد} \end{cases} \end{cases}$$

$$Z = -1 + j \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \pi + tg^{-1}(-1) = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

* قضیه ی دو مواور: برای به توان رساندن یا ریشه ی n ام گرفتن از یک عدد یا عبارت مختلط از این قضیه استفاده می کنیم.

$$Z = x + iy \xrightarrow{\text{تبدیل به فرم قطبی}} Z = r\,cis\theta$$

$$z = r\,\text{cis}\,\theta \;\begin{cases} \Rightarrow z^n = r^n \text{cis}(n\theta) = r^n e^{in\theta} \\ \Rightarrow (z)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \text{cis}\,\dfrac{2k\pi+\theta}{n} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}} \end{cases}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

اول قطبی کنیم ⇐ هر موقع خواستی روی عدد مختلط عملیات انجام بدی ⇐ فرم قطبی بنویس

کلی‌ترین فرم: $z = r\,\text{cis}(2k\pi + \theta)$

$$\begin{cases} r^n \text{cis}(\underbrace{2k\pi n}_{\text{حذف} \leftarrow \text{مضرب صحیح } 2\pi} + \theta n) = r^n \text{cis}(n\theta) \\ r^{\frac{1}{n}} \text{cis}\left(\dfrac{2k\pi}{n} + \dfrac{\theta}{n}\right) = r^{\frac{1}{n}} \text{cis}\left(\dfrac{2k\pi+\theta}{n}\right) \end{cases}$$

← دیگه نمی‌شه حذفش کرد!

لزوماً مضرب صحیح 2π نیست!

* پس: هر عدد مختلط ⇐ n ریشه دارد.

هر عدد مختلط، دقیقاً n ریشه دارد که اندازه‌ی تمامی آن‌ها یکسان و تفاوت آن‌ها در فاز آن‌هاست.

اندازه‌ی عوض $\Leftarrow r^{\frac{1}{n}}$

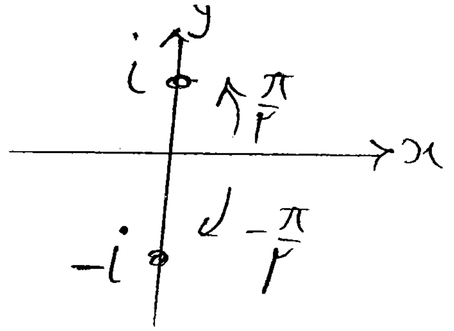
k عوض $\Leftarrow$ فقط فاز عوض می‌شه!

بعبارت دیگر، تمامی ریشه‌های nام یک عدد مختلط بر روی دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع $(r)^{\frac{1}{n}}$ قرار دارند.

* مثال) ریشه‌های معادله‌ی $z^3+i=0$ را بدست آورید.

$$z^3=-i \Rightarrow z=(-i)^{\frac{1}{3}} \xRightarrow{\text{فرم قطبی}}$$

$$-i \to \begin{cases} r=1 \\ \theta=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



هر موقع موهومی محض یا حقیقی محض $\Leftarrow$ بهتره از روی شکل θ را پیدا کنی

$$=\left(\text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}=\text{cis}\left(\frac{2k\pi-\frac{\pi}{2}}{3}\right),\quad k=0,1,2$$

$$k=0 \Rightarrow z=\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

$$k=1 \Rightarrow z=\text{cis}\left(\frac{3\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i$$

$$k=2 \Rightarrow z=\overset{\text{رادیان}}{\text{cis}}\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

* نقطه صفر شروع حل مسأله در ریاضی مهندسی ← اعداد مختلط رو بلد باشی!

* می‌تونه ریشه سوم را راحت نوشت جمع ریشه‌ها صفره!

$-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \leftarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \quad i$

* امکان نداره، سؤال ریاضی مهندسی برخورد کنی و به مشکل اعداد مختلط برخورد نکنی!

* لگاریتم اعداد مختلط

همیشه وقتی روی عدد مختلط عملیات انجام می‌دی به فرم قطبیش بنویسش!

$$z = re^{i(2k\pi+\theta)}$$

جواب کلی: $\boxed{\ln(z) = \ln(r) + i(2k\pi+\theta)}$

جواب اصلی: $\boxed{\ln(z) = \ln r + i\theta \quad -\pi < \theta < \pi}$

* مثال) جواب اصلی عبارت‌های داده شده را بدست آورید

$$w = \ln(\underset{\text{حقیقی}}{-1}) = \cancel{\ln(1)}^{0} + i(\pi) = i\pi$$

پس در اعداد مختلط لگاریتم اعداد منفی هم تعریف شده!

$$w = \ln(\underset{\text{موهومی خالص}}{i}) = \cancel{\ln 1}^{0} + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$$

$$w = \ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$

$$w = i^{i}$$

$$\ln w = i \underbrace{\ln i}_{\frac{i\pi}{2}} = i^{2}\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{w = e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

دو عدد مختلط به توان هم رسیدند به حاصل حقیقی

استاد: من که گفتم i^2 می‌شه -1، اینم اثبات ⇐

اثبات: $i^{2} = i \times i = \sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow$

اشتباه اثبات ⇐ در اعداد مختلط: $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2} \neq \sqrt{z_1 z_2}$

$$\begin{cases} i^{2} = -1 \\ i^{3} = -i \\ i^{4} = 1 \end{cases}$$

نتیجه: هر توانی از i خواستی حساب کنی ⇐ مضارب ۴ آن را حذف کن!

*مثال)

تو ریاضی مهندسی اگه تو سوال دیدید ⇐ اگه $\ln(-1)$ رو دیدید نترسید که چجوری اینو می‌شه حلش کنی!

چطوری $\ln(-1)$ حل کن

کاربرد

$$\int \frac{dz}{e^{z}+1} = \cdots \Rightarrow$$

مثال

$$e^{z}+1 = 0 \Rightarrow e^{z} = -1 \Rightarrow z = \ln(-1)$$

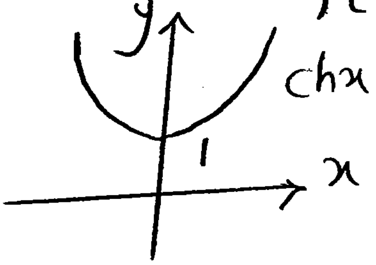
$$z = i(2k\pi + \pi)$$

هر وقت صحبت از جواب اصلی نبود ⇐ جواب کلی ✓

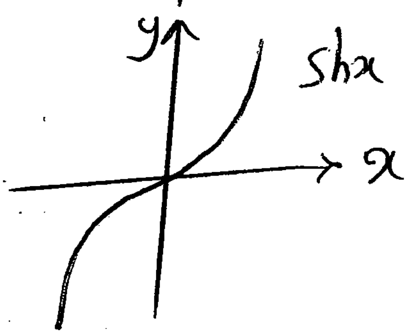
مهم‌ترین بحث امروز :

* مقایسه‌ی روابط مثلثاتی و هایپربولیکی :

$$\begin{cases} e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \\ e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta \end{cases} \xRightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} \cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cosh x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} \\ \sinh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} \end{cases}$$



$$\cos(ix)=\frac{e^{i^2x}+e^{-i^2x}}{2}=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=\operatorname{ch}x$$

در رابطه $(\theta=ix)$

همشون ازبرم همشو بلدم

خیلی مهم و پرکاربرد →

(***)
$$\begin{cases} \cos(ix) = \mathrm{ch}\,x \quad , \quad \mathrm{ch}(ix) = \cos x \\ \sin(ix) = i\,\mathrm{sh}\,x \quad , \quad \mathrm{sh}(ix) = i \sin x \\ \mathrm{tg}(ix) = i\,\mathrm{tgh}\,x \quad , \quad \mathrm{tgh}(ix) = i\,\mathrm{tg}\,x \end{cases}$$

طرز حفظ کردنو یادت میدم!

۳ کاربرد دارند ← جلسه‌ی بعد میگم!

* i نقش مهمی دارد ⇐ هویت را هم عوض میکنه: مثلثاتی ← هایپربولیک

هایپربولیک ← مثلثاتی

مثلا $\sin x$ رو برحسب هایپربولیک.

$$\sin x = -i\,\mathrm{sh}(ix)$$
$$\mathrm{tgh}\,x = -i\,\mathrm{tg}(ix)$$

$ix \leftarrow x$

تکلیف علامت چی میشه؟ اگر دو طرف تساوی نوشتیم ← علامت + ⇐ $i \sin x = \mathrm{sh}(ix)$

اگر یک طرف نوشتیم ← علامت منفی ⇐ $\sin x = -i\,\mathrm{sh}(ix)$

پس اینجا مینویسیم

$\mathrm{tgh}\,x$ هم همینطور!

$$\cos x = ch(ix)$$

cos، ch نداره، کسی استفاده نمی‌کنه!

$$tg\,h(ix) = i\; tg(x)$$

یا

$$-i\; tg\,h(ix) = tg(x)$$

* جلسه‌ی بعد: نیم ساعت: اتمام اعداد مختلط ← ۳ تا کاربرد!

وارد توابع مختلط می‌شیم ← کتب نگاشت‌ها!

* بخش ۱، از فصل دوم اینجا مطالعه کنید!!!

* تست‌های تبدیل فوریه حل!

از هفته‌ی بعد: هر بخش ← ۵ جلسه! ← هر جلسه تست‌ها هم حل میشه

* ریاضی مهندسی - دوشنبه - ۴/۶/۹۲ - جلسه‌ی هفتم

$$\begin{cases} \cos(ix) = ch(x) \quad , \quad ch(ix) = \cos x \\ \sin(ix) = i\,shx \quad , \quad sh(ix) = i\sin x \\ tg(ix) = i\,tghx \quad , \quad tgh(ix) = i\,tgx \end{cases}$$

① بازسازی اتحادهای هایپربولیکی با استفاده از اتحادهای مثلثاتی و برعکس

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 ix + \sin^2 ix \Rightarrow ch^2x - sh^2x = 1$$

کار وسطی اضافه ← حذفش می‌کنیم!

$$\begin{cases} \cos x \xrightarrow{\cos(ix)} chx \\ \sin \xrightarrow{\sin(ix)} i\,shx \\ tg\,x \xrightarrow{tg(ix)} i\,tghx \end{cases}$$

* $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \Rightarrow ch^2x + sh^2x = ch2x$

* $1 + tg^2x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 - tgh^2x = \dfrac{1}{ch^2x}$

* $\sin 2x = 2\sin x\cos x \Rightarrow \cancel{i}\,sh2x = 2\cancel{i}\,shx\,chx$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \Rightarrow -sh^2 x = \frac{1-ch 2x}{2}$$

$$sh^2 x = \frac{ch 2x - 1}{2}$$

$$ch^2 x + sh^2 x = \cosh 2x$$

برعکس هم میشه:

$\xrightarrow{\text{تبدیل مثلثاتی}} \cos^2 + i^2 \sin^2 = \cos^2 - \sin^2 = \cos 2x \xrightarrow{\text{جایگزینی}} \cosh 2x$

پس روابط مثلثاتی حفظ ⇐ روابط هایپربولیکی هم ثبت میکند.

در ریاضیات: مطلب جدید مثل عبور از دره است (الغرض که میرن تو معمولا ازش میوفتن ☺)
وقتی حتی از دور می‌بینی یه پل هست که استفاده کنی!
گاهاً ۱۰ تا دره ۷ تاشو حتی تو دره ۱۳ تاشو پل ⇐ حتماً به نظر کنید!
وقتی جای مطلب جدید یاد گرفتی: حواست رو بیشتر جمع کن!

۲ بسط توابع

$$\sin(z) = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$$

$$= \sin x \, ch y + i \cos x \, sh y$$

وسطی‌ها فاصله ⇐ حذف.

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \, ch y - i \sin x \, sh y$$

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch}(x+iy) = \operatorname{ch}x \overset{\operatorname{ch} iy}{\cos y} + i \operatorname{sh}x \overset{\operatorname{sh} iy}{\sin y}$$

یا

$$\cos(iz) = \cos(ix-y) = \operatorname{ch}x\cos y + i\operatorname{sh}x\sin y$$

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(x+iy) = \operatorname{sh}x \overset{\cosh iy}{\cos y} + i\operatorname{ch}x \overset{\sinh iy}{\sin y}$$

۳) حل معادلات هایپربولیکی

$$\operatorname{sh} z + i = 0 \Rightarrow -i\sin(iz) + i = 0$$

$$\sin(iz) = 1 \Rightarrow iz = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$z = -i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = 0$$

$$\cos^2 iz - \sin^2 iz = 0 \Rightarrow \cos(2iz) = 0$$

$$2iz = (2k-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow z = -j(2k-1)\frac{\pi}{4} = j(2k-1)\frac{\pi}{4}$$

با هم فرقی ندارند چون ۲k−۱ هم مثبت هم منفی!

$$\begin{cases} z = k\pi, & k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots \\ z = -k\pi, & k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots \end{cases}$$

چون k هم مثبت هم منفی، با هم فرق ندارند

* اول یه سوال مطرح کنیم که آیا $\sin z = 2$ جواب دارد؟

$$\sin(z) = \underset{-1 \le \sin x \le 1}{\sin x}\, ch\,y + i \cos x\, sh\,y$$

$$1 < ch\,y < \infty$$

$$-\infty < \quad < \infty$$

* پس $\sin z$ می‌تونه بزرگتر از ۱ باشه!

$\Leftarrow$ پس $\sin z = 2$ جواب دارد!

JozveBargh.ir

* توابع مختلط

روش کارشناسی سری فوریه. اول روش کلی. این روش کلی تضمین کننده است. سپس روش کلی کوتاه هم یاد میگیریم که کوتاه‌تر و ساده‌تر حل کنیم. در این بخش تفاوت ما با بخش های قبل این است ⇐ هر بخش که شروع میشه، به time احتیاج داریم درک و ملکشدن آن مسئله! در این فصل علاوه بر اینکه نیاز داریم روش بدانید باید ملکه را هم بدانید یا باید پل بزنید بین توابع حقیقی و توابع مختلط ایجاد شود! که راحت‌تر به از فضای حقیقی به فضای مختلط آمد.

سراغ تابع حقیقی شروع می کنیم. در ریاضیات قدیم دو شاخه کلی دارد: ریاضیات پایه و ریاضیات تخصصی.

ریاضیات پایه براساس نیاز عمومی بشر ایجاد شده، ریاضیات تخصصی براساس نیاز شخصی ریاضی دادن ایجاد شده است.

مثلاً نگارش: نیاز عمومی، تابع هم نیاز عمومی، اما ریاضیات تخصصی اسطوره نیست ⇐ مثلاً فوریه داشت روی معادله موج کار می کرد و این راه حل فوریه را برای اینکه مشکل خودشو حل کنه ارائه داد، یا لاپلاس هم همینطور، اما الان که نگاه میکنید اینها تخصصی که اسطوره شدند. دانشمند برای اینکه مشکل شخص مسئله خودشو حل کنه ⇐ ایده ⇐ بعد ایده سطحش را ارتقا داد.

انتظار میره حداقل درک درستی از ریاضیات پایه داشته باشید. تابع یکی از همین مفاهیم است. مثلاً هوای

برای تهران ⇐ فضای سبز، تعداد ماشین ← یه سری ورودی و خروجی: بررسی میکنید کدام اثر داره.

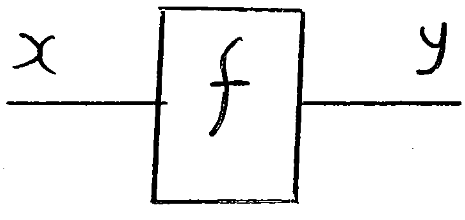
مثال مهندسی = بیشترین مصرف سوخت هواپیما در زمان اوج گرفتن!

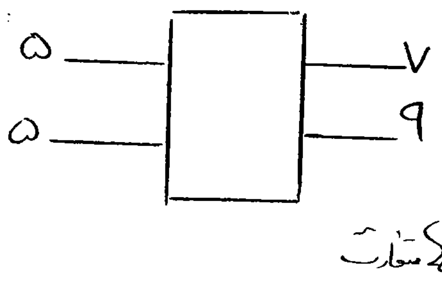
مسیری که در زمان اوج گرفتن، کم‌ترین مصرف سوخت ⇐ میشه باید یه سری معادلات ریاضی بنویسیم:

فیلتر یه سری پارامتر ورودی و یه سری پارامتر خروجی ⇐ یعنی هر کدام ورودی که تغییر بدی خروجی چی میشه ⇐ همان ایده تابع!

"تابع سیستمی است که به ازای ورودی مشخص، خروجی مشخص تولید کند"

تابع حقیقی، تابعی است که ورودی و خروجی آن عدد حقیقی باشد





⇐ ورودی یکسان باید خروجی یکسان بشود!

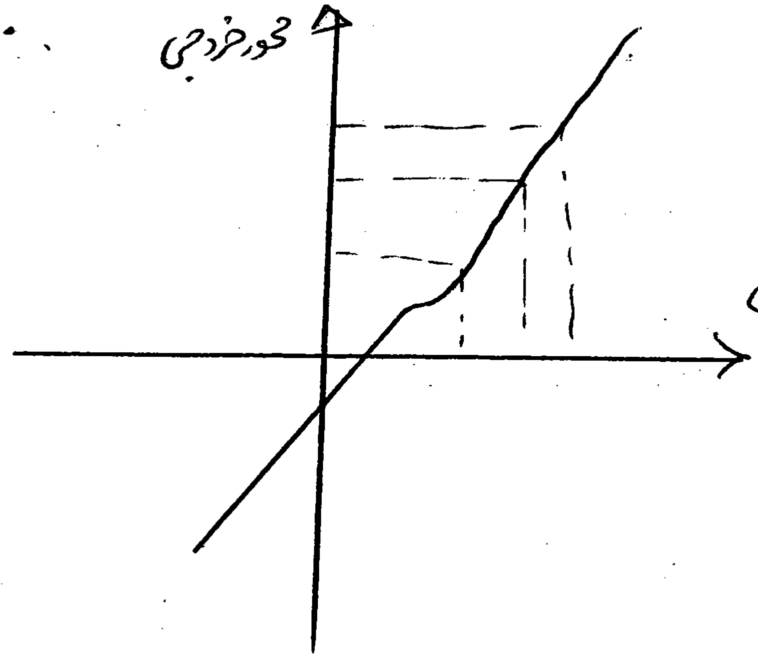
تناقض: ورودی یکسان ⇐ خروجی متفاوت

$$\left(\overset{\text{ورودی}}{x}\ ,\ \overset{\text{خروجی}}{y}\right)$$

چون ورودی عدد حقیقی ⇐ برای نمایش عدد حقیقی یک بعد نیاز داریم ⇐ پس ما خط را برای ورودی یک عدد ورودی محور x ورودی
" " " " خروجی " " " " خروجی

به ازای هر ورودی و خروجی ⇐ یک نقطه در صفحه مختصات

حالا این نقاط ورودی و خروجی زیاد ⇐ نمودار تابع : مجموعه‌ای از ورودی‌ها و خروجی‌ها



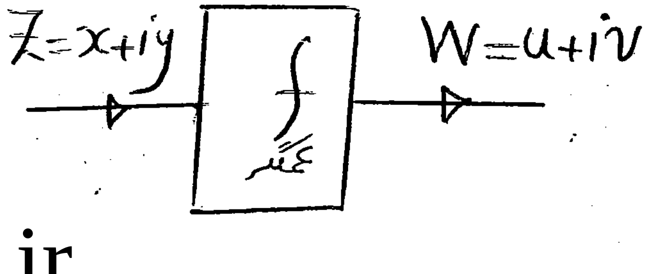
چرا نمودار اهمیت دارد؟

در ریاضی : وقتی نمودار تابع داریم ⇐ مانند بررسی پیوستگی، حل معادلات، مشتق، ... را با نگاه داریم

در مهندسی : وقتی نمودار داریم ⇐ رفتار سیستم را داریم : به ازای تغییرات ورودی ⇐ تغییرات خروجی عملکرد سیستم را نشان می‌دهیم.

پس نمودار بسیار اهمیت دارد!

تابع مختلط : تابعی است که ورودی و خروجی آن عدد مختلط باشد

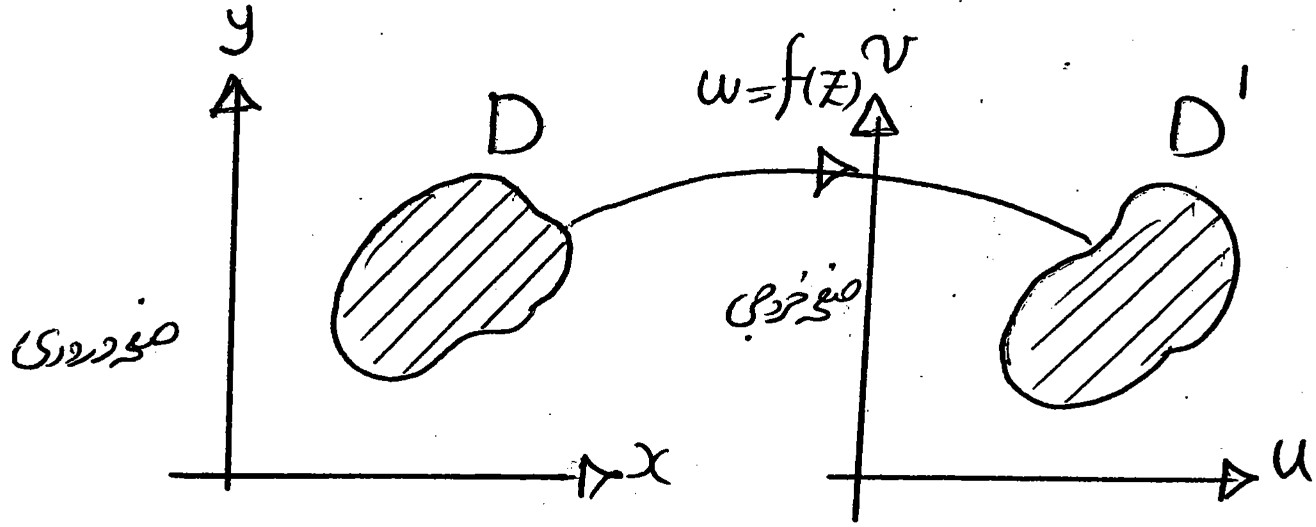


* چون تابع مختلط ۴ بعدی است ⟸ امکان رسم تابع مختلط وجود ندارد

(ورودی ۲ بعد، خروجی = ۲ بعد)

* آیا راهی هست که هدفی را که در رسم تابع داشتیم، تا حدی پوشش دهد؟ خوشبختانه پاسخ مثبت است.

پیشنهاد این است که فضای ورودی را جداگانه و فضای خروجی را جداگانه!



اگر ورودی در فضای D تغییر کند، خروجی در فضای D' تغییر می‌کند

اگر دامنه‌ی f، ناحیه‌ی D باشد، برد f، ناحیه‌ی D' است

نگاشت ناحیه‌ی D توسط $w=f(z)$ ناحیه‌ی D' است.

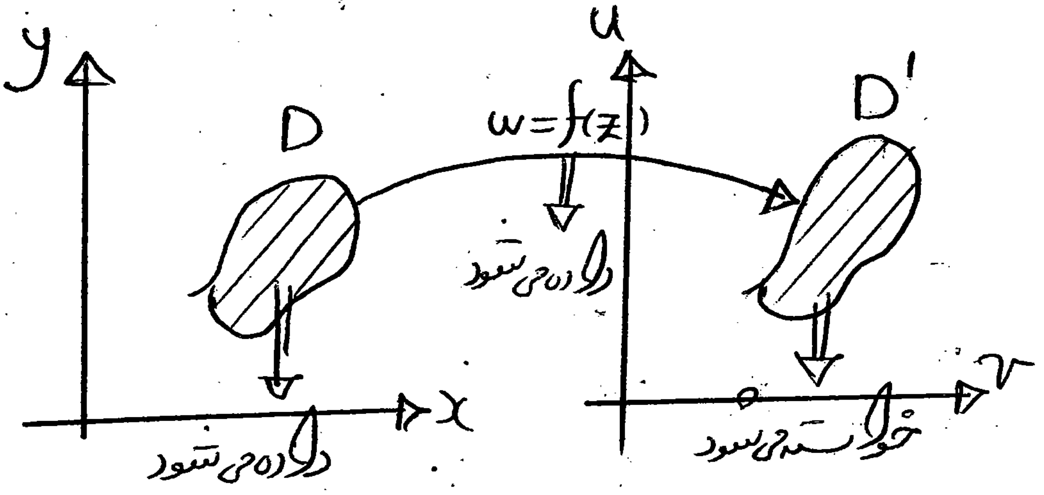
اینجا چون رسم نمودار را از دست داده‌ایم، نگاشت این خلأ را پر می‌کند، همین دلیل بسیار اهمیت دارد!
هیچ تصویری از اعداد مختلط در ذهن نمی‌شه داشت ⟸ فقط تحلیلی می‌شه کار کرد!

نگاشت: فضای ورودی داده شده و $w=f(z)$ داده شده ← فضای خروجی را خواسته!

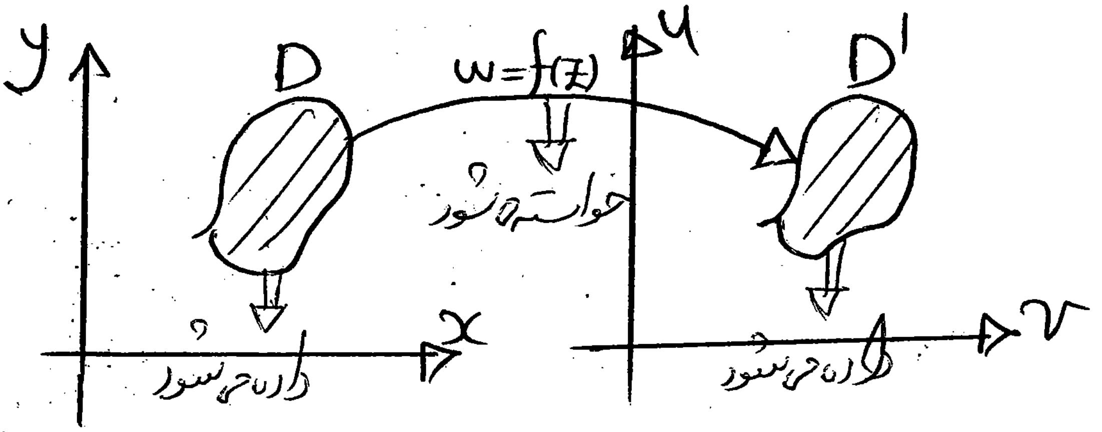
اگر به روشی که گفته شده دقت کنید ⟸ ۹۵ درصد تست‌ها را می‌توانید ذهنی بزنید
نکته جالب‌تر: روشی که کوتاه‌تر از سری فوریه است
تست‌های نگاشت ۳۰s حل می‌شن
لازمه‌ی آن این است که روندی که گفته می‌شود را یاد بگیری!

(۵۰ درصد ریاضی مهندسی: توابع مختلط و نگاشت بخش مهم توابع مختلط است)

* در بحث نگاشت دو مدل سؤال طرح می شود :



① * نگاشت ناحیه‌ی D توسط w=f(z) را بدست آورید



② * کدام تابع ناحیه D را به D' تبدیل می کند (یا تصویر می کند) (نگاشت چه؟)

[اگه خروجی بدن w=f(z) ⇐ دیگه نخوان ⇐ همون ① است، چون داری f(z) را بدست بیاری و ... از ورودی خروجی ⇐ دیدی!

* روش کلی محاسبه‌ی نگاشت یک ناحیه توسط w=f(z) :

① معادله‌ی مرزها را می نویسیم

(عموماً مرز یک ناحیه خط اند یا دایره! اگر مرز ناحیه را خود مسأله معادله را می دهد)

② از رابطه‌ی w=f(z) سعی می کنیم u و v را برحسب x و y و یا x و y را برحسب u و v بدست آوریم

۸۰

$$\begin{cases} w=u+iv \\ z=x+iy \end{cases}$$

* سؤال: در شرایط یکسان کدام بهتر می‌بود: هم u و v برحسب x و y و هم x و y برحسب u و v، کدام را انتخاب می‌کنید؟

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{u-v} \\ y=\dfrac{v^2}{u+v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>0 \\ y>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{u-v}>0 \\ \dfrac{v^2}{u+v}>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{x-y} \\ v=\dfrac{y^2}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ y>1 \end{cases}$$

* سازگاری بدست آوردن تغییرات u و v با سازگاری به دست آوردن پیچیده است!

* پس اگر x و y برحسب u و v باشد بهتر است!

* در شرایط یکسان همواره بهتر است x و y را برحسب u و v بدست آوریم

* سؤال: اگر معادله‌ی مقاله ورودی برحسب Z باشد! آیا نیازی هست x و y را نیاز هست برحسب u و v بدست آورد؟ نیازی نیست!
یا برعکس

هدف این است که با توجه به تغییرات Z راجع به w صحبت کنیم ⇐ حجم تغییرات خروجی را هم تغییر دادیم

JozveBargh.ir

* معادلات فضای ورودی
- در مختصات دکارتی : $x^2+y^2=a^2$
- در مختصات قطبی : $r=a$
- برحسب z : $|z|=a$

* معادلات فضای خروجی
- در مختصات دکارتی : $u^2+v^2=a^2$
- در مختصات قطبی : $r=a$
- برحسب w : $|w|=a$

اگر معادله ورودی برحسب z داده شود ، نیازی به محاسبه‌ی u و v برحسب x و y دیگر عکس نمی‌باشد بلکه کافی است از رابطه‌ی $W=f(z)$ ، z را برحسب w بدست آورده و در معادله داده شده ، جایگذاری کنیم.

*مثال) نگاشت ناحیه $|z-1|<1$ توسط $w=\dfrac{z}{z-2}$ را بدست آورید.

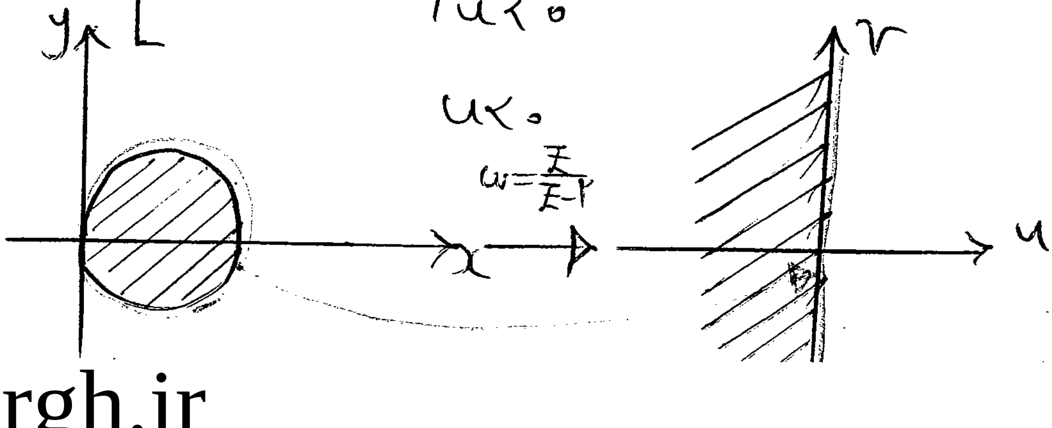
$$wz-2z=z \Rightarrow z(w-1)=2w \Rightarrow z=\frac{2w}{w-1}$$

$$|z-1|<1 \Rightarrow \left|\frac{2w}{w-1}-1\right|<1 \Rightarrow \left|\frac{w+1}{w-1}\right|<1 \xrightarrow{\text{ذهنی}} u<0$$

خاصیت $\Rightarrow$
$$|w+1|<|w-1|$$
$$|u+iv+1|^2<|u-iv-1|^2$$

$$* \quad |f(z)|=\sqrt{Re^2(f(z))+Im^2(f(z))}$$

$$(u+1)^2+v^2<(u-1)^2+v^2$$
$$u^2+2u+1+v^2<u^2-2u+1+v^2$$
$$2u<-2u$$
$$4u<0$$
$$u<0$$



* پس نیازی نشد u و v را برحسب x و y پیدا کنیم!

۳) نگاشت مرزها را بدست آورده و رسم می‌کنیم

۴) نگاشت مرزها را به کل ناحیه تعمیم می‌دهیم

** نگاشت مرز ورودی، همواره مرزهای خروجی را تشکیل می‌دهد

حمد طبسی

* ایده:

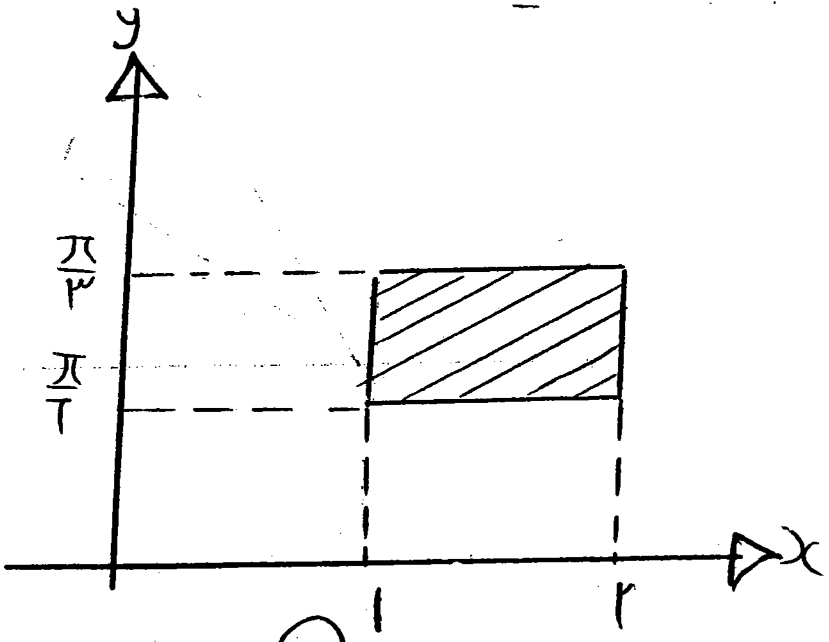
نگاشت‌های مقدماتی:

- $w = e^{z}$
- $w = \sin z$ یا $\cos z$ یا $\operatorname{sh} z$ یا $\operatorname{ch} z$
- $w = \frac{1}{z}$
- $w = \frac{az+b}{cz+d}$
- $w = \ln z$
- $w = z + \frac{1}{z}$

نگاشت‌های ترکیبی •

اصل درس نگاشت‌های مقدماتی است، بیشتر به آنها می‌پردازیم! اما باید یاد بگیریم که ترکیب کردن مطلب‌ها
اکثر تست‌ها نگاشت‌های ترکیبی
پس اول اصول را درست حل می‌کنیم و بعد می‌رسیم به تست!

* مثال) نگاشت ناحیه‌ی هاشور خورده توسط $W=e^{z}$ را بدست آورید.



③

①
$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow \begin{cases} u=e\cos y \\ v=e\sin y \end{cases} \rightarrow u^2+v^2=e^2 \\ x=2 \Rightarrow \qquad \rightarrow u^2+v^2=e^4 \\ y=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} u=e^x\cos(\frac{\pi}{2}) \\ v=e^x\sin(\frac{\pi}{2}) \end{cases} \rightarrow v=u\,tg(\frac{\pi}{2}) \\ y=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \qquad \rightarrow v=u\,tg(\frac{\pi}{3}) \end{cases} \Rightarrow$$

② $u+iv=e^{x+iy}=e^{x}e^{iy}=e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y$

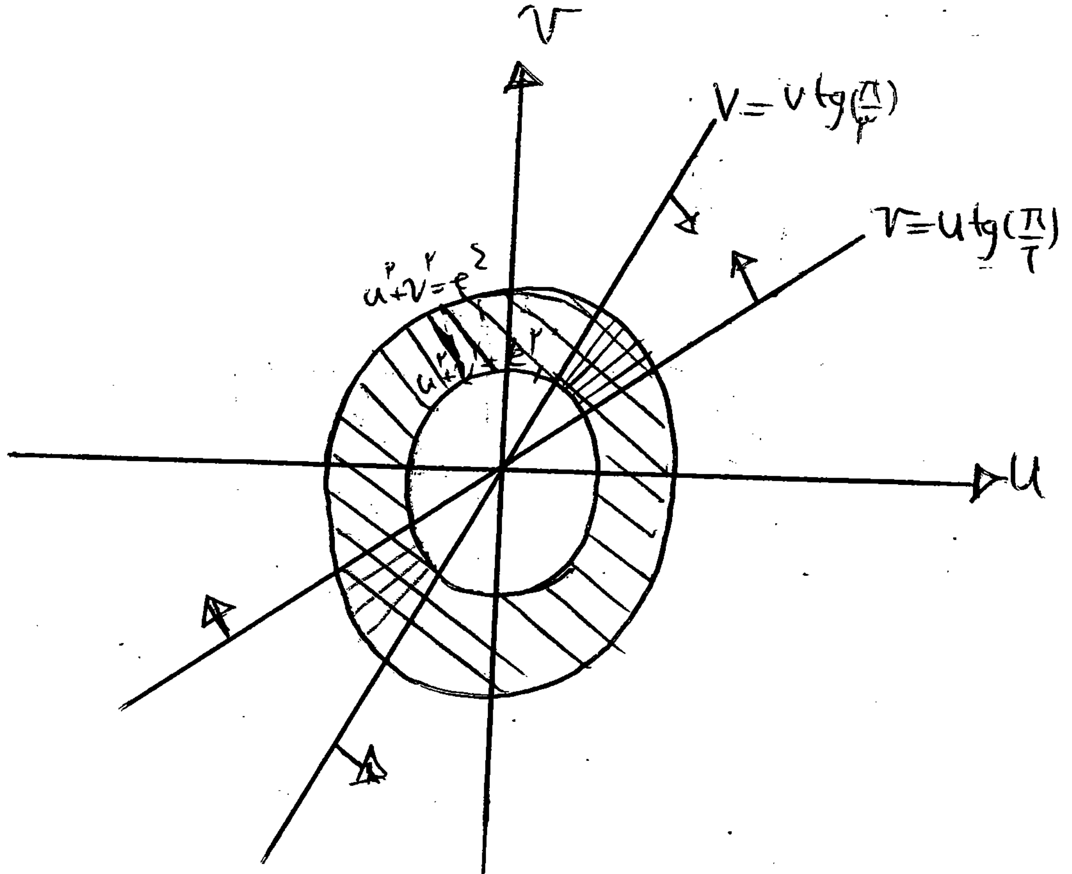
$$\Rightarrow \begin{cases} u=e^x\cos y \\ v=e^x\sin y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=t+2 \\ y=\frac{t^2}{1-t} \end{cases}$$

* سؤال: باید پارامتر t را از بین ببرد

* بالا هم هدف همینه ← پس باید پارامتر و حذف شود

x



از e^4 کمتر — از e^2 بیشتر

از ۱ بیشتر، از ۲ کمتر

$*\ e^2, e^4$ بین دوایر ⟸ بین $x=1$ و $x=2$

$*\ u\,tg\frac{\pi}{3} , u\,tg\frac{\pi}{6}$ بین خطوط ⟸ بین $\theta=\frac{\pi}{6}$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$

از این کمتر — از این بیشتر — از این کمتر — از این بیشتر

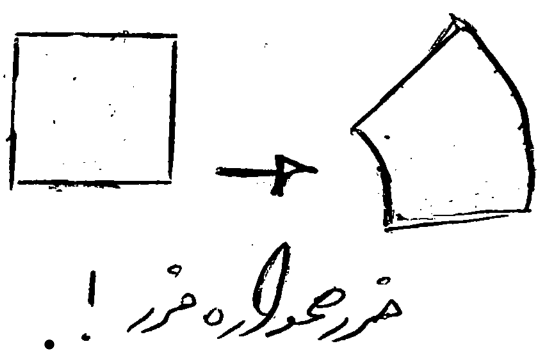
اینجا جواب نیست!

چون که شکل محدوده تشکیل نمی‌شه!

چون u و v مثبتند!

بین خطوط بالا نیست!

از دو اشتراک هم شکل ت ⟸ اصلاً خط اشتراکی نیست!



مرز محدوده، مرز!

$$W=e^{f(z)} \Rightarrow \begin{cases} |w|=e^{Re(f(z))} \\ \arg(w)=Im(f(z)) \end{cases}$$

اثبات :
$$e^{Re(f(z))+i\,Im(f(z))}=\underbrace{e^{Re(f(z))}}_{\equiv\, r}\, e^{i\,\overbrace{Im(f(z))}^{\equiv\,\theta}} \qquad e^{i\theta}$$

① $W=e^{z} \Rightarrow \begin{cases} |w|=e^{x} \\ \arg(w)=y \end{cases}$

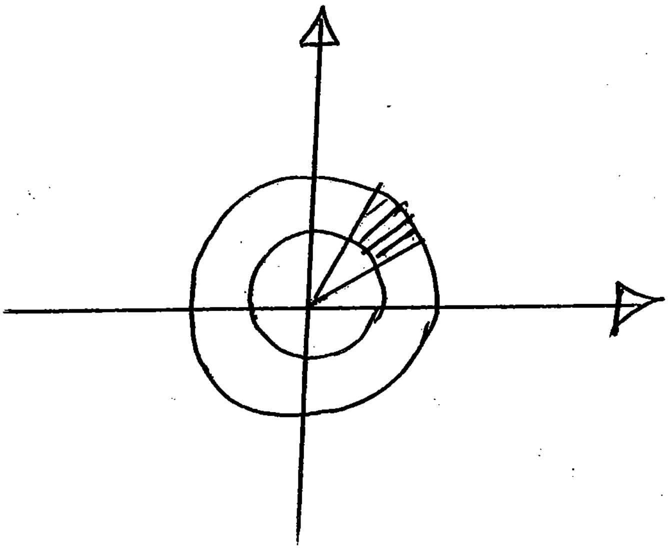
② $w=e^{z^2} \Rightarrow \begin{cases} |w|=e^{x^2-y^2} \\ \arg(w)=2xy \end{cases}$

③ $W=e^{\sin z} \Rightarrow \begin{cases} |w|=e^{\sin x\, ch y} \\ \arg(w)=\cos x\, sh y \end{cases}$

* جالب این که از اینجا قسمت حقیقی و موهومی جدا ⇐ اندازه و آرگومان !

راه حل کوتاه مثال:

$$\begin{cases} |w| = e^{x} \quad , \quad 1 < x < 2 \Rightarrow e < |w| < e^{2} \\ \arg(w) = y \quad , \quad \frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \arg(w) < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

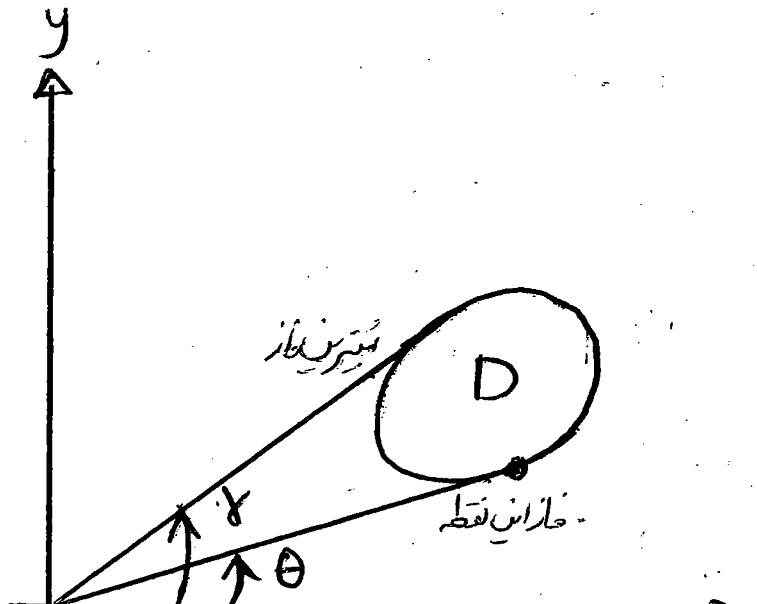


تو تست‌ها از آرگومان شروع ⟸ تو گزینه‌ها نگاه کن ⟸ هر گزینه‌ای که بین $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{3}$ نبود حذف!

حالا اگه دو تا گزینه بود که آرگومان بین $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{3}$ ⟸ حالا برو سراغ اندازه‌ها!

امکان نداره سوال نگاشت e^z بیش از ۱ ثانیه زمان ببرد!

پس برای نگاشت e^z هیچ وقت رو شکل نیاز نیست!

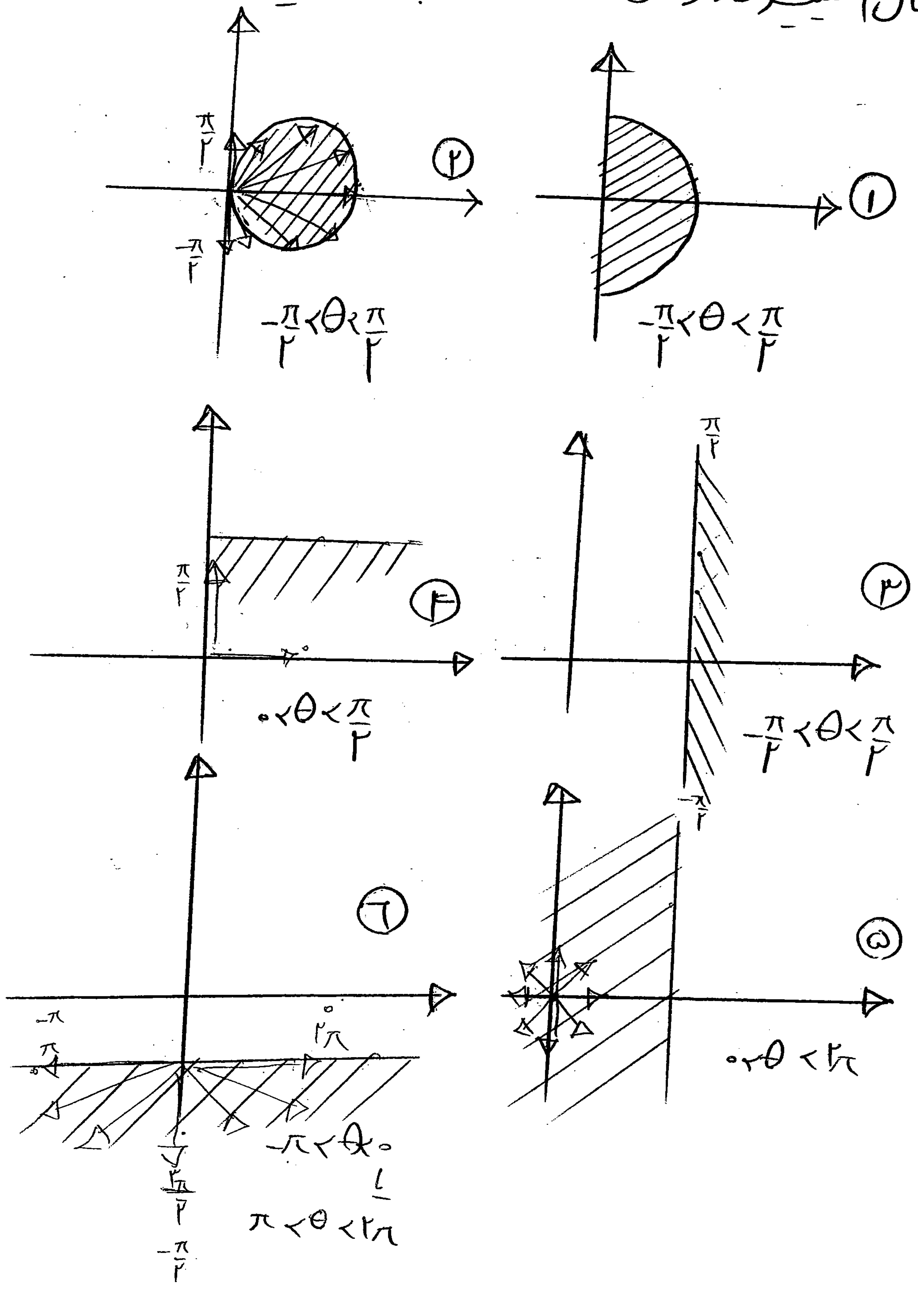


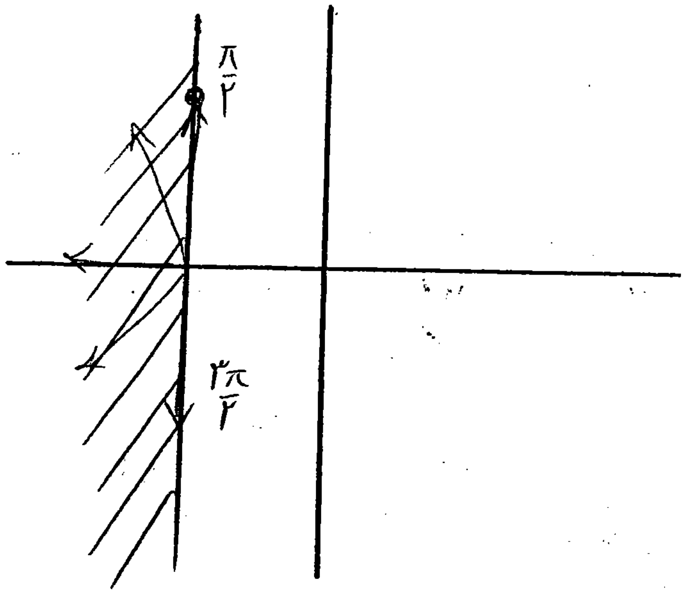
$\theta <$ تغییرات $< \gamma$

$\theta < \operatorname{Arg} D < \gamma$

JozveBargh.ir

* مثال: تغییر فاز نواحی داده شده را بدست آورید.





$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

جلد دوم : ص ۱۷۱ ، تست ۵۶ ص ۱۸۶ : جلد اول

تست کامپیوتر ۸۲)

$0 < \frac{\pi}{2} y < \pi \Leftarrow 0 < y < 2 \Leftarrow \operatorname{Arg} w = \frac{\pi}{2} y$

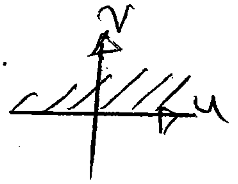
$|w| = e^{\frac{\pi}{2} x} \Rightarrow 0 < |w| < \infty$ ⇐ گزینه ⑤ ع

گزینه ① ⇐ $-\pi < < 0$ ⇐ ✗

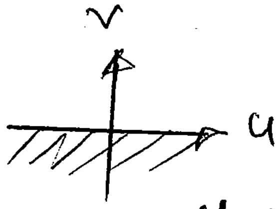
② ⇐ $0 < < \pi$ ⇐ ✓

③ ⇐ $-\frac{\pi}{2} < < \frac{\pi}{2}$ ⇐ ✗

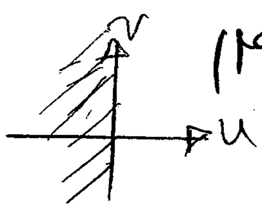
④ ⇐ $\frac{\pi}{2} < < \frac{3\pi}{2}$ ⇐ ✗



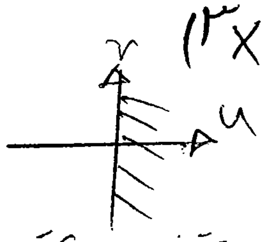
۲) ✓



۱) ✗

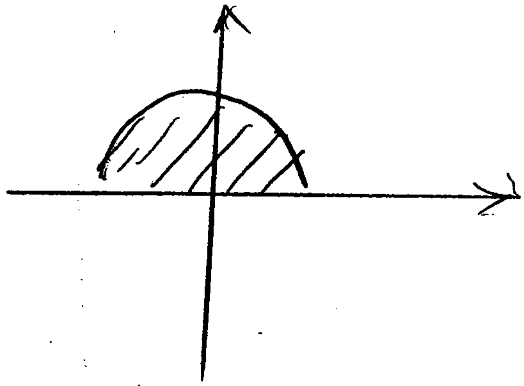


۴) ✗



۳) ✗

اگر تو تا گزینه ۲ ⇐ اگر تو مال $0 < < \pi$ ⇐ فقط گزینه ⑤ درسته!



۱۵) X

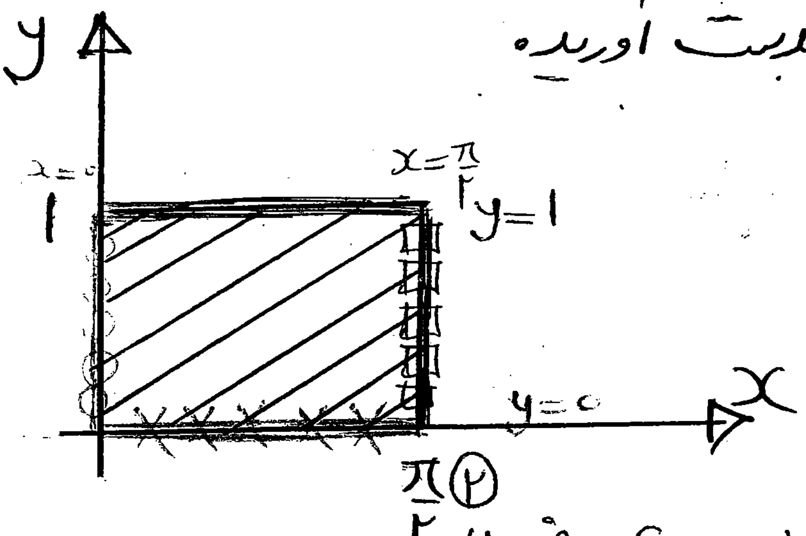
* اندازه محدود ⇐ غ

$$\arg w = \frac{\pi}{2} y \Rightarrow 0 < \arg w < \pi \Rightarrow 2\checkmark$$

$$0 < y < 2$$

* مثال نگاشت ناحیه هاشور خورده توسط $W = \cos Z$ را بدست آورید

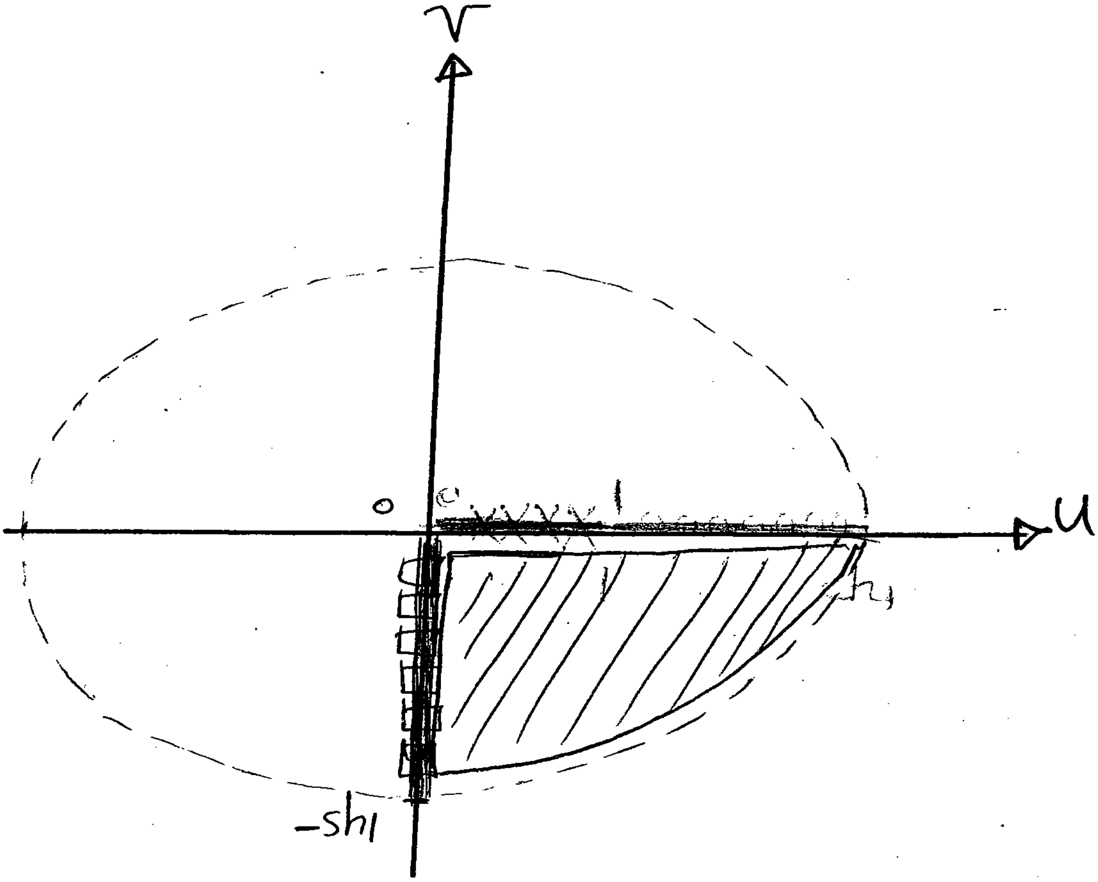
(در باره روش کلی)



۲) $u + iv = \cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$

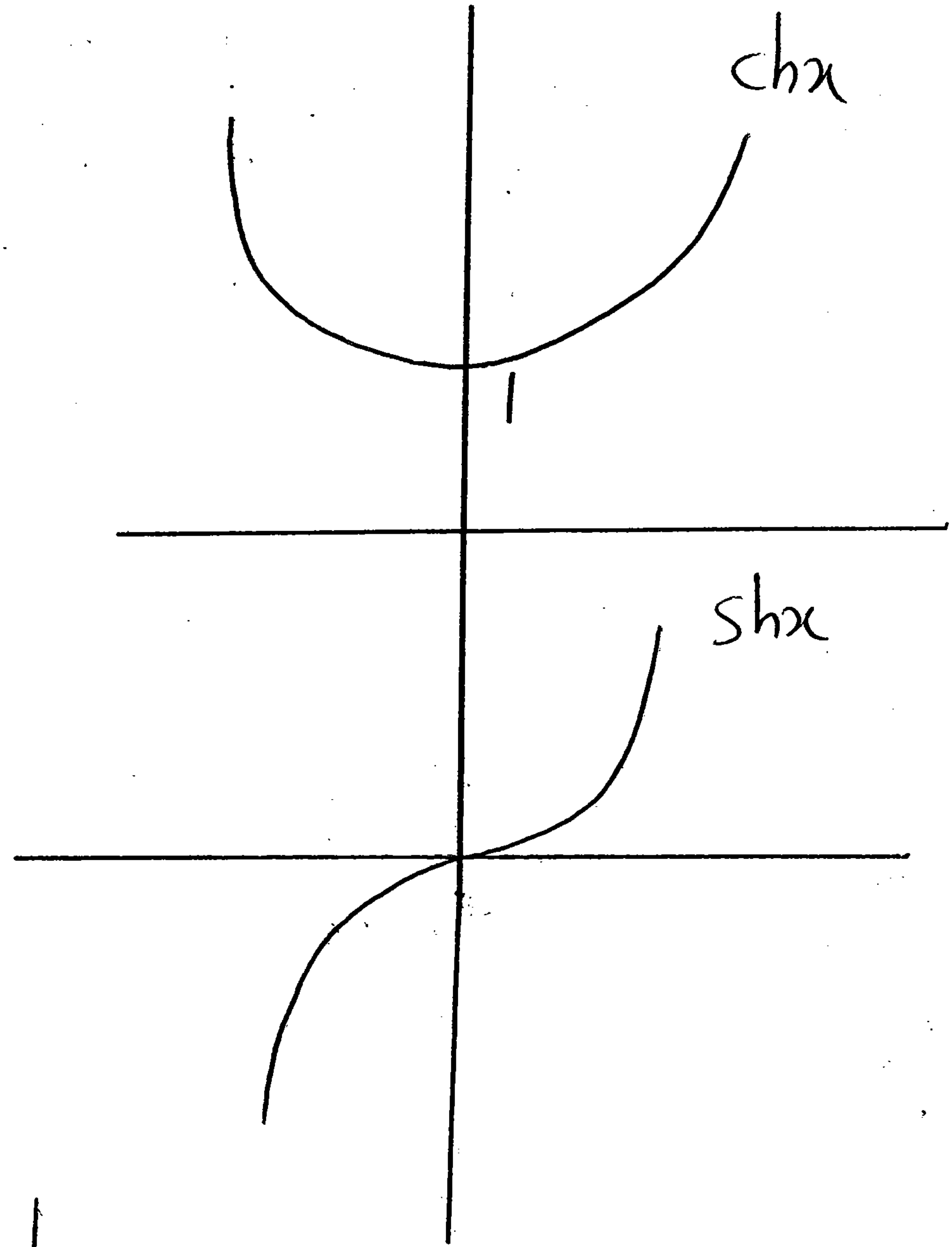
۳) $\Rightarrow \begin{cases} u = \cos x \operatorname{ch} y \\ v = -\sin x \operatorname{sh} y \end{cases}$

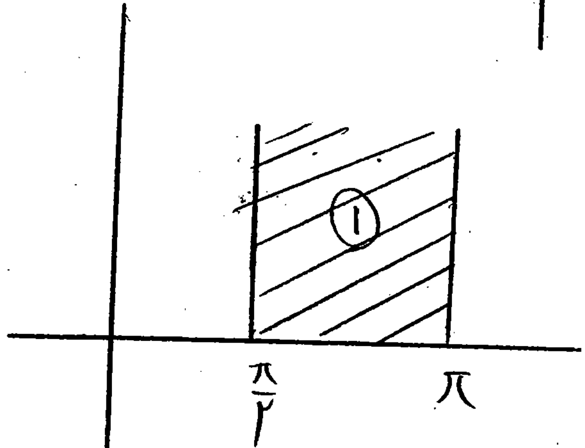
۱)
$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = \cosh y \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < y < 1 \Rightarrow 1 < \cosh y < \cosh 1 \Rightarrow 1 < u < \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = -\operatorname{sh} y \end{cases} \Rightarrow 0 < y < 1 \Rightarrow -\operatorname{sh}1 < -\operatorname{sh} y < 0 \Rightarrow -\operatorname{sh}1 < v < \\ y = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = \cos x \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos x < 1 \Rightarrow 0 < u < 1 \\ y = 1 \Rightarrow \begin{cases} u = \cos x \operatorname{ch}1 \\ v = -\sin x \operatorname{sh}1 \end{cases} \Rightarrow \frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 1} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 1} = 1 \end{cases}$$



* ۲ تا انتخاب دارم D یا ⇐ عددگذاری و حل!

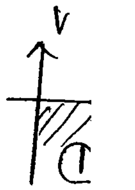
* نگاشت نیم نوارهای موازی محور قائم به عرض یک ربع دایره مثلثاتی توسط $\sin z$ و $\cos z$ همواره یک ربع مختصات دکارتی در خروجی است که برای تعیین ربع کافی است، علامت u و v را تشخیص دهم

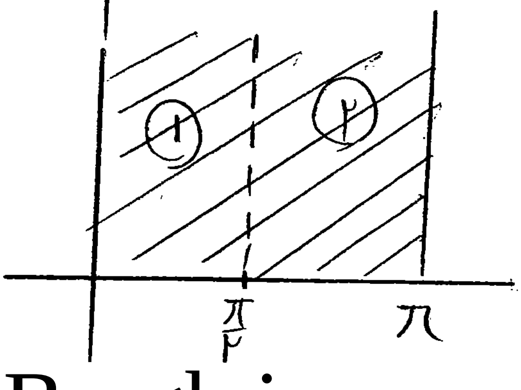




همیشه مثبت ← ch y

$$w = \sin z = \begin{cases} u = \sin x \operatorname{ch} y \\ v = \cos x \, \underbrace{\operatorname{sh} y}_{y>0 \Rightarrow \operatorname{sh} y>0} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u>0 \\ v<0 \end{cases}$$





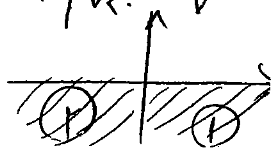
$$w = \cos z = \begin{cases} u = \cos x \operatorname{ch} y \\ v = -\sin x \operatorname{sh} y \end{cases} \longrightarrow$$

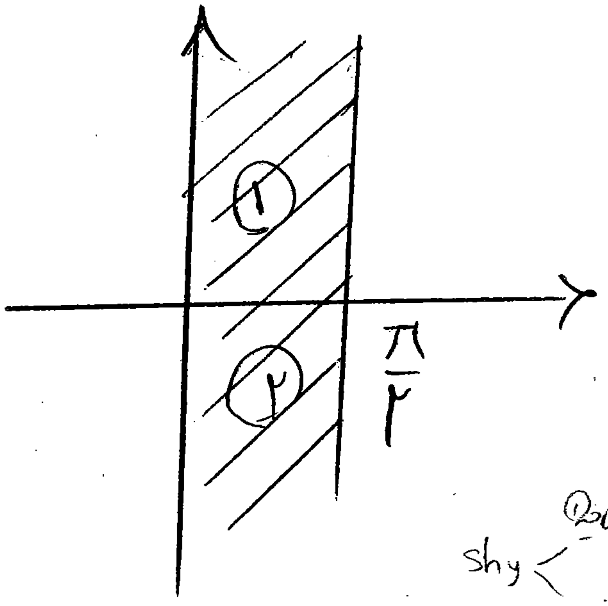
$(y>0)$

$\operatorname{sh} y>0$

$$1 \rightarrow \begin{cases} u>0 \\ v<0 \end{cases}$$

$$۲ \rightarrow \begin{cases} u<0 \\ v<0 \end{cases}$$

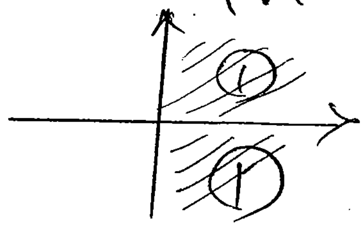




$$w = \sin z = \begin{cases} u = \sin x \, \cancel{ch\, y} \\ v = \cos x \, sh\, y \end{cases}$$

① $\begin{cases} u>0 \\ v>0 \end{cases}$

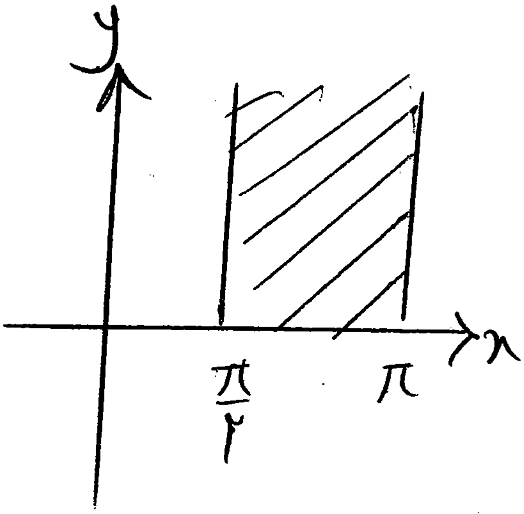
② $\begin{cases} u>0 \\ v<0 \end{cases}$



$sh\,y \begin{cases} \text{ناحیه ①}\ y>0 \Rightarrow sh\,y>0 \\ \text{ناحیه ②}\ y<0 \Rightarrow sh\,y<0 \end{cases}$

جلد دوم ، ص ۱۶۱ ، سؤال ۱۱

* برق ۷۷)



$u = -\cos x \, c\cancel{h}y \quad u>0$

$v = \sin x \, s\cancel{h}y \quad v>0$

۱) ربع اول

۲) ربع دوم

۳) نیم نوار

۴) نیم نوار

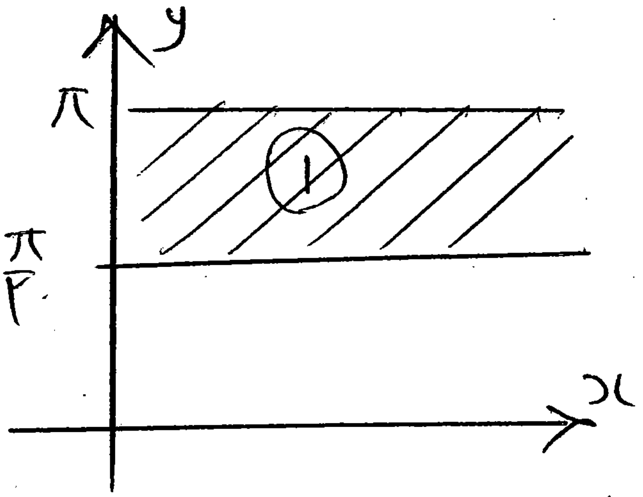
$\{ y \geq 0 \ , \ 0 \leq x \leq 1 \}$

$\{ y \geq 0 \ , \ -1 < x < 0 \}$

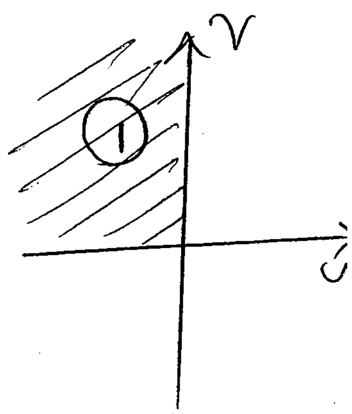
۸۷

* نگاشت نیم نوارهای موازی محور افقی به عرض یک ربع دایره مثلثاتی توسط chz و shz همواره یک ربع مختصات دکارتی در خروجی است که برای تعیین ربع کافی است علامت u و v را تشخیص دهیم

* مثال) نگاشت ناحیه‌ی هاشور خورده توسط $w=chz$ را بدست آورید



$$\begin{cases} u = ch\,x\,\cancel{\cos y} \\ v = sh\,x\,\cancel{\sin y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u<0 \\ v>0 \end{cases}$$



* نگاشت توسط $W=\frac{1}{z}$

(اولین نگاشت که x,y برحسب u,v)

$$z=\frac{1}{w} \Rightarrow x+iy=\frac{1}{u+iv}\times\frac{u-iv}{u-iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

$$f(z)\,\overline{f(z)}=|f(z)|^2$$

در ضرب دو مزدوج در هم ⇐ مخرج به توان ۲ اندازه! } voice

نگاشت توسط $W=f(z)$:

- محاسبه x و y برحسب u و v امکان‌پذیر است
  - ⇐ هیچ محدودیتی در معادله مرزی فضای ورودی وجود ندارد
- محاسبه x و y برحسب u و v امکان‌پذیر نیست (پیچیده)
  - ⇐ ۱) اگر فضای ورودی مختصات کارتزین باشد معادله مرزی فقط $\begin{cases} x=\text{مقدار ثابت} \\ y=\text{مقدار ثابت} \end{cases}$ می‌توانند باشد
  - ⇐ ۲) اگر فضای ورودی مختصات قطبی باشد معادله مرزی فقط $\begin{cases} r=\text{مقدار ثابت} \\ \theta=\text{مقدار ثابت} \end{cases}$ می‌توانند باشد

۸۸

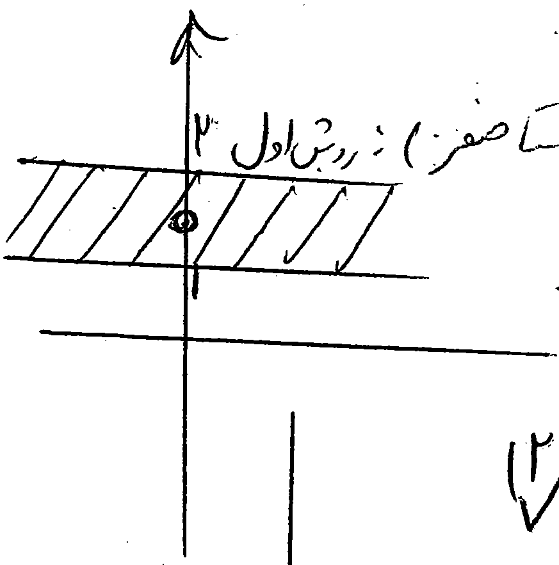
بلادم ص ۱۶۷، س ۳۷

* مغناطیس ۸۳)

هرجا نگاشت کلی که با فاز و اندازه کار دارد کنید e^{z} ، $\frac{1}{z}$ ⇐ اولویت با اندازه و فاز ⇐ توجه اندازه و فاز ⇐ اولویت با

(فضاهای نیم‌صفحه)

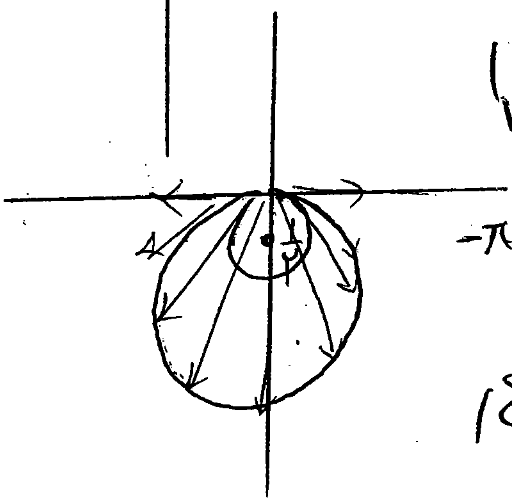
(فاز ورودی ⇐ ۰ تا π ⇐ خروجی تا صفر) ؛ روش اول ۲:



$Z=\frac{3}{2}i \to w=-\frac{2}{3}i$

۲) ✓✓

۱) ✗✗



$-\pi < \theta < 0$

۴) ✗✗

۳) ✗✗

۱ روش تغییر فاز

۲ تست نقاط هم

۳ روش کلی

تبره اول از مرحله ۱ نقاط هم شروع کرد

$w=\frac{1}{z}$ ⇐ اگر ابتدای صفر تا محدود ⇐ صفر جزء ورودی شد ⇐ خروجی نامحدود

صفر جزء ورودی نباشد ⇐ خروجی محدود

صفر جزء ورودی نیست ⇐ خروجی محدود ⇐ ۲ و ۳ حذف چون اندازه‌ها نامحدود ندارد

حالا $Z=\frac{3}{2}i$ ⇐ $w=-\frac{2}{3}i$ ⇐ ۴ غ

JozveBargh.ir

*مثال) نگاشت منحنی $x^2y^3+x^4+y^3+y=1$ توسط $w=\frac{1}{z}$ را بدست آورید.

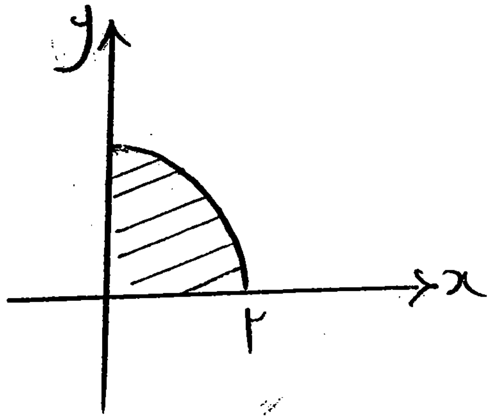
$$\frac{-u^2v^3}{(u^2+v^2)^5}+\frac{u^4}{(u^2+v^2)^4}-\frac{v^3}{(u^2+v^2)^3}-\frac{v}{u^2+v^2}=1$$

*$\sin z$ و $\cos z$ خبر دسته دوم است.

* نگاشت $W=\frac{1}{z}$، اندازه z را وارون و فاز z را قرینه می‌کند

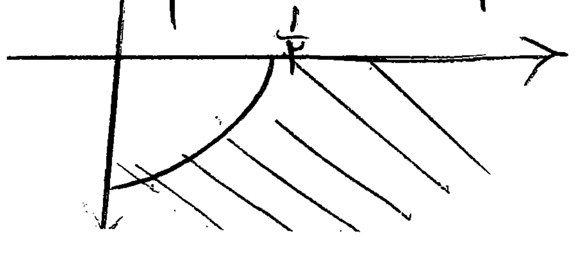
$$W=\frac{1}{z}=\frac{1}{r\,\mathrm{cis}\,\theta}=\frac{1}{r}\mathrm{cis}(-\theta)$$

*مثال) نگاشت ناحیه‌ی هاشور خورده توسط $W=\frac{1}{z}$ را بدست آورید



$$r<2 \longrightarrow \frac{1}{r}>\frac{1}{2}$$

$$0<\theta<\frac{\pi}{2} \longrightarrow -\frac{\pi}{2}<-\theta<0$$



* نقاط مهم
  - به ازای آن که خروجی صفر یا ∞ شود
  - به ازای آن که محاسبه ی خروجی ساده است

۳ روش کلی

گشاشت مرزی‌ها!

$$y=1 \Rightarrow \frac{-v}{u^2+v^2}=1 \Rightarrow u^2+v^2+v=1$$

دایره‌ای که مرکز آن روی محور v است! ⟸ گزینه ۲

$$(u)^2+(v-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{4}$$

یادآوری معادله دایره :

① $|z-z_0|=r \equiv$ معادله دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع r

$z_0=x_0+iy_0$

② $z=z_0+re^{i\theta} \equiv$ //

③ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \equiv$ //

④ $\begin{cases} x=x_0+r\cos\theta \\ y=y_0+r\sin\theta \end{cases} \equiv$ //

⑤ $x^2+y^2+ax+by+c=0 \Rightarrow O\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}\\-\frac{b}{2}\end{matrix}\right.$ و $R=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$

اثبات ۵ : $(x+\frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} + (y+\frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$

حلبرم : ص ۱۲۸ ، سؤال ۱۴

* مطابق ۸۵

۱)

۲)

۳)

۴) ✓

$$\frac{-v}{\cancel{u^2+v^2}} = \frac{u^2}{(u^2+v^2)^{\cancel{2}}}$$

* در نگاشت $w=f(z)$

ناحیه ورودی داده می شود ← ناحیه خروجی خواسته می شود

به روش های تحلیلی مسأله را حل می کنیم

(انتقال، تبدیل، دوران، دستگاه مختصات و ...)

معادله ورودی داده می شود ← معادله خروجی خواسته می شود

محاسبه می کنیم

سراسری: صفحه ۱۱۸ تست ۱

*مکانیک ۸۵)

۱)　　　۲)　　　۳)　　　۴)

* گروه دوم! ← محاسبه ✓

$$\begin{cases} u = \operatorname{ch}x \cos y \\ v = \operatorname{sh}x \sin y \end{cases} \xrightarrow{y=\frac{\pi}{4}} \begin{cases} u = \operatorname{ch}x \frac{\sqrt{2}}{2} \\ v = \operatorname{sh}x \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow 2u^2 - 2v^2 =$$

* ch و sh ⇐ ، $ch^2 - sh^2 = 1$

صفحه ۱۷۴، تست ۷۱

هوا فضا ۸۳)

۱)　　　۲)

۳) ✓　　　۴)

* فاز ورودی $\frac{3\pi}{2} > 0$ $\overset{\text{خروجی}}{\Longleftarrow}$ $0 < -\frac{\pi}{2}$

ص ۱۶۵ س ۴۳

* هسته‌ای ۸۷

حل الگوریتمی سطح‌های دلخواه : محاسبه ✓

۱)   ۲) $u=\frac{1}{2}$ ✓   ۳)   ۴)

$$w=\frac{i}{z} \Rightarrow z=\frac{i}{w} \Rightarrow \left|\frac{i}{w}-i\right|=1$$

$$|i|\left|\frac{1}{w}-1\right|=1$$

$$\left|\frac{1-w}{w}\right|=1 \Rightarrow |1-w|^2=|w|^2 \Rightarrow Re^2(1-w)+\cancel{Im^2(w)}$$

$$=Re^2(w)+\cancel{Im^2(w)}$$

$$(1-u)^2=u^2 \Rightarrow 1+\cancel{u^2}-2u=\cancel{u^2} \Rightarrow 1-2u=0$$

$$u=\frac{1}{2}$$

یادآوری : $|f(z)|^2=Re^2(f(z))+Im^2(f(z))$

صفحه ... ست

* مغناطیس ۱۸۸

ص ۱۷۲ ست ۵۹

* کامپیوتر ۸۸

۱)　　۲)　　۳)　　۴) $v=-\frac{1}{2}u$ ✓

$$\frac{-v}{\cancel{u^2+v^2}}=\frac{1}{2}\frac{u}{\cancel{u^2+v^2}}$$

ص ۱۷۲ ست ۶۵

* کامپیوتر ۸۹

۱)　　۲)

۳)　　۴) ✓

حل: گزینه ۴ ⇐ $(0, \frac{1}{2})$ و مرکز

$$y \ge 1 \to \frac{-v}{u^2+u^2} \ge 1 \to u^2+v^2+v \ge 0$$

خارج دایره ای به مرکز [illegible]

[illegible]

معادله ی دایره   ص ۵۲۵، س ۵
برق ۹۲)

۴)   ۳)   ۲) ✓   ۱)

$$|z-z_0|=|z_0| \Rightarrow \left|\frac{1}{w}-z_0\right|=|z_0|$$

$$|1-wz_0|^2=|wz_0|^2 \Rightarrow ۲) ✓$$

$$Re^2(1-wz_0)+\cancel{Im^2(wz_0)}=Re^2(wz_0)+\cancel{Im^2(wz_0)}$$

$$Re(1-wz_0)=Re(wz_0)$$

$$1-2Re(wz_0)=0$$

$$f(z)\overline{f(z)}=|f(z)|^2$$

$$(1-wz_0)(1-\overline{wz_0})=wz_0\overline{wz_0}$$

$$1-\overline{wz_0}-wz_0+\cancel{wz_0\overline{wz_0}}=\cancel{wz_0\overline{wz_0}}$$

$$1-2Re(wz_0)=0$$

JozveBargh.ir

۹۲

یادآوری : $f(z)+\overline{f(z)}=2\,\mathrm{Re}\,f(z)$

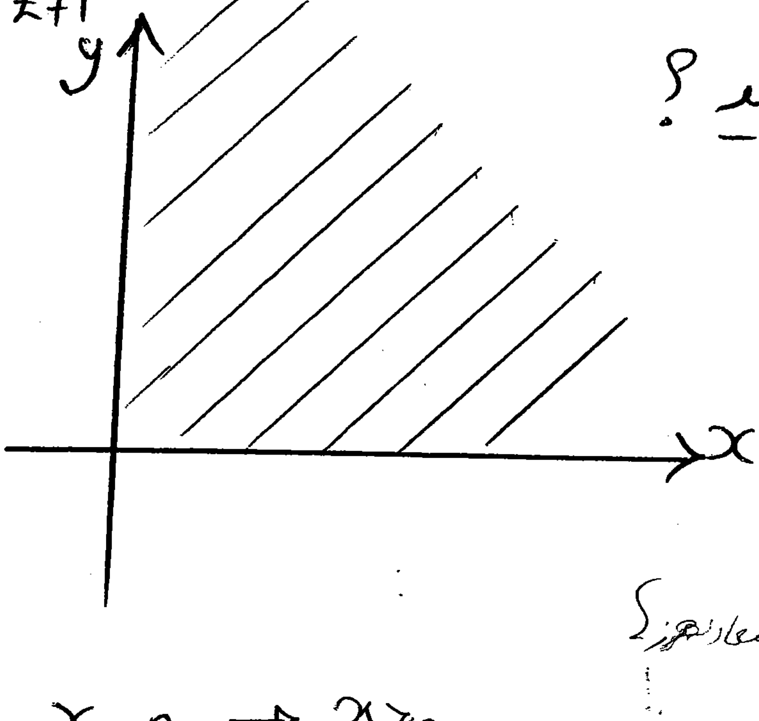
* عین سؤال مکانیک ۸۷، ص ۲۲۸، س ۱۴۳ بود!

* ریاضی مهندسی - ۱۱/۲/۹۲ - جلسه‌ی هشتم - دوشنبه

* نگاشت دوخطی (موبیوس)

$$W=\frac{az+b}{cz+d}$$

* مثال) نگاشت ناحیه‌ی هاشور خورده توسط $W=\frac{z-i}{z+2}$ را بدست آورید؟



طبق روند ① معادلات مرز

①
$$\begin{cases} x=0 \rightarrow x\geq 0 \\ y=0 \rightarrow y\geq 0 \end{cases}$$

تذکر: اگر در نگاشت $W=f(z)$ امکان محاسبه x و y بر حسب u و v وجود داشت، برای محاسبه‌ی نگاشت یک

ناحیه به روش حلی توسط این تابع به جای معادله مرزی که بهتر

است شرط مرزها را بنویسیم.

* مساوی تبدیل به نامساوی.

دلیل: اگر انتگرال را انجام بدهید ← تعمیم خود بخود از بین می‌رود ← محاسبات کاهش

۲ $$W=\frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow cwz+dw=az+b$$

$$z(cw-a)=-dw+b$$

$$\boxed{z=\frac{-dw+b}{cw-a}}$$

در سوال ۴ : $$z=\frac{-2w+i}{w-1}$$

$$x+iy=\frac{-2u-2iv+i}{u-1+iv}\times\frac{u-1-iv}{u-1-iv}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\quad}{(u-1)^2+v^2} \\ y=\dfrac{2uv+(-2v+1)(u-1)}{(u-1)^2+v^2} \end{cases}$$

لم صورت : x حقیقی ⟸ حاصل ضرب دو تا حقیقی یا دو تا موهومی

ضرب دو حقیقی ⟵ فقط قسمت حقیقی

″ دو موهومی ⟵ فقط قسمت موهومی (یه منفی هم داره) $i^2=-1$

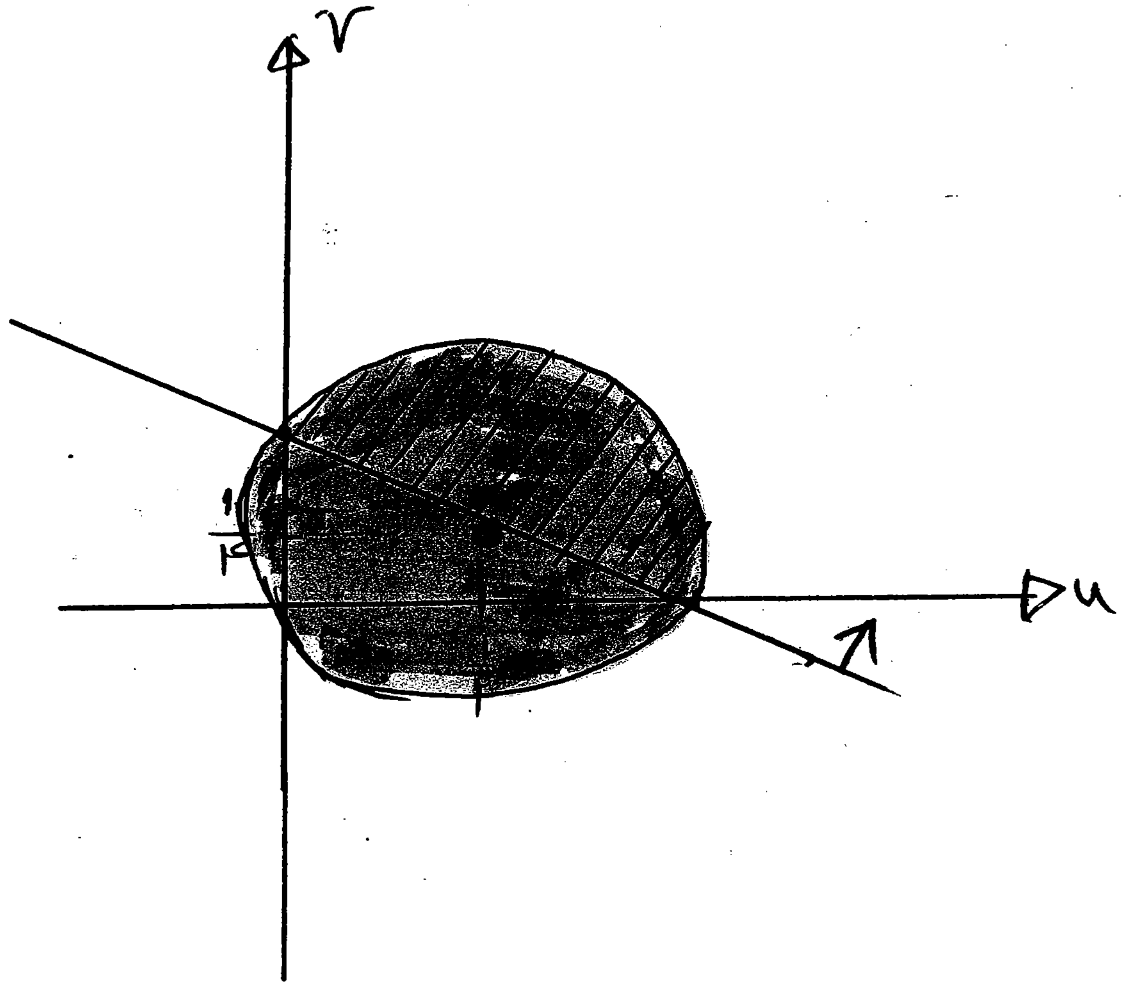
$$\begin{cases} x = \dfrac{-2u^2-2v^2+2u+v}{''} \\[2ex] y = \dfrac{2v+u-1}{''} \end{cases}$$

③ نگاشت مرزی

$$x \geqslant 0 \xrightarrow{\text{مخرج مثبت پس باید صورت مثبت}} -2u^2-2v^2+2u+v \geqslant 0$$

مرکز $\left(0 \;\middle|\; \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{matrix} \right.$ دایره $\boxed{u^2+v^2-u-\frac{1}{2}v \leq 0}$

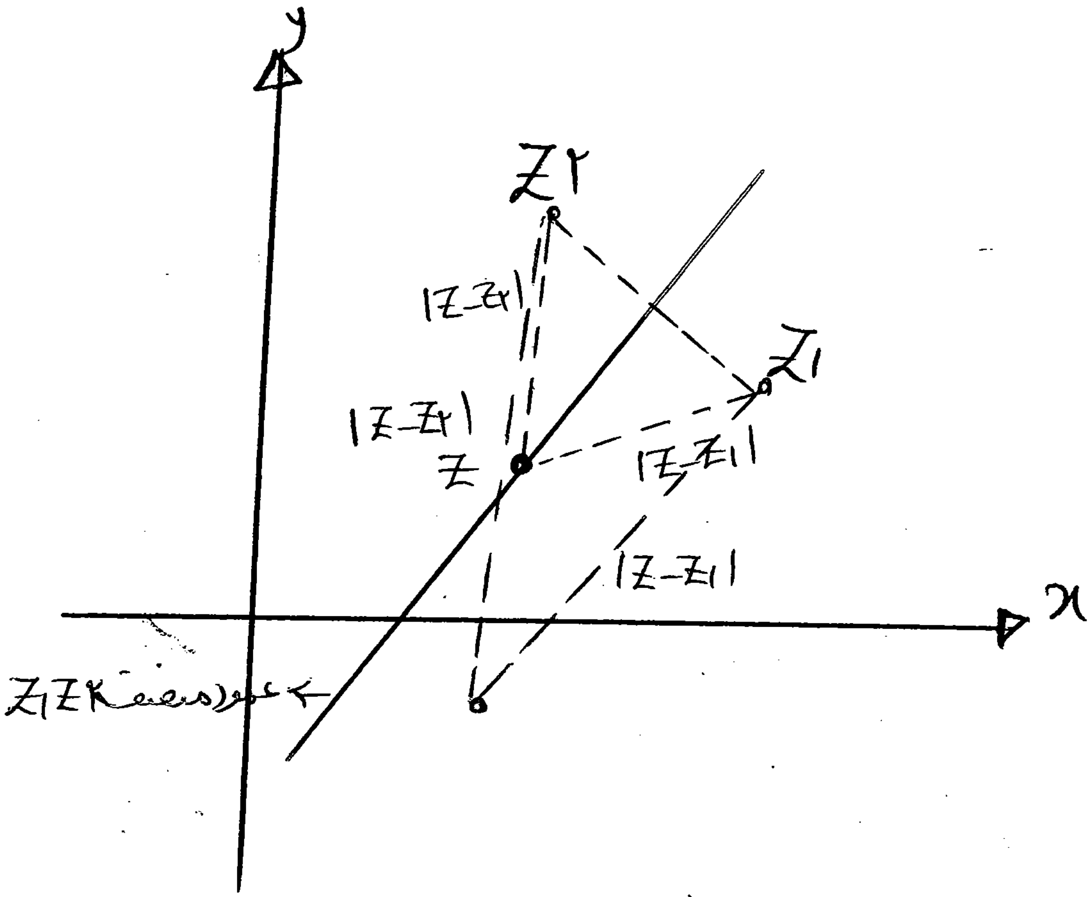
$$y \geqslant 0 \longrightarrow \boxed{2v+u-1 \geqslant 0}$$



*خواص نگاشت موبیوس از خودش مهم تره!

* در تابع $W=re^{i\theta}\frac{z-z_1}{z-z_2}$ همواره نگاشت عمود منصف پاره خط z_1z_2 دایره ای به شعاع r است وقسمتی از عمود منصف که شامل z_1 است به داخل دایره به شعاع r و سمت دیگر به خارج دایره به شعاع r تبدیل می شود.

اثبات ۹۵



Z۱ و Z۲ دلخواه ← پاره خط Z۱Z۲ رسم ⇐ عمود منصف Z۱Z۲ رسم

$$|w| = r \, \frac{|z-z_1|}{|z-z_2|}$$

$|re^{i\theta}| = r$

$\frac{|\text{صورت}|}{|\text{مخرج}|} = 1$

اگر Z را روی پاره خط انتخاب کنیم ⇐ $\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|}$

عمود منصف: همان نقاطی که فاصلشون از دو سر یکسان ⇐ پس باید $|z-z_1| = |z-z_2|$

Z روی عمود منصف ⇐ $|z-z_1| = |z-z_2|$

$$\Longrightarrow \boxed{|w| = r}$$

دایره‌ای به شعاع r ⇐ اولی اثبات

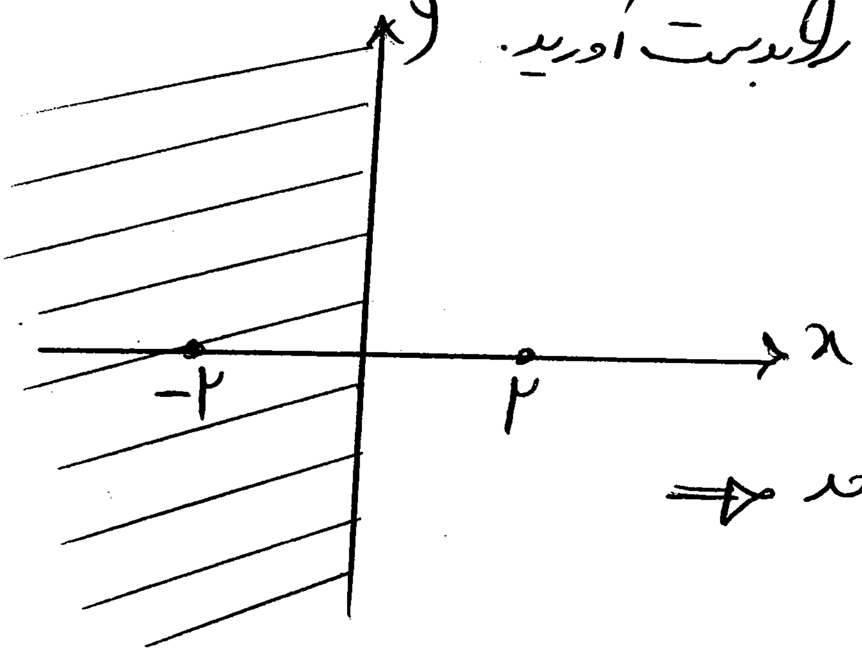
* حالا z را سمت z_1 می‌گیریم :

z سمت z_1 باشد ؛ $|z-z_1| < |z-z_2| \Rightarrow \boxed{|w| < r}$

داخل دایره به شعاع r ⇐ بدون اثبات

* به همین ترتیب اگر z سمت z_2 باشد، می‌شه خارج دایره‌ای به شعاع r ! ⇐ بدون اثبات !

* مثال) نگاشت ناحیه‌ی هاشورخورده توسط $w = \dfrac{z-2}{z+2}$ را بدست آورید.



⇐ خارج دایره واحد

همواره مرز ناحیه عمود منصف $z_1 z_2$ باشد ⇐ پس از قضیه فوق استفاده !

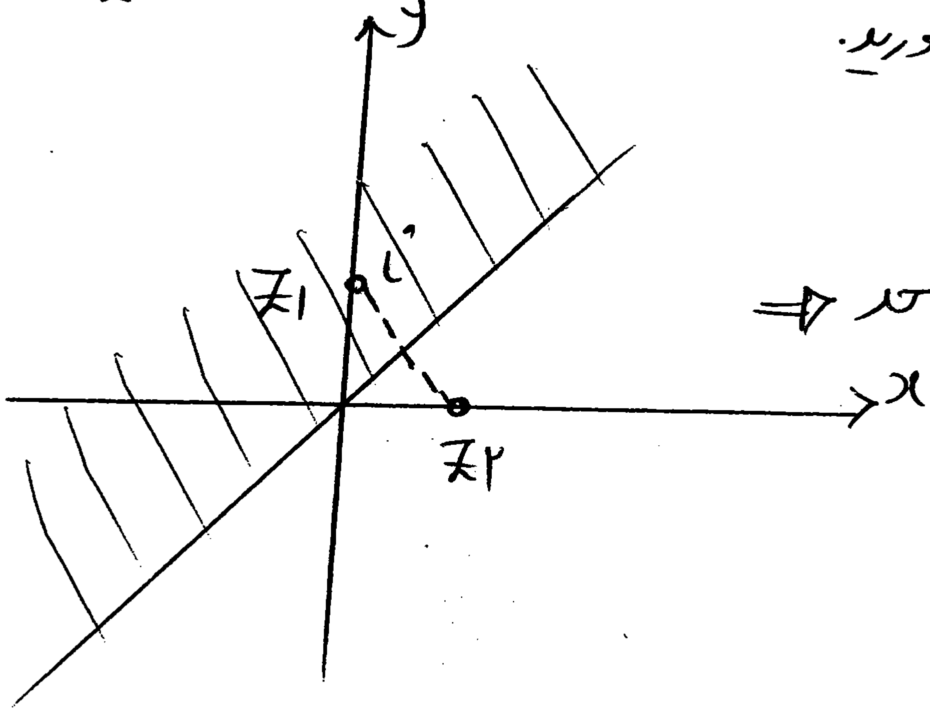
z_2 داخل ناحیه ⇐ داخل دایره

z_1 خارج ناحیه ⇐ خارج دایره

2 خارج ناحیه ⇐ خارج دایره واحد چون

که ضریب 1 ⇐ (ضریب شعاع دایره)

* مثال) نگاشت ناحیه‌ی $y \geq x$ توسط $W = \frac{Z-i}{Z-1}$ را بدست آورید.



⟸ داخل دایره واحد

* هر عدد دلخواه مانند $Z_1 = i$ داخل ناحیه است پس:
داخل دایره واحد است.

* θ تاثیر ندارد چون فقط دوران می‌ده، دوران دایره فرقی نداره، همون میشه!
* قرارداد: مرکز همه صفر! مگر اینکه خلافش گفته شه
دایره واحد ⟸ دایره‌ای که مرکزش صفر و شعاعش 1 است!

حل ص ۱۶۸ س ۴۵
هماتنگ (۸۹

۱)
۲) ✓
۳)
۴)

جای a و b عوض و قرینه :

$$Z = \frac{2w-1}{w-1}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2w-1}{w-1} + 1 \right| = 3$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3w-2}{w-1} \right| = 3$$

$$\Rightarrow \left| \frac{w-\frac{2}{3}}{w-1} \right| = 1 \xRightarrow{\text{ذهنی}} u = \frac{5}{6}$$

$$Re(w) = \frac{5}{6}$$

ذهنی :

خروجی شده دایره واحد

پس دوری عمود منصف این دوتا ← عمود منصف $\frac{2}{3}$ و ۱ است ← $\frac{\frac{2}{3}+1}{2} = \frac{5}{6}$

Real ← چون حقیقی بود

Im ← اگر موهومی بود

اگر ترکیبی ← رسم شکل

(z_1 و z_2 حقیقی)

تحلیل دیگر :

$$|w - \tfrac{2}{3}| = |w-1|$$

مکان هندسی عمود منصف

$$\boxed{u = \frac{5}{6}}$$

$\rho_0=|z_0|$ * برق ۹۲) دایره‌ای به مرکز z_0 و به شعاع ρ_0 به طوری که

در صفحه z مفروض است. در اثر تبدیل $w=\frac{1}{z}$ معادلهٔ

این دایره به کدام رابطه در صفحه w تبدیل می‌شود؟

۱) $1+2Re(z_0\bar{w})=0$

۲) $1-2Re(z_0 w)=0$

۳) $1+2Re(z_0 w)=0$

۴) $1-2Re(\bar{z}_0 w)=0$

$$|z-z_0|=|z_0|$$

$$\left|\frac{1}{w}-z_0\right|=|z_0|$$

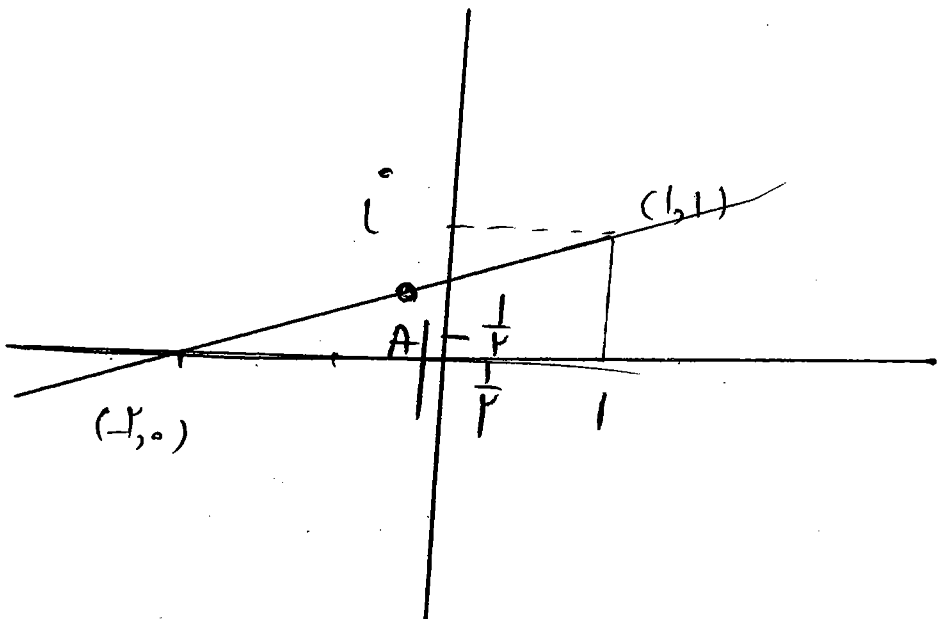
$$|1-wz_0|=|wz_0|$$

$$Re(wz_0)=\frac{1}{2}$$

آرگومان حقیقی هم موهومی :

مثلاً :

$$|w-1-i|=|w+2|$$



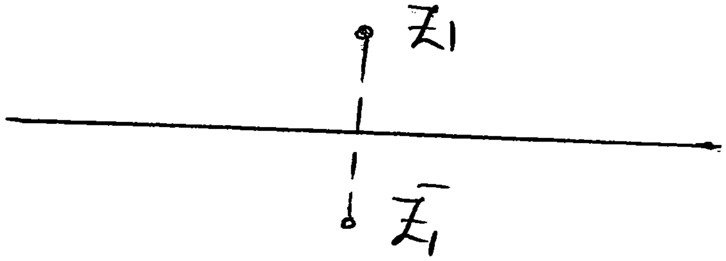
$$\text{شیب} = \frac{1-0}{3} =$$

* معادله عمود منصف را نوشتیم!

** * این روش خیلی روش قدرتمندی است و خیلی مهم است * *

* چند تا دیگر از شکل های مرجع می بینیم :

دیگر اگر $z_2=\bar{z}_1$ باشد یعنی $W=re^{i\theta}\dfrac{z-z_1}{z-\bar{z}_1}$ آنگاه نگاشت



$z_2=\bar{z}_1$ ← عمود منصف محور حقیقی است

عمود منصف $z_1\bar{z}_1$ یعنی محور حقیقی، همواره دایره به شعاع ۱ و نگاشت

نیم صفحه بالا یا پایین همواره داخل یا خارج به شعاع ۱ است

z_1 داخل نیم صفحه باشد ← داخل دایره

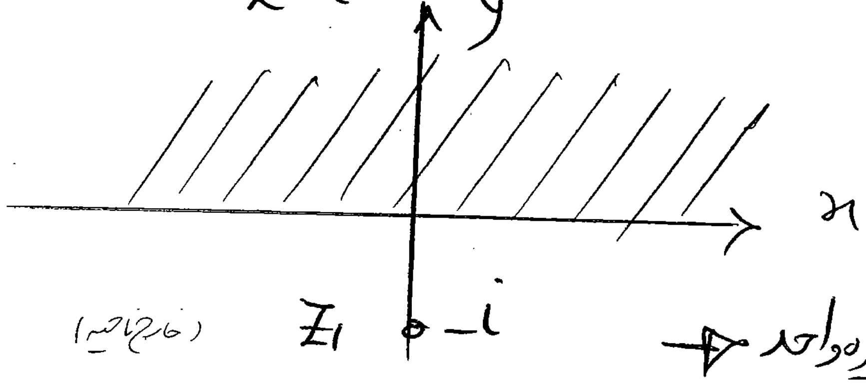
z_1 خارج نیم صفحه باشد ← خارج دایره

* این حالت خاص مهم‌تر از خودش است.
چون که در سؤالات کنکور زیاد تکرار شده است همین است.

* مثال) نگاشت ناحیه $y \geq 0$ توسط $W=\frac{z+i}{iz+1}$ را بدست آورید

توجه: همیشه ضریب z ها را یک کنید ← هر عددی بود از صورت و مخرج فاکتور و ضریب z را یک کنید

$$W=-i\,\frac{z+i}{z-i}$$



(خارج ناحیه) ← خارج دایره واحد

* اگر در نگاشت دوخطی $W=\frac{az+b}{cz+d}$ ، ضرایب a,b,c,d حقیقی باشند و $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$ آنگاه نگاشت نیم صفحه ی بالا همواره نیم صفحه ی بالا در خروجی است.

* در نگاشت دوخطی، نگاشت خطوط و دوایری که از ریشه ی مخرج عبور نمی کنند، همواره دایره است.

$\left(z=-\frac{d}{c}\right)$

* در نگاشت دوخطی، نگاشت خطوط و دوایری که از ریشه ی مخرج عبور می کنند، همواره خط است.

دو تا مثال مهم

که الگوی کلیدی را از روشون یاد می گیریم

الگو مهم است.

* مثال: نگاشت ناحیه‌ی هاشور خورده توسط $W=\frac{Z-1}{Z+1}$ را بدست آورید.

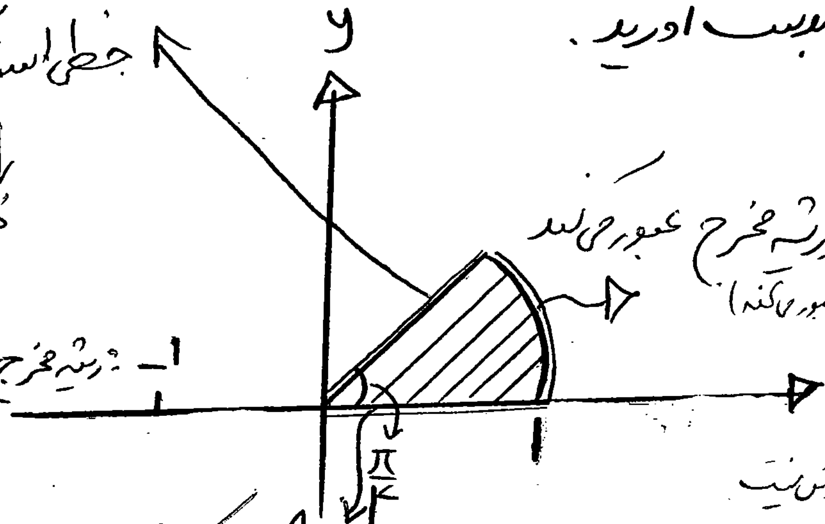
خطی است که از ریشه مخرج عبور نمی‌کند

↓

خروجی دایره است

↓

چون قسمتی از خط مورد نظر -1: ریشه مخرج است ← خروجی قسمتی از دایره است (3)



دایره‌ای است که از ریشه مخرج عبور می‌کند

(دایره آن کامل است ریشه از -1 عبور می‌کند)

↓

خروجی یک خط است

↓

همانطور که -1 روی شکل نیست

↓

چون $-1=Z$ روی قسمت مورد نظر نیست

↓

(2) خروجی پاره خط است

خطی است که از ریشه مخرج عبور می‌کند

← خروجی یک خط است

چون قسمتی از این خط مورد نظر که -1 روی شکل نیست پس پاره خط

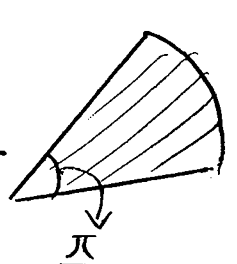
اگر -1 روی شکل باشه ⇐ نامحدود ⇐ نیم خط

اگر -1 روی شکل نباشه ⇐ پاره خط

← چون $Z=-1$ روی قسمت مورد نظر نیست،

(1) ← خروجی پاره خط است!

(1),(2),(3) ⇒



$\frac{\pi}{2}$

اگر ریشه مخرج خارج ناحیه ← داخل (محدود)

نگاشت دو خط فقط ریشه مخرج: اگر ریشه مخرج داخل ناحیه ← (نامحدود) خارج

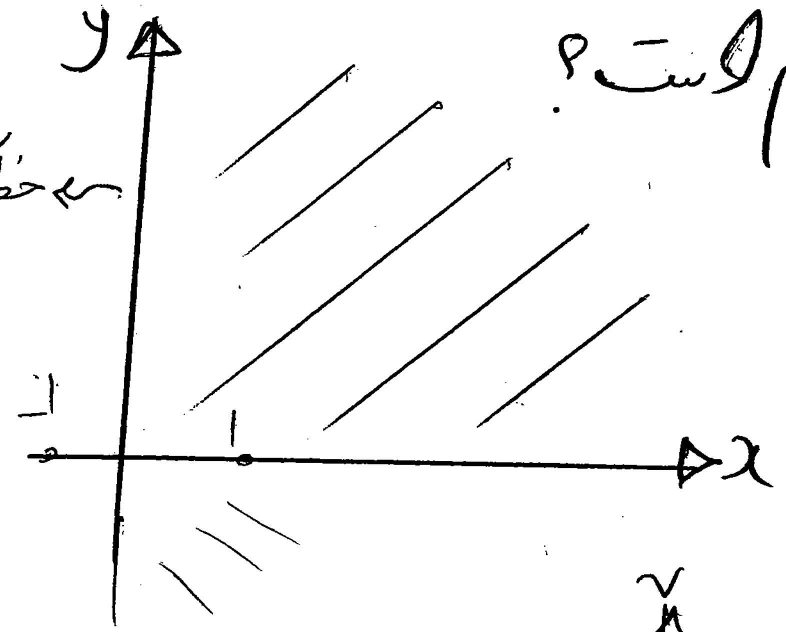
-1 داخل ناحیه ⇐ (نامحدود) خارج

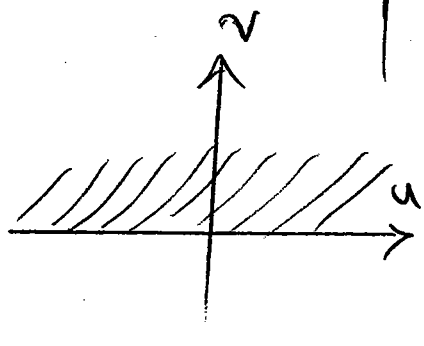
-1 خارج ⇐ (محدود) داخل

* مثال دوم هم را یک روش کلیدی فوق العاده قدرتمند

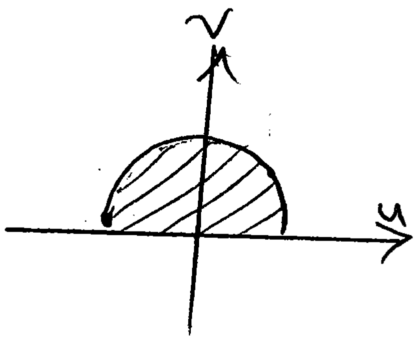
* مثال: نگاشت ناحیه‌ی هاشور خورده توسط $W=\frac{Z-1}{Z+1}$ کدام است؟

خطی که از ریشه مخرج عبور نمی‌کند

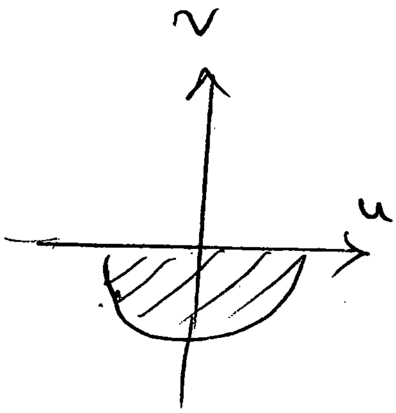




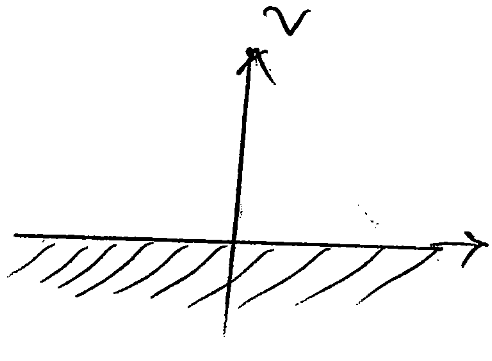
۲) XX



۱) ✓✓✓



۴)



۳) XX

از نگاشت ناحیه D ← D'

نگاشت مرز مجموعه ناحیه D ← زیرمجموعه‌ای از ناحیه D'

صورت تست که کار نداریم طراح سوال چی داده!

هر ناحیه‌ای که خواستیم بدیم نگاشت مرزش پیدا کنیم هر کدوم زیرمجموعش بود حذف کنیم!

JozveBargh.ir

قبلاً

$0 \text{ تا } \frac{\pi}{2}$ ⟸ ربع اول

$0 \text{ تا } \frac{\pi}{4}$ ⟸ زیر مجموعه از ربع اول

خود نیمه عبارت حذف میشه!

اگر در میان ضرایب حقیقی مثبت:

نیم صفحه بالا ⟸ نیم صفحه بالا

زیر مجموعه " ⟸ زیر مجموعه "

پس ۲ و ۳ و ۴ غ ⟸ ۱ درست است!

پاسخ غ

if: در میان منفی ⟶ پایین ⟵ بالا ؛ بالا ⟵ پایین

بین ۱ و ۲

۱ : محدود

۲ : نامحدود

۱ـ خارج ✱ محدود)

پس ۱ درست است!

✱ کلید نکته : ۱ و ۱ ـ ⟸ محور منصف نا مثبت است : خیلی مهمه! داخل ناحیه ⟸ داخل دایره واحد

پس جمعی از دایره!

پس ۲ و ۳ حذف

بین ۱ و ۴ عدد چهارم.

$$Z = 1 + j$$

$$w = \frac{1 + j - 2}{1 + 2j} = \frac{j(1 - 2j)}{5}$$

$$= \frac{j + 2}{5}$$

موهومی مثبت

↓

گزینه ۱

* تحلیل دیگر: خطی که از ربع خارج عبور نمی‌کند پس نگاشتش دایره

چون جمعی از خط ← جمعی از دایره

۲ و ۳ حذف

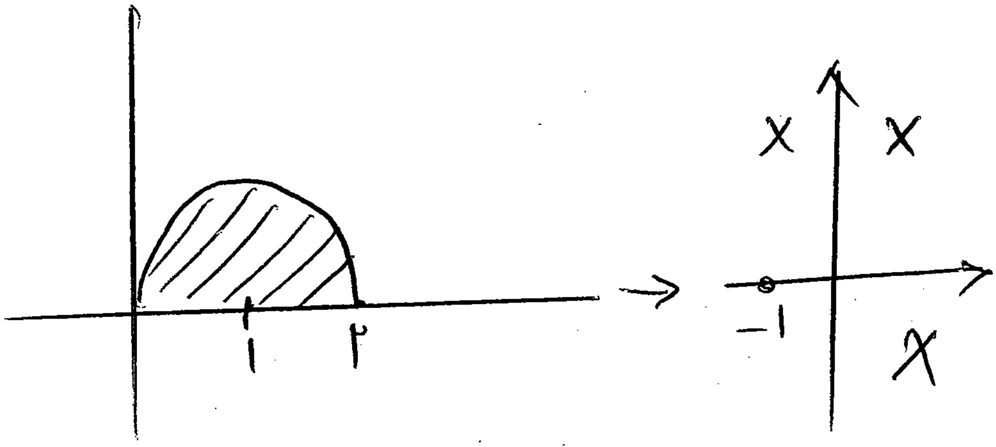
عدد ۵ درهم = ۲   ۱

* تحلیل دیگر: ۱- خارج ناحیه به داخل

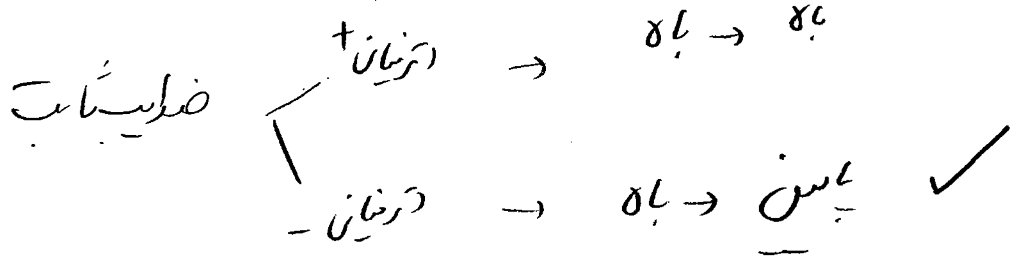
* برق ۱۷۱ تصویر میدان $\{Z: |Z-1|<1 \text{ , } Im(Z)>0\}$ تحت

تبدیل $w = \frac{Z}{Z-2}$ کدام یک از نواحی زیر است؟

۱) ربع اول X ۲) ربع دوم X ۳) ربع سوم ✓ ۴) ربع چهارم X



$W=-1$



ضرایب ثابت
از زمان+ → ۸۱ ← بالا
از زمان- → ۸۱ ← پایین ✓

۱ و ۲ حذف.

نقطه $w=-1$ را دارم ← تو ربع چهارم نیست ← پس ۴ هم حذف.

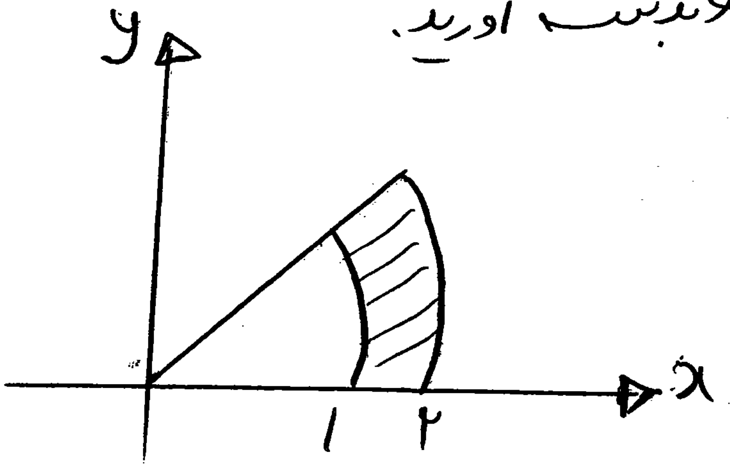
پس ۳ صحیح است.

$$W = \ln Z = \ln r + i\theta \Rightarrow \begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta \end{cases}$$

هر موقع تغییرات u خواستی ⇐ تغییرات r
" " v خواستی ⇐ تغییرات θ

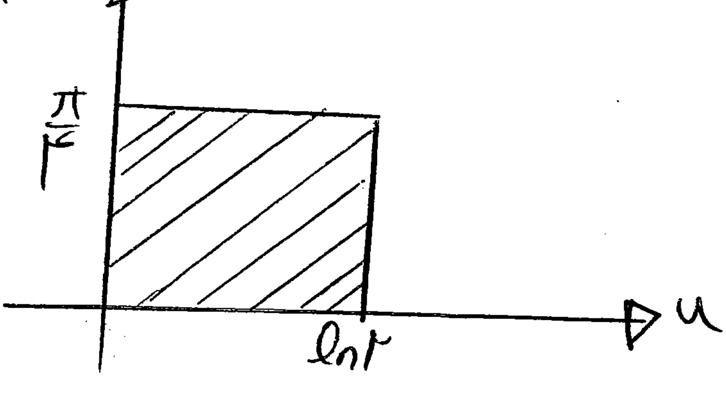
* مثال ۱) نگاشت نواحی هاشورخورده توسط $W = \ln Z$ را بدست آورید.

الف)



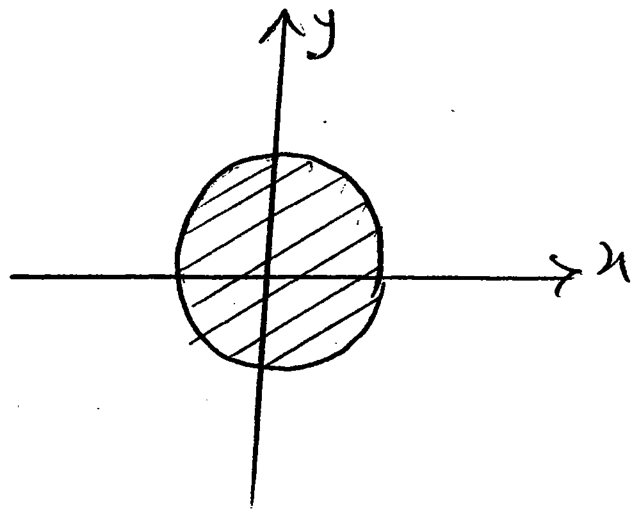
$$1 < r < 2 \rightarrow 0 < \ln r < \ln 2 \rightarrow 0 < u < \ln 2$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4} \rightarrow 0 < v < \frac{\pi}{4}$$



JozveBargh.ir

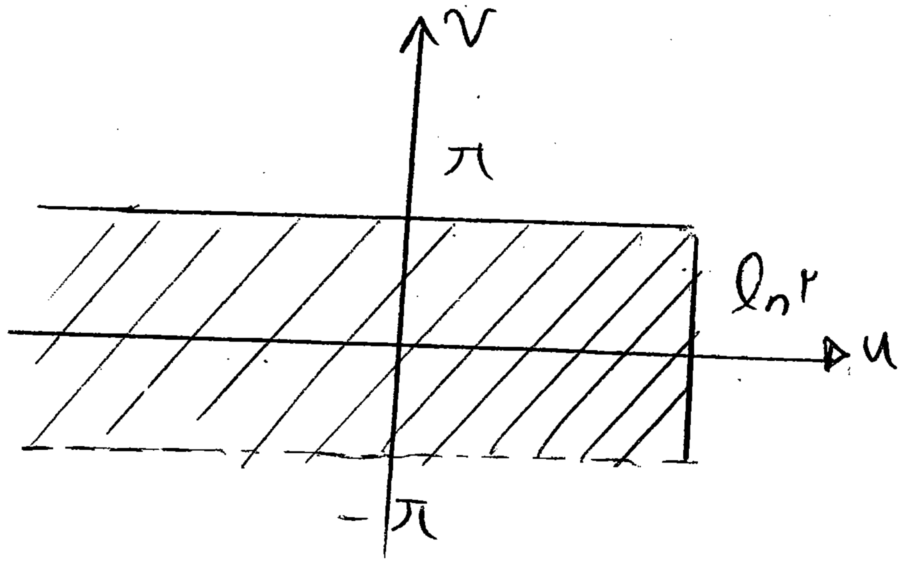
ب)



$$r<2 \Rightarrow \ln r < \ln 2 \Rightarrow u < \ln 2$$

* هرجا θ نداریم ⇐ یعنی $-\pi$ تا π !

$$-\pi < \theta < \pi \Rightarrow -\pi < v < \pi$$



$$* \text{ نگاشت توسط}: \quad W = Z + \frac{1}{Z}$$

$$u + iv = r\,\text{cis}\,\theta + \frac{1}{r}\,\text{cis}(-\theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta$$

$$+ i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta \\ v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \end{cases}$$

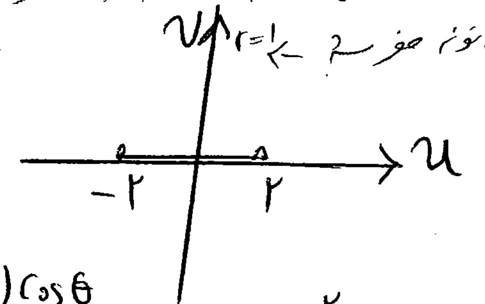
دو دسته سؤال:

① سؤالاتی که u و v برحسب x و y بده طراح محدودیت ندارد!
هر معادله‌ای می‌تونه طراح بده

② فقط u و v برحسب x و y بده مثل $\sin z$ ⇐ طراح چیز مشابه دو ثابت نمی‌تونه چیزی طرح کنه! برای sin و cos هیچ وقت در روی ... مشابه، دو ثابت طرح شده

اینجا فقط r ثابت و θ ثابت!
اول r ثابت ⇐ صفر را جدا بررسی کن، خلاف صفر را جدا!
u همیشه صفر نمیشه ⇐ + و + صفر باشه
v می‌تونه صفر بشه ⇐ r=1

$$r = a \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow \begin{cases} u = 2\cos\theta \\ v = 0 \end{cases} \\ a \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} u = \left(a + \frac{1}{a}\right)\cos\theta \\ v = \left(a - \frac{1}{a}\right)\sin\theta \end{cases} \end{cases}$$



$$\xRightarrow{\text{حذف}} \frac{u^2}{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} = 1$$

⇐ معادله بیضی است

حالا ثابت

Sin در $k\pi$ صفر میشه! Cos در $(2k-1)\frac{\pi}{2}$ صفر میشه!

$$\theta=\alpha \begin{cases} \alpha=k\pi \Rightarrow \begin{cases} u=(r+\frac{1}{r})\cos k\pi \\ v=0 \end{cases} \\ \alpha=(2k-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=(r-\frac{1}{r})\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} \end{cases} \\ \alpha\neq\frac{k\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} u=(r+\frac{1}{r})\cos\alpha \\ v=(r-\frac{1}{r})\sin\alpha \end{cases} \end{cases}$$

$v=0$ ⇒ معادل یک نیم خط در راستای محور u است

⇒ معادل یک نیم خط در راستای محور v است

هر دو را پوشش می‌داد! ← خلاف مورد های بالا است!

r را باید حذف کنیم:

$$\begin{cases} \frac{u^2}{\cos^2\alpha}=r^2+\frac{1}{r^2}+2 \\ \frac{v^2}{\sin^2\alpha}=r^2+\frac{1}{r^2}-2 \end{cases} \Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2\alpha}-\frac{v^2}{\sin^2\alpha}=4$$

← هذلولی

انحنا شده دو شکیه؟ ← نه، کلی شاخش ها شد

(هذلولی دو شکیه)

$\cos\alpha > 0 \Rightarrow u > 0 \rightarrow$ شاخه سمت راست

$\cos\alpha < 0 \Rightarrow u < 0 \rightarrow$ " " چپ

شاخه سمت راست : $\cos\alpha > 0 \rightarrow u > 0$

شاخه سمت چپ : $\cos\alpha < 0 \rightarrow u < 0$

درسته که شکل ما این طور که گفته بود هذلولی که دو شاخه مجزا دارد اما اسم شاخ کجا شد باید بهم راست یا چپ

اگر هذلولی قائم بود ⇐ که شب روی v بود!

ص ۱۷۳، س ۲۱

* برق ۱۸۶

۱) ✗ ۲) ✗

۳) ✓ ۴)

$$\begin{cases} u = \left(d^k + \dfrac{1}{d^k}\right)\cos k\theta \\ v = \left(d^k - \dfrac{1}{d^k}\right)\sin k\theta \end{cases}$$

d باید حذف شود!

$$\Longrightarrow \frac{u^2}{\left(d^k+\frac{1}{d^k}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(d^k-\frac{1}{d^k}\right)^2}=1 \quad \text{بیضی به}$$

کانونی:

$$a^2=b^2+c^2$$

$$d^{2k}+\frac{1}{d^{2k}}+2=d^{2k}+\frac{1}{d^{2k}}-2+c^2$$

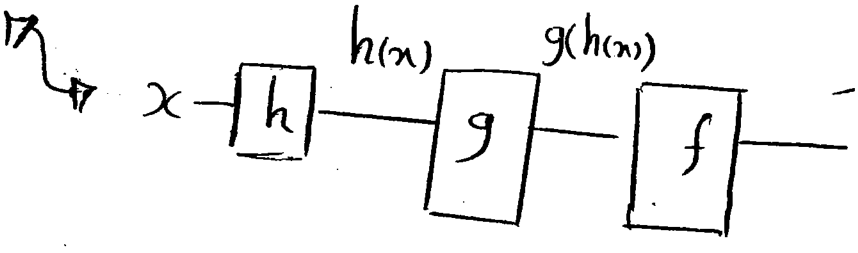
$$c^2=4 \Rightarrow c=\pm 2$$

حاله بیضی دهنده‌ی پارامترها

در عمق ۱ است!

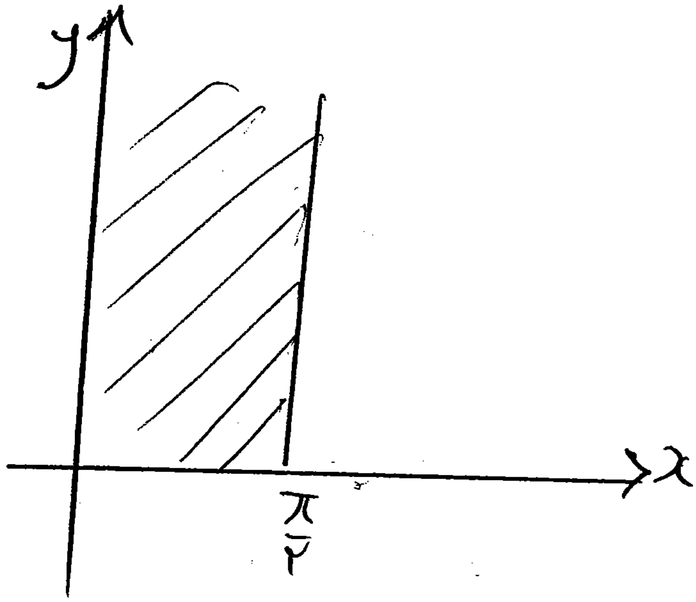
* نگاشت های ترکیبی

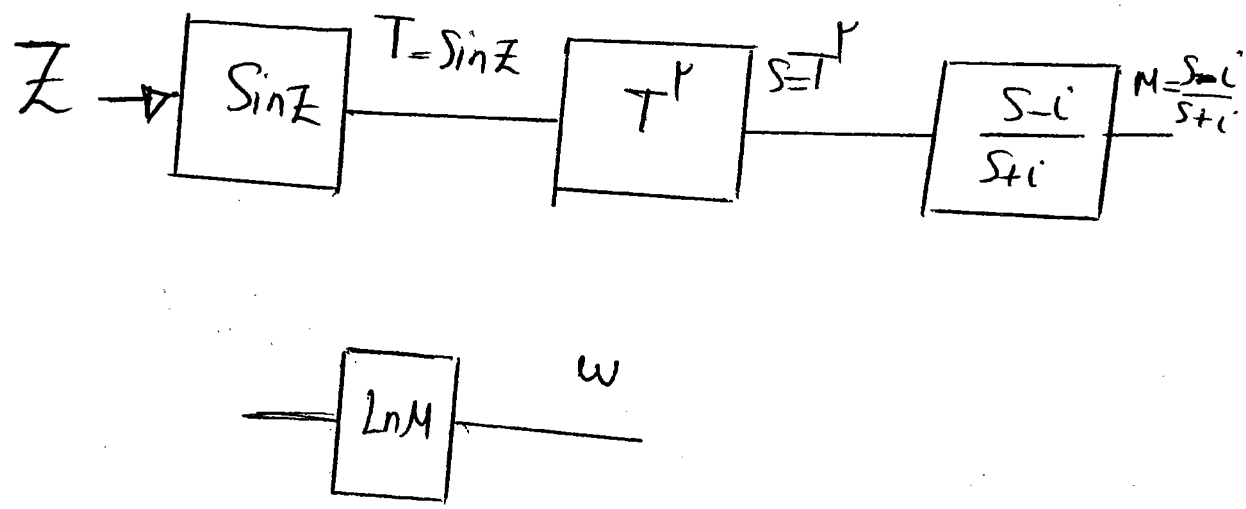
$$f(g(h(x)))$$



* مثال) نگاشت ناحیه‌ی هاشور خورده توسط

$$W=\ln\left(\frac{\sin^2 z-i}{\sin^2 z+i}\right)$$ را بدست آورید.





از Z شروع ← اولین چیزی که روی Z عمل می‌کنه ⇐ $\boxed{\sin z}$

$\sin z$ ← ربع اول

$\sin z$: $\sin$ ؟ در این بازه مثبت $u>0$ ، مثبت $v>0$ ⇐ ربع اول

نکته اصلی: این جاها که تلاش کنی ترکیب را ذهنی حل کنی، باید نقش هر آدم به حافظه را به راحتی نوشته را فراموش کنی!

$\boxed{\text{ربع اول توسط } z^2}$

دوباره مثل اینکه یه دوری دارم یه تابع z^2 !

و همینطور مرحله به مرحله تا آخر!

پس همزمان فقط یک شکل در ذهنم نمی‌دارم ← ۱۰۰ تا هم باشه حله!

$z^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$ ← z^2

هر گز نامحدود ← اندازه که بتوان n هم برسن ← فرقی داره

فاز ⟨ ۰ ← ۲ برابر ← ۰ ؛ $\frac{\pi}{2}$ ← ۲ برابر ← π

* دوباره نکته فراموش:

* یه دوری دارم، می‌خوام توسط $\frac{z-i}{z+i}$ حوزه را پیدا کنم ؟

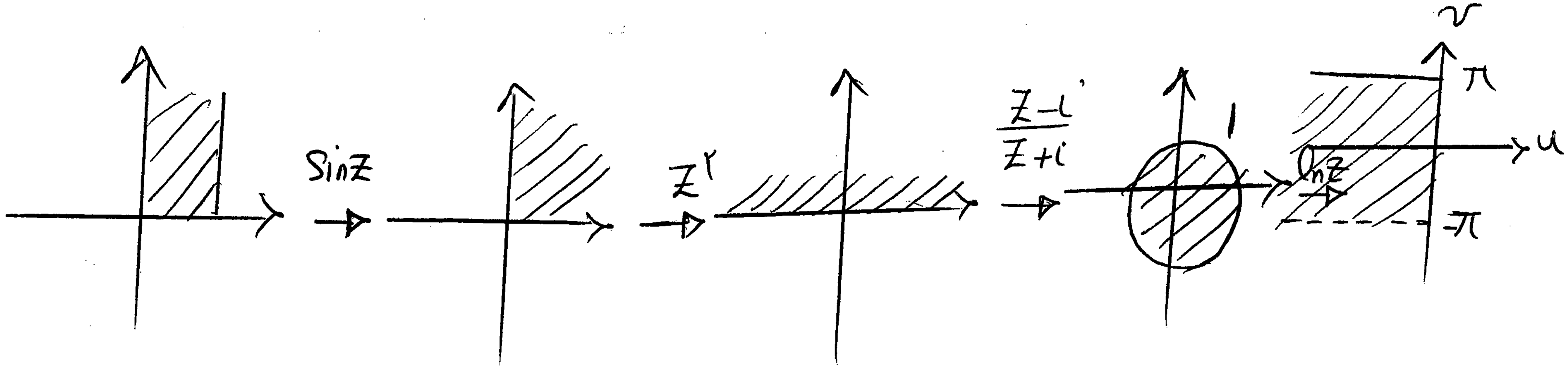
نیم صفحه بالا اند داخل ناحیه

← داخل دایره واحد ← داخل ناحیه است)

دوباره نکته فراموش ⇐ دایره‌ای که می‌خوام توسط $\ln z$ ببرم

$u = \ln r$
$v = \theta$

← $-\pi < \theta < \pi$ ؛ دایره حالت تغییرات u ← تغییرات $\ln r$ ؛ $u < 0$



* در نگاشت ترکیبی : دو عامل باعث ایجاد شکل مطلوبی که ما می‌خواهیم می‌شود ؛ نمونه نگاشت به صورت ترکیب کدام نوع باشد که نگاشت‌های مقدماتی را بلد باشیم

پس باید نگاشت مقدماتی و خواص آن را خوب یاد بگیریم

توجه * روش کلی صرفا برای نگاشت های مقدماتی بود!

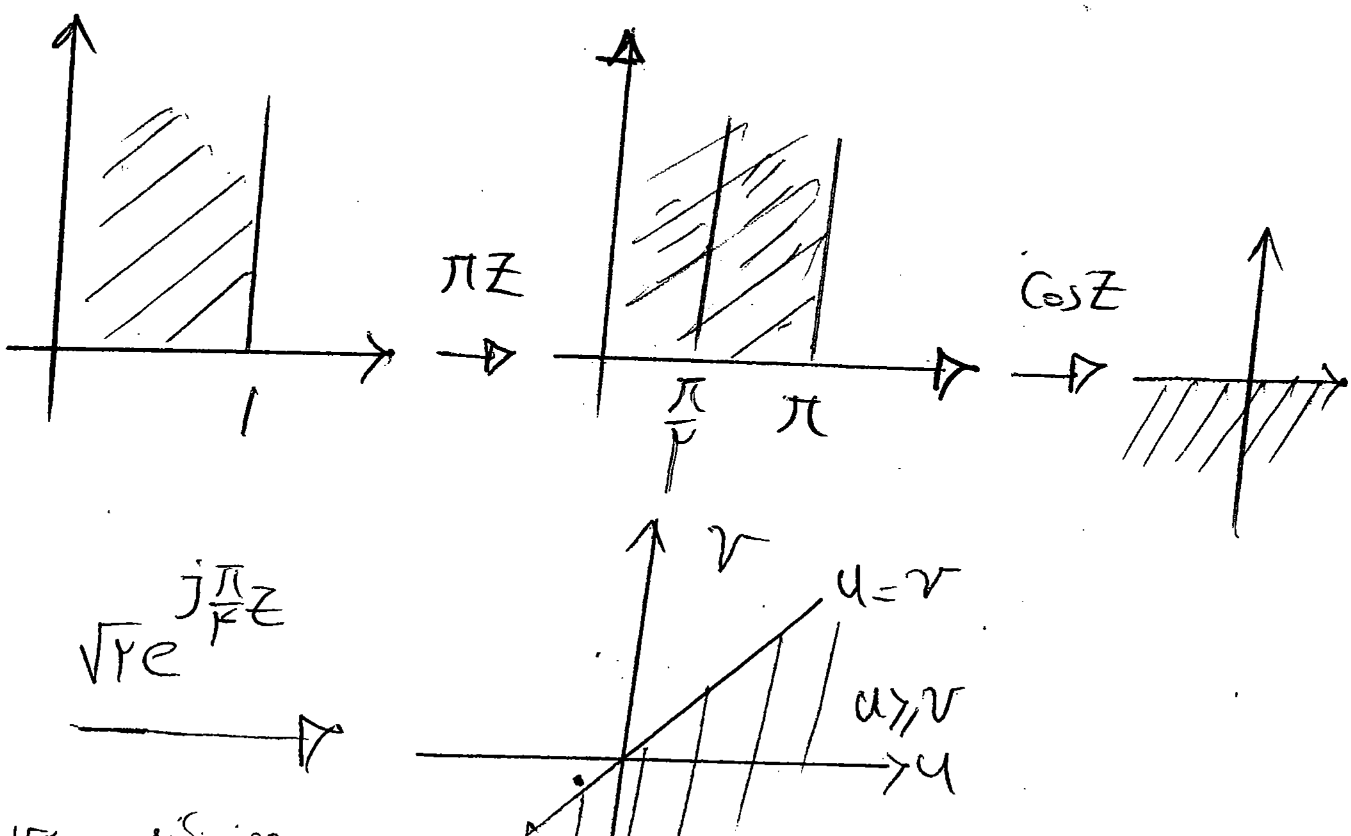
* نگاشت های دیگر را باید بصورت ترکیبی از نگاشت های مقدماتی نوشته حل شوند

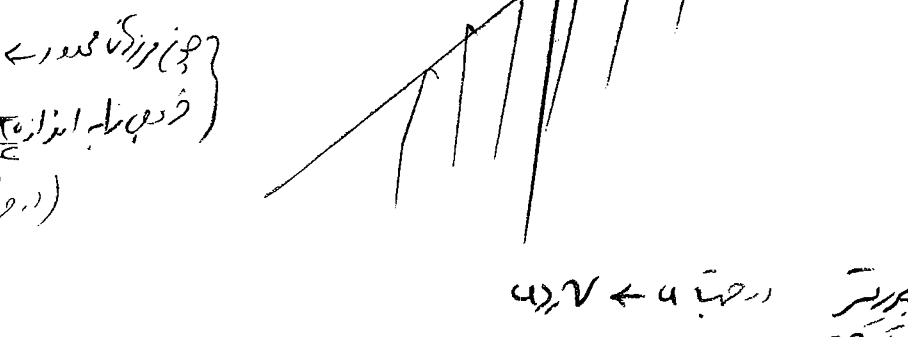
کامپیوتر ۸۱) نگاشت $W = \ln Z$ ناحیه $Re(Z) > 0$

بپوشش

صفحه ۱۶۳ تست ۲۰
* برق ۸۴

۱۴ ۱۳ ۱۲ ✓۱





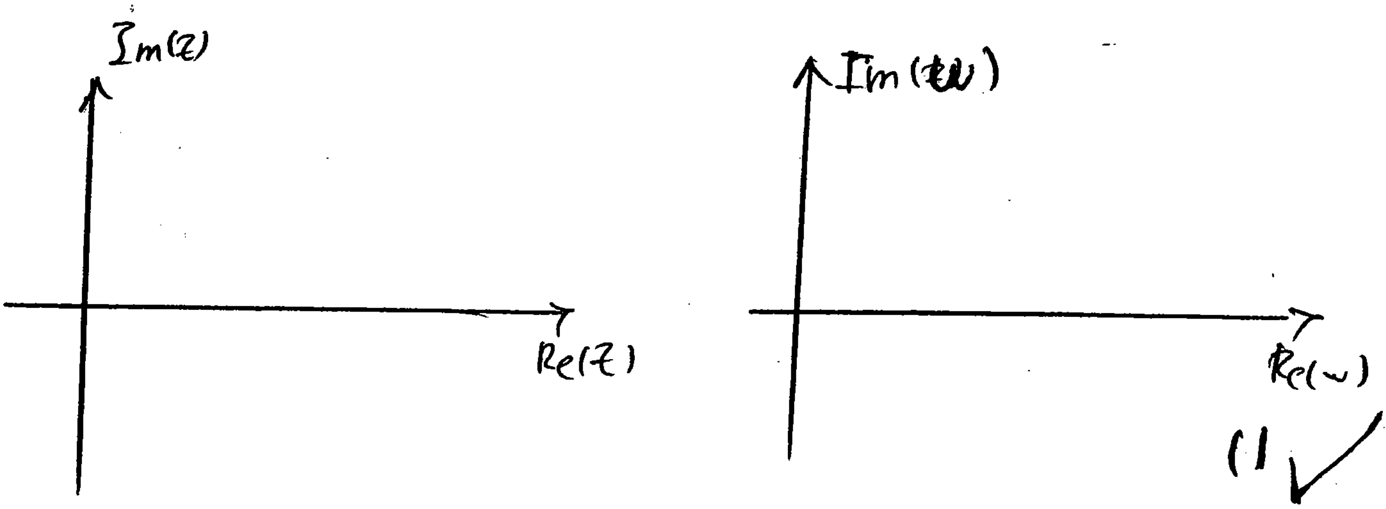
(چون ورودی محدوده ۱۳۲ است قرار
خروجی به اندازه $\frac{\pi}{4}$ دوران
(در جهت مثلثاتی)

در جهت u ← v ≤ u

در جهت محورکه بزرگتر
در خلاف جهت محورکه کوچکتر

جلد دوم صفحه ۱۵۹ تست ۱

برق ۸۷



۱) ✓

۲)

۳) ✗

۴) ✗

تست گزینه ۲ است! ورودی‌ها، خروجی سینه ← (z) اگر جای

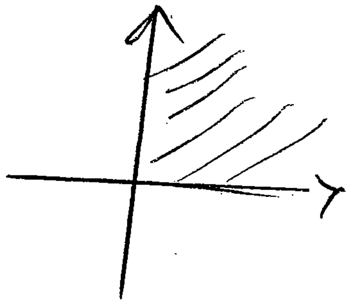
در این تست که تحلیلی نتونستید حل کنید ok ! اما اگه نتونستید تست رو رد کنید

اگه تحلیلی نتونستید حل کنید، تشریحی هم نمی‌تونید

تحلیل: از آن‌جا که شروع می‌کنیم تلاش ورودی‌ها، خروجی

Z^2

Z^4 اولین عمل روی Z

$Z^3 \longrightarrow$ 

$Z^4 \longrightarrow$ 

$\frac{Z-j}{Z+j} \longleftarrow$ * مهم عملگر تبدیل

$\frac{Z-j}{Z+j} \longmapsto$ داخل دایره واحد $\longrightarrow$ نیم صفحه بالا

خروجی دایره واحد ← جواب نیم دایره باشد ← ۳،۴ حذف.

تفاوت ۱ و ۲ در یک مقدار است!

اگر  توسط $\frac{Z-j}{Z+j}$ ← نیم دایره پایین ← ۱ درست است

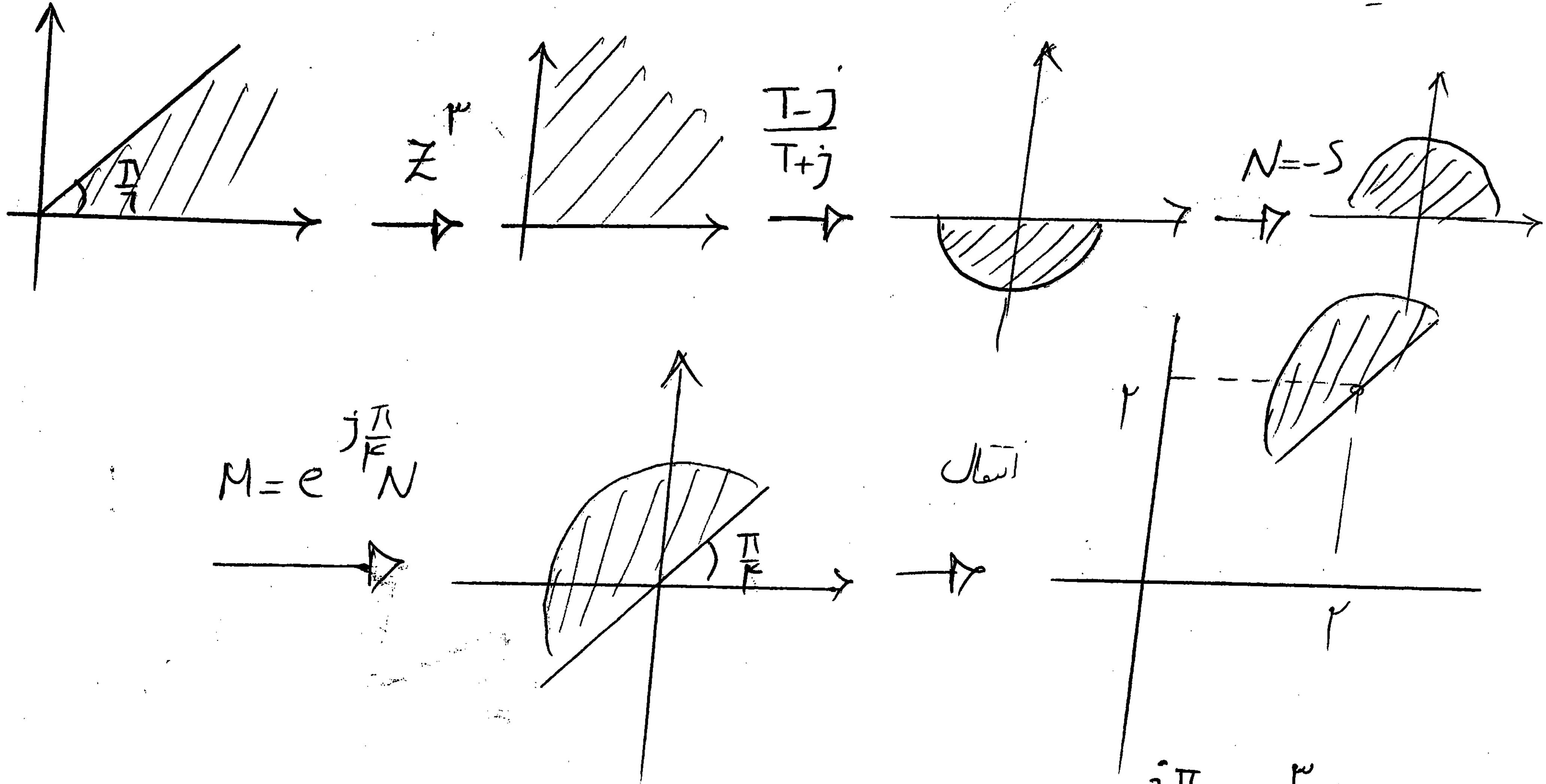
← نیم دایره بالا ← ۲ درست است

عدد گذاری: $Z = 1+j$ $\quad w=\frac{Z-j}{Z+j} = \frac{1}{1+2j} = \frac{1-2j}{5}$

یک نقطه در ربع اول

قسمت موهومی منفی ← نیم دایره پایین ⇐ پس ۱ درست است.

* تشریحی:



$$W = e^{j\frac{\pi}{4}}\,\frac{z^3 - j}{z^3 + j} + 2 + 2j$$

z^3 ← ربع اول: پس z^3 درست است.

z^2 ← نیم صفحه بالا : توسط $\frac{z-j}{z+j}$ به درون دایره: ما داخل نیم دایره می‌خواهیم

ص ۱۶۰، ت ۱۰

* برق ۷۵) با کدام تابع می‌توان حوزه D را به حوزه D' تبدیل کرد بطوریکه نقاط A و B متناظر شکل به نقاط A' و B' تصویر شوند؟

۱) ×

۲) ×

۳) ×

۴)

z^2 نیم صفحه بالا ← به جای z^2، z میذارم
z_1 داخل نیم صفحه ← داخل دایره
z_2 خارج نیم صفحه ← خارج دایره

$\frac{z+2i}{z-2i}$

$-2i$ خارج ← خارج دایره ⇐ $\boxed{\text{۲ و ۱ غ}}$

۲ و ۴ ← نیم صفحه بالا را داخل دایره می‌برند!

A، B را داده ⇐ گزینه‌ای درسته که B را به B' ببرد!

$$f(i\sqrt{2})=e^{i\pi}\frac{-2-2i}{-2+2i}=e^{i\pi}\frac{1+i}{1-i}=e^{i\pi}\frac{(1+i)^2}{2}$$

$$=\underset{-1}{e^{i\pi}}\, i \Rightarrow \boxed{-i}$$

۲ غ

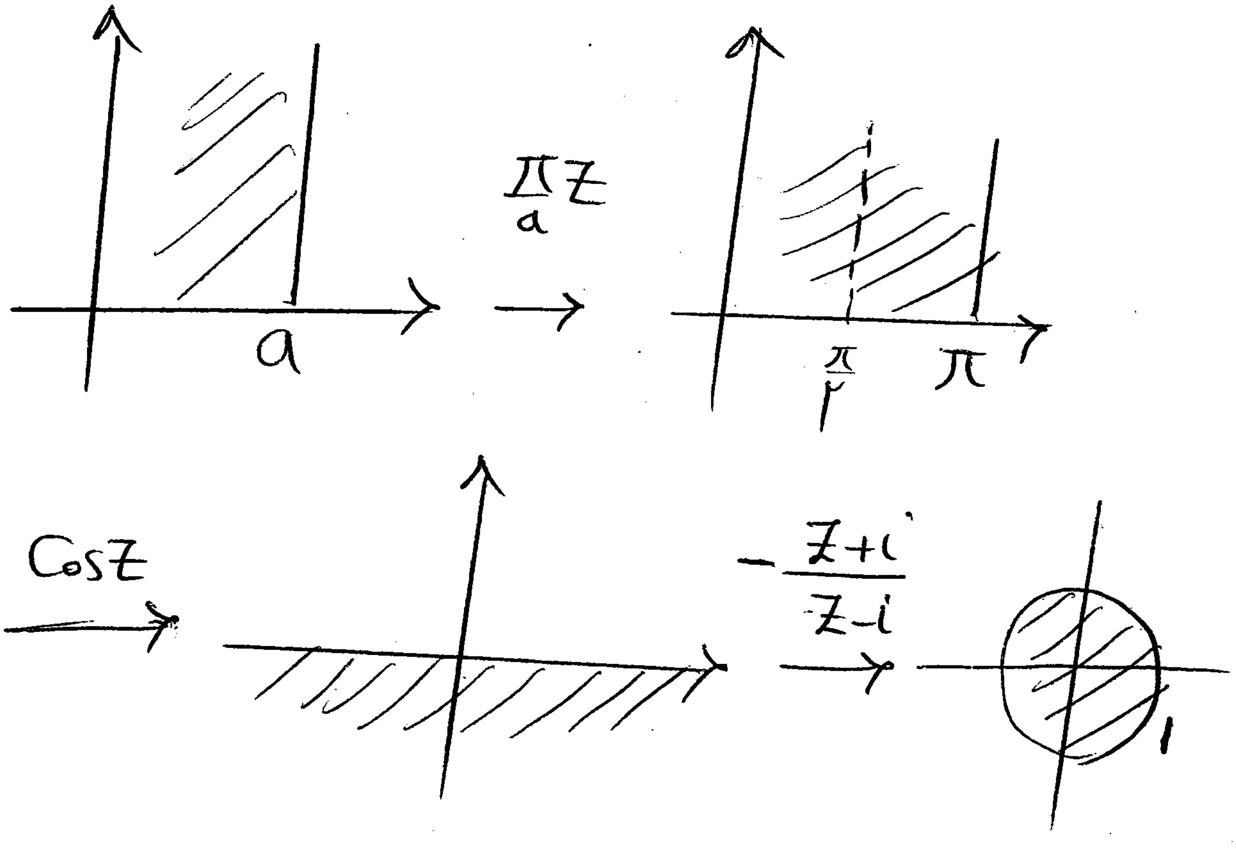
$B \to -i$

ص ۱۲۹، ش ۴۸

* کامپیوتر ۷۴

۱)　　　　۲)

۳)　　　　۴) ✓



جلد دوم : صفحه ۱۷۰، تست ۵۳

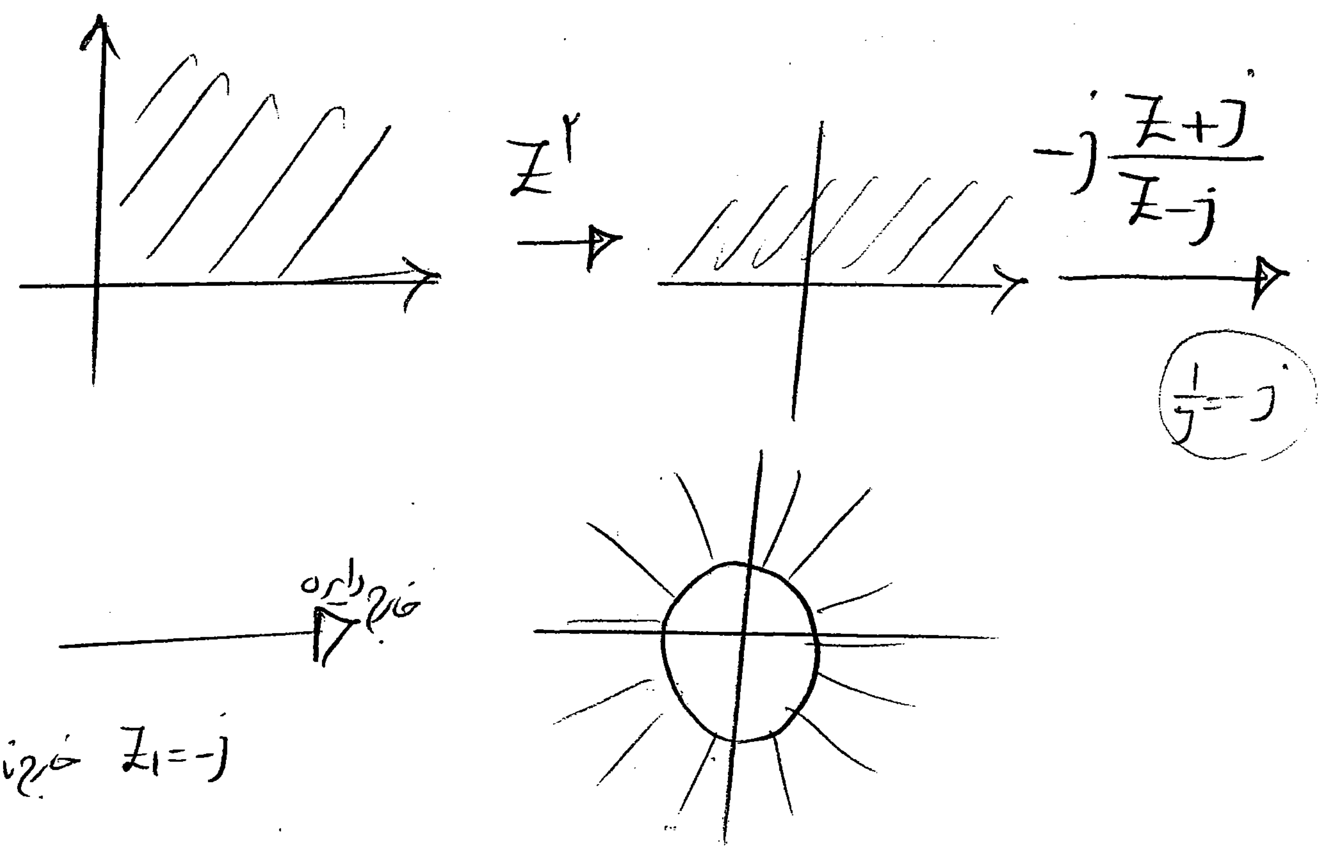
* کامپیوتر ۷۹، مواد ۹۲)

۱)

۲) خارج دایره یکه ✓

۳)

۴)

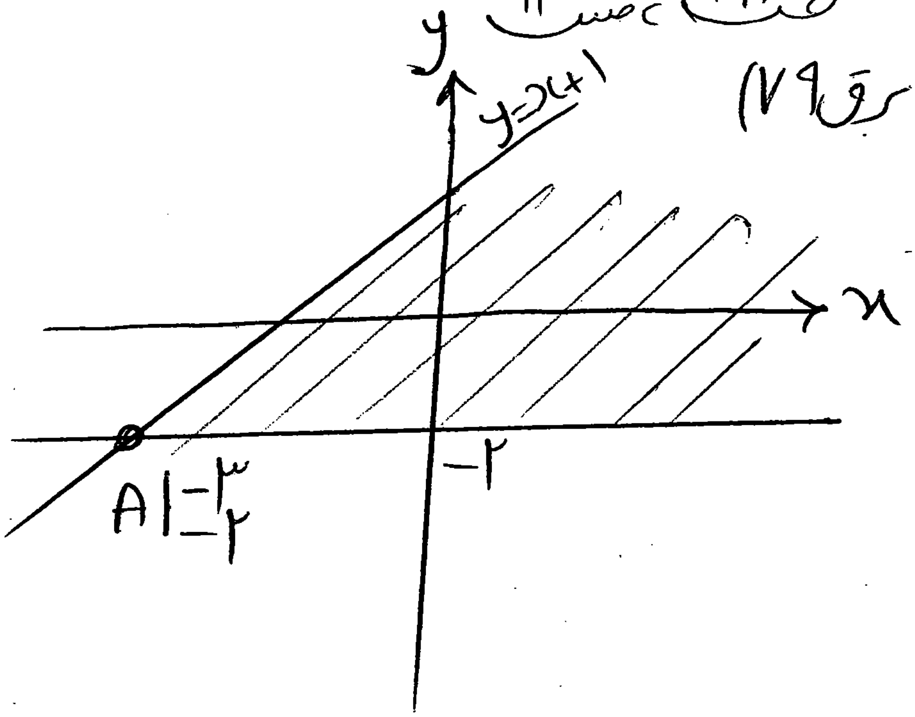


ز شکل در اندازه $\frac{\pi}{2}$ (همان ۳ =) زاویه ندارد

شدت نقاط بین شکل جابجا می‌شوند که دلیلش تا همیشه شده.

صفحه ۱۶۲ تست ۱۴

* برق ۷۹)



۱) X

۲) X

۳) X

۴) ✓✓

* چیزی که طراحان انتظار دارند بدونید :

(نقطه اش نیست یک حدودیت)

هر موقعی نخواستید نگاشت یک ناحیه داخل دایره واحد انتقال

بدهید به نیم صفحه بالا یا پایین تبدیل کنیم ← داخل یا خارج دایره واحد

* تذکر : هرگاه بخواهیم نگاشت ناحیه‌ی بین دو خط را به داخل یا خارج دایره به شعاع ۲ تبدیل کنیم مطابق زیر عمل می‌کنیم :

۱) محل تلاقی دو خط را به مبدأ مختصات انتقال می‌دهیم

۲) ناحیه‌ی ایجاد شده را به نیم صفحه بالا یا نیم صفحه پایین تبدیل می‌کنیم

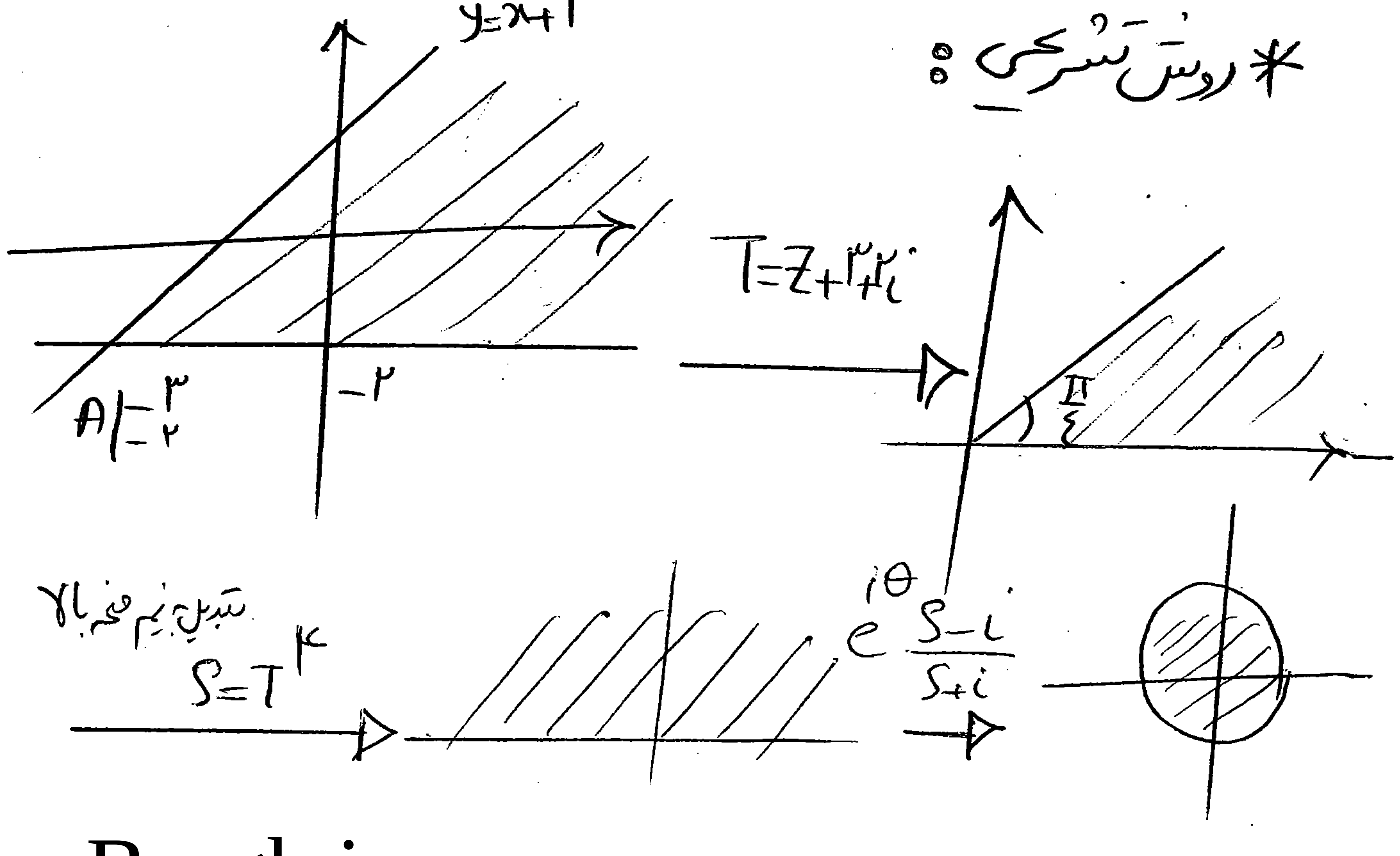
۳) از نگاشت $W=re^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ استفاده می‌کنیم

این الگویی است که طراحان انتظار دارند ما بلد باشیم!

راه کوتاه: نقطه را به مبدأ انتقال $\xleftarrow{\text{دوران نگاشت}}$ $z+3+2i$

۱ و ۲ و ۳ ⇐ اینها انجام نشده ⇐ پس غلط‌اند

* روش تشریحی:



$$W = e^{i\theta}\frac{(z+3+2i)^4-i}{(z+3+2i)^4+i}$$

حالا به گزینه ی ۴ نگاه تا شبیه سازی کنم :

گزینه ی ۴ <= از i فاکتور گرفته، من هم فاکتور میگیرم :

$$W = -ie^{i\theta}\frac{(z+3+2i)^4-i}{-i(z+3+2i)^4+1}$$

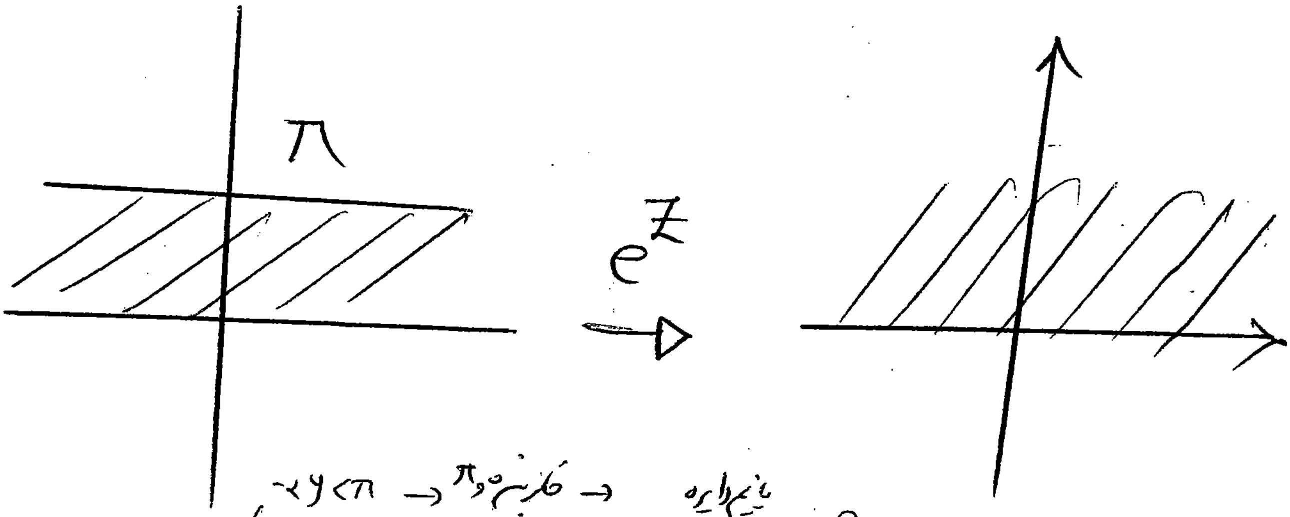
تاثیری ندارد !

پس ۴ درست است. *

* مهندسی ۸۳) نگاشت $W = \dfrac{e^z - i}{e^z + i}$ ناحیه $\{z = x+iy : 0 < y < \pi\}$

را به کدام ناحیه از نواحی داده شده می نگارد ؟

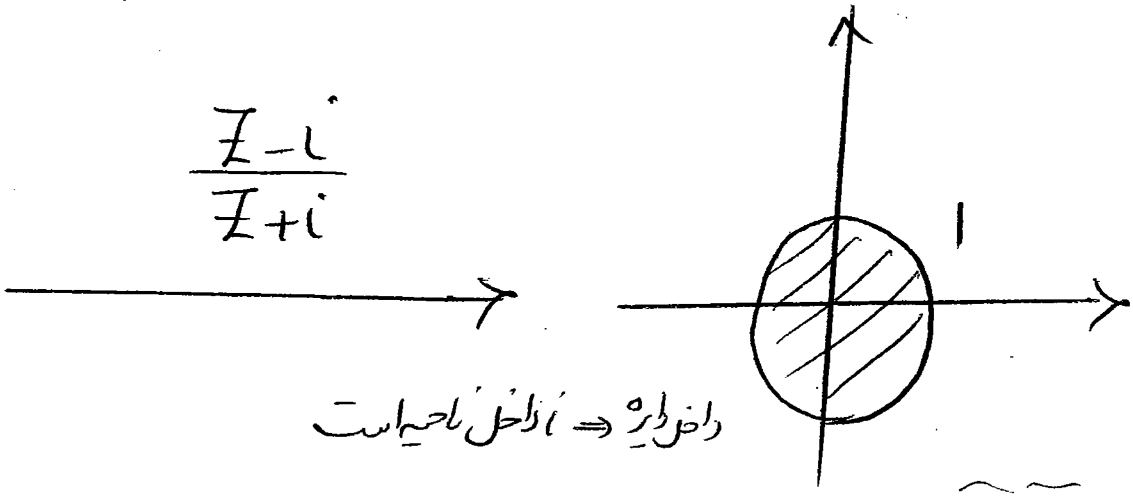
۱) $|w| < 1$ ✓ ۲) $|w| > 1$ ۳) $\mathrm{Im}\, w < 0$ ۴) $|w-i| < 1$



$0<y<\pi \rightarrow$ θ بین ۰ و π $\rightarrow$ نیم دایره
داخل نیم صفحه

$r=e^x \rightarrow -\infty<x<\infty \rightarrow 0<r<\infty$

$\rightarrow$ نیم صفحه بالا



داخل دایره $\Rightarrow$ داخل ناحیه است

$\boxed{|w|<1}$

صفحه ۱۶۳، سطر ۱۸

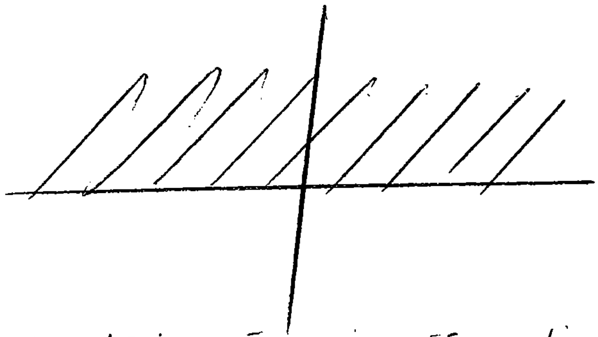
* برق ۸۳)

۱) ✓ نوار $0<v<\pi$ — ۲) ✗

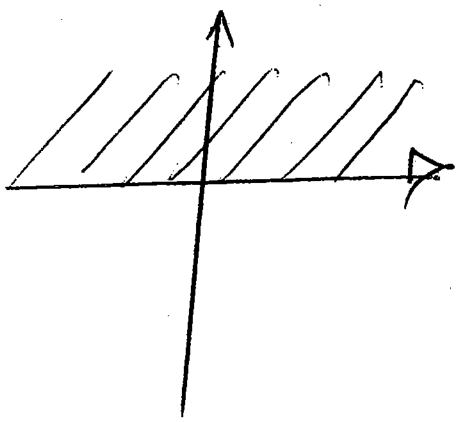
۳) ✗ ناحیه $v>0, u<0$ — ۴) ✗

Z و $\bar{Z}$ حقیقی نیستند حواست باشه ← اینجا اون نیست!

ضرایب حقیقی ← اون بحث Z و $\bar{Z}$ کنسله!



$$\frac{Z-1}{Z+1}$$



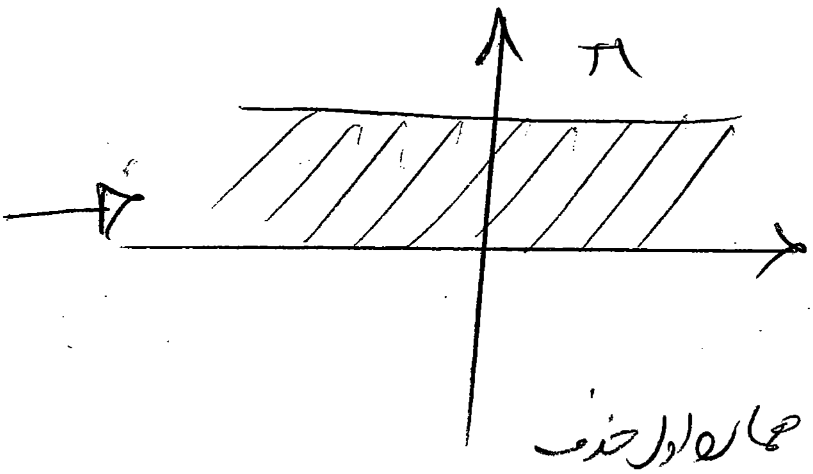
ضرایب حقیقی در زمان‌ها ← نیم صفحه بالا ← نیم صفحه بالا

$\ln z$) v از روی θ ← $0<\theta<2\pi$ ← $0<v<2\pi$ ← شرط ①

u از روی r ← هر چیزی می‌تونه باشه

u همان $\ln r$ است ⇐ r از ۰ تا ∞ تغییر کند، $\ln r$ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند

u از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند



π

* تحلیلی نیست

سر ۲ معادله اول حذف

v همان θ است ⇐ θ فقط بین ۰ و 2π ⇐ v محدود است ⇐ ۳ و ۴ غ

در ۳ v عدد π نیست

بین ۰ و ۲ ⇐ عدد

$z=0$

$\ln(-1)=i\pi$ ⇐ v باید بتونه π باشه ⇐ ۴ غ

جلد دوم : ص ۱۶۴ ، س ۲۲

* برق ۸۷

۱) ✗ ۲) ✓

۳) ✗ ۴) ✗

* نگاشت دو خطی داخل دایره ـــکردهـــ> تبدیل به نیم صفحه بالا یا پایین !

۳ و ۴ حذف ⇐ $\ln z$ هیچ وقت وصلِ نیم صفحه بالا یا پایین نمی‌شه !

بین ۱ و ۲ ⇐ ۱ حذف : قطعاً تلقی آنجا هم دایره به شعاع ۱ باشه باید این باشه :
(باید به ۲ بیرون باشه)

توی ۲ دو شد از ۲ تا کنتور رفت اما توی گزینه ۱ نمی‌شد از ۲ تا کنتوره

⇐ پس ۲ صحیح است !

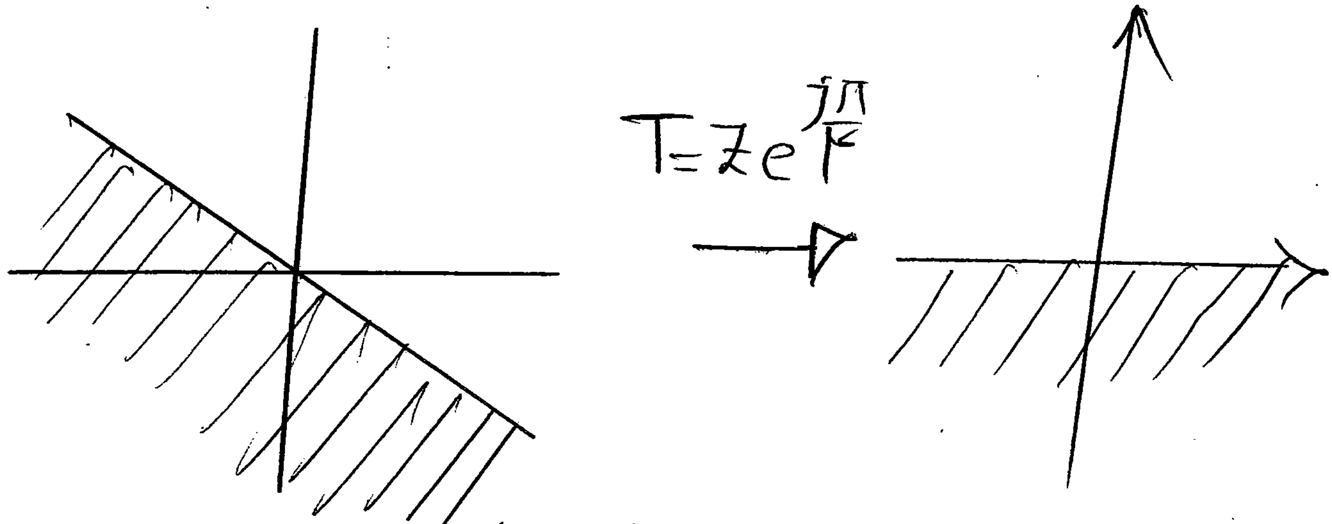
ص ۱۲۴، س ۲۴

* برق ۸۹

کدام تبدیل دیسک $|z|<2$ را روی ناحیه $u+v<0$ تصویر می‌کند

۱)　　　　　　　　۲) ✓

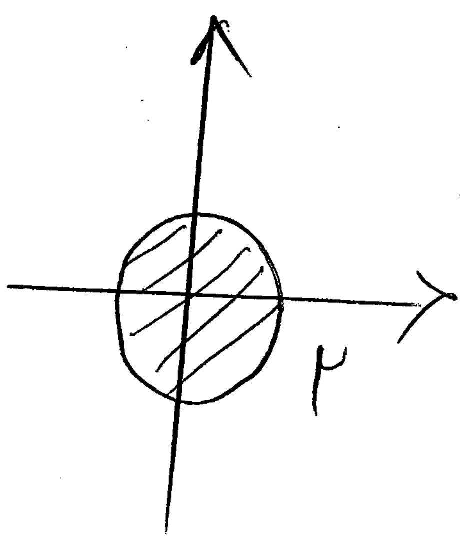
۳)　　　　　　　　۴) ✓



اینجا اول نگاشت رو فرض کردیم [illegible] دایره [illegible] با دو تبدیل [illegible]
اینجا پایین راحت تره

تمام داخل دایره باشد

$$2e^{j\theta}\,\frac{T+j}{T-j}$$



حا

$$W = 2e^{j\theta}\,\frac{z e^{j\frac{\pi}{4}} + j}{z e^{j\frac{\pi}{4}} - j}$$

جای قطر اصلی عوض و قرینه

$$\Rightarrow \quad w = \frac{jz + 2j e^{j\theta}}{z e^{j\frac{\pi}{4}} - 2e^{j\theta} e^{j\frac{\pi}{4}}}$$

$$\frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{e^{j\frac{\pi}{4}}} = e^{j\frac{\pi}{4}} \leftarrow j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$\Leftarrow$ صورت از j فاکتور، مخرج از $e^{j\frac{\pi}{4}}$ فاکتور

$$\boxed{W = e^{j\frac{\pi}{4}}\,\frac{z + 2e^{j\theta}}{z - 2e^{j\theta}}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow w = e^{j\frac{\pi}{4}}\,\frac{z+2j}{z-2j}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow w = e^{j\frac{\pi}{4}}\,\frac{z-2j}{z+2j}$$

هم ۲ درسته هم ۱۴

صفحه ۱۶۴ تست ۲۵

* برق ۹۰)

۱)

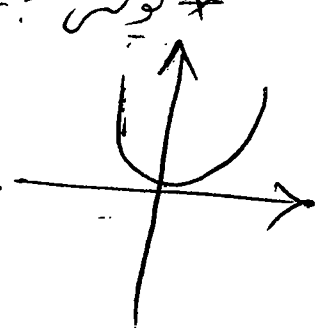
۲)

۳)

۴)

* پوشا: برد کل R را پوشش دهد

$y=x^2$ → برد $=R^+$ →



کل R را پوشش نمی‌دهد

$y=x^3$ → برد $=R$ → R، R را پوشش می‌دهد *

یک به یک: بستر تناظر یک به یک را مثل آزمایش ایجاد کرد

سنگ متناظر با توسعه: متناظر با هر توسعه یک سنگ!

تناظر یک به یک بین سنگ‌ها و اموالشان!

انتظار داریم ما هم تناظر یک به یک را بلد باشیم!

تابع یک به یک: بین ورودی و خروجی تناظر یک به یک باشد!

تشخیص دادن تحلیلی یک به یک بودن ساده است!

در حقیقت ساده است ۱ روش دارم،

در حقیقت ۱ یکنوا باشه → یک به یک
(اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی)

۲ خط موازی محور افقی را با یک نقطه قطع کند → یک به یک

به صورت تحلیلی است

در اینجا مفهوم نداره ← ۱ اکیدا صعودی در کل محدوده ندارد

۲ شکل هم نمی‌شه رسم کرد

گزینه ۱ درست است ← خروجی کل صفحه مختلط

۲ و ۳ و ۴ ← نوشتن نیستند

۲ ← ربع اول ← کل صفحه پوشش نمی‌دهد

۳ ← نیم صفحه بالا ← "

۴ ← ربع دوم ← "

۵ کراندار نیست!

هر چهار گزینه غلط است!

$$W = \sin(z) = \underbrace{\sin x}_{\text{کراندار}} \cosh y + i \cos x \underbrace{\sinh y}_{\text{کراندار نیست}}$$

پس باید $\cos x$ یا $\cosh y$ کراندار باشند

اگر $\cosh y$ کراندار نمی‌توان رسم کرد ⇐ دو تا باید صفر شود تا کراندار شود خروجی کامل باشد

$\cos x = 0$ ⟹ باید $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ خروجی باشد

پس آن بازه هر دو انتها حذف شود ⇐ کراندار

* ریشه صفر ← $x = \frac{\pi}{2}$

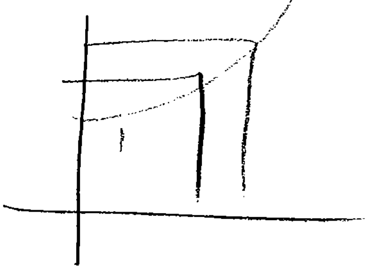
$$z = \frac{\pi}{2} + i \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + i\right) = \operatorname{ch} 1$$

$$z = \frac{\pi}{2} - i \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \operatorname{ch} 1$$

بازای ۲ ورودی ۱ خروجی ← یک به یک نیست

۲، ۳، ۴ ← یک به یک !

اگر y مثبت ← $\operatorname{ch} y$ ← یک به یک



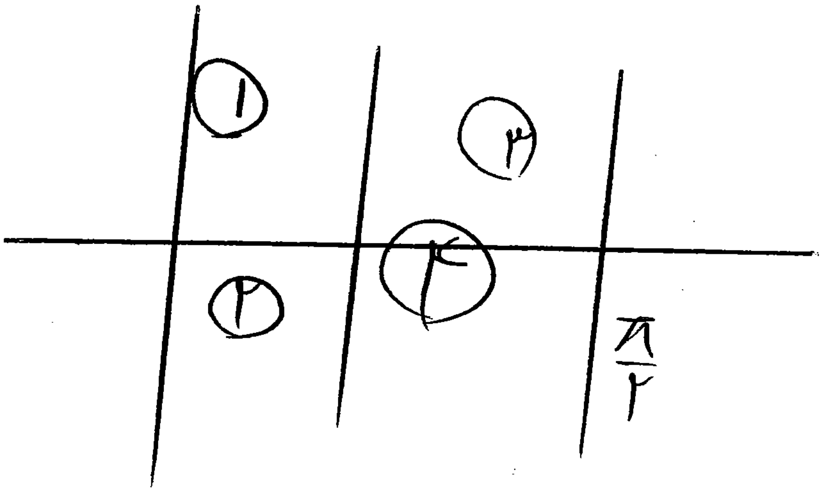
تنها عاملی که مسئله به هم بزنه ← $\cos x$

$\cos x$ در صورتی میتونه یک به یک بودن و به هم بزنه

ریشه صفر ← $\underline{\operatorname{ch} y = 0}$

نمیشه ← یک به یک هستند !

(پاسخ ۱ و ۰ در طول یک بازه تناوب بخش)



ص ۱۶۹ ، س ۴۶

* مغناطیس (۹۱)

۱)

۲)

۳)

۴)

تک به یک است ← ۲ و ۴ حذف!

۲ و ۳ ← نقطه ۱ نداری

$$z=-\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} u=-\frac{1}{2} \\ v=0 \end{cases}$$

۳ غ ← ۴ ص است!

۴ همین عدد نداری و ۴ هم حذف می‌شد!

⊖ را برای قدر مطلق نداشتم!

هر عدد منفی بدی بزنه صفر بدست میار!

$\frac{\pi}{6}$ چون round تر ساده‌تر بود، من امتحان کردم

معیار تک به تک: $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$ خرابکارا Cos صفر میشه!

ولی $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$ توی ناحیه نیست ← پس تک به تک است!

* حد توابع مختلط

* از حد توابع حقیقی شروع می کنیم:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\exists \quad \forall$

* سه تغییر ایجاد می کنیم $\begin{cases} \forall \to \exists \\ \exists \to \forall \end{cases}$

هدف پرسش: بعضی کرانه ها را حفظ می کنند!

ها می خواهم نکاتی دیگر داشته باشم:

باید نقش حافظه را کمرنگ کرد!

راهش این است درک درستی از مطالب در ذهن ایجاد شود و

این درک درست را گسترش دهیم!

۱ ← مانند کار بین آماده تا کلاس!

در ریاضی تعاریف مطلوم واقع شده اند

حل مسئله خیلی خوب است ⇐ ولی مفهوم هم مهم است!

انتظار می‌رود در مورد حد تصویر درستی در ذهن ما باشد!

درک درستی

انحطاط مفهومی :

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \equiv$ در همسایگی محذوف نقاطی وجود دارد که به ازای آن که هر اندازه دلخواه شود $f(x)$ را به L نزدیک کرد

می‌خواهیم همین درکی که از حد در ذهن ماست را به زبان ریاضی بنویسیم :

$|x-a| < b$
- فاصله x از a کمتر از b
- همسایگی حول a به شعاع b

$$\exists \delta > 0 , \forall \varepsilon > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

وجود دارد در همسایگی x_0 $|x-x_0|<\delta$

$\downarrow$

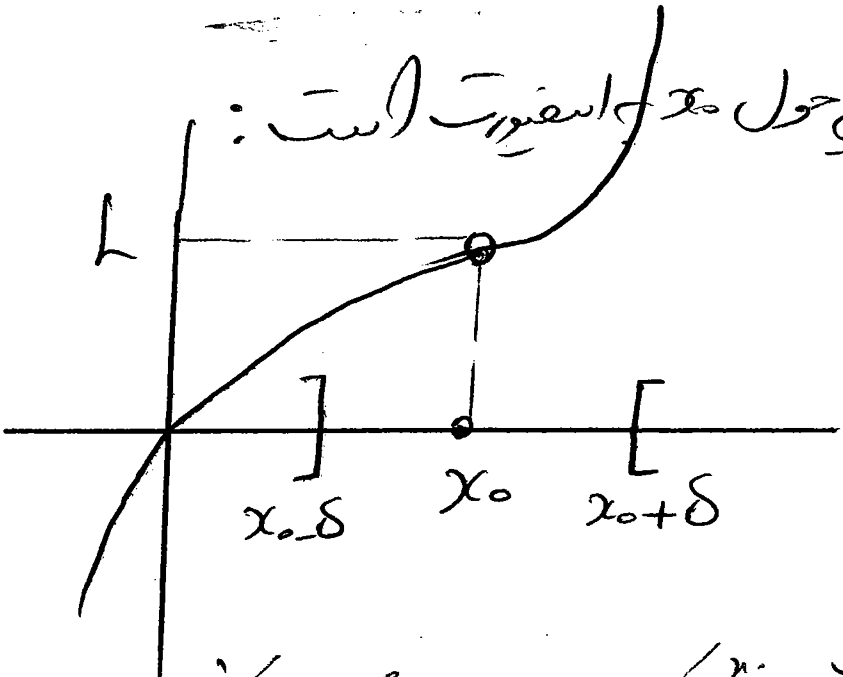
$\exists \delta$

$f(x)$ به L نزدیک $|f(x)-L|$

هر اندازه دلخواه $= \varepsilon$ کوچک

* نتیجه‌ای از تعریف: x حقیقی ⇐ عدد حقیقی ایده‌آلی

همسایگی حول x_0 به صورت است:



L حد ⇐ { به ازای نزدیک شدن x به x_0 ⇐ $f(x)$ به L نزدیک شود
به ازای سمت چپ و راست هم نزدیک شدن ⇐ $f(x)$ به L نزدیک شود

حال همینو copy paste تو کنار هم ⇐ خط باطل میشه!

پس باید کران پایین داشته باشیم!

که اونجا به تناقض نرسیم

$\lim_{x\to 0} \sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$ حد ندارد ⇐ { نه حد چپ دارد نه حد راست
چون نه همسایه چپ دارد نه همسایه راست

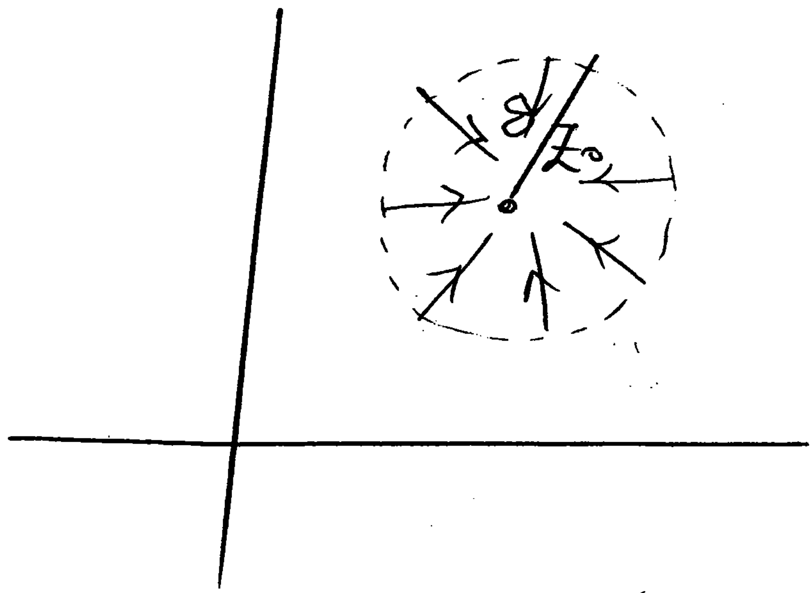
حالا باید می‌رسیم به حد تابع مختلط :

مفهوم حد همان است!

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = h$$

در همسایگی z_0 نقاط وجود دارند

$\exists\delta>0$ و (ε) ، $|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-h|<\varepsilon$



در فضای ۲ بعدی : همسایگی دایره
در فضای ۳ بعدی : همسایگی کره
همسایگی بالاتر از ۳ بعد : گوی

از چهار جهت ← چطور به z_0 نزدیک شوم!

مختلط ۹۰ درصد مثل حقیقی
۱۰ درصد متفاوت

حل مسائل تحلیلی

* دوشنبه - ۹۲/۶/۱۸ - جلسه‌ی نهم - ریاضی مهندسی

* برای محاسبه‌ی $\lim_{z\to z_0} f(z)$ مطابق زیر عمل می‌کنیم :
(در صورتی که مبهم باشد)

① $z-z_0 = Z$ را در نظر می‌گیریم تا حد به حول صفر تبدیل شود

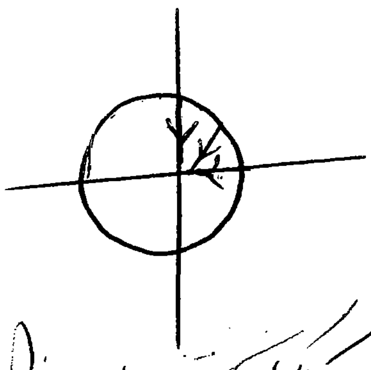
② $Z = r\,cis\theta$ در نظر گرفته و سپس $r\to 0$ میل می‌دهیم

اگر حاصل به θ بستگی داشته باشد، می‌گوییم تابع حد ندارد، در غیر اینصورت عدد بدست آمده برابر با حد تابع است.

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^3}{\bar{z}^3} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3 cis 3\theta}{r^3 cis(-3\theta)} = cis 6\theta$$

چون به θ بستگی دارد حد ندارد

$\longrightarrow$



* حداقل اگر θ ها یکسان نشد، حد ندارد!

* تذکر: اگر توابع کسری چندجمله‌ای برحسب z و $\bar{z}$ داشته باشیم، درصورتیکه صورت و مخرج نسبت به z و $\bar{z}$ همگن باشند، در حد تابع وقتی $z \to 0$ داریم:

① اگر مرتبه همگنی صورت و مخرج یکسان باشد ← تابع حد ندارد

② اگر مرتبه همگنی صورت از مخرج بیشتر باشد ← تابع حد دارد و برابر صفر است

③ اگر مرتبه همگنی صورت از مخرج کمتر باشد ← تابع حد ندارد و به سمت بی‌نهایت میل می‌کند

ex:

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^3 + z^2\bar{z}}{(\bar{z})^3 + z\bar{z}^2} \rightsquigarrow \text{وجود ندارد}$$

صورت و مخرج همگن از مرتبه ۳ ← وجود ندارد

* عموماً سؤال مستقیم از این نمی‌آید!

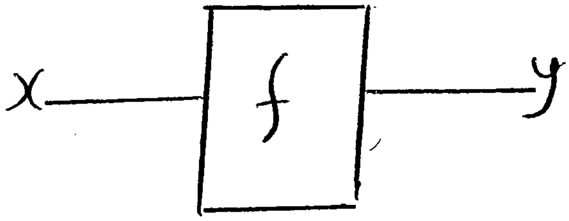
در صورت غیرمستقیم در تست برخورد می‌کنیم!

* مشتق

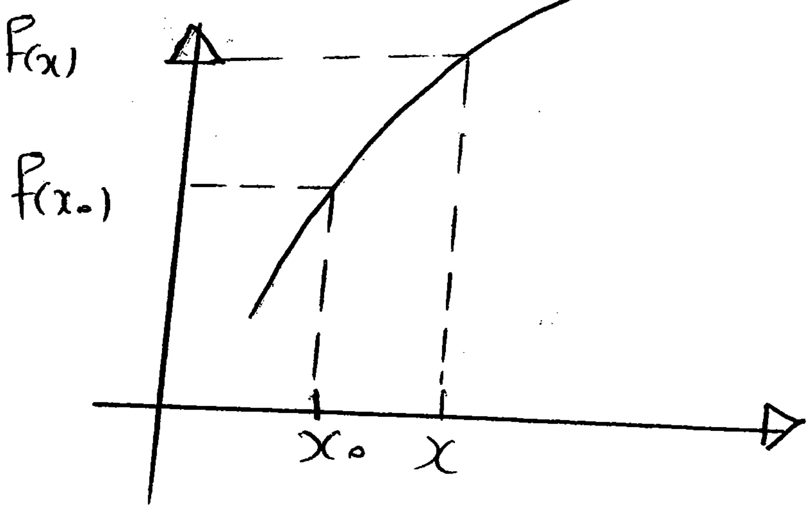
* تغییرات جزئی در ورودی ⟸ اثر در خروجی ؟
* تغییرات خروجی باید نسبت به ورودی سنجیده شود تا معیار ما درست باشد

پس هر چه تغییرات خروجی به تغییرات ورودی ⟸ تعریف مشتق :

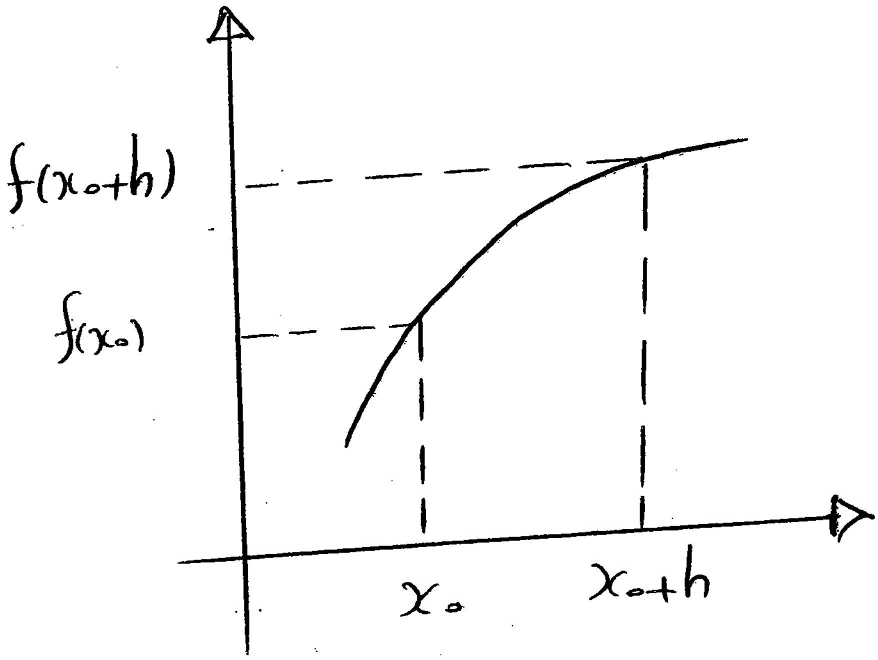
تغییرات خروجی به تغییرات ورودی وقتی که تغییرات ورودی صفر است یعنی تغییرات ورودی جزئی است.



$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{حد}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



$$\underset{x \to x_0}{\text{حد}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$



$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

⋮

* دانشجوی کامل: در چه صورتی $F(x)$ در x_0 مشتق دارد؟

1. در x_0 تعریف شده باشد
2. در x_0 حد داشته باشد
3. در x_0 پیوسته باشد
4. در x_0 مشتق چپ و راست یکسان باشد
5. مقدار مشتق محدود باشد
6. مقدار مشتق محدود و مشخص باشد

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}} \sin\frac{1}{x} = \sin\infty$$ محدود هست اما مشخص نیست

دانشجوی دوم : در چه صورتی $f(x)$ در x_0 مشتق دارد:

هرگاه در صورتیکه این حد وجود داشته باشد :

$$f'(x_0) = \underset{x\to x_0}{\text{حد}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

* دومی هم معادل اولی است :

حد در صورتی وجود دارد که صورت صفر باشد :

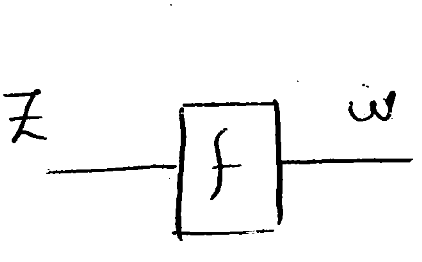
باز هم باید صفر شود

$$\frac{\quad}{0}$$

$$② \quad \underset{x\to x_0}{\text{حد}} f(x) = \underset{1}{f(x_0)}$$

$$\underbrace{\underset{x\to x_0}{\text{حد}} f(x) = f(x_0)}_{③}$$

* مختلط هم همینطور است :



$$\underset{\Delta z\to 0}{\text{حد}} \frac{\Delta w}{\Delta z} \quad \text{یا} \quad \underset{z\to z_0}{\text{حد}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \cdots$$

از دانشجویان هم می‌پرسیم: در چه صورتی تابع مختلط مشتق دارد؟

در صورتی که این حد وجود داشته باشد.

همسایگی: دایره

از هر مسیری به z_0 نزدیک شویم باید این حد وجود داشته باشد

و برابر باشد. هر مسیری برویم ← کار سخت!

قضایا، مسیر را برای ما هموار کرده‌اند!

و تئوری‌ها همون سال‌ها که خیلی دقیق کردند آوردیم، اینجا هم به دست میاریم!

تا اینجا مقدمه، از این به بعد اصلی: (این موضوع در تست ارشد بیشتر مسائل میاد)

* قضیه: اگر تابع $f(z)=u+iv$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه شرایط کوشی-ریمان در مورد u و v برقرار است.

شرایط کوشی ریمان در مختصات دکارتی

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

در مختصات قطبی

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r \dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

نتیجه ۱: اگر شرایط کوشی ریمان برقرار نباشد آنگاه $f(z)$ مشتق پذیر نیست.

$$f(z) = 3x - 5iy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 3 \neq -5$$

در هیچ نقطه‌ای شرایط کوشی ریمان برقرار نیست

← در هیچ نقطه‌ای تابع مشتق ندارد!

خیلی جالبه برام!

نتیجه ۲ : ممکن است شرایط کوشی ریمان در نقطه‌ی z_0 برقرار باشد اما تابع در نقطه‌ی z_0 مشتق پذیر نباشد.

* مثال) نشان دهید شرایط کوشی ریمان در مبدأ برای تابع

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{(\bar{z})^2}{z}, & z\neq 0\\[2mm] 0, & z=0\end{cases}$$

برقرار است، اما تابع در مبدأ مشتق ندارد.

$$f'(0)=\lim \frac{\frac{(\bar{z})^2}{z}-0}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{(\bar{z})^2}{z^2} \Rightarrow \text{وجود ندارد}$$

روش اول: y ثابت ← از تابع نسبت به x مشتق ← در انتها به جای xها و yها a,b میذاریم!

مشتق جزئی $\frac{\partial}{\partial x}$

روش دوم: y را b بگذار ← از تابع نسبت به x مشتق ← در انتها به جای xها a میذاریم!

پاسخ: هر دو روش درست است!

اما انتخاب دومی بهتر است ← b عددی ← یه تیکه از تابع حذف میشه راحت‌تر!

ما هم انتخاب دوم

هر موقع خواستی شرایط کوشی ریمان را در یک نقطه بدست بیاری ← نسبت به مشتق اول جدا جایگذاری نکن بعد مشتق بگیری!

تا نسبت به y مشتق ← عدد جایگذاری نکن بعد مشتق بگیری!

۱۲۳

$$f(z)=\frac{(x-iy)^2}{x+iy}$$

$x=0$: $iy \rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=y \end{cases}$

$y=0$: $x \rightarrow \begin{cases} u=x \\ v=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0}=1 \\[2ex] \left.\dfrac{\partial x}{\partial y}\right|_{x=0}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y=0}=0 \\[2ex] \left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{x=0}=1 \end{cases}$$

* شرایط کوشی ریمان در مبدا برقرار است اما مشتق در مبدا ندارد!

ص ۲۱۴ س ۱۶

ص ۲۱۵

* برق ۸۷)

حد $\dfrac{\text{قطب از مرتبه ۳}}{\text{قطب از مرتبه ۲}}$ ⇒ صفر = ۰ → صورت است

۱) ×

۲)

۳)

۴)

یک سؤال از ریاضی عمومی:

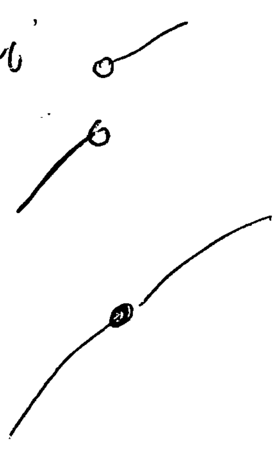
$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

روش ۱ (غلط): $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(0)=0-\cos(\infty)\rightarrow$ مشتق وجود ندارد

روش ۲ (درست): $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

ناپیوستگی رفع نشدنی ← هیچ وقت مشتق ندارد



ناپیوستگی رفع شدنی

↓

طراح پیوسته‌اش کرد

↓

هیچ راهی غیر استفاده از تعریف ندارد!

چون ضابطه تابع در این نقطه اصلا تعریف نشده

و از ضابطه تعریف کردیم غلط است باید از تعریف مشتق (روش ۲) استفاده کرد

اینجا هم عین داستانه ← نابیوستن رفع شدنی ← طراح پیوستش کرده

← هیچ راهی بجز تعریف نداره!

تعریف

$$f'(0) = \lim_{Z \to 0} \frac{(\bar{Z})^3}{Z^3} \quad \text{موجود نداره} \to 0 =$$

پس مشتق ندارد ← یا گزینه ۲ درسته یا ۳!

۳ درسته!

چون اگه کوشی ریمان صدق کند ← ۴ هم درسته! ← ۲ گزینه درست داریم!

یعنی ۲ درست

اما بررسی میکنیم:

$$f(Z) = \frac{(\bar{Z})^3}{Z^2} = \frac{(x - iy)^3}{(x+iy)^2} \begin{cases} x=0 \quad -iy \to \begin{cases} u=0 \\ v=-y \end{cases} \\ y=0 \quad x \to \begin{cases} u=x \\ v=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0} = 1 \neq \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x=0} = -1$$

← کوشی ریمان برقرار نیست!

* برق ۹۲ـ مکانیک۲ (۹۴

راه ۱)

درمبدأ گوشه‌ها برقرار است! ←

درمبدأ مشتق‌پذیر نیست! ←

درمبدأ گوشه‌ها برقرار است! ←

۱) ✗

۲) ✗

۳) ✓

۴) ✗

راه ۲)

مشتق‌پذیری از تعریف جزئی ← مشتق‌پذیر نیست ← ۲ و ۴ غلط است!

از آنجا که گوشه‌ها برقرار نباشد ← هم ۱ درست هم ۴!

پس باید گوشه‌ها برقرار باشد ← ۳ و ۱ و ۲!

راه ۳)

۳) هرگاه تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد، مشتقات جزئی آن در آن نقطه پیوسته نیستند!

اگر گوشه‌ها برقرار نباشد ← مشتق‌پذیر نیست

اگر گوشه‌ها برقرار باشد ← ممکنه مشتق‌پذیر باشه، ممکنه نباشه!

* قضیه ۲ : اگر تابع $f(z)=u+iv$ دو شرط زیر را دارا باشد،

آنگاه $f(z)$ مشتق پذیر است :

۱- توابع حقیقی u و v پیوسته و دارای مشتقات جزئی باشند

۲- شرایط کشی ریمان در مورد u و v برقرار باشد

شرط ① ، همیشه برقرار است، حساسیتی نیست

در توابع حقیقی، جز توابع ارتجالی، در دامنه تعریفشان پیوسته و مشتق پذیرند!

به عنوان مثال: اگر u و v در کل R تعریف شوند ← مشتق پذیرند!

* مثال: مشتق پذیری توابع داده شده را بررسی کنید.

① $W=\cos z$

② $W=\cos \bar{z}$

③ $W=|z|^2$

④ $W=x^2+x^3+iy^2$

⑤ $W=\ln z$

① $w = \cos z \Rightarrow \begin{cases} u = \cos x \operatorname{ch} y \\ v = -\sin x \operatorname{sh} y \end{cases}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow -\sin x \operatorname{ch} y = -\sin x \operatorname{ch} y \checkmark$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \cos x \operatorname{sh} y = \cos x \operatorname{sh} y \checkmark$$

شرایط کوشی ریمان همواره برقرار است

u,v در تمام نقاط تعریف شده اند!

تابع در تمام نقاط مشتق پذیر است! ← ① ✓

② $w = \cos \bar{z} \Rightarrow u + iv = \cos(x - iy)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \cos x \operatorname{ch} y \\ v = \sin x \operatorname{sh} y \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow -\sin x \operatorname{ch} y = \sin x \operatorname{ch} y$$

$$-2 \sin x \operatorname{ch} y = 0$$

$$\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \checkmark$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \cos x \,\mathrm{sh}\, y = -\cos x \,\mathrm{sh}\, y \Rightarrow 2\cos x \,\mathrm{sh}\, y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{sh}\, y = 0 \rightarrow y = 0 \\ \cos x = 0 \rightarrow x = (2k-1)\frac{\pi}{2} \times \end{cases}$$

پس نمی‌تونن همزمان برقرار!

۱ باید برقرار ⇐ پس ۲ دیگه نمی‌تونه برقرار!

فقط در نقاط $z = k\pi$ شرایط کوشی ریمان برقرار است ⇐ ۱✓ فقط در نقاط $z = k\pi$ تابع مشتق دارد

③ $w = |z|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

فقط در $z=0$ شرایط کوشی ریمان برقرار است ⇐ ۱✓ فقط در $z=0$ مشتق دارد!

④ $w = x^2 + x^3 + iy^2 \rightarrow \begin{cases} u = x^2 + x^3 \\ v = y^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \longrightarrow 2x+3x^2=2y \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \longrightarrow 0=0 \end{cases}$$

:

فقط روی منحنی $2x+3x^2=2y$ شرایط کوشی ریمان برقرار است $\xleftarrow{\text{①٧}}$

تابع فقط روی منحنی $2x^2+3x^2=2y$ مشتق پذیر است!

⑤ $W=\ln z \longrightarrow w=\ln r+i\theta \longrightarrow \begin{cases} u=\ln r \\ v=\theta \end{cases}$

شرایط قطبی:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \rightarrow \dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r} \checkmark \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \theta}=-r\dfrac{\partial v}{\partial r} \rightarrow 0=0 \checkmark \end{cases} \Rightarrow$$

شرایط کوشی ریمان همواره برقرار است

(در مبدا مشتق ندارد ⇐ $\ln r$)

$\ln z$ در مبدا و نقاط روی شاخه اش مشتق ندارد

نقاط مشتق ناپذیری $\ln z$ نقاطی هستند که ⇐ شاخه اصلی ← $\ln z$ در مبدا و محور حقیقی منفی ← مشتق ندارد

$\theta=\pi$ ← ... محور حقیقی ← ...

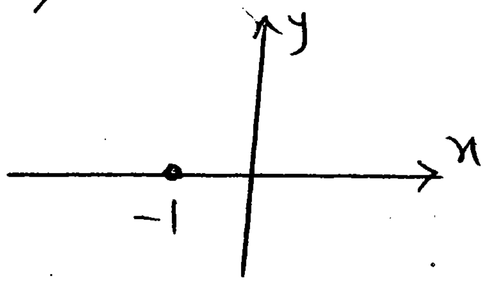
$\theta=2\pi$ ← ...

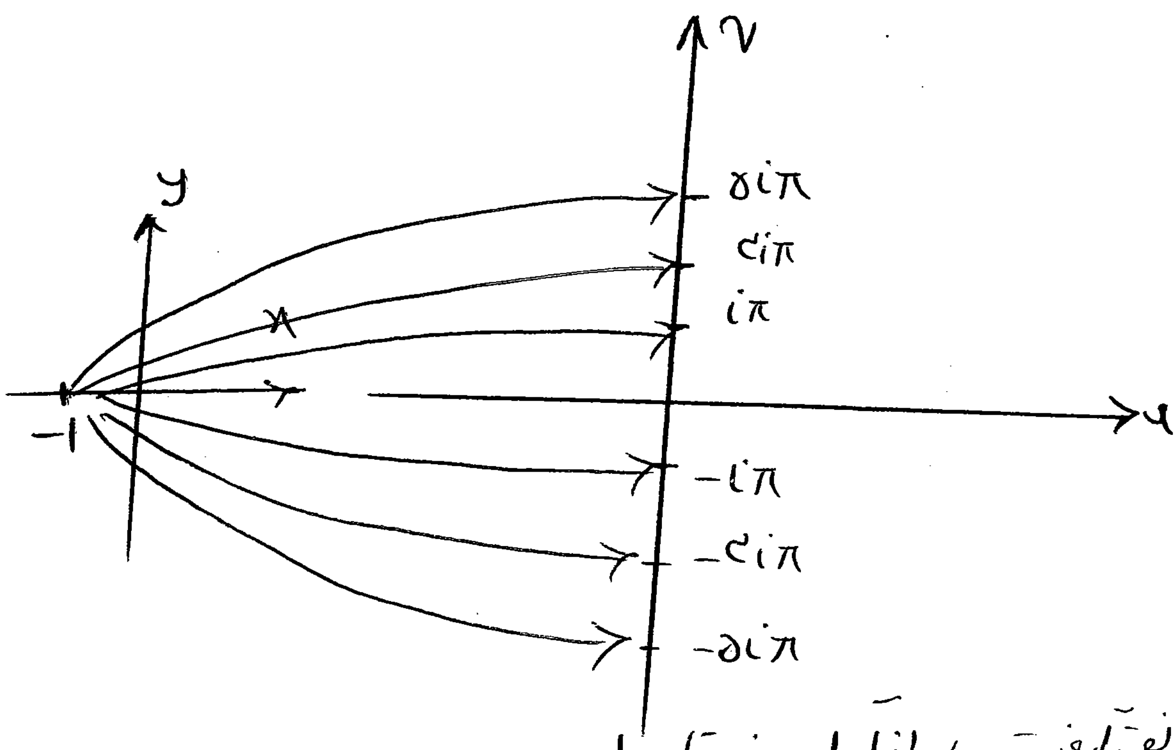
* معرفی توابع چند مقداری :

$$z = re^{i(\theta+2k\pi)}$$

$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$$

$$\ln(-1) = \cancel{\ln 1}^{\,0} + i(\pi + 2k\pi)$$





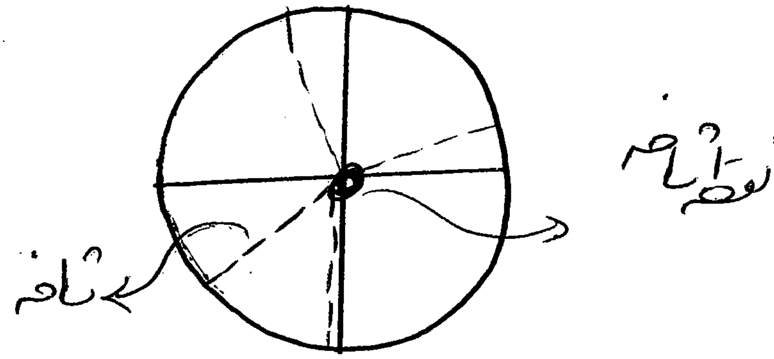
تو حقیقی که می‌گفتیم تابع نیست ← اینجا هم چند مقداری!

به ازای ۱ مقدار، چند مقدار تولید کرد ← چند مقداری!

اگر کدام چند شود ← ببری ← باید یک مقداری شوند!

راه : عامل چند مقداری بودن را پیدا کنیم و آن عامل را از بین ببریم!

$z = re^{i(\theta+2k\pi)}$ ← عامل چند مقداری بودن : θ



یه چرخش به θ یه دور جدید یه جواب!

هر جا دوس داشتی برش بزن!

هر کدوم از برش ها: شاخه

نقطه ای که در تمام شاخه ها مشترک: نقطه شاخه

هرجا صحبت از شاخه و نقطه شاخه شد یاد تابع چند مقداری!

بیایم داستان شاخه را بیان کنیم:

$\alpha < \theta \leq 2\pi + \alpha \Rightarrow$ شاخه است $\theta = \alpha$

کل دایره را داریم بجز یک شعاعش به این شعاع: شاخه

مثال

$0 < \theta \leq 2\pi \Rightarrow$ شاخه $\theta = 0$

$-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ شاخه $\theta = -\frac{\pi}{2}$

شاخه اصلی $\theta = -\pi$ ← $-\pi < \theta \leq \pi \Rightarrow$ شاخه $\theta = -\pi$

$-\pi < \theta < \pi \Rightarrow$ شاخه $\theta = \pi$

* دیگری هستون : $2\pi =$ حد پایین ـ حد بالا → باید یک دایره را پوشش بدهد!
(عرض شاخه)

ولی اگه قرار باشه هر کسی یه شاخه انتخاب کنه بی نظمی پیش میاد، یه شاخه را به عنوان شاخه اصلی
انتخاب می‌کنیم

$\Leftarrow$ $\theta = -\pi$ شاخه اصلی

هر موقع در توابع چند مقداری شاخه معلوم نبود → خودمون شاخه اصلی رو می‌گیریم
استاندارد هم بود → همون

* سوال: قبول داری همه‌ی شاخه تعریف شده

ولی $\ln z$ ← فقط θ همونی که ثابته → روی شاخه تعریف نشد!
پس مشتق پذیر نیست → پس علاوه بر صفر در نقاط روی شاخه مشتق پذیر نیست

↲ برگردیم عقب

هر سه روش کوتاه:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \equiv$$ برقراری شرایط کوشی ریمان

$$f(z) = z^2 e^{\cos(\sin z)} + z^4 \cos^2\left(e^{\operatorname{sh} z}\right) + z^5 + 1$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0 \Rightarrow$$ شرایط کوشی ریمان همواره برقرار است

① ✓ ← تابع همواره مشتق دارد!

با ∂ را پیدا کردیم، چطور از ① ؟

$F(z)$ تمام نقاط تعریف شده ← مشتق ∂ با ∂ همراه با نقاط تعریف شده اند، تمام نقاط تعریف شده!

* مثال‌هایی با ابزار همین روش حل کنیم:

① $W = \cos z$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0 \Longrightarrow \text{کوشی ریمان} \overset{\sqrt{①}}{\Longrightarrow} \text{مشتق} \checkmark$$

② $W = \cos \bar{z}$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = -\sin \bar{z} = 0 \Longrightarrow \bar{z} = k\pi \Longrightarrow z = k\pi$$

فقط در $z = k\pi$ کوشی ریمان ✓ $\overset{\sqrt{①}}{\Longrightarrow}$ فقط در $z = k\pi$ مشتق دارد!

③ $w = |z|^2$

$$w = z\bar{z} \Longrightarrow \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = z = 0 \Longrightarrow$$

فقط در $z = 0$ کوشی ریمان ✓ $\overset{\sqrt{①}}{\Longrightarrow}$ فقط در $z = 0$ مشتق ✓

در این روش تابع باید برحسب z و $\bar{z}$ باشد ← ۴ حل نمی‌شود

④ ×

⑤ $w = \ln z \rightarrow \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0 \rightarrow$ شرایط کوشی ریمان صادقه ✓

$\ln(f(z))$ ← * چند مقداری
$f(z)^{\frac{1}{n}}$

$$i\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y} \equiv$$ شرط لازم کوشی ریمان

روش قبلی خیلی بهتر بود اسم روش نگه نیست!

④ $w=x^2+x^3+iy^2$

$$i\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y} \Rightarrow \cancel{i}(2x+3x^2)=2\cancel{i}y$$

نقاط روی منحنی $2x+3x^2=2y$ کوشی ریمان √ $\xleftarrow{۱۷}$ فقط در ... مشتق √

---

* مفهوم تک مقداری!

$-\pi<\theta\leq\pi \qquad \ln(-1)=i\pi$

$-\pi\leq\theta<\pi \qquad \ln(-1)=-i\pi$

$3\pi<\theta\leq 5\pi \qquad \ln(-1)=5i\pi$

$\frac{\pi}{2}<\theta\leq\frac{5\pi}{2} \qquad \ln(-1)=i\pi$

$$\ln(-1)=i(\pi+2k\pi)$$
$\neq i\pi$
$\neq 3i\pi$
$\neq 8i\pi$

* تابع تحلیلی

تابع $f(z)$ در نقطه‌ی z_0 تحلیلی است اگر دو شرط زیر را دارا باشد:

① $f(z)$ در z_0 مشتق پذیر باشد

② در همسایگی z_0 به شعاع ε در تمام نقاط مشتق پذیر باشد

نتیجه ۱: اگر $f(z)$ در z_0 مشتق پذیر نباشد، تحلیلی هم نیست

*مثال $f(z)=\bar{z} \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0 \rightsquigarrow$ در هیچ نقطه‌ای شرایط کوشی ریمان برقرار نیست

↳ در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارد $\rightsquigarrow$ در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست

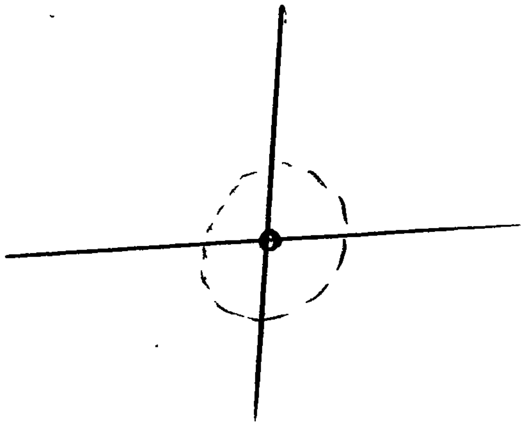
نتیجه ۲: ممکن است تابع $f(z)$ در z_0 مشتق پذیر باشد اما در z_0 تحلیلی نباشد.

*مثال: تابع $w=|z|^2$ در مبدأ مشتق دارد اما در مبدأ تحلیلی نیست!

فقط در مبدأ مشتق دارد: همسایه‌ی هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر نیست ← شرط دوم را ندارد

[illegible] تحلیلی [illegible]

۱۳۰



ص ۲۱۲ ت ۷

ص ۲۳۳

* برق ۷۴

۱) ✗

۲) ✓

۳) ✓

۴) ✓

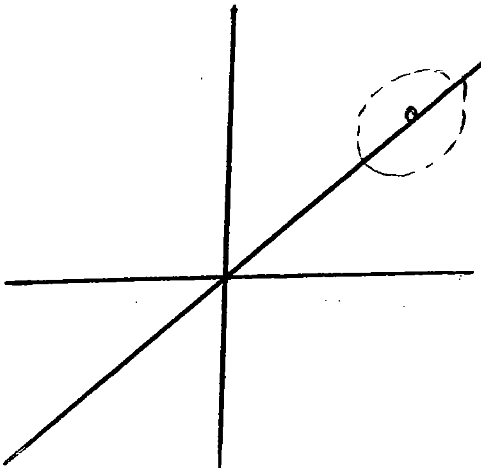
ناپیوسته ← f(z) پیوسته ← ۴ صحیح

$$i\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y} \to 2ix=2iy$$

$x=y$ ۳ صحیح

↓

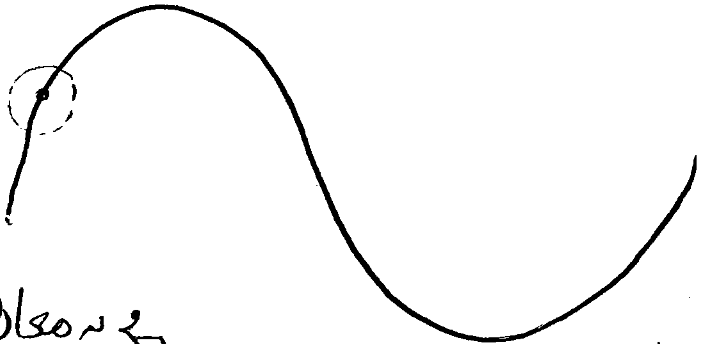
۲ صحیح



{ فقط مشتق دارد
{ همسایگی پیدا نمی‌شه دایره فقط قطرش سر خطه است } ⇐ تحلیلی نیست ⇐ $\boxed{\text{اغ}}$
اینور و اونورش نیست!

* مفهوم تحلیلی: علاوه بر خود نقطه همسایگیش هم باشه!

* تابع $f(z)=u+iv$ هیچگاه نمی‌تواند فقط در نقاط روی یک منحنی یا در تعدادی نقاط همانی تحلیلی باشد.



نتیجه

شرط اول کوشی ریمان را می‌نویسیم

به معادله می‌رسیم ← در کل صفحه غیر تحلیلی است!

به اتحاد می‌رسیم ← شرط دوم کوشی ریمان را بررسی کنیم

به معادله می‌رسیم → در کل صفحه غیر تحلیلی است

به اتحاد می‌رسیم → در تمام نقاطی که u و v تعریف شده‌اند تابع تحلیلی است

* فرق معادله و اتحاد :

هر رابطه‌ای که به ازای بعضی x و y ها برقرار ← معادله $\leftarrow$ $\begin{cases} x=y \\ y=1 \end{cases}$

هر تساوی که به ازای همه x و y ها برقرار ← اتحاد ⇐ مثال
$\begin{cases} x=x \\ x^2-y^2=(x-y)(x+y) \end{cases}$

حل تست مبحثی :

غیر تحلیلی ⇐ معادله ⇐ $2x=2y$ ⇐ شرط اول گزینه ۱

حل فلسفی ⇐

← اگر ۴ غ ⇐ اگه پیوسته نباشه ← ۲ هم غ !

← ۳ هم نمی‌تونه غ باشه ← اگه گزینه ۴ برقرار نباشه ← مشتق پذیر نیست غ۲ !

← ۲ هم نمی‌تونه غلط باشه ← چون که ۱ هم غ می‌شد

سپس تنها جواب غ ۱ است

مکانیک ۸۰) ص ۲۳۴ — ص ۲۱۲ ← ۲۸

۱) ✓ ۲)
۳) ۴)

غ تحلیلی $\xrightarrow{\text{معادله}}$ $2x=2y$: معادله اول گزینه ۱

* موارد ۱۸)

$\frac{\partial u}{\partial x}$ $\frac{\partial v}{\partial y}$

$2y = 2y$ $\xrightarrow{\text{عادی}}$ تحلیلی ع

$y = 1$ $\xrightarrow{\text{عادی}}$ تحلیلی ع

$1 = x$ $\xrightarrow{\text{تحلیلی عادی}}$ ع -

$\begin{cases} 2x = 2x \xrightarrow{\text{انکار}} \text{تحلیلی} \\ -2y = -2y \end{cases}$ (از هم تحلیلی u,v)

۱) ✗

۲) ✗

۳) ✗

۴) ✓

همان z^2 است!

برق ۸۴)

سری ۳ ص ۲۳

$xy > 0$ روابط درست $\Rightarrow f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = z^2$ ✓

$xy \Rightarrow f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy \rightarrow 2x = -2x$ ✗

۱)

۲)

۳) ✓

۴)

* مشتق توابع تحلیلی

اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد، آنگاه مشتق $f(z)$ مطابق زیر است:

دکارتی

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

قطبی

$$f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)e^{-i\theta}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(z)=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta}$$

* اگر در تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$، حداقل یکی از توابع u یا v معلوم باشد، $f'(z)$ معلوم است.

تبصره: شکل کاملاً حفظ ⇐ تهیه با بسازی!

* مثال) اگر در تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ داشته باشیم:

$$v=e^{x}\cos y+\operatorname{sh}x\sin y+x^{2}-y^{2}+2xy$$

آنگاه $f'(z)$ را بدست آورید

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=(-e^{x}\sin y+\operatorname{sh}x\cos y-2y+2x)+i(e^{x}\cos y+\operatorname{ch}x\sin y+2x+2y)$$

$$\xrightarrow{x=z,\,y=0} f'(z)=\operatorname{sh}z+2z+i(e^{z}+2z)$$

JozveBargh.ir

* اگر تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد در صورتیکه تابع برحسب x و y داده شده باشد برای آنکه تابع را برحسب z بنویسیم، کافی است $\begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$ و اگر برحسب r و θ باشد کافی است $\begin{cases} r=z \\ \theta=0 \end{cases}$ قرار دهیم.

$$f(x+iy)\Big|_{\substack{x=z\\ y=0}} = f(z)$$

$$f(re^{i\theta})\Big|_{\substack{r=z\\ \theta=0}} = f(z)$$

$$f(z)=x^2+iy^2=z^2 \neq (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$$

* چون به تحلیلی بودن توجه کرده است!

$\boxed{\text{روش:}}$

اگر $\begin{cases} x \to z \\ y \to 0 \end{cases}$ ⟸ دوباره بازش کن؛ اگر دوباره تابع عینا اولی شد ⟸ تحلیلی

نشد ⟸ غیر تحلیلی!

ولی خ روش جالبی نیست!

ت ۲۲۵ ص ۲۱۲ س ۱۲

برق ۸۵)

۱) ✓ ۲) ۳) ۴)

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=1+e^{x}\cos y-i(-e^{x}\sin y)\Big|_{\substack{x=z\\y=0}}=1+e^{z}$$

$$f'(1)=1+e$$

ت ۲۲

اتوماسیون ۸ (مهر ۹۰)

۱) ۲) ✓

۳) ۴)

$$f'(z)=2-2y-i(-2x)$$

*قضیه بعدی: مهم ترین قضیه این بخش و بیشترین آمار سوالات کنکور از این بخش!

* قضیه: اگر تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه:

① u و v همساز هستند

② v مزدوج همساز u است

و برعکس (اگر شرط ① و ② برقرار باشد آنگاه $f(z)$ تحلیلی است)

* هر تابعی که در معادله‌ی لاپلاس صدق کند را همساز یا هارمونیک می‌نامند.

معادله لاپلاس:

- دکارتی → $u_{xx}+u_{yy}=0$
- قطبی → $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$
- صفحه مختلط → $\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \bar{z}}=u_{z\bar{z}}=0$

* مثال) اگر (فرم اول) $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد و $u=r^m\cos 2\theta+\alpha\ln r+\beta r$

آنگاه m و α و β را بدست آورید.

$\equiv$ هم ارزند

اگر (فرم دوم) $u=r^m\cos 2\theta+\alpha\ln r+\beta r$ همساز باشد، آنگاه m و α و β را بدست آورید.

* هر موقع در یک تابع تحلیلی پارامتر مجهول در u و v داشتید، تنها شرط

همسازبودن را اعمال کنید تا مجهول را بدست آورید : همسازی

چون شرط لازم برای تحلیلی بودن ← u, v همساز

بنابراین فرم اول روشن‌تر است در کنکور !

$$\begin{cases} u_r = m r^{m-1}\cos 2\theta + \dfrac{\alpha}{r} + \beta \\[2ex] u_{rr} = m(m-1) r^{m-2}\cos 2\theta - \dfrac{\alpha}{r^2} \\[2ex] u_{\theta\theta} = -4 r^{m}\cos 2\theta \end{cases}$$

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

$$m(m-1) r^{m-2}\cos 2\theta - \frac{\alpha}{r^2} + m r^{m-2}\cos 2\theta + \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r} - 4 r^{m-2}\cos 2\theta =$$

$$(m^2-4) r^{m-2}\cos 2\theta + \frac{\beta}{r} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$\{\ m=\pm 2$ و $\beta=0$ و α دلخواه $\}$

ص ۲۴۱ ص ۲۴۷ ، س ۳۴

* مخابرات ۸۴)

هرگاه تابع تحلیلی داشته باشد ← باید در لاپلاس صدق کند

$u_{xx}+u_{yy}=0 \rightarrow 2\alpha y-6y=0 \rightarrow \alpha=3$

۱)

۲) ✓

۳)

۴)

اشاره این به تحلیل بودن که در این سال دوم باید تحلیلی باشد!

ص ۲۱۳ ، س ۱۲

برق ۸۳)

اگر ...) در یک ناحیه D از صفحه xoy

تحلیلی ، $z=x+iy$ باشد آنگاه مقدار $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$

۱) ✓

سوال ۸۹) اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$u(x,y)=\alpha x \cosh x \cos y+\beta$

۲۱

برای تحلیل ← u همساز

* اگر در تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ یکی از توابع u یا v معلوم باشد دیگری نیز معلوم است و در نتیجه $f(z)$ نیز معلوم است.

① اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی و $u=\dots$ باشد

آنگاه ← v را بدست آورید

↓

$f(z)$ را بدست آورید

② اگر $u=\dots$ باشد آنگاه شرط همساز u را بدست آورید.

③ اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی و $v=\dots$ باشد

آنگاه ← u را بدست آورید

↓

$f(z)$ را بدست آورید

چندین روش وجود دارد ← در کتاب ۱۳ یا ۱۴ روش !

در کلاس : ۱ روش !

بهترین روش ← هم کوتاه است و هم جامع !

$$dv = \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

خالص سازی

(انتگرال همزمان شرایط کوشی ریمان)

$$\Longrightarrow v = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy - \int \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{*} dx$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

(انتگرال همزمان جایگذاری شرایط کوشی ریمان)

$$\Longrightarrow u = \int \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx - \int \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{*} dy$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial v}{\partial r} dr$$

$$\overset{''}{\Longrightarrow} v = \int \left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) d\theta - \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^{*} dr$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta$$

$$\overset{''}{\Longrightarrow} u = \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) dr - \int \left(r \frac{\partial v}{\partial r}\right)^{*} d\theta$$

* روش : مرسوم است که به تابع رحب $\leftarrow$ مقدار اول u
مقدار دوم v

برحسب r و θ $\Big\langle$ مقدار اول $= r$، مقدار دوم $= \theta$

برحسب u و v $\Big\langle$ u اول، v دوم

مثلاً
* هر موقع خواستم v را بنویسم $\leftarrow$ با دیفرانسیل هم تراز خودش شروع کنم $\leftarrow$ v رابه!

آدرس اصل رعایت $\leftarrow$ θ هم جنس دو عبارت

نکته: هرجا v را نوشتم بگذارش مشتق نسبت به x

خود هر یا دیفرانسیل هم تراز خودش شروع

$\Big\langle$ v را نوشتی $\leftarrow$ مشتق x
v را نوشتی $\leftarrow$ مشتق y

مختصات قطبی :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

$\Big\langle$ ضریب r وجود دارد $\leftarrow$ کنار $\partial\theta$ $\leftarrow$ $\frac{1}{r}$
کنار مشتق r $\leftarrow$ ضرب در r

$dv \leftarrow$ چون تنها $d\theta$ شروع $\leftarrow$ چون dr ضریب $\frac{1}{r}$

$du \leftarrow$ چون dr است $\leftarrow$ مشتق نسبت به $\theta \leftarrow$ ضریب $\frac{1}{r}$

* مثال) اگر در تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$

اگر $v=e^{x}\cos y+\sinh x\sin y+x^2-y^2+2xy$ باشد u را بدست آورید.

حل $\Leftarrow$ چون u است $\Leftarrow$ دیفرانسیل نسبت به x: $dx \leftarrow$ چون dx است

مشتق نسبت $y \leftarrow (-e^{x}\sin y - \ldots)$

چون dy است $\leftarrow$ مشتق نسبت به $x \leftarrow (e^{x}\cos y - \ldots)$

$$u=\int(e^{-x}\sin y+\sinh x\cos y-2y+2x)dx$$

$$-\int(\cancel{e^{x}\cos y}+\cancel{\cosh x\sin y}+\cancel{2x}+2y)dy$$

* خلاصه سازی

هر تابعی که دارای y باشد بر حسب y $\leftarrow$ هر تابعی شامل x حذف

هر جمع dy $\leftarrow$ نسبت به x مشتق $\leftarrow$ هر جمله شامل x حذف!

حتی نست: z ← ۲ حذف
θ ← θ حذف
x ← x حذف
y ← y حذف

تنها جملاتی که حذف می‌شه: x ، y ، i
تنها جملاتی که حتی بدون نسبت به $x=z$ فاقد x شد حذف نمیشه!
بیا نسبت به هر چی که حتی تبدیل کردی ← هر چی شامل اون بود ← حذف!

$$U = -e^{x}\sin y + \operatorname{ch}x\cos y - 2yx + x^2 - y^2 + C$$

$$f(z) = u + iv \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}} = \operatorname{ch}z + z^2 + C + i(e^{z} + z^2)$$

ص ۲۱۷ ، ست ۴۶
مکانیک ۸۲

۱)
۲)
۳)
۴) ✓

$$v = \int (2x+2 \quad) dy - 0 = 2xy + 2y$$

*حتی نسبت ۸ اولی
*تعدی نسبت به y ← اول (۲) ← جمع‌های مضروب ← ۰

ص۲۴۵ ، ص۲۱۲، س۲۶

*مغناطیس ۷۹)

۱) ✓ ۲)

۳) ۴)

۱/۱ به مادلات ← V مشابه

جون V ← ره ← جون ره : مشتق نسبت x

(-)

مشتق نسبت y ← برابر صفر ← دوی (۳x² -)

$$V = \int (-6xy)\,dy - \int (-3x^2)\,dx = -3xy^2 + x^3 + C$$

ص۲۴۵ ، ص۲۱۲، س۲۹

*مغناطیس ۸۰)

۱) ۲)

۳) ✓ ۴)

جون V ← ره ← جون ره : مشتق نسبت x ←

$$V = \int \left(\frac{2x}{x^2+y^2} \right) dy - 0$$

مشتق نداریم ← ۰

$$= 2\,tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

ص ۲۲۴، ت ۷ ص ۲۴۴

(مسابقه ریاضی زمستان علوم - ریاضی محض ۹۱)

۱) ۲) ۳) ۴) ✓

مشتق ← پیچیده

عبارت برحسب x^2+y^2 پیچیده ← مختصات قطبی!

$$u = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

ضرب r در ← پیچیده r، مشتق نسبت $\frac{d\theta}{dr}$ ← $d\theta$ ← همراه ~ v

چون نسبت به θ حل است!

$$v = \int \left(r \cdot \left(-\frac{\cos\theta}{r^2} \right) \right) d\theta - \text{○}$$

چرا؟ در بقیه که هست

$$= \frac{-\sin\theta}{r} + \cancel{C} = \frac{-r\sin\theta}{r^2}$$

$$= \frac{-y}{x^2+y^2}$$

۱۳۹

ص ۲۴۲ ص ۲۱۳، ست ۱۰

* برق ۸۱

۱)
۲)
۳)
۴)

$v \leftarrow$ نظر $dy \leftarrow$ چون $y \leftarrow$ ضرایب $x \leftarrow$ (---- ln2)

مشتق نسبت به y تا y است ← 0

$$v = \int (\ln 2\, 2^x \cos(y \ln 2))\, dy + 0$$

$$= 2^x \cdot \sin(y \ln 2) + c$$

* آنالیز استم f(z) تشکیل بدیم ← $x=2$, $y=0$ ←

ص ۲۴۶ ص ۲۴۷ ست ۲۵

* مکانیک ۸۷

۱) ۲)
۳) ۴)

u ← زاراده ← u خواسته!

فرقی نداره!

u رو خارج ← dx ← مشتق نسبت به y!

مشتق نسبت به x تا x ← 0

$$u=\int\left(1\quad\frac{2y}{x^2+y^2}\right)dx-0\quad=2tg^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+c$$

ص ۲۲۸ س ۹۱

* ابزار دقیق ۸۷)

۱) ✓

۲)

۳)

۴)

تیم تابع تحلیلی حارن توش پارامتر دارد اما باید اول پارامتر مجهول بدست آورد روش استخراج کناشته باشد.

همه از لاپلاس!

لاپلاس: $u_{xx}+u_{yy}=0 \Rightarrow 6ax+6by=0 \Rightarrow a=b=0$

$$u=0 \rightarrow v=c$$

ص ۲۱۱، س ۳

* مکانیک ۸۸، برق ۸۷، نازمواد ۹۰، شیمی ۹۰)

۱)

۲)

۳)

۴) ✓ ۴

$v \rightarrow dy \rightarrow$ نسبت به x

نسبت به x ثابتها $\rightarrow 0$

$$v=\int\left(4x(x^2-y^2+1)-8xy^2\right)dy-0=4x^3y-\frac{4}{3}xy^3+4xy-\frac{8}{3}xy^3+c$$

$v(0,0)=0 \rightarrow c=0 \qquad v(1,1)=4-\frac{4}{3}+4-\frac{8}{3}=4$

* برق ۹۰ (برق ۸۷) کامپیوتر ۸۳) هوافضا ۸۹) ص ۲۴۶ ص ۱۱۱ س ۱

۱) ۲) ✓
۳) ۴)

$$v=\int (3x^2-3y^2)\,dy - 0 = 3x^2y-y^3+C$$

* کامپیوتر ۹۰) ص ۲۴۳ ص ۲۱۹ س ٤

ضریب ۲ مجاز — جواب ۷ است

$$v=\int (2)\left(\frac{1}{2}+\cos\theta\right)d\theta - 0 = \theta+2\sin\theta+C$$

تو نسبت به r هم θ دارد

۱) ۲) ۳) ✓ ٤)

* به روش دیگه هم میشه حل کرد ولی این روش اول بهتر است
۲ تا روش را
لطفا ادامه راه حل ها را شما جامع بنویسید !

مغناطیس ۸۲ ص ۲۱۷، تست ۳۲

u حقیقی ← زوج همساز خانه ← تابع u+v تحلیلی ← تابع کوشی ریمان صدق

شرط اول کوشی ریمان ← $\frac{\partial u}{\partial x}$ پیدا ←

هر کدام از گزینه‌ها که $\frac{\partial v}{\partial y}$ برابر نشد غلط

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+2}$$

۱) $2x$ ✗

۲) ✗

۳) ✗

۴) ✓

مغناطیس ۸۹ صف ۲۵۰ ص ۲۱۶، تست ۲۶

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -4xy}$$

$\frac{\partial v}{\partial y}$

۱) $-4xy$ ✓

۲) $-4x^2$ ✗

۳) $-4x^2y$ ✗

۴) $-4x+4y$ ✗

* مکانیک ۸۰ ص ۲۴۵

روش دوم: درد نمی‌خوره ← چون آزمایشگاه نیست؛ لاحق ← دردسر

فرهنگستان علوم ص ۲۴۴ ← روش دوم انتخاب خوبی نیست!

ص ۲۴۲ ← روش دوم انتخاب خوبی نیست!

مکانیک ۸۷ ص ۲۴۶ ← روش دوم انتخاب خوبی نیست!

برق ۷۱، ص ۲۱۱، س ۳ ⇐ ضعف این روش روش دوم: اصلاً اهمیت ندارد

تمرکزتون روی روش اول باشد

سه روش دیگه: ص ۲۴۷ ص ۲۱۵، س ۲۴
مکانیک ۷۶

۱) ۲) ✓ ۳) ۴)

این روش: فقط یک حالت: ۷ و ۱ ← ۷ و ۸ برچسب (۲) را می‌خواهند!

JozveBargh.ir

u,v داریم ← $f'(z)$ پیدا ⇐ انتگرال‌گیری: $f(z)$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2(3-y)-i(-2x)\Big|_{\substack{x=z\\ y=0}}$$

$$=6+2iz$$

$$\xrightarrow{\int} f(z)=6z+iz^2+C$$

روش اول:

v ← dy ← نسبت به x ←

⊖

نسبت به y ← خالص

$$v=\int(6-2y)\,dy-\int(-2x)\,dx=6y-y^2+x^2+C$$

$$f(z)=6z+iz^2+iC$$

توصیه: روش اول

ایده :

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\Big|_{\substack{x=z\\y=0}}$$

فرض: $f(z)$ تحلیلی

$$=u(z)+iv(z)$$

چون u و v حقیقی ← مشتق پذیر و تحلیلی

جملاتی که ضرایب i ندارند ← مربوط به u

" " i دارند ← مربوط به v

ص ۲۴۷

مکانیک ۱۳۷۲

$\begin{matrix}x=z\\y=0\end{matrix} \Rightarrow 4z$

توان ۲ باید هر کدام که i ندارد ← باید $4z$ باشد!

جمله i ندارد

۱) z^2 ×

۲) $4z$ ✓

۳) z^2 ×

۴) $-7z$ ×

جلسه‌ی بعد آزمون تحلیلی! ۲ ساعت!

← بخش چهارم

الطلوا

تست علامت نزنید!

*ریاضی مهندسی - دوشنبه - ۹۲/۶/۲۵ - جلسه‌ی ۱۰هم

۱) توابع e^z و $\cos z$ و $\sin z$ و $\operatorname{sh} z$ و $\operatorname{ch} z$ و چند جمله‌ای $a_n z^n + \dots + a_0$ همواره تحلیلی اند (تام هستند)

(هموسری)

۲) ترکیب، جمع، تفریق و حاصلضرب هر چند تابع تحلیلی یک تابع تحلیلی است

$$f(z) = z^4 \cos^2\left(e^{\sin(z^2+1)}\right) + \sin^2 z \operatorname{ch}(e^z) + 1$$

۳) اگر $f(z)$ و $g(z)$ تحلیلی باشند، آنگاه تابع $\frac{f(z)}{g(z)}$

فقط در ریشه های مخرج تحلیلی نیست

$$f(z) = \frac{z(z^2+1)}{z(z^2-1)\cos z}$$

$$z(z^2-1)\cos z = 0$$

فقط در نقاط $z=0$ و $z=\mp 1$ و $z=(2k-1)\frac{\pi}{2}$ غیر تحلیلی است.

۴) اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد، آنگاه $\overline{f(z)}=u-iv$ غیر تحلیلی است مگر آنکه u و v ثابت باشند

$$f(z)=\bar{z}$$

z تحلیلی ← $\bar{z}$ کاملاً غیرتحلیلی

$$f(z)=\overline{\cos z}$$

$\cos z$ همواره تحلیلی ← $\overline{\cos z}$ کاملاً غیرتحلیلی

۵) اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه $g(z)=v+iu$ حتماً غیرتحلیلی است مگر آنکه u و v ثابت باشند

بعبارت دیگر اگر v مزدوج همساز u باشد، آنگاه u نمی‌تواند مزدوج همساز v باشد مگر آنکه u و v ثابت باشند

$$g(z)=i(u-iv)=i\overline{f(z)}$$

$$h(z)=v-iu=-i(u+iv)=-if(z) \Rightarrow$$

مزدوج همساز v برابر $-u$ است.

مهم

۶) اگر $f(z)$ غیرتحلیلی باشد آنگاه با هرچند تابع تحلیلی ترکیب جمع، تفریق و یا ضرب بشود باز هم غیرتحلیلی است و ناحیه‌ی غیرتحلیلی هیچگاه کاهش نمی‌یابد

$$f(z)=z^{2}\cos^{2}\left(e^{\sin(\bar z)}\right)+z^{4}ch^{2}z+5$$

z تحلیلی ← $\bar z$ در کل صفحه غیرتحلیلی ← با هر مقدار تابع تحلیلی جمع و ضرب و ترکیب ← غیرتحلیلی

$$f(z)=z^{4}\sin^{2}\left(e^{\frac{1}{\bar z^{2}-1}}\right)+z^{3}\cos z+2$$

۷) جمع، تفریق، ترکیب و یا ضرب دو یا چند تابع غیرتحلیلی ممکن است تحلیلی یا غیرتحلیلی باشد

$f(z)=e^{\bar z}$ — $f(z)g(z)$ ← تحلیلی است

$g(z)=e^{-\bar z}$ — $f+g$ ← غیرتحلیلی است

$h(z)=-e^{\bar z}+\cos z$ — $f+h$ ← تحلیلی

$f(z)-h(z)$ ← غیرتحلیلی

$f(x)=\frac{x}{x}$ $\qquad$ $g(z)=\frac{z}{z}$

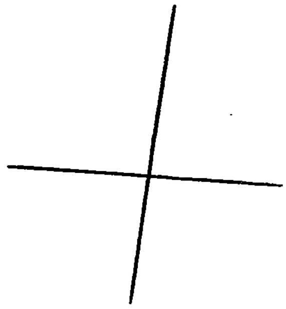
$g(x)=1$

برگشت می‌شه 1 به عنوان تحلیلی ۱

⑧ اگر $f(z)$ تحلیلی باشد آنگاه $\ln(f(z))$, $(f(z))^{\frac{1}{n}}$

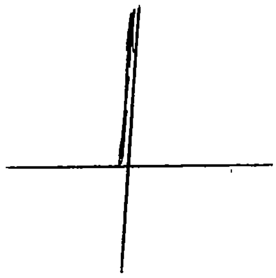
فقط در ریشه های $f(z)$ و نقاط روی شاخه تحلیلی نیستند

شاخه اصلی $\to \theta = -\pi$



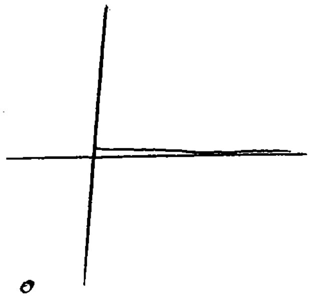
ناحیه غیر تحلیلی $\begin{cases} Re(f(z)) \leq 0 \\ Im(f(z)) = 0 \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{5\pi}{2}$



〃 $\begin{cases} Re(f(z)) = 0 \\ Im(f(z)) \geq 0 \end{cases}$

$0 < \theta \leq 2\pi$



〃 $\begin{cases} Re(f(z)) \geq 0 \\ Im(f(z)) = 0 \end{cases}$

⋮

* مثال: صفحه ۲۳۱ س ۱۰۹ جلد دوم

۱) ۲)

۳)✓ ۴)

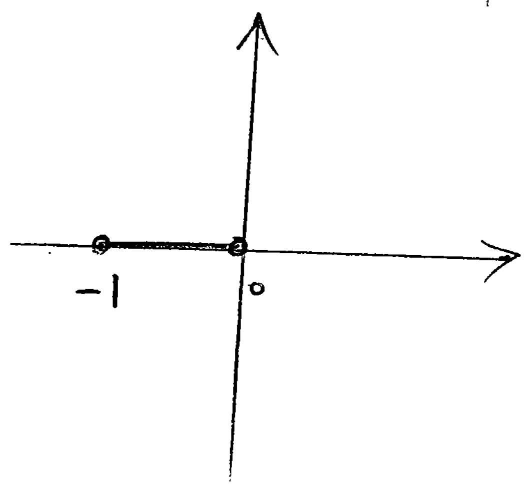
$$\begin{cases} Re\left(\frac{z}{z+1}\right) \leq 0 \\ Im\left(\frac{z}{z+1}\right) = 0 \end{cases}$$

۱۴۵

$$W=\frac{x+iy}{x+1+iy}\times\frac{x+1-iy}{x+1-iy}\rightarrow\begin{cases}Re=\dfrac{x(x+1)+y^2}{(x+1)^2+y^2}\\[2ex] Im=\dfrac{y}{''}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x(x+1)+y^2\leq 0 \rightarrow x(x+1)\leq 0\\ y=0\end{cases}$$

	-1		0	
$x(x+1)$	$+$	$-$	$+$	



$$(f(z))^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln(f(z))}$$

* از نقاط تحلیلی، غیر تحلیلی ها دارند.

۹) اگر تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد، آنگاه دسته منحنی‌های

$u(x,y)=c_1$ و $v(x,y)=c_2$ متعامد هستند. به عبارت

دیگر برای محاسبه‌ی مسیرهای قائم دسته منحنی $u(x,y)=c_1$

کافی است مزدوج همساز u را بدست آورده و مساوی

c_2 قرار دهیم.

مثال ۲۵

* برق ۷۵)

۱)   ۲) ✓

۳) ✓   ۴)

$$\begin{cases} u_{xx}=2 \\ u_{yy}=-2 \end{cases} \rightarrow \text{لاپلاس} \checkmark$$

$$v=\int (2x-2)\,dy-0=2xy-2y=c_2$$

که گزینه با علامت میزنی!

* اصل ماکزیمم :

اگر $f(z)$ غیرثابت و در ناحیه‌ی D تحلیلی باشد، آنگاه

ماکزیمم اندازه $f(z)$ روی مرز D رخ می‌دهد (نه در داخل آن)

نتیجه ۱ : هر تابع تام غیرثابت بیکران است

نتیجه ۲ : هر تابع تام کراندار تابع ثابت است

$$\left\{ \text{تام } f(z) \,,\, |f(z)| < M \implies f(z) = c \right\}$$

نتیجه ۳ : اگر $f(z)$ غیرثابت و در ناحیه‌ی D تحلیلی

و در D هیچ صفری نداشته باشد، آنگاه ماکزیمم

و مینیمم $|f(z)|$ روی مرز D رخ می‌دهد.

دلیل : تحلیل اول

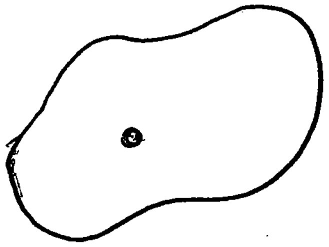
وقتی در D صفر ندارد ← $\frac{1}{f(z)}$ در D تحلیلی است

$\frac{1}{f(z)}$ تحلیلی ← طبق اصل ماکزیمم ← ماکزیمم را روی مرز اختیار :

ماکزیمم $\frac{1}{f(z)}$ ← مینیمم $f(z)$ ← روی مرز است!

JozveBargh.ir

تحلیلی دوم -



ریشه داخل ناحیه ← مینیمم داخل ناحیه و مقدارش صفره!

اما اگر ریشه داخل ناحیه نداشته باشیم ← اگر تو ناحیه‌ی D هست،

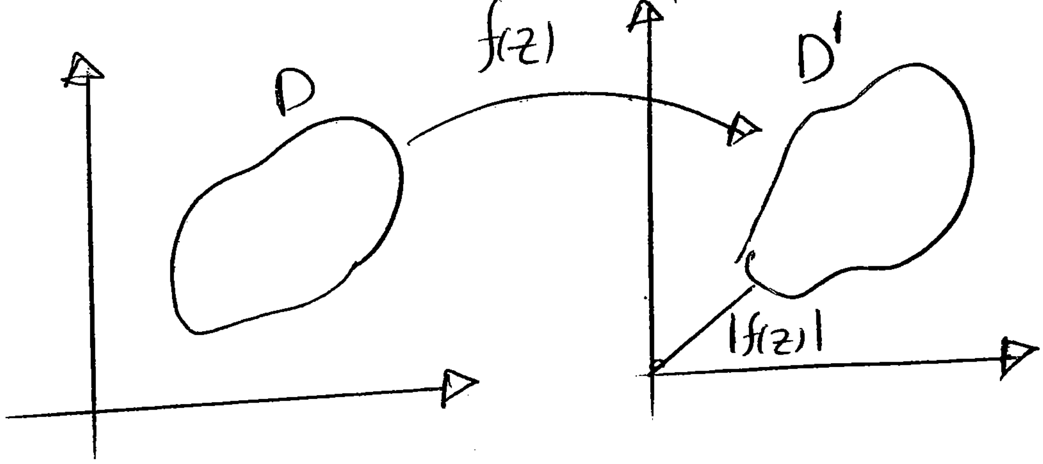
تمامش آن را توسط $f(z)$ مپ بکنیم ← ناحیه‌ی D' !

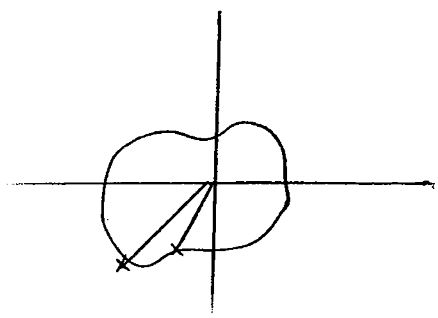
اگر صفری در D نداشته باشد ← اونور مبدأ در ناحیه نیست

کمترین فاصله تا مبدأ ← به ازای یک نقطه روی مرز رخ می‌دهد

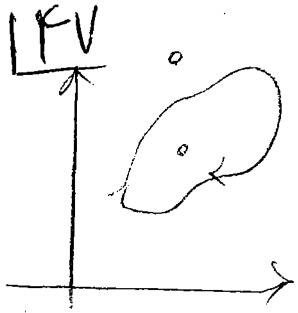
پس مینیمم به ازای مرز

بیشینه مقدار هم همینطور!





حل دوم



نقاط داخل ناحیه ← اندازه = صفر

نقطه خارج ← کمترین فاصله ← روی مرز رخ می‌دهد

* مثال) ماکزیمم و مینیمم $|f(z)|$ برای تابع $f(z)=z^2+2$ روی دایره $|z|=1$ را بدست آورید.

ماکزیمم و مینیمم به ازای نقاطی روی مرز رخ می‌دهد.

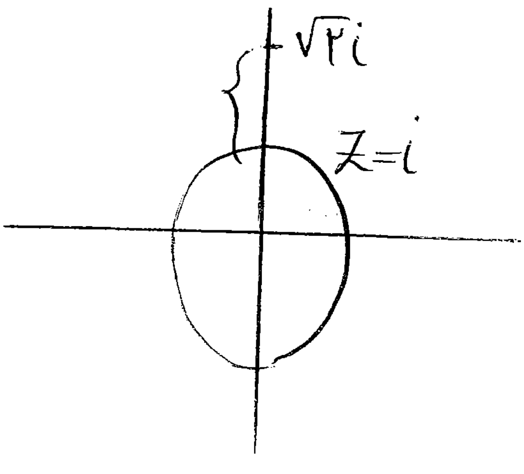
$$z=\text{cis}\,\theta \to f(z)=\text{cis}\,2\theta+2=2+\cos 2\theta+i\sin 2\theta$$

$$|f(z)|=\sqrt{(2+\cos 2\theta)^2+\sin^2 2\theta}=\sqrt{4+4\cos 2\theta+\underbrace{\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta}_{1}}$$

$$|f(z)|=\sqrt{5+4\cos 2\theta}$$

$\text{Max}\,|f(z)|=3$

$\text{Min}\,|f(z)|=1$



ص ۲۲۶

* برق ۷۳) ۱

۱)

۲)

۳)

۴)

اصل ماکزیمم : $f''(z)$ کراندار و تام ⟸ باید ثابت باشد

$$f''(z) = A \qquad |A| < C$$

$$f'(z) = Az + B$$

$$f(z) = \frac{Az^2}{2} + Bz + C_1 \qquad |2A_1| < C$$

ص ۲۶۶

* برق ۸۵)

۱) ✓

۲)

۳)

$(z$

هر تابع تحلیلی غیر ثابت ← کمپلکس ← ۱

۱۴۸

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + sh^2 y \to \infty$$
$$y \to \infty$$

ص ۲۱۸ تست ۳۶

* مطابق ۱۱۸)

۱) $\frac{1}{2} + sh^2 \frac{1}{2}$ ۲) $ch^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$

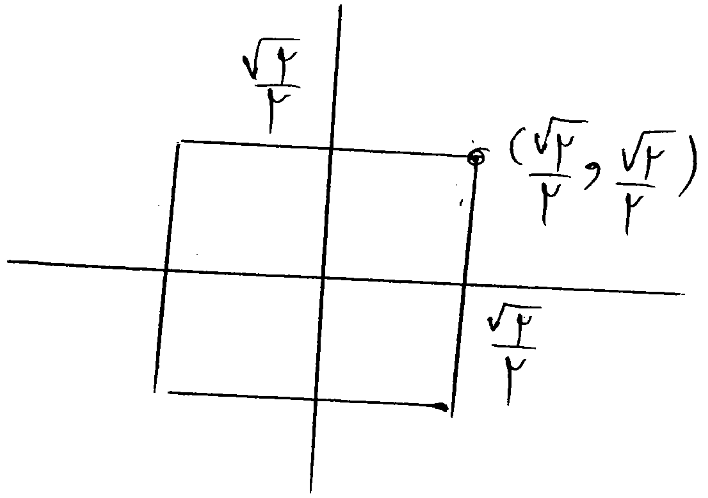
۳) $ch^2 \frac{\pi}{2}$ ۴) $\sin^2 \frac{\sqrt{2}}{2} + sh^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

$$z^4 + 1 = 0 \to z = (-1)^{\frac{1}{4}} = Cis\,\frac{2k\pi + \pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$k = 0$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2} \mp i \frac{\sqrt{2}}{2}$

$k = 1$ $\quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \mp i \frac{\sqrt{2}}{2}$

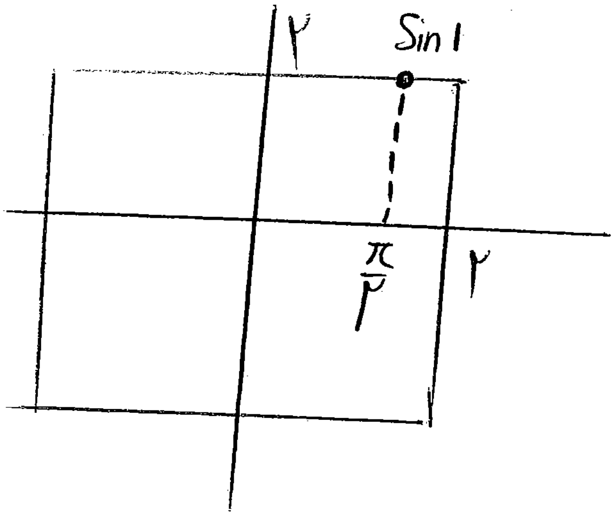
$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + sh^2 y \Rightarrow Max\,|\sin z|^2 = \sin^2 \frac{\sqrt{2}}{2} + sh^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$



* سوال : اگر مختصات رئوس $z = \mp 2 \mp 2j$ باشد؟

ماکزیمم $\sin^2 x + \sinh^2 y$ ؟

$$\longmapsto \quad \text{Max } |\sin z|^2 = 1 + \sinh^2 2$$



$\sinh y$ صعودی ← هرچی y بیشتر بشه ← $y=2$

در این نقطه $\sin$ ماکزیمم است.

$$\int_0^1 \cos x\,dx = ? = \sin x \Big|_0^1 = \sin 1^{rad}$$

$= \sin ۵٦^\circ$ تقریباً $= ۰٫۸۴$

۱) ۰٫۰۰۱   ۲) ۰٫۹۹   ۳) ۹٦   ۴) ۰٫۸۴

تعریف رادیان بر اساس واحد طول است

در محاسبات مشتق و انتگرال باید بر حسب رادیان باشد

$$\sin(x^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{۱۸۰}x\right)$$

$$\frac{\pi}{۱۸۰}\cos\left(\frac{\pi}{۱۸۰}x\right)$$

$$\frac{\pi}{۱۸۰}\cos(x^\circ)$$

$\frac{\pi}{۲} = \frac{۳}{۲}rad$

$\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰٫۷$

ربع اول ← صعودی ← هر چی ورودی بیشتر ← خروجی بیشتر

ربع دوم ← { ۲rad ← از ۱٫۵rad بیشتر ؛ $\frac{\pi}{۲}$ از ۲rad کمتر }

قاطع از نیمسازش جا عبور کرده!

* ریاضی محض ۸۹)

۱)   ۲) ✓

۳)   ۴)

$$|e^{-z}f(z)| \leq 1 \rightarrow e^{-z}f(z) = c$$

$$f(z) = ce^{z} \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow c = 1$$

$$f(z) = e^{z}$$

چون $f(z)$ تحلیلی ← سعی می‌کنیم کراندار کنیم و تابع تام داریم

در ضمن تقسیم بر $|e^{z}|$ تقسیم!

تام و کراندار ← پس باید ثابت باشد!

$f(z)$ تام و e^{z} تام ← $|e^{-z}f(z)|$ تام، اندازه محدود ← ثابت

صفحه ۲۲۶ سال ۷۱

*ریاضی محض ۱۹۱ فرض کنید $f(z)=u+iv$ تابعی تام

(همه جا تحلیلی) باشد هرگاه $u^2-v^2<1$ در این صورت

تابع f :

۱)

۲)

۳) ثابت است ✓

۴) کراندار نیست

$$f^2(z)=u^2-v^2+iuv$$

$$g(z)=e^{f^2(z)}$$

$$|g(z)|=e^{\operatorname{Re}(f^2(z))}$$

$$|g(z)|=e^{u^2-v^2}$$

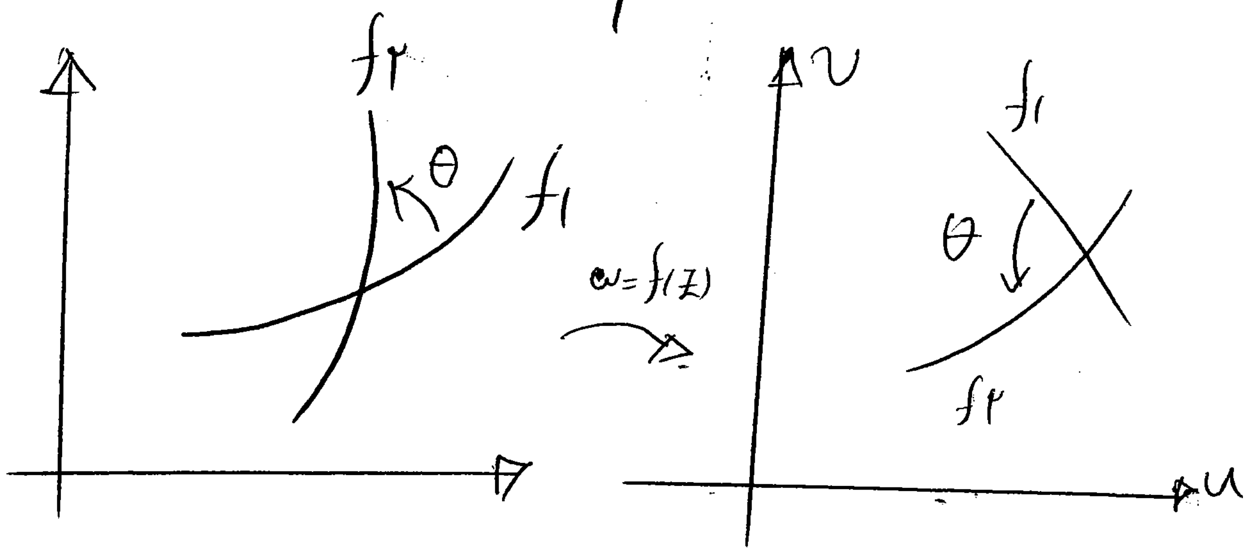
$u^2-v^2<1 \Rightarrow |g(z)|<e \Rightarrow$ $g(z)$ ثابت است

ثابت $\Rightarrow$ f^2 ثابت $\Rightarrow$ g ثابت

* اگر تابع $f(z)=u+iv$ تام باشد و u یا v کراندار باشد آنگاه $f(z)$ کراندار است و در نتیجه $f(z)$ تابع ثابت است.

* نگاشت همدیس :

اگر در نگاشت توسط $W=f(z)$ ، اندازه و جهت زوایا حفظ شود می‌گوییم نگاشت همدیس است.



هم جهت حفظ می‌شود هم اندازه زاویه

* مثال) نگاشت $W=\frac{1}{Z}$ در مبدأ همدیس نیست

چون جهت را عوض می‌کند!

اما $w=\frac{1}{\bar{Z}}$ در مبدأ همدیس است!

$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{Z} \rightarrow \text{با زاویه } -\theta\text{ قرینه} \\ \bar{Z} \rightarrow \text{با زاویه قرینه}\end{array}\right\} \rightarrow$ در کل زاویه عوض نمی‌شود!

* اگر تابع $W=f(Z)$ تحلیلی باشد آنگاه نگاشت $W=f(Z)$ فقط در نقاطی که $f'(Z)=0$ می‌شود، غیر همدیس است.

* مثال) نقاط غیرهمدیسی توابع داده شده را بدست آورید

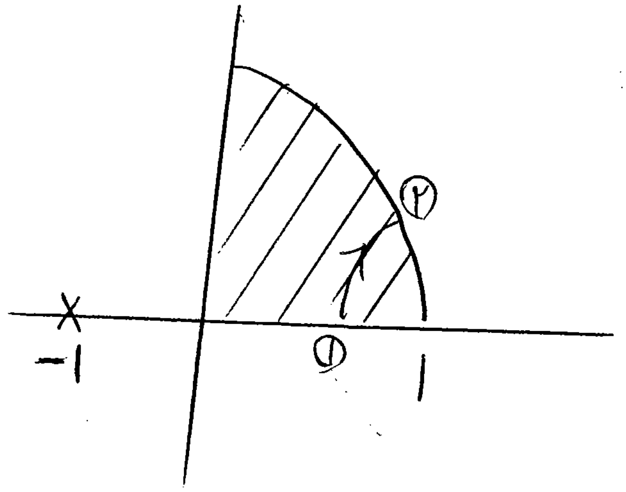
$f(Z)=Z^5 \rightarrow f'(Z)=5Z^4=0 \Rightarrow Z=0$ غیر همدیس است

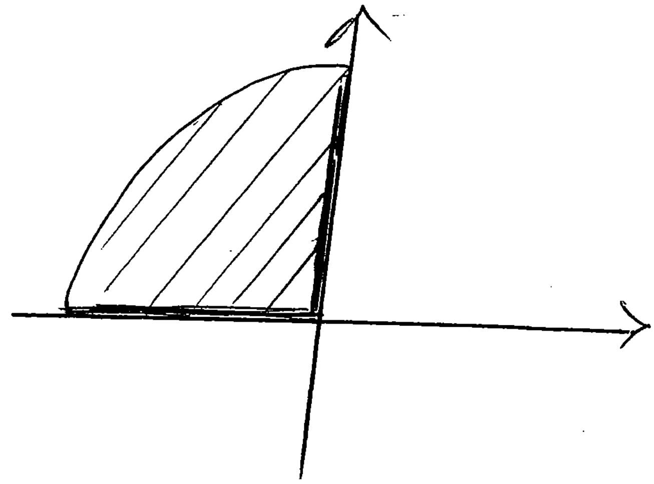
$f(Z)=\cos Z \rightarrow f'(Z)=-\sin Z=0 \Rightarrow Z=k\pi$ غیر همدیس است

$f(Z)=\frac{1}{Z} \rightarrow f'(Z)=-\frac{1}{Z^2} \Rightarrow$ به جز $Z=0$ سایر نقاط همدیس است

$f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \rightarrow f'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}_{\,ad-bc\neq 0} \Rightarrow$ بجز ریشه‌های مخرج سایر نقاط همدیس است

* مثال) نگاشت ناحیه‌ی هاشور خورده توسط $W=\frac{z-1}{z+1}$ را بدست آورید.





هر دو از نقطه خارج عبور می‌کند به خط

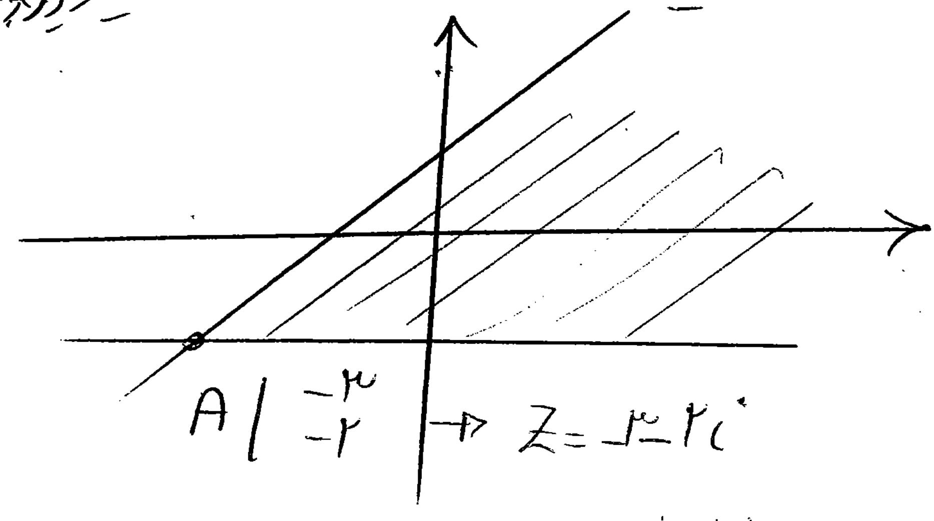
جهت عقربه‌ی ساعت : ① به ②

حتماً ← در خروجی هم باید در جهت عقربه‌ی ساعت از ① به ②

پس ناحیه بالایی است.

ص ۱۶۲، تست ۱۴

* برق ۷۹ کدام یک از نگاشت‌های زیر را دارد، ناحیه زیر را می‌دهد



$A \begin{vmatrix} -3 \\ -2 \end{vmatrix} \rightarrow z=-3-2i$

(دایره‌ای)

نقطه ناهمدیسی است ← جواب‌ها در جواب‌ها ... کدام ...

۱۵۲

$$W=\frac{au+b}{cu+d}$$

$$W'=\frac{(ad-bc)u'}{(cu+d)^{2}}$$

نقطه بحرانی ← باید $u'=0$

$u=z^4$

۱) ✗ $u'=4z^3\neq 0$ مشتق ← غ

$u=$

۲) ✗ $u'\neq 0$ ← غ

۳) ✗ $u'=1$ ← $u=z$ ← غ

۴) ✓

$$u'=4(z+3+2i)^3$$

$$u'\Big| =0$$

اگر نگاشت ناحیه‌ی D توسط $w=f(z)$ ناحیه‌ی D' باشد، آنگاه

داریم :

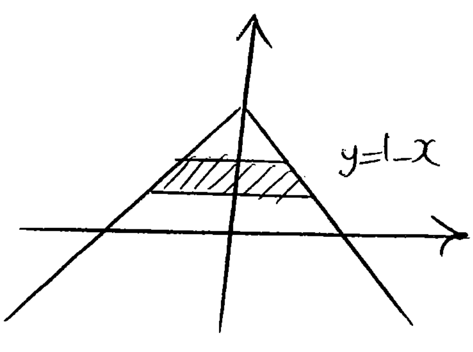
$$D' \text{ مساحت ناحیه } = \iint_D |f'(z)|^2 \, dy\, dx$$

صفحه ۱۲۴، تست ۲۶

مثال ۹) ناحیه داخل مثلث تشکیل شده از منحنی $y=1-|x|$ و محور x ها را در نظر می‌گیریم. مساحت شکل حاصل از تبدیل این ناحیه از صفحه z توسط نگاشت $w=z^2$ در صفحه w برابر است با:

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ✓ ۴) ۲

$$f'(z) = 2z = 2x + 2iy \rightarrow |f'(z)|^2 = 4(x^2+y^2)$$



$$D' \text{ مساحت ناحیه } = 4 \iint_D (x^2+y^2)\, dy\, dx$$

$$= 8 \int_0^1 \int_0^{1-y} (x^2+y^2)\, dx\, dy$$

$$= 8\int_0^1 \left(\frac{(1-y)^3}{3} + y^2(1-y)\right)dy$$

$$= 8\left(-\frac{1}{12}(1-y)^4 + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1$$

$$= 8\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) = \frac{4}{3}$$

* نقطه تکین : نقطه z_0 نقطه‌ی تکین تابع $f(z)$ است. اگر دو شرط زیر را دارا باشد :

① $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد

② در همسایگی z_0 به شعاع ε نقاطی وجود داشته باشند که $f(z)$ در آن‌ها تحلیلی باشد

نقطه تکین منفرد (تنها) : نقطه‌ی z_0 را نقطه‌ی تکین منفرد $f(z)$ می‌نامند اگر دو شرط زیر را دارا باشد

① $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد

② در همسایگی z_0 به شعاع ε در تمام نقاط تحلیلی باشد

شرط دوم، شرط اول را پوشش می‌دهد پس نقاط تکین را به دو دسته

تقسیم می‌کنیم:

تکین ← تنها

تکین ← غیر تنها

* تنها: در همسایگی‌اش تکین ندارد

غیر تنها: در همسایگی‌اش یه سری نقاط غیر تحلیلی هست

به دو حالت مشاهده:

پیوسته ← تکین غیر تنها ← از نوع انباشته

حدی ← تکین غیر تنها

↓

(انشعابی)

a_n

$$\lim_{n\to\infty} a_n = z_0$$

z_0

وجود حد تضمین کننده‌ی همسایگی است

چون وجود حد یعنی حتماً تابع در همسایگی آن تعریف شده باشد

۱۵۴) * پس امکان ندارد همسایگی حول z پیدا کنیم که داخلش نقطه تکین نباشه پس غیر تنها است.

* اگر دنباله‌ی a_n نقاط غیر تحلیلی $f(z)$ باشند در صورتیکه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = z_0$ باشد آنگاه نقطه‌ی z_0 تکین غیر تنها از نوع انباشته است و سایر نقاط دنباله همگی تکین تنها هستند.

هر دنباله حد داره که هر کدوم توی z حد دارند
ولی تابع ممکنه چند تا دنباله غیر تحلیلی داشته باشه

* مثال) نقاط تکین توابع داده شده را بدست آورید نوع آن‌ها را مشخص کنید.

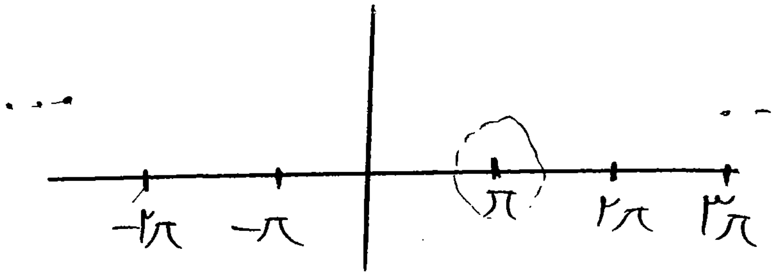
(1) $W = \dfrac{z}{z(z^2-1)}$ $\Rightarrow$ این تابع نقاط $z=0$ و $z=\mp1$ غیر تحلیلی است $\Rightarrow$

$z=0$ و $z=\mp1$ تکین تنها هستند

② $W = \dfrac{1}{\sin z}$ → نقاط در $z=k\pi$ تحلیلی نیست → $z=k\pi$ تکین تنها هستند

نقطه عمومی $= k\pi$

$\lim\limits_{k\to\infty} k\pi = \infty$

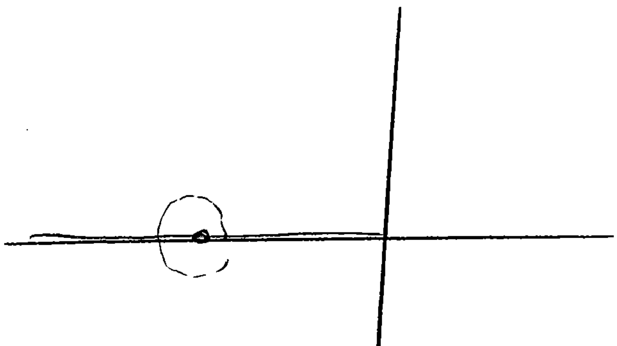


* فقط ∞ غیر تنهاست! حد $=\infty$

* نقاط دنباله همه تنها، فقط حد شدن غیر تنهاست!

③ $W = e^{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ → نقطه در $z=0$ غیر تحلیلی است → $z=0$ تکین تنهاست

④ $w = \ln z$



تمام نقاط غیر تحلیلی تکین غیر تنها از نوع انشعابی هستند

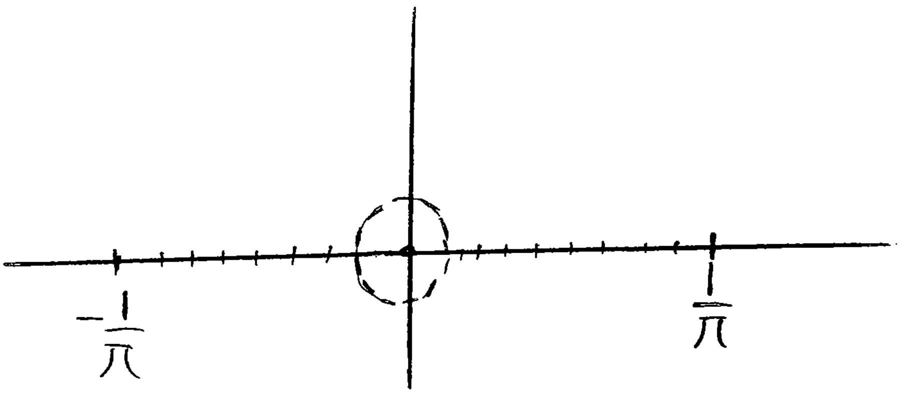
۵) $W = \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ $\quad z = 0$

$\sin(\frac{1}{z}) = 0 \rightarrow \frac{1}{z} = k\pi \rightarrow z = \frac{1}{k\pi}$

$$z = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k\pi} = 0$$

$z = 0$ نقطه تکین غیرتنها از نوع انباشته است

$z = \frac{1}{k\pi}$ همگی تکین تنها هستند



* جمع بندی :

۱) اگر $f(z)$ و $g(z)$ تحلیلی باشند آنگاه در تابع $\frac{f(z)}{g(z)}$ تمام نقاط غیرتحلیلی (ریشه های مخرج) تکین منفرد هستند

$$W = \frac{z(z^2-1)}{\sin(z)(z^2+4)}$$

$$\sin z\,(z^2+4)=0 \begin{cases} z=k\pi & \rightarrow \text{تکین منفرد هستند} \\ z=\mp 2j & \rightarrow \text{تکین تنها هستند} \end{cases}$$

۲) اگر z نقطه ی تکین تابع $f(z)$ باشد درصورتیکه $f(z)$ به عنوان ورودی هر چند تابع تحلیلی قرار گیرد و یا با هر چند تابع تحلیلی جمع یا تفریق شود و یا در هر چند تابع تحلیلی ضرب شود باز هم z_0 نقطه ی تکین تابع است

$$f(z) = z^4 e^{\sin\left(\frac{1}{z^2+1}\right)} + \cos^2(e^z)+1 \rightarrow z=\pm j \text{ تکین تنها}$$

* نوع نقطه ی تکین هم عوض نمی شود!

۳) اگر $f(z)$ تحلیلی باشد آنگاه نقاط غیر تحلیلی $\ln(f(z))$ و $(f(z))^{\frac{1}{n}}$ تماماً تکین غیر تنها از نوع انشعابی هستند

۴) در توابع $\frac{1}{\sin(f(z))}$ و $\frac{1}{\cos(f(z))}$ و $tg(f(z))$

و $\frac{1}{ch(f(z))}$ و $\frac{1}{sh(f(z))}$ و $tgh(f(z))$

و $\frac{1}{e^{f(z)}-a}$ و $a\neq 0$ و ... همواره نقاط تکین منفرد

$f(z)$ برای توابع فوق نقاط تکین غیر تنها از نوع انباشته هستند.

$$W=\frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{z(z^2-1)}\right)}$$

$z=0$ و $z=\pm1$ تکین غیر تنها از نوع انباشته‌اند

$g(f(z))=0 \Rightarrow f(z)=a_n$ و $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$

فرض: z_0 نقطه تکین مقرر $f(z)$: $\dfrac{1}{z-z_0}=a_n \Rightarrow z-z_0=\dfrac{1}{a_n}$

$$\Rightarrow z=\lim_{n\to\infty}\left(z_0+\frac{1}{a_n}\right)=z_0$$

نقطه z_0 نقطه تکین غیرمجزا از نوع انباشتی برای $\dfrac{1}{g(f(z))}$ است.

⑤ اگر $f(z)$ در یک ناحیه غیرتحلیلی باشد در آن ناحیه نقطه‌ی تکین ندارد

مثال: تابع $w=\dfrac{1}{z-1}$ نقطه تکین ندارد چون در کل صفحه غیرتحلیلی است

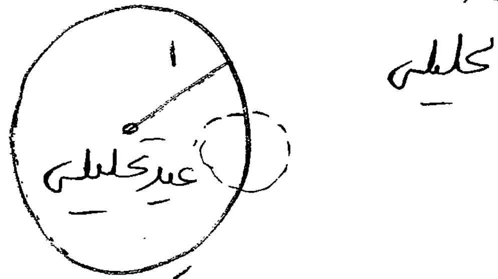
۱۵۷ بعضی کارا با استفاده از ⑤ نامیده شده باید تعریف بلد باشی!

$$f(z)=\begin{cases}\sin z & z\neq 0\\ 2 & z=0\end{cases}$$

در ۰ پیوسته نیست ← مشتق پذیر نیست ← تحلیلی نیست

$z=0$ نقطه‌ی تکین تنها است.

$$f(z)=\begin{cases}\bar{z} & |z|<1\\ z^2+2z & |z|\geqslant 1\end{cases}$$



یه سری نقاط تحلیلی اطرافش هست ← تکین غیر تنها است ← یه سری غیر تحلیلی اطرافش هست.

نقاط روی دایره واحد تکین غیر تنها هستند

* کتاب چرچیل : قوی‌ترین کتاب در زمینه مختلط!

سری تیلور : اگر تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد آنگاه

$f(z)$ را می‌توان برحسب سری توانی $(z-z_0)$ مطابق

زیر بسط داد :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad , \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

حالت خاص : بسط مک‌لورن : اگر $z_0=0$ باشد بسط را

مک‌لورن می‌نامند

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

بسط لوران : اگر تابع $f(x)$ در همسایگی z_0 تحلیلی

باشد، آنگاه $f(z)$ را می‌توان برحسب توان‌های

$z-z_0$ مطابق زیر بسط داد :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \rightarrow \text{جملات اصلی بسط لوران}$$

بسط لوران را حول نقاط زیر می‌توان نوشت :

z_0 نقطه‌ی تحلیلی $f(z)$ باشد

z_0 نقطه‌ی تکین منفرد $f(z)$ باشد

تحلیلی باشد ، اطرافش تحلیلی حلقه

غ تحلیلی باشد ، حوزه اطرافش تحلیلی ← تکین تنها

* مثال بسط لوران $w=\ln z$ حول $z=0$ وجود ندارد ← $z=0$ تکین غیرتنها

* مثال بسط لوران $w=\frac{1}{z^2\sin(\frac{1}{z})}$ حول $z=0$ وجود ندارد ← "

سوال : اگر z_0 نقطه‌ی تحلیلی $f(z)$ باشد چه تفاوت یا شباهتی بین بسط تیلور و لوران وجود دارد ؟

روش محاسبه‌ی سری لوران $f(z)$ حول نقطه z_0 :

① ابتدا $z-z_0=t$ در نظر می‌گیریم تا سری حول $t=0$ تبدیل شود

② اگر $f(z)$ شامل توابع مثلثاتی، هایپربولیکی، نمایی، لگاریتمی باشد، از سری مک‌لورن آن‌ها استفاده می‌کنیم با این تفاوت که در صورت نیاز می‌توان به جای z، $\frac{1}{z}$ نیز قرار داد

$$z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right)=z^3\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\cdots\right)$$

* صفحه 281 تا 289

یادآوری روش‌های محاسبه سری مک‌لورن به طور کامل و دقیق مطالعه شود!

جمع نقاط منفرد لورن به جز

$tg z$ نیاز نیست حفظ کنید

↓

این هم از کسرساز بدست میاید

۳) اگر تابع $f(z)$ شامل توابع چندجمله ای کسری باشد ابتدا به کسرهای جزئی تفکیک کرده و سپس از بسط تصاعد هندسی مطابق زیر استفاده می کنیم.

$$\frac{a_0}{1-q} \overset{|q|<1}{=} a_0(1+q+q^2+q^3+\cdots)$$

$$\frac{1}{1-z} \overset{|z|<1}{=} 1+z+z^2+z^3+\cdots$$

$$\frac{1}{1+z} \overset{|z|<1}{=} 1-z+z^2-z^3+\cdots$$

$$\frac{1}{1+z^2} \overset{|z|<1}{=} 1-z^2+z^4-z^6+\cdots$$

⋮

$$\frac{1}{1+z^k} \overset{|z|<1}{=} 1 - z^k + z^{2k} - z^{3k} + \cdots$$

* مثال) بسط لوران تابع $f(z)=\dfrac{\ln z \times tg^{-1}\left(\frac{1}{z-1}\right)\sin z}{(z-1)^3 z^2}$ را در ناحیه $|z-1|<1$ بدست آورید.

$$z-1=t \rightarrow z=t+1$$

$$f=\underbrace{\frac{1}{t^3}}_{f_1} \times \underbrace{\frac{1}{(t+1)^2}}_{f_2} \underbrace{\ln(1+t)}_{f_3}\, \underbrace{tg^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}_{f_4}\, \underbrace{\sin(t+1)}_{f_5} \quad |t|<1$$

$$f_1=\frac{1}{t^3} \checkmark$$

$$f_2=\frac{1}{(t+1)^2}$$

(* $\frac{1}{t+1} \overset{|t|<1}{=} 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$

(* مشتق (* $\longrightarrow \frac{-1}{(1+t)^2} = -1 + 2t - 3t^2 + \cdots$

$\longrightarrow \frac{1}{(1+t)^2} = 1 - 2t + 3t^2 - \cdots$

f_2

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots$ f_3

$\ln(1+x) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots \xrightarrow{\int} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$

$f_4 = tg^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \longrightarrow tg^{-1}x \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$

$\xRightarrow{\text{انتگرال}} tg^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$

$tg^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + \frac{1}{5t^5} - \cdots$) f_4

$$f_5 = \sin(t+1) = \sin t \cos 1 + \cos t \sin 1$$

چون مک لورن!
* اول باید ببریم سری ← که در صفر حول صفر؟
دور صفر باید حول باشد؟

$$= \cos 1\left(t - \frac{t^3}{3!} + \cdots\right) + \sin 1\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \cdots\right)$$

$$f = f_1 f_2 \cdots f_5 \Big|_{t = z-1}$$

تست ۵۶ ص ۲۶۴

* ریاضی محض ۸۴، مغناطیس ۹۲)

در بسط لوران مقدار اصلی $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ حول ۰، ضریب z^2 برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) $\frac{11e}{24}$ ✓ ۴) $\frac{13e}{24}$

از طرفین ln می‌گیریم ⟶ (لوران و مک لورن) هر وقت تابع $f(z)^{g(z)}$

$$W = (1+z)^{\frac{1}{z}} \Rightarrow \ln w = \frac{1}{z}\ln(1+z)$$

$$= \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots\right)$$

$$\ln w = 1 - \frac{z}{۲} + \frac{z^{۲}}{۳} - \frac{z^{۳}}{۴} + \cdots$$

$$W = e^{1 \underbrace{- \frac{z}{۲} + \frac{z^{۲}}{۳} - \frac{z^{۳}}{۴} + \cdots}_{u}}$$

$$f(g(x)) \begin{cases} g(x) = ۰ \longrightarrow u = g(x) \\ g(۰) \neq ۰ \longrightarrow a + \underbrace{g_1(x)}_{u} \quad g_1(۰) = ۰ \end{cases}$$

$$W = e \times e^{u} = e\left(1 + u + \frac{u^{۲}}{۲!} + \frac{u^{۳}}{۳!} + \cdots\right)$$

$$W = e\left(1 + \left(-\frac{z}{۲} + \frac{z^{۲}}{۳} - \frac{z^{۳}}{۴} + \cdots\right) + \frac{\left(-\frac{z}{۲} + \frac{z^{۲}}{۳} - \frac{z^{۳}}{۴} + \cdots\right)^{۲}}{۲!} + \cdots\right)$$

ضریب z^2 $= e\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)=\frac{11e}{24}$

* مثال) بسط لوران تابع $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ در نواحی داده شده بدست آورید.

الف) $|z|<1$ ب) $1<|z|<2$ ج) $|z|>2$

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\underbrace{\frac{-1}{z-1}}_{f_1}+\underbrace{\frac{1}{z-2}}_{f_2}$$

$$f_1=-\frac{1}{z-1}\xrightarrow{|z|<1}\frac{1}{1-z}\overset{|z|<1}{=}1+z+z^2+z^3+\cdots$$

$$|z|<1\rightarrow\left|\frac{z}{2}\right|<1$$

$$f_2=\frac{1}{z-2}\rightarrow-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\overset{\left|\frac{z}{2}\right|<1}{=}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\cdots\right)$$

$$f=f_1+f_2$$

ب) $1<|z|<2$

$$|z|>1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1 \Rightarrow f_1=\frac{-1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) \overset{\left|\frac{1}{z}\right|<1}{=} -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$|z|<2 \Rightarrow \left|\frac{z}{2}\right|<1 \Rightarrow f_2=\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$\overset{\left|\frac{z}{2}\right|<1}{=} -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\cdots\right)$$

$$f=f_1+f_2$$

ج) $|z|>2$

$$|z|>2 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1$$

$$f_1=\frac{-1}{z-1}=-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) \overset{\left|\frac{1}{z}\right|<1}{=} -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$|z|>2 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{2}{z}\right|<1$$

$$f_2 = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}} \overset{|\frac{2}{z}|<1}{=}$$

$$= \frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\dots\right)$$

دایره‌ای به شعاع ۲ رسم می‌کنیم

شرط شعاع را از روی شرط مسأله می‌نویسیم

نقطه داخل دایره هالو

ابتدا ← ریشه مخرج داخل

ریشه مخرج خارج

$\frac{\alpha}{z}$ ضریب

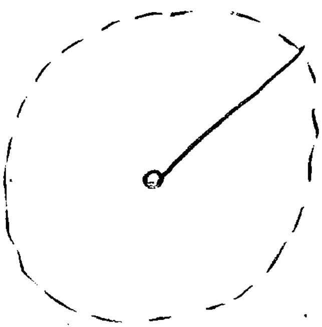
z به توان ضریب

$z=1$ ← خارج است ←

αz = ضریب

نقطه ۱ (عدد ثابت) ← مک‌لورن

$\frac{1}{z+1}$



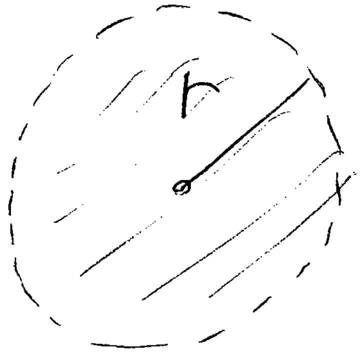
$r=99$

$z=2$ ← خارج ← از عدد ثابت فاکتور بگیر ۲ - فاکتور

$\leftarrow \left(1-\frac{z}{2}\right)$

JozveBargh.ir

ب)



$r = 1/9$

$|z| < 2$

۲ را در سوی شرط تبدیل بنویسیم!

$z = 1$ داخل ناحیه ← از z فاکتور می‌گیریم

$-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)$

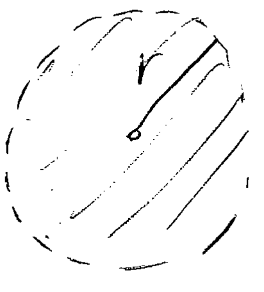
$z = 2$ خارج ناحیه ← از عدد ثابت فاکتور می‌گیریم

از ۲- فاکتور می‌گیریم

$-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$

$\frac{z}{2} < 1$

ج)



$r = 2/1$

$|z| > 2$

$\downarrow$

$2/1$

$z = 1$ ← داخل ← از z فاکتور

$-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)$

$z = 2$ ← داخل ← از z فاکتور ←

$\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$

* جمله اول بنویسیم ← دوباره در یک $\frac{1}{z}$ ضرب داشته باشد!

$$|z-i|=2$$

$$z=-1+\frac{i}{2}$$

$$\left|-1+\frac{i}{2}-i\right|=\left|-1-\frac{i}{2}\right|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}<2$$

داخل

مساوی = روی مرز

بزرگتر = خارج

پس نیازی به رسم دایره نیست

اندازه نقطه را با ۲

دایره $|z|=2$

خارج ← $|z|>2$

روی مرز ← $|z|=2$

داخل ← $|z|<2$

$$\frac{1}{az+b}$$

داخل ناحیه $z=-\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{1}{az}\,\frac{1}{1+\frac{b}{az}}=\frac{1}{az}\left(1-\frac{b}{az}+\left(\frac{b}{az}\right)^2-\left(\frac{b}{az}\right)^3+\cdots\right)$

خارج ناحیه $z=-\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{1}{b}\left(\frac{1}{1+\frac{a}{b}z}\right)=\frac{1}{b}\left(1-\left(\frac{a}{b}z\right)+\left(\frac{a}{b}z\right)^2-\left(\frac{a}{b}z\right)^3\cdots\right)$

[illegible]

برگردیم به صورت مثال)

ب) $Z=1 \rightarrow$ داخل ناحیه ← از Z ها کنور

از عدد ثابت ها کنور ← خارج ناحیه ← $Z=2$

جواب سؤال ص :

Z_0 تحلیلی ← لوران با تیلور متفاوت؟

$Z=0$ نقطه تحلیلی است

اما همچنان ← لوران می شود تیلور باشد!

می شود Z_0 تحلیلی باشد ← تیلور و لوران متفاوت

توجه ← تحلیلی در ناحیه ای که حساب می کنیم ← تیلور ما همان لوران است

اگر z_0 نقطه‌ی تحلیلی $f(z)$ باشد در صورتیکه بسط لوران را

در همسایگی z_0 بنویسیم بسط تیلور و لوران یکسان

می‌شود. در غیر اینصورت یکسان نیستند

* ادامه مبحث سط لوران :

(۱) تشخیص فرم قدر نسبت .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \rightarrow \frac{\alpha}{z} = \text{قدر نسبت} \rightarrow$$ نقطه تکین داخل دایره

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \rightarrow \alpha z = \text{قدر نسبت} \rightarrow$$ نقطه تکین خارج دایره

(۲) تشخیص فرم جمله اول .

$$\frac{1}{az+b} = \frac{1}{az}\left(\frac{1}{1+\frac{b}{az}}\right) = \frac{1}{az}\left(1 - \frac{b}{az} + \left(\frac{b}{az}\right)^2 - \dots\right)$$

(۳) تشخیص قدر نسبت و جمله اول → مشخص شدن تمام جملات سط لوران

تست ۴۱، تست ۲۶۲، تست ۲۹۵
کامپیوتر ۸۴

۱) ✗

۲) ✓

۳) ✗

۴) ✗

$$\frac{\alpha}{z+1} + \frac{\beta}{z+3}$$

۱- داخل کمتر ← $\sum \frac{a_n}{z^n}$ داریم

۳- خارج ← $\sum a_n z^n$ داریم

پس ← گزینه ۳ و ۴ ← حذف

اختلاف ۱ و ۲ ← جمله اول اختلاف دارند ← بعد ضریب

گزینه ۱ ← جمله اول = عدد ثابت

$\frac{\alpha}{z+1}$ ← $z=-1$ داخل ← از z فاکتور ← ضریب = $\frac{\alpha}{z}$

پس حتما جمله اول $\frac{\alpha}{z}$ است پس گزینه ۱ غلط است

حالا حل با ضریب $n=0$ ← $\sum$

گزینه ۱: -1

گزینه ۲: $-\frac{1}{3}$

$\beta = -1 \Rightarrow \frac{-1}{z+3}$

۳- خارج ← از ۳ فاکتور ← جمله اول = $-\frac{1}{3}$

گزینه ۱ غلط است ← ۲ درست ✓

۱۴۶۲

ص ۲۶۸ ص ۲۵۶، س ۲۶

*مکانیک (۱۷۲ $n=0$ جمله اول

۱) ✓ $\frac{1}{t^2}$ ۲) ✗ $\frac{1}{t}$

۳) ✗ $-\frac{2}{t}$ ۴) ✗ $-\frac{2}{t^2}$

عوض نقطه حول صفر نبود ← تغییر متغیر $z-1=t$

۱۷۲)
$$z-1=t \Rightarrow z=t+1 \Rightarrow \omega=\frac{1}{(t+1)^2-1}=\frac{1}{t(t+2)}$$

جمله اول $=\frac{1}{t^2}$

صورت عدد، $\frac{1}{t}$ خودش سط داده شده حسب باید (۲+t) است

۲- داخل ناحیه ← از t فاکتور ← جمله اول $=\frac{1}{t^2}$

(شعاع = ۲,۱)

دومی = $-\frac{2}{t}$

در رهیه مداد است

$n=0$ ← جمله کی اول ← ۲، ۳، ۴ غلط ← ۱ درست ✓

ص ۲۷۲، س ۹۷

فوار ۸ ریاضی عمومی ۸۹

همسایگی: $|z-z_0|<\varepsilon$

۱) ✗ ۲) ✓

۳) ✗ ۴) ✗

$|z-z_0|<4 \to |z-2|<4$

وقتی می‌خواهیم ← همه نقاط تکین خارج ← مشتق دون قدرت z_α

تفاوت نوع ۱ و نوع ۲ چیه

نوع ۱ ← قطب‌های که در حالتی باشند جدا

" ۲ ← " " " " نباشند "

نوع ۲ تحلیل شده نوع ۱ است!

قطب تکراری مخرج داخلی ← پس همه یکسان ← نوع ۱

کافیست ... نوع ۱ هستند

در ۲ جز جمله‌ای که صفر میشه جدا شون را بنویس

پس فرق اصلی در نوشتن حالتی دو حالتی!

چون حول صفر نیست اول ⇐

$$z-2=t \Rightarrow z=t+2$$

$$\to \quad W=\frac{2(t+2)-3}{(t+2)^2-3(t+2)+2}=\frac{2t+1}{t(t+1)} \quad , \quad 1<|t|<4$$

$$=\frac{a}{t}+\frac{b}{t+1}$$

۱۴۷

ضریب ۱ $\frac{}{t}$ ← مورد

سه و غ ← چون فقط یک جمله $\frac{1}{t}$ داریم اما ← ضریب ۴ ← شمار $\frac{1}{t}$ دارد

$\frac{b}{t+1}$ ← ؟ ← اصلاح ← Ont^n ! ← نمونه $\frac{a}{t}$ باشد!

لغت ضریب اول ۲ ← $n=1$ ضریب ← t^2 ، $n=1$ ضریبا عدد ثابت

جمله اول عدد ثابت است ← ضریب a_0 است ← ضریب ۲

$\boxed{b = \text{جمله اول}}$

* هدف کار تکراری ← پیدا کردن جمله اول و قدر نسبت!

صفحه ۳۸ ، ص ۲۲۱ ، صفحه ۳۰۰

* هفته ۱۸۶

۱)
۲)
۳)
۴)✓ ۱۴۷

* راه حل اول:

$Z^2 = -1$ ← $|-1| = 1$ ← داخل ناحیه ← از Z^2 ها کمتر جمله اول $\frac{1}{Z^2}$

b_2 یعنی جمله اول ← میشه ① ضریب ۲

a_2 هم صفر ه ا

راه دوم: چون هم عبه Z^n های منفی هست جمله اول منفی ها قدر نسبت $-\frac{1}{Z^2}$ ؟

$|t| > 1$

$$Z^2 = t \to \frac{1}{1+t} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{t}}\right) = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-\cdots\right)$$

برق ۸۸ (۱ ص ۲۵۸ ، ست ۲۲

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+2)}$$

۱) ۲) ۳) $\frac{2}{81}$ ✓ ۴)

$z-1=t \Rightarrow z=t+1 \Rightarrow f=\frac{t+1}{t(t+3)}$ $2<|t|<3$

۳ خارج ناحیه است <=

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\left(-\frac{t}{3}\right)^2=\frac{2}{81}t^2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{t}+\frac{b}{t+3}$$

$q=-\frac{t}{3}$

$$\frac{a_0}{1-q}=a_0(1+q+q^2+\cdots)$$

ص ۲۷۱ ، س ۹۲

*نانوولو (۸۹

$$f(z)=\frac{1}{z(z^2-1)}$$

جمله اول

$n=0$ جمله دوم

۱) ××   ۲) ×× عدد / عدد ثابت   عدد / عدد ثابت

۳) ✓

۴) ×× $\frac{1}{t^2}$ $\frac{-1}{t}$ عدد ثابت

$\frac{\alpha}{t}$

حول ۱ ← $z-1=t$

$$z-1=t \rightarrow z=t+1$$

$$\rightarrow f=\frac{1}{(t+1)((t+1)^2-1)}=\frac{1}{t(t+1)(t+2)} \quad 1<|t|<2$$

$\frac{1}{t}$ خورش سطر اول انیست ← ما بیم سرون

راه دوم:

$$\frac{1}{t}\left(\frac{a}{t+1}+\frac{b}{t+2}\right)$$

$\frac{\alpha}{t}$ ← $\frac{b}{2t}$ ← از ۲ فاکتور ← خارج −۲

$\frac{a}{t^2}$ = جمله اول ← از t فاکتور ← داخل −۱

راه اول: جمله اول کامپیوتر ← ۳ درست!

صفحه ۵۷۶ جزوه

* ریاضی مهندسی ۹۲

$$f(z)=\frac{-2z}{(z-i)(z-3i)}$$

۱) ✗ $\frac{a}{z^2}$ ۲) ✓ $\frac{a}{z}$

۳) ✗ $\frac{a}{z}$ ۴) ✗ $\frac{a}{z^2}$

$z=$ جمله اول

۱) داخل ناحیه ← از ۲ تا کتور ←

← ادامه

بین ۱ و ۳ ← نوع کسان!

۳) خارج ← از ۲ تا کتور ← جمله اول عدد ثابت

الف) $|z|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$$

ب) $1<|z|<2$

ج) $|z|>2$

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

~~د) $|z|>1$~~

طرح این سوال غلط است

این تمرین صورت سؤال [illegible] هست

داخل ناحیه همدار با تمام نقطه تکین بجز مرکز دایره باشد

الف) داخل ناحیه نقطه تکین نیست

ب) "

ج) "

د) ۲ تا نقطه تکین داخل ناحیه است

اصلی دیگری ناحیه همدار اینه هیچ نقطه تکین داخل ناحیه نباشه

طراح فقط رشتن الف و ب و ج را بوده داخل سؤال!

مثلاً ۱،۲،۳ : ۲>

۱>

۱> ۲>۲

۲> ۳>

۳<

وقتی می‌نویسد $|z-z_0|>\epsilon$ ← ϵ را تا اولین نقطه تکین همراه شعاع بزرگ کرد!

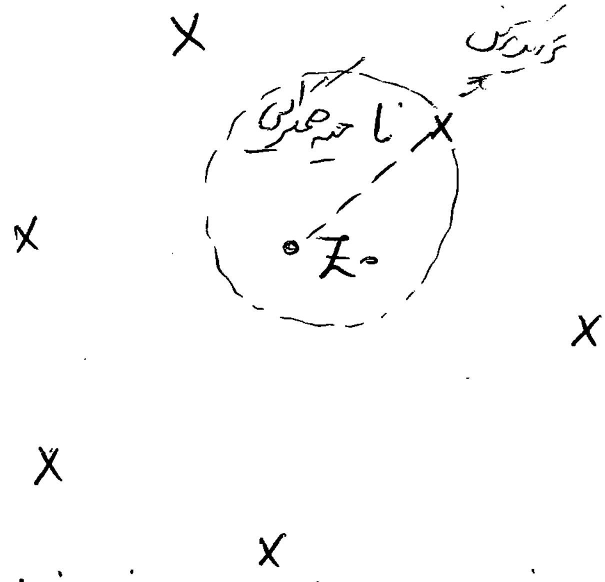
* اگر z_0 نقطه تحلیلی $f(z)$ باشد، در صورتیکه بسط لوران در همسایگی z_0 نوشته شود با بسط تیلور یکسان است، در غیر اینصورت متفاوت است

$|z|>r$ ← قسمت جملات [illegible] $\frac{a_n}{z^n}$ [illegible]

[illegible] نقاط تکین [illegible]

سوال: چرا بسط لوران حول نقاط تکین غیرتنها وجود ندارد؟

* برای محاسبه‌ی شعاع همگرایی تابع $f(z)$ حول نقطه z_0 کافی است نقاط غیرتحلیلی $f(z)$ را بدست آوریم. کمترین فاصله z_0 تا نقاط غیرتحلیلی را برابر شعاع همگرایی در نظر می‌گیریم.



ناحیه همگرایی ⇐ حول نقطه‌ای که سایر نقاط آنجا نیستند!

ص ۲۵۸ تست ۱۲

* برق ۸۹، ریاضی مهندسی ۸۳) شعاع همگرایی بسط تیلور $\frac{1}{(z-1)(z-3)}$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$z=1 \longrightarrow d_1=\frac{1}{2}$

$z=3 \longrightarrow d_2=\frac{5}{2}$

$\longrightarrow R=\text{Min}(d_1,d_2)=\frac{1}{2}$

جواب سؤال: شعاع همگرایی ... ← ۰ نمی‌شه سری نوشت!

ex : $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$

$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{z}\right) = \cancel{\frac{1}{z} + \frac{1}{3}z^3 + \cdots}$

غ ⟸ چون $z=0$ تکین غیرتنهاست! ← سری لوران (وجود ندارد)

* سری لوران حول نقاط تکین غیرتنها وجود ندارد

$\frac{1}{z^4\sin(\frac{1}{z})}$ ⟸ ~~سری لوران حول $z=0$ را بنویسید~~

سری لوران وجود ندارد

* کلاس های جبرانی معادلات با مشتقات جزئی: جلسه اول

پنج‌شنبه: ۷/۴ ← ساعت ۱۶ تا ۲۱٫۵

دوشنبه: ۷/۸ ← ۱۱٫۵ تا ۱۷

چهارشنبه: ۷/۱۰ ← ۷٫۵ تا ۱۳

پنج‌شنبه: ۷/۱۱ ← ۱۶ تا ۲۱٫۵

محاسبه ناحیه همگرایی و شعاع همگرایی :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

آزمون ریشه (کوشی) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{a_n}\right| < 1$

آزمون نسبت (دالامبر) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

* کامپیوتر ۸۳) ص ۲۶۲ ، تست ۱۵

$$\sum \left(\frac{2z}{2z+1}\right)^n$$

۱)   ۲)

۳) ✓   ۴)

آزمون ریشه $\Rightarrow \left|\frac{2z}{2z+1}\right| < 1 \rightarrow \mathrm{Re}(z) > -\frac{1}{4}$

ریشه صورت $= 0$ ، ریشه مخرج $= -\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ عمود منصف $= -\frac{1}{4}$ $\rightarrow$ سمت شامل صفر به‌ها نیم $\rightarrow$ $\mathrm{Re}(z) > -\frac{1}{4}$

ص ۱۳۵، تست ۱۴

ص ۳۰۸

* برق ۸۳

۱)   ۲) ✓   ۳)   ۴)

آزمون دینه $\rightarrow \left| e^{\frac{i}{z+1}} \right| < 1 \rightarrow y < 0$

صورت موهومی ← مخرج موهومی تا حقیقی !

i ← زوج ← iy ← $-iy$ ← iy ضرب در i ← y

$$e^{Re\left(\frac{i}{z+1}\right)} < 1 \rightarrow Re\left(\frac{i}{z+1}\right) < 0$$

$$Re\left(\frac{i(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2}\right) < 0 \rightarrow y < 0$$

ص ۳۰/۱ — ص ۲۵۷، تست ۱۴

* برق ۸۲ (

۱) ۲) ۳) ✓ $xy<0$ ۴)

آزمون رشته $\Rightarrow$ $\left|e^{\frac{i}{z^2}}\right|<1$

تحلیل ذهنی: $x^2-y^2+2ixy \xrightarrow{\text{حیار بالا}} -2ixy\times i = 2xy$

ص ۳۰۷ — ص ۲۵۹، تست ۳۶

* کارشناسی ۷۰ (

۱) ۲) ✓✓ ۳) ۴)

آزمون رشته $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \left|\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{e^{-1}} z\right|<1 \Rightarrow |z|<e$

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = 1^{\infty} \rightsquigarrow \lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)}$$

$$e^{\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{1}{n}-1\right)} = e^{-1}$$

۱۷۲

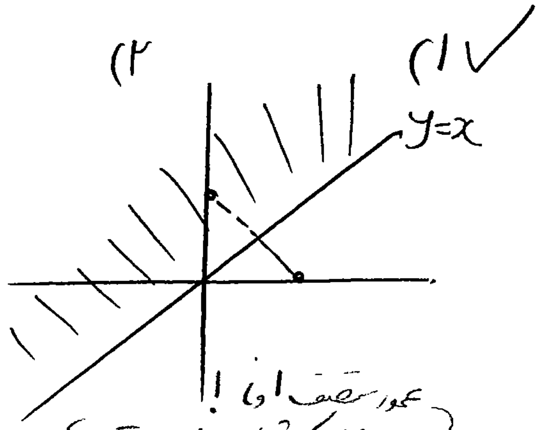
ص ۲۵۸، ست ۲۱

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{z-1}\right)^{n}$$

* برق ۸۷)

۱) ✓ ۲) ۳) ۴)

آزمون ریشه $\rightarrow \left|\frac{z-i}{z-1}\right|<1 \rightarrow$



عمود منصف اوناست!

اونجایی که شامل z_1 هست کنوراً!

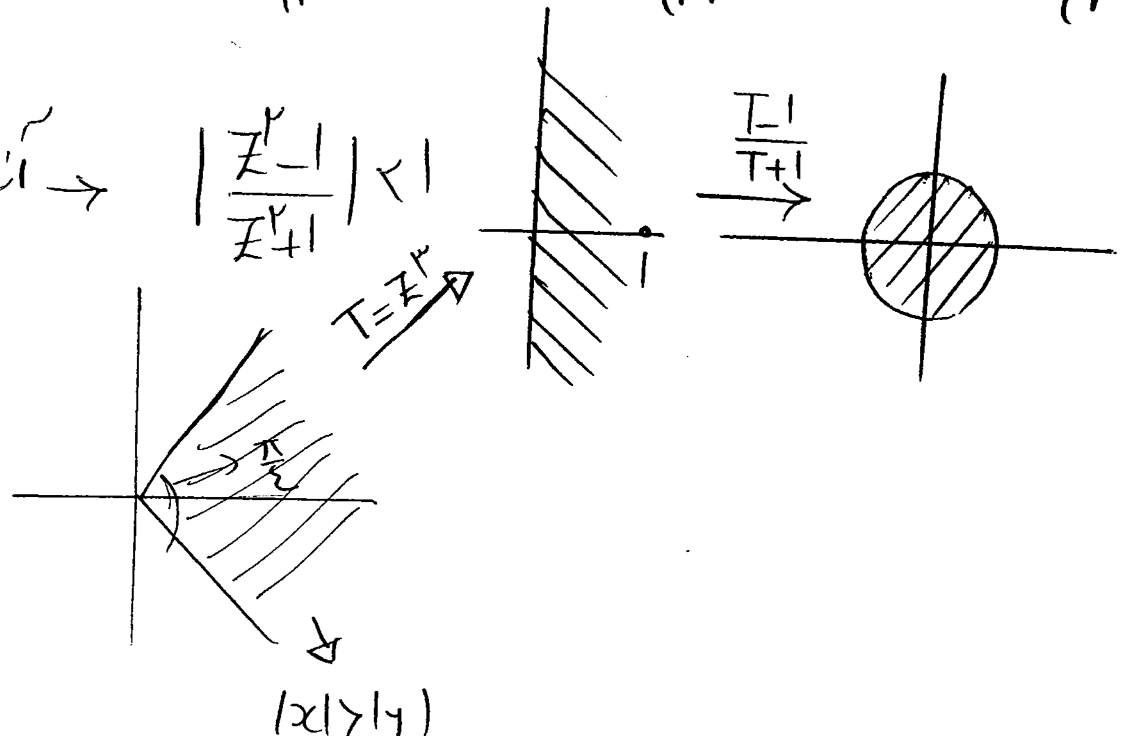
ص ۲۲۴، ست ۵

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^{n}$$

* کامپیوتر ۹۱

۱) ۲) ✓ ۳) ۴)

آزمون ریشه $\rightarrow \left|\frac{z^2-1}{z^2+1}\right|<1$



حل:
ترسیم حل

در دوری جی بود که شدن انی‌ـ در هر مرحله

$Z^2 = T$ ⟸ چه دوری کی توسط $\frac{T-1}{T+1}$ شدن را بوده اند
چه دوری کی بودن که توسط $T=Z^3$ شدن این
مسئله حل می‌شد!

* معرفی انواع نقاط تکین منفرد

اگر z_0 نقطه تکین منفرد $f(z)$ باشد آنگاه z_0 یکی از حالت‌های زیر است.

الف) قطب   ب) ویژه اساسی   ج) حذف شدنی (رفع شدنی) (برداشتنی)

الف) قطب: اگر در بسط لوران $f(z)$ در همسایگی نقطه تکین منفرد z_0 تعداد جملات اصلی محدود باشد z_0 قطب است و بالاترین درجه جمله اصلی مرتبه‌ی قطب است.

* مثال) در تابع $w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^{3n-5}}{(n+1)!}$ ، $z=2$ چه نوع نقطه‌ای است

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)^{\boxed{5}}}+\frac{1}{2!(z-2)^2}+\frac{z-2}{3!}+\frac{(z-2)^4}{4!}+\cdots$$

۲ جمله اصلی دارد

تعداد جملات اصلی محدود ← قطب

بالاترین درجه جمله اصلی = ۵

$z=2$ قطب مرتبه ۵ است.

ب) نقطه ویژه اساسی: اگر در بسط لوران $f(z)$ در همسایگی نقطه‌ای تکین منفرد z_0، تعداد جملات اصلی نامحدود باشد، z_0 ویژه اساسی است

* در بسط لوران $f(z)$ بر حسب توان‌های $z-z_0$ تعداد جملات اصلی نامحدود است آیا z نقطه ویژه اساسی است. بستگی دارد؟

$$w=\frac{1}{z-1} \overset{|z|>1}{=} \frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\cdots\right)$$

با وجود آنکه تعداد جملات اصلی نامحدود است اما $z=0$ ویژه اساسی نیست چون $z=0$ نقطه تکین منفرد نیست

$$w=\frac{1}{z(z-1)} \overset{|z|>1}{=} \frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

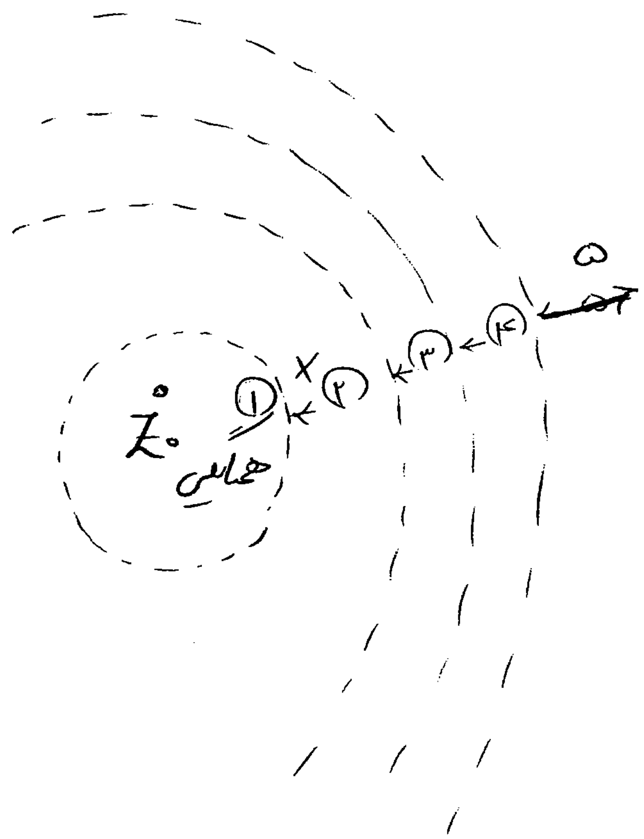
تعداد جملات اصلی نامحدود است اما $z=0$ ویژه اساسی نیست چون نقاط در همسایگی

$z=0$ نوشته نشده است.

$$W=\frac{1}{z(z-1)} \overset{|z|<1}{=} \frac{-1}{z}\left(\frac{1}{1-z}\right)=-\frac{1}{z}(1+z+z^2+\cdots)$$

$$=-\left(\frac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots\right)$$

$z=0$ قطب ساده یا مرتبه اول است.



* $z=0$ برای تابع زیر چه نوع نقطه‌ای است؟

$$w = z^{\overset{\text{تا بی‌نهایت}}{1\ldots}} \cos\left(\frac{1}{z}\right) = z^{1\ldots}\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\cdots\right)$$

$\Rightarrow$ $z=0$ ویژه اساسی

ج) اگر در بسط لوران $f(z)$ در همسایگی نقطه تکین منفرد z_0 تعداد جملات اصلی صفر باشد، z_0 را حذف شدنی می‌نامند.

$$\frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1-1+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots}{z^2} = \frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\cdots$$

$z=0$ حذف شدنی است!

* جمع بندی :

۱) اگر $f(z)$ و $g(z)$ تحلیلی باشند، آنگاه در تابع

$$\frac{f(z)}{g(z)}$$ ریشه‌های مخرج همواره قطب یا حذف شدنی اند

بعبارت دیگر اگر z_0 ریشه n ام مخرج و ریشه m ام صورت باشد

داریم :

الف) $n>m \implies z_0$ قطب مرتبه $n-m$ است.

ب) $n\leq m \implies z_0$ حذف شدنی است.

* روش تشخیص مرتبه‌ی ریشه : اگر z_0 ریشه‌ی $f(z)$ باشد مرتبه‌ی ریشه‌ی z_0 معادل مرتبه‌ی اولین مشتق $f(z)$ است که در z_0 مخالف صفر است.

$$\left.\begin{array}{l} f(z_0)=0 \\ f'(z_0)=0 \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(z_0)=0 \\ f^{(n)}(z_0)\neq 0 \end{array}\right\} \iff z_0 \text{ ریشه مرتبه } n \text{ ام } f(z) \text{ است}$$

* مثال $z=0$ برای تابع داده شده چه نوع نقطه ای است؟ $\underline{175}$

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{\operatorname{sh} z+\sin z-2z}$$

$$\begin{cases} g(z)=\operatorname{sh} z+\sin z-2z \rightarrow g(0)=0 \\ g'(z)=\operatorname{ch} z+\cos z-2 \rightarrow g'(0)=0 \\ g''(z)=\operatorname{sh} z-\sin z \rightarrow g''(0)=0 \\ g'''(z)=\operatorname{ch} z-\cos z \rightarrow g'''(0)=0 \\ g^{(4)}(z)=\operatorname{sh} z+\sin z \rightarrow g^{(4)}(0)=0 \\ g^{(5)}(z)=\operatorname{ch} z+\cos z \rightarrow g^{(5)}(0)\neq 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$z=0$ ریشه پنجم مخرج است

$z=0$ قطب مرتبه ۳ است!

$$\begin{cases} f_1(z)=1-\cos z \rightarrow f_1(0)=0 \\ f_1'(z)=\sin z \rightarrow f_1'(0)=0 \\ f_1''(z)=\cos z \rightarrow f_1''(0)\neq 0 \end{cases}$$

$z=0$ ریشه مرتبه ۲ صورت است

$$f(z)=\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots}{\cancel{z}+\cancel{\frac{z^3}{3!}}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+\cancel{z}-\cancel{\frac{z^3}{3!}}+\frac{z^5}{5!}\cdots-\cancel{2z}}$$

z=0 ریشه مرتبه ۲ صورت است

$$=\frac{z^2}{z^5}=\frac{1}{z^3}$$

z=0 ریشه مرتبه ۵ مخرج است

z=0 قطب مرتبه ۳ است

* در بسط مک لورن $f(z)$ درجه کمترین جمله معادل مرتبه ریشه $z=0$ است

*مثال ۱) در تابع زیر $z=i\pi$ چه نوع نقطه ای است؟

$e^z\neq 0$ مرتبه ۱ — مرتبه ۱۰

$2z\neq 0$ مرتبه ۱ — مرتبه ۱۸

$\boxed{\text{مرتبه ۲}}$

$$f(z)=\frac{(e^z+1)^{10}(z^2+\pi^2)^{18}}{(1+\operatorname{ch}z)^3\left(1+\operatorname{sh}z+\operatorname{ch}z+z-i\pi+\frac{1}{2}(z-i\pi)^2\right)^4(\operatorname{sh}^2 z)(1+\cos z)}$$

مرتبه ۶

مرتبه ۲

$1+\cos z\neq 0$ ریشه نیست

$1+\operatorname{ch}z \xrightarrow{\text{مشتق}} \operatorname{sh}z \xrightarrow{\text{مشتق}} \operatorname{ch}z\neq 0$ مرتبه ۲

$\operatorname{ch}z+\operatorname{sh}z+1+(z-i\pi)$
$\downarrow$
$\operatorname{sh}z+\operatorname{ch}z+1$
$\downarrow$
$\operatorname{ch}z+\operatorname{ch}z\neq 0$
مرتبه ۳

$\operatorname{ch}z\neq 0$
مرتبه ۱

$z = i\pi$ ریشه‌ی مرتبه ۲۸ صورت است

$z = i\pi$ ریشه‌ی مرتبه ۲۰ مخرج است

$\Leftarrow$ $z = i\pi$ حذف شدنی است

② در توابع $\sin(f(z))$ و $\cos(f(z))$ و $e^{f(z)}$ و $sh(f(z))$ و $ch(f(z))$ و ... همواره نقاط تکین منفرد حذف نشدنی $f(z)$ برای توابع فوق ویژه‌ی اساسی اند.

$$e^{\sin\left(\frac{1}{z(z^2-1)}\right)} \mapsto z = 0 \text{ و } z = \mp 1 \text{ ویژه‌ی اساسی اند}$$

در توابع $\frac{1}{\sin(f(z))}$ و $\frac{1}{\cos(f(z))}$ و $tg(f(z))$ و $\frac{1}{sh(f(z))}$ و $\frac{1}{ch(f(z))}$ و $tgh(f(z))$، نقاط تکین منفرد حذف نشدنی $f(z)$، همواره نقطه تکین غیرتنها برای توابع فوق می‌باشند.

۳) اگر z_0 نقطه‌ی تکین منفرد $f(z)$ باشد آنگاه :

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty \Rightarrow$ z_0 قطب تابع است

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) =$ وجود ندارد $\Rightarrow$ z_0 نقطه تکین اساسی است

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = h \Rightarrow$ z_0 حذف شدنی است

h: عدد محدود و مشخص

ex: $\cancel{\lim\limits_{z \to 0} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = 0} \Rightarrow$ $z=0$ حذف شدنی است

این حد وجود ندارد!

ex: $\lim\limits_{z \to 0} e^{\frac{1}{z^2}} \cancel{= \infty} \rightarrow$ $z=0$ قطب است

چون از اینور و از اونور برسیم به جواب‌های متفاوت می‌رسیم، حد ندارد.

توصیه اینکه از ② استفاده نشه!

* مکانیک ۸۲) صفحه ۳۱۵ صفحه ۲۲۰، سؤال ۳۴

$$f(z) = \frac{e^{z}-1}{z^{2}}$$

صورت: مرتبه ۱ — مخرج: مرتبه ۲

۱)
۲) قطب مرتبه اول ✓
۳)
۴)

* کامپیوتر ۸۰) صفحه ۱۳۵ صفحه ۲۲۲، سؤال ۴۰

$$f(z) = z^{10} e^{-\frac{1}{z^{2}}}$$

۱)
۲)
۳)
۴)

* ریاضی محض ۸۴) صفحه ۲۶۴، سؤال ۵۷

$z=0$ تکین حذف نشدنی

تابع $f(z) = e^{tg\left(\frac{1}{z}\right)}$ در نقطه $z_0=0$ دارای چه نوع تکینی است؟

۱)
۲)
۳)
۴) غیر تنها ✓

* کامپیوتر ۷۵) صفحه ۳۱۵ صفحه ۲۶۱، سؤال ۳۹

$z=0$ ← تکین غیر تنها ← تکین است!

$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$$

۱) یک نقطه تکین است ✓
۲)
۳)
۴)

JozveBargh.ir

روش حذفی:
۲ درست باشد ← ۳ و ۴ هم درست
۳ درست باشد ← ۴ هم
۴ درست باشد ← ۱ هم درست

← فقط ۱ می‌تواند درست باشد!

صفحه ۲۷۱، سؤال ۹۴

* مواد ۷۸)

$\cos z$ زوج ← $\sin$ فرد

$$f(z)=\frac{\cos z-1}{z^4}$$

$\cos z-1$ ← مرتبه ۲

z^4 ← مرتبه ۴

۱)　　　۲) ۲ ✓　　　۳)　　　۴)

صفحه ۲۶۲، سؤال ۴۷　　صفحه ۳۱۶

* کامپیوتر ۸۵)

۱) ×　　۲) ×
۳) ×　　۴) × ✓

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)}$$

← $z=1$ تکین غیرمجزا

← بی‌شمار قطب ساده دارد

فقط $\cos$ و $\sin$ ریشه‌های ساده دارند

هر ۴ تا غلط ← گزینه مورد نظر پاسخ سؤال = ۴

۱۷۸

* برق ۸۶

۱) × ✓

۲) ×

۳) ×

۴) ×

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)}$$

→ $z=-1$ تکین غیر تنها

→ بی‌نهایت قطب ساده دارد

ص ۲۷۳، س ۱۰۴

* مواد ۸۴) نقاط تکین و نوع آن را برای

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$$

۱)

۲)

۳)

۴) ✓

$z=0$ نقطه تکین غیر تنها

$$\sin\frac{1}{z}=0 \rightarrow \frac{1}{z}=n\pi \rightarrow z=\frac{1}{n\pi} \rightarrow$$ قطب ساده

صفحه ۲۶۹، سال ۸۳

* ریاضی محض ۹۱، تابع f با ضابطه $f(z) = z^2\left(\sin(\frac{1}{z}) - \cos(\frac{1}{z})\right)$

۱) در $z=0$ تکین برداشتنی دارد

۲) در $z=0$ قطب دارد

۳) در $z=0$ تکین اساسی دارد ✓

۴) در همسایگی محذوف (deleted)، صفر ایزوله است

گفتیم اگر z_0 نقطه ناپیوستگی رفع شدنی است تمام مشتق تعریف است
حالا هم که صورت تحلیلی، مشتق تحلیلی ← از بسط مک لورن هم می‌شه!

اگر z_0 نقطه تکین حذف شدنی تابع $f(z)$ باشد، درصورتیکه تابع را در این نقطه پیوسته کنیم برای محاسبه مشتقات مراتب بالاتر می‌توان از بسط مک لورن استفاده کرد به اینصورت که ضریب جمله z^n را بدست می‌آوریم و از رابطه

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

مشتق مرتبه n در صفر بدست می‌آید

↓

معلوم

ص ۱۷۸، تست ۱۰۶ اصلاح سوال

۱۷۹

(برق ۸۴) مشتق nام

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{ez-e^{z}}{(z-1)^2}, & z\neq 1\\[2ex] -\dfrac{e}{2}, & z=1\end{cases}$$ را

در نقطه $z=1$ بدست آورید؟

۱)

۲)

۳) ✓ $f^{(n)}(1)=\dfrac{-e}{(n+1)(n+2)}$

۴)

$$z-1=t \Rightarrow z=t+1 \Rightarrow f=\frac{e(t+1)-e^{t+1}}{t^2}$$

$$=e\,\frac{t+1-e^{t}}{t^2}=e\,\frac{t+1-1-t-\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}-\cdots}{t^2}$$

$$=-e\left(\frac{1}{2!}+\frac{t}{3!}+\frac{t^2}{4!}+\cdots\right)$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Rightarrow \frac{-e}{(n+2)!}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Rightarrow f^{(n)}(0)=\frac{-e}{(n+2)(n+1)}$$

ص ۲۵۸، س ۲٤   ص ۳۱۰

*برق ۱۹۱

۱) ✓   ۲)

۳)   ۴)

$$f(x) = \frac{1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \frac{z^8}{4!} + \cdots - 1}{z^2}$$

$$= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{3!} + \frac{z^6}{4!} + \cdots$$

$$a_{2k} = \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} \Rightarrow \frac{1}{(k+1)!} = \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}$$

$$\Rightarrow f^{(2k)}(0) = 2k(2k-1)\cdots(k+2)$$

* دوشنبه - ۹۲/۷/۸ - ریاضی مهندسی - جلسه‌ی دوازدهم

ماند : در بسط لوران $f(z)$ در همسایگی نقطه تکین منفرد z_0 ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ را مانده می‌نامند.

*مثال) در بسط لوران $f(z)=\frac{1}{1-z}$ در ناحیه‌ی $|z|>1$، ضریب $\frac{1}{z}$ را بدست آورید.

$$f(z)=\frac{1}{-z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

$-1=$ ضریب $\frac{1}{z}$

$z=0$ مانده در $=0$

① اگر z_0 نقطه حذف شدنی باشد، مانده در z_0 همواره برابر صفر است چون اصلاً جمله اصلی ندارد.

② اگر z_0 نقطه ویژه اساسی باشد، مانده در آن همواره از بسط لوران بدست می‌آید.

۳) اگر z_0 قطب باشد به ۲ روش زیر می‌توان مانده را در z_0 بدست آورد

الف) فرمول

$$a = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)}$$

$n \leftarrow$ مرتبه قطب

$n \leftarrow$ مرتبه ریشه مخرج

ب) استفاده از بسط لوران

* مثال) مانده تابع $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ در $z=0$ بدست آورید.

مرتبه مخرج

مرتبه صورت

روش اول: $n=5$ (مرتبه قطب) $\Rightarrow a_{-1} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{4!}\left[\frac{\sin z}{z}\right]^{(4)} \rightsquigarrow$ طولانی

روش دوم: $n=4$ (مرتبه ریشه مخرج) $\Rightarrow a_{-1} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{5!}\left[\sin z\right]^{(5)} = \frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{5!} = \frac{1}{5!}$

$$W = \sin z \Rightarrow W^{(n)} = \sin\left(z + \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow a_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}$$

$$W = \cos z \Rightarrow W^{(n)} = \cos\left(z + \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow a_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n!}$$

روش سوم : سطلوران $a_{-1} =$ مانده $= \frac{1}{z}$ ضریب $= \frac{1}{5!}$

هر وقت قطب ساده بود ← روش اول n مرتبه قطب

در غیر اینصورت ← n مرتبه صفر مخرج

یا

اختلاف مرتبه قطب و مرتبه صفر مخرج زیاد ← مرتبه قطب $= n$

در غیر اینصورت ← $n =$ مرتبه صفر مخرج

سوال : چه موقع از فرمول استفاده و چه موقع سطلوران ؟

اولویت با فرمول است.

اگر فرمول ها در n در دسترس اند اخت ← سطلوران

* مثال) مانده تابع $f(z) = \frac{tg^{-1} z}{z^6}$ در $z = 0$ را بدست آورید

روش اول : $n = 6$ صفر مرتبه مخرج ← $a_{-1} = \frac{1}{5!} \lim_{z \to 0} \left[tg^{-1} z \right]^{(5)}$ ← طولانی

روش دوم : سطلوران $\dfrac{z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots}{z^6}$ ← مانده $= \frac{1}{5}$

* مثال) مانده $f(z)=\sin(z+\frac{1}{z})$ در $z=0$ بدست آورید.

بسط لوران ← $z=0$ ویژه اساسی

$$f(z)=\sin z\cos\left(\frac{1}{z}\right)+\cos z\sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$f(z)=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\cdots\right)$$

$$+\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right)$$

مثلا z در $\frac{1}{z^2}$ ضرب شده $\frac{1}{z}$ ایجاد ← ضریب ← $-\frac{1}{2!}$

مثلا z^3 " " " " $\frac{1}{z^4}$ ← " ← $-\frac{1}{3!\,4!}$

ضریب $\frac{1}{z}$ = مانده

$$=-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!\,4!}-\frac{1}{5!\,6!}\cdots+1+\frac{1}{2!\,3!}+\frac{1}{4!\times 5!}+\cdots$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!\,(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!\,(2n+1)!}$$

۱۸۲

ص ۳۲۲ ص ۲۵۷ ت ۱۷

* برق ۸۴ مانده تابع $f(z) = z\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)$ در نقطه $z=1$ چقدر است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

$z=1$ ویژه اساسی $\longrightarrow$ بسط لوران $\longrightarrow z-1=t \longrightarrow z=t+1$

$$f=(t+1)\sin\left(\frac{t+1}{t}\right)=(t+1)\sin\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

$$=(t+1)\left(\sin 1\cos\frac{1}{t}+\cos 1\sin\frac{1}{t}\right)$$

$$\text{مانده} = \frac{1}{t}\ \text{ضریب} = -\frac{1}{2}\sin 1+\cos 1$$

$\frac{1}{t}$ ضریب $\mapsto$ $\cos t \xrightarrow{\text{در بسط}} t^2$ ضریب $=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{t^2}\ \text{ضریب} \to -\frac{1}{2}$$

ص ۳۲۳ ص ۲۶۱ ت ۳

* مکانیک ۸۳

۱) ۲) ۳) ۴)

$$a_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n!} \Longrightarrow$$ بجای n داریم 2n

$$= \frac{\cos n\pi}{2n!} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

صفحه ۲۵۷ تست ۱۵

* برق ۸۳

در تابع مختلط $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ نوع ویژگی (تکینی) تابع در نقطه $z=0$ چیست و مانده تابع در این نقطه ویژه (تکینی) چقدر است؟

۱) قطب ساده و صفر ۲) قطب ساده و $\frac{1}{2}$

۳) نقطه تکین اساسی (قطب مرتبه ∞) و $\frac{1}{6}$ ۴) ✓ نقطه تکین اساسی (قطب مرتبه ∞) و $\frac{1}{6}$

$z=0$ ویژه اساسی

جملات سطر فیت ⟸ طول محم فیت ۳ ← ۴ ✓

z^2 در $\frac{1}{z}$ ضرب با $\frac{1}{z^3}$ ضریب $\frac{1}{3!}$ ← $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

JozveBargh.ir

۱۸۳

ص ۲۶۲ ، تست ۵۱

ریاضی محض ۸۴ ریاضی محض ۸۹ ، مغناطیس ۹۲

مانده تابع $f(z) = e^{z} \, sh(\frac{1}{z})$ حول $z=0$ کدام است؟

۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ ✓ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$ ۲) $sh1$ ✗ ۱) $-sh1$ ✗

$$1 + \frac{1}{2! \times 3!} + \cdots$$

$$\left(1 + \cancel{z} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} + \cdots\right)$$

$$\text{مانده} = 1 + \frac{1}{2! \times 3!}$$

بهتر بود که ۴ را نیز به صورت سری بنویسیم تا با گزینه‌ها مقایسه شود

* هسته‌ای ۸۴) ص ۲۷۹ ، تست ۱۲۸

تابع $f(z) = \frac{shz}{\sin z}$ را در نظر می‌گیریم، مانده این تابع در نقطه $z=0$ کدام است؟

۴) صفر ✓ ۳) ۱ ۲) i ۱) -1

خاصیت مانده: اولین مرحله: نوع نقطه

$z=0$ ریشه صورت و مخرج و در نتیجه حذف شونده ← مانده = صفر

* مواد ۸۴)

$$f(z)=\frac{\operatorname{sh} z}{1-\operatorname{ch} z}$$

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳- ۴) ۲- ✓

مخرج ← ریشه مرتبه ۲
صورت ← ریشه مرتبه ۱
} ← قطب ساده

اگر z_0 قطب باشد
برای رسیدن به فرمول:

$$\boxed{\text{قطب ساده} \to n=1 \to a_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)}$$

$$a_{-1}=\lim_{z\to 0} z\,\frac{\cancel{\sin z}^{\,z}}{\cancel{1-\operatorname{ch} z}_{\,-\frac{1}{2}z^2}}=-2$$

* حد تابع $f(z)$ وقتی $z\to 0$ میل می‌کند، هم ارز کمترین توان z در بسط مک‌لورن $f(z)$ است به شرط آنکه کمترین توان عدد ثابت نباشد

۱۸۴

$\ln(1+z) \sim z$ \
$z \to 0$

$\ln(1+z) - z \sim -\frac{z^2}{2}$ \
$z \to 0$

$e^z - 1 - z \sim \frac{z^2}{2!}$

$\sin z + \operatorname{sh} z - 2z \sim \frac{2z^5}{5!}$

$z\cos z - \sin z \sim z^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$

ص ۳۲۷ — ص ۲۷۲ — س ۴۶

*

۴) ✓ ۳) ✗ ۲) ✗ ۱) ✗

$z = 0$ ویژه اساسی

$(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots\right)$

مانده $= 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

$S = e - 1$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \rightarrow e = 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots}$

صفحه ۱۵۵ تست ۱

*برق ۸۶

$$f(z)=\frac{\sin z \nearrow 1}{z^2 \searrow 2}$$

۱) ✓ ۲)

۳) ۴)

*تنها نقطه ای که مانده در آن همواره مخالف صفر است، قطب ساده است

*اگر تابع $f(z)$ نسبت به $z-z_0$ زوج باشد مانده در z_0 همواره برابر صفر است

*مثال) مانده تابع $f(z)=\frac{e^{z^2}}{(1-\cos z)^2}$ را در $z=0$ بدست آورید

$a_{-1}=0 \rightarrow$ چون تابع زوج است

*کامپیوتر ۷۹ مولف ۹۲ ص ۳۲۶

$e^{zt}\,tg(z)$ در قطب $z=\frac{3\pi}{2}$

۱) ۲) ۳) ۴) ✓

۱۸۵

$$e^{zt}\frac{\sin z}{\cos z}$$

$\cos$ فوق $\to \sin \to \frac{3\pi}{2}$ (در محدوده است)

قطب ساده است

$$\rightsquigarrow a_{-1} = \lim_{z\to\frac{3\pi}{2}} \left(z-\frac{3\pi}{2}\right)\frac{e^{zt}\sin z}{\cos z}$$

$$\overset{H}{=} \frac{e^{\frac{3\pi}{2}t}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -e^{\frac{3\pi}{2}t}$$

* اگر z_0 قطب ساده تابع $\frac{p(z)}{q(z)}$ باشد و $p(z_0)\neq 0$

آنگاه مانده در z_0 برابر است با: $\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

اثبات: $a_{-1} = \lim (z-z_0)\frac{p(z)}{q(z)} \overset{H}{=} \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

ص ۳۲۳   ص ۲۶ است ۲۷

* مکانیک ۸۵)

۱) ✓

۲)

۳)

۴)

مرتبه مخرج = ۳
مرتبه صورت = ۴ } ← قطب کاذب

z^2 صفر بر $\frac{1}{z^3}$ ← $\frac{1}{z}$ اجبار ⇐ ضریب z^2 =

ص ۳۳۱
* ریاضی محض ۸۹)

$$f(z)=\frac{1}{z(1+z-e^z)}$$

۱) ۹   ۲) ۸

۳)   ۴)

۰ = z ← قطب مرتبه ۳ ادغام

JozveBargh.ir

$$a_{-1}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left[z^{3}\frac{1}{z(1+z-e^{z})}\right]'' \to$$ طولانی

* زمانی که مخرج بسط مک‌لورنش، تعداد جملات زیاد باشد:

$$\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots}=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots \qquad b_0\neq$$

اگر $b_0=0$ باشد از کمترین درجه بسط مک‌لورن مخرج فاکتور می‌گیریم

$$a_0=b_0c_0$$

$$a_1=b_1c_0+b_0c_1$$

$$a_2=b_2c_0+b_1c_1+b_0c_2$$

$$a_3=b_3c_0+b_2c_1+b_1c_2+b_0c_3$$

$$a_4=b_4c_0+b_3c_1+b_2c_2+b_1c_3+b_0c_4$$

$$c_0=\frac{a_0}{b_0}$$

$$c_1=-\frac{1}{b_0^2}\begin{vmatrix}a_0 & a_1\\ b_0 & b_1\end{vmatrix}$$

$$c_2=\frac{1}{b_0^3}\begin{vmatrix}a_0 & a_1 & a_2\\ b_0 & b_1 & b_2\\ 0 & b_0 & b_1\end{vmatrix}$$

$$c_3 = -\frac{1}{b_0^4}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{b_0^{k+1}}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_k \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_k \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{k-1} \\ & \vdots & & \end{vmatrix}$$

* مثال: مانده تابع $f(z) = \dfrac{\cot g\, z}{z^4}$ در $z=0$ را بدست آورید

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^4 \sin z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots}{z^4\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right)}$$

$$= \frac{1}{z^5}\left(\frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \cdots}\right)$$

$$= \frac{1}{z^5}\left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots\right)$$

مانده $=$ ضریب $\frac{1}{z}$ $= c_4 = -\frac{1}{45}$

JozveBargh.ir

$$a_0 = b_0 c_0 \rightarrow 1 = 1 \times c_0 \rightarrow c_0 = 1$$

$$a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2 \rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{3!} \times 1 + 0 + 1 \times c_2$$

$$\Longrightarrow c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$$

$$a_4 = b_4 c_0 + b_3 c_1 + b_2 c_2 + b_1 c_3 + b_0 c_4$$

$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{5!} \times 1 + 0 + \left(-\frac{1}{3!}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) + 0 + c_4$$

$$c_4 = \frac{1}{24} - \frac{1}{120} - \frac{1}{18} = -\frac{1}{45}$$

$$\cot g z = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{45} z^4 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 + \cdots$$

$$tg z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15} z^5$$

$$a_5 = b_5 c_0 + b_4 c_1 + b_3 c_2 + b_2 c_3 + b_1 c_4 + b_0 c_5$$

$$\frac{1}{5!} = 0 + \frac{1}{4!} \times 1 + 0 + \left(-\frac{1}{2!}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 0 + c_5$$

$$C_5 = \frac{1}{120} - \frac{1}{24} + \frac{1}{6}$$

$$C_5 = \frac{2}{15}$$

ص ۳۳۱ ص ۲۶۷ س ۷۲

* ریاضی محض ۸۹

۲) α

۴)

۱) α

۳) ✓

$$a_{-1} = \frac{1}{2!}\left[z^3 \frac{1}{z(1+z-e^z)}\right]'' \rightarrow \text{طولانی}$$

$$f = \frac{1}{z^3}\left(C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots\right) \qquad \text{مانده} = C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{\left(\frac{-1}{2}\right)^3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3!} & -\frac{1}{4!} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3!} \end{vmatrix} = -8\left(\frac{1}{36} - \frac{1}{48}\right) = \dots + \frac{1}{6}$$

ضریب z^2 ضریب z^3 ضریب z^4

$$C_2 = -\frac{1}{18}$$

ex ۲۸۸

$$\frac{}{\underbrace{\frac{4}{2!}}_{b_3} z^3 + \underbrace{\frac{2}{3!}}_{b_4} z^4 + \underbrace{\frac{3}{5!}}_{b_5} z^5 + \cdots} = \frac{1}{z^3}\,\frac{}{\underbrace{\frac{4}{2!}}_{b_0} + \underbrace{\frac{2}{3!}}_{b_1} z + \underbrace{\frac{3}{5!}}_{b_2} z^2}$$

* ریاضی محض (۹۲) مانده‌ی تابع $f(z)=\dfrac{e^{-z}-1}{\sinh z-\sin z}$ در $z=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$ ✓

مانده $= C_2$

$$a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2 \Rightarrow \frac{1}{2} = 0 + 0 + \frac{2}{3!} \times C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

انتگرال مختلط

$\int_C f(z)dz$

مسیر C باز ← f(z) تحلیلی است ← محاسبه انتگرال به مسیر بستگی ندارد ← مانند توابع حقیقی انتگرال را محاسبه می‌کنیم

$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$

z_2 نقطه انتهای مسیر

z_1 نقطه ابتدای مسیر

مسیر C باز ← f(z) تحلیلی نیست ← باید روی مسیر حرکت کنیم

$\oint_C f(z)dz$

مسیر C بسته ← f(z) درون ناحیه C تحلیلی است ← $\oint_C f(z)dz=0$

ص ۹۵

مسیر C بسته ← f(z) در C تحلیلی نیست اما نقاط غیر تحلیلی از نوع تکین منفرد هستند ← با استفاده از قضیه مانده‌ها انتگرال را محاسبه می‌کنیم

مسیر C بسته ← f(z) در C تحلیلی نیست و نقاط غیر تحلیلی به جز تکین منفرد در C دارد ← باید روی مسیر C حرکت کنیم

* برای حرکت روی مسیر مطابق زیر عمل می‌کنیم:

1. معادله مسیر یا مسیرها را می‌نویسیم
2. معادلات مسیر را در عبارت مقابل انتگرال جایگذاری می‌کنیم
3. پس از جایگذاری مرحله 2، عبارت مقابل انتگرال برحسب یک متغیر بدست می‌آید. در جهت مشخص شده حدود انتگرال را می‌نویسیم و مانند انتگرال‌های حقیقی انتگرال را محاسبه می‌کنیم

ص ۳۳۶

* برق ۷۱)

۱)

۲)

۳)

۴)

* استاد انتهای چشم منطبق ⟨ بود ← بسته / نبود ← باز

$z_1 = x_1 + iy_1$

$$\begin{cases} t=0 \rightarrow A\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ t=2\pi \rightarrow B\begin{vmatrix} 2a\pi \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases} \rightarrow \text{مسیر باز}$$

$f(z)$ تحلیلی است

← مسیر بستگی ندارد!

$$\int_0^{2a\pi} (z^4 + 2z^2 + 1)\,dz = \frac{z^5}{5} + \frac{2}{3}z^3 + z \Big|_0^{2a\pi} = \cdots$$

۲) تشخیص مسیر باز و بسته ← به پیچیدگی ندارد!

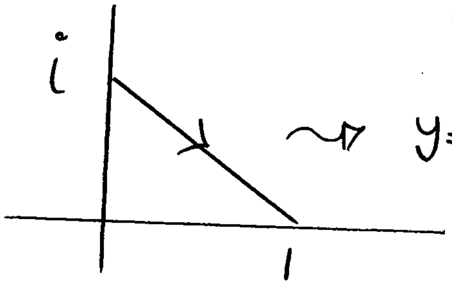
۳) تحلیلی بودن $f(z)$ ← بایک نگاه! (چون تابع برحسب z و $\bar{z}$ است) ← به پیچیدگی ندارد!

فرض: تحلیلی باشد ← انتگرال‌های معمولی ← معمولاً پیچیدگی ایجاد می‌کند

ص ۳۳۸

*مطابق ۱۷۹)

۱) $\frac{2}{3}(1+i)$ (۲ ✓ ۳) ۴)



$\rightsquigarrow y = 1 - x$

$$\int (x^2+y^2)(dx - i\,dy) = \int_0^1 (x^2+(1-x)^2)(dx + i\,dx)$$

$$= (1+i)\left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}(1-x)^3\right)\Big|_0^1 = (1+i)\left(\frac{2}{3}\right)$$

کجا طراح می‌تونه پیچیدگی ایجاد کنه؟

مسیر باید بسته ✓

$f(z)$ تحلیلی در نقاطی ✓

فرض: غیرتحلیلی ← مسیر بسته

✓ نقاط انفصال دارند خط دایره‌ای نه مسیر

یا نقاط داخل دایره ... [illegible]

✓ ← معادله مسیر داریم ← جایگذاری در عبارت داخل انتگرال

← حل انتگرال حقیقی ← با پیچیده نمایش دهند ✓

صـ ۳۴۱

۱۹۰

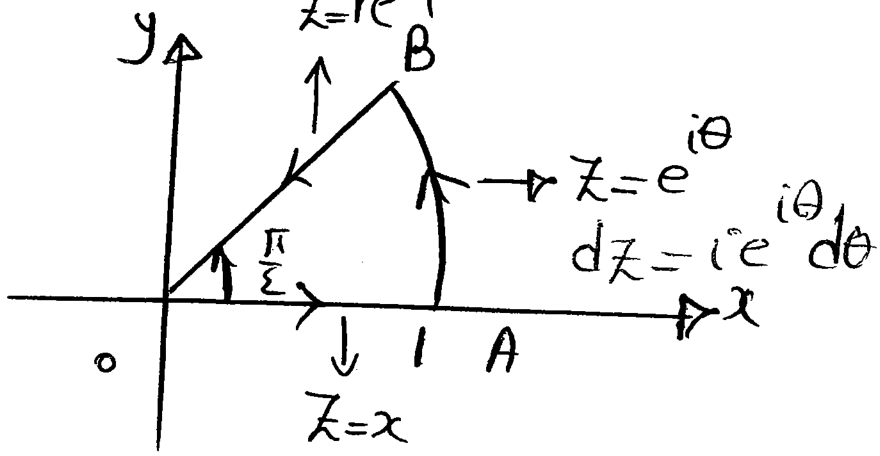
* برق ۷۷)

۱)

۲)

۳) ✓ $J\frac{\pi}{4}$

۴)



معادله‌ی خطی که از مبدا می‌گذرد و با محور حقیقی در جهت مثلثاتی زاویه α می‌سازد برابر است با $z = re^{i\alpha}$

$$\int_0^1 x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-i\theta}\, ie^{i\theta}d\theta + \int_1^0 re^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}dr$$

$$= \frac{1}{2} + i\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{i\pi}{4}$$

روش دوم: $\oint_C \bar{z}dz = 2i\iint_D dy\,dx = 2i \times \frac{1}{8}\pi \times 1 = \frac{i\pi}{4}$

$$\oint_C f(z,\bar{z})\,dz = 2i\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,dy\,dx$$

ناحیه محصور شده توسط مسیر C

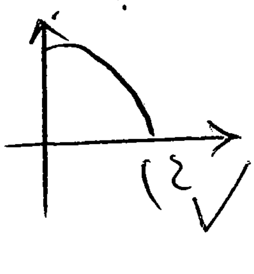
$$= i\iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)dy\,dx$$

$$\oint f(z,\bar{z})\,d\bar{z} = -2i\iint_D \frac{\partial f}{\partial z}\,dy\,dx$$

ص ۵۶۷ تست ۱۶

* کامپیوتر ۹۲) حاصل انتگرال زیر روی مسیر بسته ربع دایره C نشان داده شده از دایره که با رابطه $I=\oint_C (\mathrm{Re}\,z)\,dz$

$$\begin{cases} x=\dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases}$$



۴ ✓   ۳)   ۲)   ۱)

$$I=\oint \frac{1}{2}(z+\bar{z})\,dz$$

$$=2i\iint \frac{1}{2}\,dy\,dx = i\times\frac{1}{4}\pi$$

جلسه فوق العاده
۱۹۱

* پنج شنبه - ۹۲/۷/۱۱ - جلسه‌ی سیزدهم ریاضی مهندسی

جلسه‌ی اول مشتقات جزئی

فهرست مطالب: *

*معادلات با مشتقات جزئی

- معادلات مرتبه اول (*)
- معادلات مرتبه دوم
  - تشخیص نوع معادله (*)
  - حل معادله (*)
  - روش دالامبر معادله موج (**)
- معادله موج و حرارت
  - در مختصات دکارتی (***)
  - در مختصات قطبی
  - در مختصات کروی
- معادله لاپلاس
  - در مختصات دکارتی (***)
  - در مختصات قطبی (**)
  - در مختصات کروی (*)
- حل معادلات با مشتقات جزئی با استفاده از تبدیل لاپلاس - تبدیل فوریه - سری فوریه (*)
- حل معادله لاپلاس با استفاده از نگاشت همدیس

* معرفی معادله موج

منبع نیروی خارجی

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t) \qquad 0<x<L,\ t>0$$

$h(x,t)=0 \rightarrow$ معادله همگن

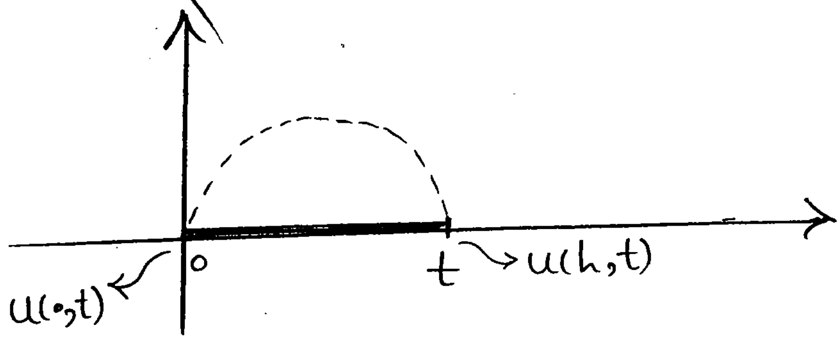
$h(x,t)\neq 0 \rightarrow$ معادله ناهمگن

شرایط مرزی

$$\begin{cases} u(0,t)=p(t) \\ u(L,t)=q(t) \end{cases}$$

شرایط اولیه

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) & \leftarrow \text{مکان اولیه} \\ u_t(x,0)=g(x) & \leftarrow \text{سرعت اولیه} \end{cases}$$



ارتعاش مکان x در زمان t = $u(x,t)$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \alpha u + \beta u_t + h(x,t)$$

ناشی از نیروی بازگردان

مقاومت محیط (نیروی اصطکاک محیط)

مرز خطی $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a u_x(0,t) + b u(0,t) = p(t) \\ a' u_x(L,t) + b' u(L,t) = q(t) \end{cases}$$

۱۹۲

ص ۴۳۶، سک ۴۱

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

* برق ۹۱)

۱)

۲)

۳)

۴) ✓

* معرفی شرایط مرزی معادله موج :

① شرایط مرزی کنترل شده

$$\begin{cases} u(0,t) = p(t) \\ u(h,t) = q(t) \end{cases}$$

حالت خاص : اگر مرزها ثابت شده باشند یا در مرزها مانع سخت داشته باشیم یا در مرزها گره تشکیل شود و یا در مرزها دامنه‌ی ارتعاش صفر باشد داریم :

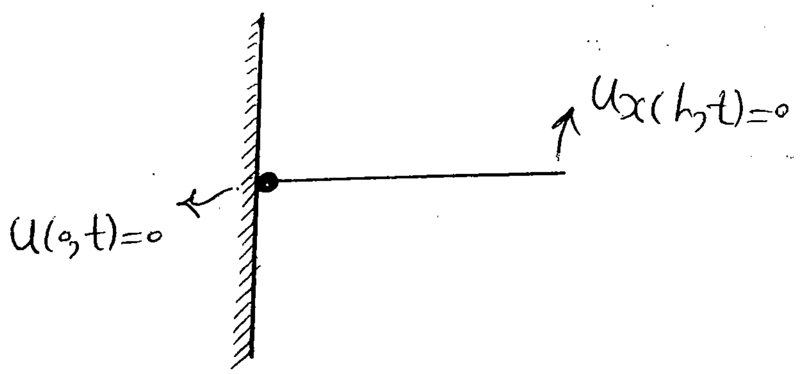
$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(h,t) = 0 \end{cases}$$

② نیروی وارد در مرزها معلوم باشد

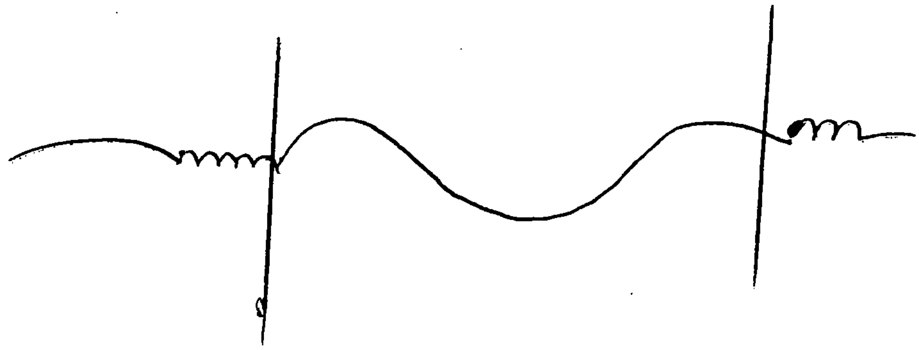
$$\begin{cases} u_x(0,t)=p(t) \\ u_x(h,t)=q(t) \end{cases}$$

* حالت خاص : اگر در مرزها مانع نرم باشد یا در مرزها شکم تشکیل شود یا در مرزها دامنه‌ی ارتعاش ماکزیمم باشد داریم :

$$\begin{cases} u_x(l,t)=0 \\ u_x(h,t)=0 \end{cases}$$



مرزها به جسم الاستیک متصل باشند



$$F = K\Delta x \rightsquigarrow u_x(0,t) = \alpha\left(u(0,t) - p_1(t)\right)$$

$$u_x(h,t) = \beta\left(u(h,t) - q_1(t)\right)$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) - \alpha u(0,t) = p(t) \\ u_x(h,t) - \beta u(h,t) = q(t) \end{cases}$$

* معرفی معادله حرارت:

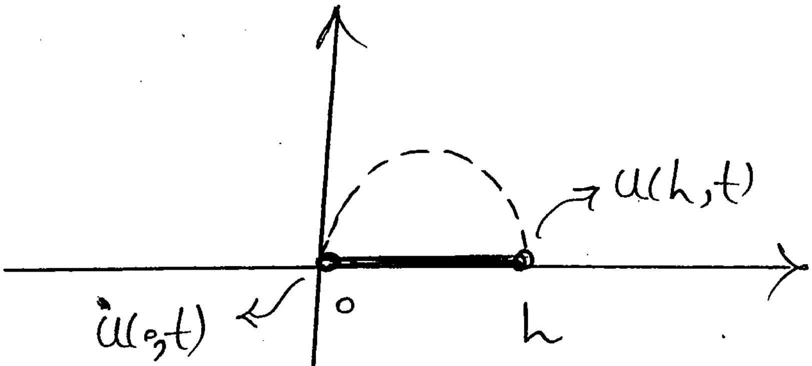
منبع حرارت داخلی

$$u_t = c^2 u_{xx} + h(x,t) \qquad 0<x<h,\ t>0$$

شرایط مرزی حرارت

$$\begin{cases} u(0,t) = p(t) \\ u(h,t) = q(t) \end{cases}$$

شرط اولیه $\{ u(x,0) = f(x) \longrightarrow$ توزیع اولیه دما



دمای مکان x در زمان t : $u(x,t)$

فرم کلی

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \underline{\alpha u} + \underline{\beta u_x} + h(x,t)$$

ناشی از تبادل گرمایی با محیط بیرون است

جریان های همرفتی آلوده کننده

معرفی شرایط مرزی در معادله حرارت :

① شرایط مرزی کنترل شده

$$\begin{cases} u(0,t) = p(t) \\ u(h,t) = q(t) \end{cases}$$

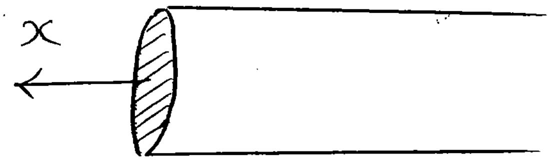
حالت خاص اگر دو سر میله در مخلوط آب و یخ قرار داشته باشد

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(h,t) = 0 \end{cases}$$

② شار گرمایی در مرزها معلوم باشد

$\vec{n}$: بردار عمود بر سطح

$$\text{شار گرمایی} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial \vec{n}}$$



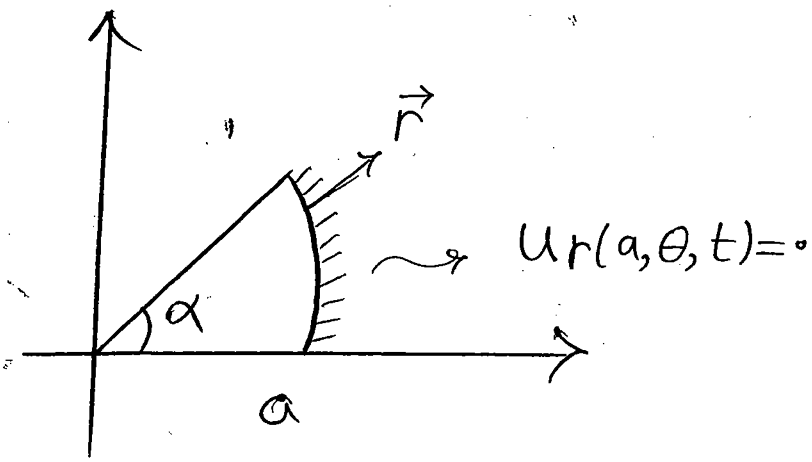
$$\begin{cases} u_x(0,t) = p(t) \\ u_x(h,t) = q(t) \end{cases}$$

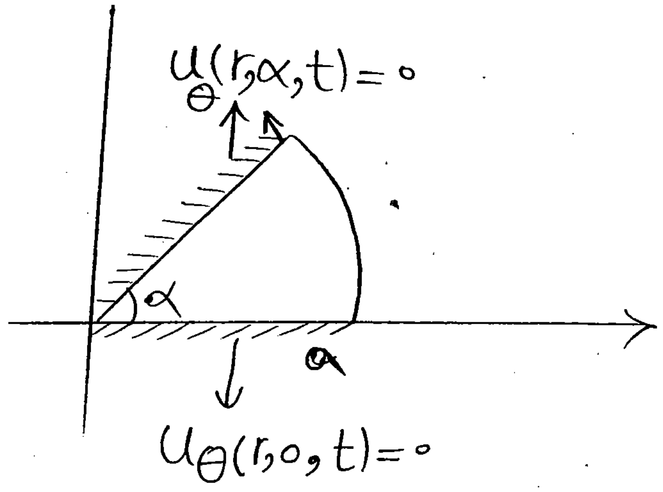
حالت خاص : اگر مرزها عایق بندی شده باشند

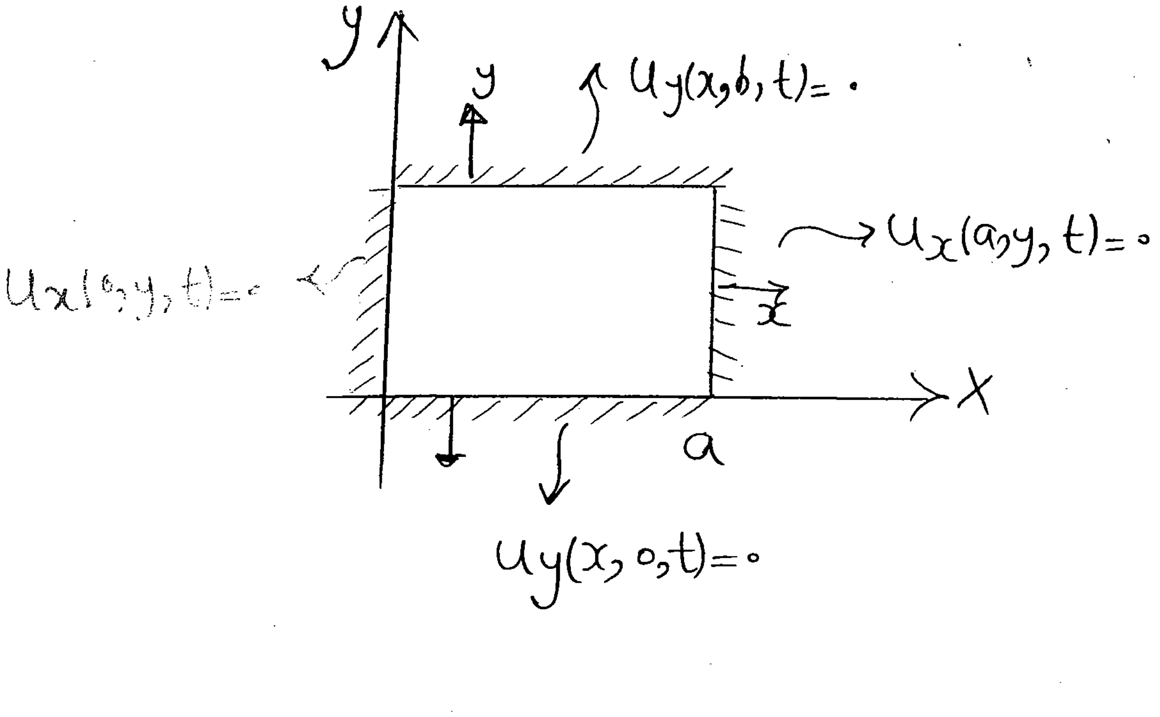
(تبادل گرمایی در مرزها وجود نداشته باشد)

$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(h,t) = 0 \end{cases}$$

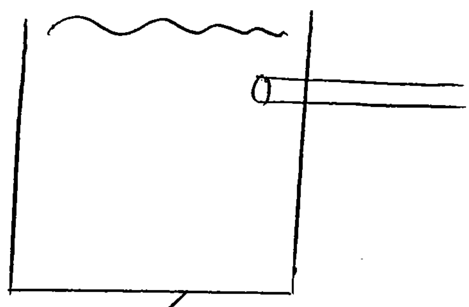
* مثال) شرایط مرزی را در نواحی عایق بندی شده بنویسید







۳) مرزها در محیط گرمایی ثانویه قرار داشته باشند



شار گرمایی $= \alpha \Delta \theta$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \alpha\big(u(0,t) - p_1(t)\big) \\ u_x(h,t) = \beta\big(u(h,t) - q_1(t)\big) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) - \alpha u(0,t) = p(t) \\ u_x(h,t) - \beta u(h,t) = q(t) \end{cases}$$

* حذف شرایط اولیه

در معادله لاپلاس از شرایط اولیه برای بدست آوردن جواب ثابت استفاده کردیم

اینجا هم شرایط اولیه برای بدست آوردن محاسبه جواب است

پس قدم اول شرایط اولیه حذف، چون دنبال جواب عمومی هستیم

* هر موقع معادله ای داریم که شرایط مرزی همگن نبود باید با تغییر متغیر مناسب این شرایط مرزی را همگن کرد

صفر کردن شرایط مرزی

برای این منظور سعی می کنیم با تغییر متغیر مناسب، معادله داده شده را به معادله با شرایط مرزی صفر تبدیل کنیم مطابق زیر.

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

می خواهیم تابع $w(x,t)$ را طوری محاسبه نماییم که شرایط مرزی $v(x,t)$ صفر شود یعنی

$$\begin{cases} v(0,t)=0 \\ v(L,t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0,t)=\cancel{v(0,t)}^{0}+w(0,t) \\ u(L,t)=\cancel{v(L,t)}^{0}+w(L,t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(0,t)=w(0,t) \\ u(L,t)=w(L,t) \end{cases}$$

$$u(x,t)=v(x,t)+\underbrace{w(x,t)}_{\text{معلوم}}$$

در معادله موج $\rightarrow$ $u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t)$

$$\rightarrow v_{tt} + w_{tt} = c^2 v_{xx} + c^2 w_{xx} + h(x,t)$$

$$\rightarrow v_{tt} = c^2 v_{xx} + \underbrace{h(x,t) - w_{tt} + c^2 w_{xx}}_{H(x,t)}$$

موج ①
$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} + H(x,t) \\ v(0,t) = 0 \\ v(h,t) = 0 \\ v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = f(x) - w(x,0) = f(x) \end{cases}$$
$$v_t(x,0) = u_t(x,0) - w_t(x,0) = g(x) - w_t(x,0) = g_1(x)$$

حرارت ②
$$\begin{cases} v_t = c^2 v_{xx} + H(x,t) \\ v(0,t) = 0 \\ v(h,t) = 0 \\ v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = f(x) - w(x,0) = f_1(x) \end{cases}$$

* مثال) برای معادلات موج و حرارت با شرایط مرزی داده شده تابع $W(x,t)$ را طوری بدست آورید که این معادلات به معادلات با شرایط مرزی صفر تبدیل شوند.

① $\begin{cases} u(0,t)=p(t) \\ u(h,t)=q(t) \end{cases}$

$W(x,t)=Ax+B$

$$\left.\begin{cases} W(0,t)=p(t) \Rightarrow B=p(t) \\ W(h,t)=q(t) \Rightarrow q(t)=Ah+p(t) \end{cases} \quad A=\frac{q(t)-p(t)}{h}\right\}$$

$$\Rightarrow W(x,t)=\frac{q(t)+p(t)}{h}+p(t)$$

② $\begin{cases} u_x(0,t)=p(t) \\ u(h,t)=q(t) \end{cases}$

$W(x,t)=Ax+B$

$$\left.\begin{aligned} &W_x(0,t)=p(t) \Rightarrow A=p(t) \\ &W(h,t)=q(t) \Rightarrow q(t)=p(t)h+B \\ &B=q(t)-p(t) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow W=p(t)x+q(t)-p(t)h$$

۱۹۷

۳

$$\begin{cases} u_x(0,t)=p(t) \\ u_x(L,t)=q(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_x(x,t)=Ax+B \\ W_x(0,t)=p(t) \longrightarrow B=p(t) \\ W_x(L,t)=q(t) \longrightarrow q(t)=AL+p(t) \end{cases}$$

$$\longrightarrow A=\frac{q(t)-p(t)}{L}$$

$$W_x(x,t)=\frac{q(t)-p(t)}{L}x+p(t)$$

$$\longrightarrow \quad W(x,t)=\frac{q(t)-p(t)}{2L}x^2+p(t)x$$

* تمرین اندیس u را برای w نوشتیم!

تمرین صفحه قبل

ص ۱۴۵۷

* سری ۲ (۷

$$u(x,t)=v(x,t)+\underbrace{a(t)x+b(t)}_{=tx+2t}$$

(۱

(۲

(۳

(۴ ✓

$0, 2t$

$1, t$

معادله موج با شرایط مرزی مخالف صفر $\xrightarrow{\text{تبدیل به}}$ معادله موج با شرایط مرزی صفر

اندازه شیب و عرض از مبدا

معادله خطی که از این نقطه عبور می کند

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

$$u(0,t) = v(0,t) + w(0,t) \rightarrow \begin{cases} 2t = 0 + b(t) \\ b(t) = 2t \end{cases}$$

$$u(1,t) = v(1,t) + w(1,t) \rightarrow \begin{cases} t = 0 + a(t) + 2t \\ a(t) = -t \end{cases}$$

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x,0) \rightarrow \begin{cases} x = f_1(x) + 0 \\ f_1(x) = x \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = v_t(x,0) + w_t(x,0) \rightarrow \begin{cases} 2 = f_2(x) - x + 2 \\ f_2(x) = x \end{cases}$$

صـ ۱۴۵۸

* برق ۷۳)
دکتری مکانیک ۹۲

۱) ✗ ۲) ✓✓

۳) ✗ ۴) ✗

شرایط مرزی مخالف صفر $\xrightarrow{\text{تبدیل}}$ شرایط مرزی صفر

معادله حرارت را از دو نقطه می‌گذرد!

$$W(x,t) = \frac{bt - at}{\pi}x + at$$

روش دوم: چون w خط ← ۳ حذف ✗

بقیه ← شرط در گزینه‌ها جایگذاری

$x=0$ ← باید بشه at ← اگر نشه ← غ ✗

۲ میشه ← ✓✓

۴ نمیشه ← غ ✗

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} F(t)\ x\ (\text{تابع ویژه})$$

تغییرات آن ناشی از تغییرات شرایط مرزی که تغییرات آن ناشی از تغییرات معادله است

تابع ویژه: همان پایه متعامدی است که توابع $H(x,t)$ و $f(x)$ و $g(x)$ برحسب آن بسط داده می‌شود

فرم کلی تابع ویژه در معادلات موج و حرارت در مختصات دکارتی آن بصورت زیر است:

$\lambda \geq 0$ و $\text{تابع ویژه} = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$

مقدار ویژه

اگر شرایط مرزی از نوع یک و دو در $x=0$ داشته باشیم در تابع ویژه محدودیت ایجاد می‌شود در غیر اینصورت تابع ویژه کلی‌ترین فرم است.

* شرط مرزی در $x=h$ محدودیت در مقدار ویژه ایجاد می‌کند

$$\text{تابع ویژه} = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

* مثال) تابع ویژه و مقادیر ویژه برای شرایط داده شده بدست آورید

(1)
$$\begin{cases} u(0,t)=0 \longrightarrow 0=A+0 \longrightarrow A=0 \Rightarrow \text{تابع ویژه}=\sin\lambda x \\ u(h,t)=0 \longrightarrow 0=\underset{\neq 0}{B}\sin\lambda h \longrightarrow \sin\lambda h=0 \longrightarrow \lambda h=n\pi \end{cases}$$

چون نمی‌شه هم A صفر باشه هم B!

$$\lambda=\frac{n\pi}{h}$$

(2)
$$\begin{cases} u_x(0,t)=0 \longrightarrow 0=0+B\lambda \longrightarrow B=0 \Rightarrow \text{تابع ویژه}=\cos\lambda x \\ u_x(h,t)=0 \longrightarrow \sin\lambda h=0 \longrightarrow \lambda h=n\pi \longrightarrow \lambda=\frac{n\pi}{h} \end{cases}$$

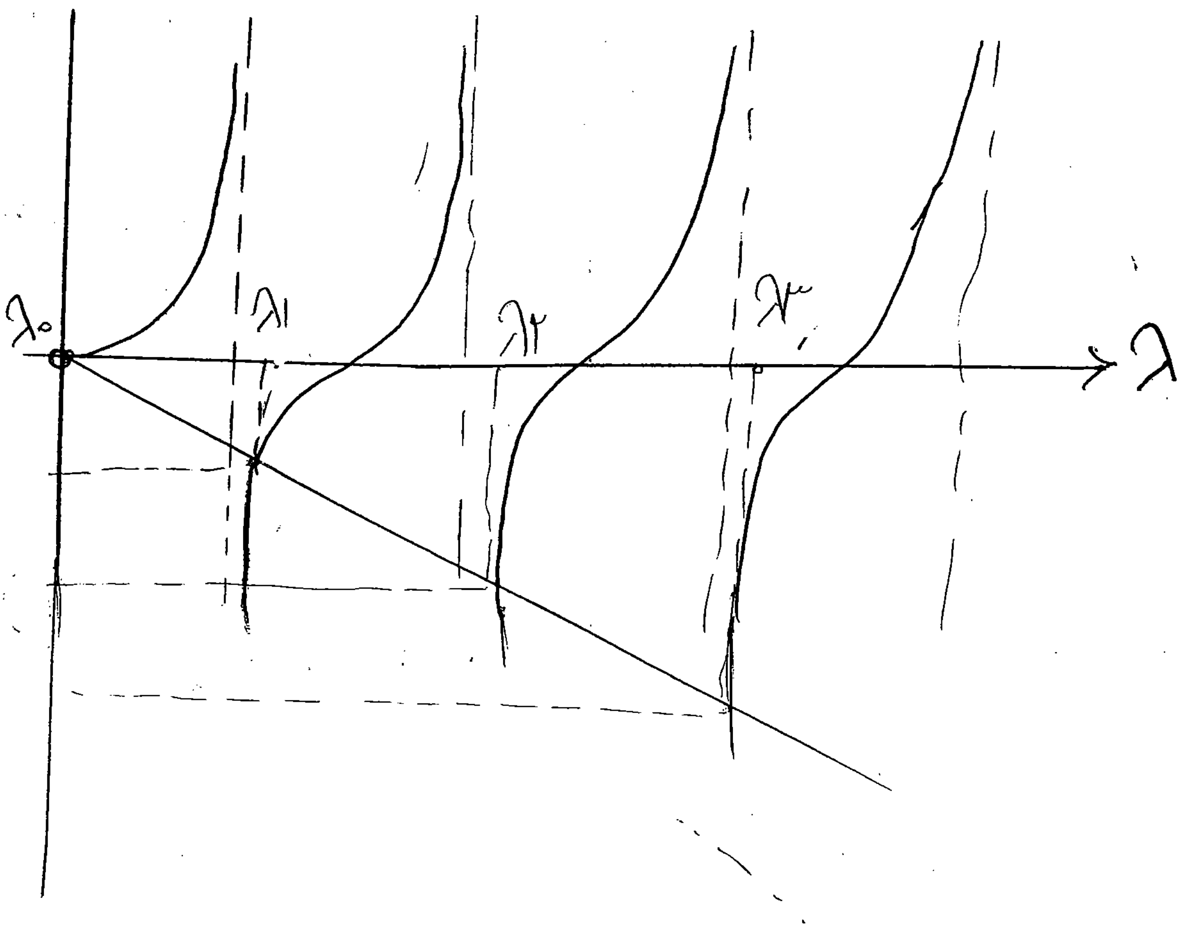
شرط مرزی دوم را روی تابع ویژه اعمال می‌کنیم.

(3)
$$\begin{cases} u_x(0,t)=0 \longrightarrow \text{تابع ویژه}=\cos\lambda x \\ u(h,t)=0 \longrightarrow \cos\lambda h=0 \Rightarrow \lambda h=(2n-1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{(2n-1)\pi}{2h}$$

(4)
$$\begin{cases} u(0,t)=0 \longrightarrow \sin\lambda x \\ u(h,t)+u_x(h,t)=0 \end{cases}$$

$$\sin\lambda h+\lambda\cos\lambda h=0 \longrightarrow \operatorname{tg}\lambda h=-\lambda$$



$$v_{tt} = c^2 v_{xx} + H(x,t)$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} F(t) \sin \lambda x , \quad \lambda = \frac{n\pi}{h}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\underbrace{F''(t) + c^2 \lambda^2 F(t)}_{B_n} \Big) \sin \lambda x = H(x,t) \begin{cases} =0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$H(x,t) = 0 \Rightarrow F''(t) + \lambda^2 c^2 F(t) = 0 \rightarrow F_h(t) = A\cos \lambda ct + B \sin \lambda ct$$

(برای معادله موج همگن $F(t) \rightarrow F(t) = A \cos \lambda ct + B \sin \lambda ct$) حفظ

۲۰۰

$H(x,t) \neq 0 \Rightarrow B_n = F''(t) + \lambda^2 c^2 f(t)$

$$= \frac{2}{h}\int_0^h H(x,t)\sin\lambda x\,dx = M(t)$$

$$F''(t) + \lambda^2 c^2 f(t) = M(t)$$

$$\rightarrow \begin{cases} F_h = A\cos\lambda ct + B\sin\lambda ct \\ F_p = N(t) \end{cases}$$

$$F(t) = F_h + F_p = A\cos\lambda ct + B\sin\lambda ct + N(t)$$

$$\boxed{v(x,t) = \sum (A\cos\lambda ct + B\sin\lambda ct + N(t))\sin\lambda x \qquad \lambda = \frac{n\pi}{h}}$$

جواب عمومی

با اعمال شرایط اولیه ضرایب مجهول را بدست می آوریم

$$v(x,0) = f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A + N(0))\sin\lambda x$$

$$\Rightarrow A + N(0) = \frac{2}{h}\int_0^h f_1(x)\sin\lambda x\,dx \Rightarrow A = \ldots$$

$$v_t(x,0) = g_1(x) = \sum (B\lambda c + N'(0))\sin\lambda x$$

$$\Rightarrow B\lambda c + N'(0) = \frac{2}{h}\int_0^h g_1(x)\sin\lambda x\,dx \Rightarrow B = \ldots$$

معادله حرارت $\rightarrow v_t = c^2 v_{xx} + H(x,t)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(F'(t) + \lambda^2 c^2 F(t)\right)\sin\lambda x = H(x,t) \begin{cases} =0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$H(x,t)=0 \rightarrow F'(t) + \lambda^2 c^2 F(t) = 0 \rightarrow F(t) = Ae^{-\lambda^2 c^2 t}$$

(برای معادله همگن $F(t) \rightarrow F(t) = Ae^{-\lambda^2 c^2 t}$) حفظ

$$H(x,t) \neq 0 \rightarrow F'(t) + \lambda^2 c^2 F(t) = \frac{2}{h}\int_0^h H(x,t)\sin\lambda x\,dx = M(t)$$

$$F'(t) + \lambda^2 c^2 F(t) = M(t) \rightarrow \begin{cases} F_h = Ae^{-\lambda^2 c^2 t} \\ F_p = N(t) \end{cases}$$

$$F = F_h + F_p = Ae^{-\lambda^2 c^2 t} + N(t)$$

جواب عمومی

$$\boxed{v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(Ae^{-\lambda^2 c^2 t} + N(t)\right)\sin\lambda x, \quad \lambda = \frac{n\pi}{h}}$$

!!اعمال شرط اولیه ضریب مجهول بدست آید

$$v(x,0) = f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A + N(0)\right)\sin\lambda x + A + N(0) = \frac{2}{h}\int_0^h f(x)\sin\lambda x\,dx \rightarrow A_s \ldots$$

ص ۴۳۶

* سری ۱۸)

$$u_x(0,t)=0 \quad و \quad u(h,t)=0$$

تابع ویژه $=\cos\lambda x$

$$\cos\lambda h=0 \rightarrow \lambda h=(2n-1)\frac{\pi}{2}$$

۱)
۲) ✓
۳)
۴)

* مکانیک ۸۳ ص ۴۲۹ تست ۴۸

۱)
۲)
۳) ✓
۴)

کنترل = هسته → تابع ویژه

$$\underbrace{u(x,t)}=\underbrace{v(x,t)}+\underbrace{w(x,t)}_{\text{معادله خط}}$$

$$\begin{cases} T(0,t)=0 \rightarrow \sin\lambda x \\ T_x(h,t)=0 \rightarrow \cos\lambda h=0 \rightarrow \lambda h=(2n-1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

* برای محاسبه جواب معادله‌ی موج و حرارت در لاپلاس مطابق زیر عمل می‌کنیم:

۱) تابع ویژه و مقدار ویژه را بدست می‌آوریم

۲) تابع $f(t)$ را بدست می‌آوریم

۳) ضرایب را محاسبه می‌کنیم

ص ۴۳۸

* کامپیوتر ۸۸)

$\cos \lambda x \rightarrow$ اولی غ
$\cancel{K}$

$\sin \lambda \pi = 0 \rightarrow \lambda = n \rightarrow$ غ ۴

$u_x(0,t)=0 \quad , \quad u_x(\pi,t)=0$

۱) ✗ ۲) ✓

۳) ✗ ۴) ✗

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} A e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda x \ , \ \lambda = n$$

ص ۴۴۹ ، سنت ۸۰

* نانوصولار ۸۸)

$$\begin{cases} \\ u_x(0,t)=0 \ , \ u(\pi,t)=0 \end{cases}$$

$\cos \lambda x$ ↓ ۱و۲ غ

$\cos \lambda\pi = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2n-1}{2}$ ← ۴ غ

۱) ✗

۲) ✗

۳) ✓

۴) ✗

ص ۴۴۰

* برق ۸۹

$$u_t - c^2 u_{xx} + hu = hu_0 \ , \ t>0$$

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u(-\pi,t)= u(\pi,t) \ ; \ t\geq 0 \\ u_x(-\pi,t)= u_x(\pi,t) \ ; \ t\geq 0 \end{cases}$$

۱) ✗

۲) ✓

۳) ✗

۴)

اگر شرط مرزی همگن نداشته باشیم ← تابع جواب = حل‌ پایدار + حل گذرا ← ۱و۳ حذف

بین ۲و۴ ← اختلاف در صفحه ۴ است ← طبق ص ۴۴ ← ۲

*برق ۹۰) معادلهٔ میله‌ای که سطح جانبی و دو سر آن کاملاً عایق است

$U(x,0)=f(x) \rightarrow \begin{cases} U_x(0,t)=0 \rightarrow c_1\lambda_2 \\ U_x(L,t)=0 \rightarrow \sin\lambda L=0 \end{cases}$

$u_t=c^2u_{xx}$ $\Rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{L}$

کدام گزینه برای $u(x,t)$ صحیح است

۱) ✓ ۲) ✗

۳) ✗ ۴) ✗

$$U(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} A e^{-\lambda^2c^2t}\cos\lambda x,\quad \lambda=\frac{n\pi}{L}$$

حسابداری (اقتصاد ۹۰) فرض کنید b_n ضریب فوریه nام سری فوریه سینوسی تابع x^3 باشد جواب

جلد دوم ص ۴۴۷

u

$\sin\lambda x$

۱) ۲)

۳) ✓ ۴)

* حل معادله‌ی موج و حرارت در میله‌ی نیمه محدود و نامحدود :

در میله‌ی نیمه محدود و نامحدود ← شرط مرزی در L نداریم

یعنی محدودیتی برای مقادیر ویژه ایجاد نمی‌شه

یعنی λ بطور پیوسته از ۰ تا ∞ تغییر می‌کند ∑ تبدیل به ∫ می‌شه!

$$u(x,t)=\int_0^\infty F(t)\,X(\text{تابع ویژه})\,d\lambda$$

میله‌ی نامحدود ← نه محدودیتی در تابع ویژه داریم نه محدودیتی در مقادیر ویژه!

ص ۴۶۹

* برق ۸۵)

عایق شده است

↓

$u_x(0,t)=0$

↓

$\cos\lambda x$

۲۷) ✓

۴) ✗

۱) ✗

۱۲) ✗

$$u(x,t)=\int_0^\infty A e^{-\lambda^2 c^2 t} \cos \lambda x \, d\lambda$$

ص ۴۴۴

* کامپیوتر ۹۰)

$u_x(0,t)=0$

$=0 \rightarrow \cos \lambda x$

۱) ✗ ۲) ✗

۳) ✗ ۴) ✓

* محاسبه ی جواب حالت پایدار

در جواب حالت پایدار تغییرات u به زمان وابسته نیست یعنی u_t و u_{tt} صفر هستند بنابراین برای محاسبه ی جواب حالت پایدار کافی است در معادلات داده شده، u_t و u_{tt} را صفر در نظر بگیریم و پس معادله را حل کنیم و در انتها با اعمال شرایط مرزی، ضرایب مجهول را بدست می آوریم

ص ۴۶۲

* مکانیک ۸۳)

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{\,0} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

۱)　　۲)　　۳) ✓　　۴) ✗

$$u_{xx} = 0 \rightarrow u_x = A \rightarrow u = Ax + B$$

ص ۴۶۴ تست ۳۴

* برق ۸۸)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{\,0} = 1$$

۱)　　۲) $-\frac{1}{8}$ ✓　　۳)　　۴)

$$u_{xx} = 1 \rightarrow u_x = x + A \rightarrow u = \frac{1}{2}x^2 + Ax + B$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \rightarrow B = 0 \\ x = 1 \rightarrow 0 = \frac{1}{2} + A + A = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad u = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$u\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

در معادله‌ی موج و حرارت به فرم زیر

موج
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x) \ , \quad 0<x<h \ , \ t>0 \\ u(0,t)=a \ , \quad u(h,t)=b \\ u(x,0)=f(x) \ , \quad u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

حرارت
$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + h(x) \ , \quad 0<x<h \ , \ t>0 \\ u(0,t)=a \ , \quad u(h,t)=b \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

همواره با تغییر متغیر $u(x,t)=v(x,t)+\phi(x)$ به معادله موج یا حرارت همگن با شرایط مرزی صفر (شرایط مرزی همگن) تبدیل می‌شوند. به شرط آنکه $\phi(x)$ جواب حالت پایدار معادلات فوق در نظر گرفته شود.

صـ ۴۶۶

* برق ۸۶)

معادله دیفرانسیل زیر با شرایط داده شده مفروض است

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\sin x}{2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}\ 0$$

۱) ✓ ۲) ✗

۳) ✗ ۴) ✗

$$u_{xx} = \sin\frac{x}{2} \rightarrow u_x = -2\cos\frac{x}{2} + A \rightarrow u = -4\sin\frac{x}{2} + Ax + B$$

صـ ۴۶۷ فت ۲۱، ست ۵۳، ∞

* مکانیک ۸۵)

$$\begin{cases} \cancel{u_t}^{\,0} - c^2 u_{xx} = N e^{-\alpha x} \\ \\ \end{cases}$$

۱) ✗ ۲) ✓

۳) ✗ ۴) ✗

$$u_{xx} = -\frac{N}{c^2} e^{-\alpha x} \rightarrow u_x = \frac{N}{\alpha c^2} e^{-\alpha x} + A \rightarrow u = -\frac{N}{\alpha^2 c^2} e^{-\alpha x} + Ax + B$$

* اگر تابع $H(x,t)$ یا $f(x)$ و $g(x)$ برحسب تابع ویژه داده شوند، تعداد جملات $u(x,t)$ محدود و دقیقاً برابر تعداد جملات داده شده است

ص ۴۵۴

* برق ۸۷

$$\cos\lambda x \leftarrow \begin{cases} u_x(0,t)=0 \ , \ u_x(2,t)=0 \rightarrow \sin 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{n\pi}{2} \\ u(x,0)=4\cos\pi x - 2\cos 3\pi x \end{cases}$$

۱) ×

۲) ✓

۳) ×

۴) ×

۳ که کلاً غلط!

$u(x,0)$ برحسب تابع ویژه داده شده است!

۴ ← بینهایت ← غ

۱ ← ۲ تا ← غ) باید برحسب جملات باشد

$\pi\lambda$ و $3\pi\lambda$ داریم ← باید دو جمله برحسب ...

حل تشریحی:

$$u(x,t)=\sum A e^{-\lambda^2 t}\cos\lambda x$$

$$u(x,t)=A_1 e^{-\pi^2 t}\cos\pi x + A_2 e^{-9\pi^2 t}\cos 3\pi x$$

به ازای $\lambda=\pi$ و 3π داریم ... فقط دو جمله این صورت را دارد.

$$A_1\cos\pi x + A_2\cos 3\pi x = 4\cos\pi x - 2\cos 3\pi x \qquad A_1=4,\ A_2=-2$$

ص ۴۳۴، س ۳۴

* برق ۸۹)

$u(\frac{\pi}{2},0)$

۱) ✗✗ $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ ۲) ✗ $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$

۳) ✗ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ ۴) ✓✓ $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

۱ فرمش غلط ✗

بقیه فرمتون درسته حالا عددگذاری

$u(\frac{\pi}{2},0)=1$

$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x \qquad \lambda=1 \qquad \lambda=3$$

$$u(x,t)=A_1 e^{-c^2t}\sin x+A_2 e^{-9c^2t}\sin 3x$$

$A_1 \to \frac{3}{4}$, $A_2 \to -\frac{1}{4}$

ص ۴۲۹، س ۲۱

$u(0,t)=0 \to \sin\lambda x$
$u(L,t)=0$

* برق ۸۰، برق ۹۲) درجه حرارت $u(x,t)$ میله‌ای به طول π که دو انتهای آن در دمای صفر درجه قرار گرفته و دمای اولیه آن $u(x,0)=\sin x$ است در معادله $u_t+\frac{1}{2}u_{xx}=0$ صدق کند، کدام است؟

۱) ✗ $e^{-t}\sin 2x$ ۲) ✓ $e^{-t}\sin x$ ۳) ✗ $e^{t}\sin x$ ۴) ✗ $e^{2t}\sin x$

فرم غلط

جواب کاملا معلوم است چون ۱ و ۳ و ۴ فرمشون غلط

$$\sum A e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda x \longrightarrow u(x,t) = A_1 e^{-t} \sin x$$

$$t_0 \longrightarrow \boxed{A_1 = 1}$$

~~اگر تابع $H(x,t)$ را $f(x)$, $g(x)$ برحسب~~

ص ۴۴۷ ، ت ۷۶

* حل انفصال ۹۰)

$y(0,t) = 0$ و $y(2,t) = 0$

$\downarrow$ $\sin \lambda x$

$\downarrow$ $\sin 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{2}$

۱) ✗

۲) ✓

۳) $\cos(\cancel{2n+1})\pi t$

۴) ✗

ها فقط در یک شرایط مرزی صدق می‌کند جواب به فرم [illegible] باشد [illegible] ۲

فرم کلی آن [illegible] جواب دو لازم نیست بنویسید!

JozveBargh.ir

فرم ← کلی ترین حالت

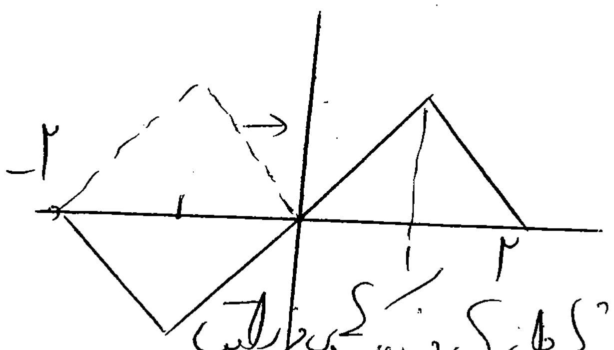
$$u(x,t)=\sum A\cos n\pi + \sin \frac{n\pi}{2}x$$

از اینجا به بعد ← سوال سری فوریه

از شرایط اولیه استفاده میکنیم :

$$u(x,0)=f(x)=\sum A\sin\frac{n\pi}{2}x$$

A را از سری فوریه سینوسی تابع f(x) بدست میاریم



فقط کافی است [illegible]

* تیپ ۱۷۰ ص ۴۵۵

$$u(0,t)=0$$
$$\downarrow$$
از حذف ← $\sin\lambda x$

۱) ✗
۲) ✗
۳) ✓
۴) ✗

۳، ۴ ← فرم کلی آن   تعداد در ضرایب ← یک عدد است ← عدد بگذاری

ادامه‌ی تمرینی که فرم اصلی نوشتیم:

$$u(x,t) = \sum A \cos(2n-1)t \sin(2n-1)x$$

$$u(x,0) = 1 = \sum A \sin(2n-1)x$$

$$A = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \sin(2n-1)x \, dx = \frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n-1)}$$

گر مقدار A با شرط اولیه سوال هم باشه، محاسبات سری فوریه است.

ص ۴۲۳

*سری ۵)

۱)　　　　　　　　۲) ✓

۳)　　　　　　　　۴)

$$\sum \left(A'_n(t) + \lambda^2 c^2 A_n(t)\right) \sin \lambda x = q(x,t)$$

تعمیم سری ۵.

* ریاضی مهندسی – ۹۲/۷/۱۵ – دوشنبه – جلسه ی

$\oint_C f(z)dz = 2\pi i$ (مجموع مانده های $f(z)$ در نقاط تکین منفرد آن که داخل ناحیه C قرار دارند)

① نقاط تکین $f(z)$ را بدست می آورید

② از نقاط بدست آمده در قسمت ①، آن هایی که در داخل ناحیه قرار دارند را مشخص کنید → اصل مانده ها

③ مانده را در نقاط مشخص شده در قسمت ② بدست آورید

④ حاصل انتگرال برابر است با مجموع مانده های بدست آمده در قسمت ③ ضربدر $2\pi i$

* برق ۷۵

$$I = \oint \frac{1}{z-1}\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz$$

$z=1$ ✓ → قطب ساده → $a_{-1} = \lim_{z\to 1} (z-1)\frac{1}{z-1}\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sin(1)$

$z=0$ ✓ → تکین اساسی → لوران → $-(1+z+z^2+z^3 \dots)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} \dots\right)$

ضریب $\frac{1}{z}$ جمله $= -\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots\right) = -\sin 1 \rightarrow I = 2\pi i(a_{-1}+b_{-1}) = 2\pi i(0) = 0$

ص ۳۵۳

*برق ۷۶)

۴)　　۳) ✓　　۲)　　۱)

$$\left[\begin{array}{l} |z| = e^{Re(w)} \Longrightarrow |z| = e \\ z = 1 \rightarrow \text{نقطه‌ی اساسی} \rightarrow \text{بسط لوران} \rightarrow z - 1 = t \\ \rightarrow f = \sin\left(\frac{t+1}{t}\right) = \sin\left(1 + \frac{1}{t}\right) \\ f = \sin 1 \cos\frac{1}{t} + \cos 1 \sin\frac{1}{t} \rightarrow a_{-1} = \text{مانده} = \text{ضریب } \frac{1}{t} = \cos 1 \end{array}\right.$$

روند: نقاط تکین مقر ← مشخص کنیم که داخل یا خارج ← اون‌هایی که داخلند ← مانده‌ها × $2\pi i$ مانده

ص ۳۴۶

*مخابرات ۸۴)

۴) ✓　　۳)　　۲)　　۱)

$1 - \cos z = 0 \rightarrow \cos z = 1 \rightarrow z = 2k\pi \rightarrow z = 0$ ✓

$\frac{1}{z^2}$ باید در z ضرب شه که $\frac{1}{z}$ ایجاد کند ← مانده $= c_1$

$f(x) = \frac{1}{z^2}\left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots\right) \rightarrow \text{مانده} = c_1$

۲

$a_1 = 1 \leftarrow$ ضریب z در $\frac{z}{2}$: a_1

b_1 : ضریب z^3 در $\cos z \leftarrow 0$

$$a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1 \rightarrow 1 = 0 + \frac{1}{2} c_1 \rightarrow c_1 = 2$$

ص ۳۶۰

* مکانیک ۸۳

۱) ۲) ۳) ۴) ✓

۳) خارج $16+1=17>4$ ، $z_0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$z = 0 \rightarrow \times$

$z = z_0 \rightarrow \checkmark$

z_0 داخل چون در غیر خارج، انتگرال صفر و در نتیجه صفر نشود حالا اگر تو نتیجه صفر شود انتگرال چی؟ ← در نهایت $z_0 = 2$ را شد ۲ داخل ← z_0 داخل!

$$\rightarrow a_{-1} = \frac{e^{z_0}}{z_0} \rightarrow f(z_0) = 2\pi i \frac{e^{z_0}}{z_0}$$

z_0 چه نوع نقطه‌ای ← قطب ساده ← خاصیت مانده ساده

$$f'(z_0) = 2\pi i \frac{z_0 e^{z_0} - e^{z_0}}{z_0^2} \rightarrow f'(2) = 2\pi i \frac{e^2}{4}$$

ص ۳۵۳

* برق ۷۸

$2\pi i a_{-1} \leftarrow \pi j e^{j} \operatorname{sh}\pi$

↓

مانده در $z = j$

$\pi j e^{-j} \operatorname{sh}\pi$

$2\pi i b_{-1} \leftarrow$

↓

مانده در $-j$

۱) ۲) ✓ ۳) ۴)

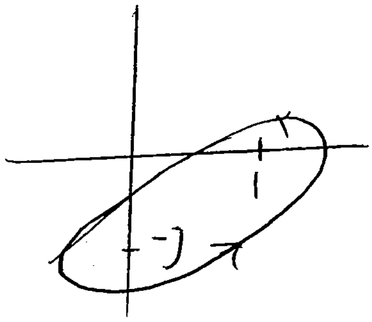
$$I = 2\pi i (a_{-1} + b_{-1}) = \pi j \operatorname{sh}\pi (\underbrace{e^{j} + e^{-j}}_{2\cos 1})$$

JozveBargh.ir

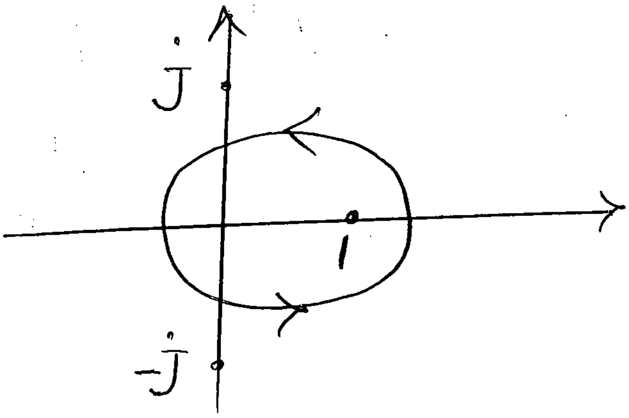
* مثال) در $\oint \frac{e^{z}}{z^3(z^2+1)^2(z-1)} dz$ اگر C دایره‌ی $|z|=\frac{1}{2}$ باشد، حاصل انتگرال برابر α است، اگر $C=|z-j|=\frac{1}{2}$ باشد، حاصل انتگرال برابر β است و اگر C مسیر زیر باشد

$z=0 \to a_{-1}$
$z=1 \to b_{-1}$
$z=j \to c_{-1}$
$z=-j \to d_{-1}$

حاصل انتگرال برابر γ است. در صورتی



که C مسیر زیر باشد، حاصل انتگرال را بدست آورید.



$$I = 2\pi i(a_{-1}+b_{-1}) = \alpha + 2\pi i \times \frac{e}{4}$$

۲۱۰
C

۳

صفحه ۳۵

* برق ۷۵) مطلوبست محاسبه‌ی $\oint_C \frac{dz}{ch^2\pi z+sh^2\pi z}$ که در آن C دایره $|z|=2n$ و $n=1,2,3,\ldots,m$ (m عدد معلوم و مثبت صحیح)

۱) 0 ✓ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) πi ۴) $2\pi i$

$$ch^2\pi z+sh^2\pi z=0 \to \cos^2(i\pi z)-\sin^2(i\pi z)=0$$

$$\to \cos(2i\pi z)=0 \to 2i\pi z=(2k-1)\frac{\pi}{2} \to z=\frac{2k-1}{4}i \to \text{قطب ساده}$$

وقتی گزینه‌ها به پارامتر بستگی ندارند ← ساده‌ترین را در نظر می‌گیریم

$|z|=2$

$$z=\frac{2k-1}{4}i \ \text{قطب ساده} \to a_{-1}=\lim_{z\to\frac{2k-1}{4}i}\left(z-\frac{2k-1}{4}i\right)\frac{1}{\cos 2i\pi z}$$

$$\overset{H}{=}\frac{1}{+2\pi i\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}=\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i}$$

$$I=\cancel{2\pi i}\sum\frac{(-1)^{k+1}}{\cancel{2\pi i}}=\sum(-1)^{k+1}$$

اگه توی گزینه‌ها ۰ هم بود باید بشمریم ببینیم چند نقطه داخل است!

۸ تا داخل است ← چون زوج است ← جمع صفر!

* اگر در $\oint_C f(z)dz$ مسیر C، $|z|=r$ باشد با جایگزینی های زیر می توان انتگرال را از قضیه مانده ها حل کرد.

① $|z| \rightarrow ?$ $\quad \rightarrow |z| = r$

② $\bar z \rightarrow ?$ $\quad \rightarrow z\bar z = r^2 \rightarrow \bar z = \frac{r^2}{z}$

③ $x \rightarrow ?$ $\quad \rightarrow x = \frac{z+\bar z}{2} = \frac{z+\frac{r^2}{z}}{2}$

④ $y \rightarrow ?$ $\quad \rightarrow y = \frac{z-\bar z}{2i} = \frac{z-\frac{r^2}{z}}{2i}$

⑤ $|dz| \rightarrow ?$ $\quad \rightarrow z = re^{i\theta} \rightarrow dz = rie^{i\theta}d\theta \rightarrow |dz| = rd\theta$

$\boxed{d\theta = \frac{dz}{iz}}$

$\boxed{|dz| = r\frac{dz}{iz}}$

⑥ $d\bar z \rightarrow ?$ $\quad \rightarrow \bar z = re^{-i\theta} \rightarrow d\bar z = -rie^{-i\theta}d\theta$

$$d\bar z = \frac{-r^2 i}{re^{i\theta}}\frac{dz}{iz} \rightarrow \boxed{d\bar z = \frac{-r^2}{z^2}dz}$$

۴

ص ۳۶۴

* کامپیوتر ۷۴)

$$I=\oint_c\Big[\underbrace{\frac{z+|z|}{z}}_{I_1}+\underbrace{\frac{e^z}{z^2}}_{I_2}\Big]dz$$

۱)　　۲)　　۳ ✓)　　۴)

$$\begin{cases} I_1=\oint\dfrac{\frac{1}{z}+1}{z}dz=2\pi i \\ I_2=2\pi i\times\frac{1}{2}=\pi i\end{cases}\Rightarrow I=3\pi i$$

ص ۳۶۵

* برق ۸۱)

$$I=\oint\frac{\sin z}{1-\alpha z}dz$$

۱)　　۲)　　۳)　　۴ ✓)

$$I=\int\frac{\sin z}{1-\frac{\alpha}{z}}dz=\oint\frac{z\sin z}{z-\alpha}dz=2\pi i\alpha\sin\alpha$$

ص ۳۴۲، س ۷۴

* کامپیوتر ۸۱)

۱)　　۲)　　۳)　　۴ ✓)

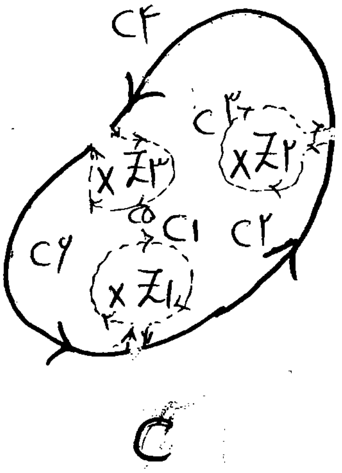
$$\oint\Big(z-\frac{z+\frac{4}{z}}{2}\Big)dz=2\pi i(-2)$$

ص ۳۴۹ ، ت ۱۲۲

* ریاضی محض ۹۱) مقدار انتگرال $\int_{|z|=1} \sin \bar{z}\, dz$ (در جهت مثلثاتی) کدام است؟

۱) $2\pi i$ ✓ ۲) ۳) ۴)

$$\oint_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i$$



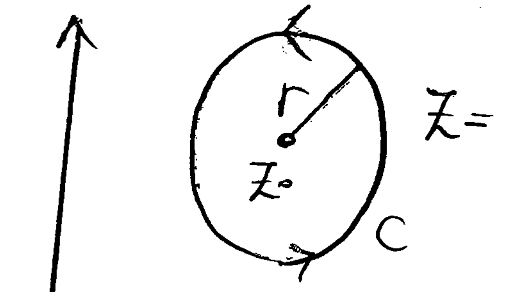
$$\oint_C f(z)\, dz = ?$$

$$\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz + \int_{C_4} f(z)\,dz + \int_{C_5} f(z)\,dz + \int_{C_6} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{C_1} \to -2\pi i a_{-1}, \quad \int_{C_3} \to -2\pi i b_{-1}, \quad \int_{C_5} \to -2\pi i c_{-1}$$

مسیر را دارم
(نقاط z_1، z_2، z_3 را از مسیر خارج کنیم)

$$\underbrace{\int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_4} f(z)\,dz + \int_{C_6} f(z)\,dz}_{\oint_C f(z)\,dz} = 2\pi i (a_{-1} + b_{-1} + c_{-1})$$



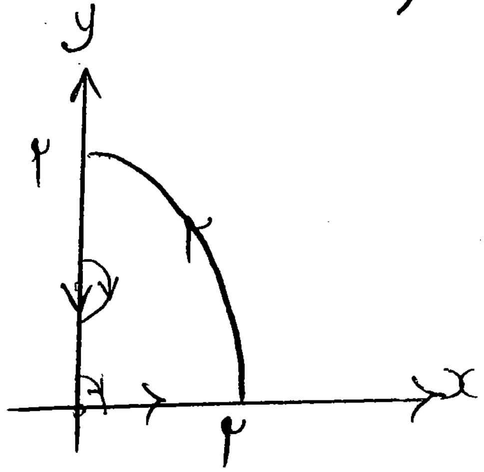
$$z = z_0 + re^{i\theta}$$

$$\int_C \frac{dz}{z - z_0} = \int \frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} i\, d\theta = 2\pi i$$

① اگر در $\oint_C f(z)dz$ ، نقطه تکین منفرد z_0 روی مسیر c باشد بطوریکه بتوان با دوران θ آن را از مرز خارج کرد، در محاسبه انتگرال مانده z_0 در $i\theta$ ضرب می‌شود.

*مثال) حاصل $\oint_C \frac{dz}{z(z^2+1)}$ روی مرز داده شده را بدست آورید.



$z=0$ ✓ $\rightarrow a_{-1}=1$

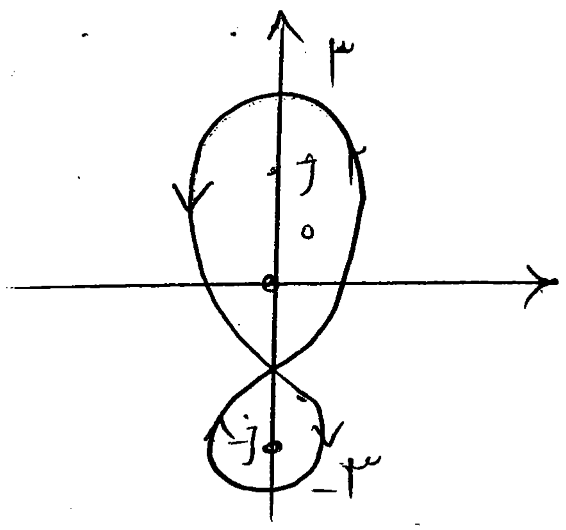
$z=j$ ✓ $\rightarrow b_{-1}=-\frac{1}{2}$

$z=-j$ ✗

$$I=\frac{\pi}{2}ia_{-1}+\pi i b_{-1}=0$$

* اگر در $\oint_C f(z)dz$ نقطه تکین منفرد z_0 خلاف جهت مثلثاتی دور زده شود، در محاسبه انتگرال مانده z_0 در $-2\pi i$ ضرب می‌شود.

*مثال) حاصل $\int \frac{dz}{z(z^2+1)}$ روی مسیر داده شده را بدست آورید.



$$z=0 \checkmark \rightarrow a_{-1}=1$$

$$z=j \checkmark \rightarrow b_{-1}=-\frac{1}{2}$$

$$z=-j \checkmark \rightarrow c_{-1}=-\frac{1}{2}$$

$$I = 2\pi i a_{-1} + 2\pi i b_{-1} - 2\pi i c_{-1} = 2\pi i$$

ص ۳۲۸

جهت حرکت عقربه ساعت

* هوا فضا ۸۹ (۱

۱۷) $-\pi i sh1$ ۲)   ۳)   ۴)

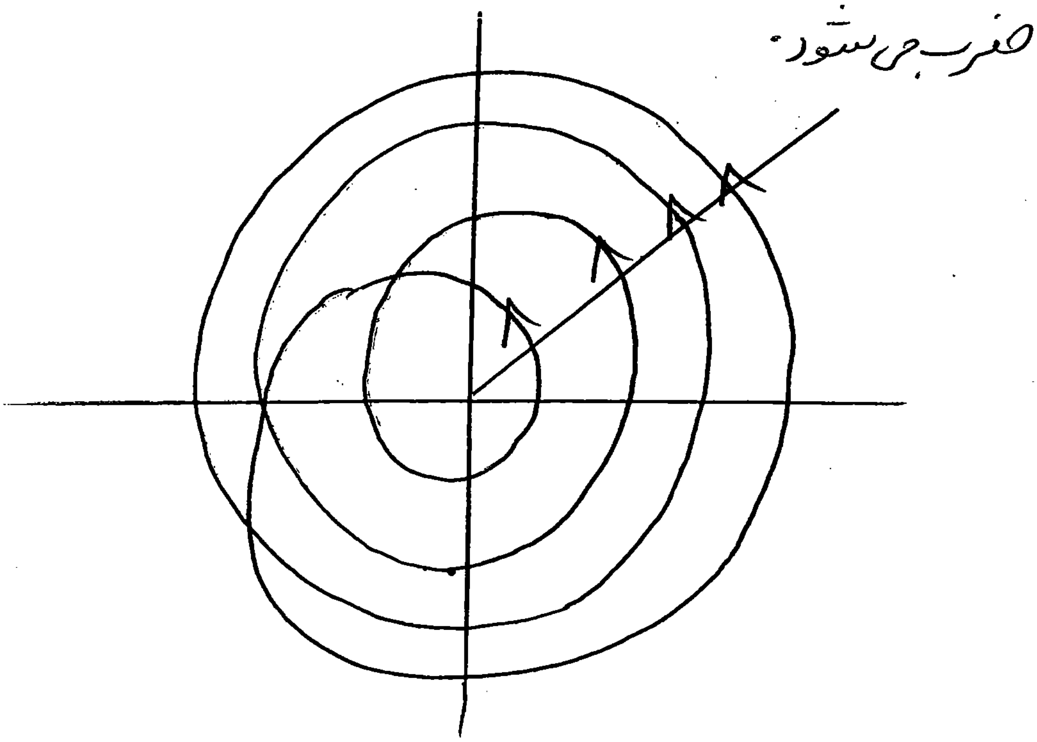
$$z=i \rightarrow a_{-1} = \lim_{z\to j} (z-j)\frac{\sin z}{(z-j)(z+j)} = \frac{\sin j}{2j}$$

$$I = -2\pi i a_{-1} = -2\pi i \frac{\sin j}{2j} = -\pi \sin j = -\pi j sh1$$

۲۱۳

۳) اگر در $\oint_C f(z)dz$ نقطه‌ی تکین منفرد z_0 توسط مسیر C

n بار در جهت مثلثاتی دور زده شود در محاسبه انتگرال مانده z_0 در $2\pi i$



$$I = 2\pi i \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$\underbrace{4}_{\text{تعداد دور}}$ ، $\underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{مانده}}$

* برق ۸۵ ص ۳۶۷

۱) $-2\pi i$ ۲) 0 ۳) $2\pi i$ ۴) $4\pi i$ ✓

$\theta = 0 \to r = 3 \to (3, 0)$
$\downarrow$
$(3, 2k\pi)$

$$3 = 3 - \sin^2\frac{\theta}{4} \rightarrow \sin^2\frac{\theta}{4} = 0 \rightarrow \frac{\theta}{4} = k\pi$$

$$\rightarrow \theta = 4k\pi \rightarrow \theta = 4\pi \rightarrow n = 2$$

$$I = 2\pi i \times 2 \times 1 = 4\pi i$$

سؤال : $r = 3 - \sin^2\frac{\theta}{5}$

$$3 = 3 - \sin^2\frac{\theta}{5} \rightarrow \sin^2\frac{\theta}{5} = 0 \rightarrow \theta = 5k\pi$$

$$k = 1 \rightarrow 5\pi \times$$

$$k = 2 \rightarrow 10\pi \rightarrow n = 5$$

تست ۳۲۸ ، تست ۱۱۴

* ریاضی مهندسی ۸۹)

۱)　　۲)　　۳)　　۴) ✓

$$a_{-1} = \lim (z - z_0)\frac{1}{2\pi i}\frac{z f'(z)}{f(z)} \overset{H}{=} \frac{1}{2\pi i}\frac{z_0 f'(z_0)}{f'(z_0)} = \frac{z_0}{2\pi i}$$

$$I = 2\pi i\, a_{-1} = z_0$$

سال ۸۵

*مخابرات ۹۰)

۴)　　　۳)　　　۲)✓　　　۱)

$z=0 \checkmark \to a_{-1}=\ln(-2) \to I=2\pi i \ln(-2)$

$=2\pi i(\ln 2+i\pi)$

صفحه ۵۹۷ تست ۱۵

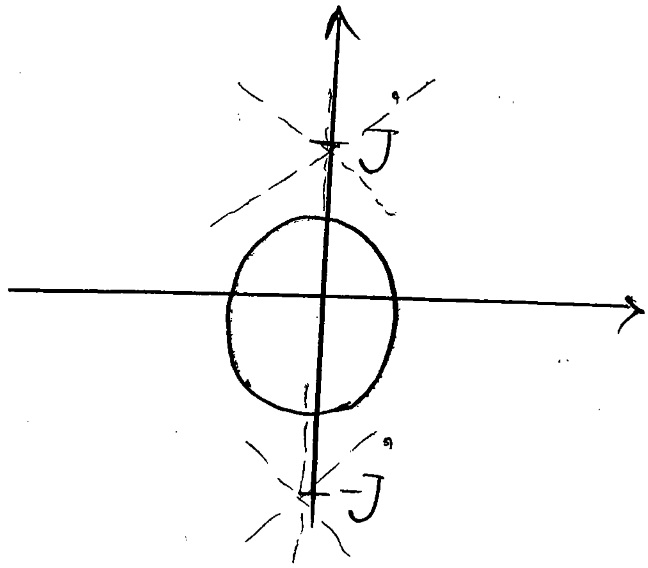
*دکترای مخابرات ۹۲)

$$f(z)=\frac{\log(1+z^2)}{(3z-i)^2}$$

۱) ✗
۲)
۳) ✓
۴) ✗

ریشه‌های $f(z)=0$ نقاط شاخه‌اند $\to \ln(f(z))$

$1+z^2=0 \to z=\mp j$



$$a_{-1} = \lim \left[\left(z - \frac{i}{3}\right) \frac{2\ln(1+z^2)}{9\left(z - \frac{i}{3}\right)^2} \right]' = \frac{2z}{9(1+z^2)}$$

$$z \to \frac{i}{3}$$

$$= \frac{2}{9} \frac{\frac{i}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{i}{12}$$

$$I = 2\pi i a_{-1} = -\frac{\pi}{6}$$

*مطیعی ۸۵

* مانده در ∞ :

برای محاسبه‌ی مانده در ∞ کافی است مانده $\dfrac{-f(\frac{1}{z})}{z^2}$ در $z=0$ بدست آوریم

* مثال) مانده تابع $f(z)=\dfrac{\cos(\frac{1}{z})}{z-1}$ را در ∞ بدست آورید

$$\frac{-f(\frac{1}{z})}{z^2}=\frac{-\cos z}{z^2(\frac{1}{z}-1)}=\frac{-\cos z}{z(1-z)}$$

$$a_{-1}=\lim_{z\to 0} z\,\frac{-\cos z}{z(1-z)}=-1$$

مجموع مانده های $f(z)$ همواره برابر صفر است (با احتساب مانده در ∞)

(نقاط غیر تحلیلی $f(z)$ فقط تکین منفرد باشند)

$$\oint_c f(z)\,dz=2\pi i\left(\text{مجموع مانده‌های } f(z) \text{ در نقاط تکین منفردش که داخل ناحیه } c \text{ قرار دارند}\right)=-2\pi i\left(\text{مجموع مانده‌های } f(z) \text{ در نقاط تکین منفرد آن که خارج ناحیه } c \text{ قرار دارند}\right)$$

(نقاط غیرتحلیلی $f(z)$ تکین منفرد باشند)

(با احتساب مانده در ∞)

ص ۳۴۹

* برق ۸۵)

۱) ✓

$$\frac{-f(\frac{1}{z})}{z^2} = \frac{-\sin z}{z^2(\frac{1}{z}-1)} = \frac{-\sin z}{z(z-1)} \xrightarrow[\text{حذف شدنی}]{z=0} a_{-1}=0 \Rightarrow I=0$$

ص ۳۶۲

* مکانیک ۹۰)

۱)　　۲)　　۱۳۰ ✓　　۴)

$$\begin{cases} z=0 \quad ✓ \longrightarrow a_{-1}=0 \\ z=\frac{\pi}{2}j \quad ✓ \longrightarrow b_{-1}=0 \\ z=-\frac{\pi}{2}j \quad ✓ \longrightarrow c_{-1}=0 \end{cases}$$

* اگر $f(z)$ زوج باشد مانده در ∞ همواره برابر صفر است.

ص ۳۲۳ تست ۱۴

* کامپیوتر ۹۰)

۱)　　۲)　　۳) صفر ✓　　۴)

$$z\sin z=0 \longrightarrow z=k\pi \longrightarrow z=0 ✓$$

ص ۳۳ ، تست ۱۳۶

* مخابرات ۹۰)

$$\int \frac{e^z + z^2\sin z}{z^3}$$

زوج

۱) ✓　　۲)　　۳)　　۴)

$$2\pi i \times \frac{1}{2} = \pi i$$

ص ۳۴۹

* برق ۹۱

۱) ۲) ۳) ۴) $3\pi i$ ✓

$z=0$ ✓ $\rightarrow a_{-1}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

$\frac{3}{\cancel{2}}\times \cancel{2}\pi i=3\pi i$

ص ۳۲۴ ، تست ۸۵

* کامپیوتر ۹۱

۱) ۲) ۳) ۴) $2\pi i(1-e^{-1})$

$z=0$ ✓ $\rightarrow a_{-1}=1$

$z=-1$ ✓ $\rightarrow b_{-1}=-e^{-1}$

ص ۵۶۵ ، تست ۶

* برق ۹۲

$$\oint_C \frac{dz}{(z^n+1)}$$ ($n>1$ عدد طبیعی)

۱) ۲) ۳) ✓✓ ۰ ۴)

① $\int \frac{dz}{z^2+1}$ $z^2+1=0$ $z=j \rightarrow a_{-1}=\frac{1}{2j}$ ، $z=-j \rightarrow b_{-1}=-\frac{1}{2j}$

روش دوم : $z^n+1=0 \rightarrow z^n=-1 \rightarrow z=(-1)^{\frac{1}{n}}$

$$\frac{-f(\frac{1}{z})}{z^2} = -\frac{1}{z^2(\frac{1}{z^n}+1)} = -\frac{z^{n-2}}{z^n+1}$$

تحلیلی

$\rightsquigarrow \quad a_{-1}=0 \rightsquigarrow I=0$

ص ۵۲۸ ، س ۱۷

* کامپیوتر ۹۲

$z=1 \checkmark \to$ ویژه اساسی $\to$ سطح لوران $\to z-1=t$

$$\to f = (t^2+2t+\cancel{1}-\cancel{1})e^{\frac{1}{t}}$$

$$\text{مانده} = \frac{1}{t}\ \text{ضریب} = \frac{1}{3!}+1 = \frac{7}{6} \to I = 2\pi i(\frac{7}{6}) = \frac{7\pi i}{3}$$

ص ۵۲۵ ، س ۵۸

* ریاضی محض ۹۲

تام
↑
مشتق پذیر

۴)　　۳)　　۲) $-2\pi i \checkmark$　　۱)

$$|e^z f(z)| \le 1 \to e^z f(z)=c \to f(z)=ce^{-z},\ f(0)=1 \to c=1$$

$$f(z)=e^{-z}$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{-z}}{z^2}\,dz = -2\pi i$$

$\int_{-\pi}^{\pi}$

* محاسبه‌ی انتگرال های معین با استفاده از انتگرال های مختلط

$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}, \cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$ گروه ① : محاسبه‌ی انتگرال های به فرم

$$z = e^{i\theta} \rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \rightarrow \cos\theta = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

$$\rightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \rightarrow \sin\theta = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$$

$$\rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta \rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}, \cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = \oint_{C:|z|=1} f\left(z, \frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} \rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$$

* برق ۱۷۶ ص ۳۱۳ ، ۱۷

۴)   ۳)   ۲) ✓   ۱)

$$I=\oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{2\left(a+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)}=\frac{1}{i}\oint \frac{dz}{z^2+2az+1}$$

$$z^2+2az+1=0 \rightarrow \begin{cases} z=-a+\sqrt{a^2-1} \quad \checkmark \\ z=-a-\sqrt{a^2-1} \quad \times \end{cases}$$

$$\checkmark \longrightarrow a_{-1}=\operatorname*{Res}_{z\to -a+\sqrt{a^2-1}}\left(z+a-\sqrt{a^2-1}\right)\frac{1}{i(z^2+2az+1)}\overset{H}{=}\frac{1}{2i\sqrt{a^2-1}}$$

$$\times \longrightarrow$$

$$I=2\pi i a_{-1}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

ص ۳۷۶

* کامپیوتر ۷۷)

$\frac{2\pi}{n!}$ (۴ ✓   (۳   (۲   (۱

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta+i\sin\theta}\, e^{-in\theta}\, d\theta=\oint_{C:|z|=1} e^{z} z^{-n}\frac{dz}{iz}=\oint_C \frac{1}{i}\frac{e^{z}}{z^{n+1}}dz$$

$$=\frac{1}{i}\times 2\pi i\times\frac{1}{n!}$$

۲۱۸

ص ۳۷۵

* ریاضی محض ۹۱)

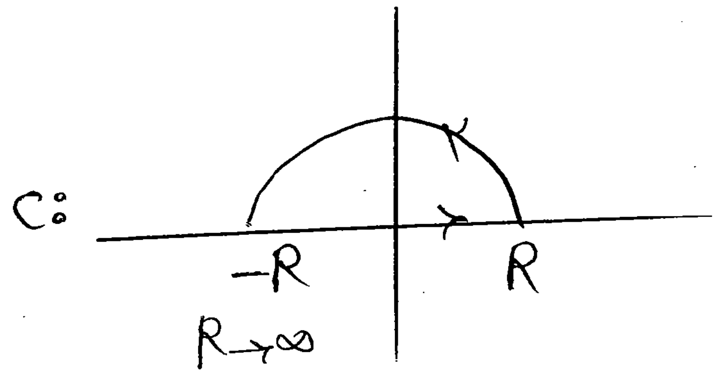
۱) ۲) ۳) ۴) ✓

$$I = \oint \sin(e^{z}) \frac{dz}{iz}$$

$z = 0$ ✓ → قطب ساده → $a_{-1} = \lim_{z \to 0} z \dfrac{\sin(e^{z})}{iz} = \dfrac{\sin 1}{i}$

گروه ② محاسبه‌ی انتگرال هایی به فرم $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)} dx$ که در آن p و q توابع چندجمله‌ای هستند

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = \oint_C \frac{p(z)}{q(z)} dz$$



C: = نیم صفحه بالای محور افق

* مثال) حاصل $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^{3}}$ را بدست آورید

$$I = \oint_C \frac{dz}{1+z^{3}}$$

$$1+z^3=0 \rightarrow z=(-1)^{\frac{1}{3}}=(1)^{\frac{2k\pi+\pi}{3}} \begin{cases} k=0 & cis(\frac{\pi}{3}) \checkmark \\ k=1 & cis\,\pi=-1 \checkmark \\ k=2 & cis\,\frac{5\pi}{3} \times \end{cases}$$

$$a_{-1}=\lim_{z\to cis\frac{\pi}{3}}\left(z-cis\frac{\pi}{3}\right)\times\frac{1}{1+z^3}=\frac{1}{3cis(\frac{2\pi}{3})}$$

$$b_{-1}=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{1}{1+z^3}=\frac{1}{3}$$

$$I=2\pi i a_{-1}+\pi i b_{-1}=\frac{2\pi i}{3}\left(cis(-\frac{2\pi}{3})\right)+\pi i\times\frac{1}{3}$$

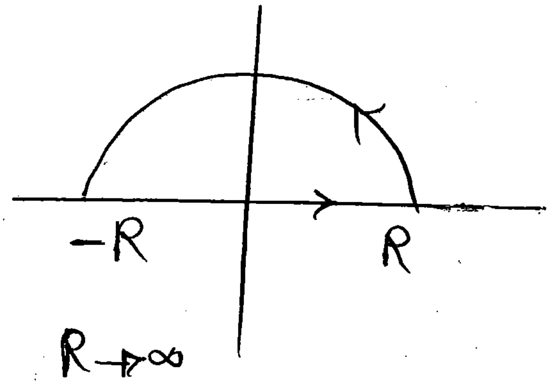
$$=\frac{2\pi i}{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\pi i}{3}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

* گروه ۳) محاسبه‌ی انتگرال‌های به فرم $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\times\begin{bmatrix}\sin mx\\ \text{یا}\\ \cos mx\end{bmatrix}dx$

الف) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x,\cos mx)}{q(x)}dx=Re\left\{\oint_C\frac{p(z,e^{imz})}{q(z)}dz\right\}$

ب) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x,\sin mx)}{q(x)}dx=Im\left\{\oint_C\frac{p(z,e^{imz})}{q(z)}dz\right\}$

C:



$\equiv$ نیم صفحه بالای محور افقی

*مثال حاصل $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x(x-1)}\,dx$ را بدست آورید.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x(x-1)}\,dx=\mathrm{Re}\left\{\oint\frac{1-e^{2iz}}{2z(z-1)}\,dz\right\}$$

$$z=0 \ \checkmark \ \xrightarrow{\text{حذف شدنی}} \ a_{-1}=0$$

$$z=1 \ \checkmark \ \rightarrow \text{قطب ساده} \rightarrow b_{-1}=\frac{1-e^{2i}}{2}$$

$$I=\mathrm{Re}\left\{\pi i a_{-1}+\pi i b_{-1}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{\pi i}{2}(1-\cos 2-i\sin 2)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\sin 2$$

ص ۳۷۹

* برق ۸۲

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$$

۱) ۲) ۳) $\pi(1-\frac{1}{e})$ ✓ ۴)

$$I=\operatorname{Im}\left\{\oint_C \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz\right\}$$

$z=0$ ✓ $\rightarrow a_{-1}=1$

$z=j$ ✓ $\rightarrow b_{-1}=\frac{e^{-1}}{-2}$

$z=-j$ ✗

$$I=\operatorname{Im}\{\pi i a_{-1}+2\pi i b_{-1}\}=\pi-\pi e^{-1}$$

* برق ۷۵) انتگرال غیرعادی $I=\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{\pi}e^{-x}$ ۲) $\frac{\pi}{2}e^{-x}$ ✓ ۳) πe^{-x} ۴) واگرا است

* انتگرال فوریه کامل $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ را بدست آورید

* تبدیل فوریه کامل $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ را بدست آورید

* تبدیل فوریه کامل $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ را بدست آورید

* اگر $B(\omega)=\frac{\omega}{1+\omega^2}$ و $A(\omega)=0$ باشد $f(x)$ را بدست آورید

۲۲۰

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega$$

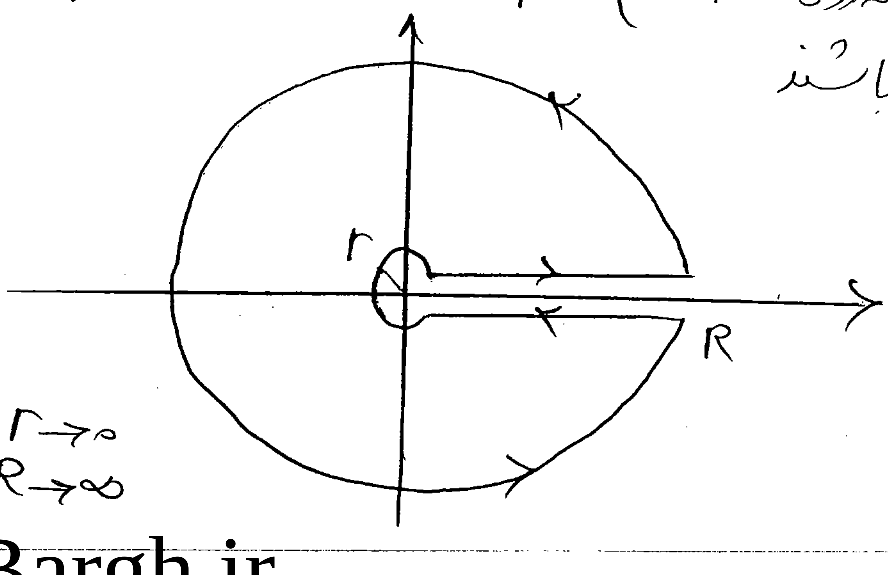
$$I=\operatorname{Im}\left\{\oint\frac{ze^{jxz}}{2(1+z^2)}\,dz\right\}$$

$$z^2+1=0\begin{cases}z=j & \checkmark\\ z=-j & \times\end{cases}\Rightarrow a_{-1}=\frac{e^{-x}}{4}$$

$$I=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\,\frac{e^{-\pi}}{4}\right\}=\frac{\pi}{2}e^{-x}$$

* گروه ۴ : محاسبه‌ی انتگرال‌های به فرم $\int_0^\infty x^q f(x)\,dx$ با شرط $|q|<1$

$$\int_0^\infty x^q f(x)\,dx=\frac{-\pi}{\sin q\pi}\left\{\text{مجموع مانده‌های } f(z)(-z)^q \text{ در نقاط تکین منفرد آن که روی محور حقیقی مثبت نباشند}\right\}$$



$r\to 0$

$R\to\infty$

ص ۲۹۷

* برق ۹۰)

۴) ۳) $\frac{\pi}{\sin(\pi a)}$ ✓ ۲) ۱)

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{1+x} = \frac{-\pi}{\sin(-a\pi)}\left(1\right) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

$$\frac{(-z)^{-a}}{z+1} \to a_{-1} = 1$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi \ln a}{2a}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^q}{a^2+x^2} = \frac{-\pi}{\sin q\pi}$$

$$\frac{(-z)^q}{a^2+z^2} \Rightarrow \begin{cases} z=aj \to a_{-1} = \frac{(-aj)^q}{2aj} = \frac{a^q e^{-j\frac{\pi}{2}q}}{2aj} \\ z=-aj \to b_{-1} = \frac{(aj)^q}{-2aj} = \frac{a^q e^{j\frac{\pi}{2}q}}{-2aj} \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^q}{a^2+x^2}\,dx = \frac{-\pi}{\sin q\pi}\left(\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}q} - e^{j\frac{\pi}{2}q}}{2aj}\right) = \frac{\pi a^q}{a\underbrace{\sin q\pi}_{2\sin\frac{q\pi}{2}\cos\frac{q\pi}{2}}} \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right)$$

۲۲۱

$$\int_0^\infty \frac{x^q}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\,\frac{x^q}{\cos\frac{q\pi}{2}}$$

مشتق نسبت به q $\Rightarrow$ $$\int_0^\infty \frac{x^q \ln x}{a^2+x^2}\,dx =$$

$$\frac{\pi}{2a}\,\frac{a^q \ln a\,\left(\cos\frac{q\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{q\pi}{2}\right)\times a^q}{\cos^2\frac{q\pi}{2}}\Bigg|_{a=0}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\ln a$$

⑤ گروه پنجم : روش کلی محاسبه‌ی انتگرال های معین با استفاده از انتگرال مختلط :

① انتخاب $f(z)$ مناسب ← به جز گروه های ۱،۲،۳،۴، انتخاب بر عهده طراح سوال است

② انتخاب مسیر مناسب ← 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃

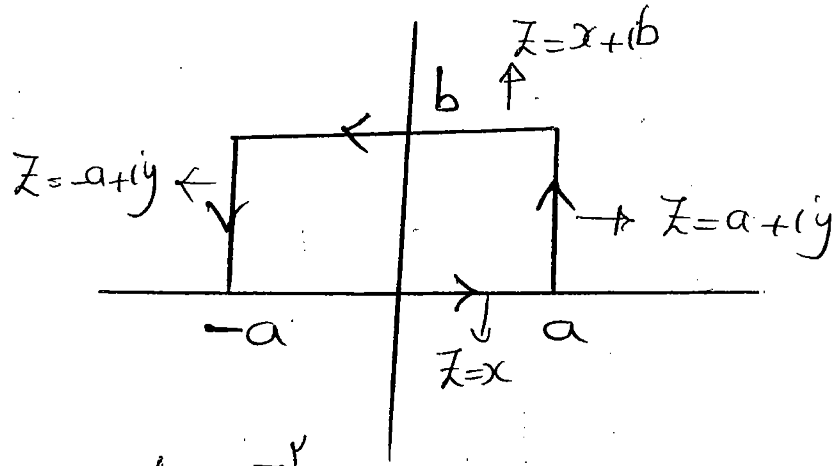
③ محاسبه $\oint_C f(z)dz$

④ حرکت روی مسیر C

ص ۳۸۵

* مهندسی هسته ای ۸۴

۱) ✓ ۲) X ۳) X ۴) X



$$\oint e^{-z^2}dz=0$$

$$\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx+\cancel{\int_{0}^{b} e^{-(a+iy)^2}\,i\,dy}^{\,0}+\int_{a}^{-a} e^{-(x+ib)^2}dx$$

$a\to\infty$

$$+\cancel{\int_{b}^{0} e^{-(-a+iy)^2}\,i\,dy}^{\,0}=0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx+\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-x^2-2ibx+b^2}dx=0$$

$$\sqrt{\pi}-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(\cos 2bx-i\sin bx)\,dx=0$$

$$\sqrt{\pi} - e^{b^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx - i\cancelto{0}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\sin 2bx\,dx}\right) =$$

$$\sqrt{\pi} = 2e^{b^2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

$$f(x)<g(x) \nrightarrow \int f(x) < \int g(x)$$

$-1<\cos x<1 \rightarrow$ تابع را کوچکتر می‌کند

حاصل از $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ کمتر شد!

اطلاعات جلسه‌ی خوش
۲۲۳

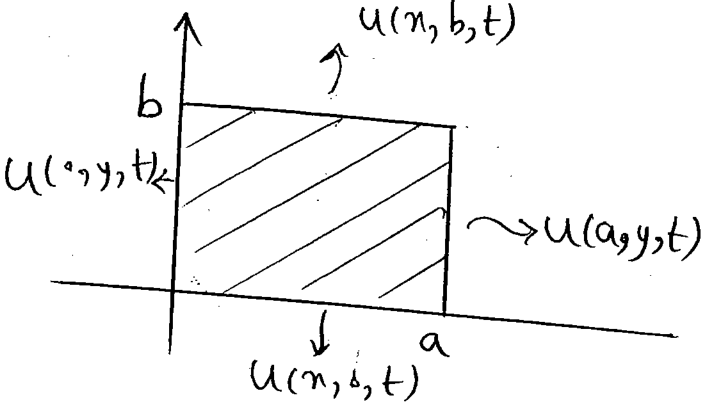
* ریاضی مهندسی - شنبه - ۹۲/۷/۲۰ - جلسه‌ی

*جلسه‌ی دوم مشتقات جزئی

معادله موج و حرارت در فضای دوبعدی

$$u_{tt} = c^2(u_{xx}, u_{yy}) \qquad 0<x<a , 0<y<b$$

$$\begin{cases} u(x,y,0) = f(x,y) \\ u_t(x,y,0) = g(x,y) \end{cases}$$



$$u(x,y) = \sum\sum F(t) \times (\text{تابع دیگری بر حسب } x)(\text{تابع دیگری بر حسب } y)$$

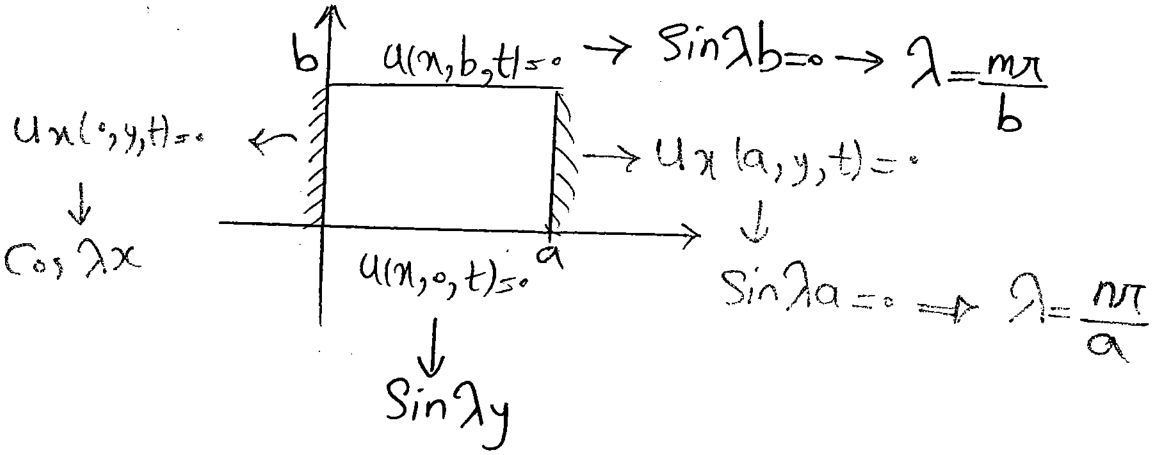
$F(t) \rightarrow A\cos\lambda ct + B\sin\lambda ct \rightarrow \lambda = \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$

(تابع دیگری بر حسب x) $\rightarrow \lambda_1$

(تابع دیگری بر حسب y) $\rightarrow \lambda_2$

*مثال) پاسخ معادله حرارت با شرایط مرزی داده شده بدست آورید.

$$\begin{cases} u_t = c^2(u_{xx}+u_{yy}) \qquad 0<x<a , 0<y<b \\ u(x,y,0) = f(x,y) \end{cases}$$



$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A e^{-\lambda^2 c^2 t}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$\lambda=\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$

$$u(x,y,0)=f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$A=\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dy\,dx$$

صفحه ۱۴ تست ۳۰

* برق (۹۰) اگر تابع $f(x,y)$ در ناحیه $0<x<a$ و $0<y<b$ به صورت سری

۱) ×
چون $\frac{2}{a}$ نداره

۲) ✓

۳) ×
چون $\frac{2}{a}$ نداره

۴) ×
$\frac{x}{a}$ اما شده $\frac{y}{b}$ هست

* کامپیوتر ۸۶، کامپیوتر ۹۲) بدست آوردن جواب معادله حرارت

۱) ✗
۲) ✗
۳) ✗
۴) ✓

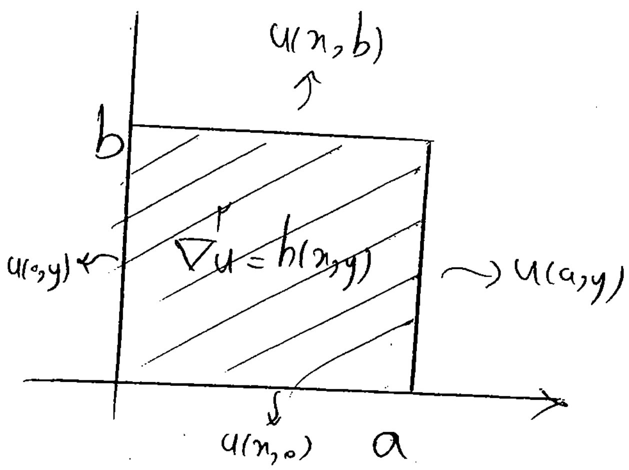
$$\begin{cases} u(0,y,t)=0 \rightarrow \sin\lambda x \\ u(a,y,t)=0 \rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_y(x,0,t)=0 \rightarrow \cos\lambda y \\ u_y(x,a,t)=0 \sim \sin\lambda a=0 \rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{a} \end{cases}$$

همیشه دنباله‌ها از صفر شروع می‌شه ! مگر اینکه در صفر تعریف نشده باشد

* معادله لاپلاس در مختصات دکارتی (حالت پایدار معادله موج و حرارت دو بعدی)

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=h(x,y) \quad 0<x<a \,,\, 0<y<b \\ u(x,0)=f_1(x) \\ u(x,b)=f_2(x) \\ u(0,y)=f_3(y) \\ u(a,y)=f_4(y) \end{cases}$$



باید تشخیص بدیم کدوم دو شرط نقش شرط مرزی و کدام دو شرط نقش شرط اولیه را بازی می‌کند

دو شرطی که نقش اولیه را بازی می‌کنند باید در یک راستا باشند

معادله موج لفیم اگر شرایط مرزی صفر باشه ← اولین کار: شرایط مرزی صفر

انجام اولین کار یعنی انجام دادیم ← ۲ شرایط مرزی صفر

را با صفر کردن شرایط مرزی یک متغیره در نظر بگیریم

$$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$$

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = h(x,y) \\ v(x,b) = f_1(x) \\ v(x,b) = f_2(x) \\ v(0,y) = 0 \rightsquigarrow \sin\lambda x \\ v(a,y) = 0 \rightsquigarrow \lambda = \frac{n\pi}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0 \\ w(x,0) = 0 \rightarrow \sin\lambda y \\ w(x,b) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{b} \\ w(0,y) = f_3(y) \\ w(a,y) = f_4(y) \end{cases}$$

اولی در راستای x دو تا شرط صفر ← شرایط مرزی

دومی در راستای y دو تا شرط صفر ← شرایط مرزی

* همیشه راستایی که دو شرط صفر ← مرزی، دو شرط دیگر ← اولیه

$$\begin{cases} v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F(y)\sin\lambda x, \quad \lambda = \frac{n\pi}{a} \\ w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F(x)\sin\lambda y, \quad \lambda = \frac{n\pi}{b} \end{cases}$$

۲۲۵

$$v_{xx}+v_{yy}=h(x,y)$$

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}F(y)\sin\lambda x \quad , \quad \lambda=\frac{n\pi}{a}$$

$$\sum\left(F''(y)-\lambda^2F(y)\right)\sin\lambda x=h(x,y) \left\langle \begin{array}{l} =0 \\ \neq 0 \end{array}\right.$$

$$h(x,y)=0 \Rightarrow F''(y)-\lambda^2F(y)=0 \Rightarrow S^2-\lambda^2=0$$

$$S=\mp\lambda$$

جواب

$$\boxed{F(y)=Ae^{\lambda y}+Be^{-\lambda y}}$$

جواب

$$\boxed{F(y)=A\,ch\lambda y+B\,sh\lambda y}$$

$$h(x,y)\neq 0 \Rightarrow F''(y)-\lambda^2F(y)=\frac{2}{a}\int_0^a h(x,y)\sin\lambda x\,dx=M(y)$$

$$F''(y)-\lambda^2F(y)=M(y) \Rightarrow \begin{cases} F_h=A\,ch\lambda y+B\,sh\lambda y \\ F_p=N(y) \end{cases}$$

$$F=F_h+F_p=A\,ch\lambda y+B\,sh\lambda y+N(y)$$

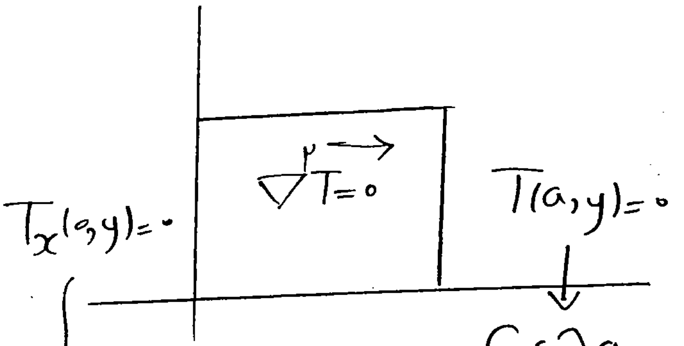
$$v(x,y)=\sum\left(A\,ch\lambda y+B\,sh\lambda y+N(y)\right)\sin\lambda x\,dx \quad , \quad \lambda=\frac{n\pi}{a}$$

با اعمال شرایط باقی مانده (شرایطی که نقش شرط اولیه را دارند) ضرایب مجهول را بدست می آوریم

$$\begin{cases} v(x,0) = f_1(x) = \sum (A+N(0)) \sin \lambda x \Rightarrow A+N(0) = \frac{2}{a}\int_0^a f_1(x) \sin \lambda x \, dx \\ \qquad \rightarrow A = \cdots \\ v(x,b) = f_2(x) = \sum (A \operatorname{ch} \lambda b + B \operatorname{sh} \lambda b + N(b)) \operatorname{sh} \lambda x \Rightarrow \cdots \Rightarrow B = \cdots \end{cases}$$

ص ۴۱۵ جلد اول ص ۴۲۹، ۴۹ تست جلد دوم

* مسئله ۱۵)



$\cos \lambda x$

$\cos \lambda a = 0$

$\lambda = (2n-1)\frac{\pi}{2}$

۱۱)

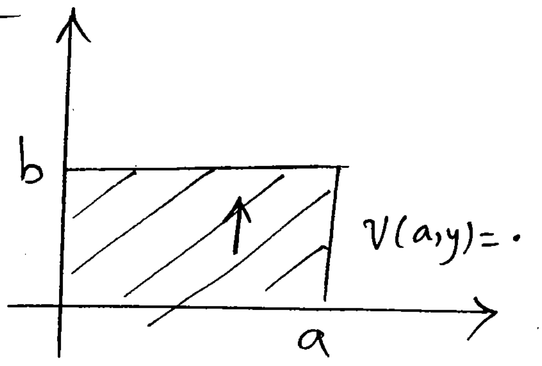
۱۲)

۱۳)

۱۴)

JozveBargh.ir

۲۲۶



$\Downarrow$

$\sin \lambda y$

۱) ✗
۲) ✗
۳) ✗
۴) ✓

یک حالت a و b داریم سوال شرایط اولیه!
دقت a و b می توانستیم بنویسیم که شرایط مرزی صفر!
چون شرایط مرزی خالف صفر، a و b خالف صفر!

* $u(x,y)$ در ∞ همواره برابر صفر است. هر آنچه قبلا در مورد داده شده باشد

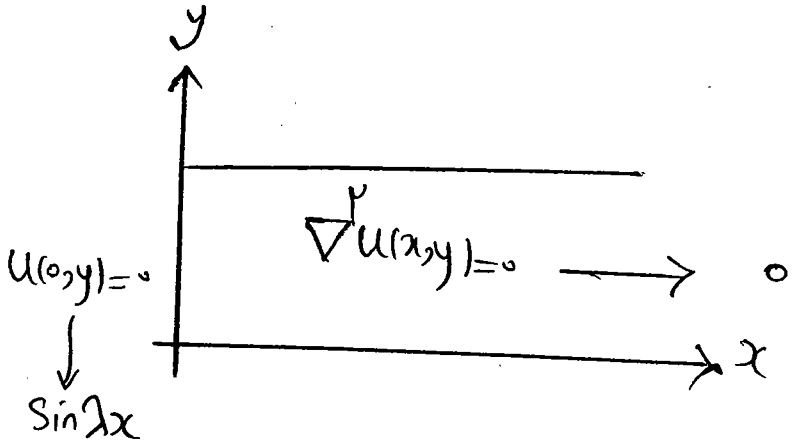
* اگر فرد در راستایی که نقش شرایط مرزی را دارند محدود شود، برای مقدار ویژه محدودیتی ایجاد می شود و در نتیجه $\sum$ به $\int_0^\infty$ تبدیل می شوند

* اگر فرد در راستایی که نقش شرایط اولیه را دارند محدود باشد بهتر است از $F(y)$ نمایی استفاده کنیم و شرط همگرایی u در ∞ باید ضریب $e^{\lambda y}$ صفر شود در نتیجه $F(y)=e^{-\lambda y}$.

و اگر مرز در راستای y تا محدود باشد بهتر است از فرم کسینوس هیپربولیکی جواب استفاده شود

ص ۴۱۸

* برق ۷۷)



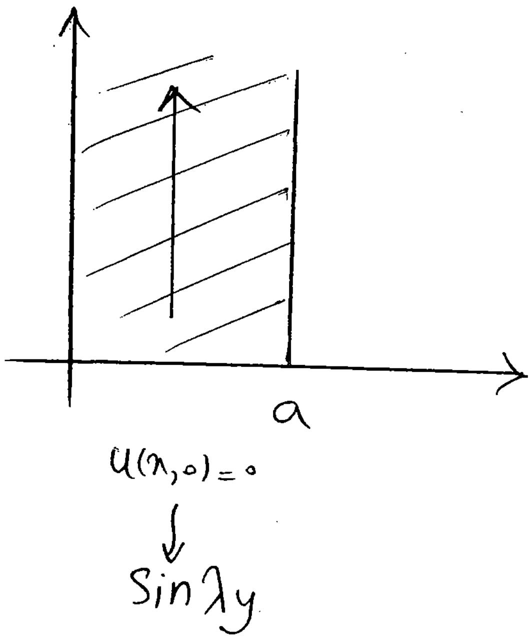
$$u(x,y)=\int_0^\infty A\,ch\,\lambda y\,\sin\lambda x\,d\lambda$$

۱) ✗
۲) ✗
۳) ✓
۴) ✗

$$u(x,y)=\int_0^\infty (A\,ch\,\lambda y+\cancel{B\,sh\,\lambda y})\sin\lambda x\,d\lambda \quad B=0$$

$$u_y(x,0)=0 \Rightarrow \int_0^\infty B\lambda\sin\lambda x\,d\lambda=0 \Rightarrow B=0$$

* کامپیوتر ۸۵)

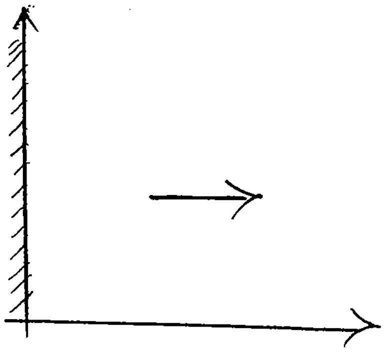


۱)
۲)
۳) ✓
۴)

۲۲۷

۵

* کامپیوتر ۸۹ ص ۴۸۹

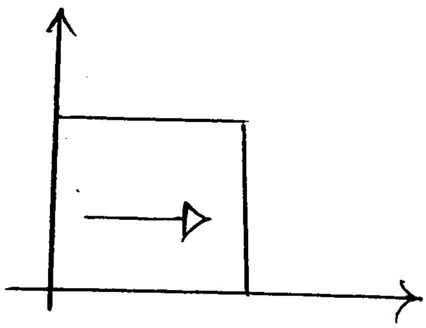


$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{=0}$ ⟵ $\cos\lambda x$

۱) ✓
۲) ×
۳) ×
۴) ×

$$u(x,y)=\int_0^\infty A e^{-\lambda y}\cos\lambda x \, d\lambda$$

* برق ۹۰ ص ۴۶۵ تست ۲۸



$\lambda=\frac{2n\pi}{a}$ ← ۲ اُغ واد درست !

$\uparrow$

$\lambda a=2n\pi$

$\uparrow$

$\cos\lambda a=1$

$\uparrow$

$T=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$

$x=0 \rightarrow \quad A+0=A\cos\lambda a+B\sin\lambda a$

یکی از شرط کردن تابع ویژه بیان ← مقدار ویژه بدست بیاید

تابع ویژه کلی ترین حالت است.

* چون شرایط مرزی در راستای x صفر است تابع در راستای x [illegible]

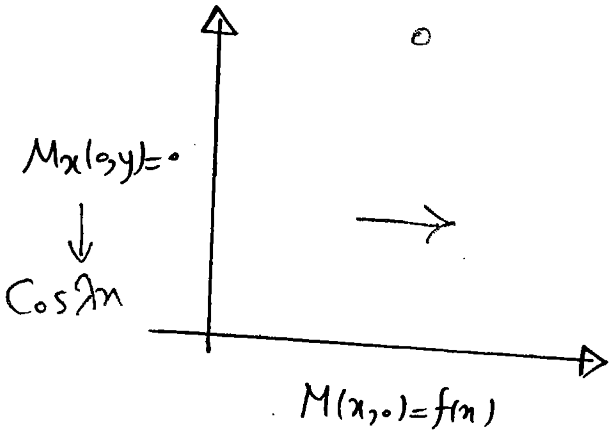
همگن باشد ← ضرورت دارد [illegible]

* [illegible] ندارم ← ۲،۳ [illegible]

۱) ✓
۲) ×
۳) ×
۴) ×

ص ۴۴۵، س ۶۶

*کامپیوتر ۹۰)



۱) ×

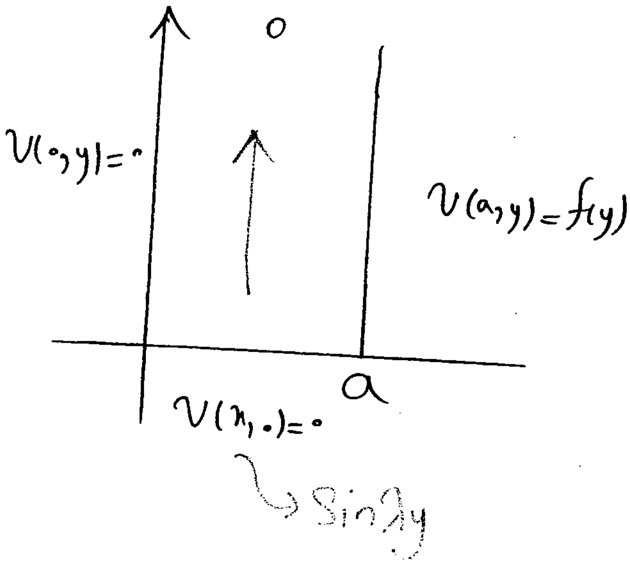
۲) ✓

۳) ×

۴) ×

ص ۴۴۵، س ۶۷

*کامپیوتر ۹۱)



۱) ✓

۲) ×

۳) ×

۴) ×

راه اول ① $v(x,y)=\int_0^{\infty}(A\cosh\lambda x+B\sinh\lambda x)\sin\lambda y\,d\lambda$

$v(0,y)=0 \longrightarrow A=0$

راه دوم ② از شبیه‌گذاری با شکل قبل استفاده می‌کنیم

۲۲۸ / ۹۰ سوم ③ ای‌سوم
حل کردن شرط $x=0$ گذرنیک

I

* برق ۸۹ سه، ۴۵، ست ۲۶

۱) ✗ ← چون جمع دو تره ندارد

۲) ✗ ← چون $f(x)$ زوج است $(y=0)$ ← اما اینجا فرده!

۳) ✓✓✓

۴) ✗

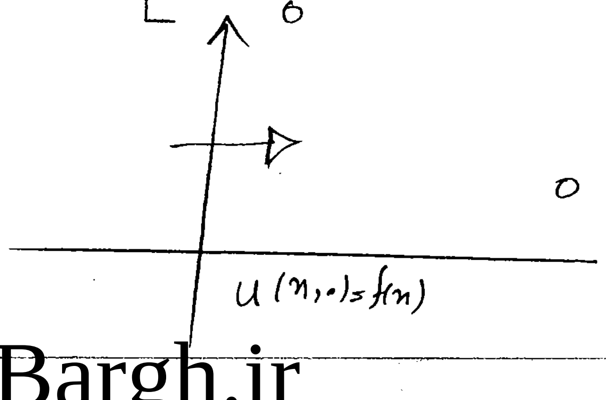
تس ۳ و ۴ ← دقت!
حرا انتگرال فوریه های پرونیک یا متناهی نه ← ۴ غ ← ۳ ✓

* وقتی فرم کنزنیه ها فرق می‌کنه فاصله اونی که فرمشون فرق داره رد یا تایید کنید
پس اینجا جواب ۱ و ۲ که باید دو شن کنید
کنزنیه‌ای با هم‌نوع یکسان ← فقط تفاوت در ضریب!

$$v(x,y)=\int_0^\infty Ae^{-ky}\cos kx\,dk \rightsquigarrow$$

$$u(x,0)=f(x)=\int_0^\infty A\cos kx\,dk \rightarrow A=\frac{2}{\pi}\int_0^1 1\cos kx\,dk$$

$$=\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin k}{k}$$



* روش کاملاً شرعی
راستی به نقش شرایط مرزی

$$u(x,y)=\int_0^{\infty}(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)e^{-\lambda y}d\lambda$$

! فقط A داریم ← B=0 ← زوج f(x)

* برق ۷۶ ص ۴۲۷، س ۷۶

$u(0,y)=u(a,y)=0 \rightarrow \sin\lambda x \rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{a}$

۱) ✓ ۲) ✗ تعداد جملات محدود

۳) ✗ تعداد جملات نامحدود ۴) ✗

بین ۲ و ۴ ← ۴ از همش غلط

اگه λx ← باید sh λy داشته باش، ولی توی ۴، sh $\frac{\pi y}{2a}$ است، پس غ

* برق ۹۱ ص ۴۳۶، س ۳۹

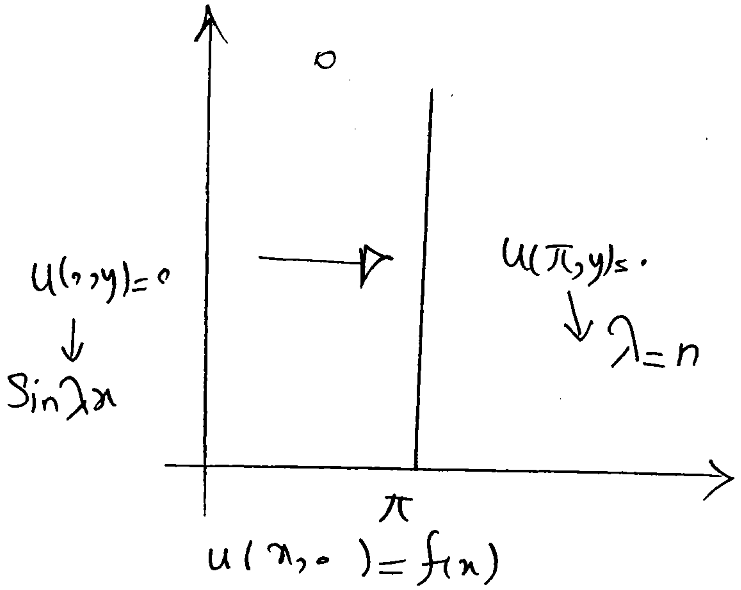
۱) ✗ $\sin 2x$ طبق باید e^{2y} باشه

۲) ✗ $\sin 2x \leftarrow e^{2y}$

۳) ✓

۴) ✗ $\sin 2x \leftarrow$ باید e^{-2y}

چون تعداد جملات محدود
اولی از همون اول غلط حذف
$\frac{2}{4}$ از همش غلط ← حذف
۳ ← درست



$u(x,0)=\sin 2x-\sin 4x$

$$u(x,y)=\sum Ae^{-\lambda y}\sin\lambda x$$

$$u(x,y)=\underset{1}{\cancel{A_2}}\,e^{-2y}\sin 2x+\underset{-1}{\cancel{A_4}}\,e^{-4y}\sin 4x$$

<u>Second Section</u>

* معادله لاپلاس در مختصات قطبی

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$$

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}F(r)\times(\text{تابع ویژه})$$

$$F(r)=Ar^{+\lambda}+Br^{-\lambda} \qquad A\cos\lambda\theta+B\sin\lambda\theta$$

① مرز دایره‌ی کامل :

$$\text{جواب دوره‌ای} = A\cos\lambda\theta + B\sin\lambda\theta \rightarrow \boxed{\lambda = n}$$

الف) داخل دایره $(r<a)$

$$\text{شرط همگرایی در مرکز دایره} \rightarrow B=0 \rightarrow u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A\cos n\theta + B\sin n\theta)$$

$$u(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A\cos n\theta + B\sin n\theta)$$

ب) خارج دایره $(r \geqslant a)$

$$\text{شرط همگرایی در } r=\infty \rightarrow A=0 \rightsquigarrow F(r) = r^{-\lambda}$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} (A\cos n\theta + B\sin n\theta)$$

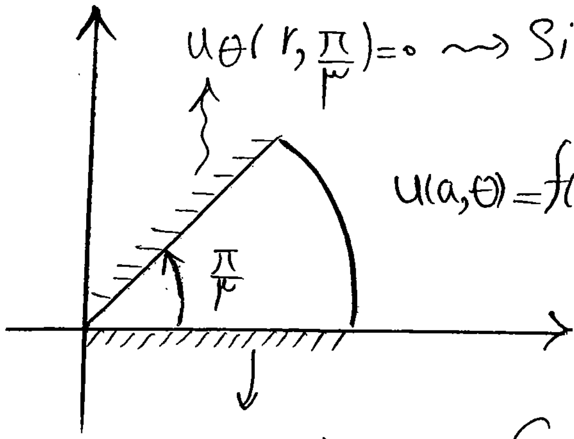
$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A\cos n\theta + B\sin n\theta)$$

با اعمال شرط $u(a,\theta) = f(\theta)$، ضرایب مجهول از بسط فوریه $f(\theta)$ بدست می‌آیند.

۸

(۲) ناحیه قسمتی از دایره باشد :

$u_\theta(r,\frac{\pi}{3})=0 \rightsquigarrow \sin\lambda\frac{\pi}{3}=0 \to \frac{\lambda\pi}{3}=n\pi \Rightarrow \lambda=3n$



$u(a,\theta)=f(\theta)$

$\theta_\theta(r,0)=0 \rightsquigarrow \cos\lambda\theta$

شرط همگرایی در $r=0$ $\Rightarrow B=0 \to F(r)=r^{\lambda}$

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} A r^{\lambda}\cos\lambda\theta\ ,\ \lambda=3n$$

* برق ۸۸ ص ۴۹۸ جلد اول

عایق بندی

↓

$u_\theta(r,0)=0$

↓

$\cos\lambda\theta$

$T(r,\pi)=0$

↓

$\cos\lambda\pi=0$

$\lambda\pi=(2n-1)\frac{\pi}{2}$

۱)

۲)

۳)

۴)

چرا ۴ را انتخاب نکردیم ؟ چون ۶ منفی نمی‌تونه باشه !

۴: اصلاً ۶ منفی ← پس غ است!

ص ۴۹۸

برق ۷۲)

$$u(1,\theta)=\begin{cases}0 & 0<\theta<\pi\\ 1 & \pi<\theta<2\pi\end{cases}$$

۱) ✓

۲) ×

۳) ×

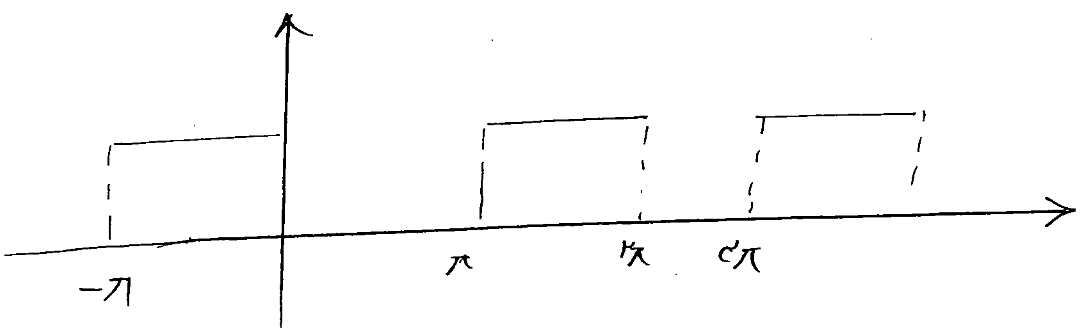
۴) ×

۱، ۲، ۴ چرا غ ؟

۳، ۴ چون n ها زوج ← حذف

چون تابع در π ناپیوسته ← سری ضرایب $\frac{c}{n}$

۲ چرا حذف؟ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ پس a_n نمی‌تواند ۱ باشد ← ۲، ۳، ۴ غ



حتماً a_n صفر است!

ص ۴۲۹، تست ۲۲ ـ جلد دوم

* برق ۸۲

فرض غلط

۱) ✗

فرض درست

۲) ✗

۳) ✗

۴) ✓✓

فرض درست ← اما باید $\lambda = 2$ باشد ← $\lambda = 1$ غ

۵) $\frac{r^4}{16} \sin 2\phi$

لازم غلط

r^2 باید باشد ← غ

بین ۲ و ۴ ← ۲ غ

$$u(r,0) = 0 \to \sin \lambda\theta$$

$$\sum r^\lambda \sin \lambda\theta$$

$$u(r,\theta) = \underset{\frac{1}{4}}{A_1} r^2 \sin 2\theta \qquad 4A_1 = 1 \quad A_1 = \frac{1}{4}$$

اگر در معادله‌ی لاپلاس تغییرات u به θ بستگی نداشته باشد یعنی ($u_{\theta\theta} = 0$)

معادله لاپلاس به معادله کشی اویلر تبدیل می‌شود $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0$

و جواب عمومی آن بصورت $u = \ln r + B$ است.

$$D^2 - D + D = 0 \to D = 0 \quad \text{ریشه مضاعف}$$

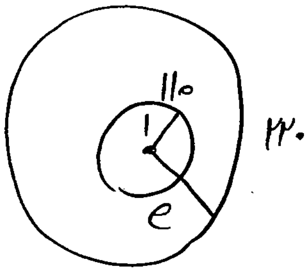
$$\downarrow$$

$$u = A\cancel{z} + B$$

$$\ln r$$

تغییرات u به θ بستگی ندارد ⇐ { اگر مقدار u روی مرز دایره ثابت باشد ← ۲) دایره کامل
مقدار u روی کمان های دایره ثابت
روی شعاع ها عایق بندی شده باشد } ← قسمتی از دایره

* مطابق ۷۰) صفحه ۵۰۰
تغییرات u به θ بستگی دارد



$u = A\ln r + B$

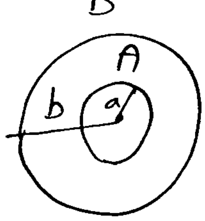
۱) ✓

۲) ✗ جزء غلط

۳) ✗ جزء غلط

۴)

* برق ۸۴) صفحه ۴۲۰ تست ۲۴



$u = c\ln r + D$

۱) ✗

۲) ✗

۳) ✓

۴) ✗

۳۳۲ ۱۰

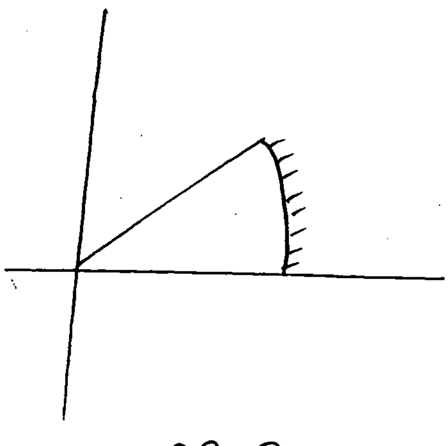
* اگر در معادلهٔ لاپلاس تغییرات u به r بستگی نداشته باشد یعنی u_r و u_{rr} صفر باشند معادلهٔ لاپلاس به معادلهٔ $u_{\theta\theta}=0$ تبدیل می‌شود و جواب عمومی آن $u=A\theta+B$ است.

* ناحیه
- شعاع محدود ← ۱
  - روی شعاع‌ها مقدار u ثابت باشد
  - روی مرز $r=a$ عایق‌بندی شده باشد
- شعاع نامحدود ← ۱
  - روی شعاع‌ها مقدار u ثابت باشد

← تغییرات u به r بستگی ندارد

ص ۵۰۳

* هسته‌ای ۸۳)



$u=A\theta+B$

۱) ×
۲) ✓
۳) ×
۴) ×

ص ۴۲۲ تست ۴

* برق ۷۱)

$$u=A\theta+B=A\,tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+B$$

۱و۲ ← جایگزین شرایط

$\theta=0 \to T_0$

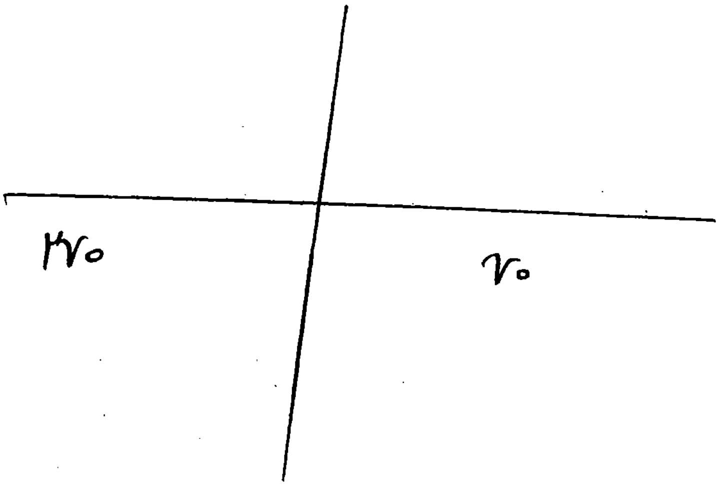
$\theta=\frac{\pi}{2} \to 0$

$\theta_0=T_0$

$\frac{\pi}{2}\to 0$

۱) ×
۲) ✓
۳) ×
۴) ×

* برق ۹۱) ص ۴۲۶، تست ۳۰



۱)   ۲)   ۳)   ۴) ✓

نقاط با محدوده مقادیر r هم ثابت است
در نا محدود به تغییرات r با θ بستگی ندارد ⇐

$$r = A\theta + B$$

$$\theta = 0 \rightarrow B = r_0$$

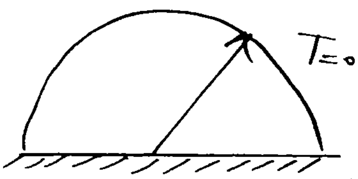
$$\theta = \pi \rightarrow 2r_0 = A\pi + r_0 \rightarrow A = \frac{r_0}{\pi}$$

$$r = \frac{r_0}{\pi}\theta + r_0 \rightarrow \Delta r = \frac{r_0}{\pi}\Delta\theta = \frac{r_0}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{r_0}{12}$$

* مقدار $u(r,\theta)$ در $r=0$ همواره برابر است با مقدار متوسط $f(\theta)$

$$\left(u(a,\theta) = f(\theta)\right)$$

* برق ۸۳) ص ۴۲۹، تست ۲۳



۱)   ۲)   ۳)   ۴) $\frac{3T_0}{4}$ ✓

$$T = \frac{\int_0^{\pi} f(\theta)\,d\theta}{\pi} = \frac{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} T_0\,d\theta}{\pi} = \frac{3}{4}T_0$$

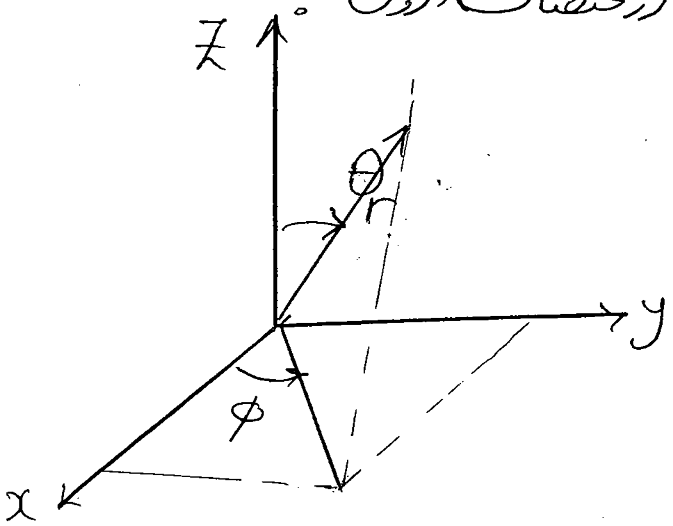
* مکانیک ۱۴

۱)   ۲)   ۳)   ۴) ✓

$$U = \frac{\int_0^{2\pi} f(\phi)\,d\phi}{2\pi} = \frac{\int_0^{\pi}(-\pi\sin\phi)\,d\phi + \int_{\pi}^{2\pi}\pi\cos\phi\,d\phi}{2\pi}$$

$$= \frac{\pi\cos\phi\Big|_0^{\pi} + 0}{2\pi} = -1$$

* معادله لاپلاس در مختصات کروی:



با فرض تقارن نسبت به ϕ یعنی $U_{\phi\phi}=0$ جواب معادله لاپلاس در فضای کروی مطابق زیر است:

$$U(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} F(r) \times \text{تابع زاویه}$$

$$F(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}$$

تابع زاویه $\to P_n(\cos\theta)$ ← مقدار ویژه

الف) خارج کره $(r \geq a)$

شرط همگرایی در $r=\infty$ $\Rightarrow A=0 \rightarrow F(r)=Br^{-(n+1)}$

$$U(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} B r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

ب) داخل کره $(r \leq a)$

شرط همگرایی در $r=0$ $\Rightarrow B=0 \rightarrow F(r)=Ar^{n}$

$$U(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} A r^{n} P_n(\cos\theta)$$

* با اعمال شرط $U(a,\theta)=f(\theta)$ ضرایب مجهول از بسط لژاندر $f(\theta)$ بدست می‌آیند

* فرمول رودریگس

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left[(x-1)^n\right]^{(n)}$$

حفظ

$$**\begin{cases} P_0(x)=1 & \rightarrow P_0(\cos\theta)=1 \\ P_1(x)=x & \rightarrow P_1(\cos\theta)=\cos\theta \\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) & \rightarrow P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1) \\ \vdots \end{cases}$$

۲) تعامد جواب های معادله لژاندر

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & , m = n \end{cases}$$

$$\| P_n(x) \|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}$$

۳) $f(x)$ را می توان برحسب جواب های معادله لژاندر مطابق زیر بسط داد:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \\ a_n = \dfrac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx \end{cases}$$

* مثال: بسط لژاندر که $F(x) = 5x + 7$ ، $-1 < x < 1$ را بدست آورید.

$$f(x) = 5P_1(x) + 7P_0(x)$$

* مثال) در بسط لژاندر تابع $f(x) = \begin{cases} e^x & , 0 < x < 1 \\ 0 & , -1 < x < 0 \end{cases}$ ضریب $P_1(x)$ را بدست آورید.

$$a_1 = \frac{3}{2} \int_0^1 e^x P_1(x)\, dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x e^x\, dx = \frac{3}{2} (x e^x - e^x) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

ص ۴۲۸، ت ۱۷

* برق ۸۹

$$u(r,\theta)=\sum A\, r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

۱) ✗ ۲) ✗

۳) ✗ ۴) ✓

$$\left[\begin{array}{l} V_0 P_0(\cos\theta)-V_0 P_1(\cos\theta) \\ V = A_0 r^{-1} + A_1 r^{-2}\cos\theta \end{array}\right. \Rightarrow A_0 a^{-1} + A_1 a^{-2}\cos\theta = V_0 - V_0\cos\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 = a V_0 \\ A_1 = -a^2 V_0 \end{cases}$$

ص ۴۴۱، ت ۵۶

* کامپیوتر ۸۸

$$u(1,\theta)=1+1+\cos\theta=2+\cos\theta$$

۱) ✓ ۲) ✗

۳) ✗ ۴) ✗

هم غلط

ضریب باید r باشه نه r^2 !

۲۳۵

$$U = A_0 + A_1 r\cos\theta$$

$$r=1 \Rightarrow A_0 + A_1\cos\theta = 2 + \cos\theta$$

$$\begin{cases} A_0 = 2 \\ A_1 = 1 \end{cases}$$

ص ۴۷۱ س ۲۹

* برق ۸۶)

۱) ✗

۲) ✗ رفتار r^n باید معادل لاپلاس باشد درست نیست

۳) ✗

۴) ✓

صفحه درجه ۰ رفتار $r\cos\theta$ ✓

صفحه ۲ درجه ۰ رفتار $r\cos\theta$ ✓

سن ۳ و ۴ ← ۱ تا غلط!

$n=1$ ← توان حقیقی باید ۲ تا باشد!

* جلسه‌ی سوم مشتقات جزئی

* حل دالامبر معادله موج

① میله نامحدود:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

(*) حفظ

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\big(G(x+ct) - G(x-ct)\big)$$

$$\boxed{G(x) = \int g(x)\,dx}$$

* مثال) مقدار $u(x,t)$ را برای معادله موج که شرایط داده شده بدست آورید.

$\rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} \\ u(x,0) = e^{x} \\ u_t(x,0) = \cos x \rightarrow G(x) = \sin x \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{x+2t} + e^{x-2t}\right) + \frac{1}{4}\big(\sin(x+2t) - \sin(x-2t)\big)$$

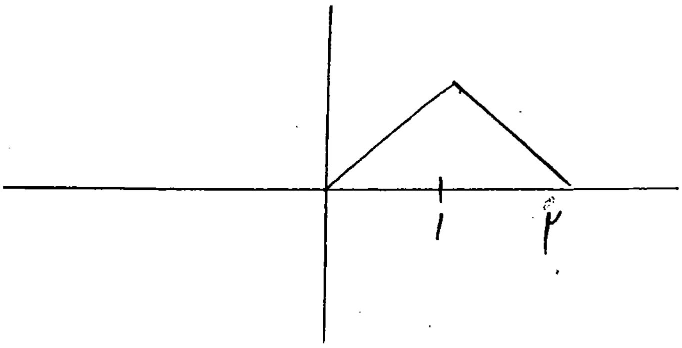
* میله نیمه محدود:

الف)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad x>0, t>0 \\ u(0,t) = p(t) \\ u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$u(x,t)=\begin{cases} (*) & , x>ct \\ \frac{1}{2}\left(f(x+ct)-f(ct-x)\right)+\frac{1}{2c}\left(G(x+ct)-G(ct-x)\right)+p\left(t-\frac{x}{c}\right) & , x<ct \end{cases}$$

حفظ



$f(-\frac{1}{2})$

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx} & , x>0, t>0 \\ u_x(0,t)=q(t) \\ u(x,0)=f(x), \quad u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

حفظ

$$u(x,t)=\begin{cases} (*) & , x>ct \\ \frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(ct-x)\right)+\frac{1}{2c}\left(G(x+ct)+G(ct-x)-c\int_0^{t-\frac{x}{c}} q(\lambda)\,d\lambda\right) & , x<ct \end{cases}$$

صحیح است

* جواب ۳)

۴) ✗ ۳) ✓ ۲) ✗ ۱) ✗

باید $x>at$ باشد ← ۲ غ

وقتی ما محدود داریم باید دو ضابطه داشته باشیم $x>ct$, $x<ct$ ← پس یک ضابطه‌ای غ

۲۳۷

$$u(x,t)=\begin{cases}0 & , x>at\\ \mu(t-\frac{x}{a}) & , x<at\end{cases}$$

* جواب (۷۷ صفحه ۵۲۵ تست ۴

(۱ ✗ (۲ ✗ (۳ ✗ (۴ ✓

گزینه ۲،۳،۱ یک شرایطی ۴ غ

$$W(x,t)=\begin{cases}0 & , x>t\\ -\int_0^{t-x}\cos b\lambda\, d\lambda & , x<t\end{cases}$$

$$\to -\frac{1}{b}\sin b(t-x)$$

*مثال) برای معادله موج داده شده جواب دالامبر را بنویسید.

$$\begin{cases}u_{tt}=9u_{xx} & , x>0, t>0\\ u(0,t)=0\\ u(x,0)=e^{-x} & , u_t(x,0)=0\end{cases}$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(e^{-(x+ct)}+e^{-(x-ct)}\right) & , x>3t\\ \frac{1}{2}\left(e^{-(x+3t)}-e^{-(3t-x)}\right) & , x<3t\end{cases}$$

۲) میله‌ی محدود:

الف) اگر شرایط مرزی به صورت $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(h,t)=0 \end{cases}$ باشند توابع f و g

نسبت به صفر و h به صورت فرد بسط داده می‌شوند.

اگر شرایط مرزی به صورت $\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(h,t)=0 \end{cases}$ باشند توابع f و g نسبت

به صفر و h به صورت زوج بسط داده می‌شوند.

ب) اگر شرایط مرزی به صورت $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(h,t)=0 \end{cases}$ یا $\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(h,t)=0 \end{cases}$ باشند

دوره تناوب بسط توابع $T=2h$ است.

اگر شرایط مرزی به صورت $\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u(h,t)=0 \end{cases}$ یا $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u_x(h,t)=0 \end{cases}$ باشند

دوره تناوب بسط توابع $T=4h$ است

ج)

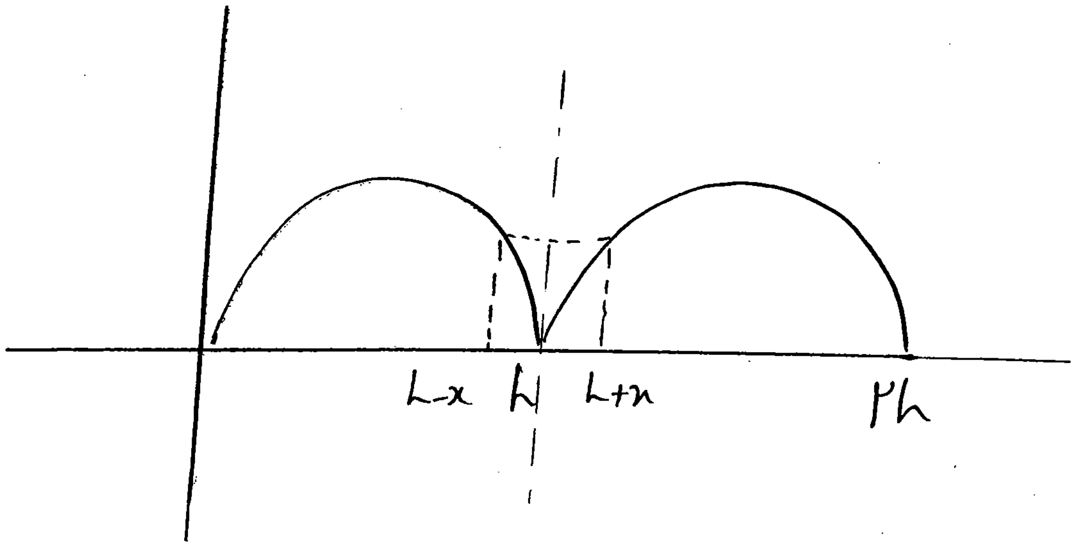
$f(x)$ زوج $\rightarrow f(+x)=f(-x)$

$f(x)$ فرد $\rightarrow f(x)=-f(-x)$

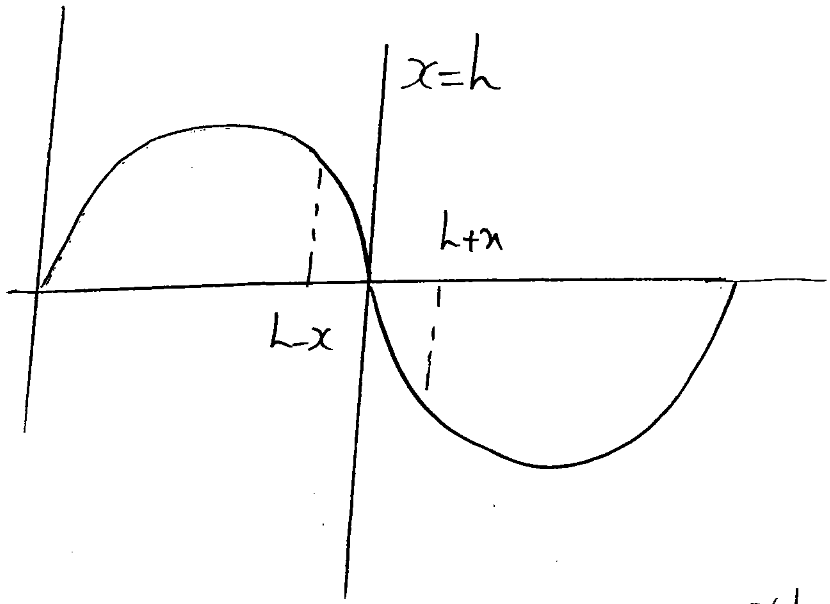
$f(x)$ نسبت به $x=h$ زوج $\rightarrow f(h+x)=f(h-x)$

$f(x)$ نسبت به $x=h$ فرد $\rightarrow f(h+x)=-f(h-x)$

زوج



فرد



تشخیص دالامبر

گونه دارند ← دالامبر فرمش فرق داره

اگر مقدار u در یک نقطه بخواهند ← همچنین دالامبر

عموماً مسائل ی محدود ← طراح سؤال نمی‌تونه ضابطه بده / چون آنقدر ضابطه باید توضیح

بشود ← پس محدوده نقطه بده ←

* برای محاسبه‌ی مقدار $u(x,t)$ در یک نقطه مشخص که استفاده از روش دالامبر مطابق زیر عمل می‌کنیم :

① با استفاده از رابطه‌ی (*) جواب $u(x,t)$ را بر حسب فرم کلی توابع فرد می‌نویسیم

② مقدار x و t مشخص شده را در عبارت بدست آمده در قسمت ① قرار می‌دهیم

③ با حذف همه‌ی ثابت از ورودی توابع فرد و استفاده از شرط مرزی و زوج توابع فرد، ورودی توابع فرد را به بازه‌ی تعریف توابع یعنی $[0,L]$ تبدیل می‌کنیم

④ پس از انجام مرحله ③، می‌توانیم از ضابطه‌های فرد داده شده در صورت سؤال استفاده کنیم و مقدار u را در نقطه داده شده بدست آوریم.

* برق ۷۱ صفحه ۵۴۴ تست ۲

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0 \ , \ u_t(x,0) = x(1-x) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0 & t = 0 \end{cases}$$

$G(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

۱) ۲) ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) ✓

۲۳۹

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\Big(G(x+t)-G(x-t)\Big)$$

$$u\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(G(1)-G\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(G(1)+G\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}-\frac{1}{24}\right)=\frac{1}{8}$$

$$u\left(6,\frac{1}{4}\right)\rightarrow u\left(6,\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(G\left(\underset{2}{\cancel{x}}+\frac{1}{4}\right)-G\left(\underset{2}{\cancel{x}}-\frac{1}{4}\right)\right)$$

ا=L ← ۲L=۴ دوره تناوب

۶/۲ ← مضارب دوره تناوب حذف!

$$\frac{1}{2}\left(G\left(\frac{9}{4}\right)-G\left(\frac{7}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(G\left(-\frac{7}{4}\right)-G\left(\frac{7}{4}\right)\right)=-G\left(\frac{7}{4}\right)$$

$-G(\frac{7}{4})$

$\frac{9}{4}-4=\frac{7}{4}$

$\frac{9}{4}$ از (۱،-۱) (۲،-۲) خارج ← ۲L=۴ کم می‌کنم تا بیفتد توی ۲،-۲

$-\frac{7}{4}$ حالت فرد قرینه می‌کنم

نسبت به مبدا و نتیجه G فرد $G(-\frac{7}{4})=-G(\frac{7}{4})$

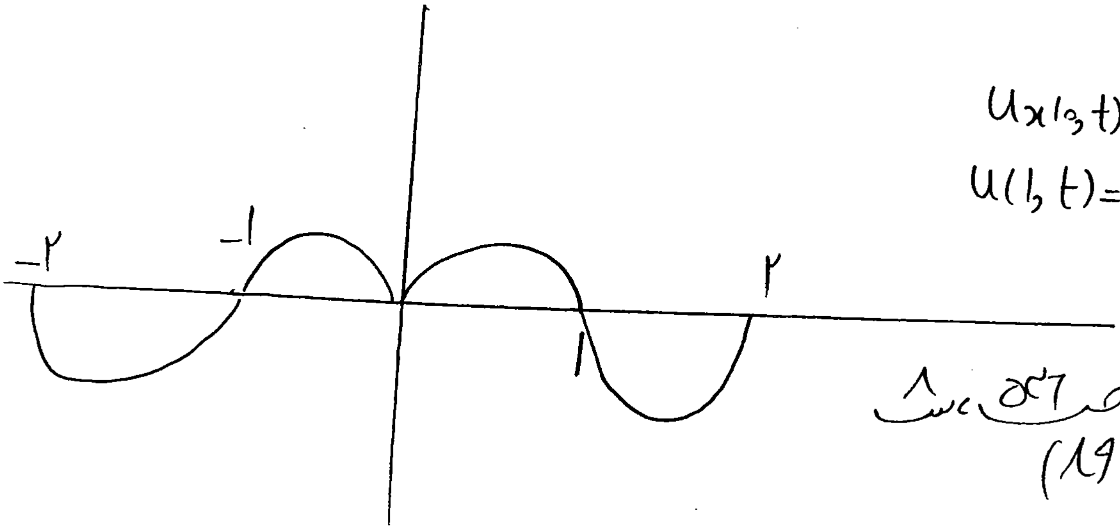
$G(\frac{7}{4})$ را بین ۰ تا ۱ بیند اما از ۱ بیشتر ← به صورت L را اضافه یا کم می‌کنیم (L=1)

و نسبت به L زوج G ثابت اند

$$-G\left(\frac{7}{4}\right)=-G\left(1+\frac{3}{4}\right)=-G\left(1-\frac{3}{4}\right)=-G\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{2\times16}-\frac{1}{3\times64}\right)=-\cdots$$

$G(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3},\quad 0\le x\le 1$



$u_x(1,t)=0$

$u(1,t)=0$

ص ۵۲۶، تست ۸

مطلب ۱۸)

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)$$

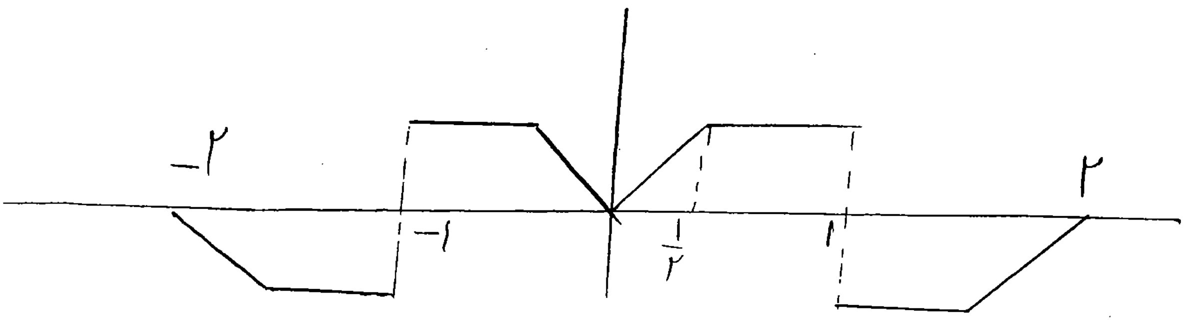
$$u_t(x,t)=\frac{1}{2}\left(f'(x+t)-f'(x-t)\right)$$

فصل ۴ بخش ۸ جزوه

$$u_t\left(5,\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(f'\left(\frac{1}{3}+5\right)-f'\left(\frac{1}{3}-5\right)\right)$$

۱) ۰ ✓ ۲) ۳) ۴)

$$u_t\left(5,\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(f'\left(1-\frac{1}{3}\right)-f'\left(-\frac{2}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(f'\left(\frac{2}{3}\right)+f'\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f'\left(\frac{2}{3}\right)=0$$



JozveBargh.ir

$h=0 \xrightarrow{\text{تناوب}} f(x)$ جواب ۱۷ است   مغناطیس ۸۶) ۸

۱) ✓ $f(x)\ h\to 0$ ۲) ✗ $2f(x)$ ۳) ✗ $3f(x)$ ۴) ✗ اصلاً $f(x)$ عوض نشد!

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left\{f(x+t)+f(x-t)\right\}+\frac{1}{2}\left\{G(x+t)-G(x-t)\right\}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left\{f(x+h)+f(x-h)\right\}+\frac{1}{2}\left\{G(x+h)-G(x-h)\right\}=f(x+h)$$

$$f(x+h)=f(x+h-2h)=f(x-h)$$

$$G(x+h)=G(x+h-2h)=G(x-h)$$

* معادلات مرتبه اول :

فرم کلی معادلات مرتبه اول شبه خطی بصورت زیر است

$$p(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=r(x,y,z)$$

برای حل معادله، دستگاه لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{dx}{p}=\frac{dy}{q}=\frac{dz}{r}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\phi_1(x,y,z)=c_1 \rightsquigarrow u\\ \phi_2(x,y,z)=c_2 \rightsquigarrow v\end{cases}$$

جواب عمومی را به صورت یکی از فرم های مقابل می‌توان نوشت

$$\begin{cases}u=\phi(v)\\ v=\phi(u)\\ \phi(u,v)=0\end{cases}$$

ص ۲۹۴، س ۵

* موارد ۸۳)

۴) ۲

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{x}$$

سوال ۱۱)

$$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{x} \Rightarrow x\,dx-z\,dz=0$$

$$x^2-z^2=c_1=u$$

$$\frac{dx+dz}{z+x}=\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln(z+x)=\ln y+\ln c_2$$

$$\boxed{\frac{x+z}{y}=c_2=v}$$

ص ۴۹۷، س ۱۳

مکانیک ۸۵)

از ساده ترین عبارت گزینه که دیفرانسیل می گیریم

$x+y+z=c_1 \rightarrow dx+dy+dz=0$

۱) ✓ ✗

۲) ✗ ✗

$xy+yz+zx=c_1 \rightarrow x\,dx+y\,dy+z\,dz=0 \rightarrow x^2z^2-x^2y^2+y^2x^2-y^2z^2+z^2y^2-z^2x^2=0$

۳) ✗ ✓ [illegible] $x+y+z$ [illegible] حذف ۳ اضافی

۴) ✗

۱۶ سن ادا۴ ← ۱ ساکه تر

$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0$$

$$\rightsquigarrow xyz(x^2-y^2) \rightsquigarrow xyz(x^2-z^2) + xyz(y^2-x^2) = 0$$

۱ درست است

* معادلات مرتبه اول با ضرایب ثابت :

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = r(x,y) \rightsquigarrow z = z_h + z_p$$

$$Dz = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad D'z = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0 \to \begin{cases} z_h = e^{-\frac{c}{a}x}\phi(ay-bx), & a \neq 0 \\ z_h = e^{-\frac{c}{b}y}\phi(ay-bx), & b \neq 0 \end{cases}$$

* مطلب ۸۲ (ص ۴۹۲، تست ۳

$$u_h = e^{-\frac{c}{a}x}\phi(ay-bx)$$

$$u_x + 2u_y - u = 0$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases} \to u = e^{x}\phi(y-2x)$$

۱) ✓ ۲)

۳) ۴)

$y = c_1 x + x^2 \rightarrow y = x + x^2$

$x + 0 = x$

* مشابه ۷۵)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{x}$$

۱)

۲) ✓

۳)

۴)

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow u_x = \phi(y - 2x)$$

* معادلات مرتبه دوم :

فرم کلی معادلات مرتبه دوم خطی مطابق زیر است

$$A(x,y)\,u_{xx} + B(x,y)\,u_{xy} + C(x,y)\,u_{yy} + D(x,y)\,u_x$$

$$+ E(x,y)\,u_y + F(x,y)\,u = R(x,y)$$

– تشخیص نوع معادله :

$\Delta = B^2 - 4AC$

- $\Delta > 0 \rightarrow$ از نوع هذلولی گون
- $\Delta < 0 \rightarrow$ از نوع بیضی گون
- $\Delta = 0 \rightarrow$ از نوع سهمی گون

* کامپیوتر ۸۲ ص ۵۱۵ س ۴

۱)

۲)

۳) ✓

۴)

$\Delta = 0 - 4xy$

* برق ۸۵) ص ۵۱۷، س ۱۱

$$\Delta = 4(y+1)^2 + 4(x^2 - 1) = \underset{>0}{4y^2} + \underset{>0}{8y} + \underset{>0}{4x^2} > 0$$

۱)

۲)

۳) ✓ هذلولی گون

۴)

* مکانیک ۸۹) کدام عبارت در مورد معادله

$$(2xy-1)u_{xx} + (x+2y)u_{xy} + u_{yy} + x^2u_x + y^2u_y = 1$$

درست است؟

۱) ۲) ۳) ✓ هذلولی گون ۴)

$$\Delta = (x+2y)^2 - 4(2xy-1) = x^2 + 4y^2 + \underbrace{4xy - 8xy}_{-4xy} + 4$$

$$= (x-2y)^2 + 4 > 0$$

* تبدیل به فرم کانونی : برای تبدیل به فرم کانونی مطابق زیر عمل می‌کنیم

① معادله شاخصی را تشکیل می‌دهیم $Ar^2 - Br + C = 0$

② ریشه‌های معادله شاخصی را بدست می‌آوریم (r_1, r_2)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = r_1 \quad \Rightarrow \phi_1(x,y) = c_1 = r \\[2ex] \dfrac{dy}{dx} = r_2 \quad \Rightarrow \phi_2(x,y) = c_2 = s \end{cases}$$

با تغییر متغیر r و s معادله به فرم کانونی (استاندارد) تبدیل می‌شود

* معرفی فرم های کانونی

الف) فرم کانونی معادله هذلولی گون

$$u_{rs} = f(u_r, u_s, u, r, s)$$

ب) فرم کانونی معادله‌ی بیضی گون

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{r+s}{2} \\[2ex] \beta = \dfrac{r-s}{2i} \end{cases} \Rightarrow u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = f(u_\alpha, u_\beta, u, \alpha, \beta)$$

ج) فرم کانونی معادله سهمی گون

$$\frac{dy}{dx} = r_1 \rightarrow \phi_1(x,y) = c_1 = r$$

$S =$ دلخواه

$$v_{ss} = f(u_r, v_s, u, r, s)$$

ص ۵۱۶ س ۶

*همتای ۸۳)

*با کدام تغییر متغیر معادله داده شده به فرم کانونی تبدیل می‌شود؟

۱) ✓ $c_1 \rightarrow r$, $c_2 \rightarrow s$

۲) $c_1 \rightarrow r$, $c_2 \rightarrow s$

۳) $c_1 \rightarrow r$, $c_2 \rightarrow s$

۴) $c_1 \rightarrow r$, $c_2 \rightarrow s$

$$r^2 - 2r + \cos x = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 = \sqrt{1-\cos x} \rightarrow y = x \mp \sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\,dx + c$$

$$y = x \mp 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} + c \begin{cases} y - x + 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = c_1 = r \\ y - x - 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = c_2 = s \end{cases}$$

ص ۶۷۱، تست ۳

برق ۸۸

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

$$\Delta = 0 + 4 > 0 \rightarrow$$ هذلولی گون

۱) ۲) ۳) ۴) ✓

$$r^2 - 1 = 0 \rightarrow r = \pm 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm 1 \rightarrow y = \pm x + c$$

$$\rightarrow \begin{cases} y - x = c_1 = r \\ y - x = c_2 = s \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

* هوا فضا ۸۹)

۱) ۲) ✓

۳) ۴)

$$\Delta = 0 + 4x^2 > 0 \rightarrow$$ هذلولی گون

* حل معادله مرتبه دوم :

① معادله فقط شامل یک جمله دیفرانسیلی باشد. در این حالت با انتگرالگیری از طرفین معادله، جواب عمومی معادله بدست می آید. با این توجه که نسبت به هر متغیر انتگرال می گیریم، مقدار ثابت را تابعی بر حسب متغیر دوم در نظر می گیریم

۲۲ برق (۸۲) ص ۵۴۰ س ۲۹

فرم غلط ← چون y^2 دهست باید x^2 داشته!

۱) ×

۳) × فرم غلط ← $x\cos y$ داره

۲) ×

۴) ✓

$y=0 \rightarrow x^2$ ...
$x=1 \rightarrow 2\cos y - 1$ ×
که باید بشود $\cos y$
$y=0 \rightarrow x^2$ ✓

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}x^2y^2 + f_1(x) \rightarrow \boxed{u(x,y) = \frac{1}{6}x^3y^2 + f(x) + g(y)}$$

جواب عمومی

بین ۲ و ۴ ← چک کردن شرایط ↑

۲) اگر در یک معادله دیفرانسیل، مشتق فقط نسبت به یک متغیر وجود داشته باشد، متغیر دوم را ثابت فرض کرده و مانند یک معادله دیفرانسیل معمولی جواب عمومی معادله را بدست می‌آوریم. با این توجه که به جای پارامترهای ثابت، توابعی برحسب متغیر دوم در نظر بگیریم.

برق (۸۵)* ص ۴۹۶ س ۱۵

۱) ✓

۲) ×

۳) ×

۴) ×

$$\frac{\partial u}{\partial y} + u\,\overset{a}{tg x} = y\,\overset{b}{tg x}$$

$$y' + p(x)y = q(x) \rightarrow y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + c\right]$$

$$u = e^{-ay}\left(ye^{ay} - \frac{1}{a}e^{ay} + f(x)\right)$$

$$u = y - \cot g\, x + f(x)e^{-y\, tg\, x}$$

۳) روش جداسازی متغیرها :

فرم کلی معادلات مرتبه دوم که به روش جداسازی متغیر قابل حل هستند مطابق زیر است :

$$A(x)u_{xx} + C(y)u_{yy} + D(x)u_x + E(y)u_y + (F(x) + G(y))u =$$

$$u = XY$$

$$\begin{cases} AX'' + DX' + FX = \lambda X \Rightarrow X = \cdots \\ CY'' + EY' + GY = -\lambda Y \Rightarrow Y = \cdots \end{cases}$$

* مکانیک ۸۷) ص ۴۲۹، تست ۵۰

۲) ✓

۱)

۴)

۳)

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X \\ X(\cdot) = X(\cdot) = \end{cases} \rightarrow X'' + \cancel{\lambda} X = 0 \rightarrow X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

λ^2

$X = \sin\lambda x$

$$\begin{cases} X(0)=0 \rightarrow A=0 \\ X(1)=0 \rightarrow \underset{\neq 0}{B}\sin\lambda=0 \rightarrow \sin\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=n\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T''-T=-\lambda^2 T \\ T(0)=0 \end{cases} \rightarrow T''+(\lambda^2-1)T=0$$

کمترین مقدار λ برابر π پس $\lambda^2=\pi^2$ ← $\lambda^2-1>0$

$$\Rightarrow T=A\cos\sqrt{\lambda^2-1}\,t+B\sin\sqrt{\lambda^2-1}\,t$$

$$T(0)=0 \rightarrow A=0 \rightarrow T=\sin\sqrt{(n\pi)^2-1}\,t$$

* معادلات مرتبه دوم ضرایب ثابت

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}=0$$

$$ar^2+br+c=0 \rightarrow r_1, r_2$$

$$u=\phi_1(y+r_1x)+\phi_2(y+r_2x)$$

$r_1=r_2=r$ ریشه مضاعف $\rightarrow u=(ax+b)\phi_1(y+rx)=x\phi_1(y+rx)+\phi_2(y+rx)$

$$u=(ay+b)\phi_1(y+rx)=y\phi_1(y+rx)+\phi_2(y+rx)$$

صـ ۵۲۱ ، تست ۳۰

* برق ۸۰)

۱)

۲)

۳) ✓

۴)

$$r^2+r-2=0 \rightarrow (r-1)(r+2)=0 \begin{cases} r=1 \\ r=-2 \end{cases}$$

$$y=\phi_1(y+x)+\phi_2(y-2x)$$

صـ ۵۲۱ ، تست ۳۳

* برق ۷۷ ، مواد ۹۲ ، نفت ۹۲)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \pm 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

۱) ✓

۲)

۳)

۴)

$$r^2-2r+1=0 \rightarrow r=1$$

صـ ۵۱۷ ، تست ۱۵

* مکانیک ۸۶)

$$\Delta=1+24=25>0$$

۱) ✓

۲)

۳)

۴)

۲۴

$$r^2+r-6=0 \rightarrow (r-2)(r+3)=0 \begin{cases} r=2 \\ r=-3 \end{cases}$$

$$u=\phi_1(y+2x)+\phi_2(y-3x)$$