

**In the name of God, Most Gracious, Most Merciful**



**Sharif University of Technology**

**Department of Chemical and Petroleum Engineering**

# Fluid Mechanics 1

***Professor : D. Bastani***

## References:

### ➤ **Transport Phenomena**

Bird , Stewart & Lightfoot (chapters 1,2,3)

### ➤ **Fluid mechanics**

Streeter (chapter 2)

### ➤ **Unit Operations of Chemical Engineering**

McCabe, Smith & Harriot (chapters 1 to 5 and 8)

## Chapter 1

### تعریف سیال:

سیال ماده ای است که **تش برشی** را بدون توجه به مقدار آن، تحمل نکرده و با عاملی که تش برشی را ایجاد کرده است به طور پیوسته تغییر شکل می دهد.

$$\text{تش برشی} = \frac{\text{نیروی مماسی}}{\text{سطح}}$$

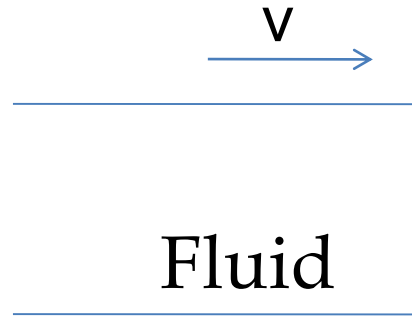
(*shear-stress*)

# Fluids

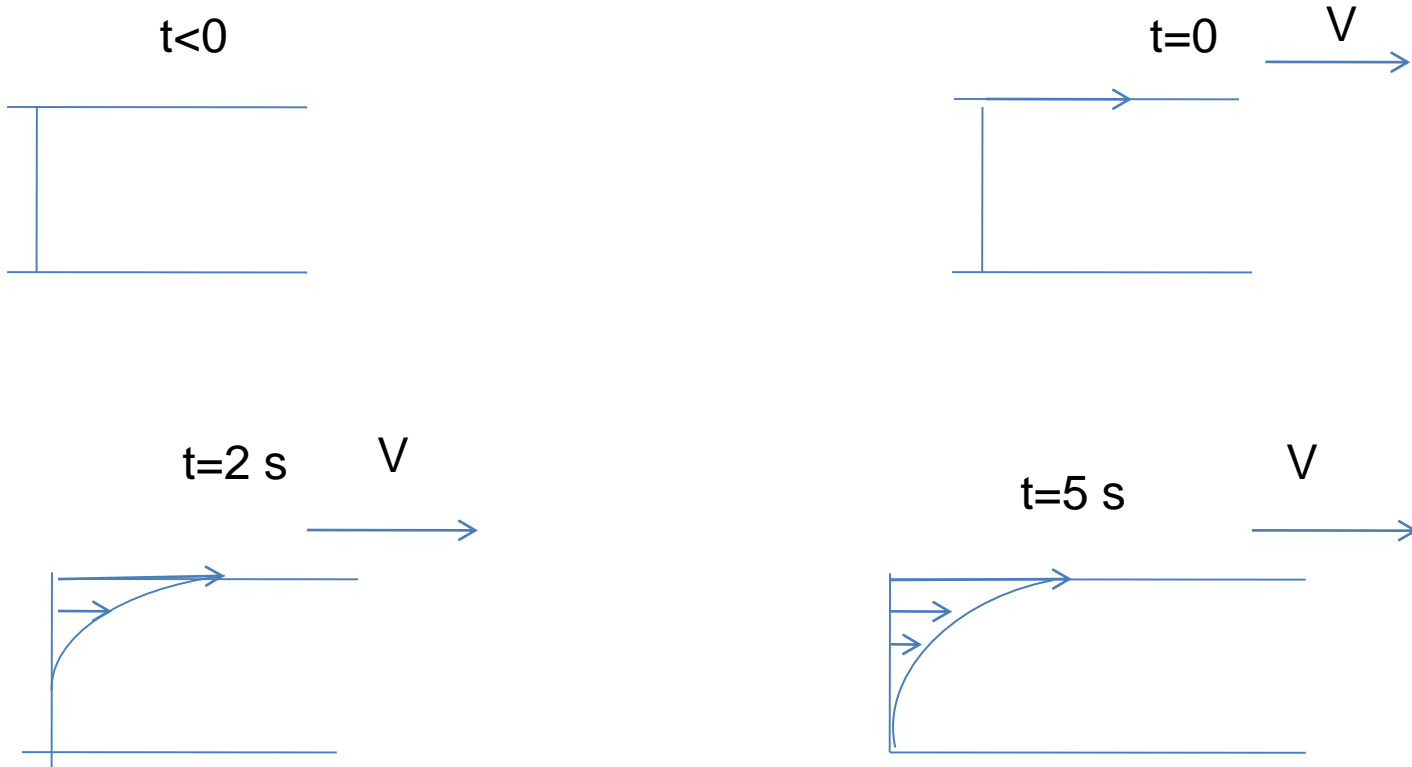
1. Compressible (تراکم پذیر)  
Like gases

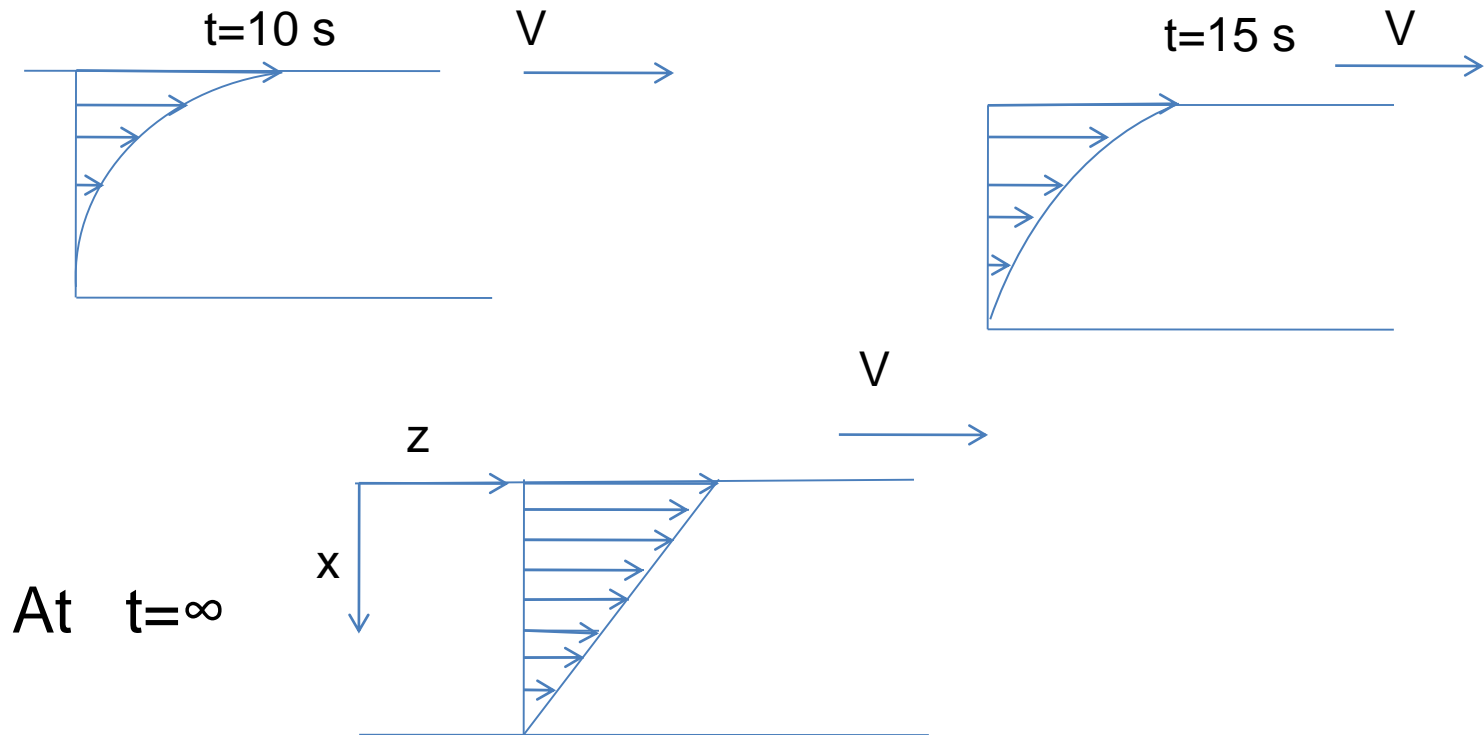
2. Incompressible (تراکم ناپذیر)  
Like liquids

مثال: سیالی بین دو صفحه می بی نهایت بزرگ موازی قرار دارد. اگر صفحه بالایی را بکشیم چه اتفاقی می افتد؟



اگر تاریخچه تغییرات سرعت را در نظر بگیریم خواهیم داشت:

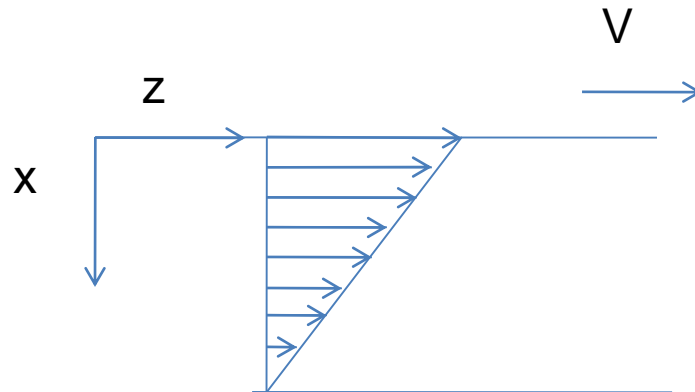




*Steady – state condition*

حالت یکپوخت - یا  $(Steady - state)$

At  $t = \infty$



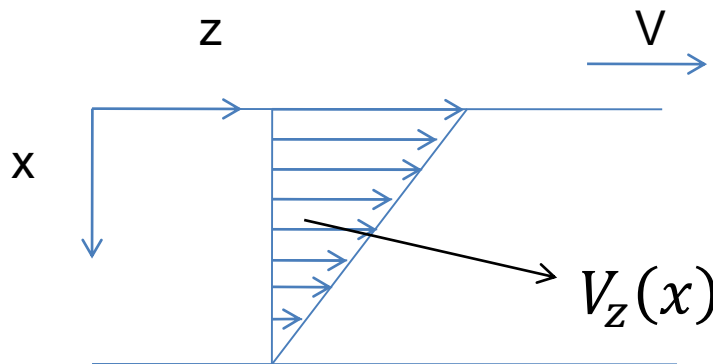
*Steady-state*

در یک فرآیند شرایطی است که هیچ یک از متغیرهای سیستم در هیچ یک از نقاط با گذشت زمان تغییر نکنند.



حال در نظر داریم به نحوه یافتن توزیع سرعت به پردازیم. بدین منظور ابتدا بررسی می‌نماییم که چه عواملی بر توزیع سرعت موثر است و هر عامل چگونه تأثیر میگذارد.

برای این مطلب به بررسی نیروی افقی  $F_Z$  که پدیدآورنده حرکت است پرداخته می‌شود.



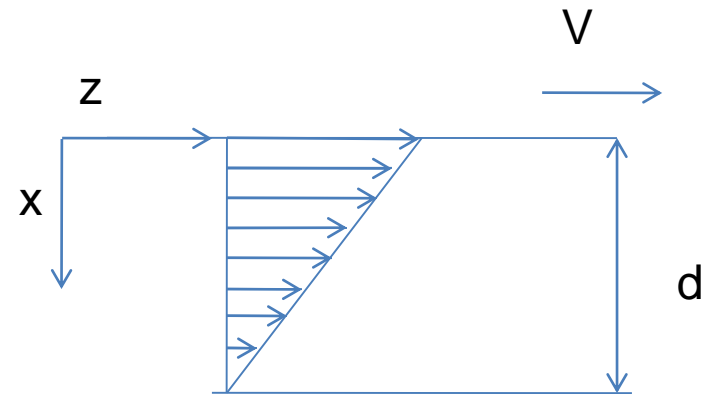
$V_z(x)$ : *Velocity Distribution*

$V_z(x)$ : *Velocity Profile*

توزیع سرعت

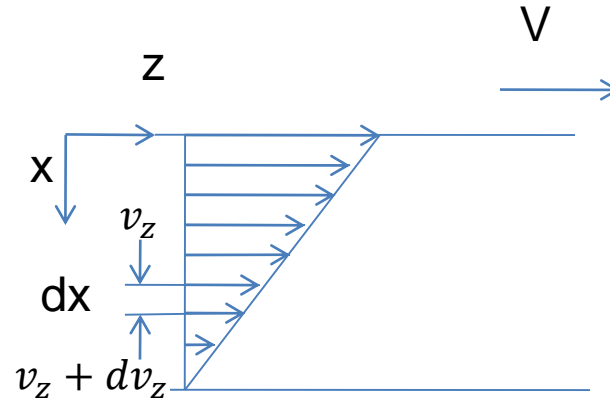
$F_z$  (نیروی برشی)

Type of fluid  
A  
V  
d

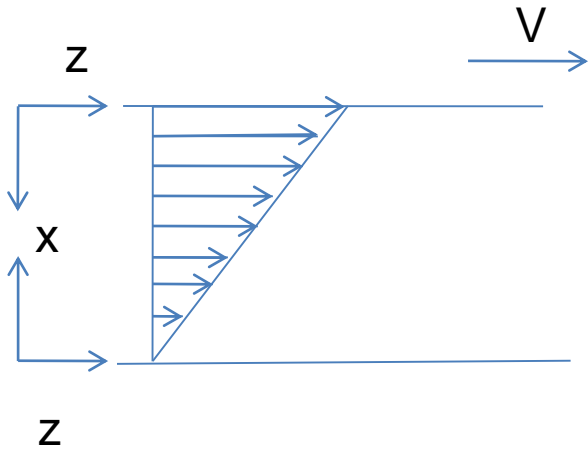


$$F_z \propto AV/d \rightarrow \frac{F_z}{A} \propto \frac{V}{d} \rightarrow \tau \propto \frac{V}{d}$$

$$\rightarrow \tau \propto \frac{V - 0}{d - 0}$$



$$\tau \propto \frac{dV_z}{dx}$$



قانون ویسکوزیته نیوتن:

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx}$$

*Viscosity* (points to  $\mu$ )

*Velocity Gradient* (points to  $\frac{dv_z}{dx}$ )

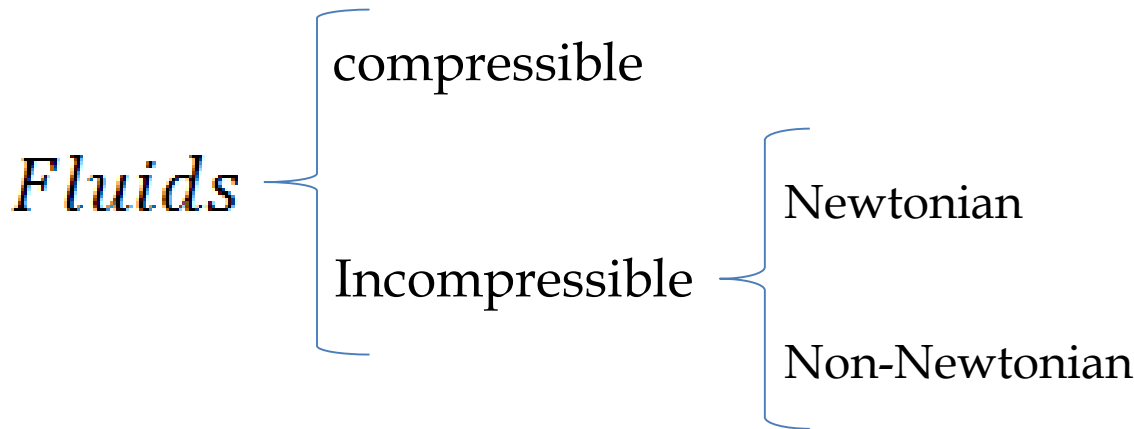
*Shear-Stress* (points to  $\tau_{xz}$ )

(ضریب چسبندگی - لزجت - کرانروی)

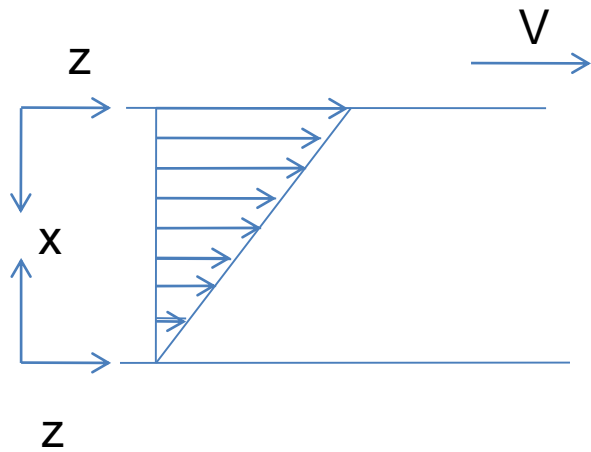
ویسکوزیته یا ضریب چسبندگی مشخصه مقاومت سیال در مقابل حرکت است.

یعنی هرچه مقاومت سیال در مقابل حرکت بیشتر باشد ویسکوزیته اش بیشتر است و بالعکس.

- ✓ اگر ویسکوزیته سیال ثابت باشد یعنی فقط تابع نوع سیال و شرایط ترمودینامیکی آن باشد، **سیال نیوتنی** و
- ✓ در غیر این صورت، **سیال غیر نیوتنی** نامیده می شود.



برای یافتن بعد و واحدهای ویسکوزیته، بایستی طرفین رابطه قانون ویسکوزیته نیوتن، یکدیگر باشند.



بعدویسکوزیت:

$$\left[ \frac{ML}{T^2} \right] = [\mu] \left[ \frac{L}{T} \right]$$

$$[\mu] = \left[ \frac{M}{LT} \right]$$

# Viscosity (units)

$$SI: \frac{kg}{m \cdot s}$$

$$CGS: \frac{gr}{cm \cdot s}$$

$$FPS: \frac{lb_m}{ft \cdot s}$$

(poise)

(واحد مرسوم ویسکوزیته)

We also use, centi-poise or (cp) which is:

$$1cp = 10^{-3} \frac{kg}{m \cdot s}$$

## *Kinematic viscosity*

$$v = \frac{\mu}{\rho}$$

$$[v] = \left[ \frac{L^2}{T} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} SI: \frac{m^2}{s} \\ CGS: \frac{cm^2}{s} \\ FPS: \frac{ft^2}{s} \end{array} \right.$$

*stokes or centi – stokes*



تأثیر درجه حرارت و فشار بر ویسکوزیته سیالات تراکم ناپذیر:

با افزایش دما ویسکوزیته کاهش پیدامی‌کند.

با افزایش فشار تغییر نمی‌کند.

تأثیر درجه حرارت و فشار بر ویسکوزیته سیالات تراکم پذیر:

با افزایش دما ویسکوزیته افزایش پیدامی‌کند.  $\mu \propto \sqrt{T}$

با افزایش فشار ویسکوزیته افزایش پیدامی‌کند.  $\mu \propto P$



Temperature $T$ (°C)	Water (liq.) <sup>a</sup>		Air <sup>b</sup>	
	Viscosity $\mu$ (mPa · s)	Kinematic viscosity $\nu$ (cm <sup>2</sup> /s)	Viscosity $\mu$ (mPa · s)	Kinematic viscosity $\nu$ (cm <sup>2</sup> /s)
0	1.787	0.01787	0.01716	0.1327
20	1.0019	0.010037	0.01813	0.1505
40	0.6530	0.006581	0.01908	0.1692
60	0.4665	0.004744	0.01999	0.1886
80	0.3548	0.003651	0.02087	0.2088
100	0.2821	0.002944	0.02173	0.2298

<sup>a</sup> Calculated from the results of R. C. Hardy and R. L. Cottington, *J. Research Nat. Bur. Standards*, **42**, 573–578 (1949); and J. F. Swidells, J. R. Coe, Jr., and T. B. Godfrey, *J. Research Nat. Bur. Standards*, **48**, 1–31 (1952).

<sup>b</sup> Calculated from “Tables of Thermal Properties of Gases,” *National Bureau of Standards Circular* **464** (1955), Chapter 2.

$$\text{mPa}\cdot\text{s} = \text{cp}$$

Gases	Temperature <i>T</i> (°C)	Viscosity $\mu$ (mPa · s)	Liquids	Temperature <i>T</i> (°C)	Viscosity $\mu$ (mPa · s)
i-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	23	0.0076 <sup>c</sup>	(C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>2</sub> O	0	0.283
SF <sub>6</sub>	23	0.0153		25	0.224
CH <sub>4</sub>	20	0.0109 <sup>b</sup>	C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	20	0.649
H <sub>2</sub> O	100	0.01211 <sup>d</sup>	Br <sub>2</sub>	25	0.744
CO <sub>2</sub>	20	0.0146 <sup>b</sup>	Hg	20	1.552
N <sub>2</sub>	20	0.0175 <sup>b</sup>	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	0	1.786
O <sub>2</sub>	20	0.0204		25	1.074
Hg	380	0.0654 <sup>d</sup>		50	0.694
			H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	25	25.54
			Glycerol	25	934.

<sup>a</sup> Values taken from N. A. Lange, *Handbook of Chemistry*, McGraw-Hill, New York, 15th edition (1999), Tables 5.16 and 5.18.

<sup>b</sup> H. L. Johnston and K. E. McKloskey, *J. Phys. Chem.*, **44**, 1038–1058 (1940).

<sup>c</sup> *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, CRC Press, Boca Raton, Fla. (1999).

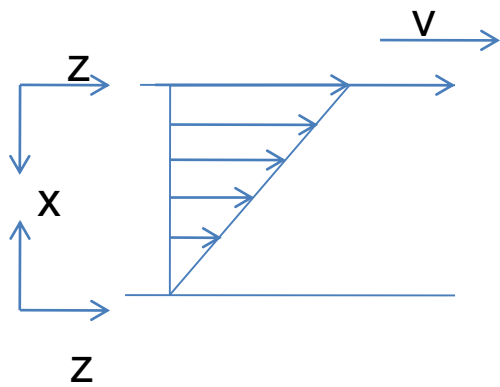
<sup>d</sup> *Landolt-Börnstein Zahlenwerte und Funktionen*, Springer (1969).

**Table 1.1-4** Viscosities of Some Liquid Metals

Metal	Temperature $T$ (°C)	Viscosity $\mu$ (mPa · s)
Li	183.4	0.5918
	216.0	0.5406
	285.5	0.4548
Na	103.7	0.686
	250	0.381
	700	0.182
K	69.6	0.515
	250	0.258
	700	0.136
Hg	-20	1.85
	20	1.55
	100	1.21
	200	1.01
Pb	441	2.116
	551	1.700
	844	1.185

Data taken from *The Reactor Handbook*, Vol. 2, Atomic Energy Commission AECD-3646, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C. (May 1955), pp. 258 *et seq.*

# Momentum Transfer :



$$\left. \begin{aligned}
 \text{Rate} &= \frac{\text{کمیت}}{\text{زمان}} \quad (\text{بهره} - \text{نرخ} - \text{میزان} - \text{سرعت}) \\
 \text{Flux} &= \frac{\text{کمیت}}{\text{زمان} \cdot \text{سطح}} \quad (\text{شار})
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\text{Rate}}{\text{Flux}} = \text{سطح}$$

$$\text{Momentum} = mv_z \quad \longrightarrow \quad \frac{d(mv_z)}{dt} = m \frac{dv_z}{dt} = ma_z = F_z$$

## More about rate of momentum transfer:

موتوم کیتی برداری است در نتیجه Rate موتوم نیز کیتی برداری است.

## Rate of momentum transfer:

□ نیروی که می تواند به واسطه انتقال موتوم اعمال شود!

□ نیروی حماسی که هر لایه با آن لایه می دیگر را می کشد! ( $F_z$ )

## More about flux of momentum transfer:

Mass flux :  $\text{Flux} = \frac{\text{کمیت}}{\text{زمان} \cdot \text{سطح}}$

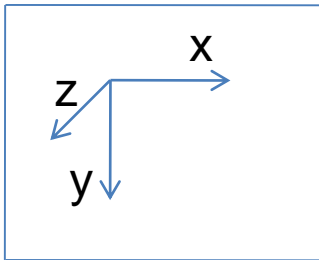
سطح عمود بر جهت انتقال است.  
جهت دارد و برداری است!

Flux جرم برداری است!

$$[\tau] = \left[ \frac{F_z}{A} \right] \quad \frac{\text{نیروی ماسی}}{\text{سطح}} \quad = \text{تشن برشی}$$

*Flux of Momentum Transfer*  $\longleftrightarrow$  تشن برشی مین لایه

ملیع در راستای عمود بر تابلو دیک کانال (راستای Z) حرکت می کند!  
آیا در جهت y تغییرات سرعت داریم؟



بلی  $\tau_{yz}$

در جهت x چگونه؟

بلی  $\tau_{xz}$

در عین اینکه حرکت در جهت Z است، در جهات X و Y تغییرات سرعت داریم.  
راجع به flux انتقال مومنتوم وقتی تغییر سرعت در راستای X است توضیح دهید.



□ تمامی کمیت‌هایی که می‌شناسیم Tensor هستند.

□ کمیت‌های اسکالر Tensor درجه‌ی صفر و کمیت‌های برداری Tensor درجه‌ی یک هستند.

□ (تش برشی) که دو راستایید در آن تعریف شود تا معنایید کند، Tensor درجه 2 است.

$3^n$  = تعداد مولفه‌های هر Tensor      n : Tensor order

*Number of components =  $3^2 = 9$*

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

# Non – Newtonian Fluids

## سیالات غیر نیوتنی

رابطه رئولوژیک (رققاری) این سیالات شبیه به سیالات نیوتنی تعریف شده است. یعنی:

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} \quad (\text{Newtonian Fluids})$$

$$\tau_{xz} = -\eta \frac{dv_z}{dx} \quad (\text{Non – Newtonian Fluids})$$

در این رابطه  $\eta$  ویسکوزیته سیال غیر نیوتنی می باشد که تابعی از نوع سیال، شرایط ترمودینامیکی و شرایط حرکت سیال (گردان سرعت و تنش برشی) می باشد. روابط خاصی که ارتباط بین ویسکوزیته سیال و عوامل ذکر شده را بیان می کند مدل رئولوژیک سیال می نامند که در ادامه به چند مدل اشاره می شود.

1) *The Bingham's Model (Bingham Plastics):*

$$\tau_{xz} = -\mu_0 \frac{dv_z}{dx} \pm \tau_0 \quad \text{if} \quad |\tau_{xz}| > \tau_0 \quad \text{and}$$

$$\frac{dv_z}{dx} = 0 \quad \text{if} \quad |\tau_{xz}| < \tau_0$$

$\tau_0$  : *Yield Stress*      تنش تسلیم

که در آن  $\tau_0$  تنش تسلیم و  $\mu_0$  ویسکوزیته سیال پس از به حرکت درآمدن آن می باشد.

این مدل برای شربت های تشکیل شده از ذرات بسیار ریز (Suspensions of fine particles)، خمیرها و مذاب پلاستیک ها مناسب است.

2) *The Ostwald – de – Waele Model (Power Law Model):*

$$\tau_{xz} = -m \left| \frac{dv_z}{dx} \right|^{n-1} \frac{dv_z}{dx}$$

In which **m** and **n** are the model's parameters.

For **n = 1**, it reduces to Newton's law of viscosity with  $m = \mu$  ;

thus the deviation of  $n$  from unity indicates the degree of deviation from Newtonian behavior.

For  $n < 1$  behavior is pseudoplastic :  $\frac{dv_z}{dx} \uparrow \mu \downarrow$  شبه پلاستیک

For  $n > 1$  behavior is dilatant:  $\frac{dv_z}{dx} \uparrow \mu \uparrow$  غیر قابل اتساع

## Velocity Distribution in Laminar Flow :

(توزیع سرعت در جریان آرام)

فرض نهفته در عنوان، آرام بودن جریان

است!!

جریان آرام : جریانی است که در آن سیال فقط به صورت لایه لایه حرکت می کند و لایه ها

جابجانشده و یا با یکدیگر ادغام نمی شوند.

✓ قدم های لازم برای بدست آوردن توزیع سرعت:

:( مثل حالت یکمواخت سیال تراکم پذیر سیال نوتونی و... )

1. مشخص نمودن فرضیات

2. انتخاب نمودن محورهای مختصات مناسب:

3. انتخاب یک جزء کوچک ( المنت

Element ) مناسب و نخواه از سیستم

4. نوشتن موازنه ی موشنوم بر روی المنت در جهت حرکت:

ادامه چند صفحه بعد .

(اصلی ترین مرحله)

## Mass Balance:

*Overall Material Balance:*

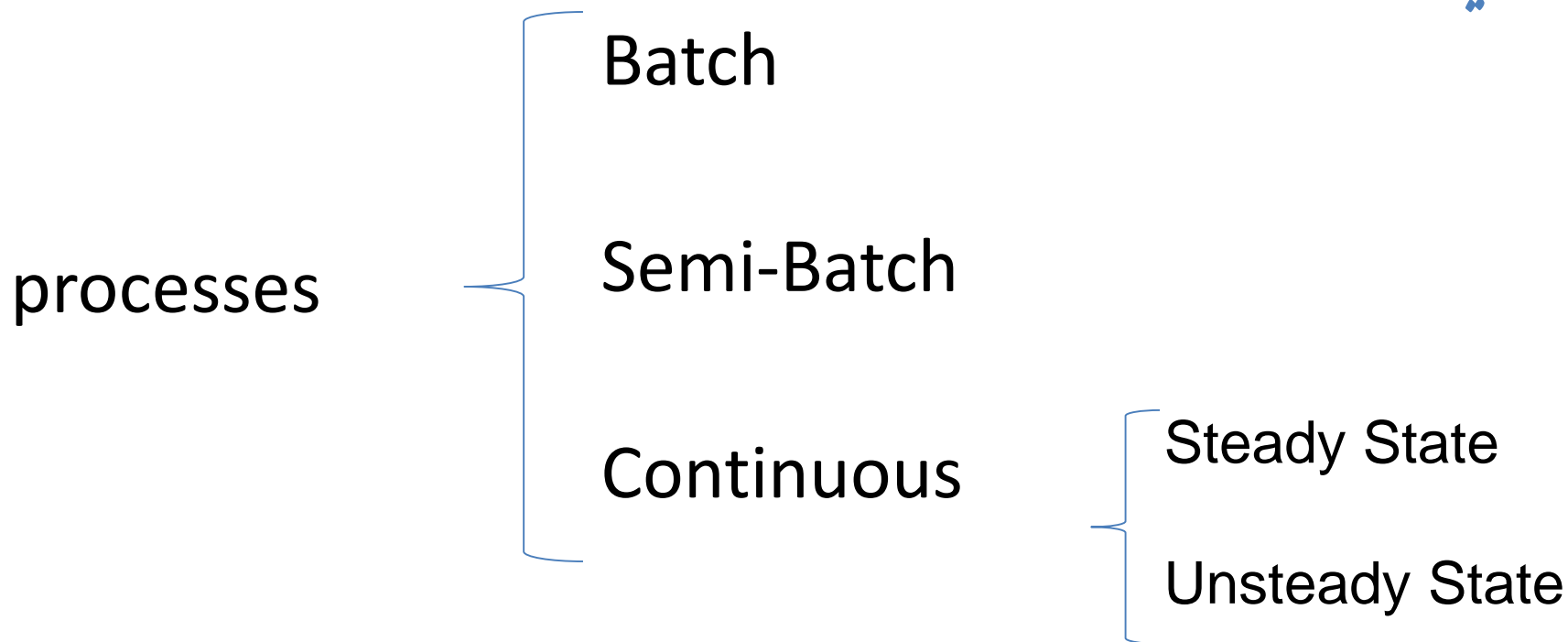
*Input – Output = Accumulation*

*Specific Material Balance:*

*Input - Output + Generation - Consumption = Accumulation*



انواع فرآیندها:



## موازنه مومنتوم:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Rate of} \\ \text{Momentum} \\ \text{In} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Rate of} \\ \text{Momentum} \\ \text{Out} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{Sum of} \\ \text{Acting} \\ \text{Forces} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Rate of} \\ \text{Accumulation} \\ \text{of} \\ \text{Momentum} \end{array} \right\}$$

سرعت ذخیره مومنتوم = مجموع نیروهای موثر + سرعت مومنتوم خروجی - سرعت مومنتوم ورودی

## مراحل بعدی بدست آوردن توزیع سرعت:

- 5. به دست آوردن معادله دیفرانسیل توزیع تنش برشی
- 6. حل معادله دیفرانسیل بند 5 و به دست آوردن فرم توزیع تنش برشی
- 7. به دست آوردن معادله دیفرانسیل توزیع سرعت با توجه به نوع سیال
- 8. حل معادله دیفرانسیل بند 7 و به دست آوردن فرم توزیع سرعت
- 9. تعیین ثوابت عددی با توجه به شرایط سرحدی (Boundary Conditions)

شرایط سرحدی:

بیان واقعیت های فیزیکی موجود در مرزهای سیستم.

تعریف ریاضی:

بیان مقدار تابع به ازای مقادیر خاصی از متغیر

## مداول ترین شرایط سرحدی:

۱. در مرز مشترک جدار- سیال، سرعت سیال برابر با سرعت جداره جدار است. به عبارتی سیال

به جداره چسبیده و لیز نمی خورد. (No slip on the wall)

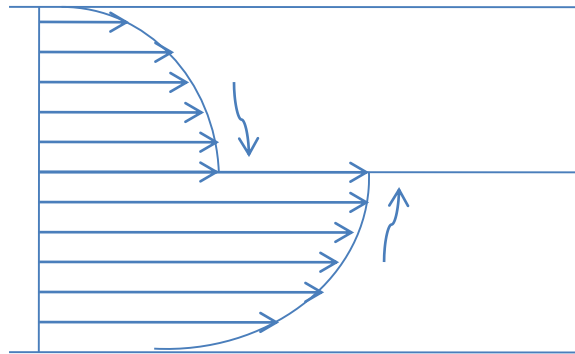
۲. در مرز مشترک گاز- مایع تنش برشی بسیار به صفر نزدیک است. به عبارتی حرکت گاز تا میز می بر

مایع ندارد و بالعکس.

۳. در مرز مشترک مایع- مایع در راستای عمود بر فاصل مشترک توزیع سرعت و تنش برشی توابعی

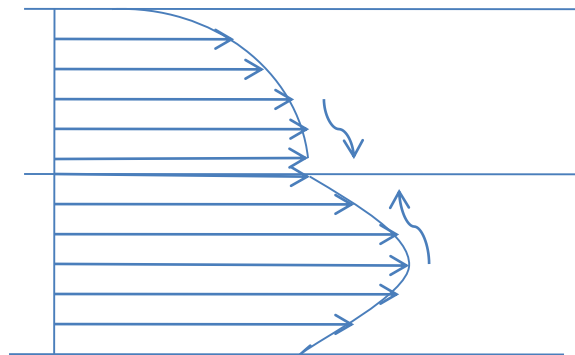
پیوسته هستند. به عبارتی سرعت و تنش در فاصل مشترک برابرند.

## مثالی برای مرز مشترک ملایع-ملایع:



نفت

آب



نفت

آب

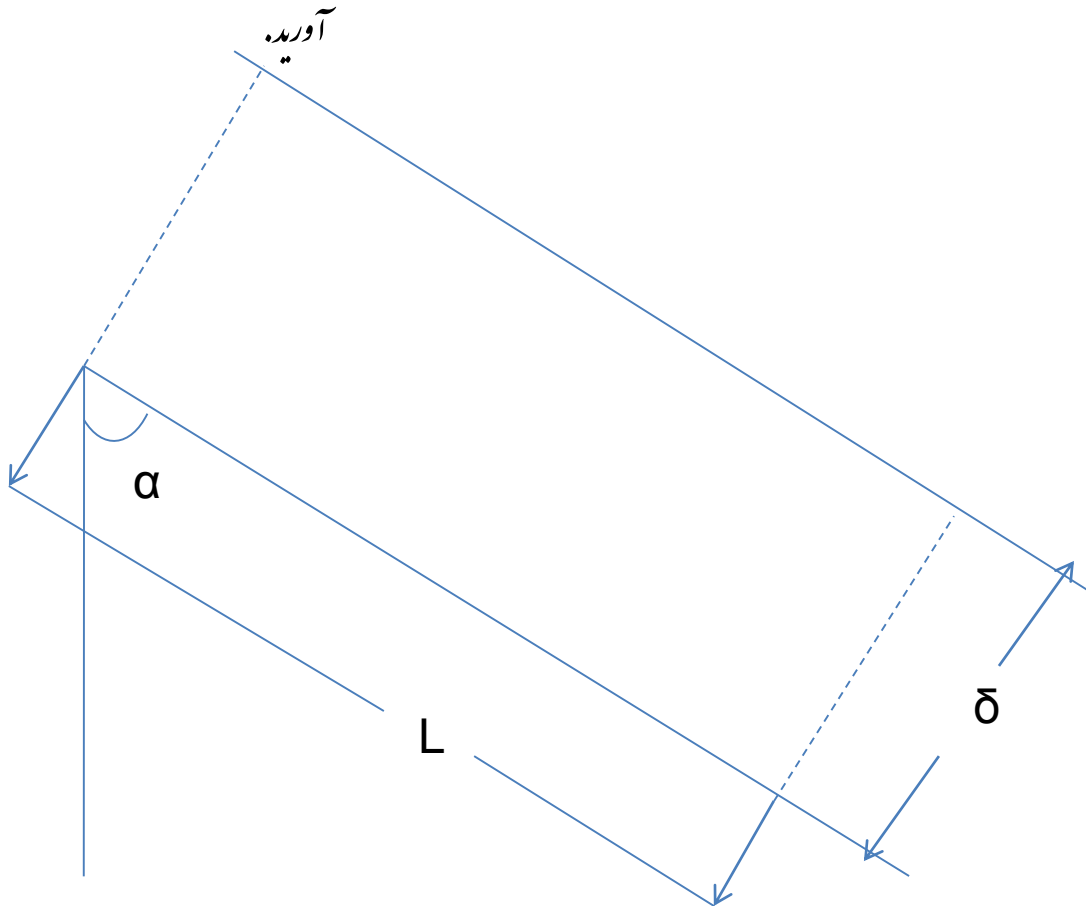
- ❖ نمی تواند درست باشد. زیرا از دو طرف که به فصل مشترک نزدیک می شویم سرعت برابر نیستند و این مغایر پیوستگی در نقطه مرز است.
- ❖

- ❖ این توزیع سرعت می تواند درست باشد چون در فصل مشترک توزیع سرعت پیوسته است.
- ❖

# Falling liquid Film

مثال اول:

1. یک فیلم بسیار نازک از یک مایع، بر روی سطح شیب داری که به صورت مایل قرار گرفته و بار استاتی قائم زاویه  $\alpha$  تشکیل می دهد در جریان است. طول صفحه  $L$  عرض آن  $W$  و ضخامت سیال  $\delta$  است. توزیع تنش برشی و سرعت را در این مایع بدست آورید.



# روش حل مسئله:

## • اولین اقدام تعیین دقیق فرضیات:

1. حالت یکنواخت (تغییرات زمانی کلیه کمیات برابر با صفر است).

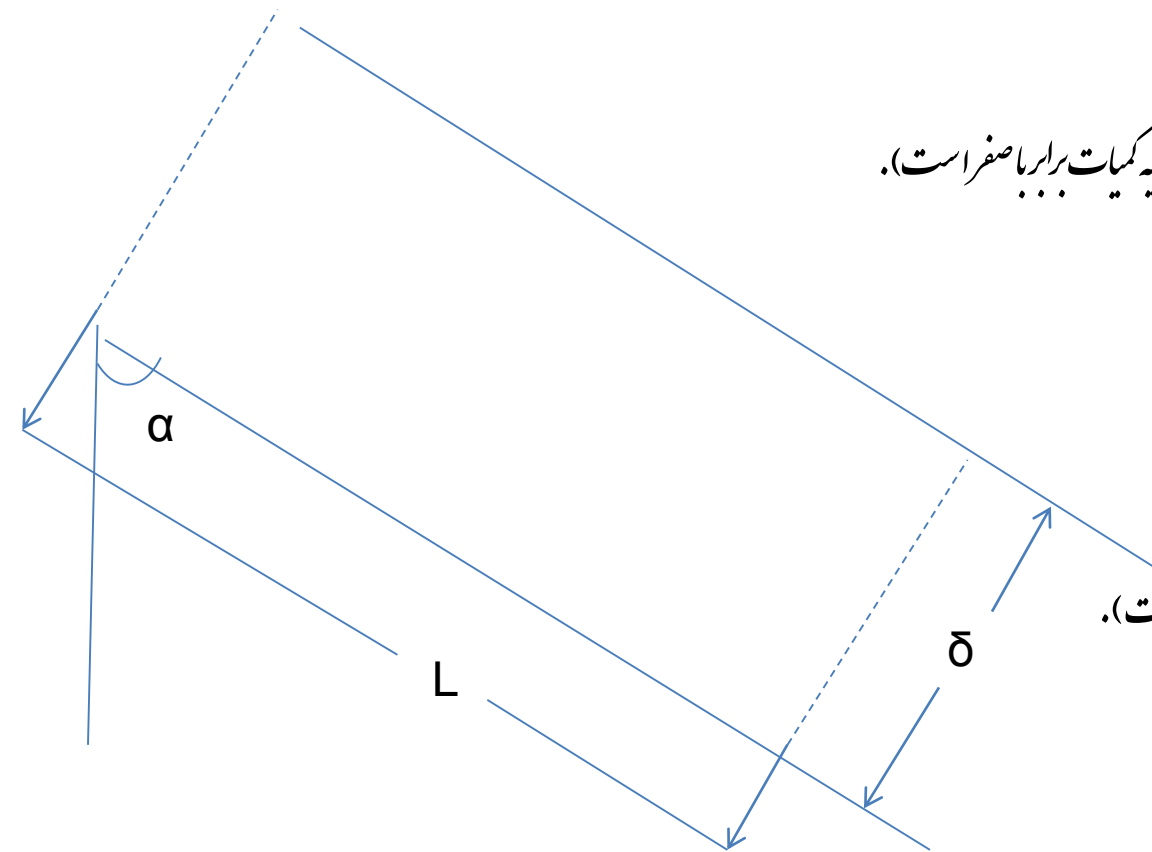
2. جریان آرام.

3. حرکت یک بعدی.

4. خواص فیزیکی ثابت (دانشیه و ویسکوزیته ثابت).

5. سیال نیوتنی.

6. آثار لبه ای ناچیز.

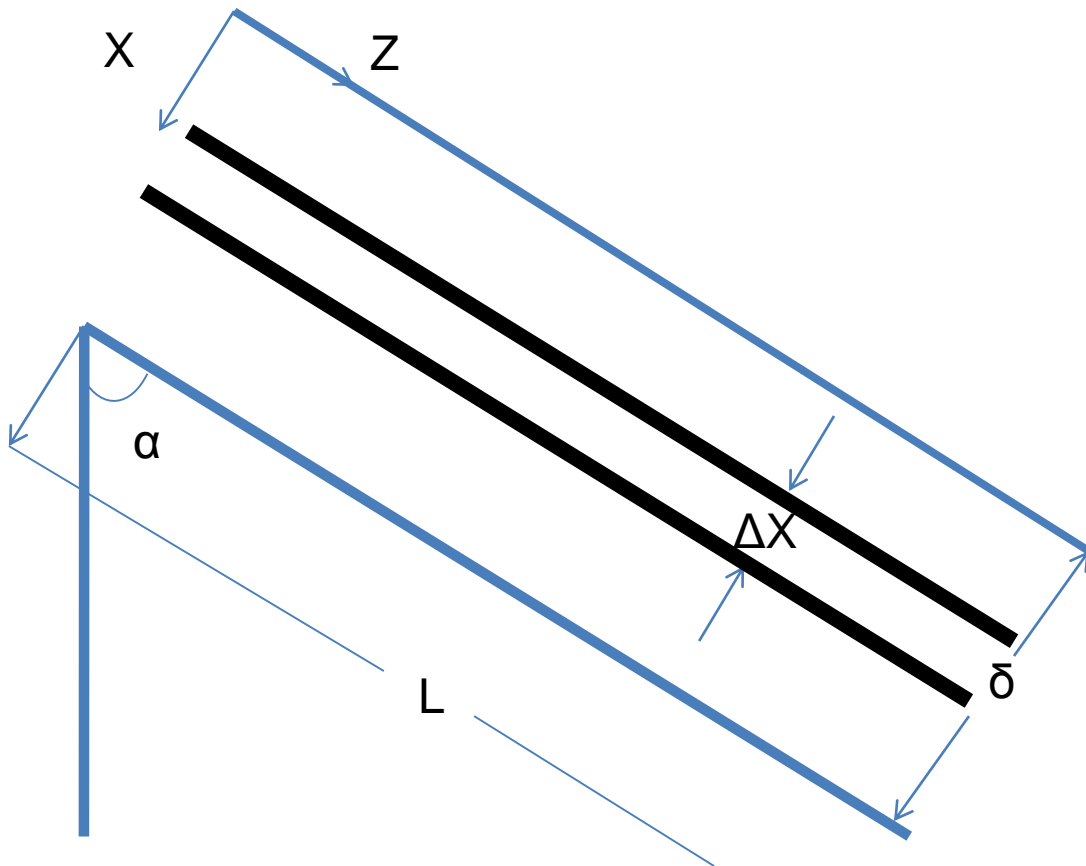




• تعیین محورهای مختصات

• انتخاب المنت مناسب

(هرچه ممکن است ساده تر و متناسب با صورت مسئله)



Conduction

Convection

Radiation

مکانیزم های مختلف انتقال حرارت:

Molecular

Convective

مکانیزم های مختلف انتقال موثوم:

سرعت ذخیره مومنتوم = مجموع نیروهای موثر + سرعت مومنتوم خروجی - سرعت مومنتوم ورودی

Rate of z-momentum in  
Across surface at  $x$

$$\tau_{xz} \cdot (LW) \Big|_x$$

Rate of z-momentum  
out across surface at  
 $x+\Delta x$

$$-\tau_{xz} \cdot (LW) \Big|_{x+\Delta x}$$

Rate of z-momentum  
In across surface at  
 $z=0$

$$+\rho(w\Delta x v_z) v_z \Big|_{z=0}$$

Rate of z-momentum out  
across surface at  $z=L$

$$-\rho(w\Delta x v_z) v_z \Big|_{z=L}$$

$$(\tau_{xz} \cdot LW) \Big|_x - (\tau_{xz} \cdot LW) \Big|_{x+\Delta x}$$

$$+\rho(W\Delta xv_z)v_z \Big|_{z=0} - \rho(W\Delta xv_z)v_z \Big|_{z=L}$$

$$+\rho(LW\Delta x)g\cos\alpha = \frac{\partial(mv_z)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho LW\Delta xv_z)}{\partial t} =$$

$$\rho LW\Delta x \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

## Element Mass Balance:

$$\rho(W\Delta xv_z) \Big|_{z=0} = \rho(W\Delta xv_z) \Big|_{z=L} \rightarrow (v_z) \Big|_{z=0} = (v_z) \Big|_{z=L}$$

$$\rightarrow (\tau_{xz} \cdot LW) \Big|_x - (\tau_{xz} \cdot LW) \Big|_{x+\Delta x} + \rho(LW\Delta x)g\cos\alpha = 0$$

$$\div LW\Delta x \rightarrow \frac{(\tau_{xz}) \Big|_x - (\tau_{xz}) \Big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \rho g\cos\alpha = 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \rightarrow -\frac{d\tau_{xz}}{dx} + \rho g\cos\alpha = 0 \rightarrow \frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g\cos\alpha$$

$$\rightarrow \tau_{xz} = (\rho g\cos\alpha)x + c_1 \quad \text{B.C.1 at } x = 0 \quad \tau_{xz} \approx 0$$

$$\rightarrow c_1 = 0 \rightarrow \tau_{xz} = (\rho g\cos\alpha)x$$

$$\rightarrow \tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} = (\rho g\cos\alpha)x \rightarrow v_z = -\frac{\rho g\cos\alpha}{2\mu} x^2 + c_2$$

$$B.C.2 \quad \text{at } x = \delta \quad v_z = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = \frac{\rho g \delta^2 \cos \alpha}{2\mu}$$

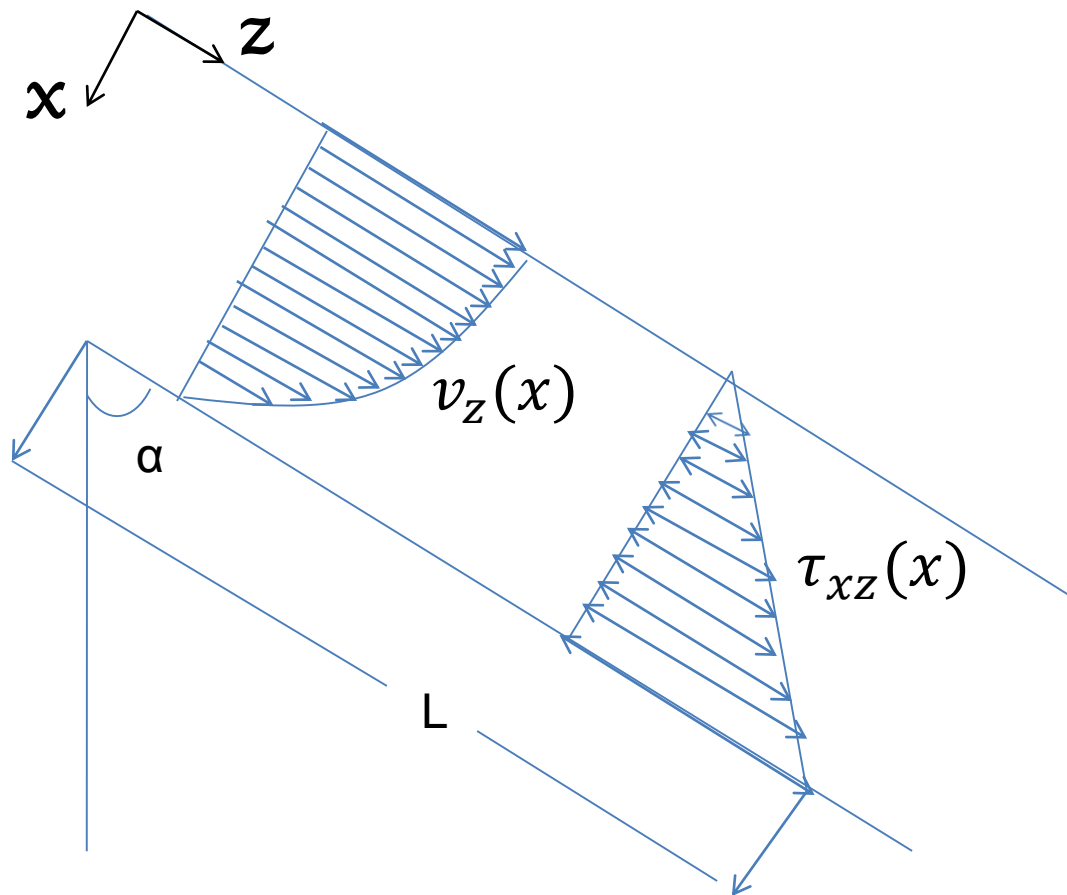
$$\rightarrow \quad v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \alpha}{2\mu} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \quad \& \quad \tau_{xz} = (\rho g \cos \alpha) x$$

1: ماکزیم سرعت کجا اتفاق می افتد؟

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad v_z = v_{z,max} \quad \rightarrow \quad v_{z,max} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \alpha}{2\mu}$$

$$v_z = v_{z,max} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$

Velocity profile



## 2) Volumetric flow rate (دبی حجمی)

$$dQ = v_z dx dy$$

$$Q = \int_0^W \int_0^\delta v_z dx dy = \int_0^W \int_0^\delta \frac{\rho g \delta^2 \cos \alpha}{2\mu} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] dx dy =$$

$$W \int_0^\delta \frac{\rho g \delta^2 \cos \alpha}{2\mu} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] dx = \frac{\rho g W \delta^3 \cos \alpha}{3\mu}$$

$$Q = \frac{\rho g W \delta^3 \cos \alpha}{3\mu}$$



### 3) Average velocity

$$\langle v_z \rangle = \bar{v}_z$$

$$\bar{v}_z = \frac{Q}{A} = \frac{\int_0^W \int_0^\delta v_z dx dy}{\int_0^W \int_0^\delta dx dy} = \frac{\frac{\rho g W \delta^3 \cos \alpha}{3\mu}}{\delta W} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \alpha}{3\mu} = \frac{2}{3} v_{z,max}$$

4)  $F_z$

$$F_z = (\tau_{xz}) \Big|_{x=\delta} LW = (\rho g \cos \alpha) \delta LW = \rho(LW\delta) g \cos \alpha$$

مولفه ی نیروی وزن در جهت حرکت

مکلیف: دستگاه محورهای مختصات را بر روی صفحه قرار داده و توزیع تنش برشی و سرعت، سرعت ماکزیمم،

دبی حجمی، سرعت متوسط و نیروی جهت حرکت سیال را بدست آورید.

سوال: چگونه می توان از آرام بودن سیال اطمینان یافت؟

می توانیم مقدار دبی حجمی بدست آمده از فرمول رابادبی حجمی اندازه گیری شده از طریق آزمایش با اندازه گیری زمان و حجم معینی

از سیال) مقایسه نماییم.

# Reynold's Number

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v}_z l}{\mu}$$

$$N_{Re} = \frac{4\rho \bar{v}_z \delta}{\mu}$$

- $l$  : Characteristic Length
- $\rho$  : Fluid density
- $\mu$  : Fluid viscosity
- $v_z$  : Fluid average velocity

در جریان سیالات ازروی صفحات

if  $N_{Re} < 4$  to 25  $\rightarrow$  laminar flow

if  $25 < N_{Re} < 1000$  to 2000  $\rightarrow$  laminar flow with Rippling

if  $N_{Re} > 2000 \rightarrow$  Turbulent flow

اگر دبی حجمی را داشته باشیم و ضخامت فیلم مایع را بخواهیم میتوانیم از رابطه زیر استفاده نماییم:

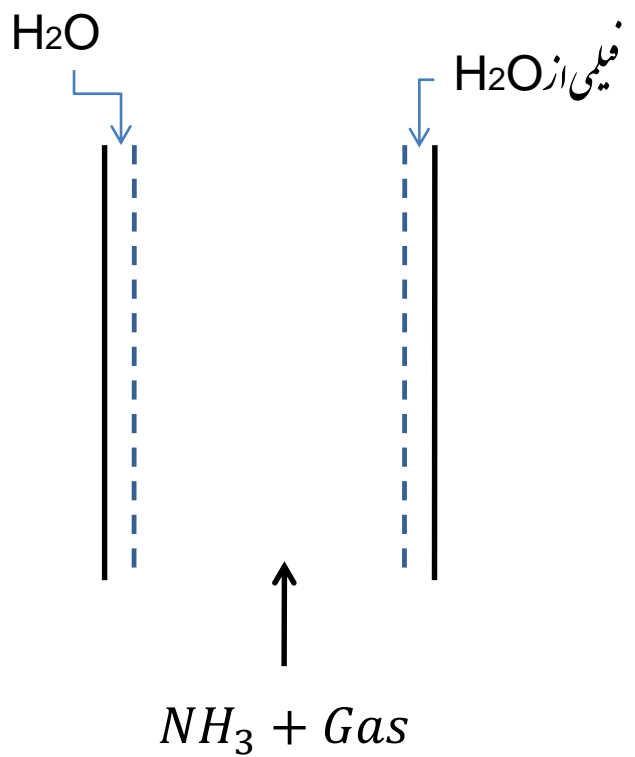
$$Q = \frac{\rho g W \delta^3 \cos \alpha}{3\mu} \quad \rightarrow \quad \delta = \left( \frac{3\mu Q}{\rho g W \cos \alpha} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\dot{m} = \rho Q \quad \Gamma = \frac{\dot{m}}{W} \quad \delta = \left( \frac{3\mu \Gamma}{\rho^2 g \cos \alpha} \right)^{\frac{1}{3}}$$

کاربرد:

$\delta$

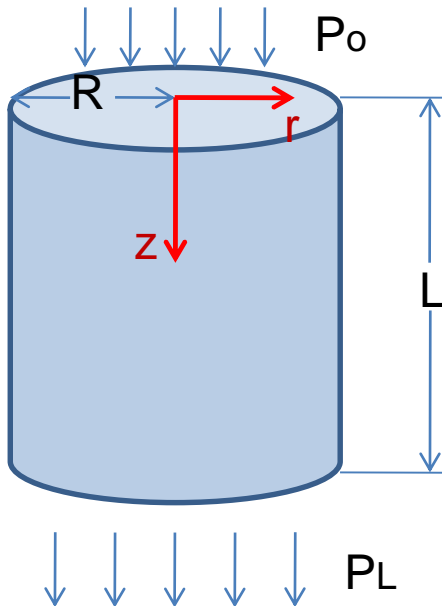
باید چند باشد تا بیشترین مقدار آمونیاک ممکن جذب آب شود؟



# Velocity profile in circular Tubes:

توزیع سرعت در لوله ها

سوال: سیال تراکم نپذیری با فشار  $p_0$  به یک لوله با طول  $L$  و شعاع  $R$  وارد شده و با فشار  $p_L$  آن را ترک می نماید. توزیع تنش برشی و سرعت را در سیال بدست آورید.



1- فرضیات مانند مثال قبل می باشد.

2- محورهای مختصات استوانه ای می باشد.

$$(\tau_{rz}2\pi rL)|_r - (\tau_{rz}2\pi rL)|_{r+\Delta r}$$

$$+\rho(2\pi r\Delta rV_z)V_z|_{z=0} - \rho(2\pi r\Delta rV_z)V_z|_{z=L}$$

$$+(2\pi r\Delta rP)|_{z=0} - (2\pi r\Delta rP)|_{z=L} + \rho(2\pi r\Delta rL)g$$

$$= \frac{\partial(mV_z)}{\partial t} = \frac{\partial(2\pi r\Delta rL\rho V_z)}{\partial t} = 2\pi r\Delta rL\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} \right) = 0$$

موازنة جرم المنت

$$\rho(2\pi r\Delta rV_z)|_{z=0} = \rho(2\pi r\Delta rV_z)|_{z=L} \rightarrow (V_z)|_{z=0} = (V_z)|_{z=L}$$



$$\div 2\pi\Delta rL \rightarrow \frac{(r\tau_{rz})|_r - (r\tau_{rz})|_{r+\Delta r}}{\Delta r} + \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)r = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)r$$

$$\rightarrow r\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)\frac{r^2}{2} + c_1$$

$$\div r \neq 0 \rightarrow \tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)\frac{r}{2} + \frac{c_1}{r}$$

$$B.C.1 \quad \text{at } r \approx 0 \quad \tau_{rz} = \text{finite} \quad \rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$\rightarrow \tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)\frac{r}{2}$$

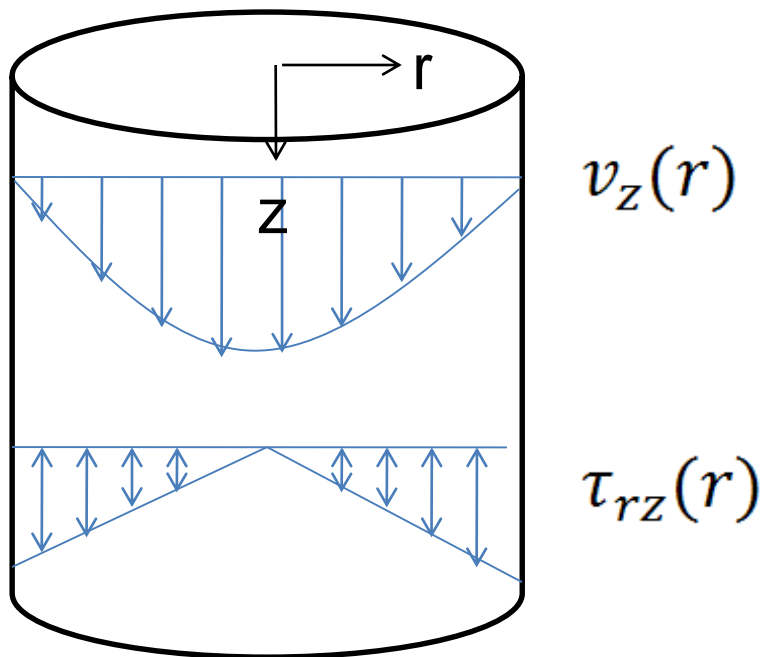
$$\rightarrow \tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) \frac{r}{2}$$

$$\rightarrow v_z = -\frac{\left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right)}{4\mu} r^2 + c_2$$

$$B.C.2 \text{ at } r = R \quad v_z = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = \frac{\left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) R^2}{4\mu}$$

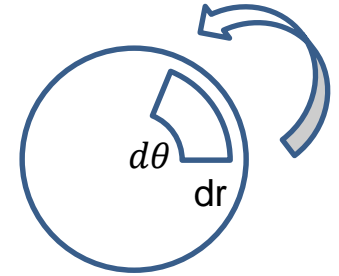
$$\rightarrow v_z = \frac{\left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) R^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad \& \quad \tau_{rz} = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) \frac{r}{2}$$

$$V_{z,max} = \frac{\left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) R^2}{4\mu} \quad \& \quad v_z = v_{z,max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$



2) Volumetric flow rate  $Q$  :

$$dQ = v_z dA = v_z (r d\theta) dr = v_z r dr d\theta$$



$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g) R^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] r dr d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^R \frac{(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g) R^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] r dr = \frac{\pi R^4 (\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g)}{8\mu}$$

$$Q = \frac{\pi R^4 (\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g)}{8\mu}$$

Hagen-Poiseuille Equation

3)  $\bar{v}_z$ 

$$\bar{v}_z = \frac{Q}{A} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} = \frac{\pi R^4 \left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right)}{\pi R^2}$$

$$\rightarrow \bar{v}_z = \frac{\left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) R^2}{8\mu}$$

$$\bar{v}_z = \frac{1}{2} v_{z,max}$$

$$v_{z,max} = 2\bar{v}_z$$

$$4) F_z = (\tau_{rz}) \Big|_{r=R} \times 2\pi RL$$

$$\rightarrow F_z = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) \frac{R}{2} \times 2\pi RL =$$

$$(P_0 - P_L)\pi R^2 + (\pi R^2 L)\rho g$$

$$Q = \frac{\pi R^4 \left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right)}{8\mu}$$

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v}_z D}{\mu}$$

$N_{RE} < 2100$	laminar flow	جرمان آرام
$2100 < N_{RE} < 4000$	Transition flow	جرمان گذرا
$N_{RE} > 4000$	Turbulent flow	جرمان درهم

# Ostwald's Viscometer





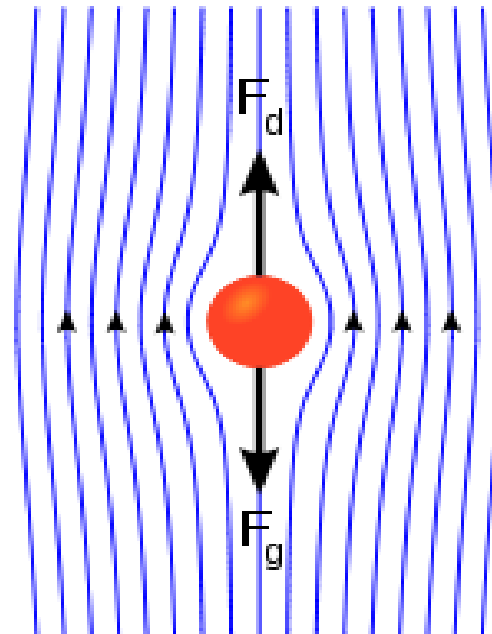
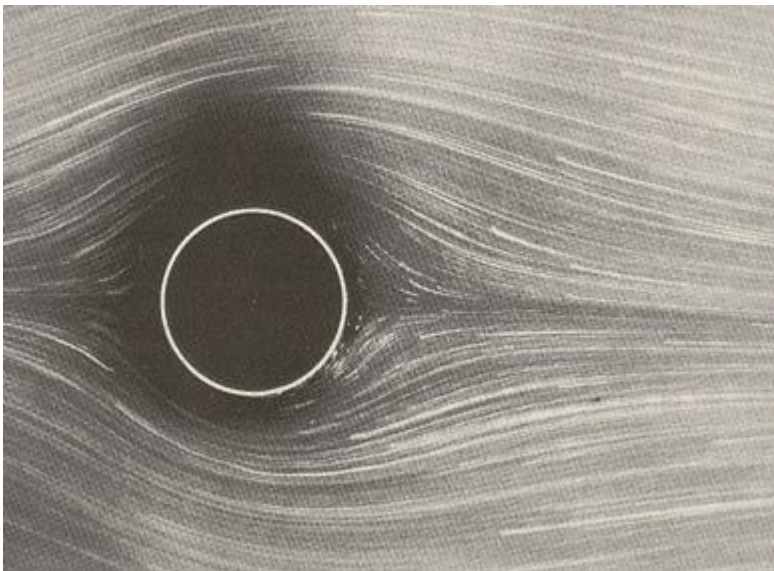
# Creeping flow Around a solid sphere

حرکت خزشی یک اطراف کره جامد

سوال: سیال تراکم ناپذیری با سرعت  $u_{\infty}$  به یک کره ای جامد با شعاع  $R$  نزدیک شده به آن برخورد می کند و به صورت خزشی از اطراف کره عبور می کند.

نیروی راکت سیال در راستای حرکتش به کره اعمال می کند محاسبه کنید.

$u_{\infty}$  : Approaching velocity



# Creeping flow Around a solid sphere

حرکت خزشی یک اطراف کره جامد

حرکت خزشی چه نوع حرکتی است؟

بر خورد یک نوع روغن سنگین به یک ساچمه را تصور کنید

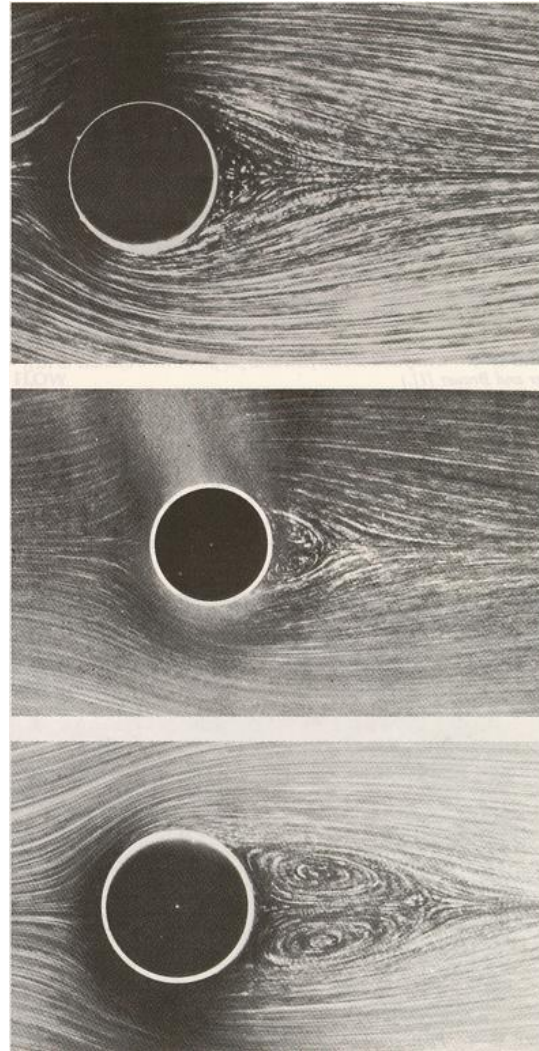
برای سیالی با ویسکوزیته و دانسیته معین چنانچه شرط زیر برقرار باشد، حرکت خزشی است.

$$N_{Re,p} = \frac{\rho u_{\infty} D_p}{\mu} < 0.1$$

$D_p$  قطر کره

# Creeping flow Around a solid sphere

Turbulent Flow:



## روش حل مسئله:

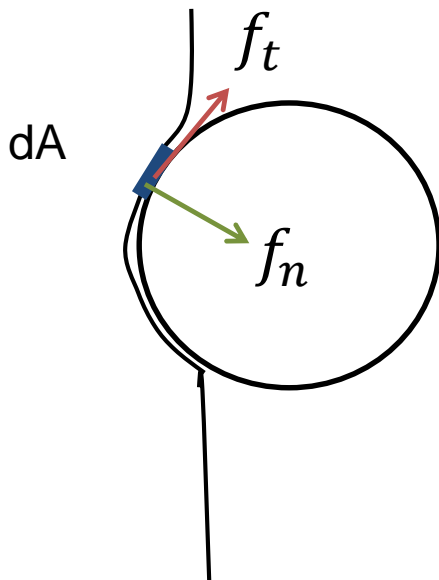
مراحل بدست آوردن توزیع سرعت و تنش و نیرو را برای جریان خزشی همانند جریان یک بعدی دنبال می‌کنیم:

1 - فرضیات: جریان خزشی، سیال نیوتونی، حرکت یکساخت، حرکت دوبعدی، خواص فیزیکی ثابت

2 - انتخاب محورهای مختصات: مختصات کروی  $(r, \theta, \varphi)$

3 - انتخاب المنت:

$dA$  را روی سطح کره اختیار می‌کنیم. به این المنت دو نیروی  $f_t$  و  $f_n$  وارد می‌شود.



$f_t = \text{Tangential Force}$

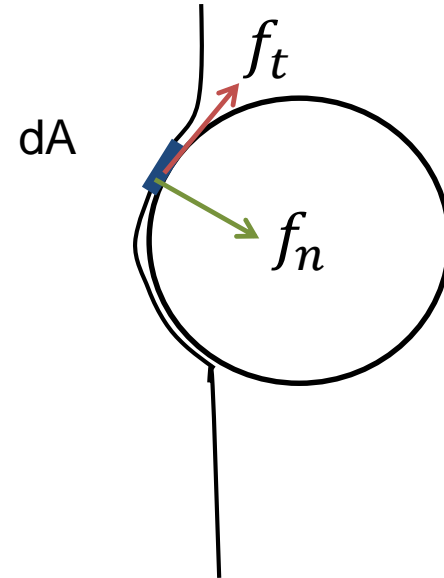
$f_n = \text{Normal Force}$

$f_t$ : نیرویی است که از درگیری سیال و دیواره جامد

حاصل می شود و نشان آن تنش برشی است (از جنس نیروی

اصطلاحاتی است).

$f_n$ : از نیروهای فشاری حاصل می شود.



$$f_t = (\tau_{r\theta}) \big|_{r=R} dA$$

$$f_n = (p) \big|_{r=R} dA$$

بدلیل وجود دور استای حرکتی و تغییرات سرعت در هر دو جهت حداقل 4 مولفه‌ی

$\tau$  خواهیم داشت:

$$\tau_{rr}, \tau_{\theta r}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta\theta}$$

بدلیل آرام بودن بیش از حد سیال تنها مورد قابل توجه  $\tau_{r\theta}$  می باشد، چون ماس بر سطح کره در استای  $\theta$  اصطکاک داریم.

(Page 57)

توزیع تنش برشی و فشار در سیال از روابط زیر بدست می آید.

$$\tau_{r\theta} = \frac{3\mu u_{\infty}}{2R} \left(\frac{R}{r}\right)^4 \sin\theta$$

$$p = p_0 - \rho g z - \frac{3\mu u_{\infty}}{2R} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta$$

معادلات مربوطه:  $\tau_{r\theta}, p, V_\theta, V_r$

$$\tau_{r\theta} = \frac{3\mu u_\infty}{2R} \left(\frac{R}{r}\right)^4 \sin\theta$$

$$p = p_0 - \rho g z - \frac{3\mu u_\infty}{2R} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta$$

$$(\tau_{r\theta})|_{r=R} = \frac{3\mu u_\infty}{2R} \sin\theta$$

$$(p)|_{r=R} = p_0 - \rho g R \cos\theta - \frac{3\mu u_\infty}{2R} \cos\theta$$



$$F_t = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [(\tau_{r\theta})|_{r=R} \sin\theta] dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [(\tau_{r\theta})|_{r=R} \sin\theta] R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\rightarrow F_t = 4\pi R\mu u_\infty \quad \text{Friction Drag}$$

نیروی کششی که به واسطه ی اصطکاک اتفاق می افتد Friction drag

$$F_n = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [(-p)|_{r=R} \cos\theta] dA$$

$$F_n = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [(-p)|_{r=R} \cos\theta] R^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 2\pi R\mu u_\infty$$

$$F_n = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g \text{ (Buoyancy or Buoyant force)} + 2\pi R\mu u_\infty \text{ (Form Drag)}$$



$$\rightarrow F = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g + 6\pi R\mu u_\infty$$

$$F = F_B + F_D$$

$$F_D = 6\pi R\mu u_\infty \quad \textit{Stoke's Law}$$

*F<sub>D</sub>: Drag Force*

*F<sub>B</sub>: Buoyant Force*

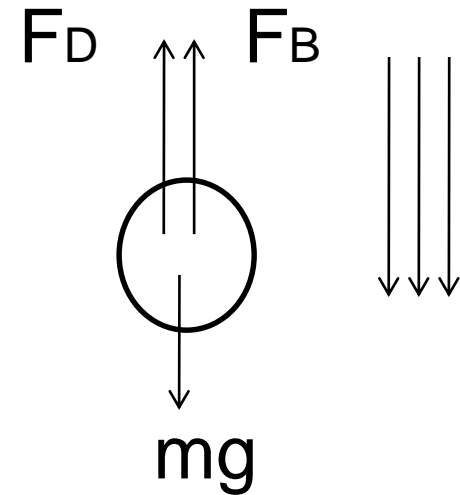
جسمی با جرم  $m$  با چگالی  $\rho_p$  در سیالی با چگالی  $\rho_f$  ویسکوزیته  $\mu$  در حال حرکت است. در نظر  
 است نحوه حرکت آن را بررسی نماییم.

- $m$ : mass of particle
- $\rho_p$ : density of particle
- $\rho_f$ : fluid's density
- $R$ : particle's radius
- $\mu$ : fluid's viscosity

$$\sum F = ma$$

$$mg - F_B - F_D = ma$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p g - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_f g - 6\pi R \mu u = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p \frac{du}{dt} \quad \rightarrow \quad u = u(t)$$



$$\text{If } \frac{du}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad u = u_t = \frac{2R^2(\rho_p - \rho_f)g}{9\mu}$$

$u_t = \text{Terminal Velocity} = \text{سرعت حد}$

$$\rightarrow \quad \mu = \frac{2R^2(\rho_p - \rho_f)g}{9u_t}$$

## Falling Ball Viscometer:

اگر ذراتی کرومی با  $\rho$  و  $R$  معین، داخل سیالی معین انداخته شوند و سرعت حد حرکت اندازه گیری شود،

می توان مقدار  $\mu$  را تعیین کرد.

$$\mu = \frac{2R^2(\rho_p - \rho_f)g}{9u_t}$$

## The Equations of change in Isothermal systems

معادلات تغییر در سیستم های همدا

سیالی را در نظری کیریم که با زمان و در همه جهات، سرعت و خواصش (دانسیته) تغییر می کند (حرکت چند بعدی است). در نظر است تغییرات جرم و سرعت سیال را با زمان و مکان به دست آوریم.

✓ معادلاتی که قرار است بررسی شوند عبارتند از:

1. The Equation of Continuity معادله پیوستگی
2. The Equation of Motion معادله حرکت
3. The Equation of Energy معادله انرژی

در این ارتباط معادلات دینفراسیل چند متغیره مطرح خواهند شد. برای توضیح انواع دینفراسیل ها این

مثال می تواند مطرح شود. فرض کنید از شما خواسته باشند که تغییرات تعداد ماهی های آب یک

رودخانه را با زمان بررسی کنید، چگونه این کار را انجام می دهید؟

سه روش برای بیان معادلات:

1- تغییرات کمیت ها (یا شکل معادله) از نقطه نظر ناظری ثابت

2- تغییرات کمیت ها (یا شکل معادله) از دید ناظری که با سرعتی دلخواه در سیال حرکت می کند.

3- تغییرات کمیت ها (یا شکل معادله) از دید ناظری که با سرعت سیال در حرکت است.

1) *The Partial Time Derivative*

$$\frac{\partial c}{\partial t}$$

مشق جزئی زمان

2) *The Total Time Derivative*

$$\frac{dc}{dt}$$

مشق کامل زمان

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial c}{\partial z}$$

3) *The Substantial Time Derivative*

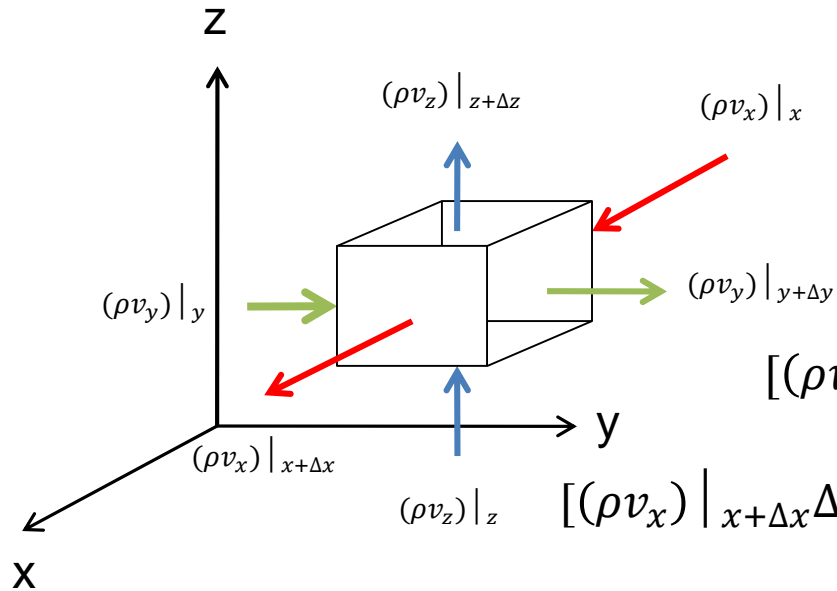
$$\frac{Dc}{Dt}$$

مشق واقعی زمان

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z}$$

# The Equation of continuity

To obtain this equation an element with dimensions of  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  and  $\Delta z$  has been selected



The Overall Mass Balance On The Element

(Rate of mass in) - (Rate of mass out) =  
Rate of accumulation of mass

$$\begin{aligned}
 & [(\rho v_x)|_x \Delta y \Delta z + (\rho v_y)|_y \Delta x \Delta z + (\rho v_z)|_z \Delta x \Delta y] - \\
 & [(\rho v_x)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z + (\rho v_y)|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z + (\rho v_z)|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y] = \frac{\partial m}{\partial t} \\
 & = \frac{\partial(\rho \Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t} = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t}
 \end{aligned}$$

$$\div \Delta x \Delta y \Delta z \quad \rightarrow$$

$$\frac{(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z+\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$



$$\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right]$$

$$OR \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

*The Partial Time Derivative* معادله پیوستگی نسبت به ناظر ساکن

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho v) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

$$\rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0$$

$$\text{OR} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

*(Substantial Form)*

## *Special cases:*

1. At steady state condition:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad (\nabla \cdot \rho v) = 0$$

2. For incompressible fluids:

$$(\nabla \cdot v) = 0$$

*(Even at Unsteady – state Condition)*

# The equation of motion:

Rate of momentum in - Rate of momentum out + sum of acting forces =  
Rate of accumulation of momentum

x-component:

$$\begin{aligned}
 & [(\rho v_x \Delta y \Delta z) v_x |_x + (\rho v_y \Delta x \Delta z) v_x |_y + (\rho v_z \Delta x \Delta y) v_x |_z] \\
 - & [(\rho v_x \Delta y \Delta z) v_x |_{x+\Delta x} + (\rho v_y \Delta x \Delta z) v_x |_{y+\Delta y} + (\rho v_z \Delta x \Delta y) v_x |_{z+\Delta z}]
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} & [(\rho v_x \Delta y \Delta z) v_x |_x + (\rho v_y \Delta x \Delta z) v_x |_y + (\rho v_z \Delta x \Delta y) v_x |_z] \\ - & [(\rho v_x \Delta y \Delta z) v_x |_{x+\Delta x} + (\rho v_y \Delta x \Delta z) v_x |_{y+\Delta y} + (\rho v_z \Delta x \Delta y) v_x |_{z+\Delta z}] \end{aligned}} \right\} \text{Convective mechanism}$$

$$\begin{aligned}
 & + [(\tau_{xx} \Delta y \Delta z) |_x + (\tau_{yx} \Delta x \Delta z) |_y + (\tau_{zx} \Delta x \Delta y) |_z] \\
 - & [(\tau_{xx} \Delta y \Delta z) |_{x+\Delta x} + (\tau_{yx} \Delta x \Delta z) |_{y+\Delta y} + (\tau_{zx} \Delta x \Delta y) |_{z+\Delta z}]
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} & + [(\tau_{xx} \Delta y \Delta z) |_x + (\tau_{yx} \Delta x \Delta z) |_y + (\tau_{zx} \Delta x \Delta y) |_z] \\ - & [(\tau_{xx} \Delta y \Delta z) |_{x+\Delta x} + (\tau_{yx} \Delta x \Delta z) |_{y+\Delta y} + (\tau_{zx} \Delta x \Delta y) |_{z+\Delta z}] \end{aligned}} \right\} \text{Molecular mechanism}$$

$$+ (P \Delta y \Delta z) |_x - (P \Delta y \Delta z) |_{x+\Delta x} + (\rho \Delta x \Delta y \Delta z g_x) = \frac{\partial (m v_x)}{\partial t} = \frac{\partial (\rho \Delta x \Delta y \Delta z v_x)}{\partial t}$$

$$= \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial t}$$

$$\div \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z v_x)\right] -$$

$$\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) = -(\nabla \cdot \rho v v) - [\nabla \cdot \tau] - \nabla p + \rho g$$

*Rate of increase  
of momentum  
per unit volume*

*Rate of gain  
of momentum  
by convection  
p.u.v*

*Rate of gain of  
momentum by  
viscous transfer  
p.u.v*

*Pressure  
force on  
element  
p.u.v*

*Gravitational  
force on  
element  
p.u.v*

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -[\nabla \cdot \tau] - \nabla p + \rho g$$

*Mass per unit  
volume times  
acceleration*

*Viscous  
force on  
element  
p.u.v*

*Pressure  
force on  
element  
p.u.v*

*Gravitational  
force on  
element  
p.u.v*

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -[\nabla \cdot \tau] - \nabla p + \rho g$$

Special cases:

1) *For Newtonian fluids with constant  $\rho$  &  $\mu$*

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \mu \nabla^2 v - \nabla p + \rho g \quad \text{Navier Stoke's Equation}$$

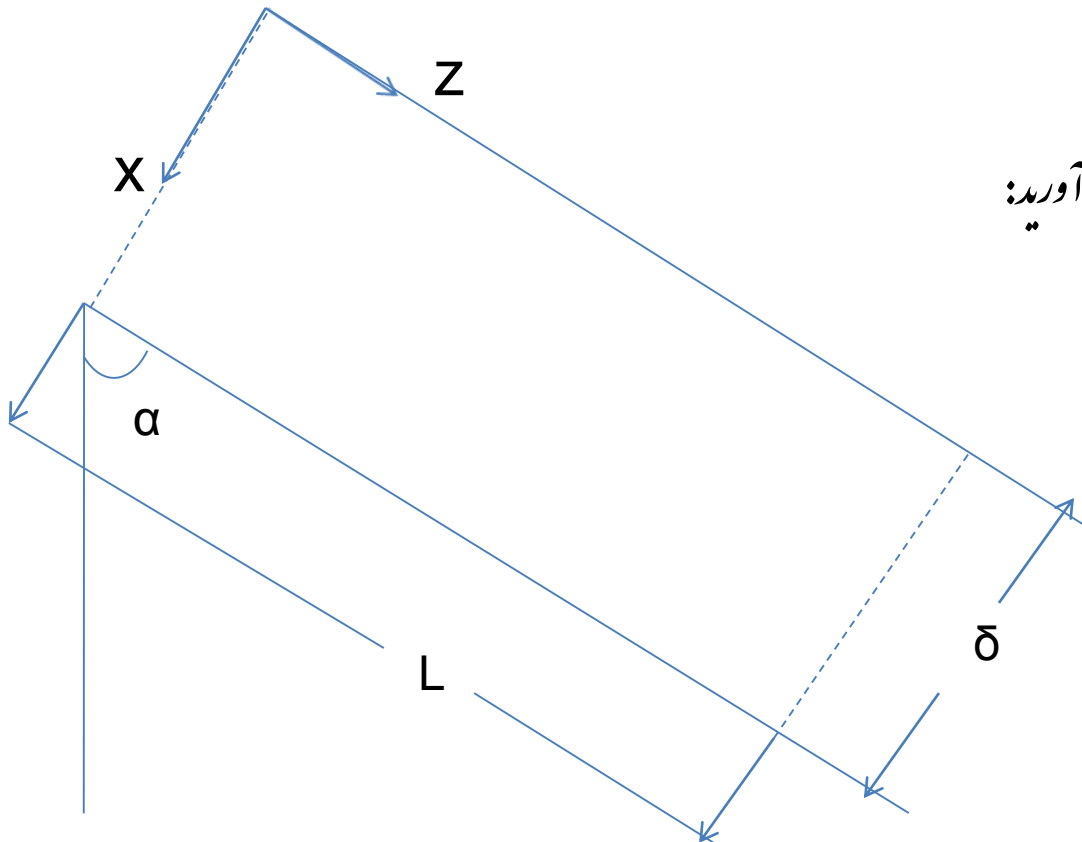
2) *For fluids when  $[\nabla \cdot \tau]$  is negligible:*

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \rho g \quad \text{Euler's Equation}$$

• یک film نازک از یک مایع با ضخامت  $\delta$  بر روی سطح شیب داری به طول  $L$  و عرض  $w$  که با

• راستای قائم زاویه  $\alpha$  تشکیل می دهد در جریان است.

• توزیع تنش برشی و سرعت را در این film مایع بدست آورید:





## روش حل مسأله:

اولین اقدام، تعیین دقیق فرضیات:

1- حالت یکدواخت

2- جریان آرام

3- حرکت یک بعدی

4- سیال نیوتنی

5- خواص فیزیکی ثابت

6- آثار به ای ناچیز

## The Equation of continuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

حرکت یک بعدی  $\Rightarrow v_x = v_y = 0$

آثار به ای ناچنر

خواص فیزیکی ثابت  $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

System at steady-state

$$\rightarrow \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{and} \quad \text{جریان آرام} \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0 \Rightarrow v_z = v_z(x)$$

## The Equation of Motion (Z-component):

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$-\left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z$$

$$\tau_{yz} = -\mu \left[ \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] = 0$$

*App. B, Page 843 (Bird)*

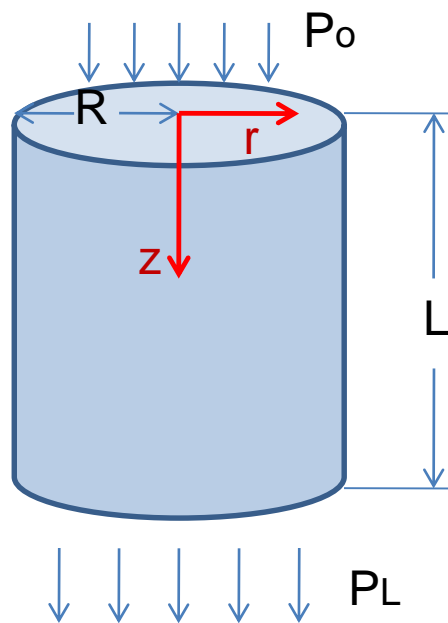
$$\tau_{zz} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \right] = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \rho g_z$$

$$\longrightarrow \quad \frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g_z = \rho g \cos \alpha$$

## سوال دوم:

سیال تراکم ناپذیری با فشار  $P_0$  به یک لوله با طول  $L$  و شعاع  $R$  وارد شده و با فشار  $P_L$  آن را ترک

می نماید. توزیع تنش برشی و سرعت را در سیال بدست آورید.



1) تعیین فرضیات:

جریان آرام، یکپوخت، نیوتونی، دانسیته و ویسکوزیته ثابت

2) انتخاب محورهای مختصات:

3) انتخاب المنت:

در نظریه کیریم که در راستای  $r$  تغییر سرعت داریم و در راستای  $z$  تغییر سرعت نداریم.

ity:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

The Equation of motion:

Z-component:

$$\rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial v_z}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow v_z = v_z(r)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$- \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] + \rho g_z$$

$$\tau_{\theta z} = -\mu \left[ \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] = 0$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \right] = 0$$

$$\rightarrow 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz})}_{F(r)} = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z}_{G(z)} = k \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau_{rz}) = k \\ -\frac{dp}{dz} + \rho g_z = k \end{array} \right.$$

$$-dp = (k - \rho g_z) dz \rightarrow \int_{p_0}^{p_L} dp = \int_0^L (\rho g_z - k) dz$$

$$\rightarrow k = \frac{p_0 - p_L}{L} + \rho g_z \rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau_{rz}) = \frac{p_0 - p_L}{L} + \rho g_z$$

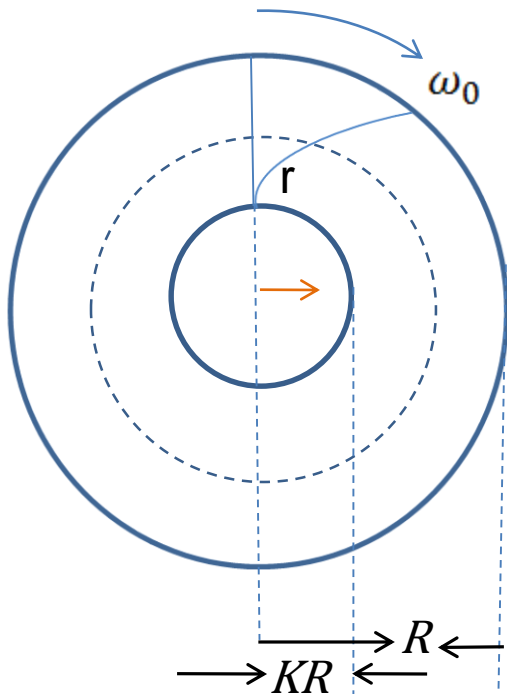
$$\rightarrow \frac{d}{dr} (r\tau_{rz}) = \left( \frac{p_0 - p_L}{L} + \rho g_z \right) r$$

**سوال سوم:** سیال تراکم نپذیری در فضای بین دو استوانه‌ی هم محور با شعاع‌های  $R$  و  $KR$  و طول  $L$  قرار

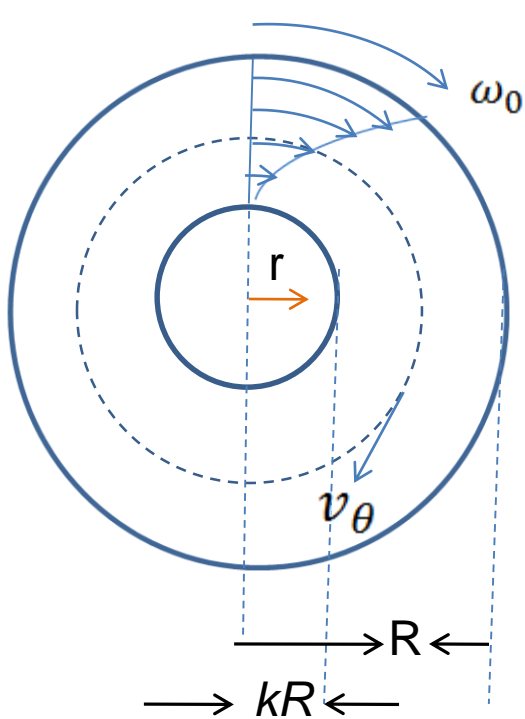
گرفته است. استوانه‌ی بیرونی با سرعت زاویه‌ای معین  $\omega_0$  حول محور دوران می‌کند.

الف) توزیع سرعت را در سیال بدست آورید.

ب) رابطه‌ای برای محاسبه‌ی گشتاور لازم جهت به دوران درآوردن استوانه‌ی بیرونی بدست آورید.



# The Equation of Continuity



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) = 0$$

$$\rho = \text{constant} \rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

جریان آرام  $\rightarrow$

$$\rightarrow v_\theta = v_\theta(r)$$



The Equation of Motion (All components):

r- component: 
$$-\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

$\theta$ - component: 
$$0 = \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\theta) \right]$$

Z- component: 
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

$$\rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\theta) = c_1 \rightarrow \frac{d}{dr} (rv_\theta) = c_1 r \rightarrow rv_\theta = c_1 \frac{r^2}{2} + c_2$$

$$\rightarrow v_\theta = \frac{c_1 r}{2} + \frac{c_2}{r}$$

B.C.1 at  $r = R$   $v_\theta = R\omega_0$

B.C.2 at  $r = kR$   $v_\theta = 0$   $\rightarrow v_\theta = R\omega_0 \left( \frac{\frac{kR}{r} - \frac{r}{kR}}{k - \frac{1}{k}} \right)$

$$T = RF_t \quad (\text{Torque})$$

$$F_t = (-\tau_{r\theta}) \Big|_{r=R} 2\pi RL \qquad \tau_{r\theta} = -\mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{r\theta} = -\mu \left[ r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right] \longrightarrow \tau_{r\theta} = -2\mu R^2 \omega_0 \left( \frac{k^2}{1 - k^2} \right) \frac{1}{r^2}$$

$$\longrightarrow T = 4\pi R^2 \omega_0 L \mu \left( \frac{k^2}{1 - k^2} \right)$$

# چند نکته:

Couette-Hatschek viscometer

نکته 1: اساس کار ویسکومتر

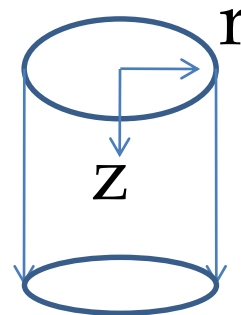
$$\mu = \frac{T(1 - k^2)}{4\pi R^2 L \omega_0 k^2}$$

: برای اندازه گیری ویسکوزیته خمیر پلاستیال نفتی از این ویسکومتر استفاده می شود.

نکته 2

نکته 3: اگر در نظر باشد که توزیع فشار در سیال بین دو استوانه به دست آید، چگونه بایستی اقدام نمود؟

$$p = p(r, \theta, z)$$



$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

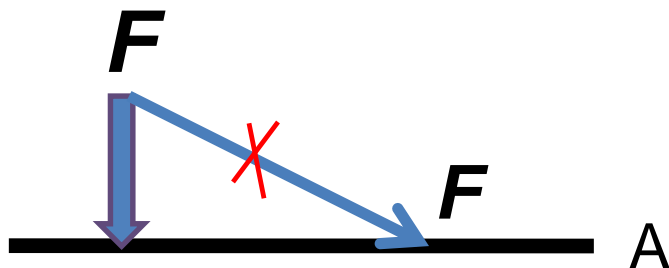
$$dp = \rho \frac{v_{\theta}^2}{r} dr + \rho g_z dz$$

$$p = F(r) + \rho g_z Z + p_0$$

در این بخش در نظر است نیروهای وارد شده از طرف سیالات ساکن به جداره های جامدی که در آنها قرار گرفته و یا دیواره ظرفی که آنها را در بر گرفته اند و همچنین نقطه اثر آنها پرداخته خواهد شد. لذا در ابتدا پس از تعریف فشار به بیان توزیع فشار در حالات مختلف پرداخته خواهد شد.

$$P = \frac{F}{A} \rightarrow F \perp A$$

تعریف فشار:



1- توزیع فشار در سیالات ساکن

2- در حال حرکت بدون تنش برشی

توزیع فشار:

$$P_{Local} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{F}{A}$$

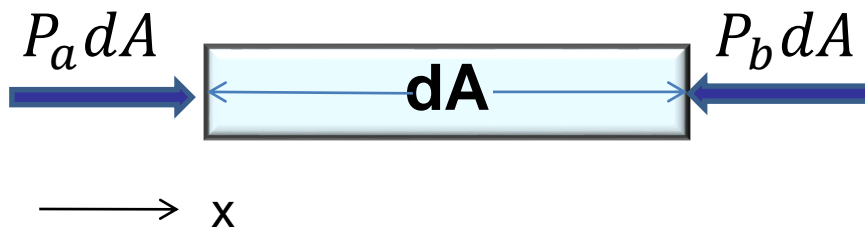
تعریف فشار موضعی:

توزیع فشار در سیال ساکن:

تغییر فشار در راستای افقی:

تعادل هیدروستاتیک:

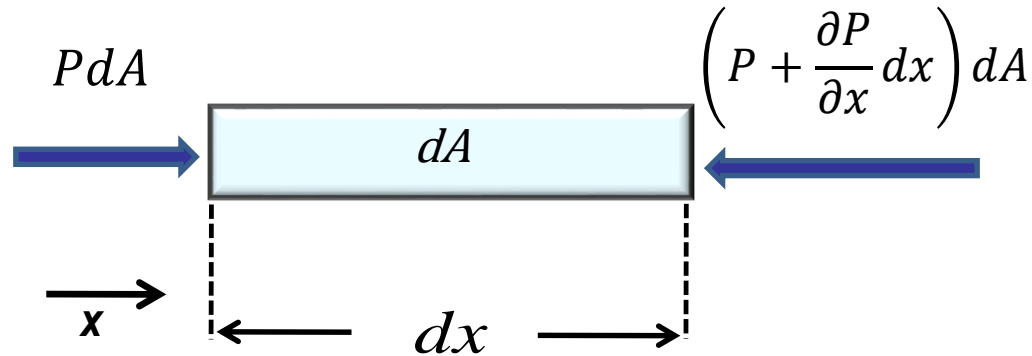
در کلیه مقاطعی از یک سیال ساکن که بر یک فاصله از سطح زمین و یا هر سطح افقی دیگر قرار دارند، فشار برابر است.



اثبات:

به علت سکون سیال  $\longrightarrow \sum F_x = 0$

$$\Rightarrow P_a dA - P_b dA = 0 \Rightarrow P_a = P_b$$

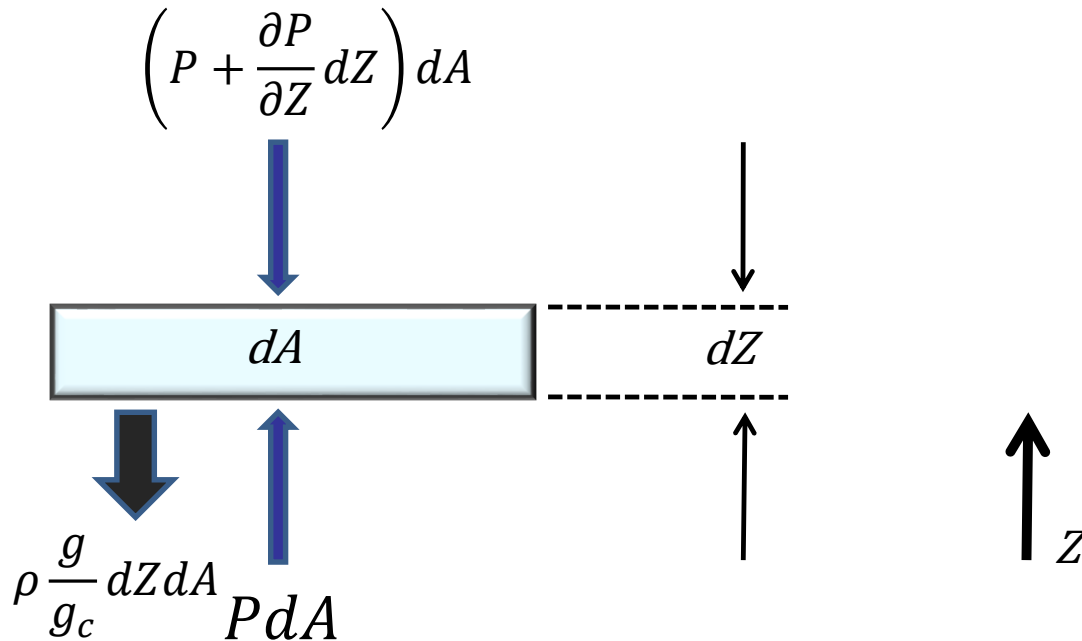


$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad PdA - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx\right) dA = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

b) Z-Component.

تغییر فشار در راستای عمودی



$$\sum F_Z = 0 \Rightarrow P dA - \left(P + \frac{\partial P}{\partial Z} dZ\right) dA - \rho \frac{g}{g_c} dZ dA = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial Z} = -\rho \frac{g}{g_c}$$

$$\Rightarrow \quad dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial Z} dZ \Rightarrow dP = -\rho \frac{g}{g_c} dZ$$



حل معادله جهت دستیابی به توزیع فشار:

$$\left. \begin{array}{l} \rho = cte \quad (a) \text{ تراکم ناپذیر} \\ \rho \neq cte \quad (b) \text{ تراکم پذیر} \end{array} \right\} \text{ میدانیم:}$$

$$a) \rho = cte \implies P = -\rho \frac{g}{g_c} Z + P_0$$

یعنی افزایش ارتفاع موجب کاهش فشار می شود.

روش حل معادله برای سیالات تراکم ناپذیر:

$$\frac{dP}{\rho} + \frac{g}{g_c} dZ = 0 \Rightarrow \frac{P}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z = C$$

یعنی در هر نقطه ای از سیال تراکم ناپذیر مجموع این دو جمله مقدار ثابتی است.

$$\frac{P_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_a = \frac{P_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_b$$

در نقاط  $a$  و  $b$  خواهیم داشت:

$$\frac{P_b - P_a}{\rho} = \frac{g}{g_c} (Z_a - Z_b) \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{g}{g_c} \Delta Z = 0$$

(b) سیالات تراکم پذیر: اگر سیال گاز ایده آل باشد خواهیم داشت:

$$PV = nRT \quad \Rightarrow \quad PV = \frac{m}{M}RT \quad \Rightarrow \quad \frac{PV}{m} = \frac{RT}{M}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{PM}{RT}$$

$$\Rightarrow dP = -\frac{PM}{RT} \frac{g}{g_c} dZ$$

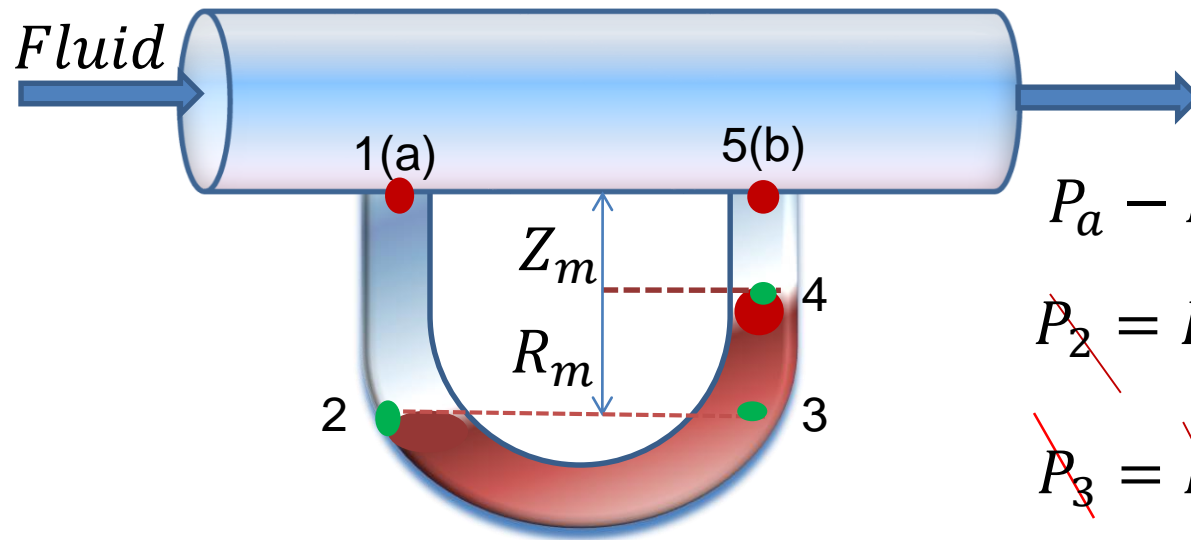
$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{M}{RT} \frac{g}{g_c} dZ$$

$$\Rightarrow \ln \frac{P_b}{P_a} = -\frac{M}{RT} \left( \frac{g}{g_c} \right) (Z_b - Z_a)$$

$$\Rightarrow \frac{P_b}{P_a} = \exp \left[ -\frac{M}{RT} \left( \frac{g}{g_c} \right) (Z_b - Z_a) \right]$$

$$P_a - P_b = ?$$

کاربرد این روابط در یک مانومتر قابل استفاده خواهد بود:



$$P_a - P_b = P_1 - P_5$$

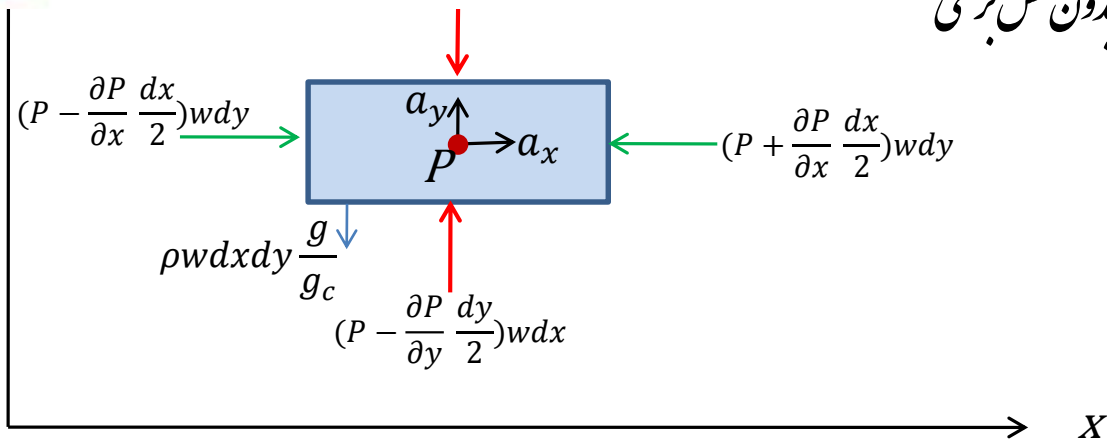
~~$$P_2 = P_1 + \rho_f \frac{g}{g_c} (R_m + Z_m)$$~~

~~$$P_3 = P_2$$~~

~~$$P_4 = P_3 - \rho_m \frac{g}{g_c} R_m$$~~

~~$$P_5 = P_4 - \rho_f \frac{g}{g_c} Z_m$$~~

$$P_1 - P_5 = P_a - P_b = R_m \frac{g}{g_c} (\rho_m - \rho_f)$$



**a) x- COMPONENT:**

$$\sum F_x = \frac{m a_x}{g_c} \implies \left( P - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) w dy - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) w dy = \frac{\rho w dx dy a_x}{g_c}$$

$$\implies \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho \frac{a_x}{g_c}$$

*Y-Component.*

$$\sum F_y = m \frac{a_y}{g_c}$$

$$\left( P - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) w dx - \left( P + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) w dx - \rho w dx dy \frac{g}{g_c} = \rho w dx dy \frac{a_y}{g_c}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho \frac{a_y + g}{g_c}$$

در این صورت توزیع فشار از رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

$$\Rightarrow dP = -\rho \frac{a_x}{g_c} dx - \rho \frac{a_y + g}{g_c} dy$$

$$\Rightarrow P = -\rho \frac{a_x}{g_c} x - \rho \frac{a_y + g}{g_c} y + P_0$$

معادله سطوح هم فشار:

$$dP = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{a_x}{a_y + g}$$

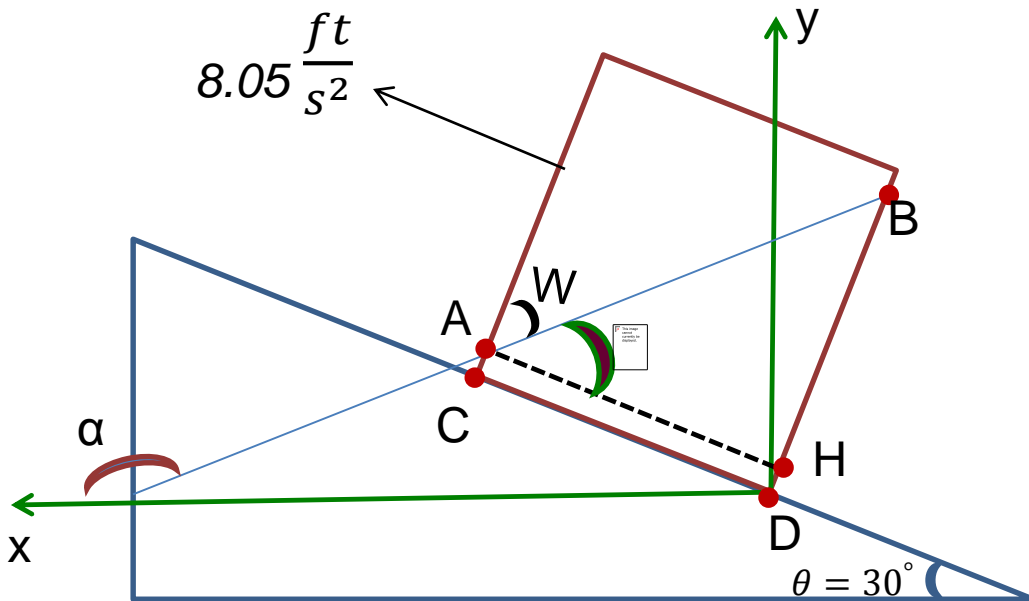
شیب صفحات Iso-bar

جعبه ای به ابعاد  $2\text{ ft}$  تانیمه از روغنی از روغنی به چگالی نسبی  $0.9$  پر شده است. این جعبه با شتاب

$8.05 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$  بر روی سطح شیب داری که دارای زاویه  $30^\circ$  است به سمت بالا حرکت میکند؛

(a) شیب سطح را در طرف معین کنید.

(b) توزیع فشار در روغن را بدست آورید.

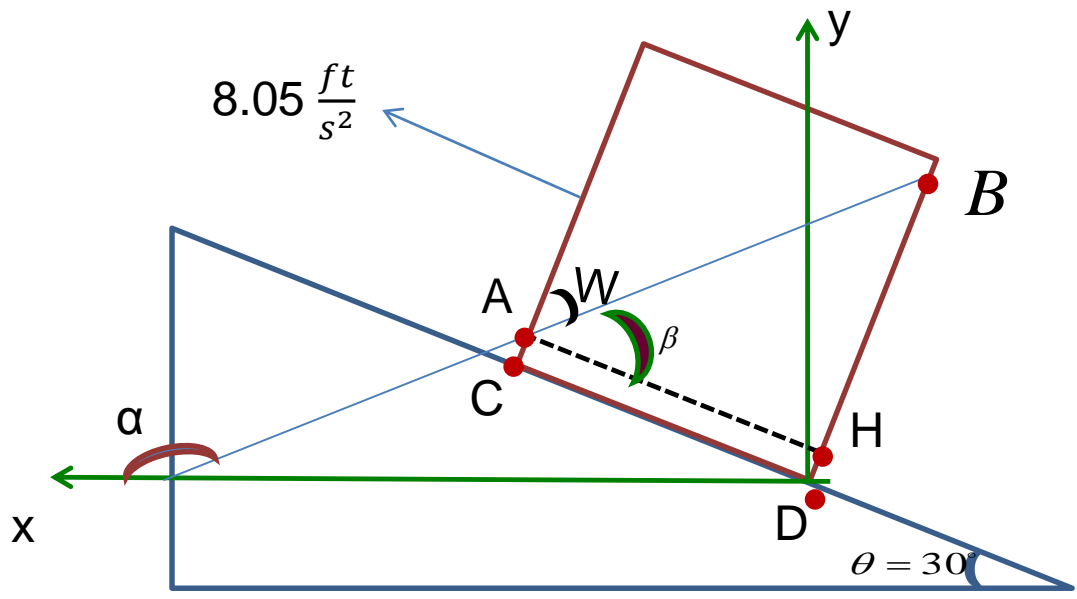




$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a_x}{a_y + g} = -\frac{5 \times \cos 30}{8.05 \times \sin 30 + 32.2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -0.1925 \rightarrow \alpha = \tan^{-1}(-0.1925) = 169.1^\circ$$

$$P = P_0 - \rho \frac{a_x}{g_c} x - \rho \frac{a_y + g}{g_c} y = P_0 - 0.9 \times 62.4 \times \frac{6.98}{32.2} x - 0.9 \times 62.4 \times \frac{4.02 + 32.2}{32.2} y$$

$$\rightarrow P = P_0 - 12.18x - 63.15y$$



$$\beta = 30 + (180 - 169.1) = 40.9^\circ \quad \rightarrow \quad \tan \beta = \frac{BH}{AH} \quad \rightarrow \quad BH = 1.73 \text{ ft}$$

حجم جعبه

$$\frac{8}{2} ft^3 = 4 ft^3$$

حجم روغن داخل جعبه

$$V = \frac{AC + BD}{2} \times 2 \times 2 = 4 ft^3$$

$$AC + BD = 2'$$

$$AC + BH + DH = 2' \rightarrow AC = 0.135' \rightarrow A \begin{cases} x_A = 1.665' \\ y_A = 1.117' \end{cases}$$

$$\rightarrow 0 = P_0 - 12.18 \times 1.665 - 63.15 \times 1.117 \rightarrow P_0 = 91 \frac{lb_f}{ft^2} gauge$$

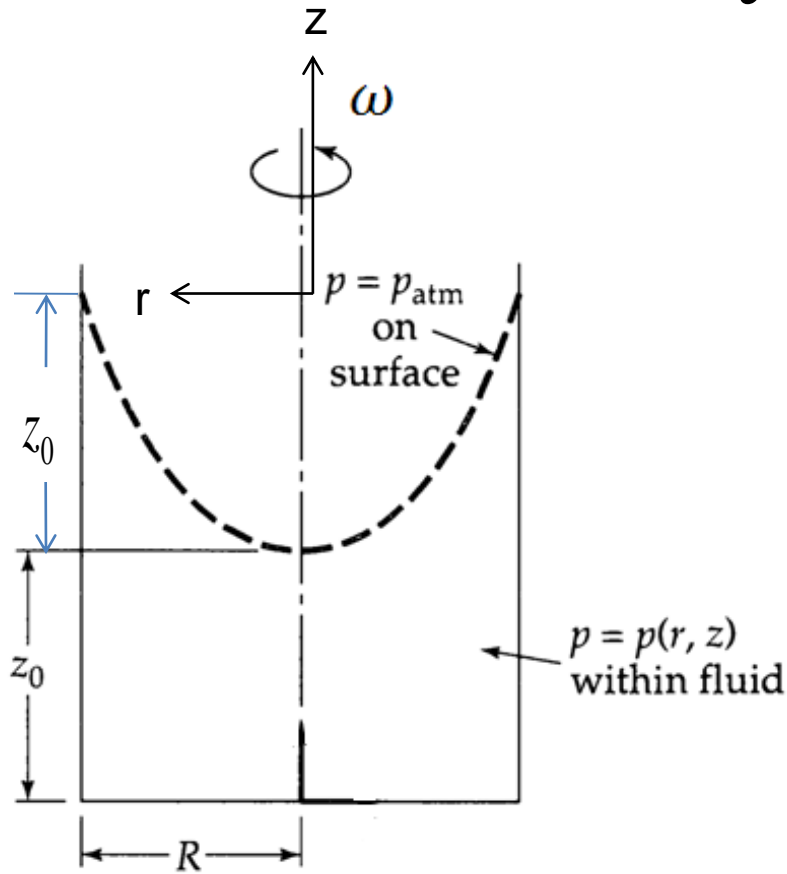
$$1 atm = 14.7 \times 144 = 2116.8 \frac{lb_f}{ft^2}$$

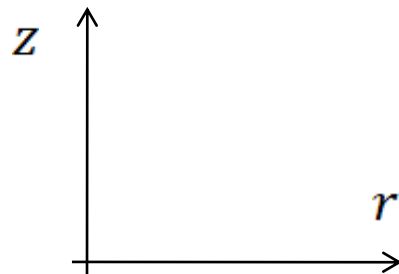
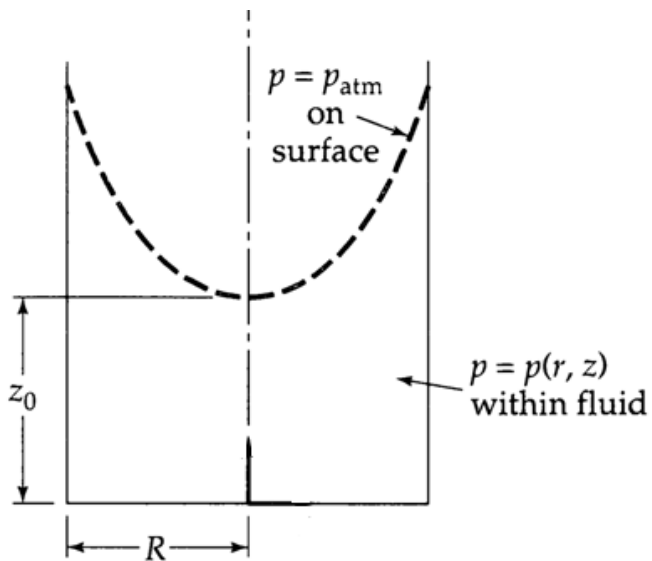
$$2116.8 = P_0 - 12.18 \times 1.665 - 63.15 \times 1.117$$

$$\rightarrow P_0 = 2207.8 \frac{lb_f}{ft^2} absolute$$

$\omega =$  سرعت زاویه ای

$a_r =$  شتاب جانب مرکز





این حالت را مشابه محضات کارترین در نظر میگیریم با این فرض که:

$$x = r \quad , \quad y = z \quad , \quad a_x = a_r = -r\omega^2 \quad , \quad a_z = a_y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho \frac{a_x}{g_c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{r\omega^2}{g_c}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \frac{a_z + g}{g_c}$$

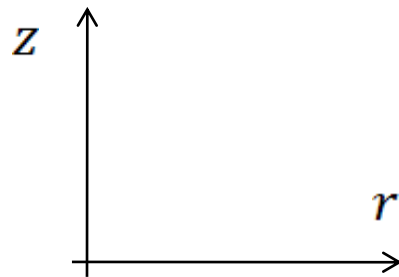
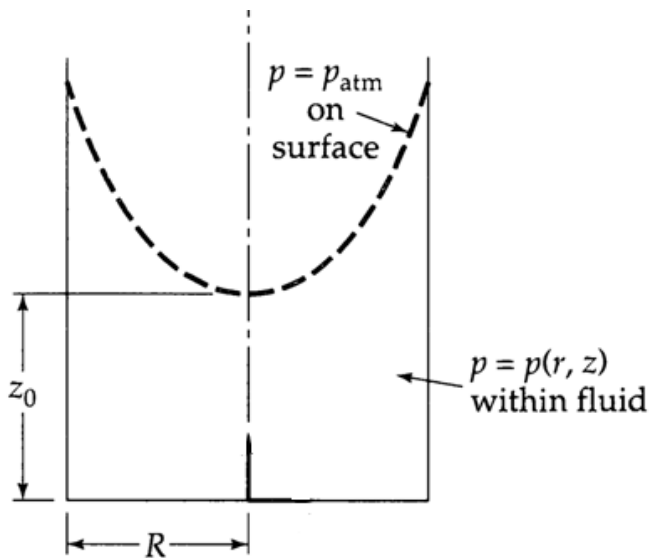
$$\Rightarrow dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial z} dz = \rho \frac{r\omega^2}{g_c} dr - \rho \frac{a_z + g}{g_c} dz$$

$$\Rightarrow P = \rho \frac{r^2 \omega^2}{2g_c} - \rho \frac{a_z + g}{g_c} z + P_0$$

$$\text{if } dP = 0 \Rightarrow \rho \frac{r\omega^2}{g_c} dr = \rho \frac{a_z + g}{g_c} dz \Rightarrow$$

$$z = \frac{\omega^2}{2(a_z + g)} r^2 + z_0$$

بمانظور که ملاحظه می شود سطح هم فشار سهی شکل هستند.



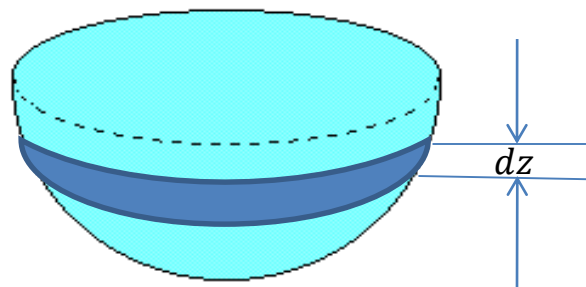
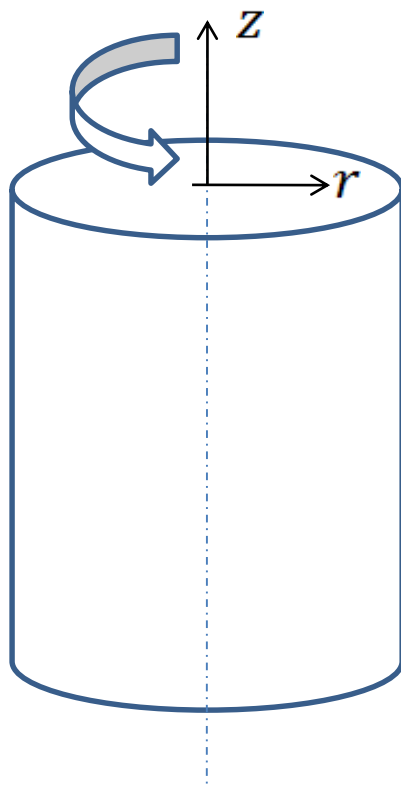
$$\text{if } a_z = 0 \Rightarrow z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0 \quad \begin{matrix} r=R \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad 0 = \frac{R^2 \omega^2}{2g} + z_0$$

$$\Rightarrow z_0 = -\frac{R^2 \omega^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 - \frac{R^2 \omega^2}{2g}$$

معادله سطح آزاد سیال ←

مثال 1) استوانه‌ای به طول  $L$  و شعاع  $R$  پر از آب است و با سرعت زاویه‌ای معین

$\omega$  دوران میکند. حجم آب بیرون ریخته را محاسبه کنید.



$$dV = \pi r^2 dz \implies V = \int dV = \int_{z_0}^0 \pi r^2 dz$$

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0 \implies r^2 = \frac{(z - z_0) 2g}{\omega^2} \implies$$

$$V = \int_{z_0}^0 \frac{(z - z_0)}{\omega^2} 2g\pi dz \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\pi R^4 \omega^2}{4g} = \frac{\pi R^2 z_0}{2}$$

مثال 2) استوانه سوال قبل با چه سرعت زاویه ای دوران کند که قعر سهمی به کف ظرف برسد؟

$$z_0 = -\frac{R^2 \omega^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad -L = -\frac{R^2 \omega^2}{2g} \quad \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2gL}{R^2}} = \frac{1}{R} \sqrt{2gL}$$



مثال 3) این استوانه با چه سرعت زاویه ای دوران کند تا دایره ای به شعاع  $R_0$  در کف ظرف خالی بماند؟

راه اول:

$$-\frac{R_0^2 \omega^2}{2g} - L = -\frac{R^2 \omega^2}{2g} \implies \omega = \sqrt{\frac{2gL}{R^2 - R_0^2}}$$

راه دوم: مقدار  $R_0$  را در معادله سطح آزاد قرار می دهیم:

$$\frac{(R^2 - R_0^2) \omega^2}{2g} = L \implies \omega = \sqrt{\frac{2gL}{R^2 - R_0^2}}$$

مثال 4) استوانه‌ای به طول  $L$  و شعاع  $R$  که تا ارتفاع  $H$  پر از آب است با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  دوران می‌کند. حجم

آب بیرون ریخته را محاسبه کنید.

تا قبل از رسیدن به سرعت دوران بحرانی حجم خالی برابر همان حجم خالی اولیه است:

$$V = \frac{\pi R^4 \omega_c^2}{4g} = \pi R^2 (L - H) \quad \rightarrow$$

$$R^2 \omega_c^2 = 4g(L - H) \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{2}{R} \sqrt{g(L - H)} \quad \Rightarrow$$

$$V = \frac{\pi R^4 \omega^2}{4g} - \pi R^2 (L - H)$$

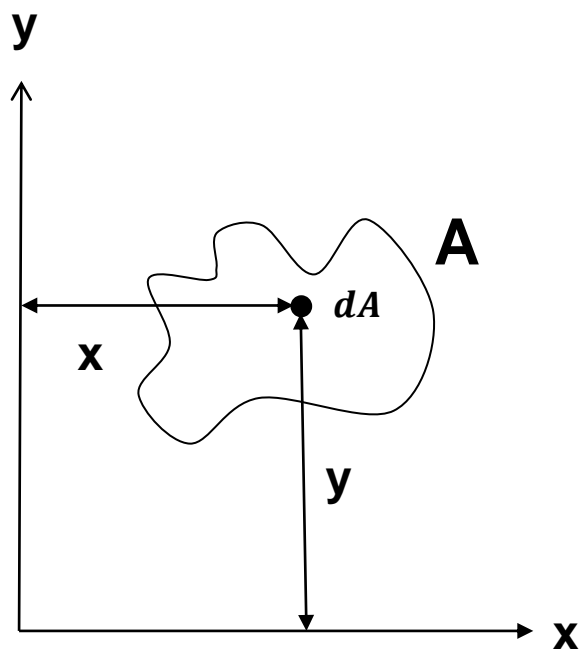
## همیدرواستاتیک سیالات

در این بخش به بررسی نیروهای وارده از طرف سیال ساکن به جداره جداره یا جداره های که سیال را احاطه کرده اند پرداخته خواهد شد.

کشاورهای اول و دوم سطح و مرکز سطح

**First & Second Moments, Centroid**

کشاورهای اول سطح نسبت به محورهای مختصات



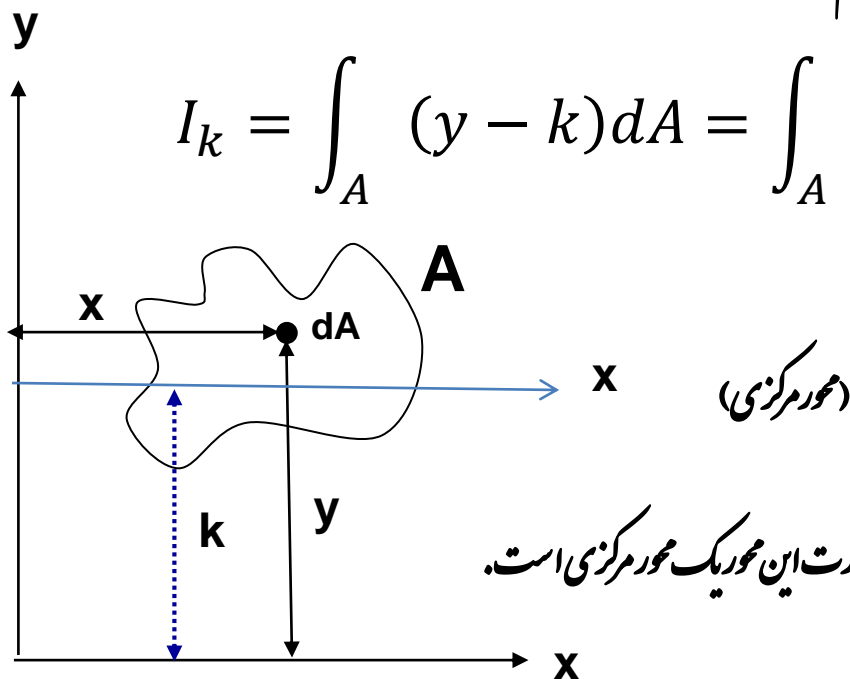
$$I_x = \int_A y dA$$

$$I_y = \int_A x dA$$

حال اگر محور  $x$  را به اندازه  $k$  واحد به موازات خودش جابجا کنیم خواهیم داشت:

$$I_k = \int_A (y - k) dA = \int_A y dA - \int_A k dA = I_x - kA$$

(انتقال محورها به محضات)

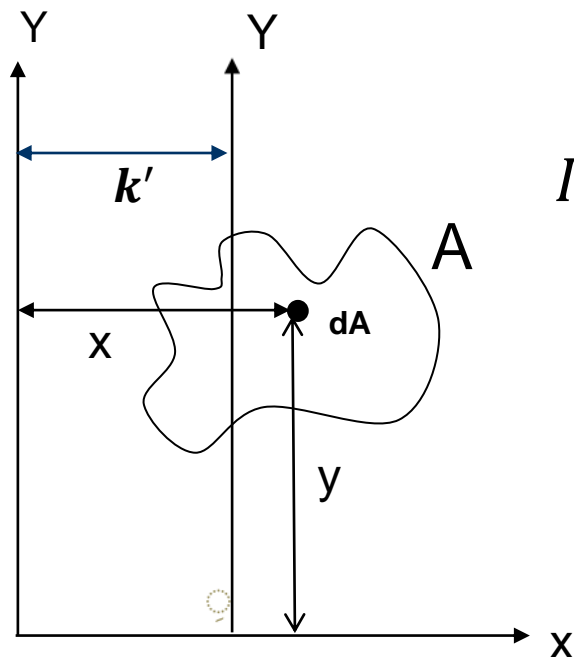


اگر کشاور حول این محور صفر باشد در این صورت این محور مرکزی است.

$$\text{If } I_k = 0 \rightarrow I_x - kA = 0 \rightarrow k = \frac{I_x}{A} = \bar{y} \rightarrow \int_A y dA = \bar{y}A$$

یعنی یک محور مرکزی است. به همین طریق می توان محور مرکزی به موازات محور  $x$  را تعیین نمود.

حال اگر محور  $Y$  را به موازات خودش جابجا کنیم خواهیم داشت:



$$I_{k'} = \int_A (x - k') dA = \int_A x dA - \int_A k' dA$$
$$= I_y - k' A$$

اگر گشتاور حول این محور برابر با صفر باشد خواهیم داشت:

$$\text{If } I_{k'} = 0 \rightarrow I_y - k' A = 0 \rightarrow k' = \frac{I_y}{A} = \frac{\int_A x dA}{A} = \bar{x}$$

$$\rightarrow \int_A x dA = \bar{x} A$$

محل برخورد دو محور مرکزی  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  را مرکز سطح گویند.

در یک صفحه نازک و هموزن مرکز سطح بر مرکز ثقل منطبق است.

صفحه هموزن صفحه ای است که دانسیته آن در قسمتهای مختلف آن برابر است.

## **Moment of Inertia** کتاورهای دوم سطح نسبت به محور مختصات، یا همان اینرسی

$$I_{x-x} = \int_A y^2 dA \qquad I_{y-y} = \int_A x^2 dA$$

کتاورهای دوم سطح نسبت به محور مختصات یچگاه صفرنی شوند زیرا توان های  $X$  و  $Y$  برابر با دو می باشند و همواره مثبت می باشند.

$$I_{x-x} = \int_A y^2 dA \qquad I_{y-y} = \int_A x^2 dA$$



## گشتاور دوم سطح نسبت به محورهای مرکزی

$I_G$ : گشتاور دوم سطح نسبت به محور مرکزی است که به موازات محور  $X$  است.

$$I_G = \int_A (y - \bar{y})^2 dA$$

$$I_G = \int_A y^2 dA - 2 \int_A y\bar{y} dA + \int_A \bar{y}^2 dA$$

$$I_G = I_{x-x} - 2\bar{y}^2 A + \bar{y}^2 A$$

$$I_G = I_{x-x} - \bar{y}^2 A \quad \rightarrow \quad I_{x-x} = I_G + \bar{y}^2 A$$

$I_G$  کمیتی است که برای هر سطح (معین، نامعین) به ماداده میشود و همچنین  $\bar{y}, \bar{x}$  و  $I_G$  همیشه بر حسب العاد سطح معین است.

$I_C$ : گشتاور دوم سطح نسبت به محور مرکزی که موازی با محور  $y$  است

$$I_C = \int_A (x - \bar{x})^2 dA$$

$$I_C = \int_A x^2 dA - 2 \int_A x \bar{x} dA + \int_A \bar{x}^2 dA$$

$$I_C = I_{y-y} - 2\bar{x}^2 A + \bar{x}^2 A$$

$$I_C = I_{y-y} - \bar{x}^2 A \quad \rightarrow \quad I_{y-y} = I_C + \bar{x}^2 A$$

## مکات

معمولاً برای برخی از اشکال هندسی معین مانند دایره، مثلث و... مرکز سطح نقطه‌ای

شناخته شده و محورهای مرکزی معین هستند.

معمولاً مقادیر  $I_G$  و  $I_C$  به صورت توابعی از ابعاد سطح داده می‌شوند.

حاصلضرب ماند نسبت به دستگاه مختصات

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

حال اگر مبداء مختصات را روی مرکز سطح قرار دهیم می خواهیم ببینیم که حاصلضرب ماند نسبت به محور های مختصات جدید چه تغییری میکند.

$$\bar{I}_{xy} = \int_A (x - \bar{x})(y - \bar{y}) dA$$

$$\bar{I}_{xy} = \int_A xy dA - \int_A \bar{x}y dA - \int_A \bar{y}x dA + \int_A \bar{x}\bar{y} dA$$

$$\bar{I}_{xy} = I_{xy} - \bar{x}\bar{y}A - \bar{y}\bar{x}A + \bar{x}\bar{y}A$$

$$\bar{I}_{xy} = I_{xy} - \bar{x}\bar{y}A \quad \rightarrow \quad I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x}\bar{y}A$$

نکته 1: در سطوح هموزن و صاف مرکز سطح و مرکز ثقل برهم منطبقند

نکته 2: اگر یکی از محورهای مرکزی محور تقارن سطح باشد؛ آنگاه:

$$\bar{I}_{xy} = 0$$

محاسبه نیروهای وارده از طرف سیال ساکن به جداره های جامد

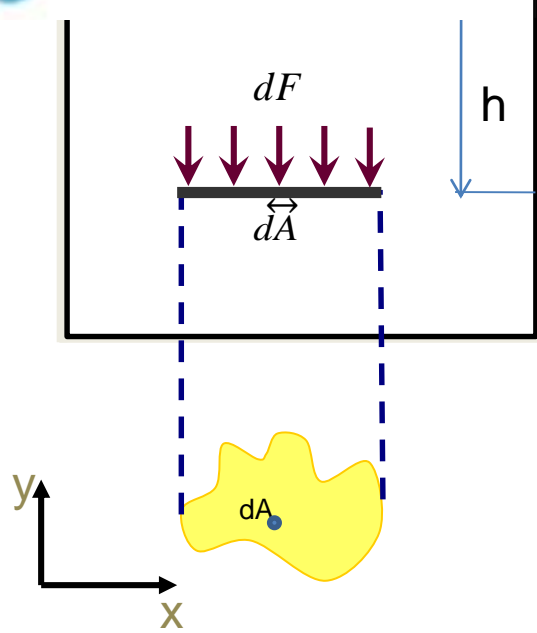
مکانی چند مورد محاسبه نیروی میدرواستاتیک

(a) یک المنت سطح در نظر گرفته شود،

(b) مقدار نیروی فشاری وارده بر المنت سطح را محاسبه می نمایم، این نیرو، نیروی جزئی نام دارد که به محل المنت سطح و به اندازه فشار موضعی آن بستگی دارد.

(c) مقدار این نیرو از حاصل ضرب اندازه سطح در مقدار فشار موضعی بدست خواهد آمد.

(d) پس از محاسبه نیروی جزئی، بر روی سطح انتگرال گیری خواهد شد.



الف: یافتن نیروی وارد شده بر یک صفحه افقی و محاسبه نقطه اثر آن

$$dF = p dA \rightarrow F = \int_A p dA$$

$$F = \int_A \rho \frac{g}{g_c} h dA = \rho \frac{g}{g_c} h A$$

یعنی وزن سیالی که بالای سطح قرار گرفته است.

بدست آوردن نقطه اثر نیرو

مجموع گشتاور نیروهای جزئی  $= dF$  گشتاور حاصل از نیروی متجه  $(F)$

نقطه اثر نیرو را اصطلاحاً مرکز فشار یا **Pressure Center** گویند  $P \begin{vmatrix} x_P \\ y_P \end{vmatrix}$

گشتاور حول محور  $x$  یک دستگاه دنگواه  $F \cdot y_P = \int_A y dF$

$$\rightarrow \rho \frac{g}{g_c} hA \cdot y_P = \int_A y p dA = \int_A y \rho \frac{g}{g_c} h dA = \rho \frac{g}{g_c} hA \bar{y}$$

$$\rightarrow \rho \frac{g}{g_c} hA \cdot y_P = \rho \frac{g}{g_c} hA \cdot \bar{y} \rightarrow y_P = \bar{y}$$



در مورد محور دیکرنس نیز میتوان به روش مشابه عمل نمود، یعنی:

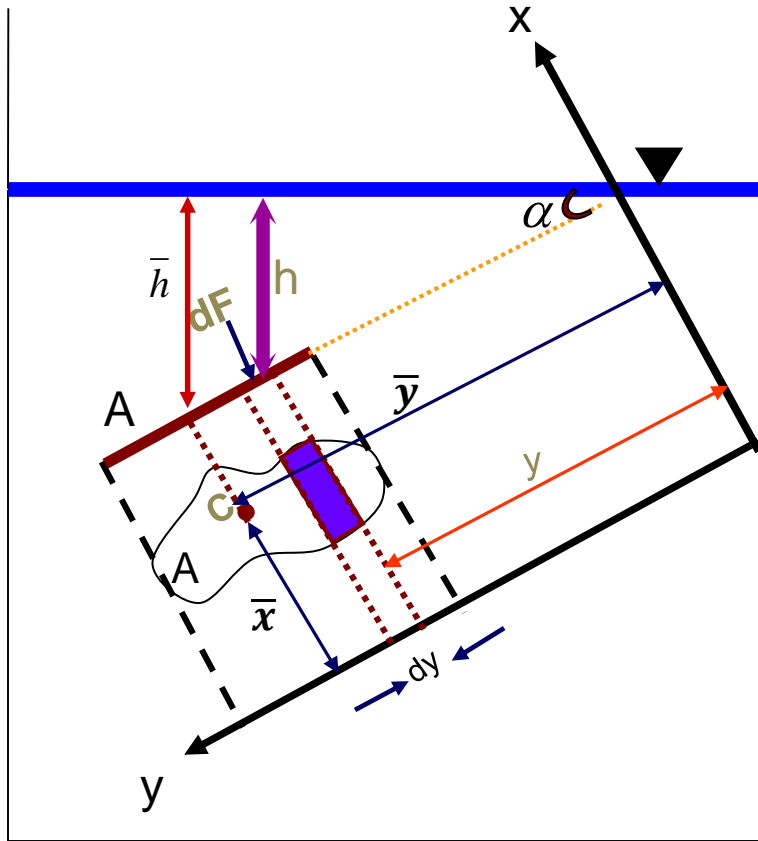
کشاور حول محور  $y$  یک دستگاه دخواه

$$F \cdot x_P = \int_A x dF$$

$$\rightarrow \rho \frac{g}{g_c} hA \cdot x_P = \int_A x p dA = \int_A x \rho \frac{g}{g_c} h dA = \rho \frac{g}{g_c} hA \bar{x}$$

$$\rightarrow \rho \frac{g}{g_c} hA \cdot x_P = \rho \frac{g}{g_c} hA \cdot \bar{x} \rightarrow x_P = \bar{x}$$

ب: بدست آوردن نیروی وارد بر یک صفحه مایل



$$dF = p dA \rightarrow dF = \rho \frac{g}{g_c} h dA$$

$$\rightarrow F = \int_A \rho \frac{g}{g_c} h dA \quad h = y \sin \alpha$$

$$\rightarrow F = \int_A \rho \frac{g}{g_c} (y \sin \alpha) dA$$

$$\rightarrow F = \left( \rho \frac{g}{g_c} \sin \alpha \right) \int_A y dA$$

$$\rightarrow F = \left( \rho \frac{g}{g_c} \sin \alpha \right) \bar{y} A \quad \bar{h} = \bar{y} \sin \alpha$$

$$\rightarrow F = \rho \frac{g}{g_c} \bar{h} A = \bar{P} A$$

$\bar{P}$  فشار در مرکز سطح است.

## بدست آوردن نقطه اثر نیرو

کشتاور نیروی  $F$  حول محورهای  $x$  و  $y$  باید برابر با مجموع کشتاورهای نیروهای جزئی حول آن محور باشد.

می‌خواهیم محضات مرکز فشار را بدانیم:  $P \begin{vmatrix} x_P \\ y_P \end{vmatrix}$  حول محور  $x$ :

$$y_p \cdot F = \int_A y dF \rightarrow \rho \frac{g}{g_c} (\bar{y} \sin \alpha) A y_p = \int_A y \rho \frac{g}{g_c} (y \sin \alpha) dA$$

$$\rightarrow \bar{y} A y_p = \int_A y^2 dA = I_{x-x} = I_G + \bar{y}^2 A$$

$$\rightarrow y_p = \frac{\bar{y}^2 A + I_G}{\bar{y} A} = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y} A}$$

$I_G$  بیچگاه صفر نمی‌شود و در این صورت بیچگاه  $y_p$  و  $\bar{y}$  با یکدیگر برابر نمی‌شوند.

$$x_p \cdot F = \int_A x dF \rightarrow \rho \frac{g}{g_c} (\bar{y} \sin \alpha) A x_p = \int_A x \rho \frac{g}{g_c} (y \sin \alpha) dA$$

$$\rightarrow \bar{y} A x_p = \int_A x y dA = I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x} \bar{y} A$$

$$\rightarrow x_p = \frac{\bar{I}_{xy} + \bar{y} \bar{x} A}{\bar{y} A} \rightarrow x_p = \bar{x} + \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y} A}$$

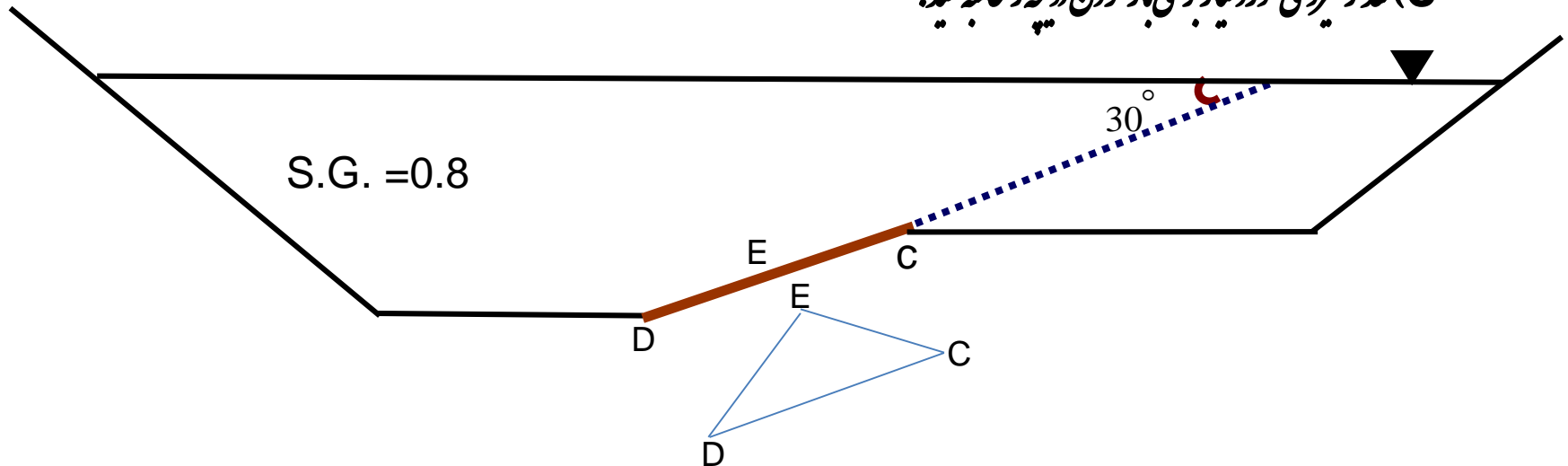
دریچه مثلثی شکل  $CDE$  مطابق شکل در طول  $CD$  لولاشده است و بایک نیروی قائم  $P$  که در نقطه  $E$  اعمال میشود باز میگردد. این دریچه روغنی به چگالی نسبی  $0.8$  را روی خود نگه داشته است و در جانب تحتانی با اتمسفر ارتباط دارد.

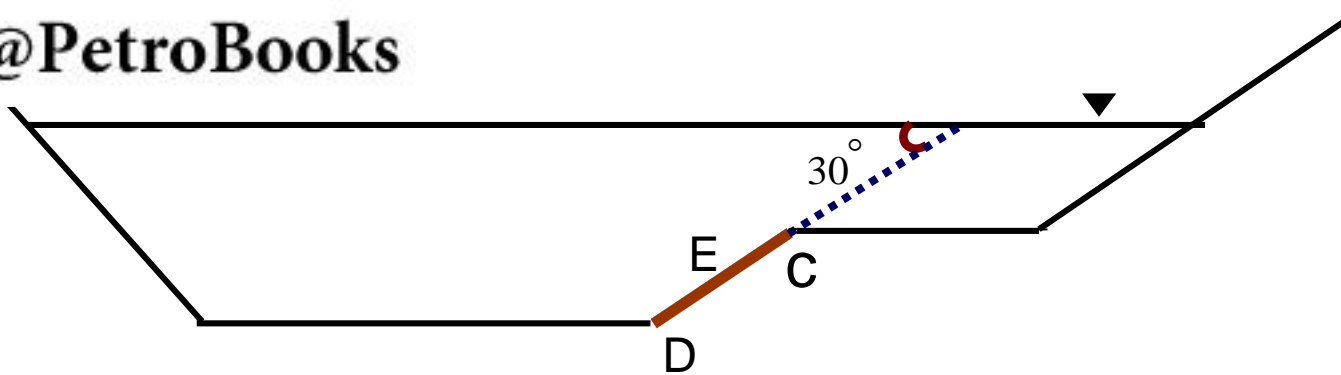
با صرف نظر از وزن دریچه

(a) مقدار نیروی وارد شده بر دریچه را با استفاده از رابطه و انتگرال گیری محاسبه کنید.

(b) موقعیت مرکز فشار را تعیین کنید.

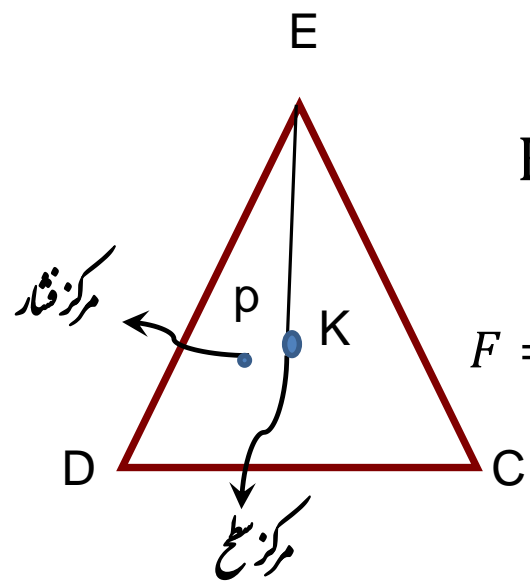
(c) مقدار نیروی مورد نیاز برای باز کردن دریچه را محاسبه کنید.





فشار در مرکز سطح  $\bar{P}$   $F = \bar{P}A$

2/3 از اس مثلث (متساوی الساقین)  $\rightarrow$  محل برخورد میانه ها  $\rightarrow$  "K" مرکز سطح مثلث



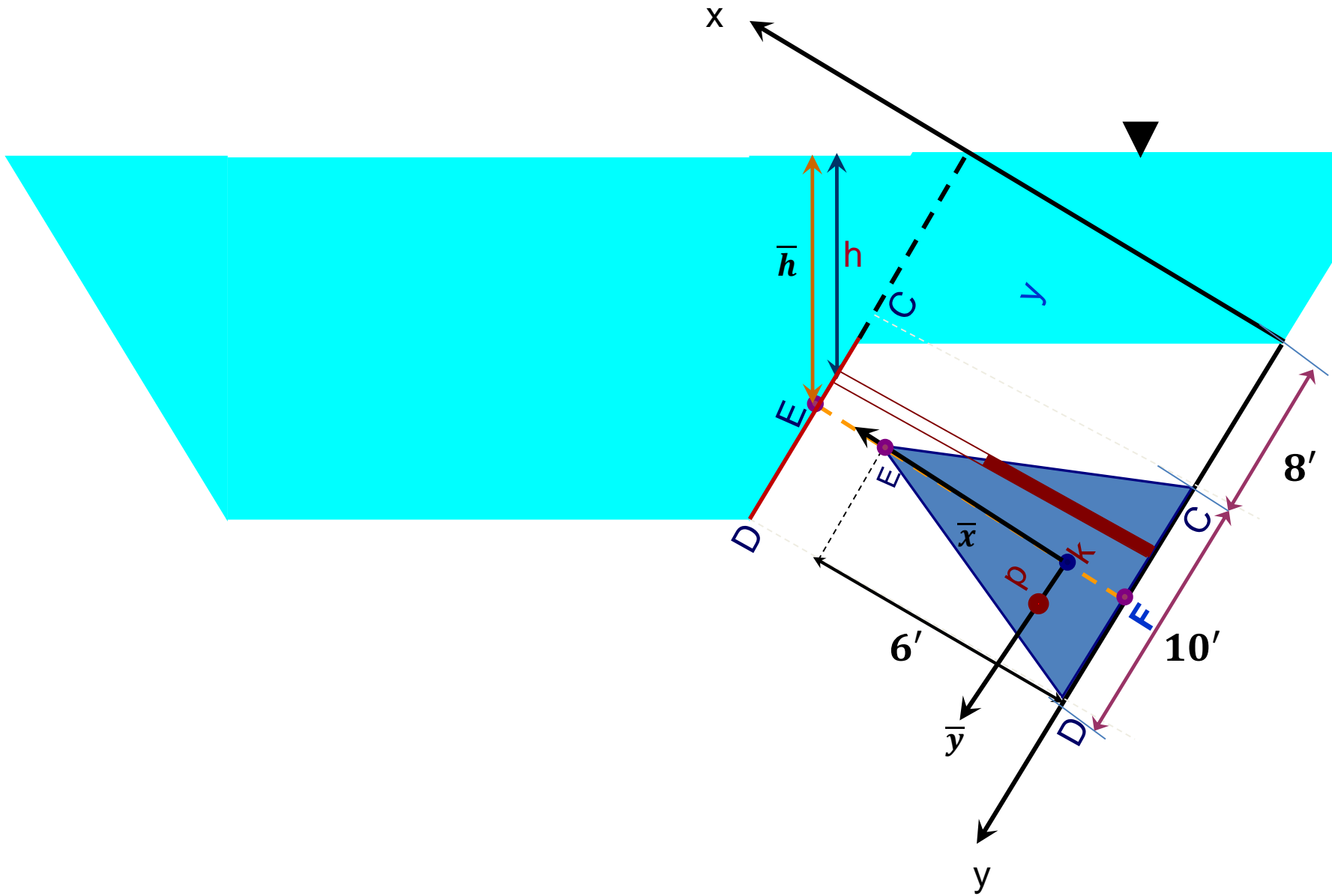
$$K \left| \begin{array}{l} x_k = \frac{1}{3} \times 6 = 2' \\ y_k = \frac{10}{2} + 5 = 13' \end{array} \right.$$

$$F = \bar{P}A = \rho \frac{g}{g_c} \bar{h}A = 0.8 \times 62.4 \times \frac{32.2}{32.2} \times 13 \sin 30^\circ \times \frac{6 \times 10}{2}$$

$\rightarrow F = 9734.4 \text{ lb}_f$

نیروی وارد از طرف سیال بر سطح دیچه

مقدار نیروی وارد شده بر دریاچه با استقامت از آنکترال گیری



$$F = \int_A p dA = \int_A \rho \frac{g}{g_c} h dA$$

$$= \int_8^{18} \rho \frac{g}{g_c} h x dy = \int_8^{18} \rho \frac{g}{g_c} (y \sin \alpha) x dy$$

$$\rightarrow F = \left( \rho \frac{g}{g_c} \sin \alpha \right) \int_8^{18} y x dy = \left( \rho \frac{g}{g_c} \sin \alpha \right) \left[ \int_8^{13} y x dy + \int_{13}^{18} y x dy \right]$$



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \text{میدانیم که:}$$

$$x = \frac{6}{5} (y - 8) \quad \text{معادله خط CE}$$

$$x = \frac{6}{5} (18 - y) \quad \text{معادله خط DE}$$

$$\rightarrow F = \left( \rho \frac{g}{g_c} \sin 30^\circ \right) \left[ \int_8^{13} \frac{6}{5} (y - 8) y dy + \int_{13}^{18} \frac{6}{5} (18 - y) y dy \right]$$

$$\rightarrow 0.8 \times 62.4 \times \frac{32.2}{32.2} \times \frac{1}{2} \left[ \int_8^{13} \frac{6}{5} (y - 8) y dy + \int_{13}^{18} \frac{6}{5} (18 - y) y dy \right]$$

$$\rightarrow \quad \quad \quad \mathbf{F = 9734.4 \text{ lb}_f}$$

$$P \left| \begin{array}{l} x_P \\ y_P \end{array} \right. \quad \text{بدست آوردن مختصات}$$

$$x_p = \bar{x} + \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}A}$$

از آنجا که در پیه مثلثی شکل به شکل یک مثلث متساوی الساقین است پس محور مرکزی که به موازات محور

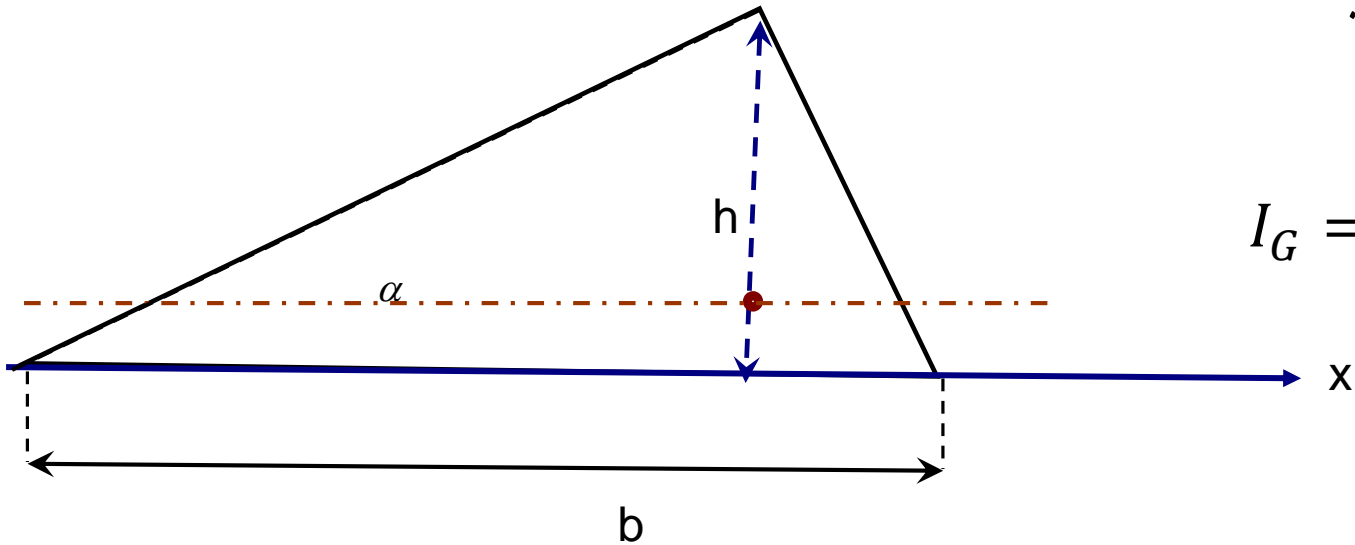
$$X \text{ هست همان محور تقارن است، یعنی: } \bar{I}_{xy} = 0$$

$$x_p = \bar{x} = 2'$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A}$$

بدست آوردن  $I_G$

کشادوم سطح نسبت به محور  $\alpha$

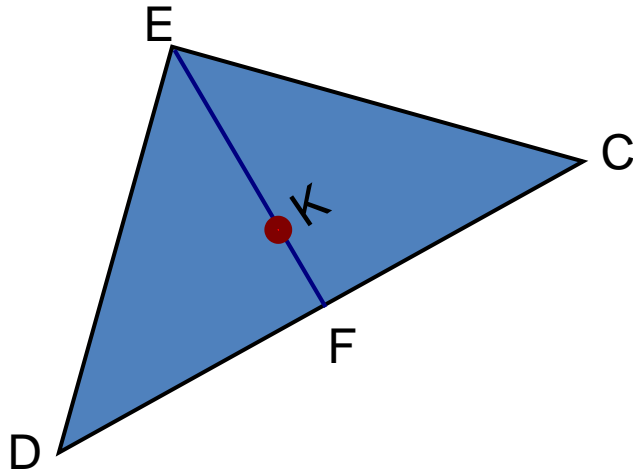


$$I_G = \frac{bh^3}{36}$$

کشادوم سطح نسبت به محور  $x$

$$I_{x-x} = \frac{1}{12}bh^3$$

چون محاسبه  $I_G$  شکل مثلث است پس در چه راه صورت دو مثلث در نظر میگیریم



$$EF=6$$

$$DF=5$$

$$y_p = \left( 13 + \frac{2 \times 6 \times 5^3}{12 \times 13 \times 30} \right) = 13.32'$$



دو مثلث EDF , ECF

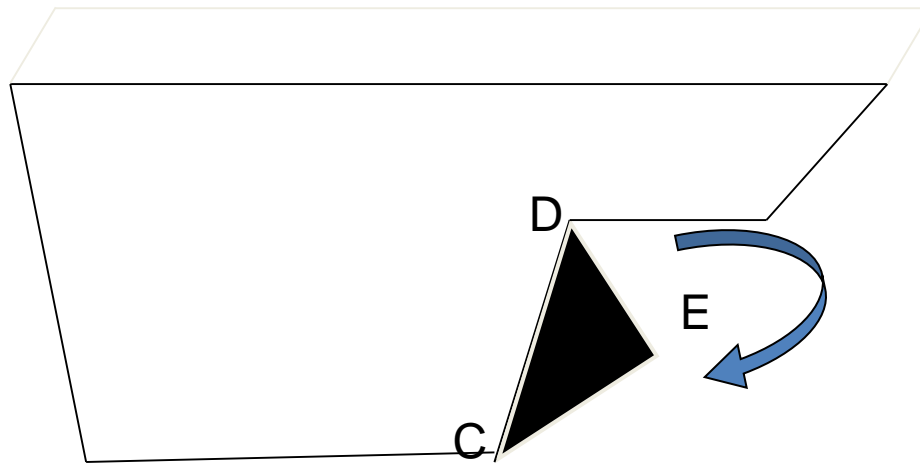
$$\bar{x} = 2'$$

اسم  $x_p$

آن همان

از مرکز پین تر قرار دارد ولی 0.32

مرکز فشار به اندازه

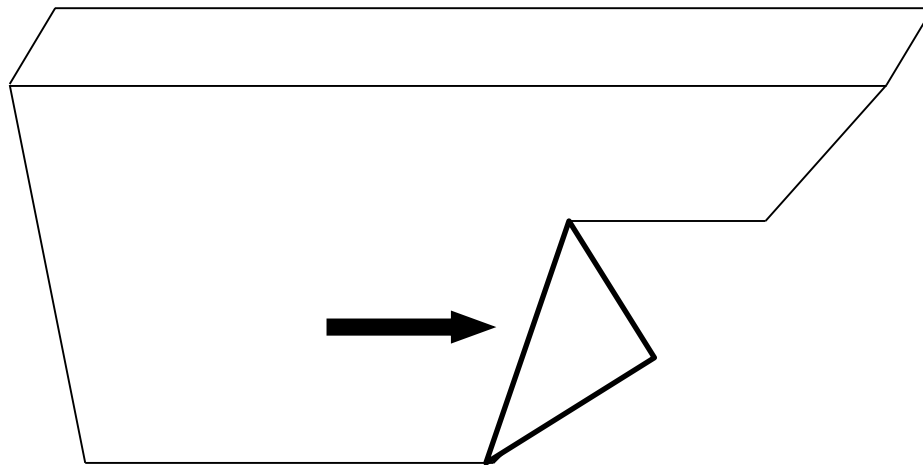


دوران، پرخش دریک

$$F \times 2' \leq F' \times 6'$$

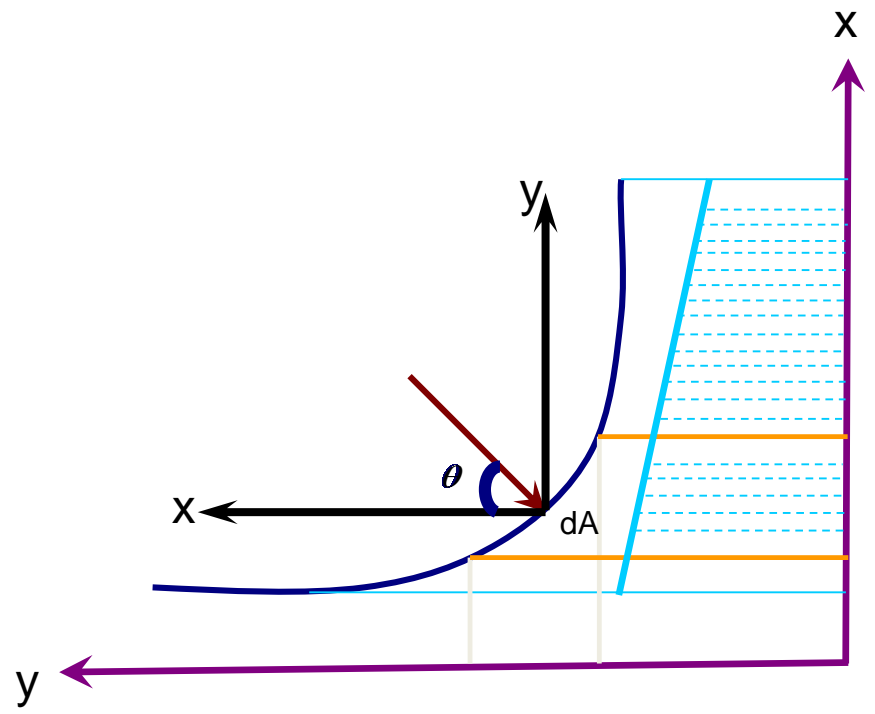
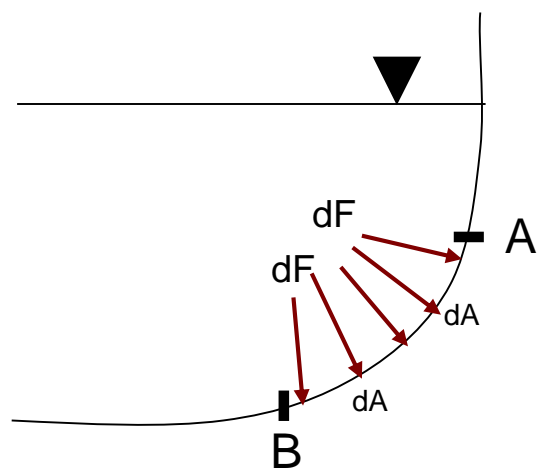
$$9734.4 \times 2' \leq F' \times 6'$$

$$\rightarrow F' \geq 3244.8 \text{ lb}_f$$



جابجاشدن دریک

ج: محاسبه نیرو بر روی سطوح خمیده



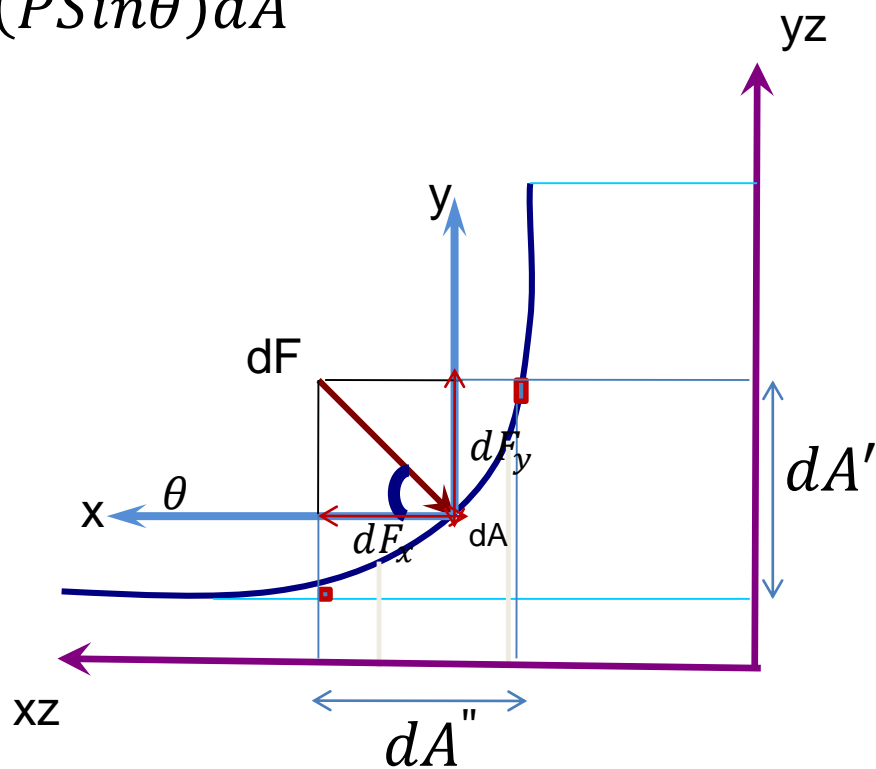
$$F_x = \int_A (P \cos \theta) dA$$

$$dF_y = P dA \sin \theta \rightarrow F_y = \int_A (P \sin \theta) dA$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$dA \cos \theta = dA'$$

$$dA \sin \theta = dA''$$



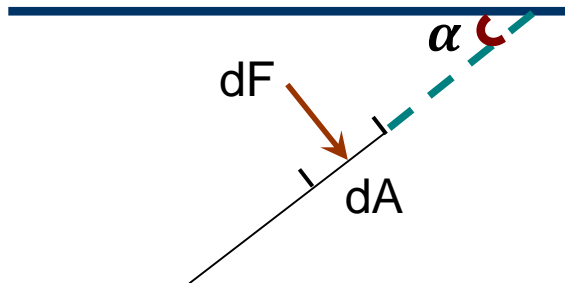
مولفه قائم نیرو = وزن سیالی که روی سطح قرار دارد.

مولفه افقی نیرو = نیروی وارد بر تصویر سطح بر روی یک صفحه عمود است.



# The Pressure Prism

نشور فشار



نیروی وارد شده بر المنت سطح  $dA$

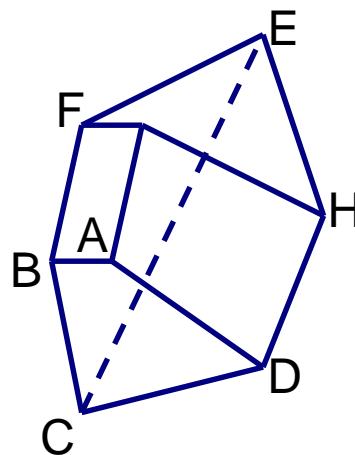
$$dF = P dA$$

ارتفاع  
سطح قاعده

$$F = \int_A P dA$$

یعنی نیروی وارده، حجم نشور ناقصی است که در هر نقطه از آن، ارتفاع برابر با فشار سیال در آن نقطه می باشد

مقدار نیروی وارده بر صفحه = حجم مشوری که بر روی صفحه ساخته می شود



## Bernoulli's Equation

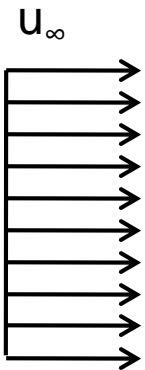
**:Stream line**

✓ مکان هندسی تقاطعی است که یک ذره سیال در مسیر حرکت بر روی آن جایگامی شود. اگر خط جریان پیوسته نباشد،

✓ خط جریان قطع شده است.

✓ خطی است که در هر نقطه مماس بر بردار سرعت سیال در آن نقطه است.

**:Plug flow**  
در این جریان بردارهای سرعت در هر مقطع موازی و هم اندازه هستند.



## The Equation of continuity

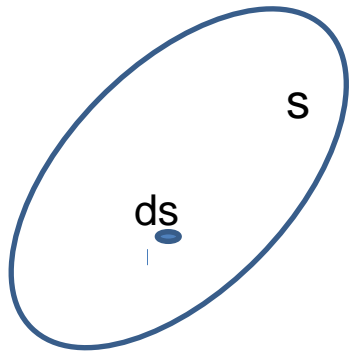
We had a previous view of :

در حالت یکپارچه، مقدار جرم سیالی که از هر مقطع مجرا عبور کند ثابت است. چون

جرمی در مسیر ذخیره نمی شود، یعنی در هر مقطع:

$$\dot{m} = \rho \bar{v} s = \text{مقدار ثابت}$$

$$\dot{m} = \rho \bar{v} s = \rho_a \bar{v}_a s_a = \rho_b \bar{v}_b s_b = \dots$$



$$d\dot{m} = \rho v ds \quad \rightarrow \quad \dot{m} = \int_S \rho v ds$$

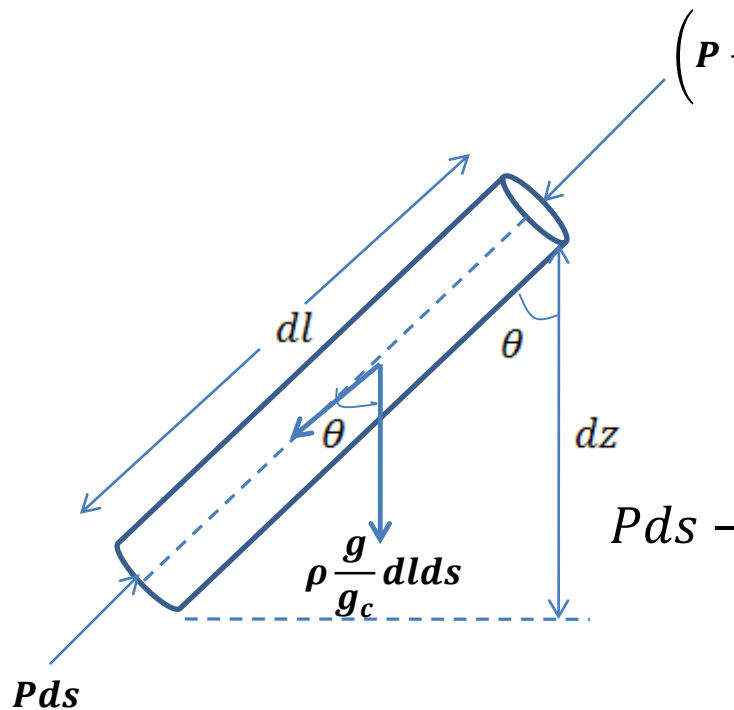
$$\dot{m} = \rho \bar{v} S$$

$$\rightarrow \quad \bar{v} = \frac{\int_S \rho v ds}{\rho S} \quad \rightarrow \quad \bar{v} = \frac{1}{S} \int_S v ds$$

✓ نحوه‌ی ارتباط سرعت، فشار و position سیال در طول مسیر چگونه است؟

اگر سیال در حالت Steady state از مسیری عبور کند و در طی مسیر، جریان Plug flow باشد، بانوشتن موازنه‌ی مونتوموم در

راستای حرکت سیال خواهیم داشت:



$$\sum F_l = \frac{ma_l}{g_c}$$

$$Pds - \left( P + \frac{dP}{dl} dl \right) ds - \rho dl ds \frac{g}{g_c} \cos \theta = \rho dl ds \frac{a_l}{g_c}$$

$$\sum F_l = \frac{ma_l}{g_c} \quad \rightarrow \quad Pds - \left( P + \frac{dP}{dl} dl \right) ds - \rho dl ds \frac{g}{g_c} \cos\theta = \rho dl ds \frac{a_l}{g_c}$$

$$\rightarrow -\frac{dP}{dl} - \rho \frac{g}{g_c} \cos\theta = \rho \frac{a_l}{g_c} \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{dl} + \rho \frac{g}{g_c} \cos\theta + \rho \frac{a_l}{g_c} = 0$$

$$\cos\theta = \frac{dz}{dl} \quad \& \quad a_l = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dl} \times \frac{dl}{dt} = u \frac{du}{dl}$$

$$\rightarrow \frac{dP}{dl} + \rho \frac{g}{g_c} \frac{dz}{dl} + \rho \frac{udu}{g_c dl} = 0$$

$$\rightarrow \frac{dP}{\rho} + \frac{g}{g_c} dz + \frac{udu}{g_c} = 0 \quad (\text{Euler's Equation})$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \rho g \quad \text{با صرف نظر از آثار ویسکوز:$$

$$\text{For constant } \rho \rightarrow \frac{P}{\rho} + \frac{g}{g_c} z + \frac{u^2}{2g_c} = C \quad \text{مقدار ثابت} \quad \textbf{Bernoulli's Eq.}$$

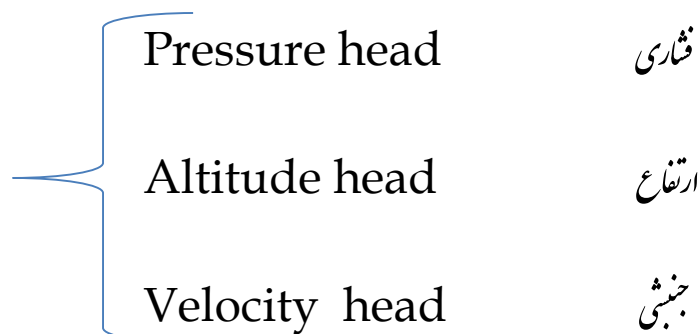
حال در نظر داریم مفاهیم حملات موجود در رابطه برنولی را بیان نماییم. اگر به بعد دو

دقت شود ملاحظه می شود که بجای دارایی بعد انرژی به ازای واحد جرم هستند که هر یک از آنها را بد می نامند.

برای مقاطع a و b که بر روی یک خط جریان واقع هستند می توان نوشت:

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{u_a^2}{2g_c} = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{u_b^2}{2g_c}$$

Head (راس):



$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{u_a^2}{2g_c} = \frac{p_b}{\rho} + \frac{u_b^2}{2g_c}$$

اگر سیال در مسیر افقی حرکت کند:

یعنی اگر در مسیر حرکت سیال سرعت زیاد شود، فشار کاهش می یابد و بالعکس.



# تصحیحات رابطه می برنولی:

1- تصحیح مربوط به افت انرژی: بی تردید اگر سیال از مقطع  $a$  بر روی یک خط جریان به مقطع  $b$  جریان

یابد مسیر دچار افت انرژی خواهد شد.

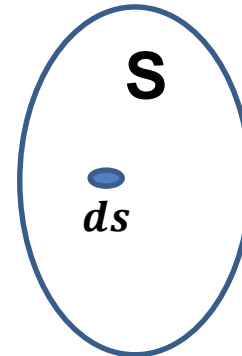
$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{u_a^2}{2g_c} = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{u_b^2}{2g_c} + h_f$$

افت انرژی به ازای واحد جرم سیال

$$dm = \rho v ds \quad \rightarrow \quad \dot{m} = \int_s \rho v ds$$

2- جایگزینی جمله مربوط به انرژی جنبشی:

$$d\dot{E}_k = dm \times \frac{v^2}{2g_c} \quad \rightarrow \quad \dot{E}_k = \int_s \rho \frac{v^3}{2g_c} ds$$



$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{\int_{s_a} \rho \frac{v_a^3}{2g_c} ds_a}{\int_{s_a} \rho v_a ds_a} = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{\int_{s_b} \rho \frac{v_b^3}{2g_c} ds_b}{\int_{s_b} \rho v_b ds_b} + h_f$$

$$\frac{u^2}{2g_c} = \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g_c}$$

$$\frac{u^2}{2g_c} = \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g_c} = \frac{\int_s \rho \frac{v^3}{2g_c} ds}{\rho \bar{v} s}$$

$$\alpha = \frac{1}{s} \int_s \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^3 ds$$

Kinetic Energy correction factor

ضریب تصحیح انرژی جنبشی



$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f$$

3. اضافه کردن جمله ای برای وسائلی که به سیال انرژی می دهند یا از آن انرژی می گیرند.

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} \pm \eta w_p = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f$$

$\eta$ : راندمان وسیله

$w_p$ : انرژی به ازای واحد جرم سیال

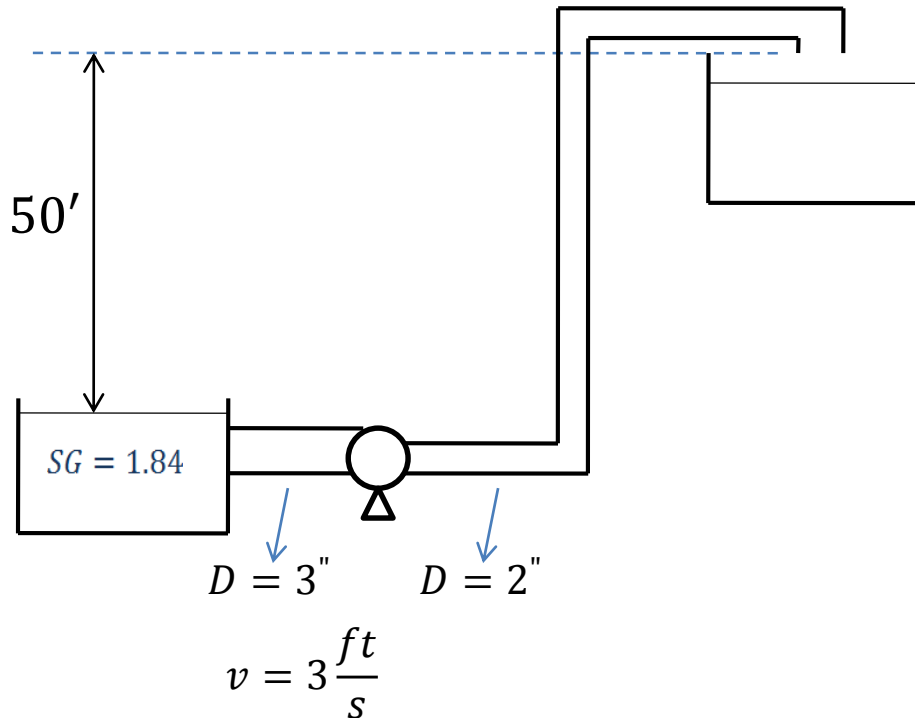
**سوال:** مطابق شکل پمپ بارانمان 60 درصد محلولی با چگالی نسبی 1.84 را از داخل منبعی که به یک لوله با قطر 3 اینچ

متصل است به مخزن دیگری انتقال می دهد. مخزن دوم توسط یک لوله با قطر 2 اینچ که به خروجی پمپ متصل است تغذیه می

شود. انتهای لوله 2 اینچ در ارتفاع 50 فوت از سطح مایع در مخزن اولی قرار گرفته است. سرعت در لوله 3 اینچ، 3 فوت بر ثانیه می باشد.

الف) توان پمپ را محاسبه کنید.

ب) چه اختلاف فشاری در دو طرف پمپ ایجاد می شود؟ افت انرژی در تمامی خط لوله و سیستم می باشد.  $10 \frac{ft \cdot lbf}{lb_m}$



با نوشتن رابطه برنولی بین مقاطع a و b که بین آنها خط جریان وجود دارد خواهیم داشت:

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} + \eta w_p = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f$$

$$\bar{v}_b s_b = \bar{v}_c s_c \rightarrow \bar{v}_b = \bar{v}_c \left( \frac{s_c}{s_b} \right) = \bar{v}_c \left( \frac{D_c}{D_b} \right)^2 \rightarrow \bar{v}_b = 3 \left( \frac{3}{2} \right)^2 = 6.75 \frac{ft}{s}$$

قابل صرف نظر

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} + \eta w_p = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f$$

$$\alpha_b \cong 1.0 \rightarrow \eta w_p = \frac{g}{g_c} (z_b - z_a) + \frac{\bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f$$

$$0.6 \times w_p = \frac{32.2}{32.2} (50) + \frac{1 \times 6.75^2}{2 \times 32.2} + 10 \rightarrow w_p = 101.1 \frac{ft \cdot lb_f}{lb_m}$$

$$\dot{m} = \rho_c \bar{v}_c s_c = 1.84 \times 62.4 \times 3 \times \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{12}\right)^2 = 17.66 \frac{lb_m}{s}$$

$$power = \frac{\dot{m} \times w_p}{550} = \frac{17.66 \times 101.1}{550} = 3.25 \text{ hp} \quad 1 \text{ hp} = 550 \frac{ft \cdot lb_f}{s} = 746 \frac{N \cdot m}{s} = \frac{J}{s}$$

$$\frac{p_c}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_c + \frac{\alpha_c \bar{v}_c^2}{2g_c} + \eta w_p = \frac{p_d}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_d + \frac{\alpha_d \bar{v}_d^2}{2g_c} + h_f$$

$$\bar{v}_d = \bar{v}_b \rightarrow \bar{v}_d = \bar{v}_b = 6.75 \frac{ft}{s}$$

$$\frac{p_d - p_c}{1.84 \times 62.4} = 0.6 \times 101.1 + \frac{1 \times 3^2 - 1 \times 6.75^2}{2 \times 32.2}$$

$$\rightarrow \Delta P = 6902 \frac{lb_f}{ft^2} \div 144 = 47.6 \text{ psi} \div 14.7 = 3.26 \text{ atm}$$

# Momentum Macroscopic Balance

موازنه ماکروسکوپیک موتوم

$$\sum F = \frac{1}{g_c} (\dot{M}_b - \dot{M}_a)$$

Rate موتوم خروجی و ورودی سیال

$$P_a S_a - P_b S_b + F_w - F_g = \frac{1}{g_c} (\dot{M}_b - \dot{M}_a)$$

$$dm = \rho v ds \rightarrow d\dot{M} = \rho v^2 ds \rightarrow \dot{M} = \int_s \rho v^2 ds$$

$$\dot{M} = \beta \rho \bar{v}^2 s \rightarrow \beta = \frac{1}{s} \int_s \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^2 ds$$

## Momentum Correction Factor

ضریب تصحیح موتوم

در نتیجه خواهیم داشت:

$$P_a S_a - P_b S_b + F_w - F_g = \frac{1}{g_c} (\beta_b \rho_b \bar{v}_b^2 S_b - \beta_a \rho_a \bar{v}_a^2 S_a) \rightarrow$$

$$P_a S_a - P_b S_b + F_w - F_g = \frac{1}{g_c} (\beta_b \dot{m} \bar{v}_b - \beta_a \dot{m} \bar{v}_a) \rightarrow$$

$$P_a S_a - P_b S_b + F_w - F_g = \frac{\dot{m}}{g_c} (\beta_b \bar{v}_b - \beta_a \bar{v}_a)$$

$\beta$  هم مانند  $\alpha$  در جریان درهم دون لوله بسیار به یک نزدیک است.

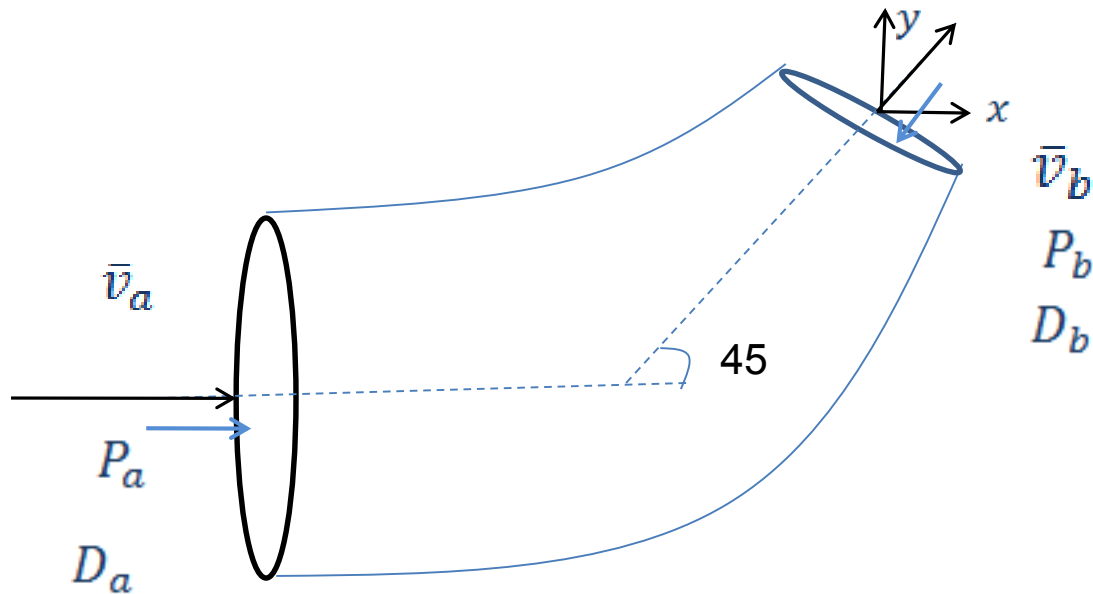


**سوال:** آب با دانسیته  $998 \frac{Kg}{m^3}$  به طور افقی با سرعت  $1 \frac{m}{s}$  و فشار  $100 \frac{KN}{m^2}$  gauge به یک اتصال با قطر ورودی 50 میلیمتر وارد

می شود. آب این اتصال را به طور افقی در همان سطح قبلی و با زاویه 45 درجه ترک می نماید قطر خروجی اتصال 20 میلیمتر می باشد. با فرض اینکه ضرایب تصحیح انرژی

جنشی  $\alpha$  و موثوم  $\beta$ ، در ورودی و خروجی اتصال برابر یک باشند و اصطکاک نیز ناچیز باشد.

الف) فشار gauge خروجی چقدر است؟ ب) نیروی که در جهات X و Y به سیال وارد می شوند چقدر است؟



$$\bar{v}_b = \bar{v}_a \left( \frac{S_a}{S_b} \right) = \bar{v}_a \left( \frac{D_a}{D_b} \right)^2 = 1 \times \left( \frac{50}{20} \right)^2 = 6.25 \frac{m}{s}$$

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f^0$$

$$\frac{100000}{998} + \frac{1 \times 1^2}{2 \times 1} = \frac{P_b}{998} + \frac{1 \times 6.25^2}{2 \times 1} \rightarrow P_b = 81010 \text{ pa gauge}$$

**X-component :**

$$P_a S_{a,x} - P_b S_{b,x} + F_{w,x} - F_{g,x} = \frac{\dot{m}}{g_c} (\beta_b \bar{v}_{b,x} - \beta_a \bar{v}_{a,x})$$

$$S_{a,x} = S_a = \frac{\pi}{4} \left( \frac{50}{1000} \right)^2 = 0.001964 \text{ m}^2$$

$$S_{b,x} = S_b \cos \theta = \frac{\pi}{4} \left( \frac{20}{1000} \right)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.000222 \text{ m}^2$$

$$v_{a,x} = v_a = 1.0 \frac{m}{s} \quad \bar{v}_{b,x} = \bar{v}_b \cos\theta = 6.25 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4.42 \frac{m}{s}$$

$$\dot{m} = \rho_a \bar{v}_a S_a = 998 \times 1.0 \times 0.001964 = 1.96 \frac{kg}{s}$$

$$100000 \times 0.001964 - 81010 \times 0.000222 + F_{w,x} = \frac{1.96}{1} (1 \times 4.42 - 1 \times 1)$$

$$\longrightarrow F_{w,x} = -171.4 \text{ N}$$

***Y – component:***

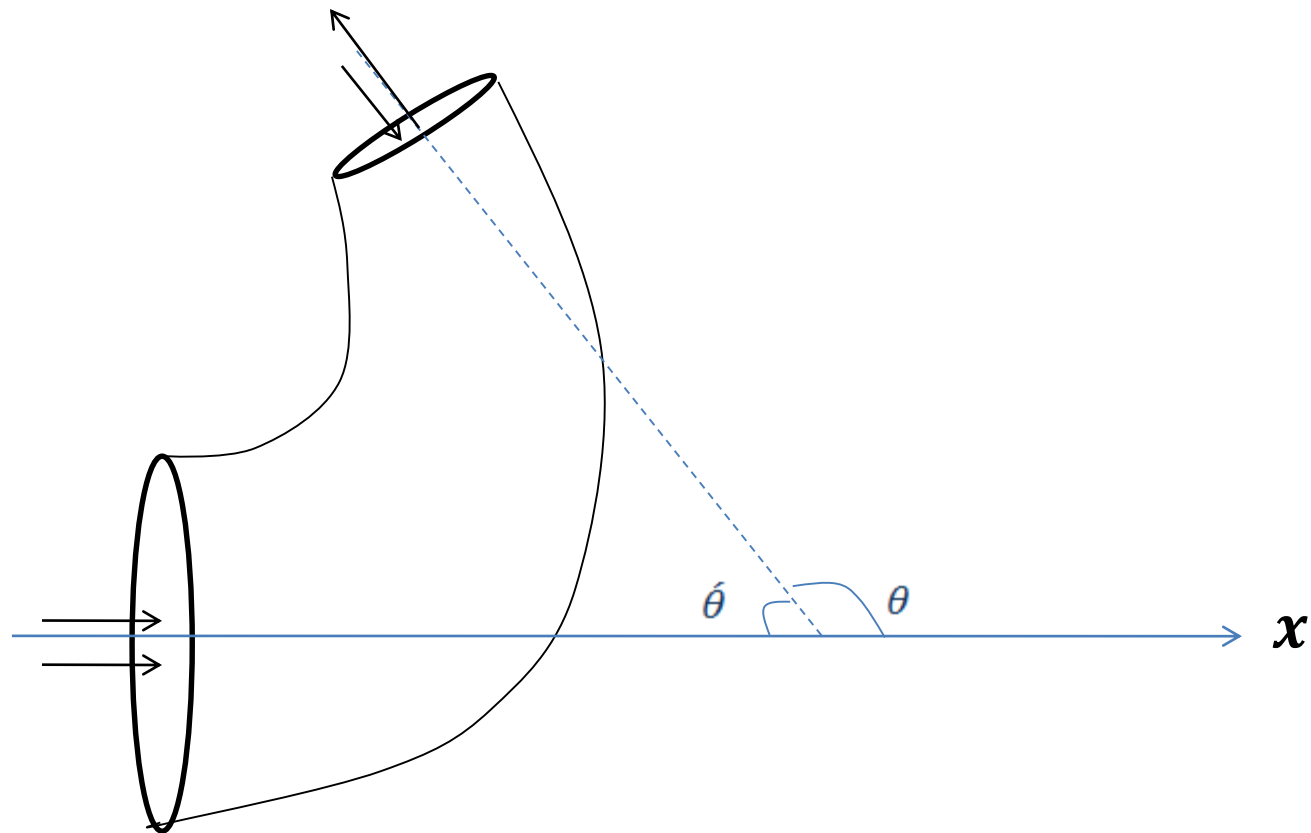
$$P_a S_{a,y} - P_b S_{b,y} + F_{w,y} - F_{g,y} = \frac{\dot{m}}{g_c} (\beta_b \bar{v}_{b,y} - \beta_a \bar{v}_{a,y})$$

$$S_{a,y} = 0 \quad , \quad S_{b,y} = S_b \sin\theta = 0.000222 \text{ m}^2$$

$$\bar{v}_{a,y} = 0 \quad , \quad \bar{v}_{b,y} = \bar{v}_b \sin\theta = 4.42 \frac{m}{s}$$

$$100000 \times 0 - 81010 \times 0.000222 + F_{w,y} = \frac{1.96}{1} (1 \times 4.42 - 1 \times 0)$$

$$\longrightarrow F_{w,y} = 26.64 \text{ N} \quad \longrightarrow F = \sqrt{F_{w,x}^2 + F_{w,y}^2} = 173.457 \text{ N}$$

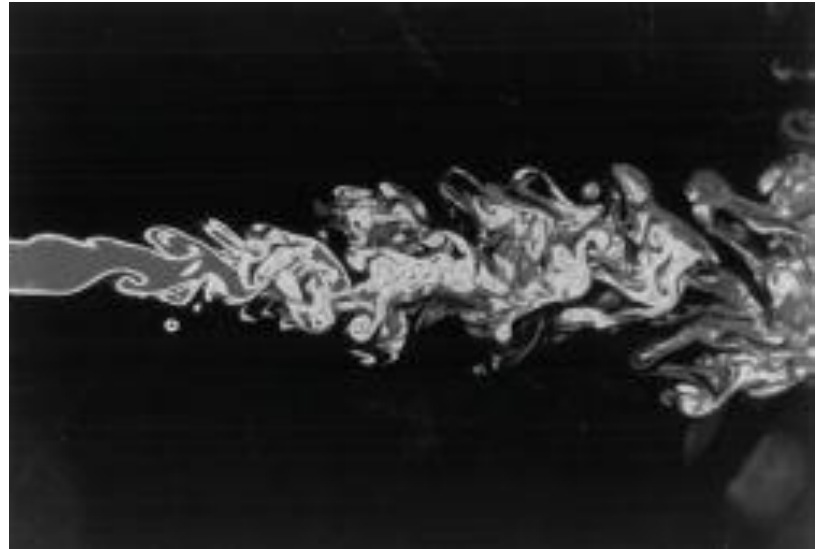


$$s_{a,x} = s_a \quad , s_{b,x} = s_b \cos\theta \quad , \bar{v}_{a,x} = \bar{v}_a \quad , \bar{v}_{b,x} = \bar{v}_b \cos\theta$$

$$s_{a,y} = 0 \quad , s_{b,y} = s_b \sin\theta \quad , \bar{v}_{a,y} = 0 \quad , \bar{v}_{b,y} = \bar{v}_b \sin\theta$$

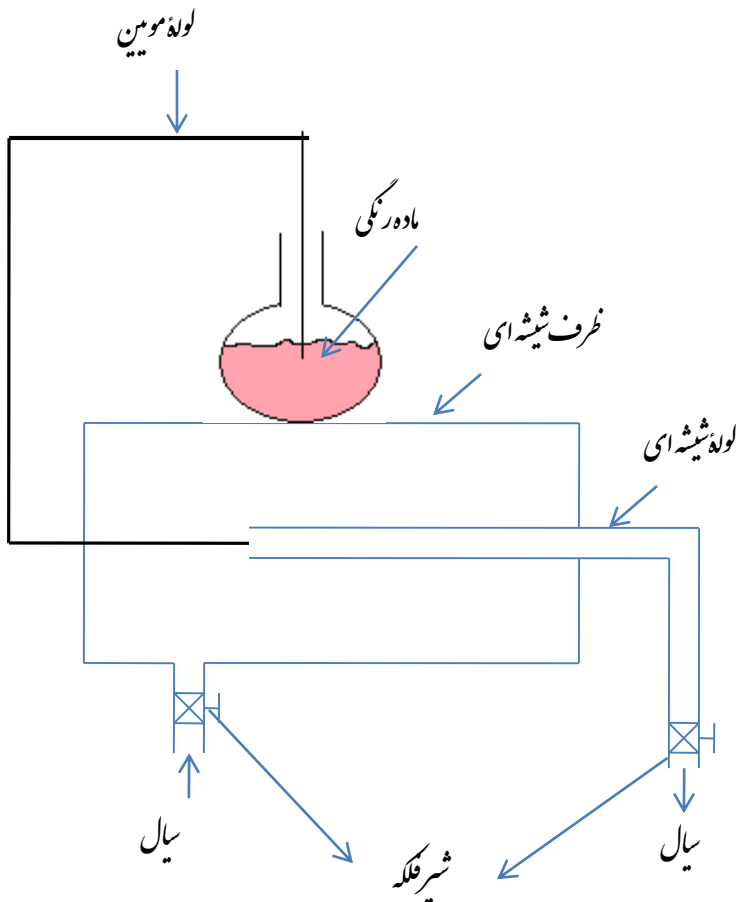
Turbulent Flow, Turbulency :

جریان در هم:



# Reynold's Experiment

# آزمایش رینولدز



$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu}$$

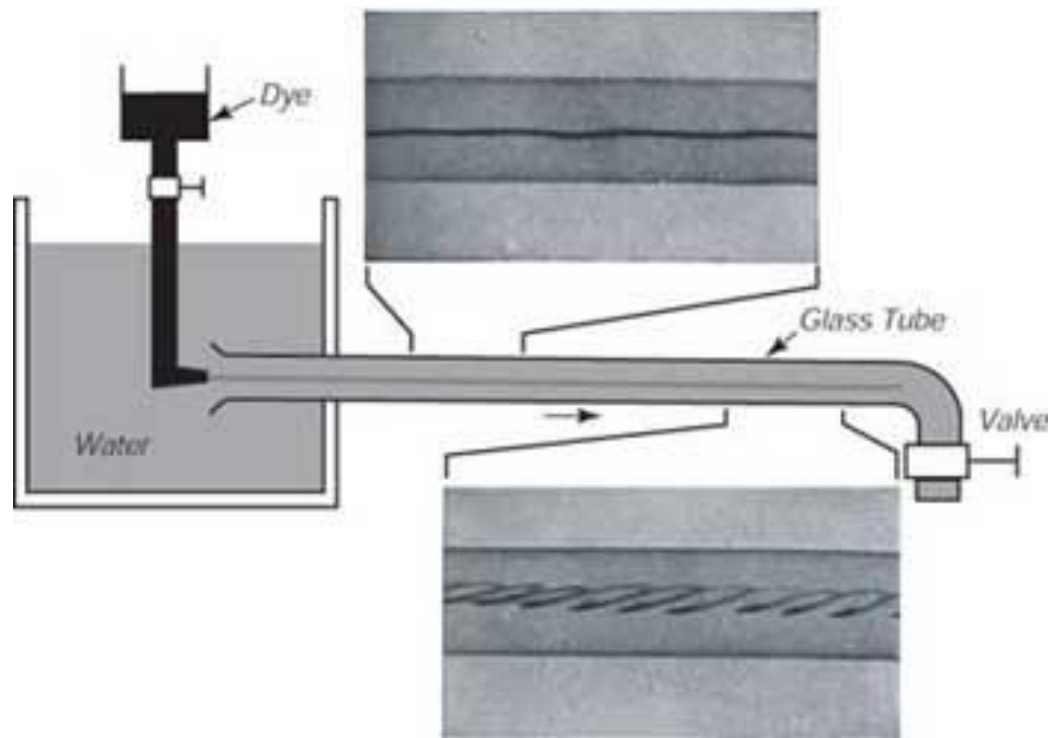
$N_{Re} < 2100$     *Laminar Flow*

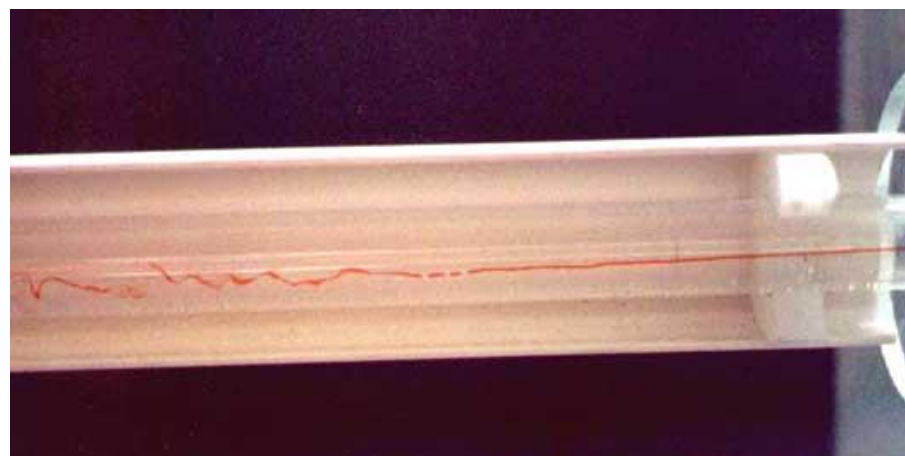
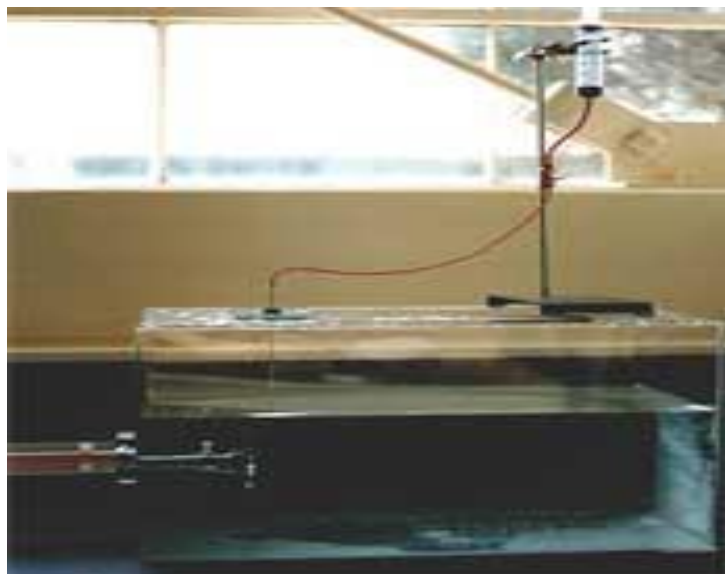
$2100 < N_{Re} < 4000$     *Transition Flow*

$N_{Re} > 4000$     *Turbulent Flow*

# Reynold's Experiment

# آزمایش رینولدز







# Turbulent Flow

**Eddy** چرخانه:

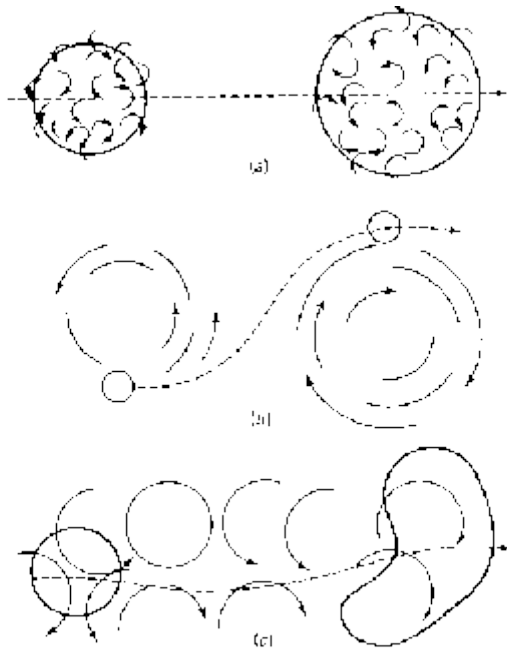
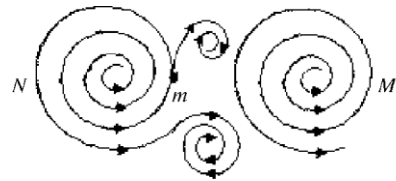
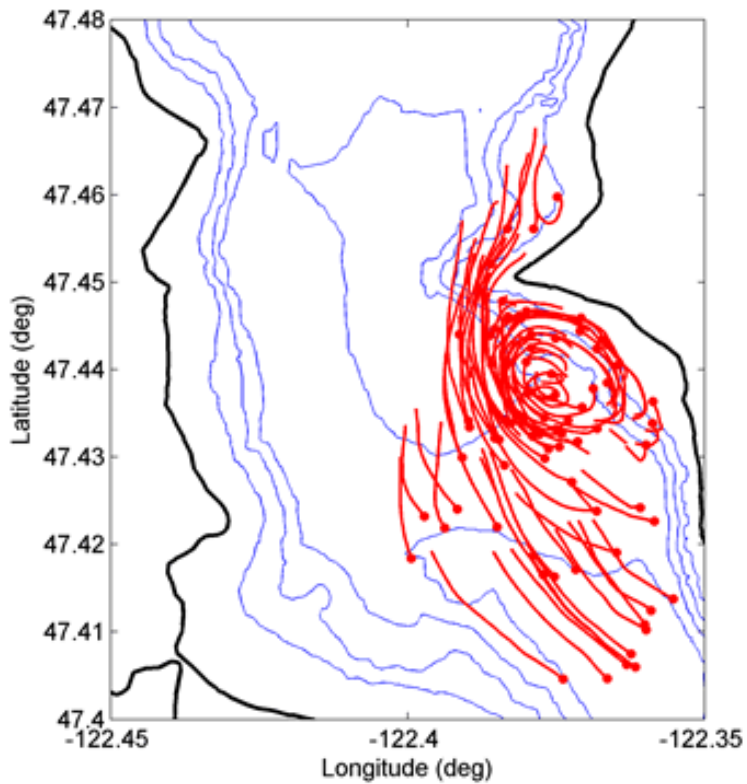
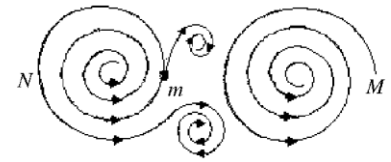


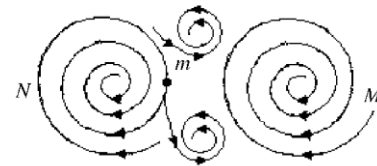
Figure 9: Scales of turbulence. (Seinfeld, 1986)



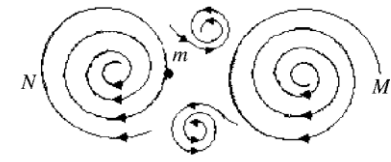
(a) Object  $m$  is situated as in Figure 2 (b)



(b) Object  $m$  is situated as in Figure 3 (a)



(c) Object  $m$  is situated as in Figure 2 (c)



(d) Object  $m$  is situated as in Figure 3 (d)



## *Modeling of Turbulent Flow*

$$u_i = \bar{u} + \acute{u}$$

$$v_i = \bar{v} + \acute{v}$$

$$w_i = \bar{w} + \acute{w}$$

$u_i, v_i, w_i$       *Instantaneous Velocities*

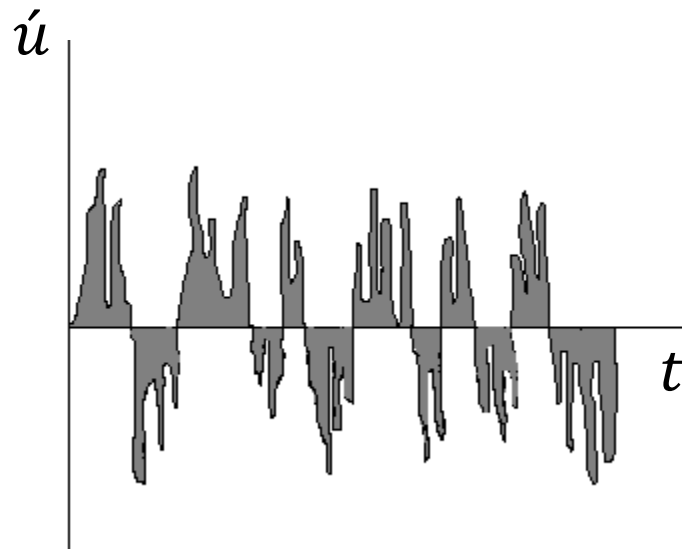
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$       *Average Velocities*

$\acute{u}, \acute{v}, \acute{w}$       *Deviating Velocities*

$$P_i = \bar{P} + \acute{P}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} u \, dt$$

*Average Deviating Velocity*



$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$$

$$\overline{u^2} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} u^2 \, dt \neq 0$$

If  $\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2}$



Isotropic Turbulency

**Nature of  
Turbulency:**

Wall: اصطکاک‌گانی که سیال بادپواره دارد.

Free: برخورد و جریان سیال در یک مقطع

## Intensity and scale of Turbulency:

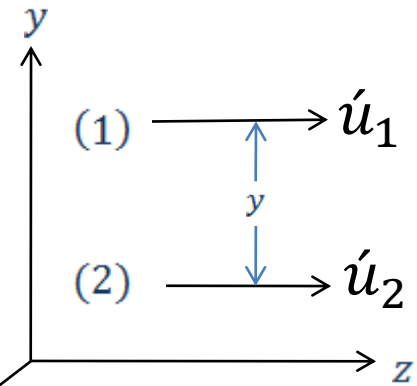
شدت توربولنسی  $\longrightarrow I = 100 \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}}$

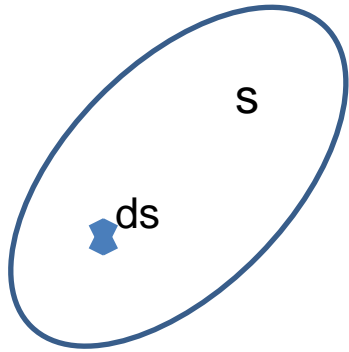
توربولنسی معمولی	0.5 – 2%
توربولنسی شدید	5 – 10%

## Scale of Turbulency

$$L_y = \int_0^{\infty} R_{\dot{u}} dy$$

Correlation Coefficient:  $R_{\dot{u}} = \frac{\overline{\dot{u}_1 \times \dot{u}_2}}{\sqrt{\overline{\dot{u}_1^2}} \times \sqrt{\overline{\dot{u}_2^2}} \quad x$





$$d\dot{m} = \rho u' ds$$

$$d\dot{M} = \rho u'^2 ds$$

$$\dot{M} = \int_S \rho u'^2 ds > 0$$

$$(\tau_{xz})_{lam} = -\frac{\mu}{g_c} \left( \frac{dv_z}{dx} \right)$$

$$(\tau_{xz})_{tur} = -\frac{E_m}{g_c} \left( \frac{dv_z}{dx} \right)$$

$E_m$ : Eddy Viscosity

$$(\tau_{xz})_{total} = -\frac{(E_m + \mu)}{g_c} \left( \frac{dv_z}{dx} \right)$$

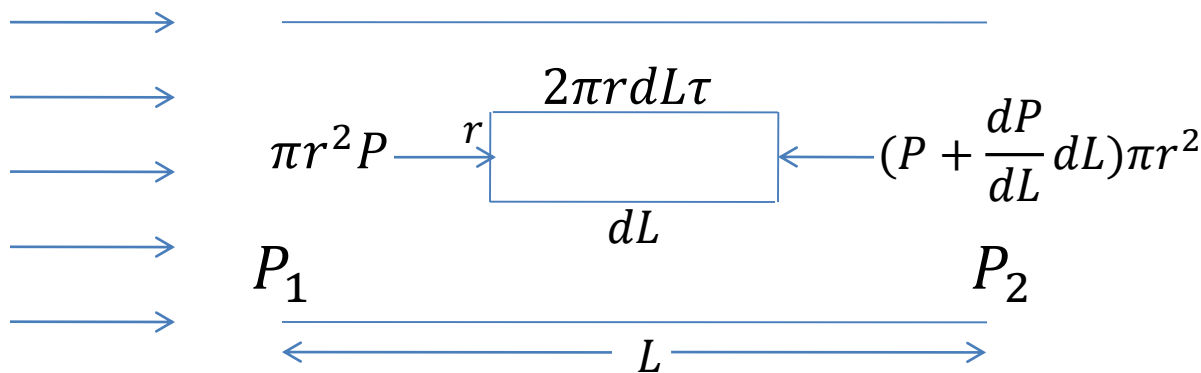
# Energy loss calculations

# محاسبات افت انرژی

$h_{fs}$

*Skin Friction*

افت انرژی بواسطه اصطکاک دیواره ای





$$\pi r^2 P - \left( P + \frac{dP}{dL} \right) \pi r^2 - 2\pi r dL \tau = 0 \quad \rightarrow \quad \tau = -\frac{dP}{dL} \frac{r}{2} \quad \rightarrow \quad \tau_w = -\frac{dP}{dL} \frac{r_w}{2}$$

$$\rightarrow \tau_w = -\frac{dP}{dL} \frac{D}{4} = -\frac{\Delta P}{L} \frac{D}{4}$$

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_1 + \frac{\alpha_1 \bar{v}_1^2}{2g_c} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_2 + \frac{\alpha_2 \bar{v}_2^2}{2g_c} + h_{fs}$$

$$\rightarrow h_{fs} = \frac{P_1 - P_2}{\rho} = -\frac{\Delta P}{\rho} \quad \rightarrow \quad -\Delta P = \rho h_{fs}$$

*Fanning Friction Factor*

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho \bar{v}^2}{2g_c}} = \frac{\text{تشن در دیواره}}{\text{بد سرعت متوسط} \times \text{دانشیه}}$$

$$f = \frac{-\frac{\Delta P}{L} \frac{D}{4}}{\frac{\rho \bar{v}^2}{2g_c}} = \frac{\frac{\rho h_{fs} D}{L} \frac{D}{4}}{\frac{\rho \bar{v}^2}{2g_c}}$$

$$\rightarrow h_{fs} = 4f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g_c} = f' \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g_c}$$

*f': Darcy's Friction Factor*

## Friction Factor Calculations

محاسبات ضریب اصطکاک در جریان درون لوله ها:

### a) Laminar Flow

$$\tau = -\frac{\mu}{g_c} \frac{du}{dr} = -\frac{\Delta P}{L} \frac{r}{2} \quad \rightarrow \quad du = \frac{g_c \Delta P}{\mu} \frac{r}{2} dr \quad \rightarrow \quad \int_0^u du = \frac{g_c \Delta P}{2\mu} \frac{1}{L} \int_{r_w}^r r dr$$

$$\rightarrow u = -\frac{g_c \Delta P}{4\mu} \frac{\Delta P}{L} r_w^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_w} \right)^2 \right] \rightarrow u_{max} = -\frac{g_c \Delta P}{4\mu} \frac{\Delta P}{L} r_w^2 \rightarrow \frac{u}{u_{max}} = 1 - \left( \frac{r}{r_w} \right)^2$$

$$Q = \int_s u ds = \int_0^{r_w} 2\pi u r dr = \int_0^{r_w} \left[ -\frac{g_c \Delta P}{4\mu} \frac{\Delta P}{L} r_w^2 \left( 1 - \left( \frac{r}{r_w} \right)^2 \right) \right] 2\pi r dr$$

$$\rightarrow Q = -\frac{g_c \Delta P}{8\mu} \frac{\Delta P}{L} \pi r_w^4$$

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{-\frac{g_c \Delta P}{8\mu L} \pi r_w^4}{\pi r_w^2} = -\frac{g_c \Delta P}{8\mu L} r_w^2 \rightarrow \bar{v} = -\frac{g_c \Delta P}{32\mu L} D^2$$

$$\rightarrow f = \frac{\tau_w}{\rho \frac{\bar{v}^2}{2g_c}} = \frac{-\frac{\Delta P D}{L} \frac{1}{4}}{\rho \frac{\bar{v}}{2g_c} \left(-\frac{g_c \Delta P}{32\mu L} D^2\right)}$$

$$\rightarrow f = \frac{-64\mu L D \Delta P g_c}{-4L\rho\Delta P D^2 g_c \bar{v}} = \frac{16\mu}{\rho \bar{v} D} \rightarrow f = \frac{16}{\frac{\rho \bar{v} D}{\mu}} = \frac{16}{N_{Re}}$$

$$\rightarrow \text{For Laminar Flow} \quad f = \frac{16}{N_{Re}}$$

## *b) Turbulent Flow*

Universal Velocity Distribution :

1)Viscous Sublayer

زیر لایہ ویسکوزیٹہ

2)Buffer layer

منطقہ بی طرف

3)Turbulent core

منطقہ درہم

$$u^* = \bar{v} \sqrt{\frac{f}{2}} = \sqrt{\frac{\tau_w g_c}{\rho}}$$

*Friction Velocity*

$$u^+ = \frac{u}{u^*}$$

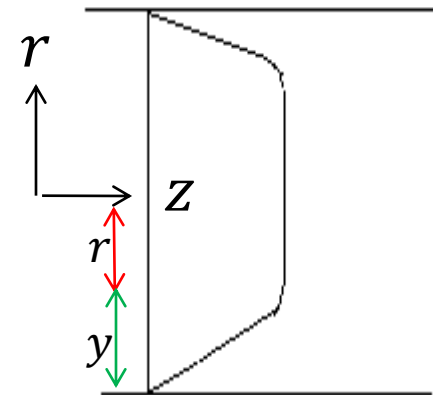
*Dimensionless Velocity*

$$y^+ = \frac{\rho u^* y}{\mu} = \frac{y}{\mu} \sqrt{\rho \tau_w g_c}$$

*Dimensionless Distance*

$$r + y = r_w = R$$

$$\rightarrow dr + dy = 0 \quad \rightarrow dr = -dy$$





### ۱) viscous sublayer

$$\tau = -\frac{\mu}{g_c} \frac{du}{dr} = \frac{\mu}{g_c} \frac{du}{dy} \quad u = u^* u^+ \quad \longrightarrow \quad du = u^* du^+$$

$$y = \frac{\mu y^+}{\rho u^*} \quad \longrightarrow \quad dy = \frac{\mu}{\rho u^*} dy^+$$

$$\longrightarrow \tau = \frac{\mu}{g_c} \frac{u^* du^+}{\frac{\mu}{\rho u^*} dy^+} = \frac{\rho u^{*2}}{g_c} \frac{du^+}{dy^+} = \tau_w \frac{du^+}{dy^+}$$

بدلیل نازک بودن لایه  $\longrightarrow \tau \approx \tau_w = \tau_w \frac{du^+}{dy^+}$

$$\longrightarrow \frac{du^+}{dy^+} = 1 \quad \longrightarrow \quad u^+ = y^+ + c$$

B.C.1 at  $y = 0$  or  $y^+ = 0$   $u$  or  $u^+ = 0 \quad \longrightarrow \quad c = 0$

$$\longrightarrow \quad u^+ = y^+$$

## 2) *Buffer Layer*

$$u^+ = 5.00 \ln y^+ - 3.05 \quad \text{رابطہ تجربی}$$

## 3) *Turbulent Core*

$$\tau = - \left( \frac{\mu + E_m}{g_c} \right) \frac{du}{dr} \approx - \frac{E_m}{g_c} \frac{du}{dr} = \frac{E_m}{g_c} \frac{du}{dy}$$

$$\rightarrow \frac{\tau g_c}{\rho} = \frac{E_m}{\rho} \frac{du}{dy} = \epsilon_m \frac{du}{dy}$$

$\epsilon_m$  : *Eddy Kinematic Viscosity*

*Prandtl in his experiments found that :*

$$1) \epsilon_m = f\left(y, \frac{du}{dy}\right)$$

$$2) \frac{\epsilon_m}{y^2 \frac{du}{dy}} = k^2 \longrightarrow \text{or } \epsilon_m = k^2 y^2 \frac{du}{dy} \longrightarrow \frac{\tau g_c}{\rho} = k^2 y^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

3) Prandtl assumed that in turbulent core  $\tau \approx \tau_w$  (unacceptable assumption)

$$\begin{aligned} \tau \approx \tau_w &\longrightarrow \frac{\tau_w g_c}{\rho} = k^2 y^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \longrightarrow \sqrt{\frac{\tau_w g_c}{\rho}} = ky \frac{du}{dy} = u^* \\ &\longrightarrow ky \frac{du}{dy} = u^* \longrightarrow du = \frac{u^*}{k} \frac{dy}{y} \longrightarrow u = \frac{u^*}{k} \ln y + c' \longrightarrow \end{aligned}$$

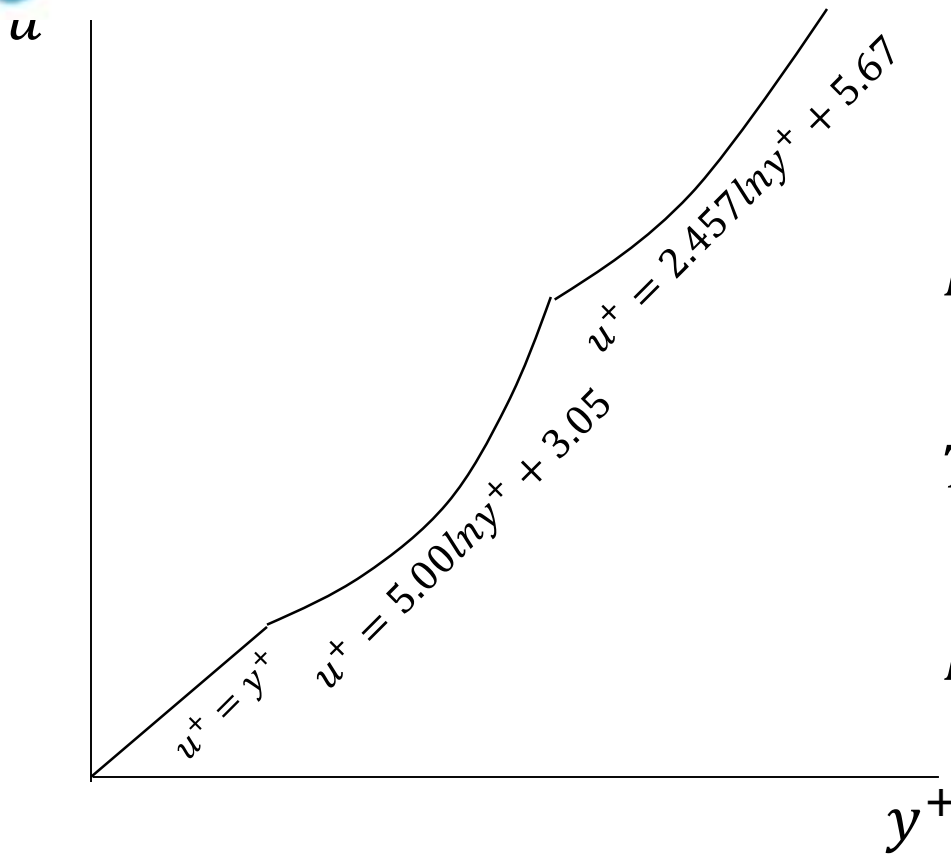
$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{k} \ln y + c'' \longrightarrow u^+ = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{\rho u^* y}{\mu} \times \frac{\mu}{\rho u^*} \right) + c'' \longrightarrow u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + C_1$$



*Experimental values of  $k$  and  $C_1$  are :*

$$\text{Prandtle : } \left\{ \begin{array}{l} k = 0.407 \\ C_1 = 5.67 \end{array} \right. \quad u^+ = 2.457 \ln y^+ + 5.67$$

$$\text{Von - Karman : } \left\{ \begin{array}{l} k = 0.4 \\ C_1 = 5.5 \end{array} \right. \quad u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$$



*Viscous Sublayer :*  $y^+ < 5$

*Buffer Layer :*  $5 < y^+ < 30$

*Turbulent Core :*  $y^+ > 30$

*Laminar Flow :*  $f = \frac{16}{N_{Re}}$

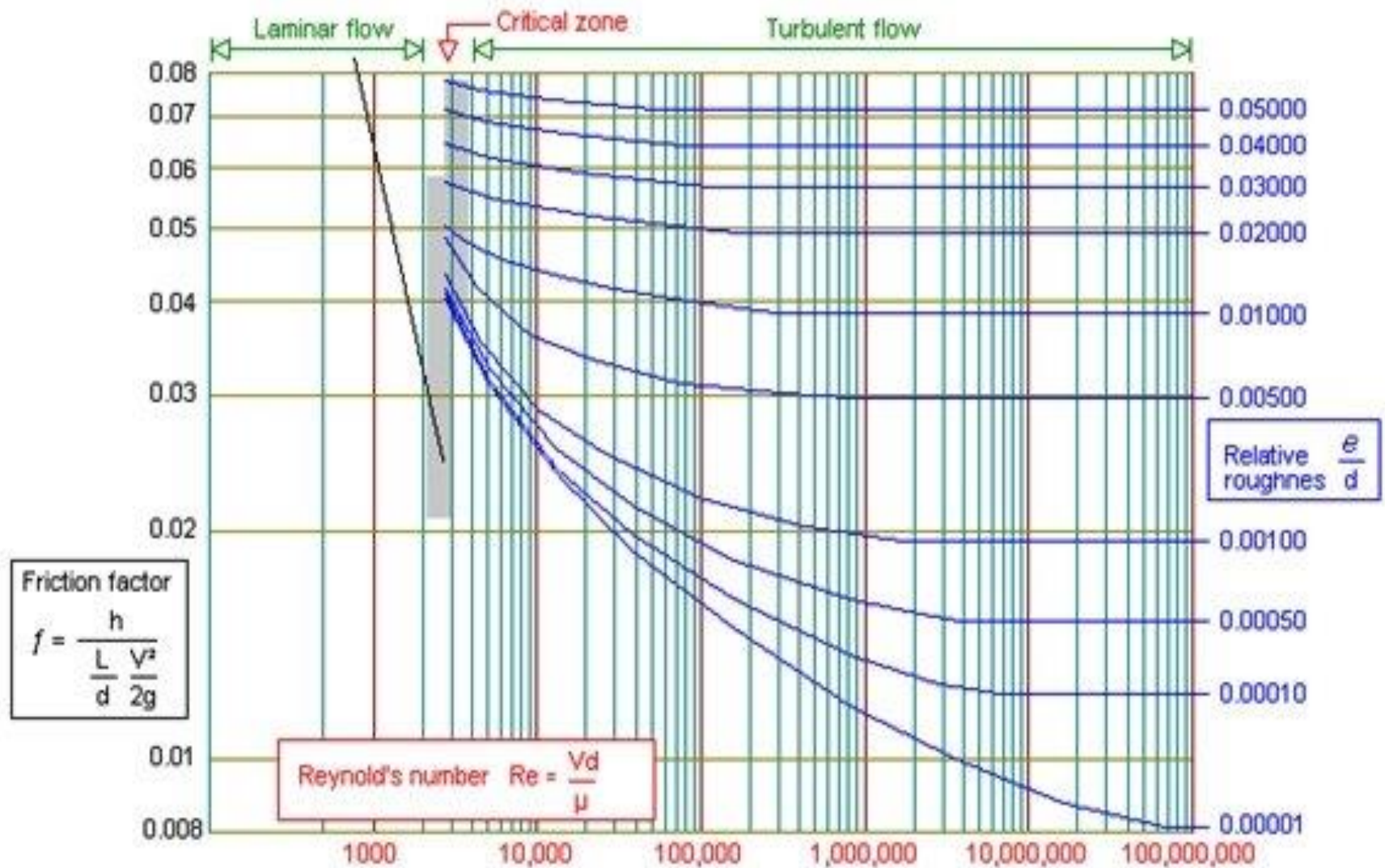
*For Turbulent Flow :  
in Smooth Pipes:*

*Prandtle :*  $\frac{1}{\sqrt{f}} = 4.06 \log(N_{Re}\sqrt{f}) - 0.6$

*Von - Karman :*  $\frac{1}{\sqrt{f}} = 4.0 \log(N_{Re}\sqrt{f}) - 0.4$



# Moody diagram (Darcy's Friction Factor)



Generally in pipes :

$$f = f\left(N_{Re}, \frac{\epsilon}{D}\right) = f\left(N_{Re}, \frac{k}{D}\right)$$

$\epsilon$  or  $k$  : Roughness [L]

زبری

$\frac{\epsilon}{D}$  or  $\frac{k}{D}$  : Relative Roughness

زبری نسبی



در جریان در هم :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 + 0.78f(15 - 22.5\sqrt{f}) \\ \beta = 1 + 3.91f \end{array} \right.$$

## **Friction from changes in velocity or direction :**

- 1. Sudden expansion**
- 2. Sudden contraction**
- 3. Fittings**

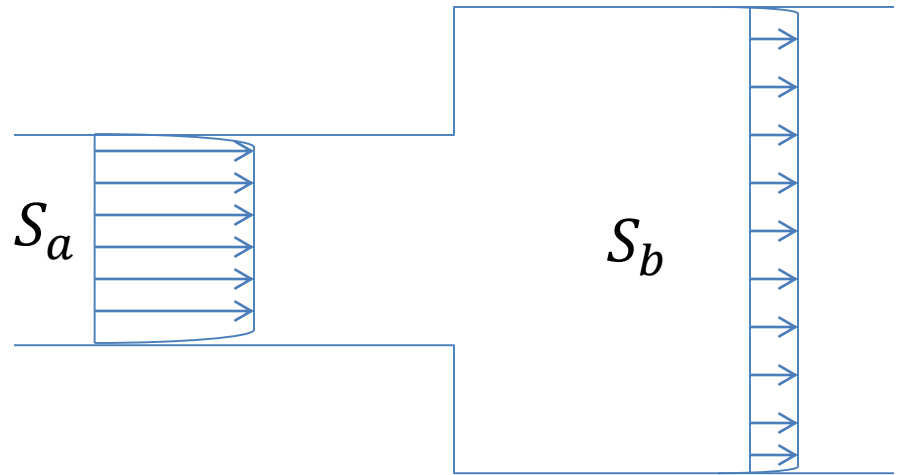
# Friction from changes in velocity or direction:

## 1) Sudden Expansion

انبساط ناگهانی

$$h_{fe} = K_e \frac{\bar{v}_a^2}{2g_c}$$

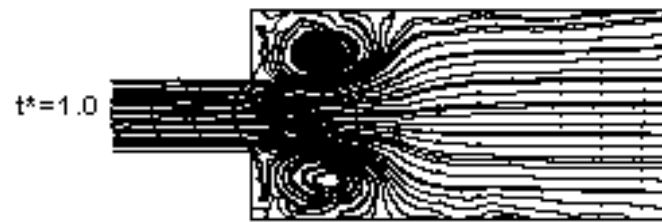
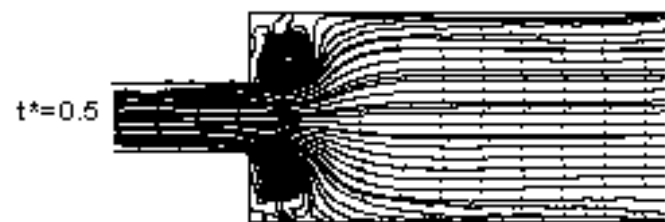
$\bar{v}_a$ :



*Down – Stream Section Average Velocity*

$K_e$  : *Expansion Coefficient (An Empirical factor)*

*Usually between 0.4 and 0.9 (Depending on  $\frac{S_a}{S_b}$  Ratio)*



Sudden expansion, Reynolds number=3000



$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f$$

$$h_{fe} = \frac{P_a - P_b}{\rho} + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2 - \alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c}$$

$$\alpha_a = \alpha_b \approx 1.0 \quad \longrightarrow \quad h_{fe} = \frac{P_a - P_b}{\rho} + \frac{\bar{v}_a^2 - \bar{v}_b^2}{2g_c}$$

*The Equation of Continuity*  $\longrightarrow \bar{v}_b = \bar{v}_a \left( \frac{S_a}{S_b} \right)$

$$\longrightarrow \quad h_{fe} = \frac{P_a - P_b}{\rho} + \frac{\bar{v}_a^2}{2g_c} \left[ 1 - \left( \frac{S_a}{S_b} \right)^2 \right]$$

*The Equation of Momentum Balance*

$$P_a S_a - P_b S_b + F_w - F_g = \frac{\dot{m}}{g_c} (\beta_b \bar{v}_b - \beta_a \bar{v}_a) , \quad \beta_a = \beta_b \approx 1.0$$

$$\rightarrow P_a S_b - P_b S_b = \frac{\rho \bar{v}_b S_b}{g_c} (\bar{v}_b - \bar{v}_a) \rightarrow$$

$$\frac{P_a - P_b}{\rho} = \frac{\bar{v}_b}{g_c} (\bar{v}_b - \bar{v}_a) = \frac{\bar{v}_a \left(\frac{S_a}{S_b}\right)}{g_c} \left[ \bar{v}_a \left(\frac{S_a}{S_b} - 1\right) \right] = \frac{\bar{v}_a^2}{2g_c} \left[ 2 \frac{S_a}{S_b} \left(\frac{S_a}{S_b} - 1\right) \right]$$

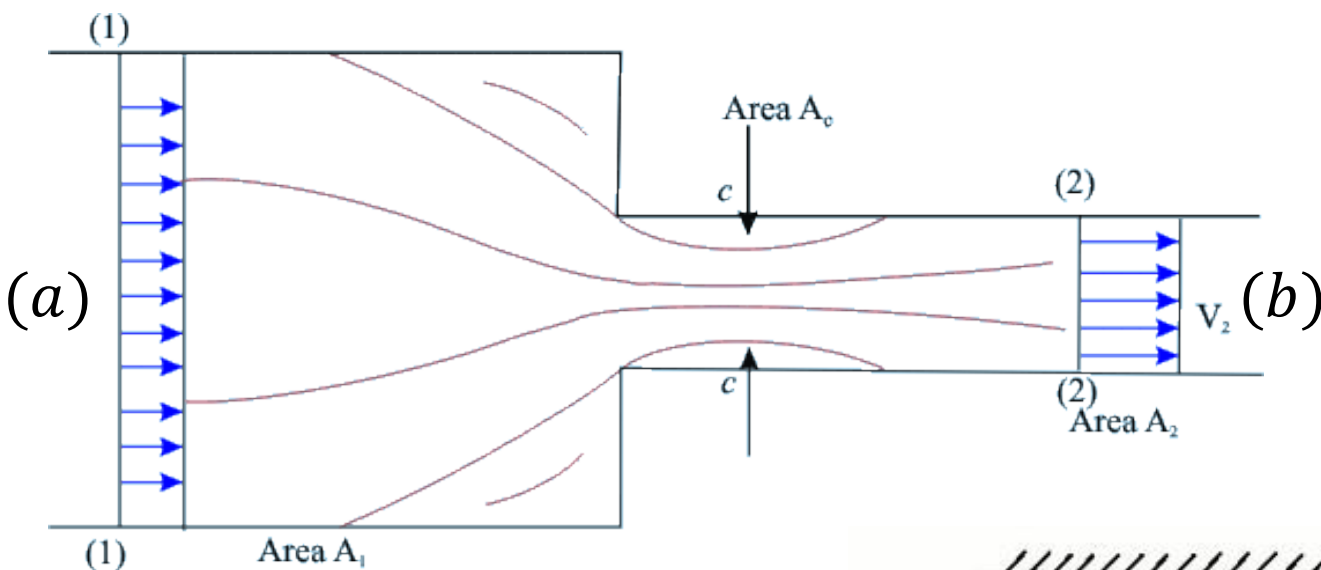
$$\rightarrow h_{fe} = \frac{\bar{v}_a^2}{2g_c} \left[ 2 \frac{S_a}{S_b} \left(\frac{S_a}{S_b} - 1\right) + 1 - \left(\frac{S_a}{S_b}\right)^2 \right]$$

$$\rightarrow h_{fe} = \frac{\bar{v}_a^2}{2g_c} \left( 1 - \frac{S_a}{S_b} \right)^2$$

$$\rightarrow K_e = \left( 1 - \frac{S_a}{S_b} \right)^2, \quad 0.6 \leq K_e \leq 0.9$$

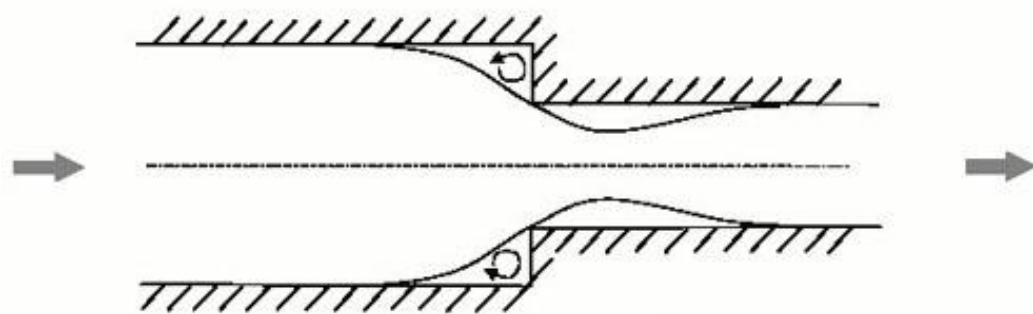
## 2) Sudden Contraction

انقباض ناگهانی



$$h_{fc} = K_c \frac{\bar{v}_b^2}{2g_c}$$

in which  $\frac{\bar{v}_b^2}{2g_c}$



is the head of average velocity in up - stream, and  $K_c = 0.4 \left( 1 - \frac{S_b}{S_a} \right)$

### 3) Fittings

اتصالات

$$h_{ff} = K_f \frac{\bar{v}^2}{2g_c}$$

و سایر آن بستگی دارد.

### Conclusion:

$$h_f = h_{fs} + h_{fe} + h_{fc} + h_{ff}$$

اتصال	$K_f$
Glob valve(wide- open)	10.0
Angle valve(wide-open)	5.0
Gate valve(wide-open)	0.2
Gate valve(half-open)	5.6
Return Bend	2.2
Tee	1.8
Elbow 45	0.4
Elbow 90	0.9

ضریب اصطکاک در کانال های غیر استوانه ای:

$$r_H = \frac{\text{سطح مقطع عبور سیال}}{\text{محیط تر شده توسط سیال}}$$

شعاع هیدرولیکی

*Hydraulic Radius*

$$D_e = 4r_H$$

قطر معادل

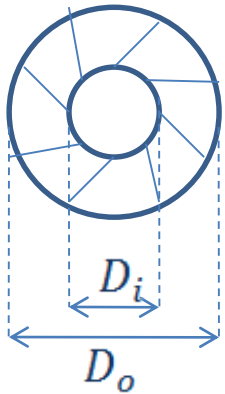
*Equivalent Diameter*

$$N_{Re} = \frac{4\rho\bar{v}r_H}{\mu}$$

## Examples:



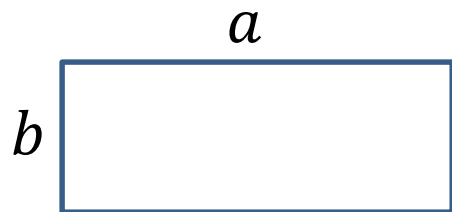
$$r_H = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4} \quad \longrightarrow \quad D_e = a$$



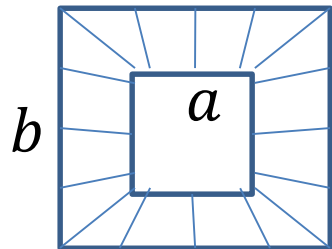
*Like, Shell & Tube Heat Exchangers*

$$r_H = \frac{\frac{\pi}{4} D_o^2 - \frac{\pi}{4} D_i^2}{\pi D_o + \pi D_i} = \frac{\frac{1}{4} (D_o + D_i)(D_o - D_i)}{D_o + D_i} = \frac{D_o - D_i}{4}$$

$$\longrightarrow \quad D_e = D_o - D_i$$



$$r_H = \frac{ab}{2(a+b)} \quad \longrightarrow \quad D_e = \frac{2ab}{a+b}$$



$$r_H = \frac{b^2 - a^2}{4(a+b)} = \frac{b-a}{4}$$

$$\longrightarrow \quad D_e = b - a$$

## Apparent Density & Viscosity

$$\mu = \frac{\bar{\mu}}{\Psi}$$

$$N_{Re} > 2100 \left\{ \begin{array}{l} \Psi = \left(\frac{\bar{\mu}}{\mu_w}\right)^{0.17} \quad \text{For Heating} \\ \Psi = \left(\frac{\bar{\mu}}{\mu_w}\right)^{0.11} \quad \text{For Cooling} \end{array} \right.$$

$$N_{Re} < 2100 \left\{ \begin{array}{l} \Psi = \left(\frac{\bar{\mu}}{\mu_w}\right)^{0.38} \quad \text{For Heating} \\ \Psi = \left(\frac{\bar{\mu}}{\mu_w}\right)^{0.23} \quad \text{For Cooling} \end{array} \right.$$

$\bar{\mu}$ : ویسکوزیته سیال در دمای متوسط آن

$\mu_w$ : ویسکوزیته سیال در دمای دیواره



## انواع مسائل مربوط به حرکت سیالات:

مسئله نوع اول:

مجهول:  $h_{fs}, h_f$

معلوم:  $Q, \epsilon, L, D, \mu, \rho$

$$Q \xrightarrow{D} \bar{v} \longrightarrow N_{Re} \xrightarrow{\frac{\epsilon}{D}} f \longrightarrow h_{fs} \xrightarrow{\text{سیر}} h_f$$

دیاگرام

افت انرژی را برای جریان 2000 gpm روغن در طول 1000 ft از لوله ای چدنی به قطر 8 inch محاسبه کنید.

(gpm: gallon per minute) ویسکوزیته سینماتیک روغن  $0.0001 \frac{ft^2}{s}$  می باشد.

$$Q = 2000 \text{ gpm} \quad , \quad 448 \text{ gpm} = 1 \frac{ft^3}{s} \quad \text{روش حل مسئله:}$$

$$\rightarrow Q = \frac{2000}{448} = 4.46 \frac{ft^3}{s} \quad \rightarrow \quad \bar{v} = \frac{4.46}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{8}{12}\right)^2} = 12.8 \frac{ft}{s}$$

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu} = \frac{\bar{v} D}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{\bar{v} D}{\nu} = \frac{12.8 \times \frac{8}{12}}{0.0001} = 8.55 \times 10^4 \quad \text{and}$$

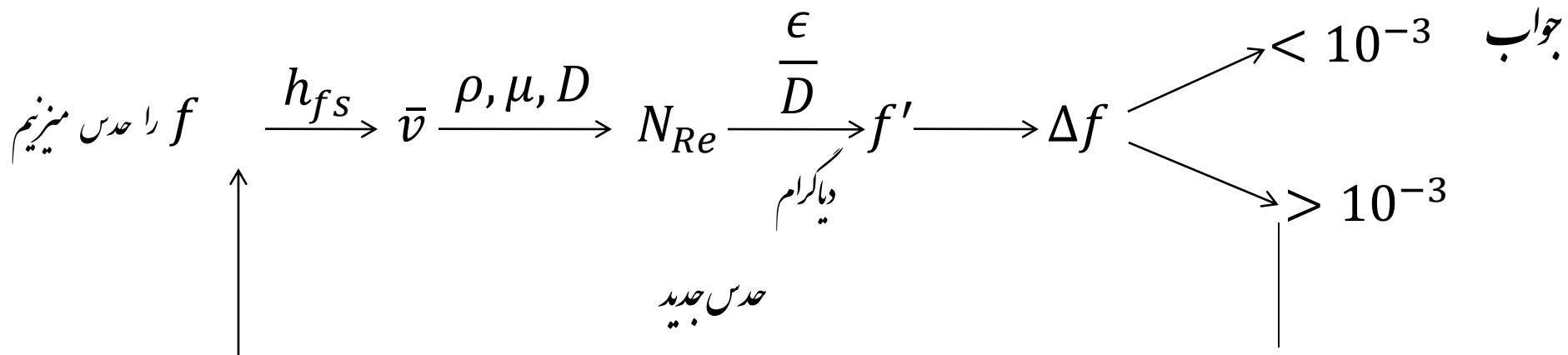
$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.00085}{\frac{8}{12}} = 0.0013 \quad \rightarrow \quad \text{From Moody Diagram} \quad f = 0.006$$

$$\rightarrow h_{fs} = 4 \times 0.006 \times \frac{1000}{\frac{8}{12}} \times \frac{12.8^2}{2 \times 32.2} = 91.8 \frac{ft \cdot lb_f}{lb_m} \quad 210$$

مسئله نوع دوم:

Q : معلوم ہا  $\rho, \mu, D, L, \epsilon, h_{fs}$  or  $h_f$  : مجهول

$$h_{fs} = 4f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g_c}$$



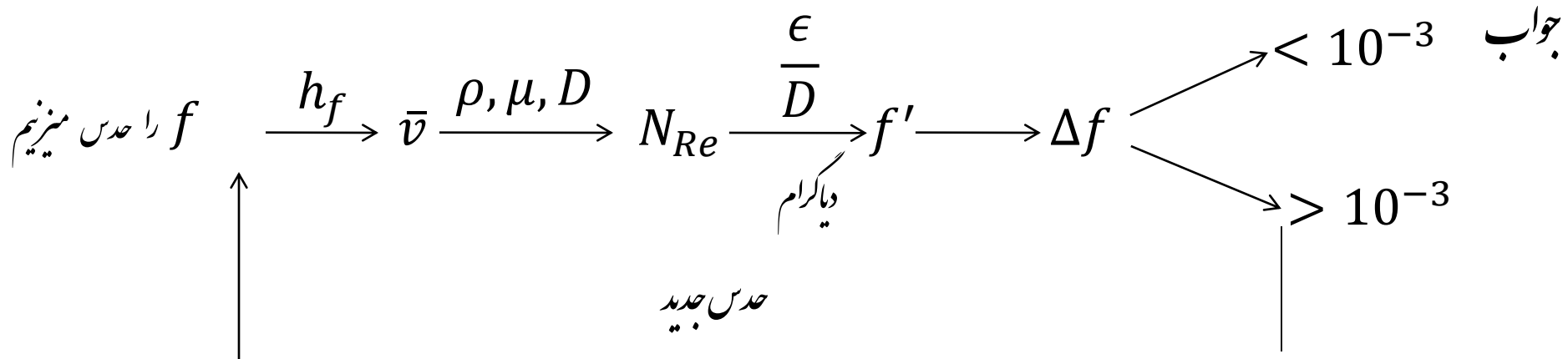
Ψ : معلوم ہا  $\rho, \mu, D, L, \epsilon, h_{fs}$  or  $h_f$  : مجهول

$$h_f = h_{fs} + h_{fe} + h_{fc} + h_{ff}$$

$$\rightarrow h_f = 4f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g_c} + K_e \frac{\bar{v}_1^2}{2g_c} + K_c \frac{\bar{v}_2^2}{2g_c} + K_f \frac{\bar{v}_3^2}{2g_c} =$$

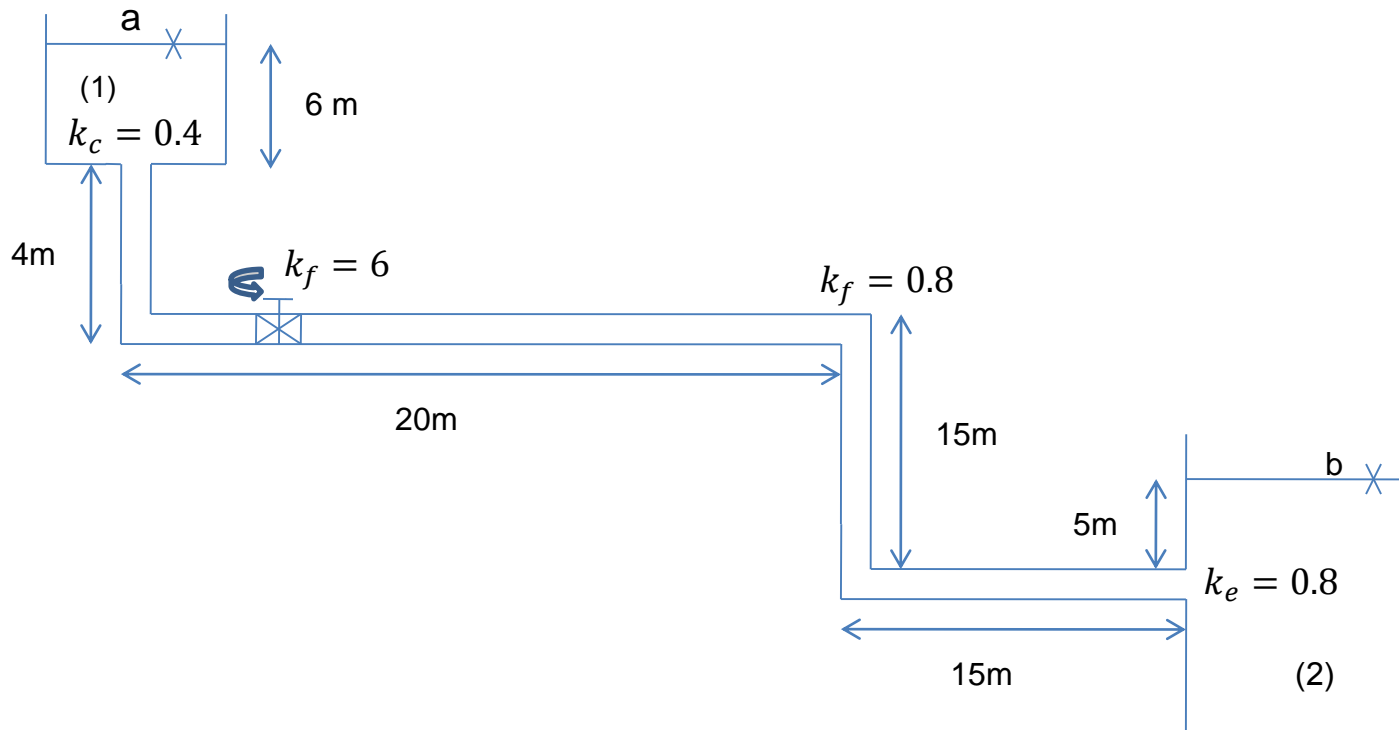
$$\left(4f \frac{L}{D} + K_e' + K_c' + K_f'\right) \frac{\bar{v}^2}{2g_c}$$

و مجدداً مطابق قبل عمل می کنیم



در شکل زیر مقدار جریان آب از مخزن 1 به 2 را محاسبه کنید. زبری لوله با  $0.05 \text{ mm}$  و قطر آنها  $2 \text{ inch}$  می باشد.

$$\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \mu = 1 \text{ cp}, g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



روش حل مسئله : معادله ی برنولی را بین دو مقطع a و b می نویسیم:

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f$$

$$\rightarrow h_f = \frac{g(Z_a - Z_b)}{g_c} = \frac{10(6 + 4 + 15 - 5)}{1} = 200 \frac{J}{kg}$$

$$h_f = \left( 4f \frac{4 + 20 + 15 + 15}{2 \times 0.0254} + 0.8 + 0.4 + 3 \times 0.8 + 6 \right) \frac{\bar{v}^2}{2 \times 1} = 200$$

$$\rightarrow 200 = (4320f + 9.6) \frac{\bar{v}^2}{2 \times 1} = (2160f + 4.8) \bar{v}^2$$

$$f \text{ را } 0.005 \text{ حدس می‌زنیم} \rightarrow \bar{v} = 3.58 \frac{m}{s}$$

$$\rightarrow N_{Re} = 181893 \quad \text{and} \quad \frac{\epsilon}{D} = \frac{0.05 \times 10^{-1} cm}{2 \times 2.54 cm} = 0.001$$

$\rightarrow$  From Moody digram  $f \cong 0.005$

یعنی حدس با دقت خوبی صحیح است. بنابراین دبی حجمی برابر است با:

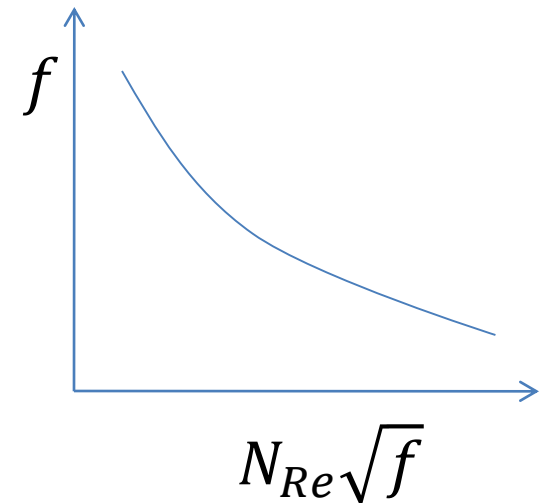
$$Q = \frac{\pi}{4} D^2 \times \bar{v} \rightarrow Q = \frac{\pi}{4} (2 \times 0.0254)^2 \times 3.58 = 7.25 \times 10^{-3} \frac{m^3}{s}$$

$$\rightarrow Q = 26.1 \frac{m^3}{hr}$$

اگر در مسأله ای فقط  $h_{fs}$  معین باشد، می توان آن را از طریق مستقیم و بدون استفاده از روش سعی و خطا حل نمود. این کار با استفاده از دیاگرام ارائه شده در پشت دیاگرام Moody امکان پذیر است.

$$h_{fs} = 4f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g_c} \quad \rightarrow \quad f = \frac{2g_c D h_{fs}}{4L \bar{v}^2}$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{f} = \frac{1}{\bar{v}} \left( \frac{g_c D h_{fs}}{2L} \right)^{\frac{1}{2}}$$



$$\rightarrow \quad N_{Re} \sqrt{f} = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu} \times \frac{1}{\bar{v}} \left( \frac{g_c D h_{fs}}{2L} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\rho D}{\mu} \left( \frac{g_c D h_{fs}}{2L} \right)^{\frac{1}{2}}$$



آب در 60 F در لوله ای با قطر 12 inch و طول 1000 ft در حرکت است. افت انرژی به واسطه اصطکاک

در مسیر 20  $\frac{ft \cdot lb_f}{lb_m}$  می باشد. ویسکوزیته سینماتیک آب  $v = 1.25 \times 10^{-5} \frac{ft^2}{s}$  و زبری لوله  $\epsilon$

$h_{fs} = 20 \frac{ft \cdot lb_f}{lb_m}$  دبی حجمی آب را محاسبه کنید. 0.004 ft می باشد.

$$N_{Re} \sqrt{f} = \frac{\rho D}{\mu} \left( \frac{g_c D h_{fs}}{2L} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{D}{v} \left( \frac{g_c D h_{fs}}{2L} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{روش حل مسئله:}$$

$$\rightarrow N_{Re} \sqrt{f} = \frac{\frac{12}{12}}{1.25 \times 10^{-5}} \left( \frac{32.2 \times \frac{12}{12} \times 20}{2 \times 1000} \right)^{\frac{1}{2}} = 4.47 \times 10^4 \quad \text{and}$$

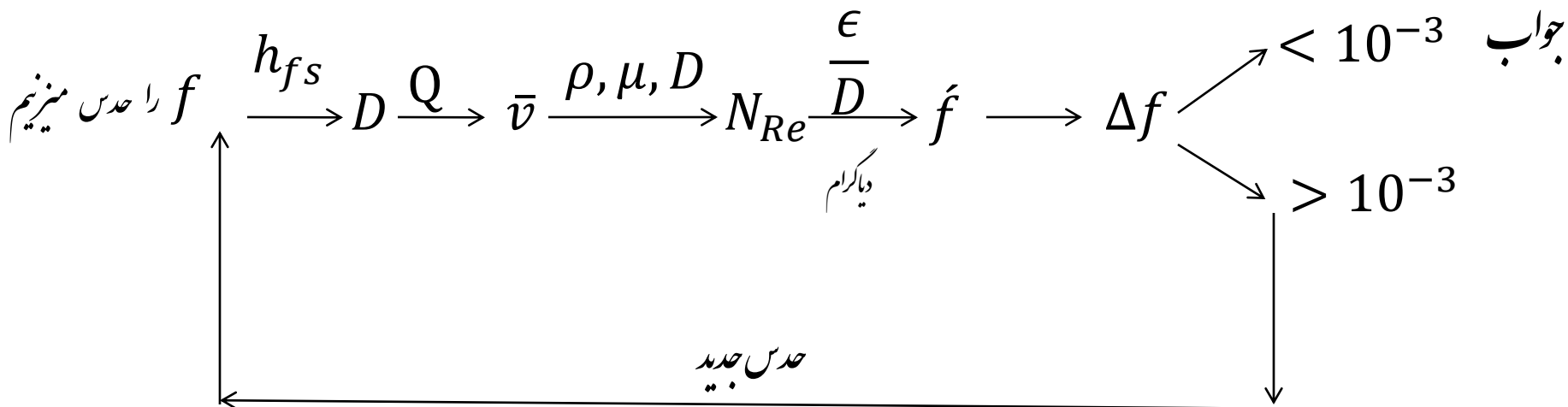
$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.004}{\frac{12}{12}} = 0.004 \quad \rightarrow f \cong 0.007 \quad \rightarrow N_{Re} = \frac{4.47 \times 10^4}{\sqrt{0.007}} = 5.31 \times 10^5$$

$$\rightarrow \bar{v} = \frac{v \times N_{Re}}{D} = \frac{1.25 \times 10^{-5} \times 5.31 \times 10^5}{\frac{12}{12}} = 6.63 \frac{ft}{s}$$

$$\rightarrow Q = \bar{v} \times \frac{\pi}{4} D^2 \quad \rightarrow Q = 6.63 \times \frac{3.14}{4} \left( \frac{12}{12} \right)^2 = 5.21 \frac{ft^3}{s} \quad S_{217}$$

معلوم ها:  $\rho, \mu, \epsilon, Q, L, h_f$  or  $h_{fs}$       مجهول:  $D$

$$h_{fs} = 4f \frac{L \bar{v}^2}{D 2g_c} = 4f \frac{L \frac{Q^2}{S^2}}{D 2g_c} = 4f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{\left(\frac{\pi}{4} D^2\right)^2 \times 2g_c} = \frac{32fLQ^2}{g_c \pi^2 D^5}$$

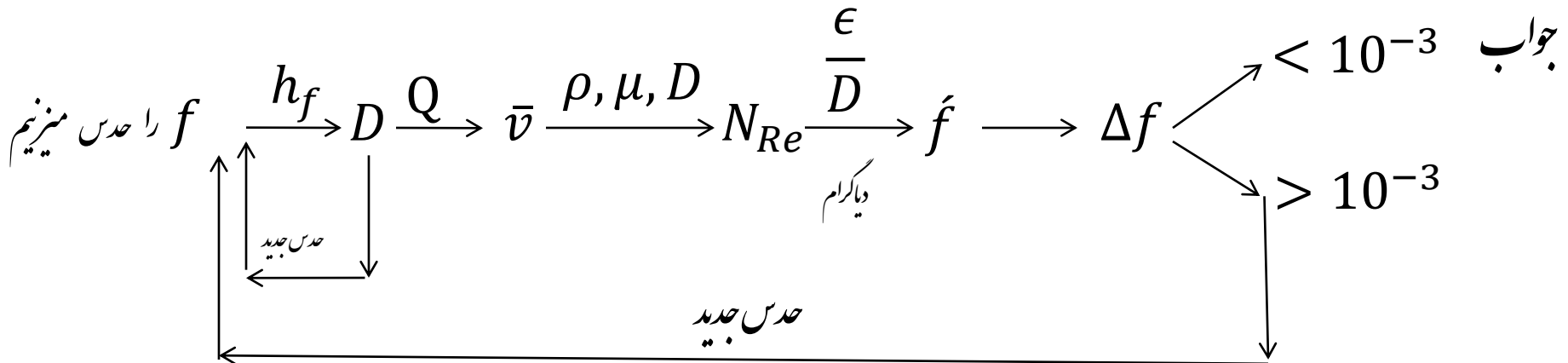


معطوم :  $D$  : مجهول  $\rho, \mu, \epsilon, Q, L, h_f$  or  $h_{fs}$

$$h_f = h_{fs} + h_{fc} + \dots = \frac{32fLQ^2}{g_c\pi^2 D^5} + K_e \frac{Q^2}{D^4} + K_c \frac{Q^2}{D^4} + \dots$$

$$h_f = \frac{32fLQ^2}{g_c\pi^2 D^5} + \frac{AQ^2}{D^4} \longrightarrow h_f = \frac{af}{D^5} + \frac{b}{D^4} \longrightarrow D^5 + cD + d = 0$$

$$h_{fs} = 4f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g_c} = 4f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{S^2} = 4f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{\left(\frac{\pi}{4} D^2\right)^2 \times 2g_c} = \frac{32fLQ^2}{g_c\pi^2 D^5}$$



قطر لوله ای که بتواند 4000 gpm روغن را در طول 10000 ft با افت انرژی  $75 \frac{ft \cdot lb_f}{lb_m}$  حمل کند، حساب کنید. ویسکوزیته سیستامیک روغن

$$v = 0.0001 \frac{ft^2}{s} \text{ وزبری لوله های موجود } 0.004 \text{ ft می باشد.}$$

$$Q = \frac{4000}{448} = 8.93 \frac{ft^3}{s}$$

روش حل مسئله:

$$h_{fs} = \frac{32fLQ^2}{g_c \pi^2 D^5} \rightarrow D^5 = \frac{32fLQ^2}{g_c \pi^2 h_{fs}} = \frac{32f \times 10000 \times 8.93^2}{32.2 \times 3.14^2 \times 75} = 1068f \quad (1)$$

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu} = \frac{\frac{\pi D}{4} (\rho \bar{v} D)}{\frac{\pi D}{4} (\mu)} = \frac{4\rho Q}{\pi D \mu} = \frac{4\dot{m}}{\pi D \mu} = \frac{4Q}{\pi D v}$$

$$\rightarrow N_{Re} = \frac{4 \times 8.93}{3.14 \times D \times 0.0001} = \frac{113800}{D} \quad (2)$$

$$f = 0.005 \xrightarrow{(1)} D = 1.398 \text{ ft} \xrightarrow{(2)} N_{Re} = 8.14 \times 10^4 \text{ and } \frac{\epsilon}{D} = 0.0029$$

→ From Moody Diagram  $f = 0.008$

حدس جدید  $f = 0.008 \xrightarrow{(1)} D = 1.535 \text{ ft} \xrightarrow{(2)} N_{Re} = 7.41 \times 10^4 \text{ and } \frac{\epsilon}{D} = 0.0026$

→ From Moody Diagram  $f = 0.007$

→ لذا حدس خوب است و در نتیجه  $D \approx 1.5 \text{ ft}$

طول معادل یک اتصال: طول لوله ای است که افت انرژی اش به واسطه

اصطکاک برابر با افت انرژی اتصال است.

*Equivalent Length  $L_e$*

$$K \frac{\bar{v}^2}{2g_c} = 4f \frac{L_e}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g_c} \quad \rightarrow \quad L_e = \frac{KD}{4f}$$

## Chapter 8

وسایلی که سیالات را به جریان می اندازند و وسایلی که مقدار جریان سیالات را اندازه گیری می کنند.

a) Compressible Fluids

وسایلی که سیالات را به جریان می اندازند:

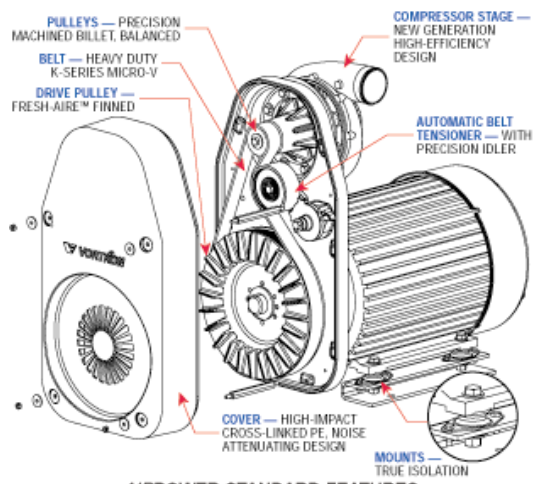
1) *compressors*

$$w_{pr} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_a}{\rho_a} \left[ \left( \frac{P_b}{P_a} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right] \quad \text{Adiabatic Compressors}$$

$$\frac{P_b}{P_a} \quad \text{Compression Ratio}$$

$$w_{pr} = \frac{RT_0}{M} \ln \frac{P_b}{P_a} \quad \text{Isotherm Compressors}$$

# Compressors





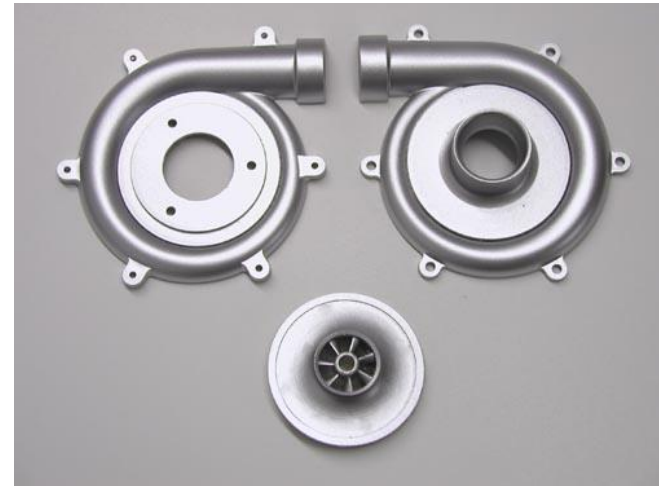
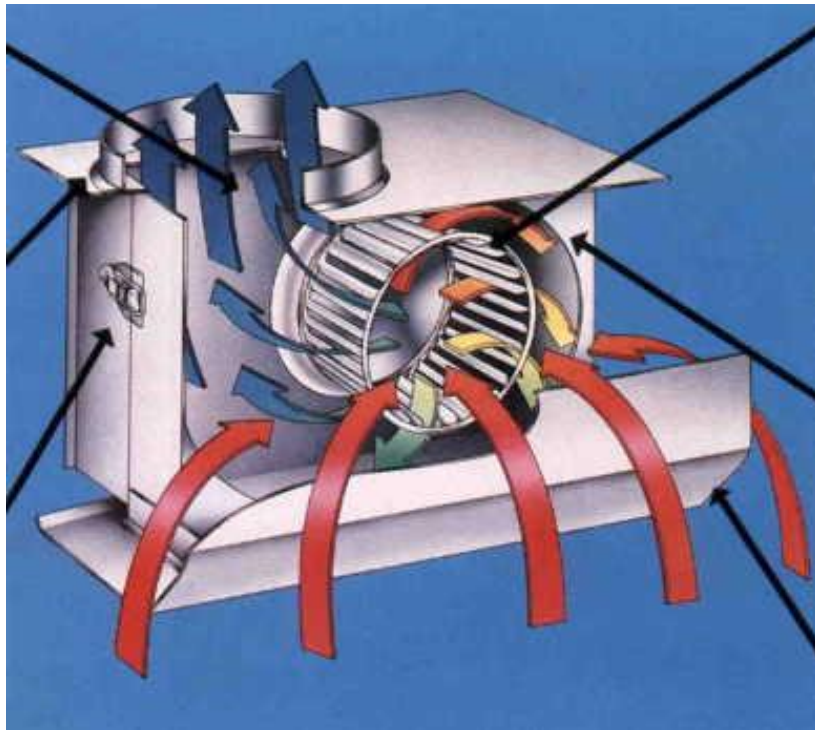
## 2) Fan

ہواکش



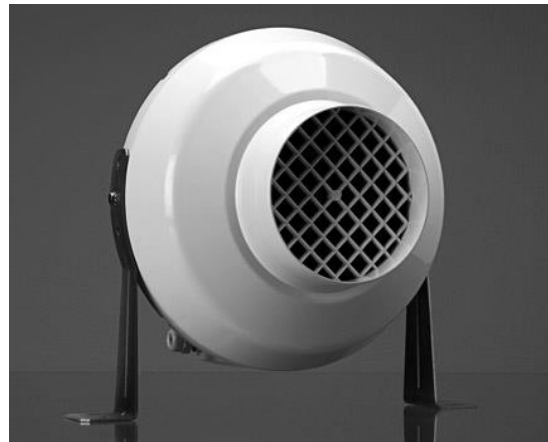
### 3) Blower

دمنده



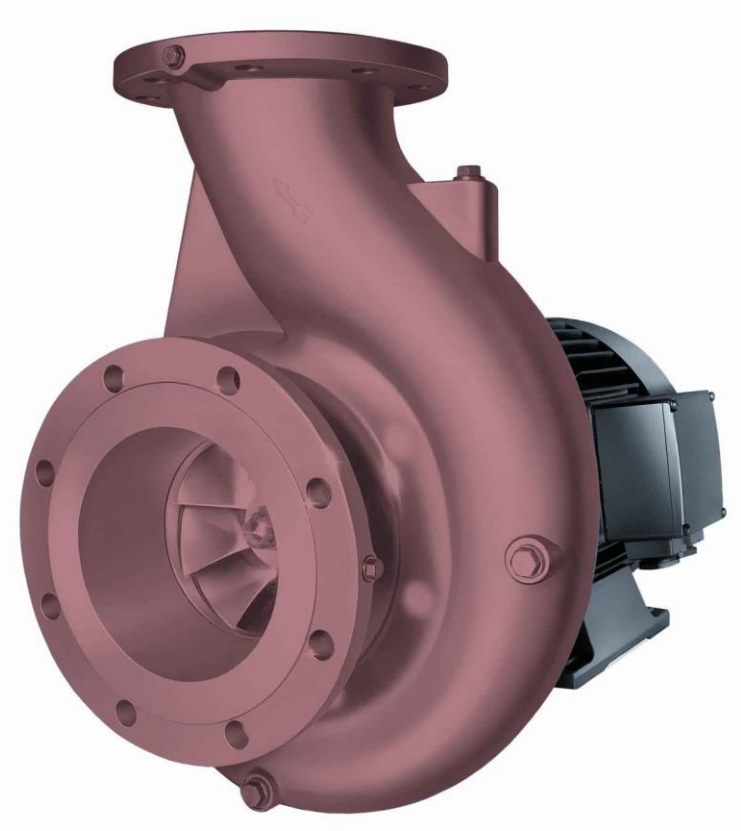
## 4) Ventilator

تخلیه کننده

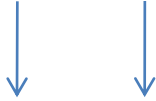


## *b) Incompressible Fluids*

### *Pumps*



# *Pumps*



اجزاء

- 1. *Suction*
- 2. *Discharge*

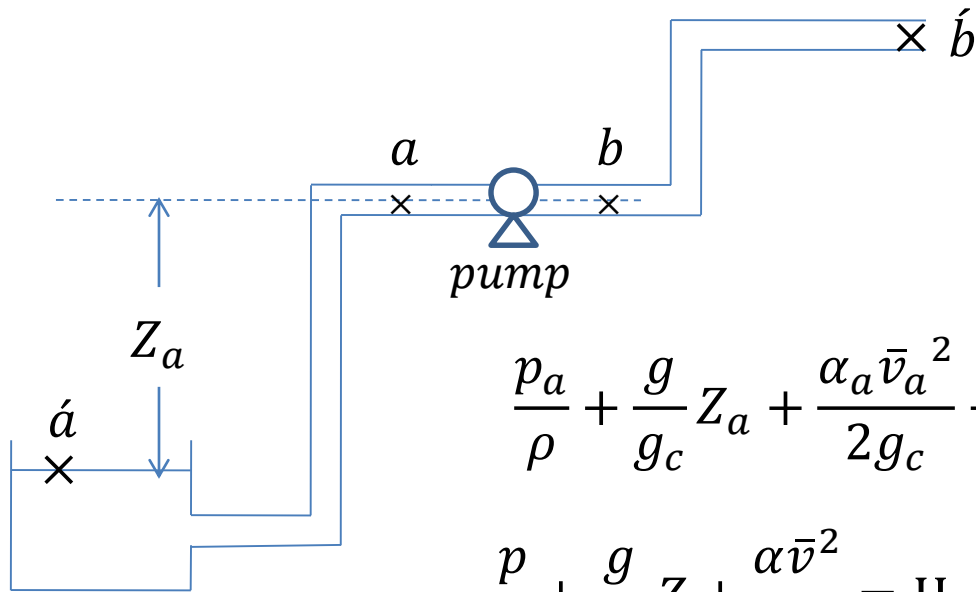
قسمت مکش

قسمت فشار

- pumps*
- Positive Displacement*
  - Centrifugal*

- Positive Displacement*
- Reciprocal*
    - Single Action*
    - Double Action*
  - Rotary*

## Pumps Power Calculation



$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} + \eta w_p = \frac{p_b}{\rho} + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c} Z_b + h_f$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z + \frac{\alpha \bar{v}^2}{2g_c} = H$$

Total Head

$$\rightarrow H_a + \eta w_p = H_b$$

$$\rightarrow w_p = \frac{H_b - H_a}{\eta} = \frac{\Delta H}{\eta}$$

$$\rightarrow \text{Power} = \frac{\dot{m} \Delta H}{550 \eta} \text{ (FPS)} \quad \text{or} \quad \frac{\dot{m} \Delta H}{746 \eta} \text{ (SI)} \quad \text{horse power}$$

# Cavitation

پدیده خفزه ای شدن

اگر در مسیر حرکت سیال به هر دو لیلی فشار سیال به زیر فشار بخار آن تنزل یابد سیال تجزیر شده و به نگاهی که این بخار به نواحی با فشار بالاتر انتقال یابد حباب های بخار ترکیده و کاهش حجم ایجاد شده سبب وارد آوردن ضربه به دیواره مجرای پمپ خواهد شد. بنابراین بایستی از بروز چنین پدیده ای جلوگیری نمود.

شرط مانع از پدیده خفزه ای شدن (Cavitation)

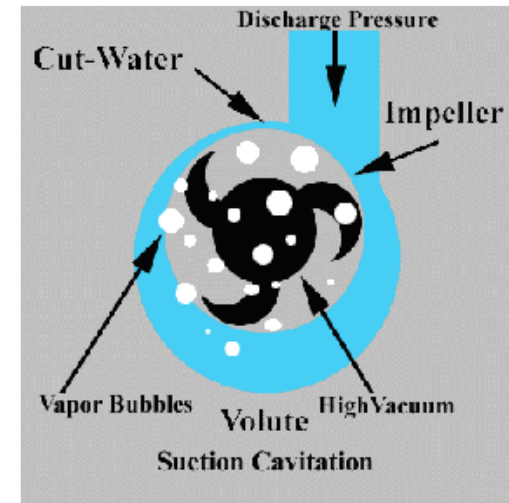
$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} > \frac{p_v}{\rho} \quad \text{or} \quad \frac{p_a - p_v}{\rho} + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} > 0$$

$$\rightarrow \frac{p_a - p_v}{\rho} + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} = H_{sv} \quad \text{or} \quad NPSH > 0$$

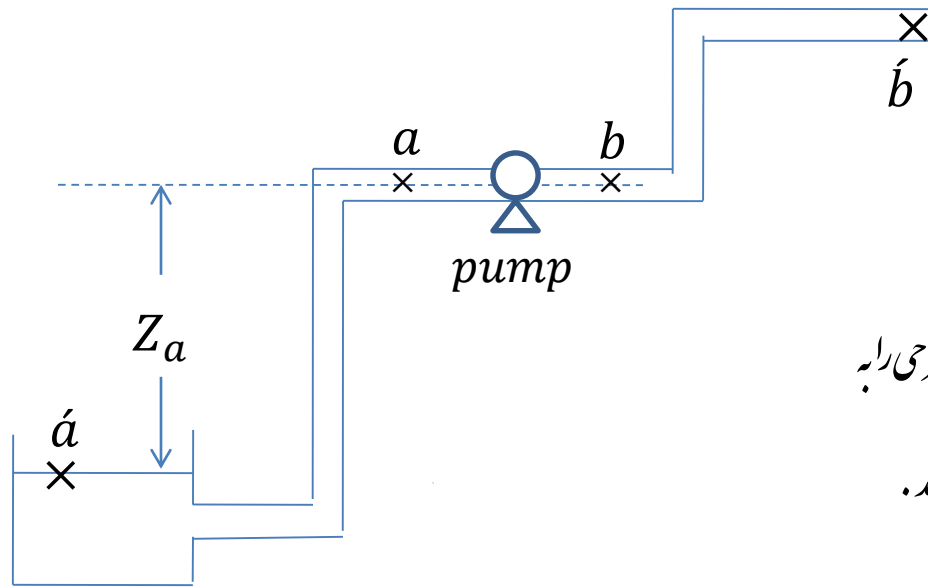
*NPSH : Net Positive Suction Head*

*p<sub>v</sub> : Vapor Pressure of Fluid at its' Temperature*

**Low Pressure/High Vacuum**







معمولاً به‌نحی که نصب پمپ با توجه به مقدار  $NPSH$  را مثبت در نظر می‌گیرند، بلکه طراحی را به گونه‌ای انجام می‌دهند که مقدار آن از حد معینی ( $NPSH_{req}$ ) کمتر نباشد. حال می‌توان محل نصب پمپ را با توجه به مطالب گفته شده توسط روابط زیر تعیین نمود.

$NPSH_{req}$  (Required NPSH)  $\left\{ \begin{array}{l} 5 - 10 \text{ ft} : \text{ Small centrifugal pumps} \\ 50 \text{ ft} : \text{ Large centrifugal pumps} \end{array} \right.$

$$\frac{p_{\acute{a}}}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_{\acute{a}} + \frac{\alpha_{\acute{a}} \bar{v}_{\acute{a}}^2}{2g_c} = \frac{p_a}{\rho} + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c} Z_a + h_f \rightarrow \frac{p_{\acute{a}}}{\rho} = \frac{p_a}{\rho} + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c} Z_a + h_f$$

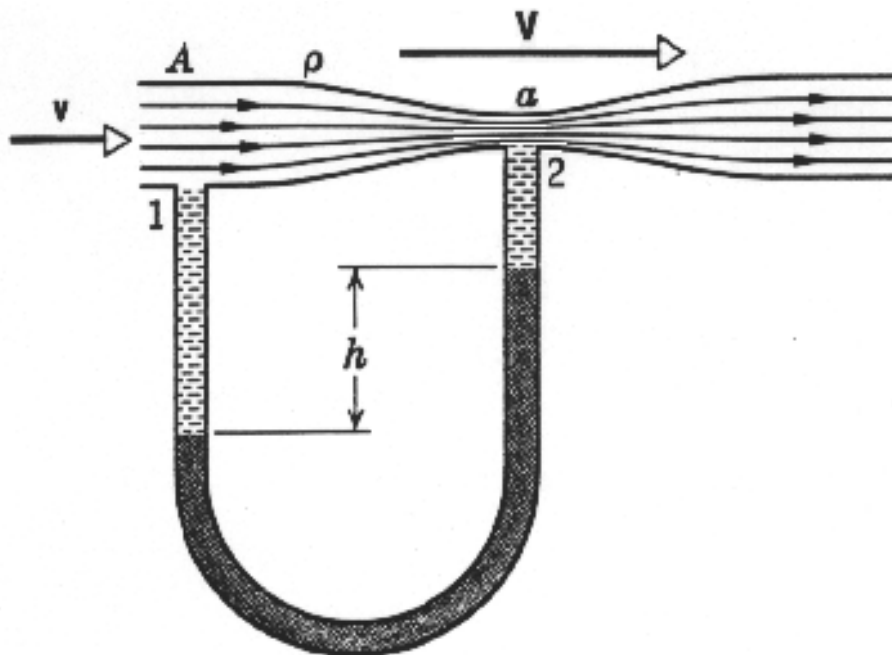
$$\rightarrow \frac{p_{\acute{a}} - p_v}{\rho} = \frac{p_a - p_v}{\rho} + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c} Z_a + h_f \rightarrow \frac{p_{\acute{a}} - p_v}{\rho} = NPSH + \frac{g}{g_c} Z_a + h_f$$

$$\rightarrow NPSH = \frac{p_{\acute{a}} - p_v}{\rho} - \frac{g}{g_c} Z_a - h_f \left( \frac{J}{kg} \right) \text{ or } NPSH = \frac{g_c}{g} \left( \frac{p_{\acute{a}} - p_v}{\rho} - h_f \right) - Z_a \text{ (m)}$$



وسایلی که مقدار جریان سیال را اندازه گیری می کنند:

1) *Venturi – meter*



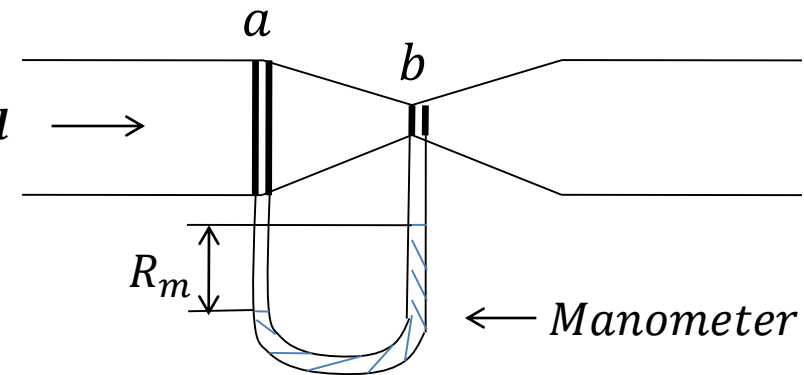
## Venturi – meter

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_b + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f$$

$$\rightarrow \frac{p_a - p_b}{\rho} = \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2 - \alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c}$$

$$\bar{v}_a = \bar{v}_b \left( \frac{S_b}{S_a} \right) = \bar{v}_b \left( \frac{D_b}{D_a} \right)^2 = \beta^2 \bar{v}_b$$

$$\rightarrow \bar{v}_b = \frac{1}{\sqrt{\alpha_b - \alpha_a \beta^4}} \sqrt{\frac{2g_c(p_a - p_b)}{\rho}}$$



$$\text{if } \alpha_a = \alpha_b \approx 1.0 \quad \longrightarrow \quad \bar{v}_b = \frac{c_v}{\sqrt{1 - \beta^4}} \sqrt{\frac{2g_c(p_a - p_b)}{\rho}}$$

$c_v$  : venturi coefficient    0.98 – 0.99    (Experimentally Measured)

$$D : 2 - 8 \text{ inch} \quad c_v = 0.98$$

$$D > 8 \text{ inch} \quad c_v = 0.99$$

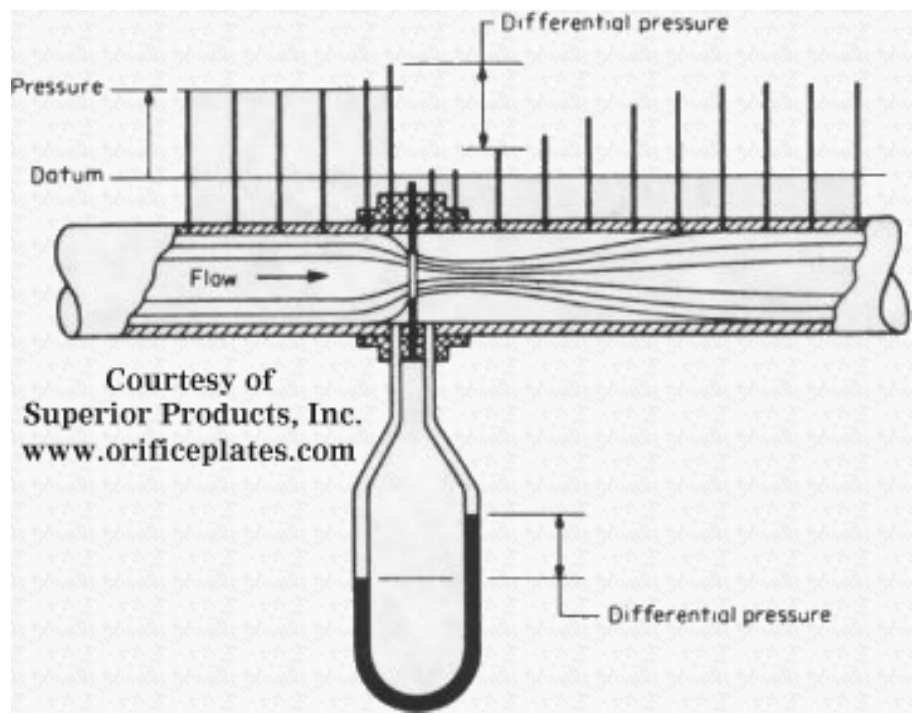
$$\dot{m} = \frac{c_v S_b}{\sqrt{1 - \beta^4}} \sqrt{2\rho g_c(p_a - p_b)}$$

سیالات تراکم نپذیر

$$\dot{m} = \frac{c_v S_b Y}{\sqrt{1 - \beta^4}} \sqrt{2\rho g_c(p_a - p_b)}$$

سیالات تراکم پذیر

## 2) Orifice

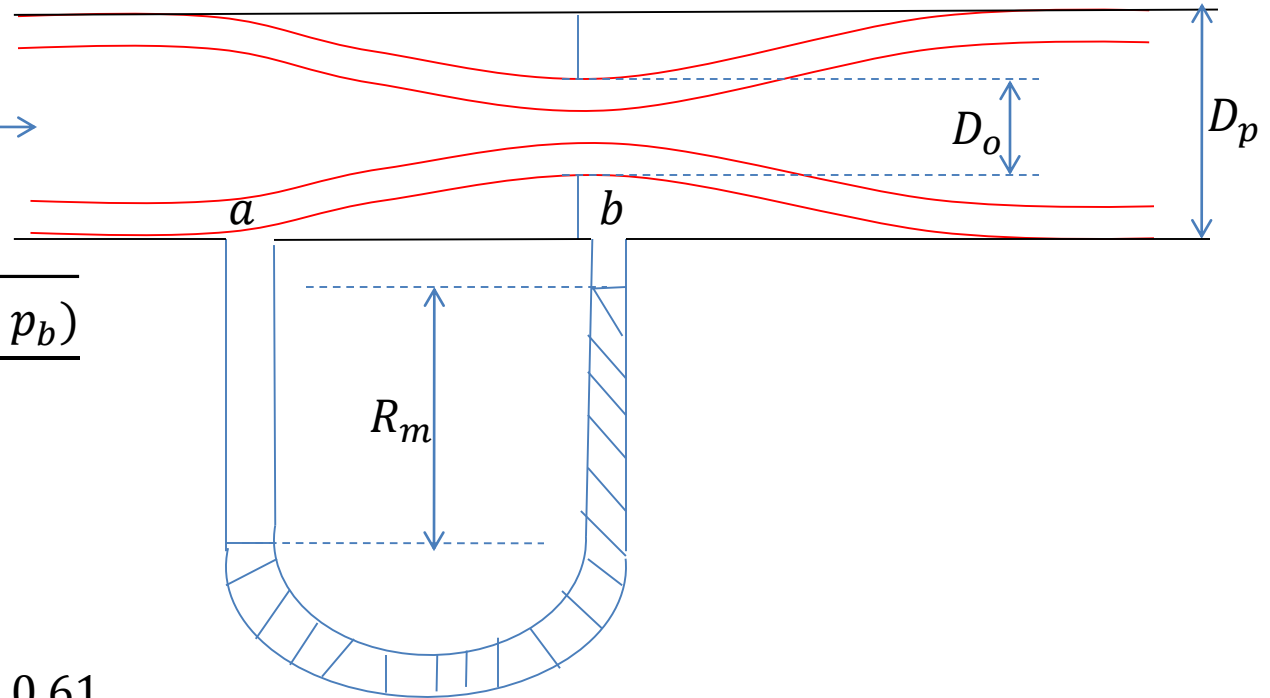


# Orifice

$$\beta = \frac{D_o}{D_p}$$

$$N_{Re,o} = \frac{\rho u_o D_o}{\mu}$$

Fluid  $\longrightarrow$



$$u_o = \frac{c_o}{\sqrt{1 - \beta^4}} \sqrt{\frac{2g_c(p_a - p_b)}{\rho}}$$

$$c_o = c_o(N_{Re,o}, \beta)$$

if  $N_{Re,o} > 20000$   $c_o \approx 0.61$



$$u_o = \frac{0.61}{\sqrt{1 - \beta^4}} \sqrt{\frac{2g_c(p_a - p_b)}{\rho}}$$

$$\dot{m} = \frac{c_o S_o}{\sqrt{1 - \beta^4}} \sqrt{2\rho g_c (P_a - P_b)}$$

سیال تراکم ناپذیر

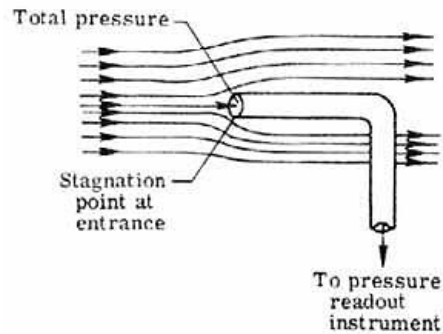
$$\dot{m} = \frac{c_o S_o Y}{\sqrt{1 - \beta^4}} \sqrt{2\rho g_c (P_a - P_b)}$$

سیال تراکم پذیر

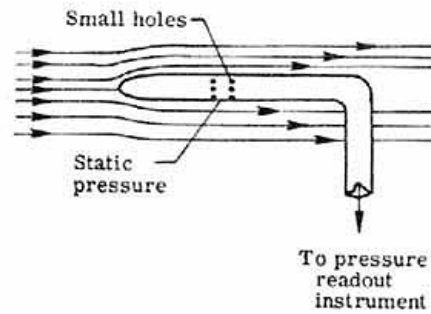
$$Y = \left(\frac{P_b}{P_a}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left[ \frac{\gamma(1 - \beta^4) \left[ 1 - \left(\frac{P_b}{P_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}{(\gamma - 1) \left( 1 - \frac{P_b}{P_a} \right) \left[ 1 - \beta^4 \left(\frac{P_b}{P_a}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \right]} \right]^{\frac{1}{2}}$$

ضریب انبساط حجمی

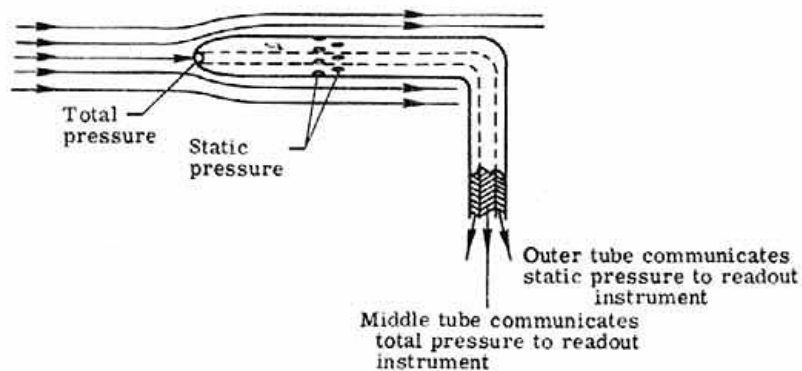
### 3) Pitot – Tube



(a) Pitot tube.



(b) Static tube.



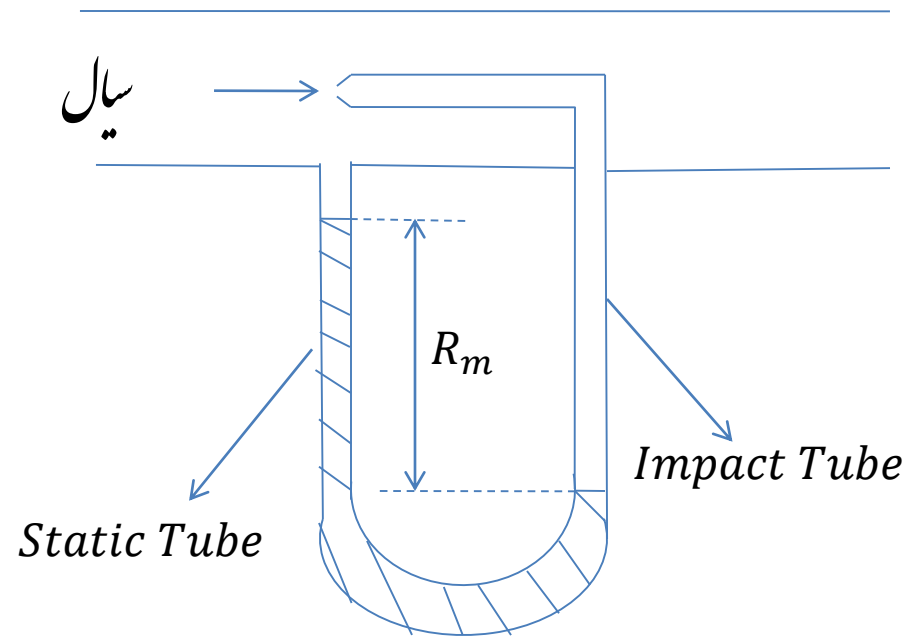
(c) Pitot-static tube.

### 3) Pitot – Tube

$$u = c \sqrt{\frac{2g_c(p_s - p_0)}{\rho}}$$

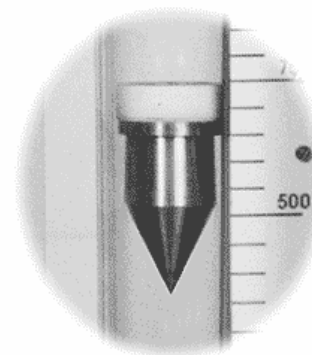
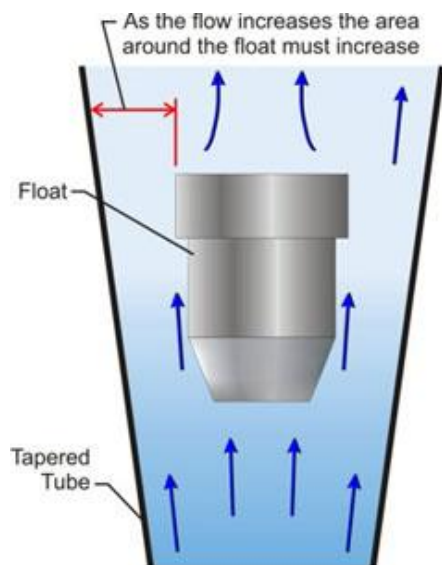
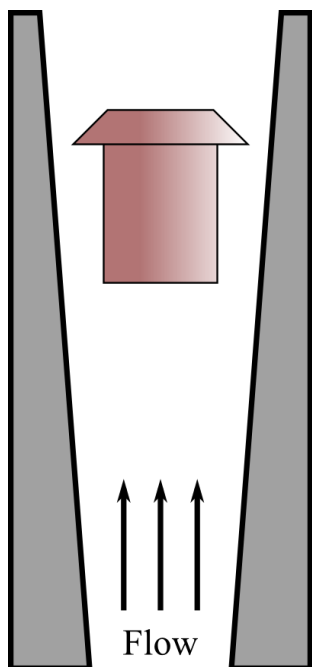
$p_s$  : Stagnation pressure

$p_0$  : Static pressure





## 4) Rotameter (Area – meter)



در فرایندهای صنعتی داشتن اطلاعات دقیق از روابط بین متغیرهای فرایندی تواند کمک شایانی در دستیابی به موارد زیر داشته باشد:

الف - طراحی فرایندهای جدید (افزایش یا کاهش مقیاس)،

ب- پیش بینی عملکرد یک فرایند در حال کار موجود،

ج - بدست آوردن بعضی از پارامترهای مجهول فرایند بر اساس عملکرد فرایند.

معمولاً جهت سهولت سعی می‌شود ارتباط بین متغیرهای فرایند را به صورت ساده و در قالب

ارتباط بین گروه‌های بدون که از ترکیب متغیرهای اصلی فرایند تشکیل شده اند بیان نمایند. این

گروه‌های بدون بعد دارای مفاهیم فیزیکی خاص که وابسته به نوع و طبیعت فرایند است، می‌باشند. در

مقوله آنالیز ابعادی تعداد و تعریف این گروه‌های بدون بعد تعیین می‌شوند. ارتباط بین این

گروه‌ها توسط آزمایش تعیین خواهد شد.

## Buckingham Theory of $\pi$ Terms

اگر مسئله ای  $n$  کمیت که دارای  $m$  بعد (مشترک یا مستقل) هستند داشته باشیم  $(n-m)$  پارامتر بدون بعد مستقل وجود خواهد داشت که این کمیت ها در آن نامرتب شده اند (حاصل ضرب این پارامترهای مستقل بدون بعد ارتباط بین  $n$  کمیت اولیه را بیان می نماید).

اگر  $A_1, A_2, \dots, A_n$  کمیت هایی باشند که در مسئله وجود دارند (مثل فشار، سرعت، ویسکوزیته و...) در این صورت تابعی مانند  $F$  وجود خواهد داشت که در آن  $F(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0$  است. ضمناً اگر  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$  گروه های بدون بعد مستقلی را که ترکیبی از  $A_2, \dots, A_n$  باشند، تعریف نمایند و  $m$  بعد مسئله وجود داشته باشد رابطه دیگری نیز به صورت  $f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0$  نیز وجود خواهد داشت.

نحوه تعیین گروه های بدون بعد به این صورت است که  $m$  عدد از کمیت های اولیه را که دارای بعد های متفاوت هستند انتخاب نموده و آن ها را با یکی دیگر از کمیت ها که در گروه انتخاب شده مشارکت ندارد ادغام می نمایم و بدین ترتیب هر گروه بدون بعد تعریف می شود. به عنوان مثال اگر سه بعد  $M, L, T$  در مسئله ای وجود داشته باشد در این صورت گروه های بدون بعد با انتخاب  $A_1, A_2, A_3$  عبارت اند از:

$$\pi_1 = A_1^{x_1} A_2^{y_1} A_3^{z_1} A_4$$

$$\pi_2 = A_1^{x_2} A_2^{y_2} A_3^{z_2} A_5$$

⋮

$$\pi_{n-m} = A_1^{x_{n-m}} A_2^{y_{n-m}} A_3^{z_{n-m}} A_n$$

... پس اعداد A را در رابطه ها جایگزین نموده و سمت دیگر را مساوی با کمیتی که در آن توان های M, L, T برابر با صفر است قرار می دهیم. در نتیجه برای هر گروه بدون بعد سه معادله سه مجهول بدست می آید که قابل حل است. پس از حل معادلات توان های کمیت های گروه بدون بعد مشخص می شود.

اگر در مسئله ای فقط دو بعد موجود باشد در این صورت دو کمیت به عنوان کمیت های تکراری انتخاب شده و با هر یک از کمیات دیگر جهت تعریف گروه بدون بعد تلفیق می شوند و برای هر گروه بدون بعد دو معادله و دو مجهول وجود خواهد داشت.

- اگر در حالتی دو کمیت A دارای بعد مشترک باشند یکی از گروه های بدون بعد نسبت آن دو کمیت خواهد بود. البته انتخاب کمیت های تکراری A نیاز به تجربه و شناخت خوب از مسئله دارد.
- اگر یکی از کمیت ها خودش بی بعد باشد یکی از گروه های بدون بعد همان کمیت است.

**سوال:** جریان حجمی خروجی از یک لوله سی افقی موئین به افت فشار به ازای واحد طول لوله به قطر لوله و ویسکوزیته سیال بستگی دارد. فرم رابطه ای که این متغیرها را به یکدیگر مرتبط می نماید بدست آورید.

<i>Quantity</i>	<i>Symbol</i>	<i>dimension</i>
<i>Discharge</i>	$Q$	$L^3 T^{-1}$
$\frac{\text{Pressure Drop}}{\text{length}}$	$\frac{\Delta P}{L}$	$ML^{-2}T^{-2}$
<i>Diameter</i>	$D$	$L$
<i>Viscosity</i>	$\mu$	$ML^{-1}T^{-1}$



$$n = 4, m = 3 \rightarrow n - m = 1$$

$$\pi_1 = Q^{x_1} \left( \frac{\Delta P}{L} \right)^{y_1} D^{z_1} \mu$$

$$\pi_1 = (L^3 T^{-1})^{x_1} (M L^{-2} T^{-2})^{y_1} L^{z_1} M L^{-1} T^{-1} = M^0 L^0 T^0$$

$$(For L) : 3x_1 - 2y_1 + z_1 - 1 = 0 \quad , \quad (For M) : y_1 + 1 = 0 \quad \&$$

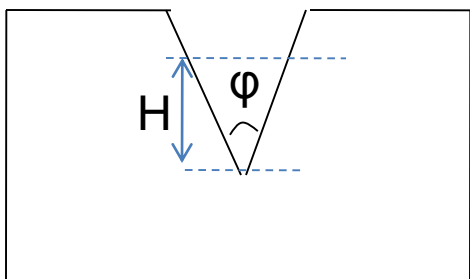
$$(For T) : -x_1 - 2y_1 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad y_1 = -1 \quad , \quad x_1 = 1 \quad , \quad z_1 = -4$$

$$\rightarrow \pi_1 = Q \left( \frac{\Delta P}{L} \right)^{-1} D^{-4} \mu \rightarrow \pi_1 = \frac{Q \mu}{\frac{\Delta P}{L} D^4} \quad \& \quad F \left( Q, \frac{\Delta P}{L}, D, \mu \right) = 0$$

$$Or \quad f \left( \frac{Q \mu}{\frac{\Delta P}{L} D^4} \right) = 0 \rightarrow \pi_1 = \frac{Q \mu}{\frac{\Delta P}{L} D^4} = C_1 \rightarrow Q = C_1 \left( \frac{\frac{\Delta P}{L} D^4}{\mu} \right)$$

**سوال:** یک سرریز  $V$  شکل که زاویه رأس آن  $\varphi$  می باشد بر سر راه یک سیال در یک کانال باز قرار گرفته است، مشخص شده است که  $Q$  دبی حجمی سیال لذنده از سرریز با  $H$  ارتفاع سیال پشت سرریز،  $g$  شتاب ثقل،  $V_0$  سرعت سیال ورودی به پشت سرریز، و زاویه رأس سرریز مرتبط است. معادله این ارتباط را بیابید.

روش حل مسئله



Quantity	$Q$	$H$	$g$	$V_0$	$\varphi$
Dimension	$L^3T^{-1}$	$L$	$LT^{-2}$	$LT^{-1}$	—

$$n = 5, m = 2 \rightarrow n - m = 3$$

با انتخاب  $H$  و  $g$  به عنوان متغیرهای تکراری:

$$\pi_1 = H^{x_1} g^{y_1} Q \rightarrow \pi_1 = L^{x_1} (LT^{-2})^{y_1} L^3T^{-1} = L^0T^0$$

$$\pi_2 = H^{x_2} g^{y_2} V_0 \rightarrow \pi_2 = L^{x_2} (LT^{-2})^{y_2} LT^{-1} = L^0T^0$$

$$\pi_3 = \varphi$$

$$\pi_1 \begin{cases} (\text{For } L) : x_1 + y_1 + 3 = 0 \\ (\text{For } T) : -2y_1 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow x_1 = -\frac{5}{2} \text{ and } y_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\pi_2 \begin{cases} (\text{For } L) : x_2 + y_2 + 1 = 0 \\ (\text{For } T) : -2y_2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} \text{ and } y_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\pi_1 = H^{-\frac{5}{2}} g^{-\frac{1}{2}} Q = \frac{Q}{\sqrt{g} H^{\frac{5}{2}}}, \quad \pi_2 = H^{-\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}} V_0 = \frac{V_0}{\sqrt{g} H} \quad \& \quad \pi_3 = \varphi$$

$$\rightarrow f\left(\frac{Q}{\sqrt{g} H^{\frac{5}{2}}}, \frac{V_0}{\sqrt{g} H}, \varphi\right) = 0 \quad \text{Or} \quad \frac{Q}{\sqrt{g} H^{\frac{5}{2}}} = f_1\left(\frac{V_0}{\sqrt{g} H}, \varphi\right)$$

$$\rightarrow Q = \sqrt{g} H^{\frac{5}{2}} f_1\left(\frac{V_0}{\sqrt{g} H}, \varphi\right) \quad \text{and also}$$

با انتخاب  $H$  و  $V_0$  به عنوان متغیرهای تکراری:

$$\rightarrow Q = V_0 H^2 f_2\left(\frac{V_0}{\sqrt{g} H}, \varphi\right)_{251}$$